Sequência Didática para o estudo de relações entre os conceitos Derivada e Declive

Ueslei Galvão do Rosário Santos

INTRODUÇÃO

Este estudo[1] se propõe a fornecer condições para que estudantes identifiquem a estreita relação existente entre a derivada de uma função calculada em um determinado valor da abscissa de um ponto e o declive da reta tangente ao gráfico da referida função nesse ponto e analisar, por meio das representações mobilizadas pelos estudantes, nos diferentes registros (língua materna, registro algébrico e gráfico), as relações esperadas entre os dois objetos matemáticos de referência (a Derivada e o Declive).

Entendemos que este estudo é de grande relevância, uma vez que, o contexto das salas de aula de Cálculo Diferencia e Integral I (CDI I), local onde sobrevive o conceito Derivada, envolvem altos índices de evasão e reprovação por parte dos discentes. Nesse sentido, encontramos na literatura alguns trabalhos de autores que tratam, especificamente, das dificuldades manifestadas por estudantes acerca do conceito Derivada, dentre eles destacamos Godoy (2004) e Meyer (2003). Godoy (2004) se propôs analisar as dificuldades manifestadas por estudantes, que já cursaram o componente curricular CDI I, sobre a noção Derivada. Já Meyer (2003), objetivou investigar elementos da imagem conceitual e definição conceitual[2] da Derivada com foco na sua interpretação geométrica. O estudo constatou que os estudantes apresentam dificuldade em relação ao referido conceito, pois, eles confundem a equação da reta tangente ao gráfico da função ***f*** como sendo a ***f'***, bem como, a derivada da função ***f*** no ponto de abscissa ***x*** = **a** como sendo a ordenada **b** do ponto (**a**,**b**) no qual a reta

[1] O presente estudo é um recorte da Dissertação do autor que tem como título: O estudo de relações entre os conceitos Derivada e Declive da Reta Tangente envolvendo licenciandos em Matemática.

[2] A *imagem conceitual* descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais, as propriedades associadas e os processos, isto é, tal estrutura pode conter imagens de representações visuais, impressões e experiências.
O termo *definição conceitual* é utilizado para indicar a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. Esta definição conceitual, segundo os autores, pode ser aprendida pelo indivíduo de forma "rotinizada" ou de uma forma mais significativa, relacionando-se em maior ou menor grau com a definição formal do conceito científico. (TALL; VINNER, 1981 apud MEYER, 2003, p. 6-7, grifo do autor)

tangencia o gráfico da função $\boldsymbol{f}$.

No que se refere à relação entre conceitos das Instituições de Educação Básica (IEB) e Instituições de Ensino Superior (IES), acreditamos que a explicitação dessas relações reforçam o desenvolvimento de competências e habilidades na trajetória de um estudante em formação em cursos cujo CDI I é institucionalizado, evitando questionamentos como o mencionado por Henriques e Serôdio (2013) quando sublinham que:

> Nos cursos de licenciatura em Matemática, muitos estudantes têm-se perguntado: sendo futuro profissional que vai atuar nas Instituições da Educação Básica (IEB), por quê tenho que estudar Integrais Múltiplas (IM)? Perguntas desse tipo podem ser respondidas pela necessidade do desenvolvimento de competências do futuro profissional e pela existência de relações entre os conteúdos das IM com os da Matemática proposta nas IEB". (HENRIQUES e SERÔDIO, 2013, p. 1).

Diante das considerações levantadas, passamos a apresentar a Sequência Didática (SD) que é composta por duas tarefas (T), sendo cada tarefa constituída por quatro subtarefas[3] (St), propostas para serem realizadas por meio de técnicas no ambiente papel/lápis[4], como consta no **Quadro 1**: *Tarefas para análise de práticas de estudantes*.

- Público-Alvo:

Alunos que já estabeleceram uma relação com o objeto matemático Derivada.

- Tempo Estimado:

Duas aulas de 50 minutos cada.

- Local:

Sala de aula.

- Material utilizado:

Livros para pesquisa, folhas impressas com as atividades propostas, lápis e borracha.

- Organização da turma:

O estudo será realizado em dupla, uma vez que a interação entre os estudantes

---

[3] Nesse sentido entendemos que toda subtarefa, por sua natureza, é uma tarefa.

[4] "Um ambiente papel/lápis é um espaço usual de estudo constituído por ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha, etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadra nesse ambiente" (HENRIQUES, 2014, p. 3).

contribuirá para o desenvolvimento da atividade.

Quadro 1: Tarefas para análise de práticas de estudantes

Tarefas para a análise de práticas de estudantes sobre o estudo de Derivadas de um polinômio e suas relações na Educação Básica.	
Nome do estudante:	Data: / /

Utilizar os conceitos de Derivadas e de Declives de retas tangentes para realizar cada tarefa abaixo, descrevendo e justificando as suas estratégias de realização de cada tarefa.		
Estudo de Derivadas na Instituição de Referência (IES)		
T1	**Considerar a função *f* dada por *f* de *x* igual a *c* definida no conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$), onde *c* é uma constante real.**	
	St1	Atribuir um valor qualquer, não nulo, para ***c*** e representar a função ***f***, juntamente com a sua derivada, no registro gráfico.
	St2	Considerar um ponto qualquer do gráfico da ***f*** para determinar o declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico, nesse ponto. Representar, no registro algébrico, a equação da referida reta.
	St3	Representar, no registro gráfico, a equação da reta tangente obtida em St2 juntamente com a função ***f***.
	St4	Fornecer uma descrição dos resultados obtidos nas subtarefas anteriores (St1, St2 e St3) na língua materna.
T2	**Considerar a função *g* dada por *g* de *x* igual a *x* ao quadrado, com *x* pertencente ao conjunto dos números Reais**.	
	St1	Representar a função ***g***, juntamente com a sua derivada, no registro gráfico.
	St2	Considerar um ponto qualquer do gráfico da ***g*** para determinar o declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico, nesse ponto. Representar, no registro algébrico, a equação da referida reta.
	St3	Representar, no registro gráfico, a equação da reta tangente, obtida em St2 juntamente com a função ***g***.
	St4	Fornecer uma descrição dos resultados obtidos nas subtarefas anteriores (St1, St2 e St3) na língua materna e estabelecer as relações entre os conceitos envolvidos.

Fonte: Produção própria do autor.

Desenvolvimento

Com o intuito de realizar as análises das tarefas, retomaremos os seus respectivos enunciados e apresentamos o objetivo de cada uma, as estratégias de realização, as variáveis didáticas[5] envolvidas, os pré-requisitos e as competências necessárias no desenvolvimento das tarefas com base na praxeologia dos objetos matemáticos Derivada e Declive.

A realização da T1 decorre da execução das suas subtarefas e, traz o seguinte enunciado:

T1	**Considerar a função *f* dada por *f* de *x* igual a *c* definida no conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$), onde *c* é uma constante real.**

Objetivo Geral da T1: Fornecer condições para os estudantes identificarem a estreita relação existente entre a derivada de uma função constante aplicada na abscissa de um determinado ponto do gráfico dessa função e o declive da reta tangente a este gráfico no referido ponto e analisar, por meio das representações mobilizadas, as relações estabelecidas pelos estudantes.

A primeira subtarefa da T1 traz o seguinte enunciado:

St1	Atribuir um valor qualquer, não nulo, para ***c*** e representar a função ***f***, juntamente com a sua derivada, no registro gráfico.

Objetivo da St1 da T1: Possibilitar que os estudantes compreendam que a derivada de uma função, nesse caso a constante, não corresponde à reta tangente ao gráfico da referida função.

<u>Análise da St1 da T1</u>:

Nesta tarefa, pretendemos fornecer a representação da função ***f***, no registro gráfico, juntamente com a sua derivada. Para isso, escolher, inicialmente, um valor para a variável didática ***c*** a fim de especificar a representação da função ***f***, no registro algébrico, e, em seguida, converter essa representação para o registro gráfico.

Suponhamos que o número dois é escolhido para a variável ***c***. Nesse caso, temos a ***f*** de ***x*** igual 2. Para calcularmos a derivada dessa função, podemos utilizar a técnica (τ)

[5] Segundo Henriques (2014, p35), "as variáveis didáticas são dados ou conhecimentos da situação que estão aos cuidados do professor/pesquisador. Quando tais variáveis assumem diferentes valores, modificam a situação".

Regra da potência, presente na praxeologia de Derivada, no livro que analisamos anteriormente, que é Cálculo com Geometria Analítica de Swokowski (1994). A Regra da potência, tem a seguinte descrição, na língua materna: “para derivar g de x igual a c vezes x elevado a n, devemos multiplicar o monômio pelo seu expoente n e, em seguida, substituir o expoente por uma unidade”. No registro algébrico temos: $g(x) = cx^n$, e a sua derivada é $g'(x) = n(cx^{n-1})$. A demonstração dessa técnica encontra-se no LD que analisamos.

Assim, para representarmos a derivada da função $f(x) = 2$, no registro algébrico, procedemos da seguinte maneira:

$f(x) = 2x^0$	*Representação da função **f** no registro algébrico;*
$f'(x) = 0(2x^{0-1})$	*Representação da derivada da função **f** utilizando a Regra de potência;*
$f'(x) = 0$	*Resultado da Derivada da função **f**.*

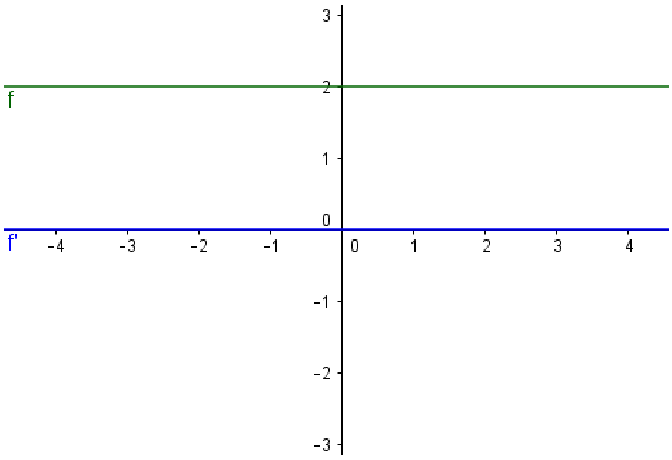
Esta τ é justificada por uma tecnologia (θ), que neste caso, é a definição de Derivada.

Assim, para derivar a função f, podemos utilizar essa θ como uma τ como segue:

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	*Limite do quociente, por definição.*
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h}$	*Limite do quociente, por substituição.*
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$	*Limite do quociente por tratamento.*
$f'(x) = \lim_{h\to 0} 0$	*Limite do resultado do quociente.*
$f'(x) = 0$	*Resultado da Derivada da função **f**.*

Nessas condições, percebemos que a τ e a θ se confundem entre si. Vale enfatizar que a θ apresentada é justificada por uma teoria (Θ), neste caso, o conjunto de conceitos que garantem a sobrevivência de Derivada (Conjuntos, Funções, Limites, Trigonometria, Geometrias, etc) como objetivo de estudo. A representação da f e da f', no registro gráfico, resulta na Figura 1.

Figura 1: Visualização gráfica da função ***f*** e ***f'***



Fonte: Produção própria do autor.

Dessa forma, inferimos que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: $[T,\tau,\theta,\Theta]$.

Variáveis didáticas da St1 da T1: Nesta tarefa, consideramos como variáveis didáticas, a escolha da função ***f*** e a variável ***c***, uma vez que a escolha de uma outra função (que não fosse constante) implicaria em uma situação diferente. Da mesma forma, ***c*** pode assumir valores negativos ou positivos obtendo-se, assim, diferentes situações (no registro gráfico e na língua materna).

Pré-requisitos e Competências da St1 da T1: Na realização desta tarefa, o estudante deve dispor de conhecimentos relativos aos objetos matemáticos Derivada e Plano Cartesiano. Caso os sujeitos não disponham de tais saberes, entraves relativos à interpretação geométrica da derivada poderão emergir. Estes entraves são relativos à interpretação da Derivada como a reta tangente ao gráfico de uma função, o que vai ao encontro do que fora discutido nas pesquisas de Godoy (2004) e Meyer (2003).

A seguir, apresentamos a análise da St2 que traz o seguinte enunciado:

St2	Considerar um ponto qualquer do gráfico da ***f*** para determinar o declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico, nesse ponto. Representar, no registro algébrico, a equação da referida reta.

Objetivo da St2 da T1: Proporcionar condições capazes de permitir os estudantes compreenderem que a derivada de uma função, nesse caso a constante, não corresponde à reta tangente ao gráfico da referida função.

Análise da St2 da T1:

Nesta tarefa, pretendemos determinar o declive da reta tangente ao gráfico da ***f***, dada por ***f*(*x*) = *c***, onde ***c*** assume o valor escolhido na St1, isto é a função ***f*(*x*) =** 2, em um ponto qualquer escolhido aleatoriamente, e definir a equação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Com efeito, para realizarmos esta tarefa é necessário mobilizar algumas técnicas (τ), a saber: determinar o declive da reta tangente ao gráfico da ***f*** no ponto considerado e representar, no registro algébrico, a equação da referida reta. Essas τ são justificadas pelas tecnologias (θ): Definição de Derivada e de Equação da Reta, respectivamente. Essas θ, por sua vez, têm como teoria (Θ) o conjunto de conhecimentos matemáticos que fundamentam as noções de Derivada e de Equação Geral da Reta. Dessa forma, podemos inferir que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: [T,τ,θ,Θ].

Assim, para encontrarmos um ponto pertencente ao gráfico da função ***f***, devemos considerar o valor da sua abscissa no seu domínio (conjunto dos números reais). Digamos que o número 5 é escolhido. Aplicado na ***f*** obtém-se o ponto (5,2), de pares ordenados 5 e 2.

Notadamente, para determinar o declive da reta tangente ao gráfico da ***f*** no ponto (5,2) utilizamos a função derivada da ***f***. Isto é, a função ***f'*** obtida em St1 da T1. Ora, a derivada de uma função aplicada em um determinado valor de abscissa corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da referida função no ponto de abscissa considerada. Assim, sabendo-se que:

$$f'(x) = 0$$

tem-se que,

$$f'(5) = 0$$

Este resultado corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico da ***f*** no ponto (5,2).

Segue-se, portanto, que a equação da reta tangente ao gráfico da ***f*** que passa no ponto (5,2) e que tem a declividade igual a 0 se obtém com o seguinte tratamento no registro algébrico e as respectivas descrições na língua materna:

$y - y_o = \boldsymbol{m}.(x - x_o)$	*Equação da reta por (x_0, y_0) com declive **m***
$y - \boldsymbol{f}(5) = 0.(x - 5)$	*Equação da reta por (5,**f**(5)) com declive 0*
$y - 2 = 0$	*Tratamento da equação da reta que passa no ponto (5,2) com declive 0*
$y = 2$	*Equação da reta que passa no ponto (5,2) com declive 0*

Diante deste resultado, podemos inferir que a equação da reta tangente ao gráfico da ***f*** (que consiste em uma reta) no ponto (5,2) é a própria ***f***. Vale lembrar que, o número 5 foi escolhido aleatoriamente. Isso, sugere que qualquer número real poderia ser escolhido. Esse fato, generaliza a referida inferência para todo ponto (***x***,2) do gráfico da *f* para todo *x* real.

Variáveis didáticas da St2 da T1: Nesta situação, consideramos como variável didática a escolha da função ***f***, uma vez que se considerássemos uma outra função (não constante) implicaria em uma situação diferente.

Pré-requisitos e Competências da St2 da T1: Para realizar esta tarefa os estudantes devem dispor de conhecimentos relativos à Derivada e à Equação da Reta. Caso os sujeitos não tenham estabelecido uma Relação Pessoal (X,O) com esses saberes, possíveis entraves e vazios didáticos podem emergir na realização da tarefa, a saber: não conceber que a derivada de uma função aplicada em um valor de abscissa corresponde ao declive da reta tangente à curva no ponto de abscissa considerada ou não conseguir representar a equação da reta tangente ao gráfico fazendo uso do ponto e do declive.

A seguir, apresentamos a análise da St3 que traz o seguinte enunciado:

St3	Representar, no registro gráfico, a equação da reta tangente obtida em St2 juntamente com a função ***f***.

Objetivo da St3 da T1: Proporcionar condições visuais capazes de favorecer aos estudantes compreenderem que a derivada de uma função, nesse caso a constante, não corresponde à reta tangente ao gráfico da referida função.

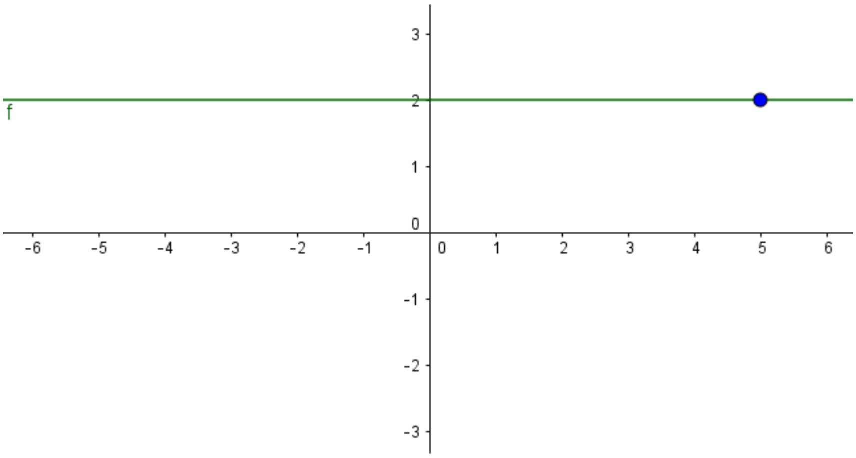
<u>Análise da St3 da T1</u>:

Na realização desta tarefa devemos fornecer a representação, no registro gráfico, da função ***f*** juntamente com a reta tangente ao gráfico dessa função no ponto considerado (5,2). Devemos, portanto, converter as representações obtidas nas subtarefas anteriores, no registro algébrico, para o registro gráfico, visando contribuir para uma profícua interpretação geométrica da derivada. Desconstruindo, assim, os entraves apresentados por Godoy (2004) e Meyer (2003) em suas pesquisas, a saber: interpretar a Derivada como a reta tangente ao gráfico de uma função.

Vale salientar, que para traçar o gráfico da função ***f*** e a curva da equação da reta tangente ao gráfico da referida função, no ponto (5,2), podemos utilizar a técnica (τ)

ponto a ponto, que consiste em estabelecer pontos no plano cartesiano e traçar as curvas, bem como, conhecendo o comportamento da função, traçá-la sem estabelecer pontos. Isto é, a aplicação da técnica denominada por Duval (1988) de: Interpretação global de propriedades das figuras. Com efeito, no registro gráfico, a representação da função ***f***, juntamente, com a reta tangente ao gráfico dessa função no ponto considerado (5,2) é dada conforme se mostra na Figura :

Figura 2: Visualização, no registro gráfico, da função ***f*** e da reta tangente a ***f*** no ponto (5,2)



Fonte: Produção própria do autor.

Vale reforçar que nessa visualização, tanto o gráfico da ***f*** quanto a reta tangente a ***f*** no ponto (5,2) se confundem por ocuparem simultaneamente os mesmos pontos do plano-*xy*.

A tecnologia (θ) que justifica as técnicas (τ) utilizadas para obtenção dessa visualização, no registro gráfico, está calcada na definição de Plano Cartesiano. Esta, por sua vez, está imersa numa teoria (Θ), que consiste no conjunto de conceitos que constituem o objeto matemático Plano Cartesiano (Ponto, Reta, Plano, etc.). Dessa forma, podemos inferir que esta tarefa constitui uma praxeologia completa, a saber: [T,τ,θ,Θ].

Variáveis didáticas da St3 da T1: Nesta tarefa, consideramos como variável didática a escolha da função ***f***, uma vez que se considerássemos uma outra função (não constante), consequentemente, modificaria toda a situação. Além disso, também julgamos como variável didática o ponto considerado, pois, a escolha de um ponto diferente resultaria em uma diferente representação gráfica (outras situações).

Pré-requisitos e Competências da St3 da T1: Na realização desta tarefa, os sujeitos precisam dispor de conhecimentos relativos ao objeto matemático Plano Cartesiano. Caso esses conhecimentos não se façam presentes, os estudantes podem manifestar dificuldades na representação gráfica da função ***f***, bem como, da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto considerado (5,2).

A seguir, apresentamos a análise da St4 que traz o seguinte enunciado:

St4	Fornecer uma descrição dos resultados obtidos nas subtarefas anteriores (St1, St2 e St3) na língua materna.

Objetivo da St4: Investigar, por meio da descrição na língua materna, as concepções dos estudantes com relação à derivada de uma função constante aplicada na abscissa de um ponto do gráfico dessa função e a reta tangente a esse gráfico no referido ponto.

<u>Análise da St4 da T1</u>:

Nesta tarefa, pretendemos fornecer uma descrição dos resultados alcançados nas subtarefas anteriores. Com efeito, inferimos que na derivação de uma função constante obteremos uma função nula. Além disso, o declive da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto é calculado por meio da aplicação do valor da abscissa do ponto considerado na derivada da referida função. No caso da função constante o declive da reta tangente em qualquer ponto será igual a zero.

Por fim, vale salientar, que a equação da reta tangente ao gráfico de uma função, que no registro gráfico consiste em uma reta, em um determinado ponto, corresponde à própria função.

Para realizarmos esta tarefa, mobilizamos conhecimentos relativos à Derivada, Declive, Equação da Reta, Reta Tangente, Plano Cartesiano e Função Constante que, no contexto praxeológico, constituem as técnicas (τ) que permitem realizar a tarefa. As tecnologias (θ) que justificam as τ empregadas estão pautadas nas definições dos conceitos supracitados e têm como teoria (Θ), o conjunto de noções que fundamentam tais conceitos. Vale salientar, que nesta situação as τ e as θ estão fortemente imbricadas entre si. Com efeito, podemos inferir que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: $[T,\tau,\theta,\Theta]$.

Variáveis didáticas da St4 da T1: Nesta situação, inferimos que a variável didática é a escolha função ***f***, com efeito, se considerarmos outra função, consequentemente, modificaria a situação em jogo.

Pré-requisitos e Competências da St4 da T1: Na realização desta tarefa, o estudante deve dispor de conhecimentos relativos aos objetos matemáticos Derivada, Declive, Equação da Reta, Reta Tangente, Plano Cartesiano e Função Constante. Caso os sujeitos não disponham de tais saberes, entraves e vazios didáticos podem emergir no desenvolvimento da tarefa, como exemplo: interpreta a derivada como a reta tangente ao gráfico de uma função, o que condiz com os resultados das pesquisas de Godoy (2004) e Meyer (2003), como já mencionamos anteriormente.

Apresentamos a seguir a T2, com as análises das suas respectivas subtarefas. Lembramos que a T2 traz o seguinte enunciado:

T2	**Considerar a função *g* dada por *g* de *x* igual a *x* ao quadrado, com *x* pertencente ao conjunto dos números Reais.**

Objetivo Geral da T2: Fornecer condições capazes de favorecer aos estudantes identificarem a estreita relação existente entre a derivada de uma função polinomial aplicada na abscissa de um determinado ponto do gráfico da função ***g*** e o declive da reta tangente a esse gráfico no referido ponto e analisar essa relação, por meio das representações mobilizadas pelos estudantes

A primeira subtarefa da T2 traz o seguinte enunciado:

St1	Representar a função ***g***, juntamente com a sua derivada, no registro gráfico.

Objetivo da St1 da T2: Proporcionar aos estudantes as condições que lhes permitam compreender que a derivada de uma função polinomial não corresponde à reta tangente ao gráfico da referida função.

<u>Análise da St1 da T2</u>:

Nesta situação, pretendemos representar a função ***g***, juntamente com a sua derivada, no registro gráfico. Com efeito, para realizarmos esta tarefa é necessário mobilizar as seguintes técnicas (τ): representação de uma função no registro algébrico; derivação de uma função e representação de funções em um mesmo sistema de coordenadas, no registro gráfico.

As tecnologias (θ) que justificam essas τ, consistem nas definições de Função Polinomial, de Derivada e de Sistema Cartesiano Ortogonal. Essas θ são justificadas por uma teoria (Θ), a saber: o conjunto de conhecimentos matemáticos que constituem os conceitos Função Polinomial, Derivada e Sistema Cartesiano Ortogonal. Nessa perspectiva, podemos inferir que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: [T,τ,θ,Θ].

Notadamente, para fornecer uma representação da função ***g***, juntamente com a sua derivada, no registro gráfico, devemos, inicialmente, mobilizar as suas respectivas representações no registro algébrico e, em seguida, converter essas representações do registro algébrico para o registro gráfico.

Para derivarmos a função ***g***, podemos fazer uso da Regra da potência, bem como, da definição de Derivada. Esses resultados estão presentes na praxeologia do objeto matemático Derivada no livro Swokowski (1994).

Fazendo uso da Regra da potência, devemos multiplicar o valor do grau do monômio pelo próprio monômio e, em seguida, subtrair uma unidade do expoente da variável, ou seja: dada a função $h(x) = cx^n$, obtém-se com o referido processo, a função $h'(x) = n(cx^{n-1})$. Este resultado encontra-se demonstrado no LD analisado, como já mencionamos anteriormente.

Assim, a derivada da $g(x) = x^2$, no registro algébrico, é obtida da seguinte maneira:

$g(x) = x^2$	*Função **g**;*
$g'(x) = 2(x^{2-1})$	*Derivando a função utilizando a Regra de potência;*
$g'(x) = 2x$	*Resultado da Derivada da função **g**.*

Esta τ é justificada por uma tecnologia (θ), que neste caso, é a definição de Derivada. Como já mencionamos, podemos fazer uso dessa θ como τ para obtermos a derivada da função ***g***, como segue:

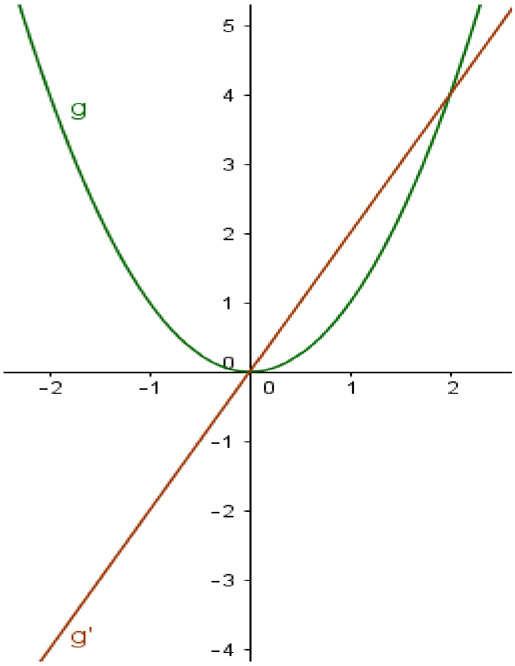
$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	*Limite do quociente, por definição.*
$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$	*Limite do quociente, por substituição.*
$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$	*Limite do quociente por tratamento.*
$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,(2x + h)}{h}$	*Limite do quociente por tratamento.*
$g'(x) = \lim_{h\to 0} 2x + h$	*Limite do resultado do quociente.*
$g'(x) = 2x$	*Resultado da Derivada da função **g**.*

Inferimos, nessa situação, que a τ e a θ estão imbricadas.

Vale salientar, que a θ apresentada está calcada na teoria (Θ) que consiste no conjunto de conceitos que constituem o objeto matemático Derivada (Conjuntos, Funções, Limites, Trigonometria, Geometrias, etc).

A representação de ***g*** e da ***g'*** no registro gráfico resulta na visualização notável na Figura 3:

Figura 3: Visualização gráfica da função ***g*** e ***g'***



Fonte: Produção própria do autor.

Por fim, inferimos que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: [T,τ,θ,Θ].

Variáveis didáticas da St1 da T2: A variável didática envolvida nesta situação é a escolha da função ***g***, uma vez que a escolha de uma outra função (que não fosse quadrada) modificaria a situação em jogo.

Pré-requisitos e Competências da St1 da T2: Para realizar esta tarefa, é imprescindível que os sujeitos já tenham estabelecido uma Relação Pessoal (X,O) com os objetos matemáticos Função Polinomial, Derivada e Sistema Cartesiano Ortogonal. Considerando a situação em que os estudantes não disponham de conhecimentos relativos às noções supracitadas, possíveis entraves e vazios didáticos relativos à interpretação geométrica da derivada podem emergir no desenvolvimento da tarefa. Como já mencionamos, esses entraves estão relacionados interpretação da Derivada como a reta tangente ao gráfico de uma função, como fora discutido nas pesquisas de Godoy (2004) e Meyer (2003).

A seguir, apresentamos a análise da St2 que traz o seguinte enunciado:

St2	Considerar um ponto qualquer do gráfico da ***g*** para determinar o declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico, nesse ponto. Representar, no registro algébrico, a equação da referida reta.

Objetivo da St2 da T2: Proporcionar condições capazes de favorecer aos estudantes compreenderem que a derivada de uma função constante não corresponde à reta tangente ao gráfico da referida função.

<u>Análise da St2</u>:

Nesta tarefa, é solicitado o declive da reta tangente ao gráfico da ***g***, dada por $\boldsymbol{g(x) = x^2}$, em um ponto qualquer, e a equação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Notadamente, na realização desta tarefa é necessária a mobilização das seguintes técnicas (τ): determinação do declive da reta tangente ao gráfico da ***g*** no ponto considerado e representação da equação da referida reta, no registro algébrico.

As tecnologias (θ) que justificam tais τ estão pautadas nas definições dos conceitos Derivada, Declive, Reta Tangente e Equação da Reta. Por sua vez, essas θ tem como teoria (Θ) o conjunto de conhecimentos matemáticos que constituem as noções de Derivada, Declive, Reta Tangente e Equação da Reta. Assim, podemos inferir que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: $[T,\tau,\theta,\Theta]$.

Para determinarmos um ponto pertencente ao gráfico da função ***g***, devemos escolher um valor da abscissa do referido ponto no seu domínio (conjunto dos números reais). Digamos que o número 3 é escolhido. Aplicando este a função ***g***, obtemos o ponto (3,9) que pertence ao gráfico de ***g***.

Para determinar o declive da reta tangente ao gráfico da ***g*** no ponto (3,9), aplicaremos o valor da abscissa deste ponto na função ***g'*** obtida na St1 da T2 do, visto que a derivada de uma função aplicada em um determinado valor de abscissa corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da referida função no ponto de abscissa considerada. Assim, sabendo-se que:

$$\boldsymbol{g'(x) = 2x}$$

temos que o valor funcional de ***g*** aplicado em $x = 3$ é,

$$g'(3) = (2).(3) = 6$$

Este resultado corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico da ***g*** no ponto (3,9).

Com efeito, a equação da reta tangente ao gráfico da ***g*** que passa no ponto (3,9) e que tem declividade igual a 6 é obtida com o seguinte tratamento:

$y - y_o = \boldsymbol{m}.(x - x_o)$	*Equação da reta por (x_0, y_0) com declive **m***
$y - \boldsymbol{g}(3) = 6.(x - 3)$	*Equação da reta por (3,**g**(3)) com declive 0*
$y - 9 = 6.(x - 3)$	*Tratamento da equação da reta que passa no ponto (3,9) com declive 0*
$y = 6x - 18 + 9$	*Tratamento da equação da reta que passa no ponto (3,9) com declive 0*
$y = 6x - 9$	*Equação da reta que passa no ponto (3,9) com declive 0*

A equação da reta tangente ao gráfico da ***g*** no ponto (3,9) é dada por: $y = 6x - 9$.

Variáveis didáticas da St2 da T2: A variável didática envolvida nesta tarefa é a escolha da função ***g***, uma vez que diferentes funções resultariam em diferentes situações. Julgamos que o ponto considerado (3,9) também se constitui como uma variável didática. À medida que considerarmos diferentes pontos do gráfico da ***g***, teremos diferentes retas tangentes ao gráfico (diferentes situações).

Pré-requisitos e Competências da St2 da T2: Na realização desta tarefa, os estudantes devem dispor de conhecimentos relativos à Derivada, Declive, Reta Tangente e Equação da Reta. Caso os sujeitos não disponham de conhecimentos relativos a esses saberes, possíveis entraves e vazios didáticos podem emergir na realização da tarefa, como exemplo: não conceber que a derivada de uma função aplicada em um valor de abscissa corresponde ao declive da reta tangente à curva no ponto de abscissa considerada ou não conseguir representar a equação da reta tangente ao gráfico fazendo uso do ponto e do declive.

A seguir, apresentamos a análise da St3 que traz o seguinte enunciado:

St3	Representar, no registro gráfico, a equação da reta tangente, obtida em St2 juntamente com a função ***g***.

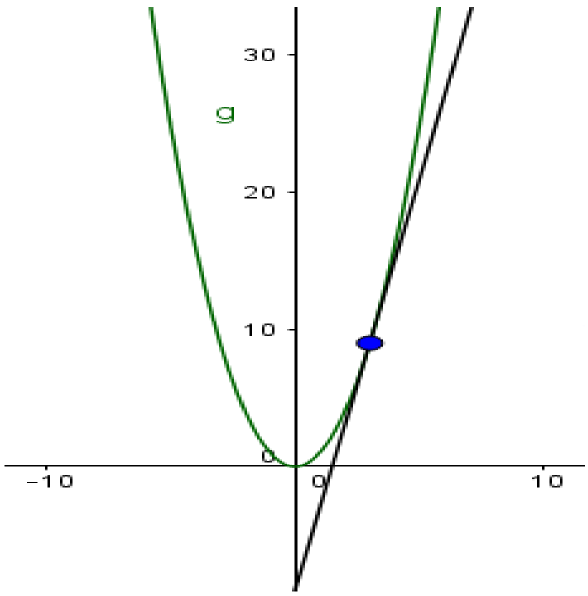
Objetivo da St3 da T2: Proporcionar condições capazes de favorecer aos estudantes compreenderem que a derivada de uma função polinomial não corresponde à reta tangente ao gráfico da referida função.

Análise da St3 da T2:

Nesta tarefa, é solicitada uma representação, no registro gráfico, da função ***g*** juntamente com a reta tangente ao gráfico dessa função no ponto determinado (3,9). Nessa perspectiva, estaremos convertendo uma representação da função do registro algébrico para o registro gráfico. Acreditamos que esse processo contribui para uma profícua interpretação geométrica da derivada, desconstruindo, assim, os entraves apresentados por Godoy (2004) e Meyer (2003), em suas pesquisas, relativos à interpretação dada sobre a Derivada em conformidade com a reta tangente ao gráfico de uma função.

Para traçar o gráfico da função ***g*** e a curva da equação da reta tangente ao gráfico da referida função, no ponto (3,9), podemos empregar a técnica (τ) ponto a ponto, ou da interpretação global. Investindo nessa última é possível vermos que a representação da função ***g*** juntamente com a reta tangente ao gráfico dessa função no ponto considerado (3,9) resulta na Figura4:

Figura 4: Visualização gráfica da ***g*** e reta tangente a ***g*** no ponto (3,9)



Fonte: Produção própria do autor.

A tecnologia (θ) que justifica tais τ é calcada na definição do objeto matemático Sistema Cartesiano Ortogonal, por sua vez, está imersa numa teoria (Θ), a saber: conjunto de noções que constituem o conceito Sistema Cartesiano Ortogonal. Diante do exposto, podemos inferir que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: [T,τ,θ,Θ].

Variáveis didáticas da St3 da T2: Consideramos como variável didática a escolha da função ***g***, visto que, se considerássemos outra função (diferente da função quadrada) modificaria toda a situação. Também julgamos como variável didática a escolha do ponto, uma vez que diferentes pontos pertencentes a ***g*** implica em diferentes equações de retas tangestes.

Pré-requisitos e Competências da St3 da T2: Na realização desta tarefa, os sujeitos precisam dispor de conhecimentos relativos ao objeto matemático Sistema Cartesiano Ortogonal. Caso esses conhecimentos não estejam presentes no arcabouço cognitivo dos estudantes, dificuldades podem emergir no processo de representação gráfica da função ***f***, bem como, da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto considerado.

A seguir, apresentamos a análise da St4 que traz o seguinte enunciado:

St4	Fornecer uma descrição dos resultados obtidos nas subtarefas anteriores (St1, St2 e St3) na língua materna e estabelecer as relações entre os conceitos envolvidos.

Objetivo da St4 da T2: Investigar, por meio da descrição na língua materna, a concepção dos estudantes com relação à derivada de uma função aplicada na abscissa de um ponto do gráfico dessa função e a reta tangente a esse gráfico no referido ponto

<u>Análise da St4 da T2</u>:

A informação esperada nesta tarefa é que ao derivar a função polinomial ***f*** obteremos uma nova função ***f*** linha. Com efeito, a declividade da reta tangente ao gráfico da ***f*** no ponto (3,9) é calculado por meio da aplicação do valor da abscissa do ponto considerado na derivada da referida função. Nesse caso, o declive da reta tangente ao gráfico da ***f*** no ponto (3,9) é igual a 6. Assim, a equação da referida reta é dada por: $y = 6x – 9$.

Diante da análise precedente, inferimos que a realização desta tarefa, passa pela mobilização de conhecimentos da Derivada, do Declive, da Equação da Reta, da Reta Tangente, do Sistema Cartesiano Ortogonal e de Função Polinomial, que, no contexto praxeológico, constituem as técnicas (τ) que permitem realizar a tarefa. As tecnologias (θ) que justificam as τ empregadas na realização desta tarefa estão pautadas nas definições dos conceitos supracitados e tem como teoria (Θ), o conjunto de noções que fundamentam tais conceitos. Vale salientar, que nesta situação as τ e as θ estão fortemente imbricadas. Com efeito, inferimos que esta tarefa constitui uma praxeologia completa: $[T,\tau,\theta,\Theta]$.

Variáveis didáticas da St4 da T2: Nesta situação, julgamos como variáveis didáticas a escolha da função ***g***, bem como o ponto considerado, uma vez que diferentes funções implicariam em situações distintas. Da mesma forma, diferentes pontos, resultam em diferentes retas tangentes, modificando a situação em jogo.

Pré-requisitos e Competências da St4: Para realizar esta tarefa, o estudante deve dispor de conhecimentos relativos aos objetos matemáticos Derivada, Declive, Equação da Reta, Reta Tangente, Sistema Cartesiano Ortogonal e Função Polinomial. Caso os sujeitos não disponham de tais saberes, entraves e vazios didáticos podem emergir no desenvolvimento da tarefa, como exemplo: interpreta a derivada como a reta tangente ao gráfico de uma função, o que vai ao encontro dos resultados das pesquisas de Godoy (2004) e Meyer (2003), como já mencionamos anteriormente.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R.Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. In**: Annales de didactique et de sciences cognitives.** IREM de Strasbourg, v. 1, 1988. p. 235-253.

GODOY, L.F.S.. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem.** 2004. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003

HENRIQUES, A. Estudo de relações em sala de aula com a presença de ambientes computacionais de aprendizagem – PERSAC, In: I COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSINO DE CIÊNCIAS E DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS – CIEDIC. **Anais...** Feira de Santana, 27 – 31 de Outubro de 2014.

HENRIQUES, A. E SERÔDIO, R**. Intervenção de tecnologias e noções de registros de representação no estudo de integrais múltiplas na licenciatura em matemática.** Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM), UFSCar, São Carlos, SP, Brasil. 15-19 de julho de 2013.

SWOKOWSKI, Earl Willian. **O Cálculo Com Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, Vol 1, 1994.