UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS: Um estudo sobre os números e operações para as séries iniciais do ensino fundamental

Anderson Souza Neves

Orientador: Luiz Márcio Santos Farias

ANDERSON SOUZA NEVES

LUIZ MÁRCIO SANTOS FARIAS

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Um estudo sobre os números e operações para as séries iniciais do ensino fundamental

Salvador, Ba

2019

Este trabalho foi produzido no domínio do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia, na disciplina denominada Teoria Antropológica do Didático, Matemática e Interculturalidade, Etnomatemática e Multiculturalidade.

Sumário

APRESENTAÇÃO

Os produtos educacionais que serão apresentados nesse trabalho têm a finalidade de promover a articulação entre os saberes sobre Aritmética para as séries iniciais do ensino fundamental. Esses saberes são trabalhados nas licenciaturas de Pedagogia e Matemática e são essenciais para a construção matemática nas crianças.

A importância do estudo da Aritmética, no eixo temático, sobre Números e Operações disponibilizado pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) está presente em muitos referenciais curriculares dessas licenciaturas já que é fundamental o entendimento e conceito de números, elemento fundamental da Matemática. Nesse sentido, a necessidade de abordagens utilizando elementos históricos e epistemológicos tornam a didática do ensino da matemática sólida e com profunda da fundamentação teóricas de conceitos matemáticos e desenvolvimento de seus métodos de ensino. O objetivo deste trabalho é fornecer aos professores dos cursos de graduação e aos estudantes, licenciandos de Pedagogia e Matemática, uma ferramenta que possa favorecer a construção do conhecimento matemático através da articulação da história dos algarismo, numerais e números, a construção dos sistemas de numeração, o sistema de numeração decimal (SND), as operações aditivas (adição e subtração) e multiplicativas (multiplicação e divisão) observando os princípios posicionais e decimais[1] do SND por ideias intuitivas, visualizações e manipulações, quando possível, do ábaco e material dourado, que mobilizem conhecimentos já adquiridos e que possuem uma fundamentação teórica rigorosa e exigem manipulações para a resolução das tarefas propostas.

A ferramenta aqui desenvolvida compõe-se de quatro sequências didáticas, que dividem o ensino dos conteúdos de Aritmética em várias etapas de modo que cada etapa foi desenvolvida para facilitar a construção de conceitos dos números e sistemas de numeração. As descrições de cada etapa e as conexões entre cada fase podem ser visualizadas nas aulas designadas de aula 1, 2 3 e 4.

Essa articulação será desenvolvida pela lente da Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard (1999) e pelo T4TEL, proposto Hamid Chaachoua e Annie Bessot (2012), que é um aporte teórico da TAD. Entendemos que as abordagens dessas teorias são essenciais, pois vamos nos apoiar nos trabalhos desenvolvidos por tarefas e métodos ou formas de resolução dessas tarefas.

---

[1] Parte desse trabalho está nos manuscrito da dissertação que está sendo elaborada no Programa de pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, sob a orientação do Professor Luiza Márcio Santos Farias.

• **Público-Alvo**:

Estudantes das séries iniciais do ensino fundamental, estudantes de licenciatura em Pedagogia ou Matemática ou qualquer pessoa que esteja estudando esses conceitos.

• **Tempo Estimado**:

Todas as seções foram elaboradas para terem a duração de duas aulas de 50 minutos cada.

• **Local**:

Sala de aula com uso de projetores de imagem (data-show) ou, mais recomendado, sala de aulas com mesas quadradas para 2estudantes e mesas redondas para 4 estudantes.

• **Material utilizado**:

Aplicativos para projetores de imagem, acesso à internet, quadro branco, marcador para quadro branco, livros didáticos e sobre história da matemática para pesquisa e folhas impressas com as tarefas propostas.

• **Organização da turma**:

A proposta anunciada é para o desenvolvimento de atividades individuais, em dupla, e em grupos de quatro estudantes uma vez que há momentos de concentração, de interação e de contribuições coletivas para elaboração de estratégias de resolução de tarefas.

Aula 1 – Sequência de história dos algarismos, numerais e números.

• **Conteúdo**:

A construção histórica dos algarismos, numerais e números.

• **Objetivo Geral**:

Compreender o surgimento dos números e seu desenvolvimento ao longo dos anos.

• **Objetivos específicos**:

a) Compreender as primeiras representações sobre contagem;

b) Compreender a ideia de correspondência biunívoca;

c) A função do corpo humano para o avanço sobre a contagem;

d) As particularidades dos algarismos, números e numerais.

Desenvolvimento

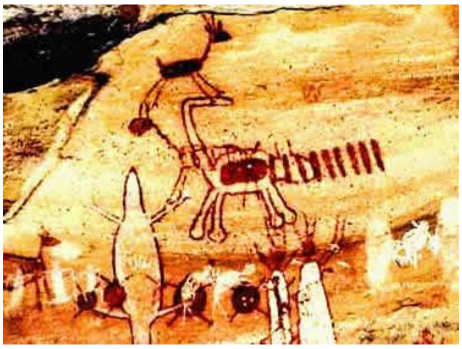
1ª etapa: Inicie a aula discutindo sobre a importâncias dos números na vida dos estudantes. Pode fazer o seguinte questionamento:

(a) Quais exemplos podemos citar da importância dos números na vida cotidiana das pessoas?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante a importância dos números na vida das pessoas como a idade, ano de nascimento, número do mês de nascimento, altura da pessoa, valor monetário, placa de carros, etc. Diante disso, entendemos que é praticamente impossível de sobreviver sem conhecer os números.

2ª etapa: Continuar a aula mostrando as primeiras evidências sobre os números. Algumas evidências arqueológicas apontam que há 50.000 anos o homem já era capaz de ter ideias sobre a contagem, representados por um símbolo (palavra, gesto ou gráfico), mas não a contagem propriamente dita.

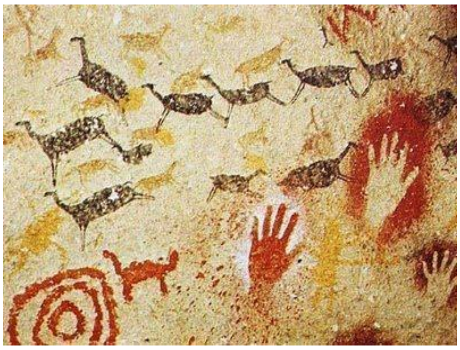
Figura 1 - A compreensão da arte rupestre é um grande desafio para vários pesquisadores.



Fonte: Mundo Educação. (Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/historiageral/a-arte-rupestre.htm. Acesso em 25 jun. 2019)

Faz necessário mostrar as representações da figura como uma possível contagem para a quantidade de animais de cada imagem na Figura 1.

Figura 2 - A quantidade de animais representada na imagem rupestre.



Fonte: Terra Educação. Disponível em: https://www.estudokids.com.br/arte-rupestre-descobrimento-caracteristicas-e-no-brasil/. Acesso em: 25 jun. 2019).

Observa-se novamente a quantidade de animais representados nas pinturas rupestres. Isso era comum naquele período, o armazenamento das representações do que se via.

Ao longo do tempo os pastores (cuidavam do rebanho de bovinos, suínos e ovinos) adotaram que cada animal correspondia a uma pedra pequena. Pela manhã, cada animal que saia para o pastoreio eles colocavam uma pedra no saco de couro. À tarde, cada animal que entrava no curral era retirada uma pedra do saco. Caso faltasse uma ou mais pedras é porque haviam animais de outro pastor no rebanho e, caso sobresse uma ou mais pedras significava que alguns animais não voltaram ao curral e possivelmente fugiram do rebanho durante o pastoreio.

Nesse momento, o professor pode efetivar uma pequena oficina sobre correspondência biunívoca, utilizando palitos de picolé e um outro objeto qualquer (tampas de garrafas pet, por exemplo) e fazer o seguinte questionamento:

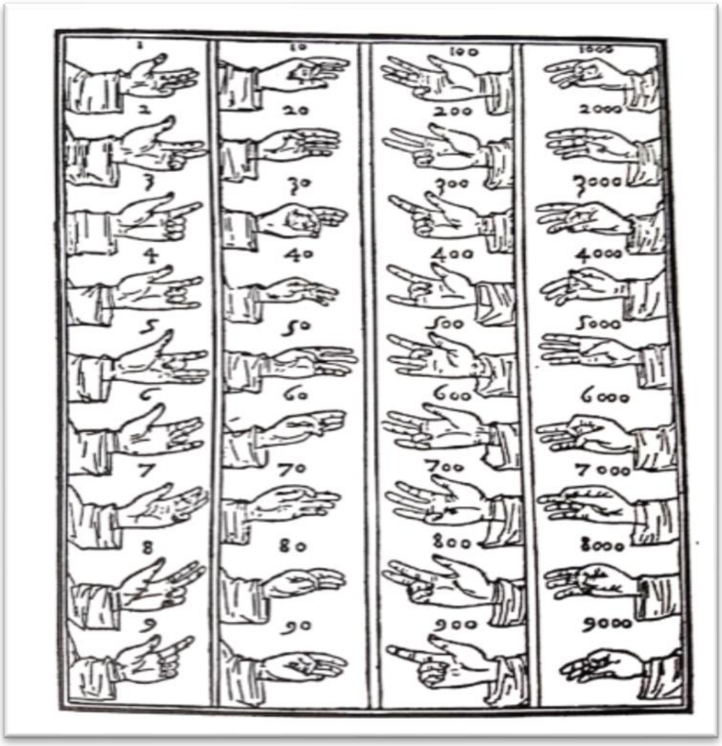
(a) É possível fazer uma correspondência biunívoca entre esses objetos entregues a vocês?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante a ideia sobre uma correspondência biunívoca e que em vários momentos da matemática essa correspondência estará presente.

3ª etapa: Iniciar a segunda aula mostrando como as partes do corpo influenciou o processo de contagem.

A questão do número e o desenvolvimento da matemática foram possíveis tanto para atender as atividades práticas do homem e das sociedades, como a pecuária e a agricultura, quanto àquelas intrínsecas à matemática e as ciências. Mas foi esse processo de contar objetos que deu origem ao número natural passaram por diversas civilizações (gregos, romanos, chineses, indianos, etc.) que criaram algum tipo de linguagem escrita e mesmo assim, podemos afirmar que ainda não havia o conceito, propriamente dito, de número. Esse conceito foi sendo elaborado em diversas observações humanas para a contagem de pequenos objetos ao se utilizar os dedos. Foi aí que surgiu o nome dígito, que vem do latim dígitos que significa dedo. E como a mão têm dez dedos, o homem passou a contar até dez já que possuía 10 dedos, conhecidos como números digitais. Essas representações foram evoluindo até se chegar à representação da Figura 3, desenvolvida pelos egípcios.

Figura 3 - O uso dos Números digitais.



(Fonte: EVES, 2004, p. 30 apud Pacioli, 1491)

Podemos compreender que com as duas mãos junta há dez dedos, então a ideias de uma representação na potência de 10 tinha grande referência a possibilidade de contagem por meios dos dedos. Na Figura 3, vemos que os números de 1 a 99 eram representados pela mão esquerda enquanto os números a partir de 100, em potências de 10 eram representados pela mão direita.

O professor pode fazer o seguinte comentário:

(a) Vamos tentar repetir esses movimentos para representar alguns números e exemplificar os números. A representação dos números foi simples ou complexa? Qual a influência do corpo humano nessa representação?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante que as representações foram avançando e tornando-se mais simples.

Avaliação da Aprendizagem:

As atividades durante as aulas devem fornecer aos estudantes ferramentas para a compreensão sobre o surgimento e o avanço no entendimento sobre os números e suas representações aula proposta. Os questionamentos realizados durante as aulas devem proporcionar aos estudantes a dificuldade de representação nos quais as civilizações adotaram e, que o desenvolvimento dessas representações, aproximam os estudantes da representação atual dos números para a matemática. Nesse sentido, durante as aulas, o professor deve estimular os estudantes a pesquisarem, promovendo sua autonomia, os motivos dos desenhos rupestres para representar uma quantidade, o uso do corpo humano e a ideia de relação biunívoca.

Sendo assim, espera-se que, a partir dessas aulas, o professor e seus estudantes estejam equipados de elementos sobre a História da Matemática para o desenvolvimento do conhecimento matemático formal através de conhecimentos previamente adquiridos, pensamentos intuitivos, formalização de conceitos e de um (re)pensar matemático, possibilitando a construção de novas práticas educativas tanto para as séries iniciais do Ensino Fundamental quanto para o Ensino Superior.

Aula 2 – Sequência de sistemas de numeração.

• **Conteúdo**:

A construção dos sistemas de numeração.

• **Objetivo Geral**:

Compreender a construção dos sistemas de numeração e a eleição pelo sistema de numeração decimal.

• **Objetivos específicos**:

a) Compreender como surgiram os sistemas de numeração;

b) Os sistemas de numeração egípcio e o posicionamento dos números;

c) O sistema de numeração romano e o ábaco.

Desenvolvimento

1ª etapa: Inicie a aula discutindo sobre a importâncias e o surgimento dos sistemas de numeração. Pode fazer o seguinte questionamento:

(a) Qual o sistema de numeração que adotamos atualmente na matemática? E por qual motivo adotamos esse sistema? E a mudança desse sistema mudaria alguma coisa na vida das pessoas?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante a importância do desenvolvimento de um sistema de numeração, a escolha pelo sistema de numeração decimal e visualizar uma mudança no sistema de numeração e as consequências dessas mudanças para as tecnologias e para a civilização.

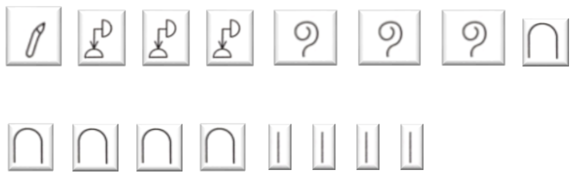
2ª etapa: Continuar a aula mostrando as primeiras evidências sobre os sistemas de numeração. A própria utilização do corpo humano para representar os números proporcionou indícios de uma construção de um sistema de numeração de base 10. A representação da mão esquerda para os números múltiplos de 10 começou a revelar essa proposta. Já a representação pela mão direita, os múltiplos de 10, a partir de um múltiplo de 10 (o número 100) fortaleceu essa concepção. Nesse sentido, os egípcios organizaram os n´meros de acordo com as potências de 10, como pode ser visualizado na Figura 4.

Figura 4 - Os símbolos adotados para a unidade e para as potências de 10 no sistema de numeração hieroglífico egípcio (sistema decimal).

(Fonte: EVES, 2004, p. 31)

Observe que cada imagem da Figura 5 representa uma potência de 10 diferente. Por exemplo, o número 14354 pode ser representado como:

$$14354 = 1(10)^4 + 4(10)^3 + 3(10)^2 + 5(10) + 4 =$$



Nesse momento, o professor deve proporcionar uma pequena oficina sobre a representação dos números no citem de potência de 10 dos egípcios, utilizando esses símbolos impressos para fazer correspondência aos números solicitados. Essa atividade deveria ser em dupla ou em quarteto para promover uma discussão entre os estudantes e, posteriormente, fazer o seguinte questionamento:

(b) Como foi a correspondência entre os números solicitados e os símbolos egípcios para representarem esses números? Se hoje tivéssemos esse sistema como a matemática na vida das pessoas?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante a ideia sobre representação numérica e a procura por um sistema mais econômico, ou seja, que utilizasse uma menor quantidade de símbolos para representar o mesmo número.

3ª etapa: O sistema egípcio possibilitou o surgimento do Sistema de Numeração Posicional (SNP).

O aperfeiçoamento do agrupamento aditivo dos números em potências de 10 dos possibilitou o surgimento do sistema de agrupamento multiplicativo. Matematicamente, ao adotar uma base *b* do sistema de numeração, os símbolos seriam representados por , algo muito parecido com o sistema atual, uma vez que ao adotar a base do sistema *a*, os símbolos seriam de $1, 2, \ldots, b$ - 1 e um outro conjunto adotado pelos símbolos $b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, \ldots$. Por exemplo, o número 14354 pode ser $1x4y3z5t4$, de forma que $x = 10^4, y = 10^3, z = 10^2, t = 10$ e $u = 5$. Dessa forma, qualquer número *N* pode ser representado numa única forma:

$$N = a_n b^n + \mathrm{a}_{n-1} b^{n-1} + \mathrm{a}_{n-2} b^{n-2} + \ ... \ + \ \mathrm{a}_2 b^2 + \ \mathrm{a}_1 b^1 + \ \mathrm{a}_0, \text{ com } 0 \leq a_i < a; \ i = 0, 1, 2, \ldots, \ n; n \in \mathbb{N}.$$

(eq. 1)

A equação acima chamaremos de equação 1 e será representada posteriormente por (eq. 1). Esta equação é chamada de representação canônica do SNP tornou-se essencial para a compreensão das operações básicas pela organização dos números.

Os sistemas foram avançando e, ao longo do tempo os romanos propuseram uma nova representação, simplificando a quantidade de símbolos, novamente, em busca da economia de símbolos, da seguinte forma:

I:1
V: 5
X: 10
L: 50
C: 100
D: 500
M: 1000

Essas representações eram modificadas, com regras particulares, a depender do último número:

Regra 1: Para os números com o final 2, 3, 6, 7 e 8, basta adotar a representação do número 1 (I), sendo o 2 como 1+1, ou seja, I a junção de I com I representada por II. De maneira análoga, a representação do número 3, seria a junção do II com I= III. Já as representações do 6, 7 e 8, carecem da representação do número 5, de forma que o número 6 seria o 5+1, ou seja, a junção de V com I representada VI. De maneira análoga, os números 7 e 8 são representados por VII e VIII, respectivamente.

Regra 2. Para os números com o final 4 e 9, adotaremos a operação de subtração entre o número maior e uma unidade. Assim, o número 4 seria representado por 5-1, ou seja, IV. O I antes do V representaria essa subtração de uma unidade das 5 unidades já existentes. De maneira análoga, o 9 seria representado por IX.

Regra 3: Para os números múltiplos de 10, a regra seria equivalente a Regras 1, observando que agora os números seria os múltiplos de 10. Assim, os números 20, 30, 60, 70 e 80 seriam, XX, XXX, LX, LXX e LXXX, respectivamente. Já os números 40 e 90 seguem a Regra 2 representados por XL e XC, respectivamente.

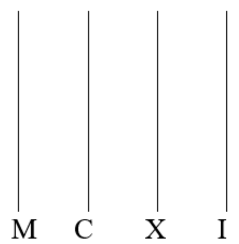
Para os demais números essas regras servem como premissa. O professor pode fazer o seguinte questionário:

(c) As representações dos números no sistema de numeração romano refletiram em uma economia de símbolos em relação ao sistema de numeração egípcio? Qual sistema vocês escolheriam para adotar? E Por que?

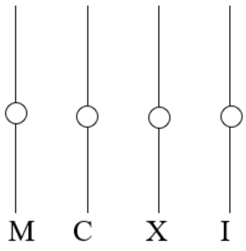
Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante que o sistema de numeração romano tornou as representações numéricas mais simples usando poucas regras e possibilitou introduzir outros elementos para facilitar as operações numéricas, como o ábaco.

4ª etapa: O ábaco romano como instrumento facilitador para as operações aditivas.

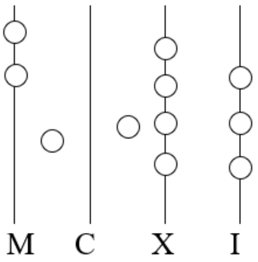
O ábaco foi inicia pela civilização romana como um instrumento visual para representar, inicialmente, os números e, posteriormente, as operações aditivas. No ábaco romano haviam apenas representações por linhas dos números 1, 10, 100 e 1000. Já os números 5, 50 e 500 ficavam simétrico a linha correspondente aos números 1 e 10, 10 e 100, 100 e 1000, respectivamente. A visualização pode ser entendida da seguinte forma:



Por exemplo, o número 1111 pode ser representado por:

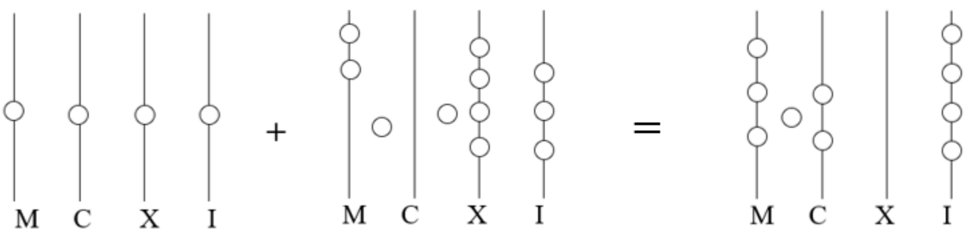


Já o número 2593 pode ser representado por:



Também é possível observar a dificuldade em representar o número 90. No ábaco havia uma dificuldade em integrar a Regra 3 (da 3ª etapa), disposta acima, com a representação no instrumento.

Para as operações aditivas, usava-se dois ábacos para representar cada número e um ábaco para o resultado da operação. Na operação adição entre 1111 e 2593 obtêm-se como resultado 3704. Podemos representar essa operação e resultados da seguinte forma:



Para a representação de quaisquer números usando o ábaco romano, essas regras servem como premissa. O professor pode fazer o seguinte questionário:

(d) Quais as restrições foram possíveis observar no ábaco romano em relação ao múltiplo de números do sistema de numeração romano? O posicionamento dos números foi de fácil interpretação? Por que?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante que o sistema de numeração romano pode ser representado pelo ábaco romano, mas isso não quer dizer que a representação tornou a interpretação mais simples. Há diversas restrições para a utilização do ábaco, em especial, para os números múltiplos de 5. O professor também pode solicitar aos estudantes a operação de subtração usando o ábaco romano.

Avaliação da Aprendizagem:

As atividades durante as aulas devem fornecer aos estudantes ferramentas para a compreensão sobre o surgimento e o avanço dos sistemas de numeração egípcio e romano, as posições dos números e suas representações. Os questionamentos realizados durante as aulas devem proporcionar aos estudantes o avanço nas representações dos sistemas na tentativa de um sistema de numeração com representações mais econômicas aproximando-se da representação atual do sistema de numeração decimal.

Sendo assim, espera-se que, a partir dessas aulas, o professor e seus estudantes estejam equipados de elementos sobre a História da Matemática para o desenvolvimento do conhecimento matemático formal através de conhecimentos previamente adquiridos, pensamentos intuitivos, formalização de conceitos e de um (re)pensar matemático, possibilitando a construção de novas práticas educativas tanto para as séries iniciais do Ensino Fundamental quanto para o Ensino Superior.

Aula 3 – Sequência de Sistema de numeração decimal: o princípio posicional.

• **Conteúdo**:

O princípio posicional do Sistema de Numeração Decimal.

• **Objetivo Geral**:

Compreender a organização do sistema de numeração e a posição de cada número nesse sistema.

• **Objetivos específicos**:

a) As várias bases dos sistemas de numeração ao longo da história;

b) O sistema de numeração decimal;

c) Compreender a organização posicional dos algarismos;

d) A posição dos números na tabela Quadro Valor Lugar (QVL);

e) A posição dos números e o Ábaco;

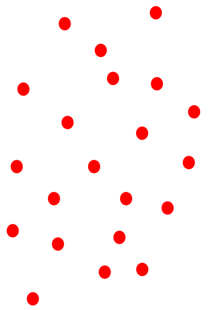
Desenvolvimento

1ª etapa: Inicie a aula discutindo sobre a diversidade de sistemas de numeração que foram desenvolvidos ao pelas civilizações. Pode fazer o seguinte questionamento:

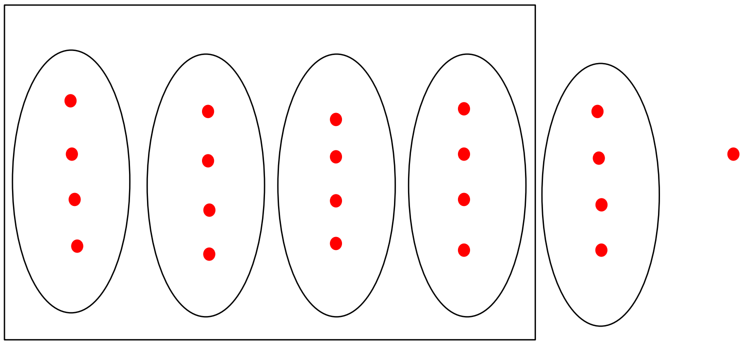
(a) É possível imaginar o mundo atual com outro sistema de numeração?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante a importância do sistema de numeração decimal e quais as consequências ao se mudar de sistema de numeração. Nesse sentido, o professor pode dialogar sobre as mudanças em todo sistema tecnológico do planeta caso essa mudança seja efetivada.

2ª etapa: Mostrar ao estudante como seria a organização dos números em um sistema diferente. Observe as 21 bolinhas abaixo:



Essas bolinhas podem ser organizadas em um sistema de numeração de base 4, ou seja, 21 na base 4 é representado pelo número 111. Isso pode ser considerado como $(111)_4$



Nesse momento, o professor pode efetivar uma pequena oficina sobre a variação do sistema de numeração decimal considerando números de até 5 algarismos. O professor pode fazer o seguinte questionamento:

(b) É possível construir um sistema de base 9 usando esses 21 pontos? Como seria essa representação?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante a ideia sobre um sistema de numeração com outras bases para além da base 10. Os resultados demonstram números completamente diferentes dos usuais nessas bases.

3ª etapa: O sistema de numeração decimal foi elaborado a partir de dois princípios: o posicional e o decimal. O princípio posicional associa cada unidade de número a um nome específico e informa o valor de cada dígito no número de acordo com sua posição, iniciando pela direita, de forma que o primeiro posto é o das unidades, o segundo é o das dezenas e assim por diante. Já o princípio decimal explica as relações entre as diferentes ordens de um número, ou seja, é uma relação de dez, dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da ordem imediatamente superior. Dessa forma, todo o Sistema de Numeração Posicional (SNP) pode ser escrito da seguinte forma:

$$N = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + b_{n-2} a^{n-2} + \ \dots \ + \ b_2 a^2 + \ b_1 a^1 + \ b_0, \text{ com } 0 \le b_i < b; \ i = 0, 1, 2, \dots, \ n; n \in \mathbb{N}.$$

que pode ser representado por uma base a que adota os símbolos $0, 1, 2, 3, \ a-1$ e b sendo valores constantes (números). Dessa forma, qualquer número N pode ser representado. Essa forma de representação canônica do SNP é essencial para compreender as operações básicas pela organização dos números. Já para o SND, um número pode ser escrito em potências de 10, da seguinte forma:

$N = b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + b_{n-2} 10^{n-2} + \ ...\ + b_2 10^2 + b_1 10^1 + b_0$, com $0 \leq b_i < b;\ i = 0, 1, 2, \ldots,\ n; n \in \mathbb{N}$.

Assim, cada algarismo têm uma representação na base 10 da equação canônica do SNP. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 1: Representar no SNP os seguintes números.

(a) 5643: $N = 5.10^3 + 6.10^2 + 4.10 + 3$

(b) 701002: $N = 7.10^5 + 0.10^4 + 1.10^3 + 0.10^2 + 0.10 + 2 = 7.10^5 + 1.10^3 + 2$

O professor a partir dessas atividades pode fazer os seguintes questionamentos:

(a) Vamos tentar compreender como esses números podem ser escritos no SND. A decomposição desses números representa o que? O posicionamento dos números pode mudar em relação a potência, ou seja, no exemplo (a) o número 5 está multiplicado a potência 10^3. Ele pode estar representado a potência 10^1? Se $N = 4.10 + 3 + 6.10^2 + 5.10^3$ representa o mesmo número do exemplo 1 (a)? E quais variações possíveis para o exemplo 1 (b)?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante que cada número tem uma posição de acordo com a representação escrita, mas que essas posições podem variar sem perda do conceito do princípio decimal.

4ª etapa: Ambos os princípios do SND formam a organização desse sistema. Nesse sentido, temos que:

(a) cada unidade de número, iniciando pela direita, informa o valor de cada dígito no número iniciando pelas unidades, continuando pelas dezenas, centenas, ... Assim, pelos mesmos valores utilizados no exemplo 1, faremos o exemplo 2 observando a posição de cada algarismo. Nesse sentido, temos:

Exemplo 2: Decompor os números sob o princípio posicional de cada algarismo.

5643: 5 unidades de milhar, 6 centenas, 4 dezenas e 3 unidades.

701002: 7 centenas de milhar, 1 unidade de milhar e 2 unidades.

Isso pode ser representado de outra forma, com o número 5643:

5 6 4 3

Unidade (≤9)

Dezena (≤9)

Centena (≤9)

Unidade de Milhar (≤9)

Observe que colocamos cada posição (Unidade, dezena, centena e unidade de milhar) pode admitir um número menor ou igual 9, uma vez que 10 unidades representam 1 dezena, 10 dezenas representam 1 centena, e assim por diante. A ideia do princípio decimal começa a ser assegurada.

Da mesma forma, podemos representar o número 701002:

7 0 1 0 0 2

→ Unidade (≤9)
→ Dezena (≤9)
→ Centena (≤9)
→ Unidade de Milhar (≤9)
→ Dezena de Milhar (≤9)
→ Centena de Milhar (≤9)

Outrossim, o princípio decimal é reafirmado ao representar o número 701002, respeitando ambos os princípios do SND.

Ambos os números também podem ser representados na Quadro Valor Lugar (QVL). Essa tabela foi elaborada para facilitar a visualização dos números pelos estudantes observando os princípios posicional e decimal.

Quadro 1 - Quadro Valor Lugar

Quadro Valor Lugar					
Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centena (s)	Dezena(s)	Unidade(s)
		5	6	4	3
7	0	1	0	0	2

O professor pode solicitar aos estudantes, a partir da posição dos algarismos, atividades com os seguintes questionamentos:

(a) Vamos tentar compreender o princípio posicional dos algarismos no SND. Como a decomposição dos números pela QVL pode sustentar a aprendizagem dos estudantes? Como o número $4.10 + 3 + 6.10^2 + 5.10^3$ pode ser representado na QVL? E o número $0.10^2 + 1.10^3 + 7.10^5 + 2 + 0.10^4 + 0.10$?

Comentário: O objetivo da questão é mostrar ao estudante que cada número tem uma posição e a forma de apresentação da QVL favorece a utilização desse princípio do SND.

Avaliação da Aprendizagem:

As atividades durante as aulas devem fornecer aos estudantes ferramentas para a compreensão sobre os princípios posicional (em especial) e decimal (apenas ideias básicas) do

Sistema de Numeração Decimal. Progredindo nesse sentido, a equação geral do Sistema de Numeração Posicional torna-se elemento essencial para a compreensão do princípio posicional, mesmo com os números em ordenação desorganizada com fizemos em alguns exemplos. Os questionamentos realizados durante as aulas devem proporcionar aos estudantes reflexões sobre a forma de organização dos números e suas respectivas posições. O recurso do Quadro valor Lugar oferece ao estudante um organização da posição dos números, mas o estudante deve estar atento a posição que corresponde a cada algarismo, ou seja, o algarismo da unidade deve ser considerado o termo independente da equação canônica do SNP, o algarismo da dezena deve ser considerado o termo de potência dez com expoente um (10^1), o algarismo da centena deve ser considerado o termo de potência dez com expoente dois (10^2) e assim por diante. Nesse sentido, durante as aulas, o professor deve estimular os estudantes a pesquisarem, promovendo sua autonomia, os motivos de se empregar corretamente a posição dos algarismos e as consequências de escolhas equivocadas para essas posições.

Sendo assim, espera-se que, a partir dessas aulas, o professor e seus estudantes estejam equipados de elementos sobre o princípio posicional dos algarismos para os números naturais e com uma pequena introdução ao princípio decimal possibilitando que os estudantes possam por meio de pensamentos intuitivos formalizarem técnicas de resolução para essas atividades e mobilizarem conceitos (e novas reflexões) sobre esses princípios que norteiam o sistema de numeração decimal possibilitando a construção de novas práticas educativas tanto para as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Aula 4 – Sequência de Sistema de numeração decimal: o princípio decimal.

• **Conteúdo**:

O princípio decimal do Sistema de Numeração Decimal.

• **Objetivo Geral**:

Compreender as variações dos números e as organizações desses números no princípio posicional do sistema de numeração.

• **Objetivos específicos**:

a) Compreender as variações dos números no princípio decimal do SND;

b) Compreender "possível" organização das variações dos números no princípio decimal do SND e na tabela Quadro Valor Lugar (QVL);

c) Compreender ambos os princípios nas operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Desenvolvimento

1ª etapa: Inicie a aula discutindo sobre a importâncias da compreensão do princípio decimal já que ele é essencial para a compreensão do princípio posicional. A articulação desses dois princípios pode conduzir os estudantes as operações básicas com qualquer quantidade de algarismos. Nesse sentido, as variações possíveis entre a posição dos algarismos podem evidenciar o domínio sobre ambos os princípios.

Ao visualizar o número 472, podemos reescrevê-lo das seguintes formas:

$$
\begin{aligned}
472 &= 4C\ 7D\ 2U \\
&= 47D\ 2U \\
&= 472U
\end{aligned}
$$

Essas formas de representar o número 472 advêm do princípio decimal, uma vez que por esse princípio as relações entre as diferentes ordens de um número é uma relação de dez, ou seja, dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da ordem imediatamente superior. Nesse sentido, como 1 centena equivale a 10 dezenas então 4 centenas representam 40 dezenas e, adicionado as 7 dezenas já existentes, passam a ter 47 dezenas. De maneira análoga, como 1 dezena equivale a 10 unidades então 47 dezenas equivalem a 470 unidades e, adicionado as 2 unidades já existentes, passam a ter 472 unidades.

Outra representação com um número com uma quantidade maior de algarismos pode ser visualizada por meio do número 479512.

$$
\begin{aligned}
479512 &= 4C_M\ 7D_M\ 9U_M\ 5C\ 1D\ 2U \\
&= 47D_M\ 9U_M\ 5C\ 1D\ 2U \\
&= 479U_M\ 5C\ 1D\ 2U \\
&= 4795C\ 1D\ 2U \\
&= 47951D\ 2U \\
&= 479512U
\end{aligned}
$$

Ao utilizar outro número com mais algarismos observamos que a quantidade de variações possíveis é maior que a representada acima, com o número 472, ou seja, a quantidade de algarismos presentes no número é a quantidade de representações possíveis. Se o número tem *n* algarismos, esse número terá *n* representações possíveis. Essa observação apresenta uma lacuna quando há o algarismo 0 com primeiro algarismo (da esquerda para a direita) de um número. Apesar disso, não é comum a escrita com o número 0 como primeiro algarismo de um número., pois ao escrever o número 095612 não consideramos esse 0 (zero) e entendemos esse número por 95612. Diante disso, o professor pode elencar o seguinte questionamento aos estudantes:

(a) Há quantas representações possíveis para um número?

(b) A quantidade de algarismos tem influência na quantidade de representações?

Comentário: O objetivo das questões é mostrar ao estudante as possibilidades de representações e como essa(s) variação(ões) de representações podem implementar a ideia sobre o princípio decimal do SND.

2ª etapa: A utilização do Quadro Valor Lugar (QVL) pode auxiliar a utilização das diversas representações fundamentadas no princípio decimal no SND. Ao utilizar as representações do número 472, abordado anteriormente no QVL temos:

Quadro 2 - Representação do número 472 e suas representações no QVL

Quadro Valor Lugar					
Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
			4	7	2
				40 + 7	2
				47	2
					470 + 2
					472

Já o número 479512 pode ser representado da seguinte forma:

Quadro 3 - Representação do número 479512 e suas representações no QVL

Quadro Valor Lugar					
Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
4	7	9	5	1	2
	40 + 7	9	5	1	2
	47	9	5	1	2
		470 + 9	5	1	2
		479	5	1	2
			4790 + 5	1	2
			4795	1	2
				47950 + 1	2
				47951	2
					479510+ 2
					479512

Observe que cada representação utilizada na primeira parte da aula foi reutilizada usando o QVL. Caso exista alguma dificuldade na representação anterior (1ª parte da aula), possivelmente, nessa parte, as dúvidas poderiam ser dirimidas.

3ª etapa: As operações básicas também podem ser visualizadas utilizando, primeiramente o QVL para justificar alguns elementos que os estudantes possuem muita dificuldade: o caso do "vai um" para adicionar algarismos a uma potência de 10 (numa posição superior) e o "toma emprestado um" para retirar algarismos a uma potência de 10 (numa posição superior). Ao adicionarmos dois números com um ou mais algarismos, temos as seguintes técnicas de resolução:

Exemplo 1: Utilizar a operação adição entre os números abaixo usando o QVL.

(a) 3+4:

(b) 7+9:

No item (a) usamos a seguinte forma para resolver o exemplo:

(a)

C	D	U
		3
		+ 4
		7

e como 7 (≤ 9) não é preciso adicionar algarismos na posição das dezenas.

No item (b) usamos a seguinte forma para resolver o exemplo:

(b)

$$\begin{array}{ccc} C & D & U \\ & & 7 \\ & & +\,9 \\ \hline & & 16 \end{array}$$

e como 16 (> 9) é necessário usar o princípio decimal, ou seja, não é possível representar 16 na posição das unidades. Nesse sentido, 16 unidades é igual a 10 + 6 unidades, e como 10unidades equivale a uma dezena então 16 unidades será representado por 1 dezena e 6 unidades.

$$\begin{array}{ccc} C & D & U \\ & & 7 \\ & & +\,9 \\ \hline & & 10+6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C & D & U \\ & 1 & 6 \end{array}$$

De maneira análoga, a operação de adição com outros números, com uma quantidade maior de algarismos, pode ser justificada da mesma maneira.

Exemplo 2: Utilizar a operação subtração entre os números abaixo usando o QVL.

(a) 4-3:

(b) 9-7:

(c) 12-7:

No item (a) usamos a seguinte técnica para resolver o exemplo:

(a)

$$\begin{array}{ccc} C & D & U \\ & & 4 \\ & & -\,3 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

como 4 (algarismo minuendo) > 3 (algarismo subtraendo) a subtração fica simples, retirando o valor do subtraendo do minuendo. Para o EF I, o resto é sempre positivo, pois estamos mostrando a subtração no conjunto dos números naturais, e como ℕ é um Monoide (ℕ,*,1) admite penas a operação associativa, comutativa e elemento neutro.

(b) Este item utiliza os mesmos argumentos do item (a).

(c) Ao representarmos o número 12 temos 1 dezena e 2 unidades subtraído do 7, representados da seguinte forma:

C	D	U
	1	2
		- 7
		?

Observe que não se pode subtrair 7 de 2, pois teríamos um número negativo desconhecido dos estudantes, pois o conjunto dos números Inteiros não vive nessa instituição da educação fundamental. Logo essa opção é descartada. Sendo assim, utiliza-se o princípio decimal para efetuar a operação subtração quando o algarismo do minuendo é menor que o algarismo do subtraendo. E como 1 dezena são 10 unidades, faz-se essa transformação para possibilitar a subtração. Assim,

C	D	U
	1	2
		- 7
		?

C	D	U
		10+2
		- 7
		?

Agora a subtração é possível, pois os algarismos da unidade do minuendo são maiores que o algarismo do subtraendo e a operação torna-se simples apenas retirando as unidades do subtraendo do minuendo.

C	D	U
		12
		- 7
		5

De maneira análoga, a operação de subtração com outros números, com uma quantidade maior de algarismos, pode ser justificada da mesma maneira.

Exemplo 3: Utilizar a operação multiplicação (produto) entre os números abaixo usando o QVL.

(a) 2×3:

(b) 9×7:

(c) 32×8:

No item (a) usamos a seguinte técnica para resolver o exemplo:

(a)

C	D	U
		2
		× 3
		6

Observe que não há dificuldade em relação ao princípio decimal visto que a multiplicação entre dois algarismos na posição da unidade resulta em outro algarismo na posição da unidade.

(b) Já a multiplicação entre 9 e 7 resulta em:

C	D	U
		9
		× 7
		63

Observe que o resultado da multiplicação entre 9 e 7 resulta em 63, um número com dois algarismos na posição da unidade. Usando o princípio decimal, 63 unidades correspondem a 60 + 3 unidades, e como 60 unidades equivale a 6 dezenas então 9 × 7= 6D 3U, ou seja;

C	D	U
		9
		× 7
		63

C	D	U
		9
		× 7
	6	3

(c) Já a multiplicação entre 32 e 8 segue os seguintes procedimentos:

$$
\begin{array}{ccc}
C & D & U \\
 & 3 & 2 \\
 & & \times 8 \\
\hline
 & & 16
\end{array}
$$

Observe que ao fazer 2 unidades × 8 unidades resultam em 16 unidades e, pelo princípio decimal, 16 unidades podem ser representadas por 10 + 6 unidades que equivale a 1dezena e 6 unidades. Nesse sentido, 1 dezena será adicionada ao resultado da multiplicação entre 3 e 8 que equivale a 24, como pode ser visualizado abaixo.

$$
\begin{array}{cc}
D & U \\
3 & 2 \\
 & \times 8 \\
\hline
 & 16
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
D & U \\
3 & 2 \\
 & \times 8 \\
\hline
24 & 16
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
D & U \\
3 & 2 \\
 & \times 8 \\
\hline
24+1 & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
D & U \\
3 & 2 \\
 & \times 8 \\
\hline
25 & 6
\end{array}
$$

É por esse motivo que dizemos que 32 × 8 resulta em 256.

De maneira análoga, a operação de multiplicação com outros números, com uma quantidade maior de algarismos, pode ser justificada da mesma maneira.

Exemplo 3: Utilizar a operação divisão entre os números abaixo usando o QVL.

(a) 6÷2:

(b) 27÷3:

(c) 120÷ 8:

No item (a) usamos a seguinte técnica para resolver o exemplo:

(a)

$$\begin{array}{c|c} U & U \\ 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Observe que não há dificuldade em relação ao princípio decimal visto que 6 (≤ 9) é dividido por 2 (≤ 9). Ambos são números com apenas um algarismo na posição da unidade. Logo com uma simples operação é possível realizar essa tarefa.

(b) Já a divisão de 27 por 3 resulta em:

$$\begin{array}{cc|c} D & U & U \\ 2 & 7 & 3 \\ \cline{3-3} \end{array}$$

Na estrutura da divisão apresentada logo acima, observamos que 2 < 3, então realizar essa divisão não é possível. Pelo princípio decimal, 2 dezenas equivalem a 20 unidades, e que somadas com as 7 unidades já existentes resulta em 27 unidades. Então agora têm-se 27 unidades divididos por 3 unidades. Podemos verificar esses procedimentos logo abaixo:

$$\begin{array}{cc|c} D & U & U \\ 2 & 7 & 3 \\ \cline{3-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} U & U \\ 20+7 & 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} U & U \\ 27 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 9 \end{array}$$

Logo, o resultado da divisão de 27 unidades por 3 unidades resulta em 9 unidades.

(c) A divisão de 120 por 8 é realizada pelo mesmo procedimento adotando mais uma casa decimal, a posição das centenas. É possível visualizar a operação da seguinte forma:

C	D	U	U
1	2	0	8

Da mesma forma anterior, observamos que 1 < 8, então realizar essa divisão não é possível. Pelo princípio decimal, 1 centena equivale a 10 dezenas, e que somadas com as 2 dezenas já existentes resulta em 12 dezenas. Então agora têm-se 12 dezenas divididos por 8 unidades. Podemos verificar esses procedimentos logo abaixo:

C	D	U	U
1	2	0	8

D	U	U
10+2	0	8

D	U	U
12	0	8

Como temos posições diferentes para esses algarismos, podemos utilizar, novamente, o princípio decimal. Como 1 dezena equivale a 10 unidades, 12 dezenas equivalem a 120 unidades e, que somadas com a 0 unidade já existente resulta em 120 unidades. Esses procedimentos estão logo abaixo:

D	U	U
12	0	8

U	U
120+0	8

$$\begin{array}{c|c} \text{U} & \text{U} \\ 120 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 15 \end{array}$$

Logo, o resultado da divisão de 120 unidades por 8 unidades resulta em 15 unidades ou 1 dezena e 5 unidades, pelo princípio decimal.

Há outra maneira de resolver a divisão de 120 por 8. Vamos montar a estrutura da divisão, usando o QVL:

$$\begin{array}{ccc|c} \text{C} & \text{D} & \text{U} & \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ \cline{4-4} \end{array}$$

Da mesma forma anterior, observamos que 1 < 8[2], então realizar essa divisão não é possível. Pelo princípio decimal, 1 centena equivale a 10 dezenas, e que somadas com as 2 dezenas já existentes resulta em 12 dezenas.

$$\begin{array}{ccc|c} \text{C} & \text{D} & \text{U} & \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ \cline{4-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} \text{D} & \text{U} & \\ 10+2 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} \text{D} & \text{U} & \\ 12 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} \end{array}$$

E como 12 > 8, essa divisão já pode ser realizada. 12 dezenas divididos em 8 partes iguais resulta em uma dezena e sobram 4 dezenas. Estas 4 dezenas, pelo princípio decimal, equivalem a 40 unidades.

$$\begin{array}{cc|c} \text{D} & \text{U} & \\ 12 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} 4 & & 1\text{D} \end{array}$$

[2] Observe que não falei “8 unidades”, apenas para denotar que estamos dividindo o algarismo localizado em uma posição em oito partes iguais.

$$\begin{array}{cc|l} D & U & \\ 12 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} 4 & & 1D \end{array}$$

As 40 unidades adicionadas com 0 unidade já existente resultam nas mesmas 40 unidades.

$$\begin{array}{cc|l} D & U & \\ 12 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} & 40+0 & 1D \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|l} D & U & \\ 12 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} & 40 & 1D \end{array}$$

E fazendo 40 unidades divididas em 8 partes iguais resulta em 5 unidades. Assim, a representação é dada por:

$$\begin{array}{cc|l} D & U & \\ 12 & 0 & 8 \\ \cline{3-3} & 40 & 1D\ 5U \\ & 0 & \end{array}$$

De maneira análoga, a operação de divisão com outros números, com uma quantidade maior de algarismos, pode ser justificada da mesma maneira.

Avaliação da Aprendizagem:

As atividades durante as aulas devem fornecer aos estudantes ferramentas para a compreensão sobre os princípios do SND, o posicional e o decimal. Ambos os princípios possibilitam um entendimento dos procedimentos para a realização das operações básicas para quaisquer quantidades de algarismos em um número. As demais tarefas, para números com outras quantidades de algarismos podem ser lançadas pelo professor como atividade em classe ou para casa para que o estudante possa investigar como esses princípios estruturam toda a Aritmética.

Sendo assim, espera-se que, a partir dessas aulas, o professor e seus estudantes estejam equipados de elementos sobre o SND e seus princípios para o desenvolvimento do conhecimento matemático formal, em especial para o números racionais, suas representações a aplicações, através de conhecimentos previamente adquiridos, pensamentos intuitivos, formalização de conceitos e de um (re)pensar matemático, possibilitando a construção de novas práticas educativas tanto para as séries iniciais do Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio e Superior.

Referências Bibliográficas

AGRANIONIH, N. T. Escritas numéricas de milhares e o valor posicional: concepções iniciais de alunos de 2ª série. 219 f. **Tese** (Doutorado). Programa de pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.2008. Disponível em:< https://lume.ufrgs.br/handle/10183/13485 >. Acesso em 30 jan. 2019.

ALMEIDA, E. R. M. de Propriedades dos sistemas de numeração: uma sequência didática em uma abordagem histórica. 69f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do rio Grande do Norte. Natal. 2012. Disponível em:< http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16088/1/ElionardoRMA_DISSERT.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

AMARAL, E. H. do Sistema de numeração decimal: conhecimentos profissionais e práticas escolares de professores do 2º e 3º ano do 1º ciclo do ensino fundamental. 202f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do rio Grande do Norte. Natal. 2015. Disponível em:< http://ri.ufmt.br/bitstream/1/151/1/DISS_2015_%20Elenir%20Hon%C3%B3rio%20do%20Amaral.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

ANDRADE, F. P. A criação dos números e sua evolução matemática: de escrava a rainha das ciências. 50f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade do Estado do Rio de Janeiro. 2015. Disponível em:< http://www.bdtd.uerj.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=8567>. Acesso em 30 jan. 2019.

BRANDT, C. F. Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração.245f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2005. Disponível em:< https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/103059/222199.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em 30 jan. 2019.

BRANDT, C. F.; Moretti, M. T. Algumas considerações sobre o ensino do sistema de numeração: discussão de atividades à luz da conceitualização e representação semiótica. **Espaço pedagógico**. v. 20, n. 1, Passo Fundo, p. 54-75, jan./jun. 2013. Disponível em: < http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3507 >. Acesso em 28 nov. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC: Brasília, 2017. Disponível em: < 568 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 02 jul. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, Ensino de 5ª a 8ª série / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Problemes de didactiques des décimaux. In: **Recherches em in didactiques des mathemátiques**. V. 2. N. 3. p. 37-127. 1981. Disponível em: <

http://math.unipa.it/~grim/brousseau_decimaux_RDM_1981_2.1.pdf>. Acesso em 09 jun. 2019.

____________. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**. V.7, N.2, p.33-116. Grenoble, 1986.

____________. L'enseignant dans la théorie des situations didactiques: 1. Structure et fonctionnement du système didactique. In: **Actes de la VIIIª Ecole d'été de didactique des mathématiques**. Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.). St-Sauves d'Auvergne. Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand. Actes de la VIIIe Ecole d'Eté. 1995. p. 3-46. Disponível em: < http://guy-brousseau.com/2319/l%E2%80%99enseignant-dans-la-theorie-des-situations-didactiques-1995/>. Acesso em 22. abr 2019.

CARAÇA, B. DE J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Editora Lisboa. 1951. p. 3-12.

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. (à paraitre) Introduction de la notion de variable dans le modele praxéologique. **Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique**. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. A noção de variável no modelo praxeológico. In: **A teoria Antropológica do didático**: princípios e fundamentos. ALMOULOUD, S. G., FARIAS, L. M. S., HENRIQUES, A. (Org.). Ed. 1. Curitiba. CRV. 2018. p.119-133.

CHAACHOUA, Y. **Praxéologie de référence de l'aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modele T4TEL**. Mémoire de Master de Didactique des Sciences. Université Grenoble Alpes. Out. 2016. 62 p. Disponível em: < http://chamilo1.grenet.fr/ujf/main/document/document.php?cidReq=M2PIFDIDACTIQUEDESSCIENCESETDUNU&id_session=0&gidReq=0&origin=&action=download&id=72 >. Acesso em 28 jul. 2018.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 19, nº 2, 1999.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude 3. **Ecologie & Regulation**. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/. Acesso em: 20 de fevereiro de 2018.

CHEVALLARD, Y. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. **Conférence donnée à la 3e Université d'été Animath** (Saint-Flour, 22-27 août 2004). Paru dans La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire. APMEP. Paris. 2005. p. 239-263. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2018.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. in Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009.

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B. dos; RABELO, M. H. M. Procedimentos de resolução de alunos de 5º ano revelados em itens do Saeb com relação ao Sistema de Numeração Decimal. **Revista brasileira de estudo pedagógico**. Brasília, v. 94 n. 236. p. 211-231. jan./abr. 2013. Disponível em:< http://portal.inep.gov.br/documents/186968/489316/Revista+Brasileira+de+Estudos+Pedag%C3%B3gicos+%28RBEP%29+-+Num+236/7c0d44d0-b840-46fc-a5f3-cff766bdc0a9?version=1.2>. Acesso em 19 mai. 2019.

DAMBROS, A. A. A história da matemática e o professor das séries iniciais: a importância dos estudos históricos no trabalho com o sistema de numeração decimal. 271f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2001. Disponível em:<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/79704/PEED0275-D.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 30 jan. 2019.

ESTEVES, A. K. Números decimais na escola fundamental: interações entre os conhecimentos de um grupo de professores com sua prática pedagógica. 153f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2009. Disponível em:< https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/1802 >. Acesso em 30 jan. 2019.

GUIMARÃES, A. P. da S. Aprendendo e ensinando o sistema de numeração decimal: uma contribuição à prática pedagógica do professor. 106f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2005. Disponível em:< http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16023/1/AnildaPSG.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria José de Freitas Senra. Rio de Janeiro: Globo. 1989. 367p.

____________. **História universal dos algarismos**: as inteligências dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Bestriz Katinsky. Rio de Janeiro. Ed. Nova Fornteira. V. 1. 1997. 745p.

LEITE, C. G. A construção histórica dos sistemas de numeração como recurso didático para o ensino fundamental I. 52f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte. 2014. Disponível em:< http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/10638/1/2014_dis_cgleite.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Parra, C. Saiz, I.; et. al. (Org.). Tradução Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artmed. 1996. P.73-155.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. V.1. Ed. 7. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq. 1992. p. 1-43.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. V.1. Ed. 4. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 1999. p. 1-49.

MILAN, I. dos S. O ensino do sistema de numeração decimal nas séries iniciais do ensino fundamental: as relações com a aprendizagem do sistema posicional. 149f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2017. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/20788/2/Ivonildes%20dos%20Santos%20Milan.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada: Coleção elementos de Matemática. Ao Livro técnico. Rio de Janeiro. 1969. p. 1-101.

MONTEIRO, M. P. B. Conhecimentos de crianças sobre o sistema de numeração: o desafio de utilizar eficazmente a numeração escrita.127f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2016. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/19518/2/Maria%20Priscila%20Bacellar%20Monteiro.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

MORAIS, I. M. da S. Sorobã: suas implicações e possibilidades na construção do número e no processo operatório do aluno com deficiência visual. 160f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de Brasília. Brasília. 2008. Disponível em:< http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/1216/1/DISSERTACAO_2008_IedaMariaDaSMorais.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

PINTO, V. L. de S. Formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental e suas compreensões sobre os conceitos básicos da aritmética. 176f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica: Matemática, Física e Química. Universidade do Grande Rio. 2010. Disponível em:< http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp142371.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

RODRIGUES, A. Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2013. Disponível em:< http://www2.ufopa.edu.br/ufopa/academico/pos-graduacao/banco-de-teses/profmat/profmat-turma-2011/rodrigues-aroldo-eduardo-athias/at_download/file>. Acesso em: 16 ago. 2018.

RODRIGUES, A. E. A.; DINIZ, H. A. Sistemas de Numeração: Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino. **Ciência e Natura**, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 578–591. Disponível em: < http://www.redalyc.org/pdf/4675/467547643049.pdf>. Acesso em 08 nov. 2018.

RODRIGUES, W. S. Base 10: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade. 188f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2001. Disponível em:<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11221/1/Wanda.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

SANDI, F. A. A construção do sistema de numeração num ambiente formativo. 89f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2002. Disponível em:< https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/82437/192527.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em 30 jan. 2019.

SANTANA, G. da S. Algoritmos utilizados para as quatro operações elementares 54 f. **Dissertação** (Mestrado) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2016. Disponível em:< http://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6449/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Gracielly%20da%20Silva%20Santana%20-%202016.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

SANTOS, A. F. dos. Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais. 80f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto. 2014. Disponível em:< https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122212/000809246.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em 30 jan. 2019.

SILVA, H. H. Uma investigação sobre os saberes elementares matemáticos presentes em concursos para professores primários em Sergipe (1874 – 1924). 96f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão. 2016. Disponível em:< https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/5077/1/HELOISA_HELENA_SILVA.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

SILVA, J. B. R. da. Formação continuada de professores que ensinam matemática: o papel do ábaco na ressignificação da prática pedagógica. 179f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2011. Disponível em:< http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16073/1/JoaoBRS_DISSERT.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

SILVA, R. C. da. Sistema de numeração decimal: saberes docentes e conhecimentos discentes do 3º ano do ensino fundamental. 140f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2013. Disponível em:< http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/15896/1/2013_dis_rcsilva.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

SILVA, S. C. S. da. Reconceitualização do conceito de sistema de numeração decimal pela formadora do PAIC. 125f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza. 2015. Disponível em:<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2853537#>. Acesso em 30 jan. 2019.

SOARES, E. T. P. Zoltan Paul Dienes e o sistema de numeração decimal na cultura escolar paranaense (1960-1989). 288f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba. 2014. Disponível em:< file:///C:/Users/Anderson/Downloads/SOARES_ElenirTerezinhaPaluch_Tese.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

SOUSA, J. S. de O ensino do sistema de numeração com ênfase em resolução de problemas, jogos e aplicações. 81f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal de Alagoas. Maceió. 2018. Disponível em:< http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/3564/1/O%20ensino%20do%20sistema%20de%20numera%C3%A7%C3%A3o%20com%20%C3%AAnfase%20em%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20problemas%2c%20jogos%20e%20aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

TRACANELLA, A. T. O sistema de numeração decimal: um estudo sobre o valor posicional. 174f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2018. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/21279/2/Aline%20Tafarelo%20Tracanella.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

TEIXEIRA, B. F. Surdos e ouvintes juntos no espaço escolar: o processo de construção do número. 136 f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia, Salvador; Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019. Disponível em: < https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/29465/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20COMPLETA%20-%20VERS%C3%83O%20FINAL.pdf >. Acesso em 04 abr. 2019.