Matemática

Geometria Analítica I

Luciano Moura Cavalcante

2ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2019

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo
Bibliotecária – CRB-3 / 623

C376c Cavalcante, Luciano Moura
Geometria analítica I / Luciano Moura Cavalcante. 3. ed. – Fortaleza : EdUECE, 2015.

125 p. ; il. (Matemática)

ISBN: 978-85-7826-403-1

1. Geometria analítica. I. Título.

CDD: 516.3

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

Este trabalho versa sobre um dos temas mais interessantes da matemática, que é a Geometria Analítica, e tem por objetivo maior servir como suporte e orientação a alunos dos cursos de matemática e áreas afins, e é direcionado principalmente aos alunos dos nossos cursos ofertados na modalidade a distância.

A Geometria Analítica é aqui apresentada inicialmente na sua forma clássica, no plano cartesiano, como o estudo da reta e das cônicas, dando uma abordagem simples e precisa.

Nas unidades finais, fazemos uma abordagem com um tratamento vetorial, no espaço R^3, onde trabalhamos o conceito, propriedades e operações com vetores, para em seguida apresentarmos um estudo da reta e do plano nesse espaço.

Procuramos apresentar um texto escrito de forma que o leitor se sinta autossuficiente no entendimento da teoria, com sequencias de exercícios resolvidos e propostos dentro de cada unidade.

O autor

Capítulo 1

A Reta Orientada

Objetivos

- Conhecer a reta orientada.
- Distinguir valor relativo e absoluto de um número.
- Aprender a calcular distância entre dois pontos da reta.

Introdução

A Geometria Analítica é a parte da Matemática onde tratamos a reta e o plano, não simplesmente como entes geométricos, mas como conjuntos de pontos que podem ser identificados em um sistema de referencial e consequentemente podem ser equacionados. O nosso estudo da Geometria Analítica será feito passo a passo, primeiramente conhecendo a reta orientada, que nos permitirá compor sistemas de eixos que nos servirão como referencial para localização de pontos, retas e outras curvas no plano, como também para se identificar retas, planos e outras curvas e superfícies no espaço.

Esses sistemas de eixos a que nos referimos, que serão conhecidos como *sistemas de coordenadas cartesianas*, em homenagem a seu criador **René Descartes**, são compostos por dois eixos ou retas orientadas, quando trabalhamos no plano, ou por três eixos quando trabalhamos no espaço tridimensional.

René Descartes
(1596 – 1650)
Filósofo e Matemático francês, foi o primeiro a relacionar a Álgebra e Geometria, quando em 1637 criou a Geometria Analítica ao formalizar o conceito de coordenadas para identificação de pontos em um plano, a partir de um sistema de eixos ortogonais.

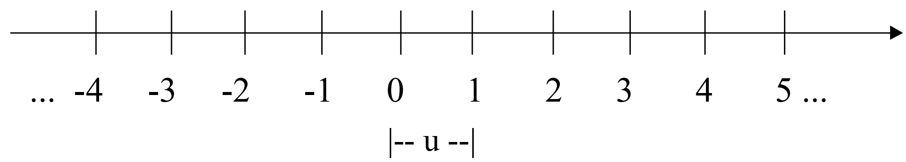
1. A Reta Orientada

Tomemos uma reta horizontal e demos a ela um sentido ou orientação, da esquerda para a direita.

Podemos então identificar cada ponto dessa reta por um número real, que chamaremos de abscissa do ponto.

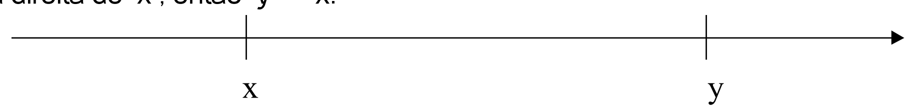
Para que possamos nos localizar melhor sobre a reta, tomemos o número zero como ponto fixo, para nos servir de referência, dando a esse ponto o nome de **origem.**

Para identificar os números reais inteiros estabelecemos uma unidade de medida linear *u*, como a distância da origem até o número 1, que é também a distância entre dois inteiros consecutivos quaisquer.

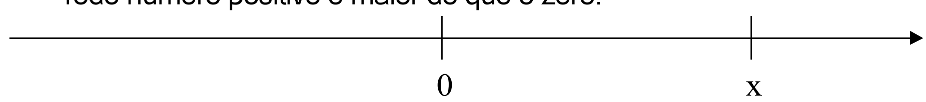


Algumas observações podem ser feitas, com base nas propriedades dos números reais:

Se x e y são dois números quaisquer sobre a reta orientada, com y à direita de x , então y > x.

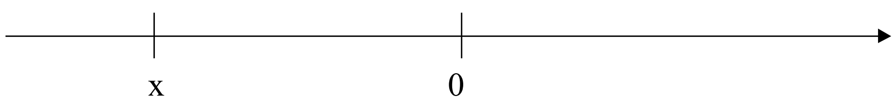


Todo número positivo é maior do que o zero.

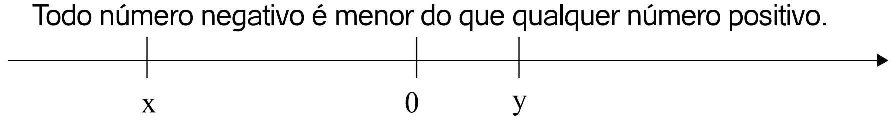


$x > 0$

Todo número negativo é menor do que o zero.



Todo número negativo é menor do que qualquer número positivo.



$x < 0$ e $x < y$ $\rightarrow$ $x < y$

A unidade de medida na reta é a unidade numérica. Uma reta orientada é também chamada de eixo.

2. Módulo de um Número

É possível se observar na reta orientada que todo número x tem uma posição bem definida sobre a reta, e que os positivos estão posicionados à direita, e os negativos à esquerda da origem.

Assim, vamos definir o módulo ou valor absoluto de qualquer número real x, como a sua distância até a origem, e representaremos por | x |.

Como distância é sempre positiva, então temos que | x | 0.

Assim, podemos dizer que $|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

Podemos também afirmar que o módulo ou valor absoluto de um número é igual a esse número sem o sinal, sendo, portanto, o valor quantitativo do número, enquanto que o seu sinal indica seu valor relativo, ou seja, se ele é positivo ou negativo.

Vejamos alguns exemplos:

$|+5| = 5$ $|-3| = 3$ $|-5| = 5$ $|- \ | = .$

Nesses exemplos, percebe–se que os números + 5 e - 5 têm o mesmo valor absoluto, embora sejam números distintos. Isso quer dizer que eles estão a uma mesma distância da origem da reta, em lados opostos, e por isso são ditos simétricos.

Outra maneira de se representar o módulo de um número real x é escrevê-lo na forma $|x| = \sqrt{x^2}$, $\forall \ x \in R$.

Observe que para todo x real, temos que $x^2 \geq 0$, portanto podemos extrair a sua raiz quadrada, e que esta é um número positivo ou nulo.

Assim, vejamos que $|-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$

$$|+12| = \sqrt{(+12)^2} = \sqrt{144} = 12.$$

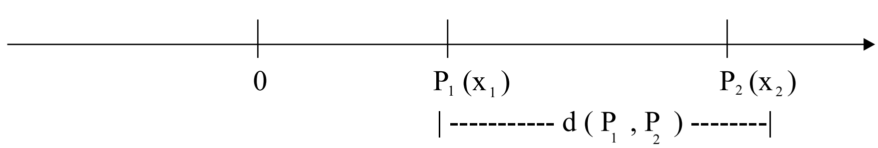
É fácil se observar que $|0| = 0$, que é geometricamente a distância do número 0 até a origem que é o próprio 0.

Todo número que não tem sinal, é um número positivo

3. Distância Entre Dois Pontos

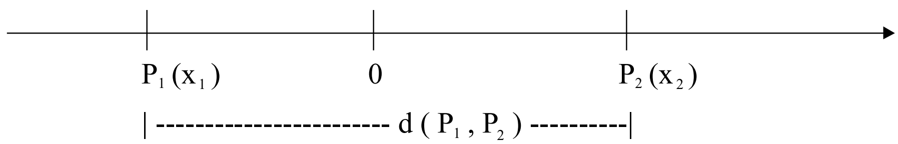
Já que definimos o módulo ou valor absoluto de um número como sendo a distância desde esse número x até a origem da reta, vamos agora verificar como podemos expressar a distância entre dois pontos $P_1(x_1)$ e $P_2(x_2)$, de abscissas x_1 e x_2, respectivamente.

Inicialmente, tomemos x_1 e x_2 com valores positivos, tais que $x_1 < x_2$.



Observe que a distância entre os dois pontos, que representamos por $d(P_1, P_2)$, pode ser escrita como $x_2 - x_1$, que é um número positivo porque $x_2 > x_1$.

Tomemos agora uma outra situação em que temos um ponto de abscissa positiva e outro com abscissa negativa, estando conseqüentemente um de um lado e o outro no lado oposto da origem.



Nessa situação teremos $d(P_1, P_2) = d(P_2, 0) + d(P_1, 0) =$ $|x_2| + |x_1|$.

Mas, $|x_2| = x_2$, por x_2 ser um número positivo, e $|x_1| = -x_1$, porque x_1 é um número negativo.

Portanto, temos que $d(P_1, P_2) = x_2 - x_1$.

Nas duas situações obtivemos o mesmo resultado, mas é bom observar que tomamos em ambas $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$.

Então, para evitar essa preocupação, devemos dizer que $d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|$, que é sempre um valor positivo, mesmo que $x_2 < x_1$.

Uma terceira situação para o posicionamento de P_1 e P_2 na reta orientada não foi estudada, e ela ocorre quando as abscissas de ambos os pontos forem números reais negativos. O resultado será o mesmo, e deixamos a dedução a critério do leitor.

O valor absoluto de um número pode ter uma outra representação: $|x| = \sqrt{x^2}$, e para a distância entre dois pontos na reta:

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$, onde x_1 e x_2 são as abscissas respectivas de P_1 e de P_2.

Atividades de avaliação

1. Encontre a medida do segmento de reta que liga os pontos A(-3) e B (+5).

Solução:

Para encontrar a solução, basta aplicar diretamente a forma da distância:

$$d(A, B) = \sqrt{[+5-(-3)]^2} = \sqrt{[+5+3]^2} = \sqrt{(+8)^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Façamos agora de forma diferente:

$$d(A, B) = \sqrt{[-3-(+5)]^2} = \sqrt{[-3-5]^2} = \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Observe que não interessa a ordem em que tomamos as abscissas dos dois pontos, pois o resultado final é sempre o mesmo.

2. A medida de um segmento $\overline{PQ}$ é igual a 12. Sendo P(+3), determine a abscissa de Q.

Solução:

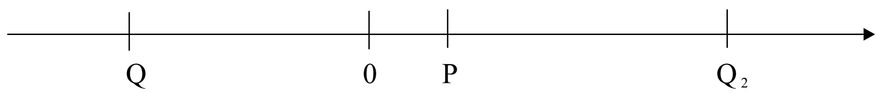
Para esse problema apresentaremos duas soluções, uma geométrica e outra algébrica.

a) Solução Geométrica:

Tomemos o ponto P dado, sobre a reta.

Existem na realidade, dois pontos Q_1 e Q_2 sobre o eixo, sendo

$Q_1 < P$ e $Q_2 > P$, que têm a mesma distância de 12 unidades para P.



Se x_1 e x_2 são respectivamente as abscissas de Q_1 e Q_2 e +3 é a abscissa de P, então

$x_1 = +3 - 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -9$ e

$x_2 = +3 + 12 \quad \Rightarrow \quad x_2 = +15.$

Portanto $Q_1(-9)$ e $Q_2(+15)$.

b) Solução Algébrica:

Sendo a medida de $\overline{PQ}$ a distância entre P e Q, e sendo esta de 12 unidades, então podemos afirmar que:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left[x_Q - (+3)\right]^2} \Rightarrow \sqrt{\left[x_Q - 3\right]^2} = 12 \Rightarrow (x_Q - 3)^2 = 12^2 \Rightarrow$$

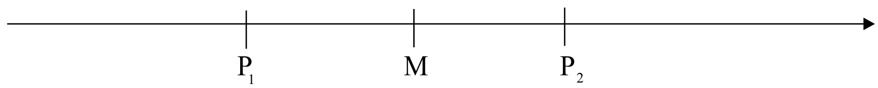
$$(x_Q - 3)^2 = 144 \Rightarrow x_Q - 3 = \pm\sqrt{144} \Rightarrow x_Q - 3 \pm 12 \Rightarrow$$

$$x_Q = +3 \pm 12 \Rightarrow \begin{cases} {}_Q = +3 + 12 \Rightarrow x_Q = +15 \\ x_Q = +3 - 12 \Rightarrow x_Q = -9. \end{cases}$$

4. Ponto Médio

Por definição, o ponto médio de um segmento é o ponto que divide esse segmento ao meio.

Tomemos então no eixo real dois pontos distintos $P_1(x_1)$ e $P_2(x_2)$ extremos de um segmento da reta, e chamemos de $M(x_M)$ o seu ponto médio.



Sendo M ponto médio, então $d(P_1, M) = d(M, P_2) \Rightarrow x_M - x_1 = x_2 - x_M$

$$\Rightarrow x_M + x_M = x_1 + x_2 \Rightarrow 2x_M = x_1 + x_2 \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Portanto, a abscissa do ponto médio é igual à média aritmética das abscissas dos pontos extremos.

Atividades de avaliação

1. Encontre o ponto médio do segmento cujos pontos extremos têm -3 e +8 como abscissas.

Solução:

Sendo M o ponto médio, então sua abscissa será $x_M = \dfrac{-3+(+8)}{2} \Rightarrow$

$$x_M = \frac{-3+8}{2} \Rightarrow x_M = \frac{5}{2}, \quad \text{logo } M\left(\frac{5}{2}\right).$$

2. Determine o ponto médio do segmento cujas abscissas dos extremos satisfazem a equação $|x + 3| = 2$.

Solução:

Primeiramente temos que resolver a equação dada para encontrar as abscissas dos pontos extremos.

$$|x+3| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x+3=-2 \\ x+3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-3 \\ x=2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Se -1 e -5 são as abscissas dos pontos extremos e M é seu ponto médio, então

$$x_M = \frac{-1+(-5)}{2} \Rightarrow x_M = \frac{-1-5}{2} \Rightarrow x_M = -3, \text{ ou } M(-3).$$

5. Segmento Orientado

Dados dois pontos distintos A e B sobre um eixo, sabemos que eles definem um segmento $\overrightarrow{AB}$, com duas características bem definidas, a direção indicada pelo eixo ou reta suporte que o contém, e sua medida que é a distância entre seus extremos.

Agora, vamos dar a esse segmento uma terceira característica que é o sentido ou orientação, para que ele nos transmita uma idéia de movimento ou deslocamento.

Assim, definimos um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ como o segmento de reta com sentido de A para B, com mesma direção e comprimento de $\overrightarrow{AB}$. Nesse caso dizemos que A é a origem e B a extremidade desse segmento orientado, pois ele transmite a idéia de um movimento que começa em A e termina em B.

Observe que dois pontos distintos A e B determinam dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, que têm mesmo módulo e direção mas sentidos contrários, que chamaremos de simétricos.

Todo segmento orientado tem três características que o definem, o módulo a direção e o sentido onde o módulo é a denominação para o seu comprimento.

Um segmento orientado é sempre representado na sua forma algébrica em função das abscissas dos seus pontos extremos. Para isso, suponhamos que $A(x_A)$ e $B(x_B)$ sejam dois pontos sobre um eixo, com $x_B > x_A$. Assim, dizemos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow \overrightarrow{AB} = x_B - x_A$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B \Rightarrow \overrightarrow{BA} = x_A - x_B$$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, o valor algébrico de um é simétrico do valor algébrico do outro.

Como $x_B > x_A$ então o valor algébrico de $\overrightarrow{AB}$ é positivo por ele ter o mesmo sentido do eixo, enquanto que $\overrightarrow{BA}$ é negativo por ter sentido contrário.

Se admitirmos que A e B possam ser pontos coincidentes sobre um eixo, então o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ terá medida nula por ser apenas um ponto, com direção e sentido indefinidos. Por isso esse segmento orientado será chamado de segmento nulo, cuja definição terá sua importância no decorrer do nosso curso, e que é representado por 0.

O módulo de um segmento orientado é a medida de seu comprimento, sendo portanto a distância entre seus extremos, logo:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$$

Atividades de avaliação

1. Determine o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, onde A(+2) e B(-7). Encontre também o seu módulo.

Solução:

Como sabemos, $\overrightarrow{AB} = B - A = -7 - (+2) = -7 - 2 = -9$

O módulo de $\overrightarrow{AB}$, sabemos que é o seu comprimento ou valor absoluto, logo $|\overrightarrow{AB}| = 9$.

De outra forma, temos $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7-2)^2}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 9$

2. Sendo $|\overrightarrow{PQ}| = 7$, determine a abscissa de P sabendo que a abscissa de Q é -1

Solução:

Se chamarmos de x a abscissa de P, então $\overrightarrow{PQ} = Q - P = -1 - x$.

$$|\overrightarrow{PQ}| = 7 \Rightarrow |-1 - x| = 7 \Rightarrow \begin{cases} -1 - x = 7 \\ -1 - x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 7 + 1 \\ -x = -7 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x = 8 \\ -x = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

Veja que obtivemos dois valores para a abscissa de P.

Para x = - 8, temos $\overrightarrow{PQ}$ = - 1 – (- 8) = 7, enquanto que para x = 6 temos que $\overrightarrow{PQ}$ = - 1 - 6 = - 7, e ambos têm módulo igual a 7.

Podemos também aplicar a outra forma de representação do módulo:

$$|\overrightarrow{PQ}| = 7 \Rightarrow \sqrt{(-1-x)^2} = 7 \Rightarrow (-1 - x)^2 = 49 \Rightarrow 1 + 2x + x^2 = 49$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}.$$

6. Razão de Secção

Dados dois pontos $A(x_A)$ e $B(x_B)$ sobre um eixo, dizemos que um ponto $C(x_C)$ pertencente ao mesmo eixo é um ponto divisor e divide o segmento $\overline{AB}$ numa razão r, se $\frac{AC}{CB}$ = r, onde AC é a medida de $\overrightarrow{AC}$ e CB é a medida de $\overrightarrow{CB}$.

É importante observar que , na forma como expressamos a razão, temos que observar uma orientação de A para C como também de C para B no outro segmento, o que nos garante que C é o ponto divisor

Observe:

Na razão $\frac{AC}{CB}$ = r, o ponto divisor C aparece como extremidade dos dois segmentos.

Se as coordenadas de A e de B são conhecidas é possível determinar a abscissa do ponto C em função da razão r e das abscissas de A e de B.

Tomemos $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = r \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = r \Rightarrow x_C - x_A = r.(x_B - x_C) \Rightarrow$

$x_C - x_A = r.x_B - r.x_C \Rightarrow x_C + r.x_C = x_A + r.x_B \Rightarrow$

$$(1 + r).x_C = x_A + r.x_B \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r}$$

Observações importantes:

- O ponto divisor C é um ponto diferente de B, pois se C coincide com B, a medida do segmento $\overline{CB}$ no denominador será nula, e não existirá a razão r.
- Se C for coincidente com o ponto A, teremos $r = 0$.
- O único valor real que a razão não pode assumir é $r = -1$, o que acarretaria a não existência do x_C.
- Se $r = 1$ o ponto divisor C será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- Para todo valor positivo de r, o ponto C será um ponto interior ao segmento $\overline{AB}$.
- Se r é um número negativo diferente de - 1, então o ponto C não pertence ao segmento.

Atividades de avaliação

1. Dados os pontos A(- 5) e B(+7), determine a abscissa do ponto C que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{1}{2}$.

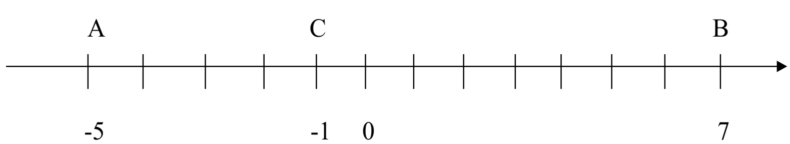
Solução:

Como são dadas as abscissas de A e de B, e também o valor da razão, então:

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \Rightarrow x_C = \frac{-5 + \frac{1}{2}.7}{1 + \frac{1}{2}} \Rightarrow x_C = \frac{-5 + \frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow x_C = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow x_C = -1.$

Vejamos geometricamente esse resultado.



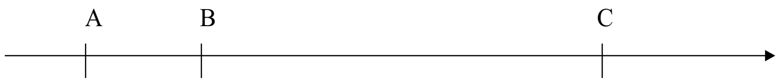
O segmento $\overline{AC}$ mede quatro unidades, e o segmento $\overline{CB}$ mede oito, portanto a razão entre eles é $\frac{1}{2}$.

2. Até que ponto o segmento de extremos A(- 2) e B(+ 5) deve ser prolongado no sentido de A para B de modo que seu comprimento seja triplicado?

Solução:

Apresentaremos duas soluções para esse problema.

a) Primeiro trataremos o ponto C que queremos determinar, como sendo o ponto divisor do segmento $\overline{AB}$ na razão r = - $\frac{3}{2}$, pois $\overline{AC} = 3\overline{AB}$ e $\overline{CB} = 2\overline{AB}$ com o sentido contrário.



Assim temos que $x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r}$ $\Rightarrow$ $x_C = \frac{-2 + \left(-\frac{3}{2}\right).(+5)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)}$ $\Rightarrow$

$x_C = \frac{-2 - \frac{15}{2}}{1 - \frac{3}{2}}$ $\Rightarrow$ $x_C = \frac{-\frac{19}{2}}{-\frac{1}{2}}$ $x_C = 19$.

b) Agora daremos uma solução onde, devido ao ponto C ser exterior ao segmento, tomaremos o ponto B como divisor do segmento $\overline{AC}$ na razão r = $\frac{1}{2}$, visto que $\overline{AB}$ sendo triplicado teremos que

$\overline{BC} = 2\overline{AB} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$

Portanto $x_B = \frac{x_A + r.x_C}{1+r}$ $\Rightarrow$ + 5 = $\frac{-2 + \frac{1}{2}.x_C}{1 + \frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $5.\frac{3}{2} = -2 + \frac{x_C}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{x_C}{2} = \frac{15}{2} + 2$ $\Rightarrow$ $\frac{x_C}{2} = \frac{19}{2}$ $\Rightarrow$ $x_C = 19$.

Pelas duas soluções, concluímos que C(19).

Síntese do capítulo

Neste primeiro capítulo foi estudada a reta orientada, onde fazemos uma correspondência dos pontos de uma reta com o conjunto dos números reais.

A reta orientada é considerada como o espaço unidimensional, e a partir do seu conhecimento pudemos definir ou conceituar o módulo de um número real como a distância desse número até a origem da reta que é o zero. Um conceito muito importante que trabalhamos nessa unidade é a distância entre dois pontos, principalmente quando apresentada como d(P1, P2) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2}$.

Os conceitos aqui apresentados são fundamentais para a sequência das outras unidades, pois esses conceitos, como a distância entre dois pontos; a razão de secção; o ponto médio e segmento orientado, serão trabalhados no plano e no espaço tridimencional.

Atividades de avaliação

1. Dados os seguintes pares de pontos A e B, determine os pontos médios de cada segmento de reta $\overline{AB}$:

a) A (-7) e B(+3)

b) A (-9) e B(-1)

c) A (-8) e B(+3)

d) A (+ 13) e B(+ 4)

2. Se C é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, determine:

a) A abscissa de A, sabendo que $x_C = -2$ e $x_B = +9$

b) A abscissa de B, sabendo que $x_A = +12$ e $x_C = -5$

3. As raízes da equação x2 – 7x + 12 = 0 são extremidades de um segmento $\overline{AB}$. Determine a abscissa do ponto médio desse segmento.

4. Determine o ponto A sabendo que $|\overline{AB}| = 6$ e B(- 3).

5. Para quaisquer valores das abscissa dos pontos A, B, C, D, E e F sobre um eixo, verifique que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + EF = \vec{0}$.

6. Até que ponto o segmento $\overline{AB}$ deve ser prolongado no sentido de A(- 7) para B(- 3), para que seu comprimento seja quadruplicado?

7. As raízes da equação $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ são as abscissas dos pontos A, B e C no eixo real. Determine a medida de $\overline{MN}$, onde M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sabendo que $x_A < x_B < x_C$.

8. Um móvel se desloca sobre um eixo, sendo sua posição em cada ponto dada por $x=3t + 1$, com t expresso em minutos. Determine o espaço percorrido por esse móvel, entre os instantes $t = 4$ e $t = 7$ minutos.

9. Dados os pontos A(- 1) e B(10), determine o ponto C que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão 3.

10. Sendo A (- 6); B(- 1) e C(3) determine o valor da razão $r = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Referências

STEINBRUCH, Alfredo; **Geometria Analítica**; São Paulo; Editora McGraw-Hill; 1987.

RIGHETTO, Armando; **Vetores e Geometria Analítica**; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

MACHADO, Antônio dos Santos; **Geometria Analítica e Polinômios**; São Paulo; Ed. Atual; 1986.

Capítulo 2

O Plano Cartesiano

Objetivos

- Conhecer o plano cartesiano.
- Calcular distância entre dois pontos no plano.
- Ter conhecimento sobre ponto médio e ponto divisor.
- Ter acesso à idéia de segmento orientado.

Introdução

Conhecendo a reta orientada a qual chamamos de eixo, passaremos agora a trabalhar na identificação de pontos no plano. Para isso é necessário que tenhamos um referencial que nos permita localizar os pontos do plano. Esse referencial é um sistema formado por dois eixos reais perpendiculares, interceptando–se em suas respectivas origens, ponto esse que será identificado como origem do sistema de eixos coordenados.

1. O Plano Cartesiano

O plano cartesiano é também chamado de espaço R2, por ser constituído pelo produto cartesiano de R por R.

As duas retas que formam o sistema são:

- Uma horizontal orientada da esquerda para a direita, cujos pontos serão chamados de abscissa e representados por x. (eixo dos x ou das abscissas)
- A outra, vertical orientada de baixo para cima, terá seus pontos representados por y, e chamados de ordenada. (eixo dos y ou das ordenadas)
- Esses dois eixos dividem o plano em quatro regiões que chamaremos de quadrantes, tendo cada um características próprias.
- **Primeiro quadrante –** Abscissa positiva e ordenada positiva.
- **Segundo quadrante –** Abscissa negativa e ordenada positiva
- **Terceiro quadrante –** Abscissa negativa e ordenada negativa
- **Quarto quadrante –** Abscissa positiva e ordenada negativa.

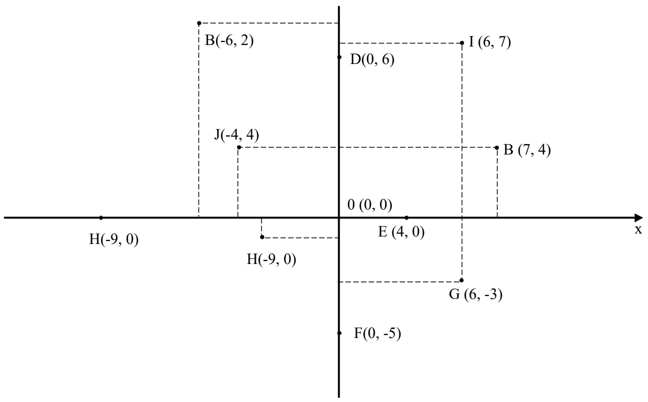


Figura 1 –

Para localizar um ponto qualquer P no R2 basta projetar verticalmente esse ponto no eixo dos x, e encontraremos um número real que será a sua abscissa, e sua projeção vertical no eixo dos y será a sua ordenada. Assim, todo ponto no plano cartesiano é identificado por um par ordenado de números e representado por P(x, y).

Os valores de x e de y para um ponto P(x, y) são as suas coordenadas, e indicam a sua localização no plano cartesiano.

Casos particulares ocorrem para pontos que estejam sobre os eixos coordenados, pois:

- Todo ponto sobre o eixo das abscissas tem ordenada nula.
- Todo ponto sobre o eixo das ordenadas tem abscissa nula.

Veja na figura a localização de alguns pontos, e observe as suas coordenadas. É fácil se observar também que as coordenadas do ponto de interseção dos dois eixos, que chamamos de origem do sistema de coordenadas, são iguais a zero, por isso será representada por O(0, 0).

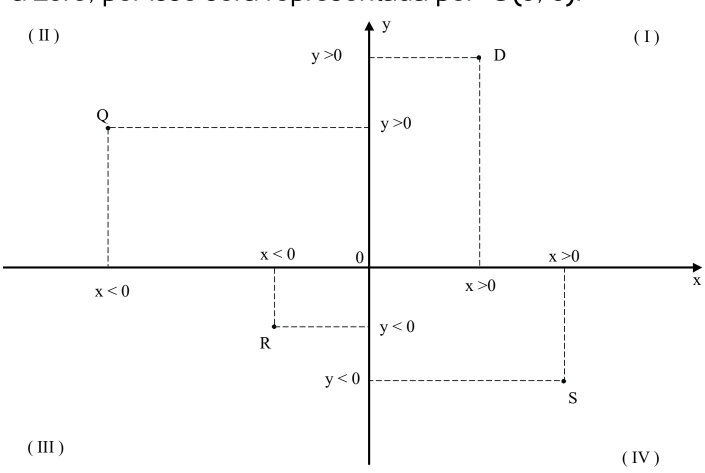


Figura 2 –

Observe na figura os pontos G e I que têm o mesmo valor de abscissa $x = 6$. Eles estão em uma reta que é perpendicular ao eixo x, e paralela ao eixo das ordenadas. Todos os pontos que estão sobre essa reta, têm o mesmo valor de abscissa, e por isso representamos essa reta pela equação $x = 6$.

De maneira geral, toda equação da forma $x = k$, com k constante, é de uma reta paralela ao eixo das ordenadas, assim como toda equação $y = k$ é de uma reta paralela ao eixo das abscissas, veja por exemplo na figura, os pontos A e J . Se o valor da constante k for igual a zero, temos dois casos particulares, onde:

- A reta $x = 0$ é o eixo y.
- A reta $y = 0$ é o eixo x.

Assim como as equações $x=k$ e $y=k$, com k constante, são representadas no plano cartesiano por retas, existem duas outras equações que são facilmente identificadas como conjuntos de pontos no plano cartesiano.

A equação $y=x$ identifica no plano cartesiano o conjunto dos pontos P(x, y) que têm a ordenada igual à abscissa, ou seja, todos os pontos da forma P(x , x). Esse conjunto de pontos estão alinhados em uma reta que passa pela origem do sistema, dividindo ao meio o primeiro e o terceiro quadrantes. Por isso ela é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares.

A equação $y = - x$ é de uma reta, cujos pontos são da forma P(x, - x), que divide ao meio o segundo e o quarto quadrantes, e por isso é chamada de bissetriz dos quadrantes pares.

Na figura abaixo apresentamos um gráfico mostrando todas essas retas apresentadas.

Teremos mais detalhes sobre essas retas, quando tratarmos especificamente de equações da reta no plano.

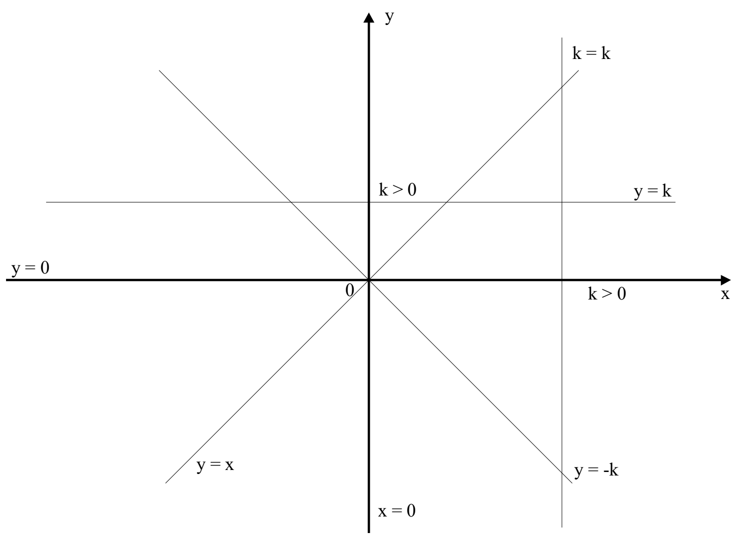


Figura 3 –

Observe que:

a) A reta $x = k$ divide o plano em dois semi-planos, um à sua esquerda e outro à sua direita.

O semi-plano da esquerda é constituído por todos os pontos cuja abscissa é menor do que k., por isso ele é representado por $R_1 = \{(x, y) \;\; R^2 / x < k\}$.

O semi-plano da esquerda é por conseqüência $R_2 = \{(x, y)\; R^2 / x > k\}$.

b) A reta $y = k$ divide o plano em dois semi-planos.

O semi-plano acima da reta, é constituído por todos os pontos do plano que têm ordenada maior do que k, sendo portanto $S_1 = \{(x , y) \;\; R^2 / y > k\}$.

O semi-plano abaixo é $S_2 = \{(x, y) \;\; R^2 / y < k\}$.

2. Distância entre dois Pontos

Assim como fizemos na reta orientada, vamos determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Para isso tomemos dois pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2 .y_2)$. A distância desde A até B, sabemos que é a medida do segmento $\overline{AB}$.

$$d(A, B) = \overline{AB}$$

Para determinar essa medida, tomemos os dois pontos A e B no plano, conforme a figura. Se traçarmos a partir do ponto A uma paralela ao eixo dos x, essa paralela interceptará a projeção do ponto B, ou seja sua ordenada, em um ponto C que terá abscissa igual à abscissa de B e a ordenada igual à de A.

Para você pensar e deduzir:

1 – Como se representa na forma de conjunto, a união de cada semi-plano com a reta que lhe serve de fronteira ?

2 – A reta $y = x$, como também $y = -x$ dividem o plano em dois semi-planos, então como seriam suas representações na forma de conjunto?

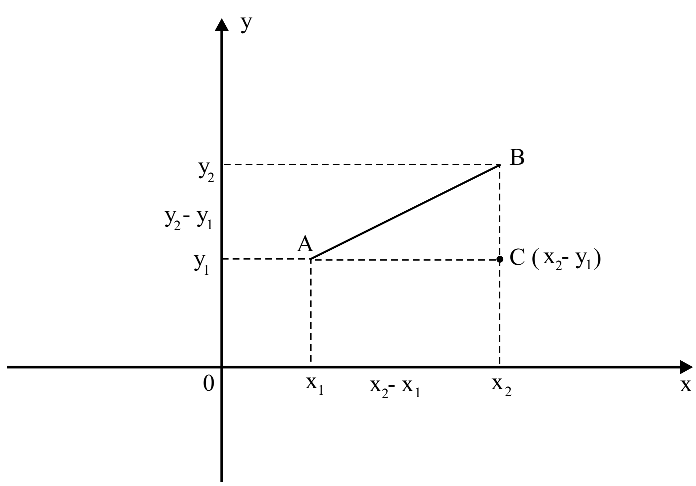


Figura 4 –

Temos agora um triângulo ABC com hipotenusa $\overline{AB}$ e catetos $\overline{AC}$ ede modo que pelo teorema de pitágoras, temos $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Mas, $\overline{AB}$ = d(a, b)

$\overline{AC} = x_2 - x_1$ e

$\overline{BC} = y_2 - y_1$.

Portanto, $d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Atividades de avaliação

1. Determine a distância entre os pontos A(-3, 1) e B(2, -5).

Solução:

Como são conhecidas as coordenadas dos dois pontos, então:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-5-1)^2}$$

$$\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{5^2 + (-6)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{25 + 36} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{61}.$$

2. Encontre o ponto sobre o eixo das ordenadas, cuja distância ao ponto A(2, - 4) seja igual a 2.

Solução:

Como o ponto que queremos encontrar está sobre o eixo das ordenadas, então ele é da forma P(0, y). Daí, temos que fazer:

$$d(P, A) = 2 \Rightarrow \sqrt{(0-2)^2 + (y-(-4))^2} = 2 \Rightarrow (-2)2 + (y + 4)2 = 2^2$$

$$\Rightarrow 4 + y^2 + 8y + 16 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = 0 \Rightarrow (y + 4)^2 = 0$$

$$y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4.$$

3. Ponto Médio

Na primeira unidade já definimos o ponto médio de um segmento como o ponto que divide esse segmento em duas partes iguais. Esse conceito é válido para qualquer segmento de reta estando ele sobre uma reta orientada, no plano ou em qualquer espaço.

Tomemos então um segmento de reta no plano cartesiano com extremidades A(x1, y1) e B(x2, y2), de modo que M(xM, yM) seja o seu ponto médio.

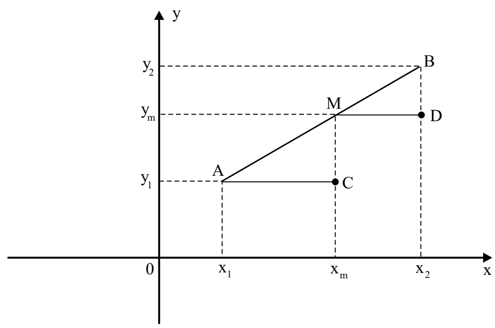


Figura 5 –

Na figura, observa-se que sendo M ponto médio de $\overline{AB}$ então $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ logo os triângulos AMC e MBD são congruentes, pois seus ângulos são dois a dois congruentes, o que implica dizer que:

$$\overline{AC} = \overline{MD} \Rightarrow x_M - x_1 = x_2 - x_M \Rightarrow 2x_M = x_1 + x_2 \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e

$$\overline{CM} = \overline{DB} \Rightarrow y_M - y_1 = y_2 - y_M \Rightarrow 2y_M = y_1 + y_2 \Rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto, o ponto médio de $\overline{AB}$ é $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Atividades de avaliação

1. Determine o ponto médio de um segmento de reta com extremidades em A(-2, 7) e B(4, -3).

Solução:

Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$x_M = \frac{-2+4}{2} \Rightarrow x_M = \frac{2}{2} \Rightarrow x_M = 1$$

$$y_M = \frac{7+(-3)}{2} \Rightarrow \quad y_M = \frac{7-3}{2} \Rightarrow y_M = \frac{4}{2} \Rightarrow y_M = 2.$$

Portanto, o ponto médio será M(1 , 2).

2. Até que ponto o segmento de reta $\overline{AB}$ de extremos A(3, -4) e B (-5, 6) deve ser prolongado no sentido de A para B, de modo que seu tamanho fique dobrado?

Solução:

Se o segmento deve ser prolongado até um ponto C e seu comprimento ficará duplicado, então o ponto B passará a ser o ponto médio de $\overline{AC}$. Assim:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow \quad -5 = \frac{3 + x_C}{2} \Rightarrow \quad -10 = 3 + x_C \quad \Rightarrow$$

$x_C = -13.$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow \quad 6 = \frac{-4 + y_C}{2} \Rightarrow \quad 12 = -4 + y_C \quad \Rightarrow \quad y_C = 16 .$$

Portanto, o ponto que queremos encontrar é C(- 13 , 16).

4. Segmento Orientado

Já vimos o conceito de segmento orientado quando tratamos de pontos e segmentos sobre a reta orientada, que é um espaço unidimensional. Agora estudaremos segmentos orientados no plano cartesiano, que é bidimensional, onde não temos apenas uma, mas infinitas direções. Mas mesmo no plano ou em outro espaço multidimensional o conceito permanece o mesmo.

Tomemos dois pontos A(x_1 . y_1) e B(x_2 , y_2) no R^2. O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o segmento de reta com origem em A e extremidade em B, que tem a direção da reta determinada por A e B, e cujo módulo é a distância entre A e B.

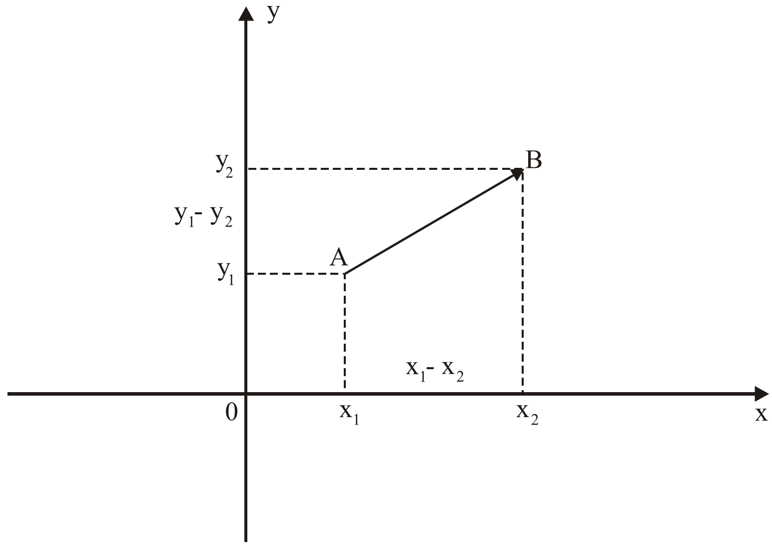


Figura 6 –

Por definição temos que $\overrightarrow{AB}$ = B - A $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = (x^2, y^2) - (x^1, y^1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).

Veja que o segmento $\overrightarrow{AB}$ é composto por duas componentes, sendo x_2- x_1 no eixo dos x, e $y_2 - y_1$ no eixo dos y , e como $x_2 - x_1 =$ a e $y_2 - y_1 =$ b são números reais, então,

$$\overrightarrow{AB} = (a, b)$$

A direção do segmento $\overrightarrow{AB}$ é dada pela reta suporte que o contém, e o seu sentido é de A para B.

O módulo de um segmento orientado é o seu comprimento ou a distância entre seus extremos, então:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{ou} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Atividades de avaliação

1. Dados os pontos A(4, - 3) e B(2 , 5), encontre o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

Solução:

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (2, 5) - (4, - 3) = (2 – 4, 5 – (- 3)) = (- 2, 8).

2. Determine a extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ = (-1, 5) cuja origem é o ponto P(4, 7).

Solução:

Suponha que a extremidade seja Q(x, y), e sabendo que $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Rightarrow$
$(-1, 5) = (x, y) - (4, 7) \Rightarrow (x, y) = (-1, 5) + (4, 7) \Rightarrow$
$(x, y) = (3, 12)$.

Portanto , a extremidade será Q(3, 12).

5. Razão de Secção

O conceito de ponto divisor de um segmento em uma razão dada , já conhecemos quando estudamos pontos e segmentos sobre um eixo. Agora estenderemos esse conceito para segmentos no plano cartesiano, onde um segmento de reta $\overline{AB}$ é dividido por um ponto C numa razão r .

Tomemos então um segmento $\overline{AB}$ de extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e um ponto $C(x_C, y_C)$, colinear com A e B, que divida o segmento $\overline{AB}$ na razão r.

Assim, $\dfrac{AC}{CB} = r \Rightarrow AC = r.CB \quad C - A = r(B - C) \Rightarrow$

$$(x_C, y_C) - (x_A, y_A) = r[(x_B, y_B) - (x_C, y_C)] \Rightarrow$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A) = r(x_B - x_C, y_B - y_C) \Rightarrow$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A) = (r(x_B - x_C), r(y_B - y_C)) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_C - x_A = r(x_B - x_C) \\ y_C - y_A = r(y_B - y_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C - x_A = r.x_B - r.x_C \\ y_C - y_A = r.y_B - r.y_C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_C + r.x_C = x_A + r.x_B \\ y_C + r.y_C = y_A + r.y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C(1+r) = x_A + r.x_B \\ y_C(1+r) = y_A + r.y_B \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{y_A + r.y_B}{1+r}$$

Veja que todas aquelas observações feitas para ponto divisor, quando estudamos na reta, são válidas também aqui no plano.

O ponto divisor C é um ponto diferente de B, pois se C coincide com B o segmento $\overrightarrow{CB}$ do denominador será nulo, e não existirá a razão r.

Se C for coincidente com o ponto A, teremos r = 0.

O único valor real que a razão não pode assumir é r = - 1, o que acarretaria a não existência do x_C, e do y_C.

Se r = 1 o ponto divisor C será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, onde teremos

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{e} \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Para todo valor positivo de r, o ponto C será um ponto interior ao segmento $\overline{AB}$.

Se r é um número negativo diferente de - 1, então o ponto C não pertence ao segmento $\overline{AB}$.

Atividades de avaliação

1. Determine as coordenadas do ponto C que divide o segmento $\overline{AB}$ de extremidades A(- 1, 2) e B(3, - 5) na razão - 2.

Solução:

Como a razão r e as coordenadas dos pontos extremos são dadas, então aplicamos direto

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \Rightarrow \quad x_C = \frac{-1+(-2).3}{1+(-2)} \Rightarrow \quad x_C = \frac{-1-6}{-1} \Rightarrow \quad x_C = 7 .$$

$$y_C = \frac{y_A + r.y_B}{1+r} \Rightarrow \quad y_C = \frac{2+(-2).(-5)}{1+(-2)} \Rightarrow \quad y_C = \frac{2+10}{-1} \Rightarrow \quad y_C = -12 .$$

Portanto, o ponto divisor é C(7 , - 12) .

Esse exercício pode ter uma outra solução, pois como r < 0, então o ponto divisor C é exterior ao segmento $\overline{AB}$. Encontre essa outra solução, admitindo o ponto B como divisor do segmento $\overline{AC}$. (Veja exercício 2 do capítulo um. 6)

2. Até que ponto o segmento de reta $\overline{AB}$ de extremos A(-2, 3) e B(0, 1) deve ser prolongado no sentido de A para B para ter seu comprimento quadruplicado?

Solução:

A solução se resume em determinar um ponto C divisor do segmento dado em uma razão $r = -\frac{4}{3}$.

Assim, teremos:

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \Rightarrow x_C = \frac{-2+\left(-\frac{4}{3}\right).0}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow x_C = \frac{-2}{-\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow x_C = 6.$$

$$y_C = \frac{y_A + r.y_B}{1+r} \Rightarrow y_C = \frac{3+\left(-\frac{4}{3}\right).1}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow y_C = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y_C = -5.$$

Portanto, o ponto procurado é C(6, - 5).

Procure solucionar esse exercício, admitindo que B é ponto divisor do segmento $\overline{AC}$. (Volte à unidade 1. 6 e veja exemplo semelhante)

Síntese do capítulo

Neste segundo capítulo estudamos o plano como um conjunto de pontos, onde usamos um sistema de coordenadas formado por dois eixos como referencial. Esse sistema nos permitiu localizar pontos no plano, onde cada ponto passou a ser identificado por um par ordenado de números reais (x , y).

Em seguida, todos aqueles conceitos que havíamos trabalhado na reta orientada foram estudados no plano ou espaço bidimensional, onde devemos destacar:

Distância entre dois pontos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Segmento orientado:

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Ponto divisor:

Se C é um ponto que divide um segmento $\overrightarrow{AB}$ numa razão r, então

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{y_A + r.y_B}{1+r}.$$

Atividades de avaliação

1. Localize em um sistema de coordenadas os seguintes pontos: A(2, 5); B(-1, 3); C(4, -2); D(- 4, - 6); E(5, 0); F(0, - 4); G(3, - $\frac{3}{2}$) e H(0,5; - 4,5).

2. Desenhe um quadrado de centro na origem do sistema de coordenadas, os lados paralelos aos eixos, com lados medindo 6 unidades. Quais as coordenadas dos seus vértices? E as equações das retas que contêm seus lados?

3. Desenhe um quadrado de centro na origem do sistema de coordenadas, os vértices sobre os eixos coordenados, com cada diagonal medindo 8 unidades. Quais as coordenadas dos seus vértices?

4. Encontre as coordenadas do ponto A', simétrico de A(-2 , 5) com relação ao eixo das abscissas.

5. Encontre as coordenadas do ponto B', simétrico de B(4, - 6) com relação ao eixo das ordenadas.

6. Encontre as coordenadas do ponto C', simétrico de C(- 7, 3) com relação à origem do sistema.

7. Sabendo que o ponto A(a, b) está situado no quarto quadrante, em que quadrantes estão situados os pontos B(- a, b) e C(a, - b)?

8. Um triângulo eqüilátero com lado medindo 10 unidades tem um vértice na origem do sistema e um outro vértice sobre o eixo das abscissas. Determine as coordenadas do terceiro vértice, sabendo que ele se encontra no segundo quadrante.

9. Indique, fazendo um gráfico para cada caso, as regiões do plano indicadas a seguir:

a) R1 = {(x, y) $\in$ R2 / x > - 3}

b) R2 = {(x, y) $\in$ R2 / - 4 < y < 2}

c) R^3 = {(x, y) $\in$ R2 / x > - 3 e - 4 < y < 2}

d) $R4 = \{(x, y) \in R2 \ / \ x > \ 0 \text{ e } y \ \ 2\}$

e) $R5 = \{(x, y) \in R2 \ / \ |x| < 3 \text{ e } |y| < 4\}$.

Obs.: Use reta contínua para indicar que ela pertence à região, e uma reta tracejada para indicar que essa reta não pertence ao conjunto de pontos da região.

10. Calcule a distância entre os pontos $A(-7, 1)$ e $B(2, -3)$.

11. Determine a distância desde a origem do sistema até o ponto P(- 4, 6).

12. Calcule o perímetro do triângulo de vértices A(-1, 3); B(0, - 5) e C(4, 2).

13. Sabendo que os pontos A(7, 5) e B(3, 2) são vértices consecutivos de um quadrado, calcule seu perímetro e a medida de sua diagonal.

14. Sabendo que os pontos A(1, 3) e B(6, - 2) são as extremidades de uma das diagonais de um quadrado, calcule a medida de seu lado e sua área.

15. Encontre um ponto que está a 10 unidades da origem do sistema, cuja ordenada é o dobro da abscissa.

16. Determine um ponto de ordenada 2, que está a 5 unidades de distância do ponto A(0, - 1).

17. Determine um ponto sobre o eixo x, que seja eqüidistante de A(1, - 1) e B(5, 7).

18. Encontre um ponto que pertence ao eixo y, cuja distância ao ponto A(3, 0) é o dobro de sua distância à origem.

19. Qual o ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que eqüidista dos pontos A(7, 0) e B(0, 1).

20. Quais os pontos da bissetriz dos quadrantes pares cuja distância até a origem é de 12 unidades?

21. Determine um ponto que pertença à bissetriz dos quadrantes pares, e forma com os pontos A(0, 3) e B(3, 0) um triângulo eqüilátero. (Devem aparecer duas possibilidades)

22. Encontre o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em cada caso:

a) A(5, 7) e B(1, 3)

b) A(8, - 5) e B(2, - 7)

c) A(3, - 1) e B(- 2, 6)

d) A(4, - 3) e B(- 4, - 3)

e) A(12, - 9) e B(- 5, 4)

22. Sabendo que $M(\frac{1}{2}, 1)$ é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, determine o ponto A se $B(-3, \frac{7}{2})$.

23. Dados os pontos $P(5, 6)$ e $Q(\frac{10}{3}, \frac{1}{2})$, até que ponto o segmento $\overline{PQ}$ deve ser prolongado no sentido de P para Q de modo que seu comprimento seja duplicado?

24. As diagonais de um paralelogramo ABCD se interceptam no ponto M(- 2, 4). Determine os vértices C e D, sabendo que A(4, 1) e B (2, 3).

25. Determine a medida da mediana relativa ao vértice A de um triângulo ABC, sabendo que A(5, - 1); B(1, 7) e C(- 3, 5).

26. Em um triângulo ABC são dados o vértice A(2, 1), $M(\frac{7}{2}, 3)$ ponto médio de $\overline{AB}$ e $N(4, \frac{5}{2})$ ponto médio de $\overline{AC}$. Determine o seu perímetro.

27. Determine o ponto P que divide o segmento de reta $\overline{AB}$ de extremos (1, 1) e B(7, 15) na razão $\frac{2}{5}$.

28. Ao ser prolongado o segmento $\overline{AB}$ no sentido de A(7, - 2) para $B(1, \frac{1}{2})$ até um ponto P, obtemos um segmento $\overline{AP} = 3.\overline{AB}$. Determine o ponto P.

Referências

STEINBRUCH, Alfredo; **Geometria Analítica**; São Paulo; Editora McGraw-Hill; 1987.

RIGHETTO, Armando; **Vetores e Geometria Analítica**; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

MURDOCH, David C; **Geometria Analítica**; Rio de Janeiro; Ed. LTC; 1971.

Capítulo 3

A Reta no R^2

Objetivos

Trabalhar com a reta no plano.

Conhecer as equações de uma reta.

Calcular ângulo entre duas retas.

Identificar a posição de duas retas no plano.

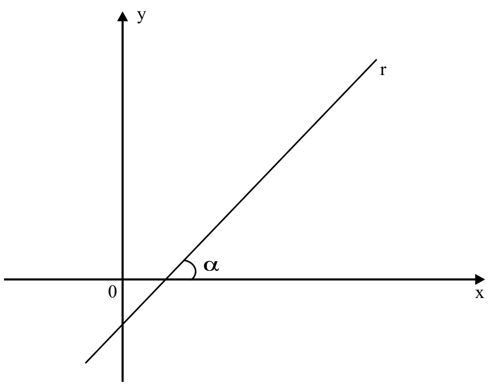
Introdução

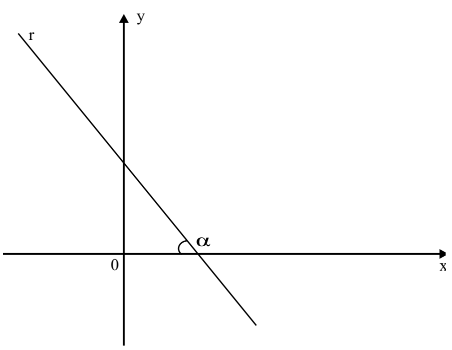
Neste capítulo estudaremos a reta no plano, onde deduziremos equações para uma reta no plano cartesiano, estudaremos propriedades específicas da reta, como também estudaremos a posição relativa de duas retas no plano cartesiano.

1. Inclinação da Reta

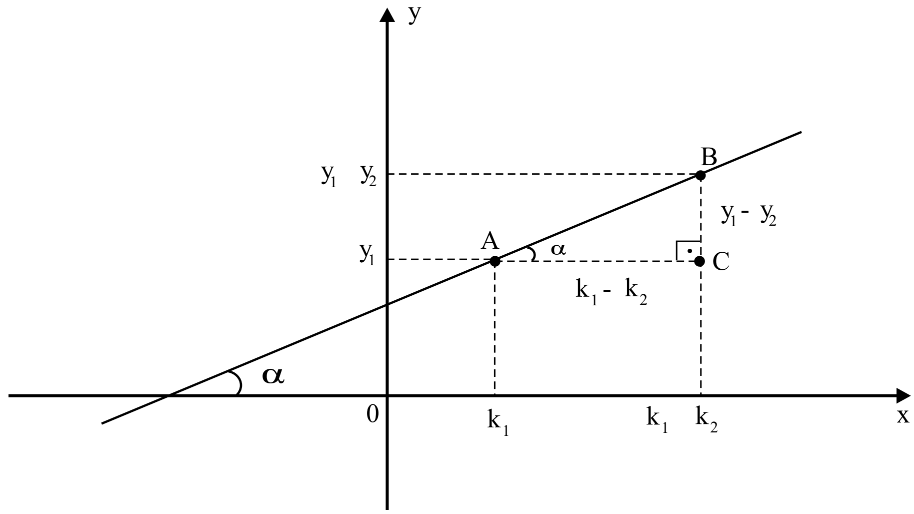
Toda reta tem uma direção e por isso, para conhecermos uma reta qualquer no plano é necessário primeiro que saibamos determinar a sua direção. Para encontrar a direção de uma reta, tomaremos o eixo x como referencial para sua inclinação, ou seja, a inclinação de uma reta r é dada pelo ângulo que essa reta forma com o lado positivo do eixo das abscissas, e 0.

Veja na figura:





Tomemos agora dois pontos distintos A(x1, y1) e B(x2, y2) no plano cartesiano, de modo que eles determinem uma reta r cujo ângulo de inclinação seja α .



A partir das coordenadas de A e de B, deveremos encontrar uma equação que identifique essa reta como um conjunto de pontos do plano, mas primeiro temos que expressar numericamente a sua inclinação. Para isso, tomemos a partir do ponto A, na figura, uma paralela ao eixo x que intercepte a projeção de B em um ponto C, formando um triângulo ABC retângulo em C. Sendo o lado $\overline{AC}$ paralelo ao eixo x, então o ângulo BÂC é congruente a, logo concluímos que:

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ B\hat{A}C \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\ \alpha = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Esse valor de tgα encontrado em função das coordenadas de A e de B é uma constante que expressa a inclinação da reta r, já que esses pontos são dados.

Para toda reta, essa constante nos indica a sua inclinação e por isso será chamada de coeficiente angular da reta que representaremos por $m= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Sobre o valor desse coeficiente angular que encontramos, é necessário que façamos as seguintes observações:

Se os pontos A e B tiverem abscissas iguais, ou seja $x_1=x_2$, então $x_2 - x_1 = 0$ o que implica a não existência de m. Nesse caso, a reta será da forma $x = k$, com k constante, e será paralela ao eixo y. (Caso já estudado no capítulo dois)

Se A e B tiverem a mesma ordenada, ou seja $y_1 = y_2$, então o numerador da fração será zero, portanto teremos $m = 0$.

Nesse caso, teremos uma reta da forma $y = k$, paralela ao eixo x, caso já estudado no capítulo dois.

Se o ângulo α de inclinação da reta é agudo, ou seja menor do que 90° então sua tangente é positiva, o que implica dizer que $m > 0$, e dizemos que a reta r é crescente.

$$r \text{ crescente} \Leftrightarrow m > 0$$

Sendo obtuso o ângulo α, então sua tangente é negativa o que implica que $m < 0$ e a reta r é dita decrescente.

$$r \text{ decrescente} \Leftrightarrow m < 0.$$

Atividades de avaliação

1. Verifique se é crescente ou decrescente a reta r determinada pelos pontos A(- 1, 3) e B(1, - 3).

Solução:

O sinal do coeficiente angular da reta é que indica seu crescimento, então:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \quad m = \frac{-3-3}{1-(-1)} \Rightarrow \quad m = \frac{-6}{2} \Rightarrow \quad m = -2$$

Portanto, como seu coeficiente angular é negativo, a reta r é decrescente.

2. Dados os pontos A(2, - 3) e B(- 1, a), determine os valores de a para que a reta s determinada por A e B seja crescente.

Solução:

Para que a reta s seja crescente é necessário que $m > 0 \Rightarrow \frac{a-(-3)}{-1-2} > 0 \Rightarrow \frac{a-(-3)}{-1-2} > 0 \Rightarrow a + 3 > 0 \Rightarrow a > -3.$

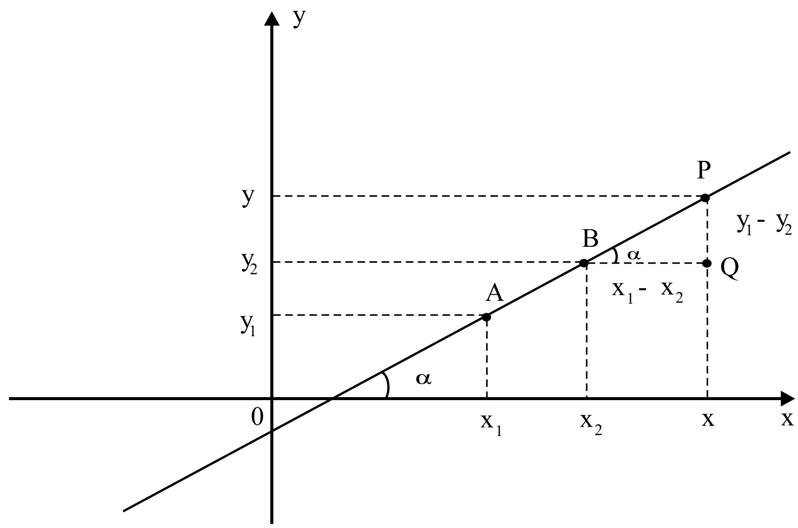
Portanto, o valor da ordenada do ponto B é $y = -3$.

2. Equação Geral da Reta

Denominamos equação de uma reta a toda equação nas variáveis x e y que expressam uma condição para que um ponto (x, y) do plano cartesiano pertença à reta.

Para obter a equação de uma reta r vamos partir do principio de que para se ter uma reta é necessário que tenhamos um ponto por onde ela passe e uma direção definida.

Tomemos dois pontos $A(x_1 , y_1)$ e $B(x_2 , y_2)$ no plano, em que $x_1 \neq x_2$. Esses dois pontos definem uma reta r, cuja direção é dada pelo coeficiente angular m. Se P(x, y) é um ponto qualquer sobre a reta r, então podemos observar na figura que o ângulo no triângulo BPQ é o mesmo com o qual definimos o coeficiente angular.



Daí, temos que $tg\,\alpha = m \Rightarrow \dfrac{y - y_2}{x - x_2} = m \Rightarrow y - y_2 = m.(x - x_2)$

Assim temos uma equação para a reta r, pois somente os pontos de r satisfazem a essa igualdade.

Essa equação é chamada de equação geral da reta r, e ela é obtida quando temos um ponto conhecido da reta e seu coeficiente angular.

A partir da equação geral podemos chegar a outras formas de equação para uma reta.

3. Outras Formas de Equação da Reta

3.1. Equação Reduzida

Tomemos a equação geral da reta r , que passa pelo ponto $P_0(x_0 , y_0)$ e tem coeficiente angular m. Sabemos que as duas variáveis são x e y, sendo constantes as demais. Para obter a equação reduzida de r basta isolar a variável y como uma função da variável x, e dessa forma temos:

$$y - y_0 = m.(x - x_0) \Rightarrow y = m.x - m.x_0 + y_0 \Rightarrow y = m.x + (y_0 - m.x_0).$$

O termo entre parênteses é constante e podemos representa-lo por $n = y_0 - m.x_0$, e dessa maneira temos que:

$$y = m.x + n$$

Nessa equação reduzida, aparecem dois coeficientes, onde m já conhecemos como o coeficiente angular da reta. O coeficiente n, que também é uma constante, é chamado de coeficiente linear da reta, e seu valor indica a ordenada do ponto em que essa reta corta o eixo das ordenadas, pois fazendo $x = 0$ na equação, temos que $y = n$.

Caso Particular: Se $n = 0$, a equação da reta será da forma $y=m.x$ e essa reta passa necessariamente na origem, pois $y = 0$ quando $x = 0$.

3.2. Equação Cartesiana

Partindo da equação geral podemos encontrar uma outra forma de equação, que chamaremos de equação cartesiana da reta r.

$$y - y_0 = m.(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.(x - x_0) \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_0).y - (x_1 - x_0).y_0 = (y_1 - y_0).x - (y_1 - y_0).x_0.$$

Passando todos os termos para um mesmo lado da igualdade, temos:

$$(y_1 - y_0).x - (x_1 - x_0).y + [(x_1 - x_0).y_0 - (y_1 - y_0).x_0] = 0.$$

Nessa igualdade temos que somente x e y (ambos sem índices), são variáveis e todos os termos indexados são constantes, logo podemos fazer:

$$y_1 - y_0 = a; -(x_1 - x_0) = b \quad e \quad (x_1 - x_0).y_0 - (y_1 - y_0).x_0 = c.$$

Assim, teremos a seguinte forma para a equação cartesiana:

$$a.x + b.y + c = 0.$$

Essa forma de equação é a mais utilizada para a representação de uma reta, e sobre ela podemos observar que:

- As constantes a e b devem ser sempre diferentes de zero, pois se isso não acontecer recairemos nos casos particulares de retas paralelas aos eixos.
- A constante c, chamada de termo independente, pode ser igual zero e quando isso acontece a reta passa pela origem, pois para $x = 0$ teremos $y = 0$.

Passando dessa forma cartesiana para a forma reduzida, ou isolando a variável y, temos:

$$a.x + b.y + c = 0 \Rightarrow b.y = -a.x + c \Rightarrow y = \frac{-ax + c}{b} \Rightarrow$$

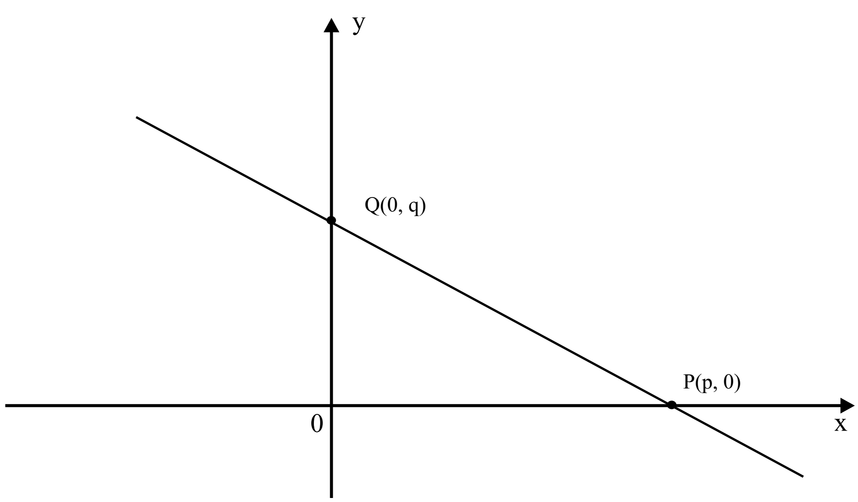
$$y = -\frac{a}{b}.x + \frac{c}{b}.$$

Assim, para uma equação na forma cartesiana $a.x + b.y + c = 0$ em que $b \neq 0$, temos que seu coeficiente angular é dado por $m = -\frac{a}{b}$, e seu coeficiente linear é $n = \frac{c}{b}$.

3.3. Equação Segmentaria

Essa forma de equação é a menos usada para representar uma reta, e ela é deduzida a partir de dois pontos particulares da reta.

Sendo r uma reta não-paralela a qualquer dos eixos, então ela intercepta esses eixos em dois pontos P(p, 0) e Q(0, q) onde $p \neq 0$ e $q \neq 0$ são chamados de interceptos da reta.



Substituindo cada um desses pontos na equação cartesiana, percebemos que:

- Para o ponto P: $a.p + b.0 + c = 0 \Rightarrow a.p = -c \Rightarrow p = -\frac{c}{a}$.
- Para o ponto Q: $a.0 + b.q + c = 0 \Rightarrow b.q = -c \Rightarrow q = -\frac{c}{b}$.

Dos valores de p e q encontrados podemos isolar $a = -\frac{c}{p}$ e $b = -\frac{c}{q}$ que substituindo na equação cartesiana teremos:

$$a.x + b.y + c = 0 \Rightarrow -\frac{c}{p}.x + \left(-\frac{c}{q}\right).y + c = 0 \Rightarrow -\frac{c}{p}.x - \frac{c}{q}.y + c = 0$$

$$-c.\left(\frac{1}{p}.x + \frac{1}{q}.y - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

A equação segmentaria é portanto a igualdade que relaciona as coordenadas dos pontos de uma reta, em função dos seus interceptos.

Observe que nessa equação, quando $x = p$ teremos $y = 0$, e que $x = 0$ quando $y = q$.

4. Condição de Alinhamento de Pontos

Dados três pontos quaisquer, dizemos que eles estão alinhados se pertencerem a uma mesma reta. Tomemos então os pontos $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ no plano cartesiano, de modo que tenham abscissas distintas. Se estiverem alinhados então eles podem dois a dois definir o coeficiente angular da reta que os contém.

Assim teremos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{e} \quad m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}.$$

Igualando esses valores: $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Rightarrow$

$$(y_B - y_A).(x_C - x_A) = (y_C - y_A).(x_B - x_A) \Rightarrow$$

$$(y_B - y_A).(x_C - x_A) - (y_C - y_A).(x_B - x_A) = 0.$$

A expressão do primeiro membro da igualdade pode ser vista como o determinante de uma matriz quadrada de ordem dois, e assim concluímos que os três pontos A , B e C estão alinhados sempre que

$$\begin{vmatrix} x_C - x_A & x_B - x_A \\ y_C - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0\,.$$

Partindo desse resultado, podemos encontrar uma forma de recorrência que nos permitirá, a partir do conhecimento de dois pontos, determinar a equação de uma reta.

Essa afirmação se baseia no fato de dois pontos distintos A e B definirem uma reta, e qualquer ponto P que pertença a essa reta estará alinhado com A e B.

Para que um ponto P(x, y) esteja alinhado com A(x_A, y_A) e B(x_B , y_B) temos que

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, conhecendo as coordenadas de dois pontos A e B, podemos chegar a uma das formas de equação da reta por eles definida.

Atividades de avaliação

1. Encontre as equações cartesiana e reduzida de reta r determinada pelos pontos A(1, 2) e B(7, 6).

Vamos apresentar duas formas diferentes de se chegar a essas equações, uma pela forma convencional partindo da equação geral, e outra usando a forma de recorrência.

Solução 1:

Primeiro, conhecendo as coordenadas dos dois pontos, encontramos o coeficiente angular de r.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \quad m = \frac{6-2}{7-1} \Rightarrow m = 4 \quad \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

Aplicando na equação geral:

$$y - y_A = m.(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{3}.(x - 1) \Rightarrow 3.(y - 2) = 2.(x - 1)$$

$$3y - 6 = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 3y - 2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 4 = 0.$$

Para chegar à equação reduzida, podemos partir da equação geral, ou usar a equação cartesiana , simplesmente isolando a variável y .

$$2x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3y = 2x + 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}.x + \frac{4}{3}.$$

Solução 2:

Usando a forma de recorrência: $\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 7-1 \\ y-2 & 6-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1).(6-2)-(y-2).(7-1) = 0 \Rightarrow$$

$$4.(x-1)-6.(y-2)=0 \Rightarrow 4x - 4 - 6y + 12 = 0 \Rightarrow 4x - 6y + 8 = 0$$

5. Posição Relativa de Duas Retas

Para duas retas distintas no plano só existem duas possibilidades para o posicionamento de uma com relação à outra; elas são paralelas ou são concorrentes.

1. Geometricamente, sabemos que, se duas retas r e s são paralelas então elas têm a mesma direção. Como analiticamente temos o coeficiente angular que indica a direção de uma reta qualquer, então podemos afirmar que duas retas r e s são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais.

$$r \,//\, s \Leftrightarrow m_r = m_s = m.$$

Podemos assim observar que as equações reduzidas dessas duas retas diferem apenas no coeficiente linear, ou seja:

r: $y = m.x + n1$ e s: $y = m.x + n_2$.

Se as equações cartesianas de duas retas paralelas são r: $a_1.x + b_1.y + c_1 = 0$ e s: $a_2.x + b_2.y + c_2 = 0$, com $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$, então seus respectivos coeficientes de x e de y são proporcionais, pois:

$$m_r = m_s \Rightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Observe que os dois termos independentes não devem atender à mesma razão, pois assim teremos as duas equações representando o mesmo conjunto de pontos, sendo portanto a mesma reta.

Alguns autores chamam de coincidentes, duas retas tais que

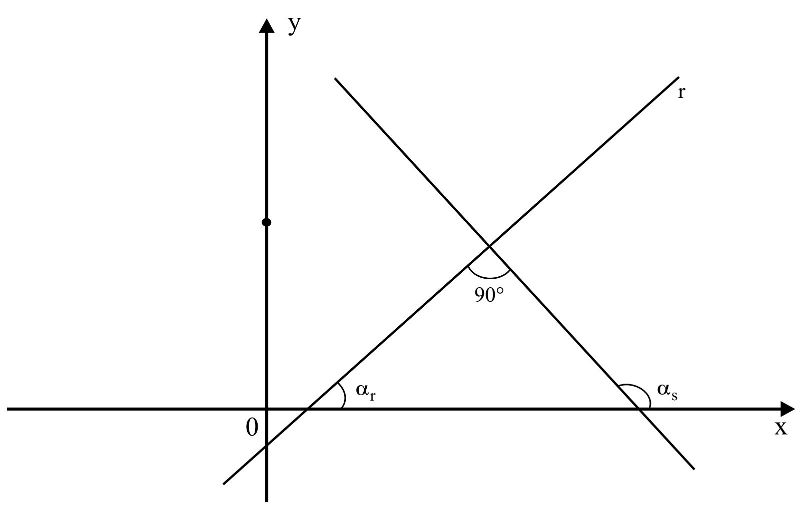
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

2. Se duas retas distintas no plano não são paralelas, então elas são ditas concorrentes, e nesse caso elas têm um ponto de interseção ou de concorrência. Sendo esse caso a negação do paralelismo, então podemos afirmar que duas retas concorrentes têm coeficientes angulares diferentes, logo:

$$r \text{ e } s \text{ concorrentes} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Para se determinar o ponto de interseção de duas retas concorrentes, basta encontrar a solução do sistema composto pelas equações das duas, que nesse caso será única.

3. Podemos também analisar como um terceiro caso de posicionamento entre duas retas, a situação em que elas são concorrentes e perpendiculares, ou seja, formam entre si um ângulo reto.



Na figura, temos a situação em que consideramos duas retas r e s perpendiculares, tais que $\alpha_s > \alpha_r$.

Vemos que as duas retas formam com o eixo x, um triângulo retângulo, onde α é um de seus ângulos externos.

Então, temos que $\alpha_s = 90° + \alpha \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_s = \text{tg}\,(90° + \alpha) \Rightarrow$

$$\text{tg}\,\alpha_s = \frac{sen\left(90^0 + \alpha_r\right)}{\cos\left(90^0 + \alpha_r\right)} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_s = \frac{sen90^0.\cos\alpha_r + sen\alpha_r.\cos 90^0}{\cos 90^0.\cos\alpha_r - sen90^0.sen\alpha_r} \Rightarrow$$

$$\text{tg}\,\alpha_x = \frac{1.\cos\alpha_r + 0.sen\alpha_r}{0.\cos\alpha_r - 1.sen\alpha_r} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_x = \frac{\cos\alpha_r}{-sen\alpha_r} \Rightarrow$$

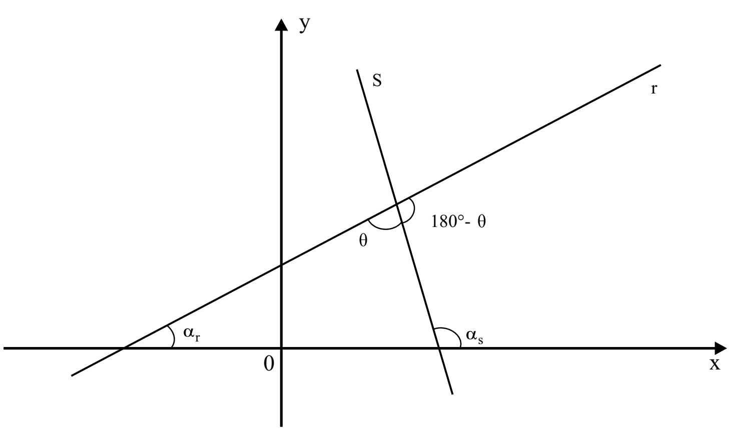
$$\text{tg}\,\alpha_s = -\text{cotg}\,\alpha_r, \quad \text{tg}\,\alpha_s = -\frac{1}{tg\alpha_r}.$$

Mas, $\text{tg}\,\alpha_s = m_s$ e $\text{tg}\,\alpha_r = m_r \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Assim, concluímos que, duas retas são perpendiculares quando o coeficiente angular de uma for o inverso e simétrico do coeficiente angular da outra.

6. Ângulo entre duas retas

Sabemos que se duas retas são concorrentes, então elas formam dois pares de ângulos suplementares. Suponhamos que duas retas r e s com coeficientes angulares mr e ms sejam concorrentes, formando um ângulo agudo θ, conforme indicamos na figura.



Como α_s é ângulo externo do triângulo, então $\alpha_s = \theta + \alpha_r$

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\alpha_s - \alpha_r) \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{tg\alpha_s - tg\alpha_r}{1 + tg\alpha_s . tg\alpha_r} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s . m_r}.$$

Analisando esse resultado, verificamos que , como o ângulo θ é agudo, então sua tangente é positiva, e seria negativa se considerássemos um ângulo obtuso. Para que tenhamos a certeza de que o ângulo θ seja agudo, e consequentemente sua tangente é positiva, devemos ter:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s . m_r} \Rightarrow \theta = \text{arctg}\,\frac{m_s - m_r}{1 + m_s . m_r}.$$

Atividades de avaliação

1. Determine a medida do ângulo agudo compreendido pelas retas r: 3x – 2y – 4 = 0 e s: 4x + y – 5 = 0.

Solução:

Primeiro encontramos os coeficientes angulares das duas retas.

$$m_r = -\frac{3}{-2} \Rightarrow m_r = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad ms = -\frac{4}{1} \Rightarrow m_s = -4.$$

$$\text{Então: } \text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s . m_r}\right| \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \left|\frac{-4 - \frac{3}{2}}{1 + (-4) . \frac{3}{2}}\right|$$

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{\frac{-11}{2}}{-5}\right| \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{11}{10} \Rightarrow \theta = \text{arctg}\,\frac{11}{10}.$$

7. Distância de Um Ponto a Uma Reta

Seja r: ax + by + c = 0, com a, b $\neq$ 0, uma reta e $P(x_p, y_p)$ um ponto fora dela.

Para determinar a distância do ponto P à reta r, tomemos a reta s que passa por P perpendicular a r, tendo o ponto Q(x, y) como interseção entre elas. A distância de P até r, é a mesma distância de P até Q, ou seja, d(P, r) = d(P, Q).

Como r não é paralela a nenhum dos eixos, então $m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_s = \frac{b}{a}$.

Se a reta s passa por P, então sua equação será $(y - y_p) = (x - x_p) \Rightarrow$
$- bx + ay + bx_p - ay_p = 0$.

Sendo Q(x, y) o ponto de interseção das retas r e s, suas coordenadas serão a solução do sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay + bx_p - ay_p = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $x = \dfrac{-ac + b\left(bx_p - ay_p\right)}{a^2 + b^2}$ e

$y = \dfrac{-bc - a\left(bx_p ay_p\right)}{a^2 + b^2}$

Portanto, sendo d(P, r) = d(P, Q) $\Rightarrow$

Na dedução da fórmula para calcular a distância de um ponto a uma reta, omitimos alguns detalhes de cálculo. Refaça passo a passo essa dedução, como exercício.

$$d(P, r) = \sqrt{\left(x - x_p\right)^2 + \left(y - y_p\right)} \quad \Rightarrow$$

$$d(P, r) = \sqrt{\left[\frac{-ac + b\left(bx_p - ay_p\right)}{a^2 + b^2} - x_p\right]^2 + \left[\frac{-bc - a\left(bx_p - ay_p\right)}{a^2 + b^2} - y_p\right]^2} \quad \Rightarrow$$

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{\left(ax_p + by_p + c\right)^2}{a^2 + b^2}} \quad \Rightarrow$$

$$d(P, r) = \frac{|\, ax_p + by_p + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Síntese da Parte 3

No terceiro capítulo já sabíamos localizar pontos no plano cartesiano, e passamos a localizar e identificar a reta como o primeiro conjunto de pontos do plano definido através de uma propriedade.

Sobre a reta estudamos inicialmente como obter sua inclinação, determinando o seu coeficiente angular, para em seguida deduzir algumas formas de equação:

- Equação geral: $y - y_2 = m.(x - x_2)$
- Equação cartesiana: $a.x + b.y + c = 0$.
- Equação reduzida: $y = m.x + n$
- Equação segmentaria: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Atividades de avaliação

1. Encontre a equação cartesiana da reta definida pelos seguintes pares de pontos:

a) A(- 3, 1) e B(2, 4)

b) A(5, - 1) e B(0, 2)

c) A(1, - 3) e B(4, 1)

d) A(3, - 5) e B(3, 2)

e) A(- 3, - 2) e B(4, - 2)

2. Dados os pontos A(- 1, 2) e B(2, 5).

a) Determine as equações cartesiana e reduzida da reta r por eles definida.

b) Verifique quais dos pontos seguintes pertencem a r: M(2 , 1); N(0 , 1); P(- 4, - 1); Q(2, 4); R(5, - 1) e S(1, 4).

c) Encontre seus interceptos e determine sua equação segmentária.

3. Se os eixos coordenados são duas retas no plano cartesiano, quais são as equações dessas duas retas?

4. Verifique que o conjunto de todos os pontos da forma $P(4t + 2, -5t + 3)$, onde t é um número real, são colineares e determine a equação cartesiana da reta que os contém.

5. Encontre a equação cartesiana da reta que:

a) passa pelo ponto $A(1, -3)$ e tem $m = -1$.

b) passa pelo ponto $B(0, 2)$ e tem $m = \frac{2}{3}$.

c) passa pelo ponto $C(-2, 4)$ e tem $m = 3$.

d) passa na origem e tem $m = -\frac{3}{4}$.

e) passa pelo ponto $D(1, -2)$ e tem $m = 0$.

6. Determine os interceptos da reta r que passa pelos pontos $A(2, -1)$ e $B(1, 5)$.

7. Para que valores de m a reta $(m^2 - 4)x + 3y - 5 = 0$ é paralela ao eixo x?

8. Dada a reta r: $kx + (k + 1)y + (k + 2) = 0$, determine o valor de k para que:

a) a reta r seja paralela ao eixo x.

b) a reta r seja paralela ao eixo y.

c) a reta r passe pela origem.

d) a retas r passe no ponto $(2, 3)$.

9. Determine os valores de a e b para que os pontos $A(a, a + 1)$ e $B(b, 2b)$ pertençam à reta r: $3x - 4y + 10 = 0$.

10. Encontre o valor de k para que a reta determinada por $A(1, 1)$ e $B(k + 1, 2k)$ tenha um ângulo de inclinação de 60° com o eixo x.

11. Coloque as seguintes retas na forma reduzida, e determine seus coeficientes angular e linear.

a) $2x + 4y - 7 = 0$

b) $3x - 9y + 5 = 0$

c) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0$

d) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$.

12. Encontre a equação cartesiana da reta s que passa por $P(-1, 3)$ paralela à reta r de equação $x - 3y + 6 = 0$.

13. Verifique se são paralelas ou concorrentes as seguintes retas.

a) $3x - y + 6 = 0$ e $9x - 3y - 7 = 0$

b) $3x + 5y - 8 = 0$ e $2x + 4y - 9 = 0$

c) $4x + 6y - 12 = 0$ e $2x + 3y - 18 = 0$

d) $5x - 7y - 3 = 0$ e $5x - 14y + 13 = 0$

14. Determine o valor de a para que as retas $(a + 1)x + 2y - 3 = 0$ e $3x - y - 1 = 0$ sejam paralelas.

15. Encontre o valor de k de modo que a reta que passa por A(3, 1) e B(2, 3) seja paralela a r: $2x + ky + 5 = 0$.

16. Encontre a equação segmentária da reta que passa por P(1, 1) e é paralela à reta r: $y = 6x - 1$.

17. Para que valores de k as retas r: $x - ky - k^2 = 0$ e s: $3x + 2y - 2k = 0$ são perpendiculares?

18. Determine a equação da reta que passa por P(3, - 2) e é perpendicular a $y = 2x - 4$.

19. Encontre a equação da reta que passa por P(- 1, - 2) e que é perpendicular à reta cujos interceptos são $p = 2$ e $q = 3$.

20. Calcule o ângulo agudo formado por cada um dos pares de retas:

a) r: $2x + y - 3 = 0$ e s: $3x - y + 4 = 0$

b) r: $\sqrt{3}x - 3y + 5 = 0$ e s: $\sqrt{3}x - y = 0$

c) r: $y = x - 3$ e s: $y = 2x + 1$.

21. Calcule as medidas dos Ângulos internos do triângulo cujos vértices são os pontos A(0, 2); B($\sqrt{3}$, 5) e C(0, 6).

22. Dados os pontos A(1, 0); B(4, 1) e C(4, n), determine o valor de n para que o ângulo do vértice A desse triângulo seja de 45°.

23. Determine a distância entre o ponto P e a reta r, sabendo que:

a) P(3, 1) e r: $3x - 4y + 5 = 0$

b) P(2, - 2) e r: $3x - 2y + 1 = 0$

c) P(4, 7) e r: $5x + 2y - 3 = 0$

d) P(- 1, 3) e r: $6x - y + 2 = 0$

24. Calcule a medida da altura relativa ao vértice A no triângulo ABC, sabendo que A(1, 2); B(3, - 1) e C(- 4, 1).

Referências

KLETENIK , D ; **Problemas de Geometria Analítica**; Moscou; Ed. Mir; 1968 .

MURDOCH, David C ; **Geometria Analítica**; Rio de Janeiro; Ed. LTC; 1971.

MACHADO , Antônio dos Santos; **Geometria Analítica e Polinômios**; São Paulo; Ed . Atual; 1986.

RIGHETTO , Armando; **Vetores e Geometria Analítica**; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

Capítulo 4

Cônicas

Objetivos:

- Reconhecer a equação de uma circunferência, e identificar seu centro e raio.
- Reconhecer a equação de um elipse, e identificar seus elementos.
- Reconhecer a equação de uma hipérbole, e identificar seus elementos.
- Reconhecer a equação de uma parábola, e identificar seus elementos.

Introdução

Neste capítulo, apresentamos algumas curvas no plano que chamamos de cônicas. Essas curvas são a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola, que são assim chamadas porque geometricamente podem ser obtidas por cortes com um plano em uma superfície cônica. Todas essas curvas têm propriedades geométricas, que nos permitem chegar a uma equação analítica, que deduziremos e estudaremos suas propriedades nesta unidade.

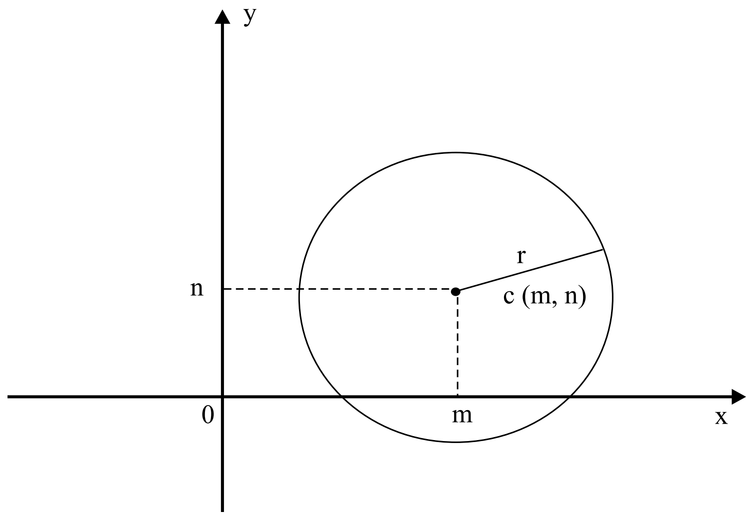
1. Circunferência

Definição: Dados um ponto C no plano e um número real positivo r, definimos a circunferência centrada em C e raio r como o conjunto de todos os pontos P pertencentes ao plano, tais que a sua distância até C seja constante e igual a r. O ponto fixo C é o centro e r é o raio da circunferência.

Para chegar a uma equação da circunferência, tomemos como centro um ponto fixo $C(m, n)$, e suponhamos que $P(x, y)$ seja um ponto qualquer no plano.

Pela definição, se P pertencer à circunferência, então sua distância até C é igual a r, logo:

$$d(P, C) = r \iff \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r \iff (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 .$$



Partindo dessa equação, observamos que:

- Se tomarmos a origem O(0, 0) como centro, então $m = n = 0$ e teremos a equação $x^2 + y^2 = r^2$, que dizemos ser centrada na origem.
- O ponto C não pertence à circunferência, servindo apenas como referência para sua localização no plano.
- O valor de r é positivo por ser uma medida, mas se admitirmos r=0 teremos que x=m e y=n, e a circunferência se resumirá a seu centro.
- Duas ou mais circunferências podem ter o mesmo centro e raios distintos, e nesse caso dizemos que elas são concêntricas.
- Se para um ponto P pertencer à circunferência, devemos ter $d(P, C) = r$, então um ponto Q será interior a ela quando $d(Q, C) < r$, será exterior se $d(Q, C) > r$.

Uma equação da forma $(x - m)^2 + (y - n)^2 = k$, com k constante representa:

Toda equação a duas variáveis, da forma ax2 + by2 + cx + dy + e = 0 pode representar uma circunferência, se a = b.

- Uma circunferência sempre que $k > 0$.
- Um ponto quando $k = 0$.
- O conjunto vazio se $k < 0$.

Atividades de avaliação

1. Encontre a equação da circunferência cujo centro é o ponto C(- 3 , 2) e tem raio 5.

Solução:

Como já conhecemos as coordenadas do centro e a medida de r, substituímos esses valores na equação geral obtendo $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 52$ $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

2. Verifique que a equação $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 19 = 0$ é de uma circunferência, e determine seu centro e seu raio.

Solução:

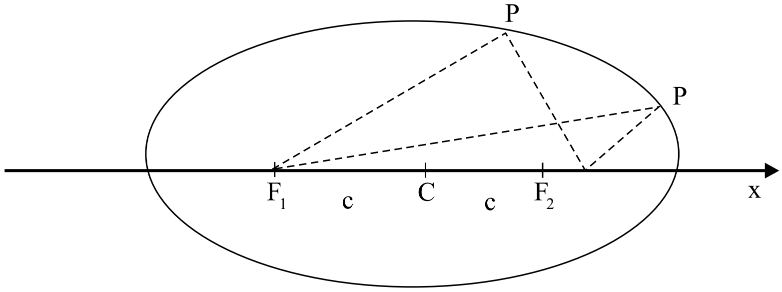
Para verificar que a equação é de circunferência, devemos completar os quadrados em x e y para chegar à equação geral, e daí identificaremos seu centro e raio.

$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 19= 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16= 19 + 1 + 16 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 62$.

Assim, concluímos que a equação é de uma circunferência e que seu raio mede 6 unidades, e seu centro está no ponto C(1, 4).

2. Elipse

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos fixos no plano, de modo que a distância entre eles seja 2c, onde c é uma constante positiva. Definimos uma elipse de focos F_1 e F_2 como o conjunto formado pelos pontos P do plano, tais que a soma das distâncias de P a F_1 e a F_2 seja constante e igual a 2a, com a > c.



Para chegar a uma equação para a elipse, tomemos como focos $F_1(c, 0)$ e $F_2(- c, 0)$ dois pontos sobre o eixo x, simétricos com relação à origem. Se um ponto P(x , y) pertence à elipse, então temos que:

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = 2a - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \Leftrightarrow$

$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y \Leftrightarrow$

$4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 4a^2 + 4cx \Leftrightarrow$

$a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = a^2 + cx \Leftrightarrow$

$a^2.(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2 \Leftrightarrow$

$a^2x2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Leftrightarrow$

$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 \Leftrightarrow$

$a^2x^2 – c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 – a^2c^2 \Leftrightarrow$

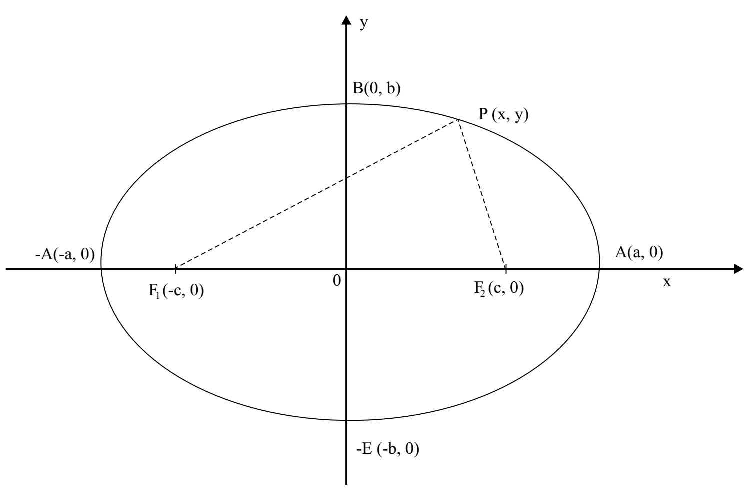
$(a^2 – c^2).x^2 + a^2y^2 = a^2 (a^2 - c^2).$

Fazendo $a^2 - c^2 = b^2$, temos que:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e dividindo toda a igualdade por a^2b^2 resulta em:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ que é a equação da elipse.

Para deduzir a equação dessa elipse, tomamos os dois focos sobre o eixo x, simétricos com relação à origem. Então, observando a figura podemos fazer algumas considerações:



Fazendo $y = 0$ na equação, teremos $x = -a$ ou $x = a$, o que garante que os pontos - A - a, 0) e A(a, 0) pertencem à elipse e que o segmento $\overline{(-A)A}$ mede 2a, sendo chamado de eixo maior ou principal da elipse.

Fazendo $x = 0$ na equação, teremos $y = -b$ ou $y = b$, logo os pontos B(0, - b) pertencem à elipse, sendo $\overline{(-B)B} = 2b$ o eixo menor, pois $b < a$.

A distância entre F_1 e F_2 mede 2c e é chamada de distância focal.

A elipse é simétrica com relação a cada um dos seus eixos, e como as distâncias de B a F_1 e F_2 são iguais, então elas têm medida a, daí a relação $a^2 - c^2 = b^2$.

Os dois focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo maior, mas não pertencem à elipse. A origem do sistema é a interseção e ponto médio dos dois eixos, por isso é chamada de centro da elipse.

Agora vejamos o que muda, caso os focos sejam tomados sobre o eixo y . Sendo $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$. A partir da definição, obtém-se a seguinte equação:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = 2a$$

Com o mesmo raciocínio da primeira dedução, chegamos à equação

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Toda elipse com essa forma de equação tem os eixos invertidos com relação às anteriores, e para saber a que tipo pertence uma equação dada, basta lembrar que $a > b$.

Deixamos para o leitor, analisar o que muda nas observações feitas no caso anterior.

Uma equação da forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ é do gênero elipse, se a e b forem diferentes, mas com mesmo sinal .

Atividades de avaliação

1. Encontre a equação da elipse centrada na origem, eixo principal sobre o eixo y, cujo eixo maior mede 10 unidades e a distância focal é de 8 unidades.

Solução:

Pelos dados fornecidos, verificamos que:

Eixo maior igual a 10 $\Rightarrow$ 2a = 10 $\Rightarrow$ a = 5.

Distância focal de 8 unidades $\Rightarrow$ 2c = 8 $\Rightarrow$ c = 4.

Como sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, então $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow$ $b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$.

Sendo o eixo principal vertical, a equação dessa elipse será $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

2. Mostre que a equação 4x2 + 9y2 - 36 = 0 é de uma elipse , e determine as medidas do eixo maior e do eixo menor, e a distância focal.

Solução:

Para mostrar que a equação é de uma elipse, devemos coloca-la na forma padrão.

$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36$.

Dividindo essa equação por 36, teremos:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Sendo $a^2 = b^2 + c^2$, então $9 = 4 - c^2 \Rightarrow$ c2 = 5 $\Rightarrow c = \sqrt{5}$.

Portanto, temos que o eixo maior mede 2a = 6, o eixo menor mede 2b = 4 e a distância focal é de $2\sqrt{5}$.

3. Hipérbole

Definição: Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 e um número real positivo a, definimos uma hipérbole com focos F_1 e F_2, como o conjunto de todos os pontos P do plano, tais que o módulo da diferença de suas distâncias a esses dois pontos é constante e igual a 2a.

Para deduzir a equação da hipérbole, tomemos como focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, e sendo P(x, y) um ponto qualquer sobre a hipérbole, então:

$$|d(P\,,F_1)\ -\ d(P\,,F_2)| = 2a \quad \Leftrightarrow \quad d(P\,,F_1)\ -\ d(P\,,F_2) = 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm\ 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2x^2 - 2\,a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2\,a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \quad \Leftrightarrow$$

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$$

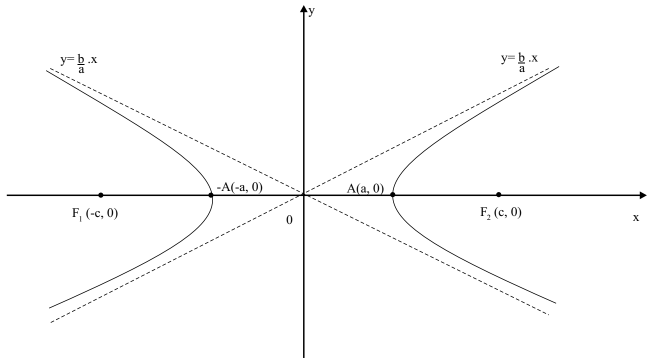
Fazendo $c^2 - a^2 = b^2$, temos que $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ que dividindo por a2b2 resulta em:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ que é a equação da hipérbole.

Sobre essa hipérbole, que tem o eixo focal ou principal sobre o eixo x, afirmamos que:

- Os dois focos são simétricos com relação à origem, que é o seu centro.
- Os pontos $-A(-a, 0)$ e $A(a, 0)$ são as interseções da hipérbole com seu eixo principal, e são chamados de vértices .
- Essa hipérbole está definida apenas nos pontos $P(x, y)$ tais que $x \leq -a$ ou $x\ a$.
- Toda hipérbole é simétrica com relação ao seu eixo principal, como também com relação a um eixo imaginário que passa pelo seu centro perpendicular ao eixo principal.
- Toda hipérbole tem duas assíntotas, que são retas para as quais a curva se aproxima mas não chega a tocá-las, e que passam pelo seu centro e têm equações $y = \pm\ \frac{b}{a}\,.x$.

A dedução das equações das assíntotas da hipérbole, necessita de uma ferramenta do Cálculo Diferencial, que é o limite, e por isso omitimos essa dedução.



Da mesma forma que, como fizemos na dedução da equação da elipse, se tomarmos os dois focos sobre o eixo y, teremos uma equação diferente na hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Atividades de avaliação

1. Sabendo que uma hipérbole com centro na origem tem um dos focos em (6 , 0) e um de seus vértices é o ponto (2, 0), encontre sua equação e as equações de suas assíntotas.

Solução:

Pelos dois pontos dados, é fácil perceber que o eixo principal dessa hipérbole é o eixo dos x, e que $a = 2$ e $c = 6$.

Como $b^2 = c^2 - a^2$, então $b^2 = 6^2 - 2^2 \Rightarrow b^2 = 6 - 4 \Rightarrow b^2 = 32$

e $b = \sqrt{32}$ ou $b = 4\sqrt{2}$.

Então, sendo a equação da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y}{32} = 1 \Rightarrow$

2. Verifique que a equação $x^2 - y^2 = 4$ é de uma hipérbole centrada na origem, e que suas assíntotas são as bissetrizes dos quadrantes .

Solução:

Para verificar se a equação dada é de hipérbole, devemos levá-la para a forma padrão, onde dividindo por 4 a equação $x^2 - y^2 = 4$

resulta, que é uma hipérbole onde $a^2 = b^2 = 4$ e $a = b = 2$.

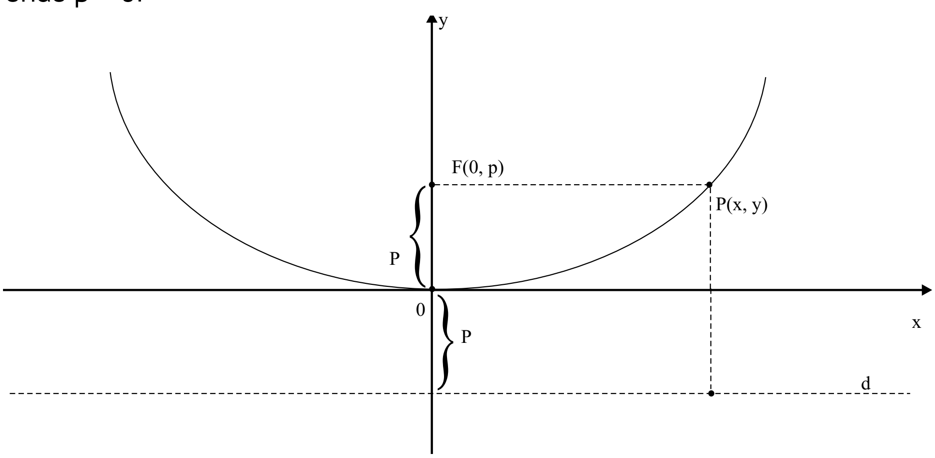
Suas assíntotas têm equações $y = \pm \frac{b}{a}.x \Rightarrow y = \pm .x \Rightarrow y = \pm\ x$.

Portanto, y = - x bissetriz dos quadrantes pares e y = x bissetriz dos quadrantes ímpares são as duas assíntotas.

4. Parábola

Dados um ponto F e uma reta d, definimos uma parábola com foco em F, como o conjunto de todos os pontos P do plano tais que sua distância até F é igual a sua distância até d. A reta d é chamada diretriz da parábola.

A partir da definição podemos deduzir uma equação para a parábola, e para isso, tomemos para foco o ponto F(0, p) e a reta y = - p como diretriz, onde p > 0.



Se P(x , y) é um ponto qualquer da parábola, então d(P , F)= d(P , d) $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = y + p \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \Leftrightarrow x^2 = 4py \Leftrightarrow y = \frac{1}{4p}.x^2 .$$

Uma equação polinomial a duas variáveis , com uma delas tendo expoente um e a outra com expoente dois, representa uma parábola no plano cartesiano .

Toda parábola tem um conjunto de elementos, que caracterizam a curva , e que identificamos na figura.

- **Foco** - é o ponto F(0, p) que juntamente com a diretriz definem a parábola, e que neste caso está sobre o eixo y.
- **Diretriz** - é a reta que juntamente com o foco definem a parábola, e que neste caso tem equação y = - p, por ser paralela ao eixo x.
- **Eixo de Simetria** - é a reta que contém o foco, e é perpendicular à diretriz, e que neste caso é o eixo y. Toda parábola é simétrica com relação a esse eixo.

- **Vértice -** é o ponto de interseção da parábola com seu eixo de simetria, que neste caso é a origem do sistema.
- **Parâmetro -** é a constante p que foi definida como ordenada do foco. Para essa parábola cuja equação encontramos, tomamos $p > 0$, e por isso o foco ficou localizado no eixo y positivo, e a diretriz de equação $y = -p$ é uma reta localiza nos quadrantes inferiores, e como conseqüência, a parábola tem concavidade voltada para cima . Se o valor do parâmetro p for negativo, invertem-se as posições do foco e diretriz, e por conseqüência a parábola passa a ter concavidade para baixo.

Podemos também obter uma outra equação para a parábola, se tomarmos um foco F e a reta diretriz sendo paralela ao eixo y. Assim podemos tomar F(p, 0 e a reta $x = -p$ como diretriz. Com cálculo semelhante ao usado no caso anterior, chegamos à equação:

$$x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Essa é portanto a equação de uma parábola com vértice na origem, eixo de simetria coincidente com o eixo x, e que terá a concavidade voltada para a direita se $p > 0$, e para a esquerda quando $p < 0$.

Atividades de avaliação

1. Encontre a equação da parábola com vértice na origem, cujo foco é o ponto (0, 3).

Solução:

Se o vértice está na origem e o foco sobre o eixo y, então a parábola tem equação da forma $y = \frac{1}{4p}.x^2$, onde o valor de p é a ordenada do foco, logo temos que $y = \frac{1}{4.3}.x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{12}x^2$.

2. Sabendo que a equação $20x = -y^2$ é de uma parábola com vértice na origem, determine seu foco e sua diretriz.

Solução:

Primeiro coloquemos a equação na forma padrão

$$x=\frac{1}{20}-y^2 \Rightarrow x=\frac{1}{4.(-5)}y^2$$

Assim percebemos que essa parábola tem eixo de simetria coincidente com o eixo x, e que seu parâmetro tem valor p=-5, logo seu foco é o ponto F(- 5, 0).

Se o parâmetro é negativo, sabemos que essa parábola tem a concavidade voltada para a esquerda, e a equação de sua diretriz é x = - p, logo x = (- 5) ou x = 5.

Síntese do capítulo

Neste capítulo estudamos as curvas denominadas cônicas e apredemos a reconhecer as suas equações:

Circunferência: $(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$.

Elipse: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ Com o eixo maior sobre o eixo dos x

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ Com o eixo maior sobre o eixo dos y

Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Com o eixo focal sobre o eixo dos x

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ Com o eixo focal sobre o eixo dos y

Parábola: $y=\frac{1}{4p}.x^2$ Com o eixo focal sobre o eixo dos y

$x=\frac{1}{4p}y^2$ Com o eixo focal sobre o eixo dos x

Atividades de avaliação

1. Escreva a equação da circunferência de centro C e raio r em cada caso:

a) C (3, 5) e $r = 4$

b) C(- 1, 6) e $r = 5$

c) C(4, -2) e $r = \sqrt{2}$

d) C(- 7, - 5) e $r = \pi$.

2. Dê o centro e o raio de cada circunferência:

a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

b) $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 12$

c) $(x + \quad)^2 + (y + 7)^2 = 5$

d) $(x + \pi)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = 28$

3. Verifique se cada uma das equações abaixo representa circunferência, e em caso afirmativo determine seu centro e raio:

a) $x^2 + y^2 - 12x - 10y - 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 23 = 0$

e) $4x^2 + 4y^2 - 4x = 1$

f) $x^2 - y^2 - 2x = 1$

g) $4x^2 + y^2 + 2x - 4y = 12$

4. Encontre a equação da elipse com focos em (- 6, 0) e (6, 0) cujo eixo maior mede 20 unidades.

5. Encontre a equação da elipse com focos em (- 4, 0) e (4, 0) cujo eixo menor mede 6 unidades.

6. Determine a equação de uma elipse cujos focos são os pontos (0, - 3) e (0, 3) e tem eixo maior medindo 8 unidades.

7. Calcule a distância focal de cada uma das elipses:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $x^2 + 4y^2 = 16$

c) $25x^2 + 9y^2 = 900$

d) $3x^2 + 7y^2 = 21$.

8. Encontre a equação da hipérbole em cada caso:

a) Com focos em $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ tendo $2a = 6$.

b) Com focos em $(0, -2)$ e $(0, 2)$ de modo que $a = b$.

c) Com eixo real sobre o eixo y, centro na origem, distância focal medindo 8 unidades e distância entre os vértices medindo 4 unidades.

9. Dada a hipérbole de equação $x^2 - 15y = 60$, encontre a medida de sua distância focal e as equações de suas assíntotas.

10. Encontre as coordenadas dos focos e as equações das duas assíntotas da hipérbole $-4x^2 + y^2 - 4 = 0$.

11. Encontre a equação da parábola em cada caso:

a) Com foco em $(0, 5)$ e vértice na origem.

b) Com diretriz $y = -4$ e vértice na origem.

c) Com vértice na origem, parâmetro $p = -3$, tendo o eixo x como eixo de simetria.

d) Com foco em $(-2, 0)$ e diretriz $x = 2$.

12. Em cada uma das equações abaixo, que representam parábolas, determine o parâmetro, o foco e a equação da diretriz:

a) $y = x2$.

b) $4y + x2 = 0$

c) $16x = y2$.

d) $24x + y2 = 0$

13. Identifique o gênero de cônica a que pertence cada uma das equações abaixo . Após a identificação, determine seus elementos:

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$

Referências

LEITHOLD, Louis; **O Cálculo com Geometria Analítica**; Vol: I, 3ª Ed. São Paulo; Edit. Harbra; 1994.

STEINBRUCH, Alfredo; **Geometria Analítica**; São Paulo; Editora McGraw--Hill; 1987.

RIGHETTO, Armando; **Vetores e Geometria Analítica**; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

Capítulo 5

O Espaço Tridimensional

Objetivos:

- Conhecer o espaço R^3.
- Calcular distância entre dois pontos no R^3.
- Ter conhecimento sobre vetores.
- Aprender a operar com vetores.

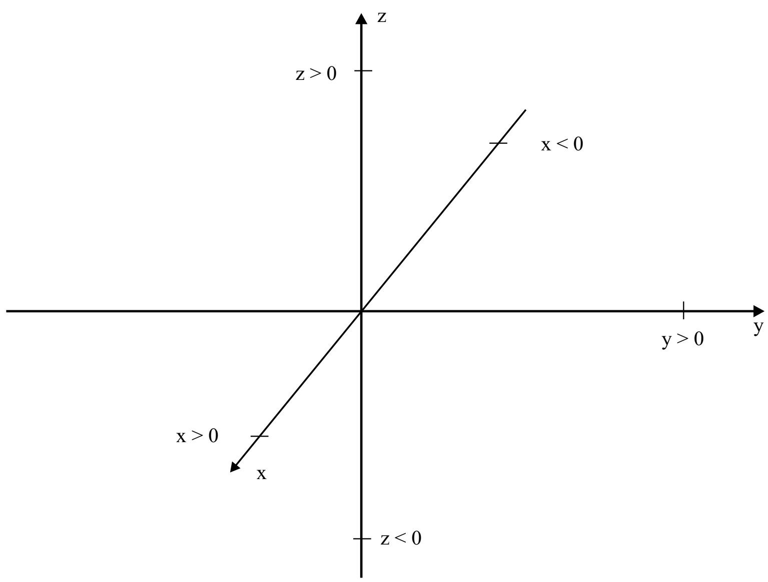
Introdução

Até agora estudamos a reta orientada que é o espaço unidimensional, e o plano cartesiano que é o espaço bidimensional.

Neste capítulo trabalharemos no espaço tridimensional, que é o espaço físico a três dimensões, onde tomaremos como referencial um sistema de coordenadas compreendido por três eixos reais mutuamente perpendiculares em suas origens, que denominaremos eixo x, eixo y e eixo z.

1. O Espaço Tridimensional

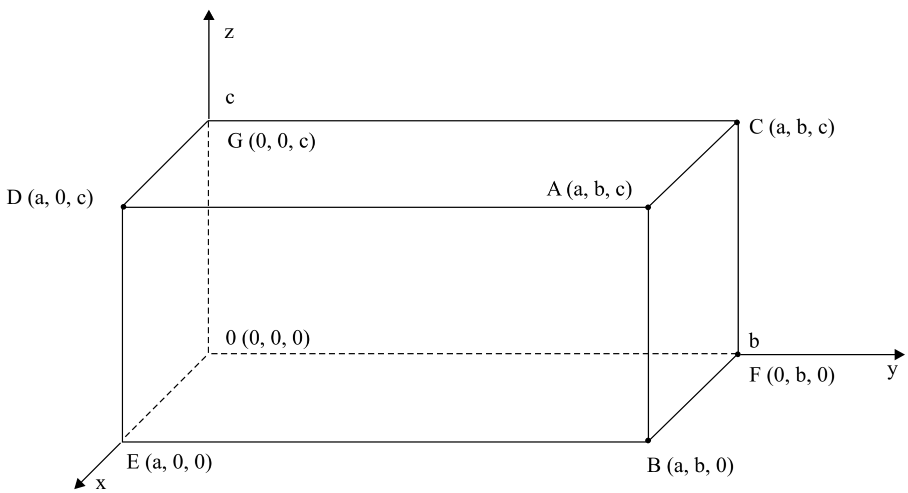
Como já dissemos, o sistema de coordenadas tridimensional ou R^3 é composto por três eixos, que determinam três planos dois a dois perpendiculares que se interceptam na origem do sistema, chamados de planos coordenados, que serão denominados plano xy, plano xz e plano yz.



Todo ponto P no R^3 é representado por uma tripla ordenada (x, y, z) de números reais onde cada um deles é a projeção vertical do ponto sobre os respectivos eixos.

Tomemos como exemplo um ponto $A(a, b, c)$ onde $x = a$ é a sua abscissa, $y = b$ é a sua ordenada e $z = c$ é a sua cota.

O ponto $B(a, b, 0)$ é sua projeção no plano xy; o ponto $C(0, b, c)$ é sua projeção no plano yz e o ponto $D(a, 0, c)$ é sua projeção no plano xz.



Com base na figura temos que:

- $A(a, b, c)$ é um ponto do R^3 com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
- $B(a, b, 0)$ é um ponto do plano xy, pois $z = 0$.
- $C(0, b, c)$ é um ponto do plano yz, pois $x = 0$.
- $D(a, 0, c)$ é um ponto do plano xz, pois $y = 0$.
- $E(a, 0, 0)$ é um ponto do eixo x, pois $y = z = 0$.
- $F(0, b, 0)$ é um ponto do eixo y, pois $x = z = 0$.
- $G(0, 0, c)$ é um ponto do eixo z, pois $x = y = 0$.
- $O(0, 0, 0)$ é a origem do sistema tridimensional.

Os três planos coordenados dividem o espaço em oito regiões bem definidas as quais chamamos de octantes, de modo que todo ponto $P(x, y, z)$ com coordenadas diferentes de zero, pertence a um deles. Por convenção, os octantes são caracterizados da seguinte forma:

- **1º octante** - $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$.
- **2º octante** - $x < 0$; $y > 0$; $z > 0$.

- **3º octante -** $x < 0$; $y < 0$; $z > 0$.
- **4º octante -** $x > 0$; $y < 0$; $z > 0$.
- **5º octante -** $x > 0$; $y > 0$; $z < 0$.
- **6º octante -** $x < 0$; $y > 0$; $z < 0$.
- **7º octante -** $x < 0$; $y < 0$; $z < 0$.
- **8º octante -** $x > 0$; $y < 0$; $z < 0$.

Como exemplo, vejamos os seguintes pontos:

- P (3, 5, 2) pertence ao primeiro octante, pois $3 > 0$; $5 > 0$ e $2 > 0$.
- Q (- 1, 4, 7) pertence ao segundo octante
- R (4, - 2, - 3) pertence ao oitavo octante
- S (- 6, - 3, 2) pertence ao terceiro octante e
- T (- 1, - 4, - 8) pertence ao sétimo octante .

2. Distância Entre Dois Pontos

Quando estudamos o plano cartesiano, vimos como determinar a distância entre dois pontos quaisquer A e B. Aqui no espaço R^3, a forma de cálculo é a mesma que usamos no R^2, com a diferença de trabalharmos com triplas ordenadas na representação dos pontos, em vez de pares ordenados.

Assim, se temos dois pontos distintos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pertencentes ao R^3, a distância entre eles é a medida do segmento de reta, que é representada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Verifique que a forma de cálculo é a mesma que conhecemos no R^2, a diferença é que agora estamos em um espaço de dimensão três, e por isso as três componentes.

A medida de um segmento de reta, é a distância entre seus extremos

Atividades de avaliação

1. Calcular a medida do segmento de reta, sabendo que seus extremos são os pontos A(- 3, 2, - 1) e B(1, - 3, 0).

Solução:

A solução, que é o cálculo da medida do segmento de reta $\overline{AB}$, é uma simples aplicação da fórmula básica de distância entre dois pontos;

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \Rightarrow$$

$$d(A, B) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-2)^2 + (0-(-1))^2} \Rightarrow$$

$$d(A, B) = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$d(A, B) = \sqrt{16+25+1} \Rightarrow$$

$$d(A, B) = \sqrt{42}.$$

3. Razão de Secção

A idéia de ponto divisor de um segmento de reta estudada no plano cartesiano, pode ser também estendida para o espaço R^3, ou para qualquer outro espaço de dimensão superior, o que varia de espaço a espaço, é apenas a dimensão.

Tomemos então dois pontos distintos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ no R^3. Se um ponto $C(x_c, y_c, z_c)$ R^3 é um ponto que divide o segmento de reta $\overline{AB}$ em uma razão r, então sabemos que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$, e que sob essas condições temos que:

$$x_c = \frac{x_1 + r.x_2}{1+r} \; ; \; y_c = \frac{y_1 + r.y_2}{1+r} \; \text{ e } \; z_c = \frac{z_1 + r.z_2}{1+r}.$$

Todas as propriedades verificadas para um ponto divisor no R2, são também propriedades válidas para um ponto divisor no espaço tridimensional.

1. Se C é um ponto divisor do segmento de reta $\overline{AB}$, então ele é colinear com esse segmento.

2. O ponto divisor C é diferente do ponto B.

3. Se o ponto C for coincidente com o ponto A, então a razão de secção será zero.

4. Se a razão r > 0, então o ponto divisor C será interior ao segmento $\overline{AB}$.

5. A razão de secção r é diferente de -1.

6. Se r for negativo, diferente de - 1, então o ponto C será um ponto externo ao segmento $\overline{AB}$.

7. Se a razão de secção for r = 1, então as coordenadas do ponto divisor C serão $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$ e $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$ e ele é chamado de ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Atividades de avaliação

1. Dados os pontos A(-2, 1, -3) e B(0, 1, 4) do R^3, encontre o ponto C que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão 2.

Solução:

Primeiro, sabemos que sendo a razão 2 > 0, então C será um ponto interior do segmento.

Daí então, encontramos suas coordenadas fazendo:

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \Rightarrow x_C = \frac{-2+2.0}{1+2} \Rightarrow x_C = -\frac{2}{3}.$$

$$y_C = \frac{y_A + r.y_B}{1+r} \Rightarrow y_C = \frac{1+2.1}{1+2} \Rightarrow y_C = 1.$$

$$z_C = \frac{z_A + r.z_B}{1+r} \Rightarrow z_C = \frac{-3+2.4}{1+2} \qquad z_C = 1.$$

Portanto, o ponto procurado é $C(-\frac{2}{3}, 1, 1)$.

2. Até que ponto o segmento de extremos A(- 1, 0, 3) e B(2, - 2, - 4) deve ser prolongado no sentido de A para B para ter seu comprimento quadriplicado?

Solução:

Devemos observar que nesse caso, o ponto divisor que queremos é externo ao segmento, sendo portanto negativa a razão r. Como o segmento deve ser quadriplicado, temos ter $\overline{AC} = 4.\overline{AB}$, enquanto $\overline{BC} = 3.\overline{AB}$, logo

a razão será r $= \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\dfrac{4}{3}$.

Então, as coordenadas do ponto divisor C serão:

$$x_C = \frac{x_A + r.x_B}{1+r} \Rightarrow x_C = \frac{-1+\left(-\frac{4}{3}\right).2}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow x_C = \frac{-1-\frac{8}{3}}{1-\frac{4}{3}} \Rightarrow x_C = \frac{-\frac{11}{3}}{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow x_C = 11.$$

$$y_C = \frac{y_A + r.y_B}{1+r} \Rightarrow y_C = \frac{0+\left(-\frac{4}{3}\right).(-2)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow y_C = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y_C = -8.$$

$$z_C = \frac{x_A + r.z_B}{1+r} \Rightarrow z_C = \frac{3+\left(-\frac{4}{3}\right).(-4)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow z_C = \frac{3+\frac{16}{3}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow z_C = \frac{\frac{25}{3}}{-\frac{1}{3}}$$

$$z_C = -25.$$

Portanto, o ponto será C(11, - 8, - 25).

4. Segmento Orientado

Quando trabalhamos na reta orientada e no plano cartesiano, tivemos a definição de segmento orientado, e aqui no espaço R^3 iremos fazer um estudo mais detalhado e abrangente sobre esse assunto.

Sabemos que, se A e B são dois pontos distintos, o segmento orientado $\overline{AB}$ é um segmento de reta com origem no ponto A e extremidade em B. Sabemos também que todo segmento orientado tem bem definidos uma norma ou comprimento, uma direção dada pela reta que o contém e um sentido que é a orientação de A para B.

Dizemos que dois segmentos orientados são eqüipolentes quando eles têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido, consequentemente $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Assim, podemos afirmar que a eqüipolência de segmentos orientados é uma relação de equivalência, sendo portanto válidas as seguintes propriedades:

- **Propriedade reflexiva:** Todo segmento orientado é equipolente a ele próprio.
- **Propriedade simétrica:** Se um segmento $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente ao segmento $\overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{CD}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{AB}$.
- **Propriedade transitiva:** Se um segmento $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{CD}$ e o segmento $\overrightarrow{CD}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{EF}$, então $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{EF}$.
- Dados um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e C um ponto qualquer do mesmo espaço, existe um e somente um, segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ eqüipolente a $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto C.

Com base nessas propriedades, podemos afirmar que todo segmento orientado constitui apenas um elemento de uma classe de segmentos eqüipolentes, ou seja, que têm mesma norma, mesma direção e sentido.

Uma classe de segmentos orientados eqüipolentes é o conjunto constituído por todos os segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Atividades de avaliação

1. Dados os pontos A(-1, 1, -2); B(2, 3, 1) e C(3, - 5, 4) determine o segmento $\overrightarrow{AB}$, e o ponto D tal que o segmento $\overrightarrow{CD}$ seja eqüipolente a $\overrightarrow{AB}$.

Solução:

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (2, 3, 1) - (- 1, 1, - 2) = (3, 2, 3).

Se $\overrightarrow{CD}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ D – C = $\overrightarrow{AB}$

D = $\overrightarrow{AB}$ + C $\Rightarrow$ D = (3 , 2 , 3) + (3 , - 5 , 4) $\Rightarrow$ D= (6, - 3, 7).

5. Vetor

Dada uma classe de segmentos orientados eqüipolentes, podemos afirmar de acordo com a quarta propriedade, que existe um , e somente um segmento dessa classe que tem origem na origem do sistema de coordenadas. A esse segmento, damos o nome de vetor.

Tomemos por exemplo, dis pontos distintos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pertencentes ao espaço R^3. Por definição, o segmento orientado

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Como todas as coordenadas de A e B são números reais, então fazendo $a = x_2 - x_1$;

$b = y_2 - y_1$ e $c = z_2 - z_1$ temos que $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$.

Assim, concluímos que a tripla ordenada (a, b, c) indica o ponto P extremidade do vetor $\vec{V}$, com origem na origem do sistema, representante dessa classe de segmentos eqüipolentes.

De fato, $\vec{V} = (a , b , c) = (a - 0, b - 0, c - 0) = (a, b, c) - (0 , 0 , 0) \Rightarrow$ $\vec{V} = P - O$.

A partir de agora, todo segmento orientado será chamado de vetor , que gozará de todas as propriedades de segmento orientado.

A norma ou módulo do vetor $\vec{V} = (a, b, c)$ é o seu comprimento, sendo portanto $\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A(- 1 , 3 , 0) e B (2, - 2, 4) tem coordenadas $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2, 4) - (-1, 3, 0) = (3, -5, 4)$.

A norma do vetor $\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 2\sqrt{2}$.

Existem alguns vetores com características bem definidas, e que serão úteis no estudo das operações com vetores:

- **Vetor nulo**: É um vetor cujas componentes são todas iguais a zero. Em todo espaço existe um vetor nulo que representamos por $\vec{O}$, e no R^3 ele é representado por $\vec{O} = (0, 0, 0)$. Sua norma é igual a zero.
- **Vetor unitário**: É todo vetor cuja norma seja igual à unidade. Assim, dizemos que: "$\vec{U}$ é unitário, se e somente se, $\| \vec{U} \| = 1$".
- **Versor:** Chamamos de versor todo vetor unitário na direção e sentido de um vetor qualquer $\vec{V}$ ou de um eixo.
- **Vetor oposto**: O vetor oposto de um vetor $\overrightarrow{AB}$ é o vetor $\overrightarrow{BA}$, que tem mesma norma, mesma direção , mas sentido contrário de. Dizemos também que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, o que implica dizer que, se $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$, então $\overrightarrow{BA} = -(a, b, c) = (-a , -b, -c)$.

- **Vetores iguais**: Dois vetores são ditos iguais se representam a mesma classe de segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$. Têm a mesma norma, a mesma direção e o mesmo sentido , embora tenham pontos de aplicação ou origens diferentes.

Quando estudamos o plano cartesiano tivemos o conceito de segmento orientado, tendo inclusive verificado como se calcula o seu módulo ou comprimento.

O conceito de vetor que introduzimos aqui no R^3 é independente do espaço , e portanto , tudo o que aqui for deduzido é válido no R^2 , com exceção do produto vetorial que definiremos posteriormente.

6. Operações com Vetores

As operações com vetores diferem na forma das operações com os números reais, pois estaremos operando com medida e direção orientada. As operações que estudaremos serão a adição, o produto por escalar, o produto escalar e o produto vetorial.

6.1. Adição

Dados dois vetores quaisquer $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$, definimos a soma entre eles como o vetor $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ cujas componentes são obtidas pela soma das componentes de mesma posição em $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$.

A subtração de vetores é a soma do primeiro pelo oposto do segundo vetor.

Tomemos no R^3 dois vetores $\vec{V_1} = (x_1 , y_1 , x_1)$ e $\vec{V_2} = (x_2 , y_2 , z_2)$. O vetor resultante da soma de $\vec{V_1}$ por $\vec{V_2}$ é o vetor $\vec{V} = (x_1 + x_2 ,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$.

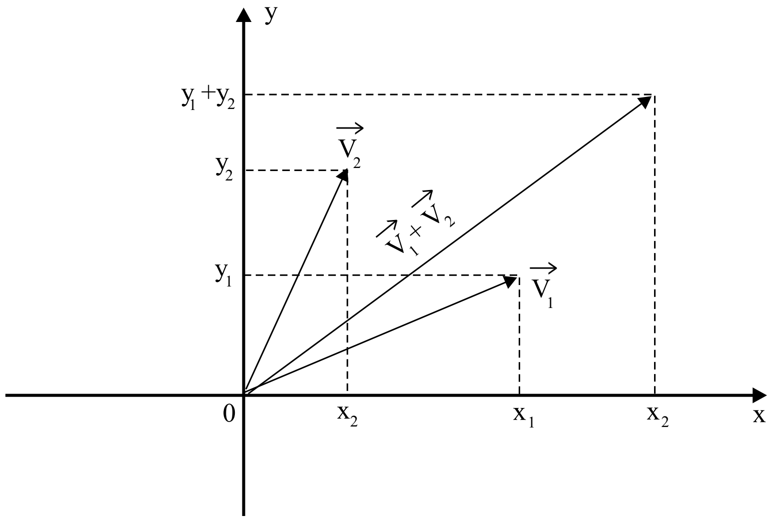
Da mesma forma, vemos que $\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} = (- \vec{V_2}) = (x_1 – x_2 ,\ y_1 – y_2,\ z_1 – z_2)$.

No espaço R_2 , se $\vec{V_1} = (x_1 , y_1)$ e $\vec{V_2} = (x_2 , y_2)$, então:

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2 ,\ y_1 + y_2) \text{ e } \vec{V_1} - \vec{V_2} = (x_1 – x_2 , y_1 – y_2).$$

No espaço R^2 é fácil de se observar geometricamente o resultado da soma e da subtração de dois vetores.

Na soma e subtração de vetores, opera-se com soma e subtração de números reais.



Propriedades da soma:

- **Comutativa:** $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.
- **Associativa**: $\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)+\vec{V}_3=\vec{V}_1+\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)$
- **Elemento Neutro**: Em todo espaço existe o vetor nulo $\vec{0}$, tal que $\vec{V}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{V}=\vec{V}$, para todo vetor $\vec{V}$ do espaço .
- **Elemento Simétrico**: Para todo vetor $\vec{V}$ existe um único vetor oposto $-\vec{V}$, tal que $\vec{V}+\left(-\vec{V}\right)=\left(-\vec{V}\right)+\vec{V}=\vec{0}$

6.2. Produto por Escalar

Dados um vetor qualquer $\vec{V}$ e um escalar k $\in$ R, definimos o produto de k por $\vec{V}$, como o vetor $\vec{W}=k.\vec{V}$ pertencente ao mesmo espaço , onde cada componente é o produto de k pelas componentes de $\vec{V}$.

Sendo $\vec{V}$ = (a , b , c) $\in$ R^3 , temos que $\vec{W}$ = (k.a , k.b , k.c) .

O vetor $\vec{W}$ resultante desse produto tem a mesma direção de e satisfaz as seguintes propriedades:

- O sentido de $\vec{W}$ depende do valor de k, sendo o mesmo de quando k > 0 e contrário ao sentido de $\vec{V}$ quando k < 0.
- A direção de $\vec{W}$ é a mesma do vetor $\vec{V}$, logo $\vec{W}$ é paralelo a $\vec{V}$.
- A norma de $\vec{W}$ é o produto do módulo de k pela norma de $\vec{V}$.
- $\|\vec{W}\| = |k| . \|\vec{V}\|$.

O produto por escalar também satisfaz as seguintes propriedades:

- Para todo vetor $\vec{V}$, existem infinitos vetores colineares ou paralelos resultantes do produto desse vetor por um número real.

Não Esqueça:
Na soma e subtração de vetores, opera-se com soma e subtração de números reais.

- Se $k = 0$, então $k.\vec{V} = \vec{0}$
- Se $k = 1$, então $k.\vec{V} = \vec{V}$
- Se $k = -1$, então $k.\vec{V} = -\vec{V}$
- $k_1(k_2.\vec{V}) = (k_1.k_2).\vec{V}$
- $(k_1 + k_2).\vec{V} = k1.\vec{V} + k2.\vec{V}$
- $k(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = k.\vec{V_1} + k.\vec{V_2}$.

Forma Cartesiana de um Vetor:

Todo vetor tem sido apresentado com a mesma notação de ponto, sendo por uma tripla ordenada quando no R^3, ou por um par ordenado para vetores no R^2 .

Tomemos então no R^3 um vetor $\vec{V} = (a, b, c)$. Com base nas operações soma e produto por escalar, podemos decompor como uma soma de três vetores, ou seja:

$\vec{V} = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c) \Rightarrow$

$\vec{V} = a.(1, 0, 0) + b.(0, 1, 0) + c.(0, 0, 1).$

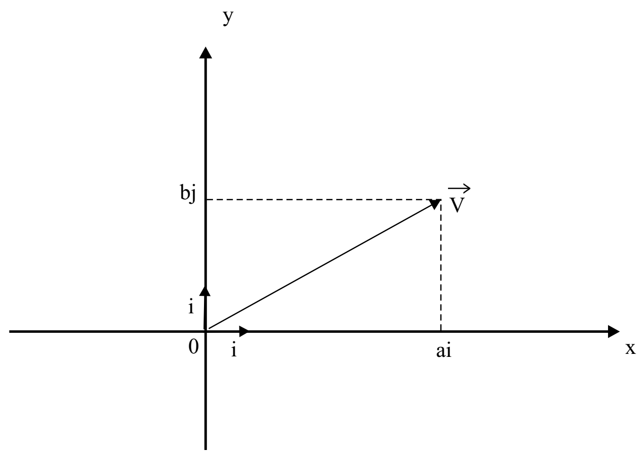
Veja que os três vetores na decomposição de $\vec{V}$ são unitários, sendo i = (1, 0, 0) na direção do eixo x; j = (0, 1, 0) na direção do eixo y e k = (0, 0, 1) na direção do eixo z. Esses três vetores unitários são chamados de versores canônicos do R^3, e todo vetor desse espaço pode ser expresso como uma combinação linear de i, j e k.

Então, podemos escrever $\vec{V} = a.i + b.j + c.k$ que é a forma cartesiana para qualquer vetor do R^3.

No plano onde temos dimensão dois, se todo vetor é representado por um par ordenado, então $\vec{V} = (a, b) \Rightarrow$

$\vec{V} = a.i + b.j$, onde os versores são i = (1, 0) para o eixo x e j = (0, 1) para o eixo y.

Veja na figura a decomposição de um vetor no R^2 .



6.3. Produto escalar

Dados dois vetores não nulos $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$, definimos o produto escalar entre eles como o número real ou escalar, que é igual ao produto de suas normas pelo cosseno do ângulo por eles compreendido.

Representamos por $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \| \vec{V_1} \| . \| \vec{V_2} \| . \cos \alpha$, onde $0 \leq \alpha \leq \pi$ é o ângulo compreendido por $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$.

Veja bem que o produto escalar aqui definido, é o produto entre dois vetores cujo resultado é um escalar, enquanto que o produto por escalar anteriormente definido era um produto de vetor por escalar, e cujo resultado era um vetor.

Propriedades: Para vetores quaisquer $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ e $\vec{V_3}$, temos:

1. $\vec{V_2} \cdot \vec{V_1}$ = t (comutativa)

2. $\vec{V_1} (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \vec{V_3}$ (distributiva em relação à soma de vetores)

3. $(k.\vec{V_1}) \cdot \vec{V_2} = \vec{V_1} \cdot (k.\vec{V_2}) = k.(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2})$

4. $\vec{V_1} . \vec{V_1} = \| \vec{V_1} \| 2$. O produto escalar de um vetor por ele mesmo é igual à sua norma ao quadrado.

5. Para os versores i, j, k, sabemos que o ângulo entre quaisquer dois deles é de 90º, então:

i. i = j. j = k. k = 1 (pela propriedade 4) e

i. j = i. k = j. i = j. k = k. i = k. j = 0.

Forma Cartesiana do Produto Escalar:

Da forma como foi definido o produto escalar, não é possível determinar o produto entre eles sem que se conheça o ângulo entre eles. Com base nas suas propriedades determinaremos uma forma prática de cálculo desse produto , em função das componentes desses vetores .

Para isso, tomemos dois vetores pertencentes ao R^3, em suas formas cartesianas, onde $\vec{V_1} = x_1.i + y_1.j + z_1.k$ e $= x_2.i + y_2.j + z_2.k$.

Então: $\vec{V_1} . \vec{V_2} = (x_1.i + y_1.j + z_1.k) . (x_2.i + y_2.j + z_2.k)$

Pelas propriedades 2 e 3 temos:

$\vec{V_1} . \vec{V_2} = x_1x_2(i.i) + x_1y_2(i.j) + x_1z_2(i.k) + y_1x_2(j.i) + y_1y_2(j.j) + y_1z_2$ $(j.k) +$

$+ z_1x_2(k.i) + z_1y_2(k.j) + z_1z_2(k.k)$.

Na propriedade 5 temos que o produto escalar de versores iguais é 1 e para versores diferentes é zero , então:

$$\vec{V_1} . \vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

No plano R^2, se $\vec{V_1} = x_1.i + y_1.j$ e $\vec{V_2} = x_2.i + y_2.j$ então

$\vec{V_1} . \vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Atividades de avaliação

1. Dados os vetores $\vec{V_1} = (- 3, 2, 1)$ e $\vec{V_2} = (- 2, 4, 3)$ determine $\vec{V_1} . \vec{V_2}$.

Solução:

$\vec{V_1} . \vec{V_2} = (- 3, 2, 1). (- 2, 4, 3) = (- 3). (- 2) + 2. 4 + 1. 3 = 6 + 8 + 3 = 17.$

Ângulo entre dois vetores:

Definimos o produto escalar de dois vetores quaisquer não nulos como sendo $\vec{V_1} . \vec{V_2} = || \vec{V_1} ||.|| \vec{V_2} || \cos\alpha$ ondeé o ângulo compreendido pelos dois vetores, mas sem conhecer o cosseno desse ângulo. Agora que temos uma forma cartesiana para determinar o produto escalar, então é possível encontrar a medida desse ângulo , de uma forma direta, pois:

$$\vec{V_1} \,.\, \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|}.$$

Assim, o ângulo entre $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ é $\alpha = \arccos \dfrac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|}$.

Um resultado muito importante que podemos tirar dessa dedução é o que diz respeito à ortogonalidade de dois vetores. Dois vetores são ditos ortogonais se eles formam um ângulo reto. Então:

$\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ ortogonais $\Leftrightarrow$ o ângulo α entre eles é de 90° $\Leftrightarrow$ cos = 0
$\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ = 0.

Atividades de avaliação

1. Determine a medida do ângulo formado pelos vetores $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ e $\vec{b} = (3, -2, 0)$.

Solução:

Se α for o ângulo entre os dois vetores, temos que $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|}$ $\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{(-1,2,1)\cdot(3,-2,0)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{-3-4+0}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{9+4+0}} \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{6}\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{78}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{78}}\right).$$

Ângulos Diretores e Cossenos Diretores de um Vetor:

Todo vetor não nulo $\vec{V}$ = a.i + b.j + c.k do R^3 tem sua direção determinada por três ângulos α , β e γ que ele forma, com o eixo x, eixo y e eixo z, respectivamente. Esses ângulos são conhecidos como os ângulos diretores do vetor. Se cada eixo tem um versor na sua direção e sentido, então podemos determinar os cossenos desses ângulos, utilizando os versores desses eixos. Assim, os cossenos diretores de $\vec{V}$ serão:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}\cdot i}{\|\vec{V}\|.\|i\|} = \frac{(a,b,c).(1,0,0)}{\|\vec{V}\|.1} = \frac{a}{\|\vec{V}\|} .$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{V}\cdot j}{\|\vec{V}\|.\|j\|} = \frac{(a,b,c).(0,1,0)}{\|\vec{V}\|.1} = \frac{b}{\|\vec{V}\|} .$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{V}\cdot k}{\|\vec{V}\|.\|k\|} = \frac{(a,b,c).(0,0,1)}{\|\vec{V}\|.1} = \frac{c}{\|\vec{V}\|} .$$

Os angulos diretores de um vetor são os ângulos que esse vetor forma com os três eixos coordenados.

Propriedade:

A soma dos quadrados dos cossenos diretores de qualquer vetor é igual a um.

De fato, $\cos^2 + \cos^2 + \cos^2\gamma = \left(\frac{a}{\|\vec{V}\|}\right)^2 + \left(\frac{b}{\|\vec{V}\|}\right)^2 + \left(\frac{c}{\|\vec{V}\|}\right)^2 = \frac{a^2}{\|\vec{V}\|^2} + \frac{b^2}{\|\vec{V}\|^2} + \frac{c^2}{|\vec{V}|^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\|\vec{V}\|^2} = \frac{\|\vec{V}\|^2}{\|\vec{V}\|^2} = 1.$

Vetor Unitário:

Tomando-se o vetor $\vec{U}$ = ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) ele terá a mesma direção e sentido do vetor $\vec{V}$ = (a, b, c), e tem norma igual a 1.

Assim, podemos dizer que o vetor unitário na mesma direção e sentido de $\vec{V}$ deve ser

expresso por $\vec{U}_V = \left(\frac{a}{\|\vec{V}\|}, \frac{b}{\|\vec{V}\|}, \frac{c}{\|\vec{V}\|}\right) \Rightarrow \vec{U}_V = \frac{(a,b,c)}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow$

$$\vec{U}_V = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

6.4. Produto Vetorial

Dados dois vetores $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ pertencentes ao espaço R^3, definimos o produto vetorialde $\vec{V_1}$ por $\vec{V_2}$ como o vetor $\vec{W} = \vec{V_1} \times \vec{V_2}$, tal que:

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = x_1y_2.k + x_1z_2.(-j) + y_1x_2.(-k) + y_1z_2.i + z_1x_2.j + z_1y_2.(-i)$$

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = (y_1z_2 - z_1y_2).i - (x_1z_2 - z_1x_2).j + (x_1y_2 - y_1x_2).k.$$

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = x_1y_2.k + x_1z_2.(-j) + y_1x_2.(-k) + y_1z_2.i + z_1x_2.j + z_1y_2.(-i)$$

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = (y_1z_2 - z_1y_2).i - (x_1z_2 - z_1x_2).j + (x_1y_2 - y_1x_2).k .$$

Esse é o vetor resultante do produto vetorial de $\vec{V_1}$ por $\vec{V_2}$.

A forma como esse vetor resultante se apresenta é difícil de ser memorizada, como também é trabaloso fazer todos os passos desse produto, sempre que for necessário.

Por isso, vamos procurar uma forma para o produto vetorial que nos permita determinar o vetor resultante com maior praticidade.

Com base na teoria dos determinantes , podemos escrever:

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} .i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} .j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .k$$

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} .$$

Note que, essa forma de apresentação é uma forma de recorrência, pois é o determinante de uma matriz 3X3 e não tem forma de vetor, mas quando esse determinante é calculado, resulta em um vetor do R^3. A facilidade da apresentação nessa forma é que a primeira linha da matriz é composta pelos versores, a segunda linha pelas componentes do primeiro vetor, e a terceira pelas componentes do segundo vetor.

Atividades de avaliação

1. Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{a} = (-1, 1, -2)$ e $\vec{b} = (3, -4, 1)$.

Solução:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = i.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - j.\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + k.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

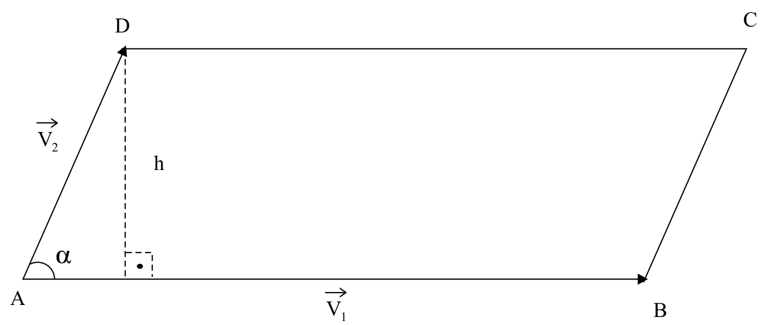
$\vec{a}\times\vec{b}$ = i.(1 – 8) - j.(- 1 + 6) + k.(4 - 3) $\Rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}$ = - 7i - 5j +

k ou $\vec{a}\times\vec{b}$ = (- 7, - 5 , 1).

Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial:

Sabemos que o produto vetorial de dois vetores $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ no R^3 é um vetor tal que

$$\|\vec{V_1}\times\vec{V_2}\| = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|.\text{ sen }\alpha .$$



Consideremos o paralelogramo construído de modo que seus lados sejam esses dois vetores, tendo seus lados medindo $\|\vec{V_1}\|$ e $\|\vec{V_2}\|$. A área desse paralelogramo é dada por A = $\|\vec{V_1}\|$. h. Mas na figura podemos observar que sen $\alpha = \dfrac{h}{\|\vec{V_2}\|}$, o que implica que h = $\|\vec{V_2}\|$. sen α .

Como a área do triângulo é metade da área do paralelogramo, então concluímos que $A_T = \dfrac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$.

A altura do paralelogramo, relativa ao lado, que é a mesma do triângulo, é h = $\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, pois no paralelogramo, A = b. h, o que implica em h = $\dfrac{A}{b}$.

Se r é a reta suporte do lado $\overline{AB}$, podemos também interpretar a altura do paralelogramo como a distância do ponto C a essa reta,

$$d(C, r) = \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Atividades de avaliação

1. Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos A(0, 1, - 2); B(2, 3, 1) e C(3, - 4, 2).

Solução:

Primeiramente temos que encontrar, a partir desses pontos , dois vetores que podem ser $\overrightarrow{AB}$ = B - A = (2, 2, 3) e $\overrightarrow{AC}$ = C - A = (3, - 5, 4).

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = i.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - j.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + k.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = i.(8 + 15) - j.(8 - 9) + k.(-10 - 6) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (23, 1, -16)$$

A área do triângulo é A = $\dfrac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{23^2+1^2+(-16)^2} \Rightarrow$

$$A = \frac{\sqrt{529+1+256}}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{786}}{2}.$$

6.5 Produto Misto

Dados três vetores $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ e $\vec{V_3}$ no espaço R^3, definimos o produto misto desses três vetores como o produto escalar do primeiro pelo vetor resultante do produto vetorial dos dois últimos. Representamos por $[\vec{V_1}\ ;\ \vec{V_2}\ ;\ \vec{V_3}\ ] = \vec{V_1}\ .\ (\vec{V_2} \times \vec{V_3})$.

Para determinar uma forma cartesiana para esse produto , tomemos $\vec{V_1} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{V_2} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{V_3} = (x_3, y_3, z_3)$.

Temos então: $\vec{V_2} \times \vec{V_3} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.i - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}.j + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{V_1}\ .(\vec{V_2} \times \vec{V_3}) = (x_1.i + y_1.j + z_1.k).(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}.i - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}.j + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.k)$$

$$\vec{V_1}\ .(\vec{V_2} \times \vec{V_3}) = x_1 . \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 . \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 . \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

por $[\vec{V_1}\ ;\ \vec{V_2}\ ;\ \vec{V_3}\ ] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Portanto, o produto misto de três vetores é um número real, igual ao determinante da matriz quadrada 3×3, cujas linhas são as componentes dos três vetores, na ordem observada no produto.

Como propriedades do produto misto, podemos dizer que:

- Se um dos vetores for nulo, o produto misto é igual a zero
- Se dois vetores forem iguais ou tiverem mesma direção, o produto misto será zero.
- Se os três vetores forem coplanares, o produto misto entre eles será igual a zero.

Síntese da Parte 5

Neste capítulo conhecemos o espaço R^3, onde aprendemos a localizar pontos, calcular distância entre dois pontos e determinar ponto divisor de um segmento de reta.

O principal conceito introduzido nesta unidade foi o de vetor , que é uma ferramenta que será muito útil para as próximas unidades, como também para outras disciplinas, como por exemplo na Álgebra Linear.

Sobre os vetores devemos destacar:

- **Definição:** $\overrightarrow{AB}$ = B - A $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ = $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ onde $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$
- **Norma:** Se $\vec{V}$ = (a, b, c), então $\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- **Adição:** Se $\vec{V}_1$ = (x_1, y_1, x_1) e $\vec{V}_2$ = (x_2, y_2, z_2), então a soma entre eles é $\vec{V}$ = $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$.
- **Produto Escalar:** $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- **Produto Vetorial:** $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.
- **Produto Misto:** $[\vec{V}_1 ; \vec{V}_2 ; \vec{V}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Atividades de avaliação

1. Dados os pontos abaixo, identifique o octante a que eles pertencem, ou se pertencem a um eixo ou plano coordenado:

A(- 1, 0, 4); B(3, - 5, 8); C(4, 2, 1); D(- 7, - 5, 2); E(0, 0, - 3);

F(- 4, 3, - 8); G(0, - 9, 2); H(- 5, - 3, - 6); I(5, - 9, - 1) e J(4, 0, 0).

2. Encontre a distância entre os seguintes pares de pontos:

a) A(- 2, 3, 1) e B(4, - 5, 6)

b) A(7, - 1, 3) e B(4, - 2, 3)

c) A(0, 3, 1) e B(- 1, 4, 7)

d) A(- 3 , 6 , 1) e B(4, 0 – 6)

3. Mostre que o ponto A(2, 2, 3) é eqüidistante dos pontos B(1, 4, - 2) e C(3, 7, 5).

4. Determine um ponto sobre eixo das ordenadas que seja eqüidistante A(1, 1, 4) e B(- 6, 6, 4).

5. Dados os pontos A(2, 4, 1) e B(3, 0, 5), determine o ponto C que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão r = $-\frac{1}{3}$.

6. Dados os pontos A(7, - 1, 3) e B(3, 0, - 12), encontre o ponto C que divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{3}$, e também o ponto médio de $\overline{AB}$.

7. O ponto C(9, 14, 7) divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{3}$.

8. Determine a extremidade B do segmento que representa o vetor $\vec{V}$ = (2, 7), sabendo que sua origem é o ponto A(- 1, 4) .

9. Dados os pontos A(3, - 1); B(1, 5) e C(- 2, 3), determine: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}$; 3. $\overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{BC}$ e $\|\overrightarrow{OB} - 2.\overrightarrow{AC}\|$.

10. Dados os vetores $\vec{a}$ = (2, - 4); $\vec{b}$ = (- 5 , 1) e $\vec{c}$ = (- 12 , 6), determine k_1 e k_2 de modo que $\vec{c} = k_1.\vec{a} + k_2.\vec{b}$.

11. Dados os pontos A(2, - 3, 1) e B(4, 5, - 2) determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

12. Encontre valores para a e b de modo que sejam paralelos os vetores $\vec{V}$ = (4, 1, - 3) e $\vec{W}$ = (8, a, b) sejam paralelos.

13. Determine valores para a e b para que sejam colineares os pontos A(3, 1, - 2); B(1 , 5 , 1) e C(a, b, 4).

14. Encontre o ponto C, que seja simétrico de A(1, - 5, 2) em relação ao ponto B(3, 7, - 4) .

15. Dados os vetores $\vec{V}$ = (2, - 1, 4); $\vec{U}$ = (- 3, 5, 1) e $\vec{W}$ = (0, 3, 7) determine:

a) 3. $\vec{V}$ - 5. $\vec{U}$

b) 2. $\vec{V}$ + $\vec{U}$ - 4. $\vec{W}$

c) $\|\vec{V} - 2.\vec{U} + \vec{W}\|$.

16. Sendo $\vec{V} = (0, -2, 1)$; $\vec{W} = (3, -5, -1)$, determine:

a) $\vec{V} \cdot \vec{V}$

b) $\vec{V} \times \vec{W}$

c) $\vec{V} \cdot (\vec{V} \times \vec{W})$

d) $(\vec{V} + 2\vec{W}) \times (\vec{V} - \vec{W})$

17. Determine o vetor $\vec{V}$, sabendo que $(3, 4, -2) + 3\vec{V} = (7, -6, 8) - \vec{V}$.

18. Seja o vetor $\vec{V} = (a + 7, a + 2 , 5)$. Determine o valor de a para que tenhamos $\|\vec{V}\| = \sqrt{8}$.

19. Encontre o vetor unitário na direção e sentido de:

a) $\vec{V} = (3, -2 , 1)$

b) $\vec{V} = (-5, 4 , 0)$

c) $\vec{V} = (0, 7 , -4)$

d) $\vec{V} = 5i - 2j + 6k$

20. Determine os ângulos diretores do vetor $\vec{V} = (3 , 3\sqrt{2} , -3)$.

21. Se os ângulos diretores de um vetor são 45^0, 60^0 e γ, determine γ.

22. Determinar os ângulos do triângulo cujos vértices são A(2, 1, 3); B(1, 0, - 1) e C(- 1, 2, 1).

23. Mostre que se $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$, então $\vec{v}$ é também ortogonal $\vec{u} + \vec{w}$.

24. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 3, 2)$; $\vec{v} = (-2, 0, 4)$ e $\vec{w} = (3, -2, 1)$, determine:

a) $\vec{v} \times \vec{w}$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

e) $(3\vec{v}) \times (-2\vec{w})$

f) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

25. Determine um vetor unitário que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (-2, 0, 1)$ e $\vec{v} = 0, -5, 4)$.

26. Sabendo que $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$ e que o ângulo entre eles é 60º, determine $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$.

27. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v} = (3, -2, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

28. Determine a área do triângulo cujos vértices são os três pontos A(0, - 1, 1); B(2,- 1, 3) e C(- 3, 4, - 1).

29. Calcule o valor de x, de modo que os pontos A(x, 1, 1); B(1, - 1, 0) e C(2, 1, - 1) sejam vértices de um triângulo com $\frac{\sqrt{29}}{2}$ unidades de área.

30. Dado o triângulo de vértices A(- 3, 0, - 1); B(2, 1, - 4) e C(0, 2, 3), determine:

31. Determine o produto misto entre os vetores:

a) $\overrightarrow{V_1} = (0, -2, 1)$; $\overrightarrow{V_2} = (3, -2, 0)$ e $\overrightarrow{V_3} = (4, 1, -3)$

b) $\overrightarrow{V_1} = (2, 1, -1)$; $\overrightarrow{V_2} = (5, -4, 0)$ e $\overrightarrow{V_3} = (-1, 3, -2)$

c) $\overrightarrow{V_1} = (3, 0, 0)$; $\overrightarrow{V_2} = (0, -1, 0)$ e $\overrightarrow{V_3} = (0, 0, 4)$

d) $\overrightarrow{V_1} = (-1, 3, 2)$; $\overrightarrow{V_2} = (0, 5, -3)$ e $\overrightarrow{V_3} = 2, -6, -4)$.

Referências

LEITHOLD, Louis; O Cálculo com Geometria Analítica; Vol: I, 3ª Ed. São Paulo; Edit. Harbra; 1994.

STEINBRUCH, Alfredo; Geometria Analítica; São Paulo; Editora McGraw--Hill; 1987.

RIGHETTO, Armando; Vetores e Geometria Analítica; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

Capítulo 6

A Reta no Espaço R^3

Objetivos:

- Trabalhar com a reta no espaço R^3.
- Conhecer as diversas formas de equação da reta.
- Calcular ângulo entre retas.
- Identificar a posição relativa de duas retas.

Nos capítulos anteriores estudamos o plano R^2 e o espaço R^3, onde tratamos de localização de pontos, trabalhamos com vetores e suas operações. Começamos neste capítulo a fazer aplicações desse conteúdo, identificando e estudando a reta no espaço.

1. A Reta no Espaço R^3

Geometricamente sabemos que, por um único ponto passam infinitas retas, como também são infinitas as retas em uma direção dada. Para que uma reta esteja bem definida é necessário que se tenha duas condições: um ponto fixo por onde ela passe, e uma direção bem definida.

Assim, se tivermos um ponto fixo P_0 e um vetor $\vec{V}$, existe uma e somente uma reta r passando por P_0 na direção do vetor $\vec{V}$.

No espaço R^3, essa reta r é contituida pelo conjunto de todos os pontos $P \in R^3$ tais que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\vec{V}$.

Pela condição de paralelismo entre vetores temos que $\overrightarrow{P_0P} \,//\, \vec{V} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = m.\vec{V}$ onde m é um número real qualquer, que chamaremos de parâmetro, e que varia de $-\infty$ até $+\infty$.

Mas, $\overrightarrow{P_0P} = m.\vec{V} \Rightarrow P - P_0 = m.\vec{V} \Rightarrow P = P_0 + m.\vec{V}$, que é a equação vetorial da reta r.

Sendo no R^3 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ o ponto e $\vec{V} = (a, b, c)$ o vetor diretor dessa reta, então a sua equação vetorial será $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + m.(a, b, c)$, e qualquer ponto $P(x, y, z) \in R^3$ que satisfaça a essa equação é um ponto pertencente à reta.

Vejamos como exemplo, a reta r determinada pelo ponto $P_0(3, -1, 2)$ tendo como vetor diretor $\vec{V} = (2, 4, 1)$. A sua equação vetorial será:

$(x, y, z) = (3, -1, 2) + m(2, 4, 1)$, e para todo valor real que se atribua a m, retemos um ponto pertencente a ela.

Partindo dessa equação vetorial, poderemos chegar a outras formas de equação para essa reta r.

2. Equações Paramétricas

Da equação vetorial para uma reta r no R^3, podemos fazer:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + m.(a, b, c) \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (am, bm, cm) \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (x_0 + am, y_0 + bm, z_0 + cm) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -3 + 4m \\ y = 2 - 2m \\ z = 1 + 5m \end{cases}$$,que são as equações paramétricas da reta r.

Atividades de avaliação

1. Encontre as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A(- 3, 2, 1) na direção do vetor $\vec{V}$ = (4, - 2, 5).

Solução:

Como o ponto e o vetor são dados, aplicamos suas coordenadas na equação vetorial:

$$P = A + m . \vec{V} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (-3, 2, 1) + m. (4, -2, 5) \quad \Rightarrow$$

$$x, y, z) = (-3, 2, 1) + (4m, -2m, 5m) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 + 4m \\ y = 2 - 2m \\ z = 1 + 5m \end{cases} .$$

3. Equações Simétricas

Para se chegar às equações simétricas de uma reta r, devemos partir das equações paramétricas isolando em cada uma delas o parâmetro. Como para cada valor real de m teremos um ponto da reta, então:

$$\begin{cases} x = x_0 + am \\ y = y_0 + bm \\ z = z_0 + cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x - x_0}{a} \\ m = \dfrac{y - y_0}{b} \\ m = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Observe que essas equações podem ser obtidas sempre que as componentes a, b, c do vetor diretor forem diferentes de zero. Nos casos em que pelo menos uma dessas componentes for nula, teremos retas com características particulares:

a) No caso de uma componente ser nula, suponhamos que c = 0. As equações paramétricas da reta serão:

$$\begin{cases} x = x_0 + am \\ y = y_0 + bm \\ z = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x - x_0}{a} \\ m = \dfrac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b};\ z = z_0.$$

Como o valor de z nessa reta é constante e igual a z_0, então essa reta passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) paralela ao plano xy.

b) Se duas componentes do vetor diretor são nulas , supondo b= c=0, temos:

$$\begin{cases} x = x_0 + am \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x - x_0}{a} \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

Nesse caso, não temos como obter equações simétricas para a reta, que passará pelo ponto (x_0, y_0, z_0) paralela ao eixo x, pois somente x varia.

4. Equações Reduzidas

As equações reduzidas de uma reta são obtidas a partir das equações simétricas, expressando-se duas das variáveis em função da terceira, que chamamos de variável independente. Tomemos então equações simétricas, com a , b , c diferentes de zero:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{x-x_0}{a} \\ \dfrac{z-z_0}{c}=\dfrac{x-x_0}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=y_0+\dfrac{b}{a}(x-x_0) \\ z=z_0+\dfrac{c}{a}(x-x_0) \end{cases}$$

Assim, obtivemos as equações reduzidas da reta r tendo x como variável independente.

Observe que nas equações reduzidas, devemos verificar os mesmos casos particulares que tivemos nas equações simétricas. Quando b ou c forem nulas, teremos apenas uma equação, e não teremos equações reduzidas se b=c=0.

As equações reduzidas de uma reta podem ser expressas tendo x, y ou z como variável independente.

Atividades de avaliação

1. Obtenha as equações simétricas e reduzidas da reta r definida pelo ponto A(1, - 3, 4) e pelo vetor $\vec{V}$ = (- 1, 2, 1).

Solução:

Se P pertence à reta, então P = A + m. $\vec{V}$ $\Rightarrow$

(x, y, z) = (1, - 3, 4) + m. (- 1 , 2 , 1) $\Rightarrow$

(x, y, z) = (1 , - 3 , 4) + (- m, 2m, m) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=1-m \\ y=-3+2m \\ z=4+m \end{cases}$$ (Equações paramétricas)

$$\begin{cases} m=-x+1 \\ m=\dfrac{y+3}{2} \\ m=z-4 \end{cases} \Rightarrow -x+1=\frac{y+3}{2}=z-4$$ (Equações simétricas)

$$\begin{cases} \dfrac{y+3}{2} = -x+1 \\ z-4 = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(-x+1)-3 \\ z = -x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x+2-3 \\ z = -x+5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ z = -x+5 \end{cases}$$ (Equações reduzidas na variável x).

5. Posição Relativa de Duas Retas

Estudar a posição relativa de duas retas, é analizar o posicionamento de uma com relação a outra reta, e para isso devemos lembrar que suas direções são indicadas por seus vetores diretores. Como o menor ângulo entre duas retas é o mesmo ângulo formado por seus vetores diretores, já sabemos como determiná-lo usando o produto escalar.

Suponhamos que r e s são duas retas com vetores diretores $\vec{V_1}$ e, e que α seja o menor ângulo por elas formado. Então:

$$\cos\ \alpha = \left| \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{\| \vec{V_1} | . | \vec{V_2} |} \right|$$

As equações reduzidas de uma reta podem ser expressas tendo x, y ou z como variável independente.

Sejam r e s duas retas quaisquer no R^3, de modo que suas equações vetoriais sejam r: $P = P_1 + m . \vec{V_1}$ e s: $P = P_2 + m . \vec{V_2}$.

1) Dizemos que r e s são paralelas se elas têm a mesma direção, o que acarreta dizer que seus vetores diretores são tais que, um é múltiplo escalar do outro. Portanto:

$$r\ //\ s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V_2} = k . \vec{V_1} .$$

O módulo no cosseno do ângulo α, garante que ele seja agudo e portanto o menor dos dois compreendidos pelas retas .

2) Dizemos que as retas r e s são ortogonais, quando elas formam entre si um ângulo reto. Como o ângulo entre elas é o mesmo entre seus vetores diretores, temos que:

$$r \text{ e } s \text{ ortogonais} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V_1} \perp \vec{V_2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V_1} . \vec{V_2} = 0 .$$

3) Dizemos que r e s são coplanares e concorrentes, quando elas estão contidas em um plano, tendo um ponto em comum, ou seja, não são paralelas. A condição para que essas duas retas sejam coplanares é que os vetores $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ sejam coplanares, ou seja, o produto misto dos três seja zero.

r e s coplanares $\Leftrightarrow$ $[\ \vec{V_1}\ ;\ \vec{V_2}\ ;\ \overrightarrow{P_1P_2}\ ] = 0$

Duas retas paralelas são coplanares , pois seus vetores diretores têm mesma direção e consequentemente o produto misto é nulo.

4) Se as retas r e s não são coplanares, elas são ditas reversas, e nesse caso, o produto misto dos três vetores é diferente de zero.

r e s reversas $\Leftrightarrow$ $[\ \vec{V_1}\ ;\ \vec{V_2}\ ;\ \overrightarrow{P_1P_2}\ ] \neq 0$.

5) As duas retas r e s são ditas perpendiculares, quando elas são ao mesmo tempo ortogonais e coplanares. Logo:

r e s perpendiculares $\Leftrightarrow$ $[\ \vec{V_1}\ ;\ \vec{V_2}\ ;\ \overrightarrow{P_1P_2}\ ] = 0$ e $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$.

Atividades de avaliação

1. Determine o valor de a para que as retas r: P = (0, - 3, 1) + m(2, - 1, 1) e s: P = (4, - 5, 1) + m(a, 3, - 3) sejam paralelas.

Solução:

Os vetores diretores das duas retas são $\vec{V}$ = (2, - 1, 1) e $\vec{W}$ = (a, 3, - 3), e para que as duas retas sejam paralelas é necessário que $\vec{W}$ = k. $\vec{V}$, o que implica em:

(a, 3, - 3) = k . (2, - 1, 1) $\Rightarrow$ (a, 3, - 3) = (2k, - k, k) $\Rightarrow$

$\begin{cases} 2k = a \\ -k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$. Sendo k = - 3, então a = 2. (- 3) $\Rightarrow$ a = - 6.

2. Para as duas retas do exercício 1, é possível que exista um valor de a para que elas sejam ortogonais?

Solução:

Para que duas retas sejam ortogonais é necessário e suficiente que o produto escalar de seus vetores diretores seja nulo.

Então $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$ $\Rightarrow$ (2, - 1, 1) . (a, 3, - 3) = 0 $\Rightarrow$

2a - 3 - 3 = 0 $\Rightarrow$ 2a = 6 $\Rightarrow$ a = 3.

Síntese do capítulo

Este capítulo foi um estudo da reta no espaço R^3, onde devemos destacar as diversas formas de equação para uma reta:

Vetorial: $P = P_0 + m.\vec{V}$

Paramétricas: $$\begin{cases} x = x_0 + am \\ y = y_0 + bm \\ z = z_0 + cm \end{cases}$$

Simétricas: $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Reduzidas: $$\begin{cases} y = y_0 + \dfrac{b}{a}(x - x_0) \\ z = z_0 + \dfrac{c}{a}(x - x_0) \end{cases}$$

Devemos ainda salientar o estudo feito sobre a posição relativa de duas retas, onde tratamos de determinar o ângulo entre retas, e identificamos o paralelismo, a ortogonalidade e a coplanaridade entre duas retas.

Atividades de avaliação

1. Encontre as equações paramétricas da reta:

a) Que passa pelo ponto A(- 2, 5, 3) na direção do vetor $\vec{V}$ = (3, - 1, 4).

b) Determinada pelos pontos A(0, - 3, 2) e B(- 2, 1, - 4).

c) Que passa por A(5, 4, - 3) perpendicular ao plano xy.

d) Que passa por A(- 3, 4, - 2) na direção do eixo y.

2. Verifique se os pontos A(5, - 5, 6) e B(4, - 1, 12) pertencem à reta

r. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$.

3. Determine o ponto da reta r. $\begin{cases} x=3-t \\ y=2+t \\ z=1-4t \end{cases}$ que tem ordenada igual a 4.

4. Encontre os valores de a e b para que o ponto A(- 2, 5, 4) pertença à reta

r : $\begin{cases} x=1-t \\ y=a+t \\ z=b-4t \end{cases}$.

5. Determine o ponto da reta r. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{3}$ que tem abscissa 6.

6. Determine o ponto A de ordenada 5, que pertence à reta r; $\begin{cases} y=2x-1 \\ z=3x+4 \end{cases}$.

7. Encontre as equações simétricas e reduzidas para as retas definidas pelos pontos:

a) A(- 5, 3, 2) e B(3, 1, 0)

b) A(1, - 4, 2) e B(0, 5, - 3)

c) A(0, 3, 0) e B(- 2, 1, 4).

8. Identifique um ponto e o vetor diretor das seguintes retas:

a) r : $\begin{cases} x=4-t \\ y=-3+2t \\ z=2-4t \end{cases}$ b) r : $\begin{cases} x=-t \\ y=-1+6t \\ z=8+t \end{cases}$

c) r : $\frac{x+3}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-2}{3}$ d) r : $\begin{cases} y=-3x+4 \\ z=x-5 \end{cases}$

9. Encontre o ângulo entre os seguintes pares de retas

a) r : $\begin{cases} x=4-t \\ y=-3+2t \\ z=2-4t \end{cases}$ e s : $\begin{cases} y=-3x+4 \\ z=x-5 \end{cases}$

b) r : $\frac{x+3}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-2}{3}$ e s : $\begin{cases} x=-t \\ y=-1+6t \\ z=8+t \end{cases}$

10. Determine o valor de m para que a reta determinada pelos pontos A(3, 1, - 2) e B(4, 0, m) forme um ângulo de 60⁰ com a reta r: P = (1, 0, 3) + t(2, 1, - 1).

11. Verifique se os seguintes pares de retas são paralelas:

a) r: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + t \\ z = 2 \end{cases}$ e s: $\dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y-1}{-2}$; z = 6.

b) r: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$ e s: $\dfrac{x-4}{6} = \dfrac{z-1}{5}$; y = 5.

12. Determine as equações reduzidas da reta s que passa por A(0, -3, 2) paralela à reta r: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{1}$.

13. Verifique se os seguintes pares de retas são coplanares. Em caso afirmativo, encontre seus pontos de interseção:

a) r: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$ e s: $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ x = 3x \end{cases}$

b) r: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ e s: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$

c) r: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 4x - 10 \end{cases}$ e s: $x = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z-12}{-7}$

14. Determine o valor de a, para que as retas r: $\begin{cases} y = -5 \\ z = ax + 1 \end{cases}$ e s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-5}{-3}$; y = - 5 sejam reversas.

15. Encontre as equações simétricas da reta que passa pelo ponto A(- 1, 3, 5) simultaneamente ortogonal às retas r: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z}{2}$ e s: $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ z = x - 5 \end{cases}$.

16. Determine as equações reduzidas da reta t que passa pelo ponto de interseção das retas r: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$ e s: $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ x = 3x \end{cases}$ perpendicular a ambas.

Referências

LEITHOLD, Louis; O Cálculo com Geometria Analítica; Vol: I, 3ª Ed. São Paulo; Edit. Harbra; 1994.

STEINBRUCH, Alfredo; Geometria Analítica; São Paulo; Editora McGraw-Hill; 1987.

RIGHETTO, Armando; Vetores e Geometria Analítica; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

Capítulo 7

O Plano no Espaço R^3

Objetivos:

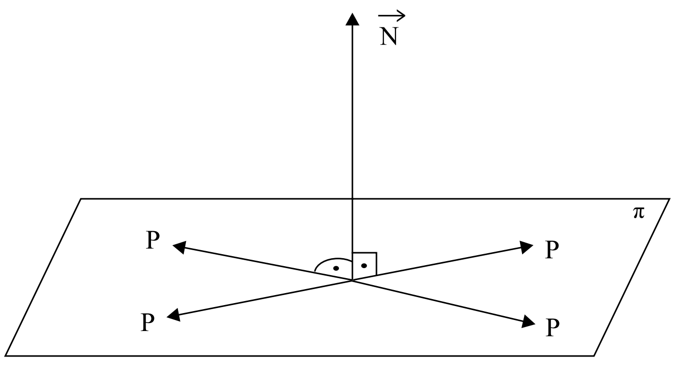
- Trabalhar com planos no espaço R^3.
- Conhecer a equação de um plano.
- Calcular ângulo entre dois planos.
- Estudar a posição relativa de dois planos.
- Estudar a posição relativa de um plano e uma reta.

Introdução

Assim como na unidade anterior estudamos a reta e deduzimos diversas formas para equacioná-la no espaço R^3, nessa unidade estudaremos vetorialmente o plano como um conjunto de pontos desse espaço, e chegaremos a uma forma de representá-lo.

1. O Plano No R^3

O plano pode ser definido no espaço R^3, a partir de um ponto fixo e um vetor. Tomemos então um ponto fixo P_0 e um vetor $\vec{N}$. Um plano π que passe pelo ponto P_0 e tenha $\vec{N}$ como vetor normal é o conjunto de todos os pontos P do R^3 tais que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a $\vec{N}$.



Todo ponto $P \in \pi$ tem a propriedade de $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} . \vec{N} = 0$
$\Rightarrow (P - P_0). \vec{N} = 0 \Rightarrow P. \vec{N} - P_0. \vec{N} = 0 \Rightarrow P. \vec{N} = P_0 . \vec{N}$

Qualquer uma dessas equações é chamada de equação vetorial do plano π.

2. Equação Cartesiana

Sendo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ o ponto e $\vec{N} = (a, b, c)$ o vetor que definem o plano π, a partir da equação vetorial temos que:

$$P.\vec{N} = P_0.\vec{N} \Rightarrow (x, y, z).(a, b, c) = (x_0, y_0, z_0).(a, b, c) \Rightarrow$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Fazendo $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, temos $ax + by + cz = -d \Rightarrow$

$ax + by + cz + d = 0$, que é a equação cartesiana do plano π.

A equação cartesiana é também conhecida como equação geral .

Casos Particulares:

A equação $ax + by + cz + d = 0$ no espaço R^3 representa um plano definido por um ponto fixo e um vetor normal $\vec{N} = (a, b, c)$, cujas componentes a, b, c são os coeficientes das três variáveis x, y e z, respectivamente.

Assim, podemos verificar que:

- Se o vetor $\vec{N}$ tem uma componente nula, como por exemplo, $c = 0$, a equação do plano será $ax + by + d = 0$, que é um plano cuja posição no espaço R^3, é perpendicular ao plano xy, pois $\vec{N}$ // xy.
- Se o vetor $\vec{N}$ tem duas componentes nulas, por exemplo $b = c = 0$, a equação desse plano se resume a $ax + d = 0$, pois seu vetor normal é $\vec{N} = (a, 0, 0)$. Esse plano é potanto perpendicular ao eixo x, e consequentemente paralelo ao plano yz.
- Se $d = 0$, a equação do plano será $ax + by + cz = 0$, que é um plano passando pela origem do sistema, pois as coordenadas desse ponto satisfazem a sua equação.

Atividades de avaliação

1. Encontre a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto A(- 1, 2, - 3) tendo o vetor $\vec{N}$ = (0, 3, - 2) como normal.

Solução:

Partindo da equação vetorial: $P.\vec{N} = A.\vec{N} \Rightarrow$

$(x, y, z) . (0, 3, -2) = (-1, 2, -3) . (0, 3, -2) \Rightarrow$

$3y - 2z = 6 + 6 \Rightarrow -2z = 12$ ou $3y - 2z - 12 = 0.$

2. Deduza a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto A(3 , 1 , - 3) e tem vetor normal $\vec{N}$ = (0, 2, 0).

Solução:

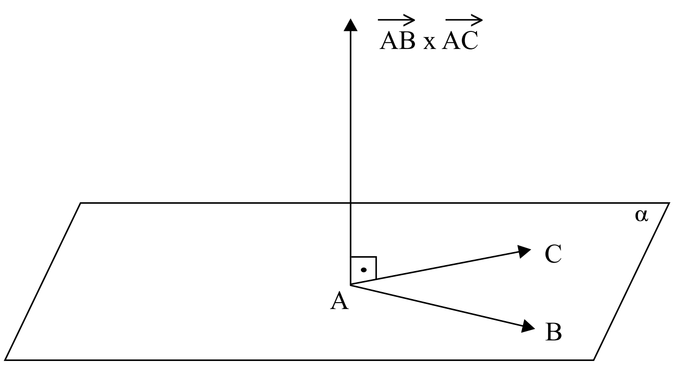
$P . \vec{N} = A . \vec{N} \Rightarrow (x , y , z) . (0, 2, 0) = (3, 1, -3). (0, 2, 0)$

$\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 .$

3. Plano gerado por três pontos

Geometricamente, sabemos que um plano é determinado por três pontos quaisquer não – alinhados.

Dado que conhecemos os três pontos com suas coordenadas, podemos encontrar a equação cartesiana do plano que eles determinam. Suponhamos A, B, e C sejam os pontos do R^3 que geram o plano α .



A partir desses três pontos podemos encontrar dois vetores, como por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ que estão contidos no plano α . Sabemos que o produto vetorial desses dois vetores é um vetor perpendicular aos dois, e consequentemente perpendicular ao plano que os contém. Portanto, a equação do plano α pode ser encontrada tomando-se como vetor normal $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ e qualquer dos três pontos dados.

Atividades de avaliação

1. Determine a equação cartesiana do plano que é definido pelos pontos A(- 1, 1, 0); B(2, - 2, 1) e C(3, 1, - 2).

Solução:

Primeiro, temos que encontrar dois vetores a partir dos tres pontos:

$\overrightarrow{AB}$ = B - A = (3, - 3, 1)

$\overrightarrow{AC}$ = C - A = (4, 0, - 2)

Então: $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = i(6 – 0) - j(- 6 – 4) + k(0 + 12)

$\Rightarrow \quad \vec{N}$ = (6, 10, 12).

A equação do plano será: P. $\vec{N}$ = A. $\vec{N}$ $\Rightarrow$

(x, y, z) . (6, 10, 12) = (- 1, 1, 0) . (6, 10, 12) $\Rightarrow$

6x + 10y + 12z = - 6 + 10 $\Rightarrow$ 6x + 10y + 12z = 4 $\Rightarrow$

6x + 10y + 12z - 4 = 0 ou 3x + 5y + 6z - 2 = 0.

Dois questionamentos podem ser feitos na solução desse exercício:

a) O vetor normal $\vec{N}$ = (6, 10, 12) = 2. (3, 5, 6).

Se usarmos $\vec{N}$ = (3, 5, 6) como vetor normal, a equação encontrada será a mesma? Verifique, e procure encontrar uma justificativa para o que deduzir.

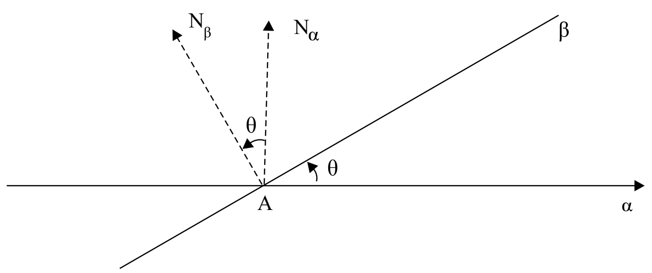
b) Na dedução da equação, escolhemos o ponto A como ponto referência. A equação seria a mesma, se tivéssemos escolhido o ponto B ou o ponto C? Verifique.

4. Posição relativa de dois planos

Antes de estudar a posição relativa de dois planos, é conveniente saber como calcular o ângulo entre dois planos. Se α e β são dois planos quaisquer, o menor ângulo entre eles é o mesmo ângulo θ formado por seus vetores normais $\overrightarrow{N_\alpha}$ e $\overrightarrow{N_\beta}$, portanto:

$$\cos\ \theta = \left| \frac{\overrightarrow{N_\alpha} \cdot \overrightarrow{N_\beta}}{|\overrightarrow{N_\alpha}| \,.\, |\overrightarrow{N_\beta}|} \right|.$$

Veja na figura, dois planos α e β, como se estivessem sendo vistos de perfil, com seus respectivos vetores normais.



É fácil de se observar que, se β for visto como um plano obtido a partir de uma rotação de θ graus do plano α em torno do eixo A, então o vetor normal $\overrightarrow{N_\alpha}$ teria o mesmo ângulo de rotação, gerando $\overrightarrow{N_\beta}$.

Podemos agora afirmar que:

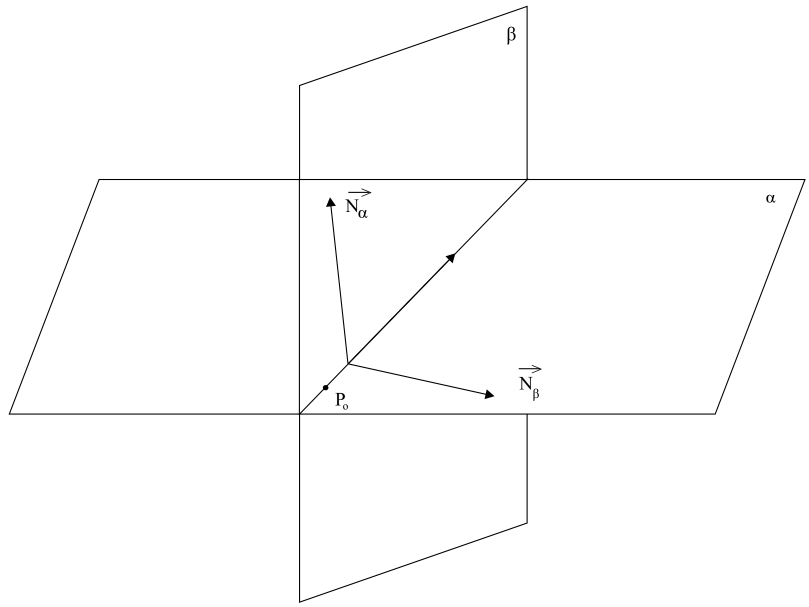
Dois planos α e β são paralelos, se e somente se, são paralelos os seus vetores normais.

$$\alpha \parallel \beta \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{N_\alpha} \parallel \overrightarrow{N_\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{N_\alpha} = k \,.\, \overrightarrow{N_\beta}$$

Dois planos α e β são perpendiculares, se e somente se, seus vetores normais são perpendiculares.

$$\alpha \perp \beta \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{N_\alpha} \perp \overrightarrow{N_\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{N_\alpha} \,.\, \overrightarrow{N_\beta} = 0.$$

Se dois planos α e β não são paralelos eles são ditos concorrentes, e a interseção entre eles é uma reta r de equação vetorial P = P_0 + t . $\overrightarrow{V_r}$, onde P_0 é um ponto que satisfaz as equações de α e β, e $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{N_\alpha} \times \overrightarrow{N_\beta}$.



Atividades de avaliação

1. Verifique se são paralelos os planos de equações α: 2x + y - z - 4=0 e β: - 4 x - 2y + 2z = 5.

Solução:

Pelas equações dos dois planos, verifica-se que seus vetores normais são respectivamente $\overrightarrow{N_\alpha}$ = (2, 1, - 1) e $\overrightarrow{N_\beta}$ = (- 4, - 2, 2).

Como $\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = -2$, então concluímos que $\overrightarrow{N_\beta}$ = - 2. $\overrightarrow{N_\alpha}$, o que implica que seus dois vetores normais são paralelos, consequentemente são paralelos os dois planos.

2. Encontre as equações paramétricas da reta de interseção dos plano α: x + 2y - z = 4 e β: 2x - y + 3z - 3 = 0 .

Solução:

Os vetores normais dos dois planos são $\overrightarrow{N_\alpha}$ = (1, 2 , - 1) e $\overrightarrow{N_\beta}$ = (2, - 1, 3) que percebe-se facilmente não serem paralelos.

O vetor diretor da reta de interseção dos dois planos é $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{N_\alpha} \times \Rightarrow$

$$\overrightarrow{V_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = i(6-1) - j(3+2) + k(-1-4) \quad \Rightarrow$$

$\overrightarrow{V_r} = (5, -5, -5)$.

Para se encontrar um ponto que pertença a essa reta de interseção, podemos atribuir o valor zero a qualquer uma das variáveis nas equações dos dois planos, e assim obter os valores correspondentes para as outras duas.

Fazendo x= 0, teremos $\begin{cases} 2y - z = 4 \\ -y + 3z = 3 \end{cases}$, de onde se obtem y = 3 e z = 2.

Logo, o ponto $P_0(0, 3, 2)$ pertence aos dois planos , e conseqüentemente à reta de interseção , cuja equação vetorial é:

$P = P_0 + t \,.\, \overrightarrow{V_r} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (0, 3, 2) + t \,.\, (5, -5, -5) \quad \Rightarrow$

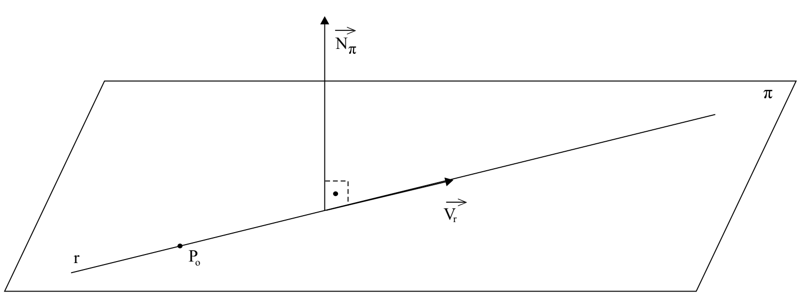
$$r: \begin{cases} x = 5.t \\ y = 3 - 5.t \\ z = 2 - 5.t \end{cases}.$$

5. Posição relativa de plano e reta

Sejam π um plano com vetor normal $\overrightarrow{N_\pi}$ e r uma reta cuja equação vetorial é $P = P_0 + t \,.\, \overrightarrow{V_r}$.

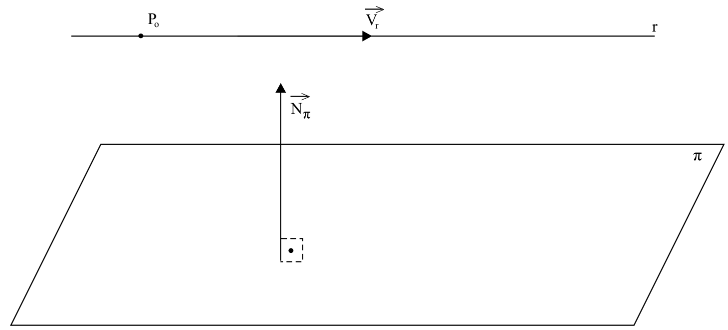
a) A reta r estará contida no plano π , se e somente se, $P_0 \in \pi$, e o vetor $\overrightarrow{V_r}$ for perpendicular a $\overrightarrow{N_\pi}$.

$$r \subset \pi \quad \Leftrightarrow \quad P_0 \in \pi \;\text{ e }\; \overrightarrow{V_r} \,.\, \overrightarrow{N_\pi} = 0.$$



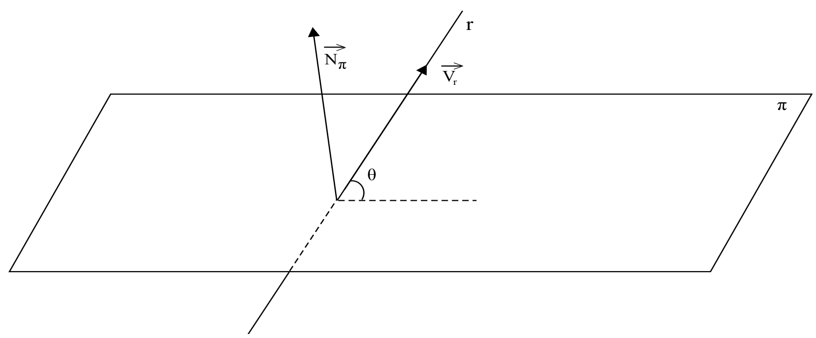
b) A reta r será paralela ao plano π, se $P_0 \notin \pi$ e o vetor $\overrightarrow{V_r}$ for perpendicular a $\overrightarrow{N_\pi}$.

$$r \,//\, \pi \quad \Leftrightarrow \quad P_0 \notin \pi \quad e \quad \overrightarrow{V_r} \,.\, \overrightarrow{N_\pi} = 0.$$

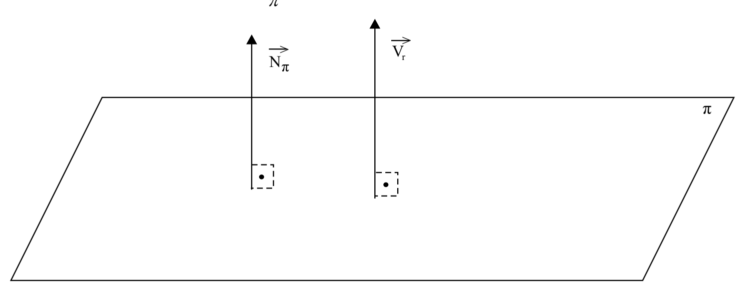


c) Se a reta r fura o plano π sob um ângulo de inclinação θ, então esse ângulo θ será o complemento do ângulo formado por $\overrightarrow{V_r}$ e $\overrightarrow{N_\pi}$, e consequentemente,

$$\text{sen}\ \theta = \left| \frac{\overrightarrow{V_r} \cdot \overrightarrow{N_\pi}}{\| \overrightarrow{V_r} \| \,.\, \| \overrightarrow{N_\pi} \|} \right|.$$



d) A reta r fura perpendicularmente o plano π, se seu vetor diretor $\overrightarrow{V_r}$ for paralelo ao vetor normal $\overrightarrow{N_\pi}$.



Atividades de avaliação

1. Determine a posição da reta r: P = (1, - 2, - 1) + t . (2, 0, 3) com relação ao plano π: x + y - 2z + 4=0. Caso a reta não seja paralela ao plano ou não esteja contida nele, determine o ângulo e o ponto em que ela fura o plano.

Solução:

Sendo $\overrightarrow{V_r}$ = (2 , 0 , 3) o vetor diretor da reta r, e $\overrightarrow{N_\pi}$ = (1 , 1 , - 2) o vetor normal do plano:

1) $\overrightarrow{V_r}$ não é paralelo ao vetor normal $\overrightarrow{N_\pi}$, portanto r não é perpendicular ao plano.

2) $\overrightarrow{V_r}$. $\overrightarrow{N_\pi}$ = (2, 0, 3). (1, 1, - 2) = 2 - 6 = - 4 $\neq$ 0, o que implica que a reta r não pode estar contida nem ser paralela ao plano π .

Portanto, a reta r fura o plano π formando com ele um ângulo θ < 90º, tal que

$$\text{sen }\theta = \left|\frac{\overrightarrow{V_r}\cdot\overrightarrow{N_\pi}}{\|\overrightarrow{V_r}|.|\overrightarrow{N_\pi}|}\right| \Rightarrow \text{sen }\theta = \left|\frac{(2,0,3).(1,1,-2)}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}\right|$$

$$\Rightarrow \text{sen }\theta = \left|\frac{2-6}{\sqrt{2+9}.\sqrt{1+1+4}}\right| \Rightarrow \text{sen }\theta = \left|\frac{-4}{\sqrt{1}.\sqrt{6}}\right|$$

$$\Rightarrow \text{sen }\theta = \frac{4}{\sqrt{6}} \Rightarrow \theta = \text{arcsen }\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right).$$

Para determinar o ponto onde a reta fura o plano, devemos encontrar suas equações paramétricas e substituí-la na equação do plano.

r: P = (1, - 2, - 1) + t . (2, 0, 3) $\Rightarrow$ r: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2 \\ z = -1+3t \end{cases}$, que substituindo

na equação x + y - 2z + 4 =0 $\Rightarrow$ 1 + 2t - 2 - 2(- 1 + 3t) + 4 = 0 $\Rightarrow$
2t + 3 + 2 - 6t = 0 $\Rightarrow$ - 4t = - 5 $\Rightarrow$ t = $\frac{5}{4}$.

Jogando esse valor de t nas equações paramétricas da reta, temos que

x= $\frac{7}{2}$; y = - 2 e z = $\frac{1}{4}$.

Síntese do capítulo

Neste capítulo estudamos o plano no espaço R^3, onde começamos determinandouma equação cartesiana a partir de uma equação vetorial obtida de uma definição.

Equação Cartesiana: $ax + by + cz + d = 0$

Outros pontos que devemos destacar nesta unidade são:

A forma como devemos encontrar a equação de um plano determinado por três pontos não-alinhados A, B, e C cujo vetor normal é $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

O cálculo do ângulo θ entre dois planos, onde vimos que

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{N}_\alpha \cdot \vec{N}_\beta}{\| \vec{N}_\alpha | \cdot | \vec{N}_\beta |} \right|$$

O estudo feito sobre a posição relativa de dois planos, com destaque sobre o paralelismo e o perpendicularismo de dois planos.

O estudo sobre a posição relativa de uma reta com relação a um plano, onde determinamos o ângulo entre reta e plano, para em seguida estabelecermos condições para o paralelismo e o perpendicularismo.

Referências

LEITHOLD, Louis; O Cálculo com Geometria Analítica; Vol: I, 3ª Ed. São Paulo; Edit. Harbra; 1994.

STEINBRUCH, Alfredo; Geometria Analítica; São Paulo; Editora McGraw-Hill; 1987.

RIGHETTO, Armando; Vetores e Geometria Analítica; 3ª Ed. São Paulo. IBEC; 1982.

Sobre o Autor

Luciano Moura Cavalcante – Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1975) e especialização em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1977). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará e Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática, atuando principalmente no seguinte tema: matemática.