

# Computação

## Fundamentos do Cálculo

Raquel Montezuma Pinheiro Cabral

3ª edição  
Fortaleza - Ceará



2019



Geografia



História



Educação Física



Química



Ciências Biológicas



Artes Plásticas



Computação



Física



Matemática



Pedagogia

Copyright © 2019. Todos os direitos reservados desta edição à UAB/UECE. Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, dos autores.

Editora Filiada à



**Presidente da República**

Jair Messias Bolsonaro

**Ministro da Educação**

Abraham Bragança de Vasconcellos Weintraub

**Presidente da CAPES**

Abílio Baeta Neves

**Diretor de Educação a Distância da CAPES**

Carlos Cezar Modernel Lenuzza

**Governador do Estado do Ceará**

Camilo Sobreira de Santana

**Reitor da Universidade Estadual do Ceará**

José Jackson Coelho Sampaio

**Vice-Reitor**

Hidelbrando dos Santos Soares

**Pró-Reitora de Pós-Graduação**

Nucácia Meyre Silva Araújo

**Coordenador da SATE e UAB/UECE**

Francisco Fábio Castelo Branco

**Coordenadora Adjunta UAB/UECE**

Eloísa Maia Vidal

**Diretor do CCT/UECE**

Luciano Moura Cavalcante

**Coordenadora da Licenciatura em Informática**

Francisco Assis Amaral Bastos

**Coordenadora de Tutoria e Docência em Informática**

Maria Wilda Fernandes

**Editor da EdUECE**

Erasmo Miessa Ruiz

**Coordenadora Editorial**

Rocylânia Isídio de Oliveira

**Projeto Gráfico e Capa**

Roberto Santos

**Diagramador**

Francisco Oliveira

**Conselho Editorial**

Antônio Luciano Pontes

Eduardo Diatahy Bezerra de Menezes

Emanuel Ângelo da Rocha Fragoso

Francisco Horácio da Silva Frota

Francisco Josênio Camelo Parente

Gisafran Nazareno Mota Jucá

José Ferreira Nunes

Liduína Farias Almeida da Costa

Lucili Grangeiro Cortez

Luiz Cruz Lima

Manfredo Ramos

Marcelo Gurgel Carlos da Silva

Marcony Silva Cunha

Maria do Socorro Ferreira Osterne

Maria Salette Bessa Jorge

Silvia Maria Nóbrega-Therrien

**Conselho Consultivo**

Antônio Torres Montenegro (UFPE)

Eliane P. Zamith Brito (FGV)

Homero Santiago (USP)

Ieda Maria Alves (USP)

Manuel Domingos Neto (UFF)

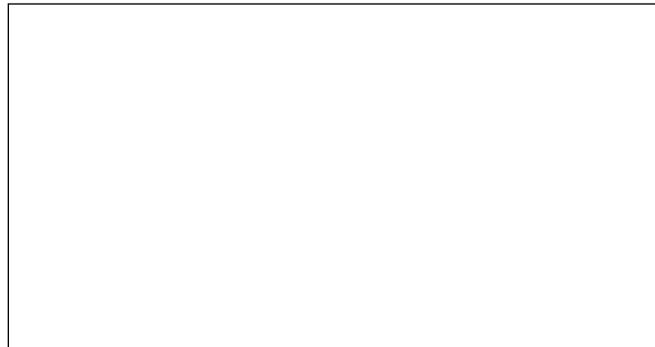
Maria do Socorro Silva Aragão (UFC)

Maria Lírida Callou de Araújo e Mendonça (UNIFOR)

Pierre Salama (Universidade de Paris VIII)

Romeu Gomes (FIOCRUZ)

Túlio Batista Franco (UFF)



Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE

Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará

CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893

Internet: [www.uece.br](http://www.uece.br) – E-mail: [eduece@uece.br](mailto:eduece@uece.br)

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais

Fone: (85) 3101-9962

# Sumário

<b>Apresentação .....</b>	<b>5</b>
<b>Capítulo 1 – Limites.....</b>	<b>7</b>
1. Sequências reais e limites.....	7
2. Gráficos de retas e limites .....	10
3. Conceito de limites e continuidade de funções.....	12
4. Propriedades dos limites .....	15
5. Limites laterais.....	19
6. Limites infinitos e no infinito.....	21
7. Teorema do confronto.....	28
8. Limite trigonométrico fundamental .....	29
<b>Capítulo 2 – Derivadas .....</b>	<b>35</b>
1. Velocidade média e instantânea .....	37
2. A reta tangente a uma curva .....	38
3. Definição de derivada.....	39
4. Continuidade e derivabilidade .....	41
5. Propriedades operatórias das derivadas .....	42
6. A regra da cadeia .....	47
7. Derivada de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas .....	48
<b>Capítulo 3 – Aplicações das Derivadas .....</b>	<b>57</b>
1. Equação da reta tangente .....	59
2. Crescimento e decréscimo de funções.....	60
3. Máximos e mínimos.....	62
4. Utilizando a derivada primeira e a derivada segunda para traçar gráficos.....	65
5. Problemas de otimização .....	69
6. Regra de L'Hôpital .....	71
<b>Capítulo 4 – Noções de Integrais .....</b>	<b>75</b>
1. A integral como antiderivada .....	77
2. Propriedades da integral indefinida .....	79
3. Integral definida e o teorema fundamental do cálculo.....	81
4. Propriedades das integrais definidas .....	86
5. Integrais de Riemann .....	87
<b>Sobre a autora .....</b>	<b>91</b>



# Apresentação

Este material foi produzido para a Disciplina de Fundamentos do Cálculo, do Curso de Licenciatura em Computação, ofertado a distância pela Universidade Estadual do Ceará e tem como objetivo oferecer um canal de comunicação com o aluno, para que possa orientar seus estudos e facilitar sua aprendizagem.

O maior responsável pelo sucesso da aprendizagem é o próprio aluno e, para isso, é necessário que ele se organize, estabeleça horários de estudo, leia atentamente o material, faça as atividades propostas, anote dúvidas e erros que tenha cometido na resolução das atividades, para que possa tirar suas dúvidas, seja no momento presencial com o professor da disciplina, ou com a ajuda de colegas e tutores.

Os conceitos aqui apresentados são úteis para estudantes do curso de Licenciatura em Computação e para compreendê-los são necessários, apenas, conteúdos no ensino básico (Ensino Fundamental e Ensino Médio). Compreendemos que, muitas vezes, alguns desses conhecimentos foram esquecidos, ou não foram bem aprendidos e, por isso, são oferecidas, ao longo dos capítulos, informações e explicações da matemática básica utilizada.

Demonstrações de teoremas são de grande importância na matemática, oferecendo melhor compreensão e comprovação do que foi afirmado. No entanto, demonstrações longas estão além da finalidade desse material, por isso, algumas delas serão apresentadas de forma simplificada ou omitidas. Nesses casos, indicamos uma bibliografia complementar para aqueles que desejarem aprofundar seus estudos de Cálculo.

Este material foi elaborado com muito cuidado, para que possa ajudar ao estudante a construir conhecimentos e utilizá-los quando deles necessitar.

Estamos torcendo pelo seu sucesso!

**A autora**



**Capítulo**

**1**

**Limites**



## Objetivos

- Compreender conceitos de limite e continuidade de funções
- Operar com limites de funções
- Compreender limites laterais, infinitos e no infinito
- Utilizar o teorema do confronto para resolver limites
- Conhecer limites trigonométricos

Nesta unidade abordamos o conceito de limite, fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral. Apresentamos, inicialmente, a ideia de limites recorrendo conhecimentos de sequências e gráficos de retas, abordados no Ensino Médio e, a partir dessas noções, passamos aos conceitos. Ao final desta unidade espera-se que o aluno compreenda os conceitos de limite e continuidade de funções, saiba operar com limites de funções, compreenda casos particulares de limites laterais, infinitos e no infinito, além de conhecer e utilizar o teorema do confronto e o limite trigonométrico fundamental no cálculo de limites.

## 1. Sequências reais e limites

Podemos compreender a noção de limites estudando sequências de números reais.

**Exemplo:** Imagine que uma pessoa deseja percorrer uma distância de, mas pretende fazê-lo de forma a realizar, inicialmente, a metade do caminho, em seguida, a metade da metade que sobrou e assim sucessivamente.

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$$

Partindo do somatório apresentado, podemos supor que a pessoa jamais percorreria este quilômetro totalmente, pois sempre restaria uma distância a percorrer. (Conhecido como Paradoxo de Zenão).



### Matemática básica

Note que as parcelas da soma podem ser vistas como uma sequência e que, na medida em que o denominador cresce, a fração  $\frac{1}{2^n}$  se aproxima de zero.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, k$$

No Ensino Médio, estudamos as Progressões Geométricas, sequências que se modificam a partir do produto de um valor constante. Na sequência apresentada, cada novo termo é encontrado a partir da multiplicação do termo anterior por  $q = \frac{1}{2}$  (razão da PG).

No estudo das Progressões Geométricas, deduzimos algumas fórmulas que ajudam a determinar o termo geral,  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , e a soma dos termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$$

Note que quando  $a_n$  tende a zero, escrevemos  $a_n \rightarrow 0$ , então,

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

No caso da sequência anteriormente apresentada, os termos estão diminuindo e se aproximando de zero, tanto quanto se queira.

Utilizando os dados do exemplo, onde  $a_1 = \frac{1}{2}$  e  $q = \frac{1}{2}$ , temos que:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \& \quad S = 1$$

**Conclusão:** Na medida em que  $n$  cresce,  $a_n$  torna-se próximo de zero, chegando ao limite dessa sequência que será igual a 1. Assim, a pessoa do exemplo citado, alcançaria seu objetivo de andar  $1km$ .

Podemos escrever que:

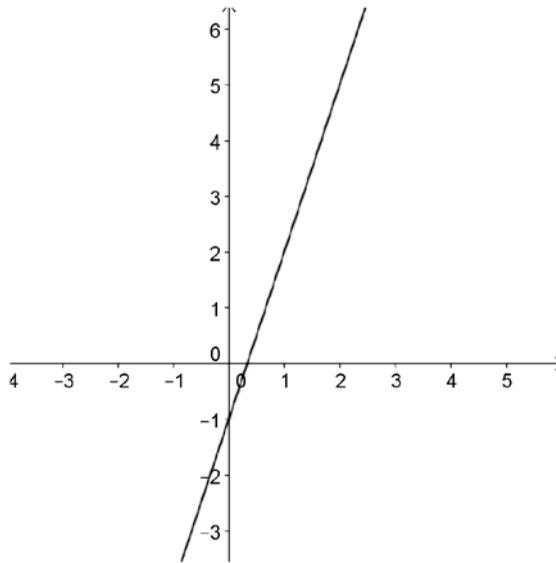
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

## 2. Gráficos de retas e limites

Outra maneira simples de abordar a noção de limite é fazendo uso do gráfico de uma reta, ou seja, gráfico de uma função do 1º grau.

**Exemplo:** Seja  $f$ , uma função definida por  $f(x) = 2x - 1$ . Desejamos analisar o comportamento desta função quando  $x$  se aproxima de 1. O gráfico da função é uma reta, como podemos determinar:

x	y
0	-1
1	2



O gráfico da função mostra como variam os valores de .

x	Y
1,9	4,7
1,99	4,97
1,999	4,997

x	y
2,1	5,3
2,01	5,03
2,001	5,003

Observando o que acontece com  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de 2, por números menores ou maiores que 2, notamos que a função se aproxima de 5.

**Matemática básica:** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = ax + b$ , é chamada função polinomial do primeiro grau e seu gráfico é uma reta. Além disso, essa reta é contínua, ou seja, não possui interrupções.

**Conclusão:** Na medida em que se escolhem valores de cada vez mais próximos de , encontramos valores para  $f(x)$  cada vez mais próximos de 5.

Como  $f(2) = 5$ , podemos dizer que quando  $x$  tende para 2,  $f(x)$  tende a  $f(2)$ , ou seja, o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para 2 é  $f(2)$ .

Escrevemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$$

Outro exemplo desperta para o tipo de funções que não estão definidas para todos os reais.

**Exemplo:** Analise o comportamento da função apresentada a seguir, quando  $x$  se aproxima de 1.

**Solução:**

x	Y
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

x	y
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

Note que a função não está definida para  $x = 1$ , pois este valor anula o denominador. Por outro lado, a função  $f$  aproxima-se de 2 quando se aproxima de 1.

**Conclusão:** A função  $f(x)$  está definida para todos os valores em torno de 1, exceto para  $x = 1$ , mas  $f(x)$  fica arbitrariamente próximo de 2, quando  $x$  se aproxima de 1. Podemos, portanto, dizer que o limite existe e:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

### 3. Conceito de limites e continuidade de funções

Agora que temos uma noção intuitiva de limite formalizamos sua definição.

**Definição:** Seja  $f(x)$  uma função definida em um intervalo aberto em torno de  $x_0$ , podendo, ou não, estar definida em  $x_0$ . Dizemos que  $f(x)$  tem **limite**  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$ , se na medida em que  $x$  se aproxima de  $x_0$ , o valor de  $f(x)$  se aproxima de  $L$ . Nesse caso escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

**Conceito:** Uma função  $f(x)$  é contínua em  $x_0$ , se e somente se  $f(x_0)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existem e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Conceito:** Dizemos que uma função  $f$  é contínua em um determinado intervalo  $[a, b]$ , se ela é contínua em cada ponto do intervalo, ou seja,  $f$  não possui interrupções. Se a função não for contínua em um ponto  $x_0$ , dizemos que este é um ponto de descontinuidade.

São exemplos de funções contínuas em seus domínios as funções: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

#### Matemática básica:

Uma função racional é uma razão entre dois polinômios:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

A função  $r(x)$  não é definida para valores de  $x$  que anulam o denominador, ou seja, com  $q(x)=0$ , pois nesse caso teríamos uma indeterminação. Esse e outros tipos de indeterminações ocorrem naturalmente quando consideramos limites de funções racionais e outras funções elementares, como veremos adiante.

### Exercícios resolvidos

1. Dada  $f(x) = 4x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6$$

2. Seja  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5x + 6) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

### Atividades de avaliação

1. Calcule os limites a seguir:

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} x^4 + 4x$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} 2^x$

Podemos, ainda, encontrar o limite em pontos de descontinuidade de uma função quando esta coincidir com uma função contínua, como foi mostrado no exemplo da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , que não está definida em  $x = 1$ .

Note que podemos simplificar a expressão, usando fatoração:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1, \text{ para } x \neq 1.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

**Matemática básica:** No ensino fundamental são estudados os produtos de polinômios e alguns deles são tão utilizados, que recebem o nome de produtos notáveis. Destacamos alguns dos mais importantes produtos notáveis, para que se possa recordar.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (\text{Quadrado da soma de dois termos})$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (\text{Quadrado da diferença de dois termos})$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \quad (\text{Produto da soma pela diferença de dois termos})$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad (\text{Cubo da soma de dois termos})$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (\text{Cubo da diferença de dois termos})$$

No exemplo apresentado, transformamos a expressão em produto, por meio da fatoração, para poder simplificá-la. Recordamos alguns casos de fatoração que serão muito úteis.

- Fator comum em evidência

$$\text{Ex.: } 3x^3 - x^2 = x^2(3x-1)$$

- Agrupamento

$$\text{Ex.: } ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$$

- Reconhecimento de produtos notáveis

$$\text{Ex.: } x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$\text{Ex.: } x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

- Soma e diferença de dois cubos

$$\text{Ex.: } x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{Ex.: } x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

- Diferença de potências

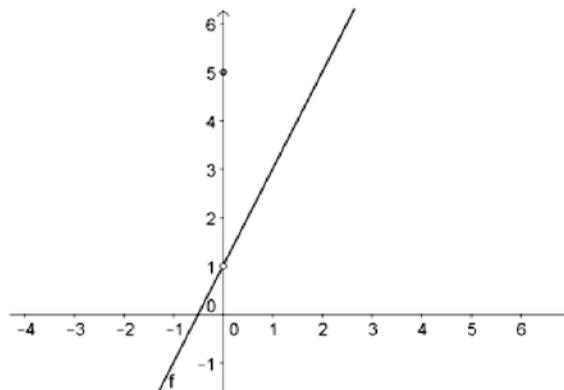
$$\text{Ex.: } x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

### Exercícios resolvidos

1. Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , da função descontínua  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$

**Solução:** Como  $f(x)$  é descontínua em  $x = 0$  e considerando a função contínua  $g(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$



Note que, na função, para  $x = 0$  temos que  $y = 5$ , no entanto, o limite da função no ponto  $x = 0$  é 1.

2. Considere a função  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$ . Encontre  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Solução:** Como  $f(x)$  é uma função descontínua para  $x = 0$ , simplificamos a expressão e encontramos a função  $g(x) = 2x + 3$  que é contínua para qualquer valor de  $x$ .

$$\frac{2x^2 + 3x}{x} = \frac{x(2x + 3)}{x} = 2x + 3$$

Desta forma,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

### Atividades de avaliação

1. Calcule os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x - 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , sendo  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x > 1 \\ -x + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

## 4. Propriedades dos limites

Sejam  $f$  e  $g$  funções, contínuas ou não no ponto  $x_0$ , de modo que existam  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$ , com  $L, K \in \mathbb{R}$ .

**Propriedade da soma:** O limite da soma de duas funções é igual à soma dos seus limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + K.$$

**Propriedade da diferença:** O limite da diferença de duas funções é igual à diferença dos seus limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L - K.$$

**Propriedade do produto por uma constante:** O limite de uma constante  $c \in \mathbb{R}$ , por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot L$$

**Propriedade do produto:** O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos seus limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$$

Propriedade do quociente: O limite do quociente de duas funções, considerando que o limite do denominador seja diferente de zero, é igual ao quociente de seus limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, \text{ com } K \neq 0$$

Propriedade da potência: Sejam  $r, s \in \mathbb{Z}$ , com  $s \neq 0$ , tal que  $L \neq 0$ . O limite da potência racional de uma função é igual à potência do limite da função.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

Propriedade da composta: Seja  $g$  uma função contínua, tal que seu domínio contém  $L$ . Então vale dizer que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\right) = g(L)$$

### Matemática básica

Dadas duas funções  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ , chamamos de função composta de  $g$  e  $f$  a função  $g \circ f: A \rightarrow C$ , definida por  $g(f(x))$ , com  $x \in A$ .

**Exemplo:** Dadas as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2x + 3$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x^2 - 1$ . Podemos determinar a função composta  $g(f(x))$  da seguinte maneira:

$$g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (2x+3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 8.$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2)$ .

**Solução:**  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \lim_{x \rightarrow 0} 3x + \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$ .

2. Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x + 2}{5x + 1}$ :

**Solução:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x + 2}{5x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (5x + 1)} = \frac{2 \cdot 0^2 - 0 + 2}{5 \cdot 0 + 1} = 2$$

3. Calcule o valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)^2$ :

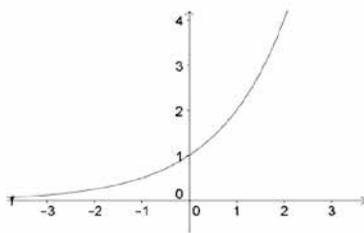
**Solução:**  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)^2 = (\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1))^2 = (2^3 - 2 \cdot 2 + 1)^2 = 5^2 = 25$

**Matemática básica:** vimos que funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são exemplos de funções contínuas. Isso sugere que, em alguns exercícios sobre limites, possam ser envolvidas essas funções e, por isso, é necessário uma breve recordação.

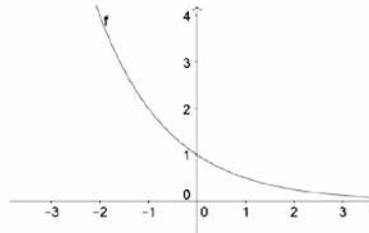
- Função exponencial: Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . A função exponencial de base  $a$  é da forma:

$$f(x) = a^x.$$

Podemos traçar um esboço do gráfico de uma função exponencial, considerando que a função será crescente quando a base  $a > 1$  e decrescente quando  $0 < a < 1$ .



$a > 1$



$0 < a < 1$

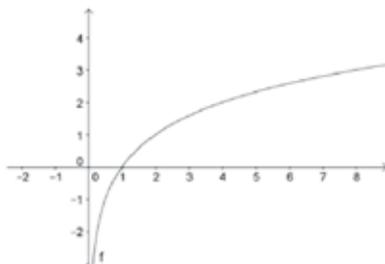
- Função logarítmica: Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . A função logarítmica de base  $a$  é inversa da função exponencial  $y = a^x$ , e escreve-se da forma:

$$f(x) = \log_a x.$$

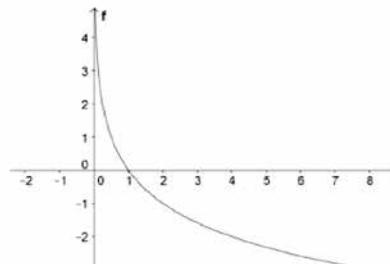
Definição de logaritmo: Sejam  $a, b > 0$  e  $a \neq 1$ ,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x.$$

Podemos traçar um esboço do gráfico de uma função logarítmica  $f(x) = \log_a x$ , considerando que a função será crescente se a base  $a > 1$  e decrescente se  $0 < a < 1$ .



$a > 1$



$0 < a < 1$

Propriedades importantes dos logaritmos: Sejam  $m \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ,

$$\log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a^m = m.$$

Propriedades operatórias dos logaritmos:

Logaritmo do produto: Sejam  $m, n, a > 0$  e  $a \neq 1$

$$\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n.$$

Logaritmo do quociente: Sejam  $m, n, a > 0$ ,  $n \neq 0$  e  $a \neq 1$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

Logaritmo da potência: Sejam  $n \in \mathbb{R}$ ,  $m, a > 0$  e  $a \neq 1$

$$\log_a m^n = n \cdot \log_a m.$$

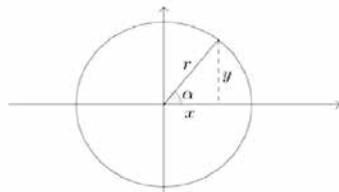
Logaritmos importantes:

logaritmos decimais e logaritmos naturais

$$\log b = \log_{10} b \text{ e } \log_e b, \text{ onde } e \cong 2,718.$$

- Funções trigonométricas:

Para transformação entre as unidades de graus e radianos, utilize:  $180^\circ = \pi \text{ rad}$ . Considerando o círculo da figura, com centro no ponto  $(0,0)$  e raio  $r$ , definimos as funções:



$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{sen} \alpha = \frac{y}{r}, \quad \text{tga} = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x},$$

$$\text{seca} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \text{cosseca} = \frac{1}{\text{sen} \alpha} \text{ e } \text{cotga} = \frac{1}{\text{tga}}.$$

Principais identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{sec}^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

$$\text{cossec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha.$$

Existem muitas outras identidades trigonométricas importantes que devem ser recordadas. Pesquise em livros do ensino médio ou na internet.

**Atividades de avaliação**

1. Calcule os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3^x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 (2x+1)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x-2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2^{-x} + 1)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 2x$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x^2-2}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

2. Supondo que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$ , determine:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - 3g(x))$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + g(x)}{f(x)}$

**5. Limites laterais**

Existem funções que não estão definidas para toda a reta, apresentando pontos de descontinuidade. É possível que essas funções apresentem limites diferentes quando nos aproximamos pela direita, ou pela esquerda, dos pontos de descontinuidade, ou ainda, que não apresentem limites laterais.

**Conceito:** Dada  $f(x)$  definida em  $(a, b)$ , com  $a < b$ . Se  $f(x)$  se aproxima de  $L$  na medida em que  $x$  se aproxima de  $a$  nesse intervalo, dizemos que a função possui limite **lateral à direita** o que é escrito assim:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

**Conceito:** Dada  $f(x)$  definida em  $(c,a)$ , com  $c < a$ . Se  $f(x)$  se aproxima de  $K$  na medida em que  $x$  se aproxima de  $a$  nesse intervalo, dizemos que a função possui **limite lateral à esquerda** e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = K.$$

**Conceito:** A função  $f(x)$  terá um limite quando  $x$  se aproxima de  $a$  se, e somente se, tiver limite lateral à esquerda e à direita e estes forem iguais.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

**Observação:** Utilizamos a notação  $a^-$  para indicar a aproximação de  $a$  por valores à sua esquerda (menores que  $a$ ). De maneira totalmente análoga, a notação  $a^+$  indica a proximidade de  $a$  por valores à sua direita (maiores que  $a$ ).

### Exemplos:

1. Seja  $f(x) = \frac{1}{x}$  uma função contínua em  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ . A função  $f(x)$ , para  $a \neq 0$ , é definida em um intervalo aberto contendo  $a$ , ou seja, existe  $f(x)$  para  $x$  próximo de  $a$  pela esquerda e pela direita. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \text{ \& } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

2. Dada  $f(x) = \frac{|2x|}{x}$  percebemos que: na medida em que  $x$  se aproxima de  $0$  pela esquerda  $f(x)$  tende a  $-2$ , e quando  $x$  se aproxima de  $0$  pela direita  $f(x)$  se aproxima de  $2$ . De fato,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x} = 2, & \text{se } x > 0 \\ \frac{-2x}{x} = -2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2.$$

3. Considerando  $f(x) = \sqrt{x}$  A função é contínua em  $\mathbb{R}_+$  e para todo  $a > 0$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow a^-} \sqrt{x} = \sqrt{a}$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ . Porém, para  $a = 0$  não se define o limite à esquerda, pois a função não está definida para valores menores que zero.

### Atividades de avaliação

1. Seja  $f(x) = \frac{x}{2}$  uma função contínua definida no intervalo  $[0,2]$ . Determine os limites, se estes forem definidos:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

2. Determine os limites que forem definidos nas funções a seguir:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log x$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log x$

3. Considerando a função  $f(x) = |x - 1|$ , calcule os limites indicados:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

## 6. Limites infinitos e no infinito

Observamos, inicialmente, o comportamento das funções dos exemplos a seguir.

Exemplos:

1. Desejamos encontrar o limite da função  $f(x) = 1 + \frac{1}{3^x}$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Note que quando  $x \rightarrow +\infty$ , tem-se que  $\frac{1}{3x} \rightarrow 0$ , ou seja,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_1 + \frac{1}{3x}k = 1 + 0 = 1$

2. Mostraremos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

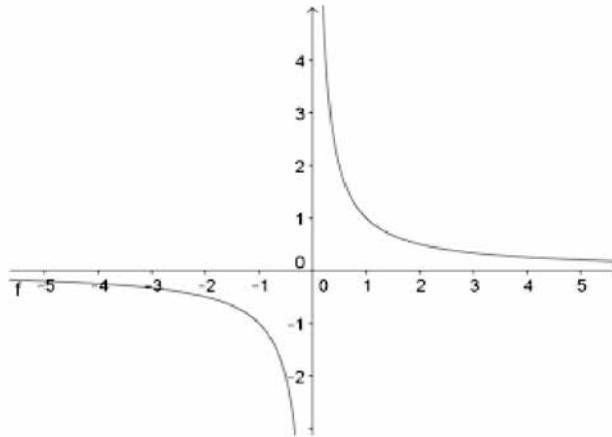
Verificamos que não podemos utilizar a propriedade do quociente, pois encontraríamos uma indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Note que e que quando  $x \rightarrow +\infty$  temos que  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ .

$$\frac{x}{x+1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

3. Consideramos a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , definida para  $x \neq 0$ , e analisamos o seu gráfico.



Utilizando a função do exemplo podemos considerar duas situações:

1ª situação: O que ocorre com a função no caso em que  $x$  cresce arbitrariamente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , ou decresce arbitrariamente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Quando abordamos as sequências decrescentes, visualizamos que quando  $x \rightarrow +\infty$  a fração  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , pois foram considerados, apenas, valores positivos. Observamos que o mesmo ocorre quando  $x \rightarrow -\infty$ . Donde concluímos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

2ª situação: Analisando o comportamento do gráfico quando  $x \rightarrow 0$ , notamos que quando  $x \rightarrow 0^-$  a fração  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ . Por outro lado, quando  $x \rightarrow 0^+$  a fração  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ . Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Observe que utilizamos noções e operações simples para aplicar os conhecimentos adquiridos.

### Atividades de avaliação

1. Determine os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 1}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x + 2}$

2. Comprove a igualdade a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x} = 2$$

### Limites infinitos

Seja  $f(x)$  uma função que assume valores positivos para  $x \neq a$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , então,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

De maneira análoga, sendo  $f(x)$  uma função que assume valores negativos para  $x \neq a$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

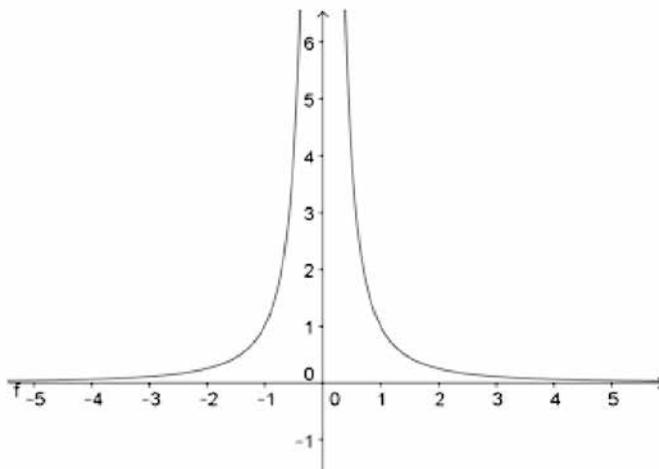
### Exercícios resolvidos

1. Determine o limite de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ , se existir.

Solução: Considerando  $f(x) = x^2$ , observamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  e que a função assume valores positivos para  $x \neq 0$ . Dessa forma, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Adquirimos uma compreensão ainda maior, quando observamos o gráfico de  $\frac{1}{x^2}$ :



2. Seja a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determine os limites laterais quando  $x \rightarrow 0$ .

**Solução:** Analisando inicialmente o limite à esquerda:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x) = 2 - 0 = 2.$$

Por outro lado, quando analisamos o limite pela direita temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

### Atividades de avaliação

1. Determine os limites a seguir, se existirem:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x - 4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{x-2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{x^2 - 2x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$

## Limites no infinito

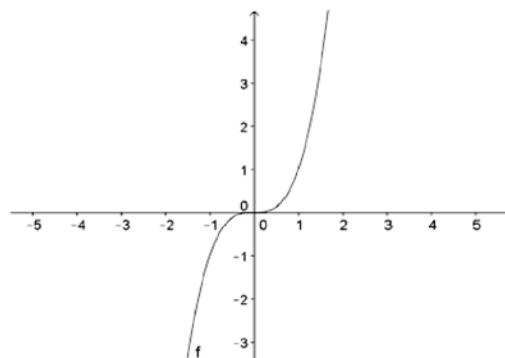
Nessa seção, tratamos dos limites de funções em que  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ , e consideramos, nos exemplos a seguir, três situações particulares.

**Observação:** As propriedades operatórias dos limites, vistas anteriormente, continuam válidas quando se trata de limites no infinito.

**1ª situação:** Alguns limites de funções quando  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ , podem também ser iguais a  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Exemplo 1:** Considerando a função  $f(x)=x^3$ , atribuindo valores para  $x$  e observando seu gráfico, podemos calcular seus limites no infinito.

x	Y
-1000	-1000000000
-100	-1000000
-10	-1000
-1	-1
0	0
1	1
10	1000
100	1000000
1000	1000000000



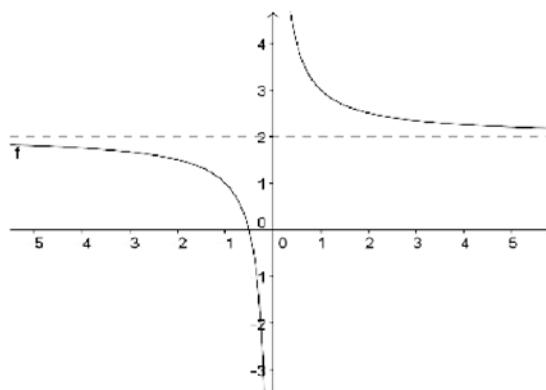
Dessa forma,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

**2ª situação:** Existem funções que tendem para um número real quando  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 2:** Seja  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ , definida para  $x \neq 0$ . Construindo e analisando o gráfico da função, podemos perceber como esta se comporta quando  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ .

x	Y
-10000	1,9999
-1000	1,999
-100	1,99
-10	1,9
-1	1
1	3
10	2,1
100	2,01
1000	2,001
10000	2,0001



Observamos nas sequências, que as frações do tipo  $\frac{1}{x}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , se aproximam de 0, logo

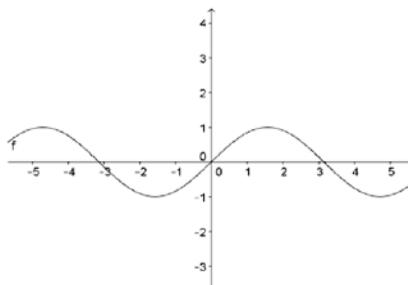
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 2 + 0 = 2$$

De maneira semelhante podemos concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 2 + 0 = 2$$

**3ª situação:** Há funções que não apresentam tendências para números ou infinitos.

**Exemplo 3:** Considere a função . Observe o gráfico da função seno.



A função seno é periódica de período  $2\pi$ , assim como a função cosseno e a função tangente, não possuindo limites no infinito; nem finitos, nem infinitos.

### Exercícios resolvidos

Mais alguns exercícios resolvidos poderão dar boas ideias de como trabalhar com limites no infinito de polinômios e funções racionais. Lembre que o grau de um polinômio é o maior expoente da variável em questão.

**1ª situação:** Quando calculamos limites no infinito de polinômios, podemos sempre colocar a variável de maior expoente em evidência e verificar quais termos se anulam quando  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercício 1:** Calcule o valor do limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1.$$

**Solução:** Colocando  $x^3$  em evidência, podemos reescrever o polinômio e concluir o valor do seu limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 4 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty.$$

**2ª situação:** Quando a função racional possuir o grau do numerador menor que o grau do denominador.

**Exercício 2:** Determine o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8x^2 - 5}{7x^3 + 1}$$

**Solução:** Observando a função racional seria difícil decidir quem cresce mais rápido, numerador ou denominador. No entanto, podemos, com operações elementares, reescrever a função. Nesse caso, dividimos numerador e denominador por  $x^3$ , que é a variável de maior expoente do denominador. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8x^2 - 5}{7x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{8x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{8}{x} - \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0 - 0}{7 - 0} = 0.$$

**3ª situação:** Quando a função racional possuir o grau do numerador maior que o grau do denominador.

**Exercício 3:** Determine o limite:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2 - 2x + 3}{4x + 2}$$

**Solução:** Nesse caso, o maior expoente de  $x$  do denominador é 1, por isso dividimos numerador e denominador por  $x$  para obter.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2 - 2x + 3}{4x + 2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{5x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 2 + \frac{3}{x}}{4 + \frac{2}{x}} = -3$$

Notamos que as frações com denominador  $x$  tendem a zero, porém, quando  $x \rightarrow -\infty$  temos que  $5 \cdot x \rightarrow -\infty$ .

4ª situação: Numerador e denominador de mesmo grau.

**Exercício 4:** Calcule o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 1}$$

**Solução:**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

### Atividades de avaliação

1. Calcule os seguintes limites, se existirem:

a)  $\lim_{x \rightarrow +3} (3x^2)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +3} (-4x^3)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} (-4x^3)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +3} a \frac{1}{3x^2} k$

e)  $\lim_{x \rightarrow -3} a \frac{7}{5x^3} k$

f)  $\lim_{x \rightarrow +3} (3x^2 + 4x - 1)$

g)  $\lim_{x \rightarrow -3} (2 + x - 5x^2 - x^3)$

## 7. Teorema do confronto

Podemos encontrar situações em que não se consegue obter diretamente o valor do limite de uma função  $f(x)$ . Quando existirem duas funções  $g(x)$  e  $h(x)$  que controlam os valores da função  $f$  e seus limites forem iguais quando  $x \rightarrow c$ , então o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow c$  existe e coincide com o limite de  $g(x)$  e  $h(x)$ .

**Teorema:** Supondo  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para qualquer  $x \in (a, b)$ , intervalo contendo  $c$ , exceto possivelmente, em  $c$ . Se  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .

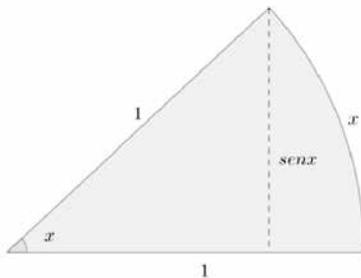
Neste curso, omitimos a demonstração do teorema do confronto, que poderá ser encontrada na bibliografia indicada.

**Exercício resolvido:** Seja  $f(x) = \text{sen}x$  e sabendo que  $-|x| \leq \text{sen}x \leq |x|$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Utilizando as informações, determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}x$ .

**Solução:** Sabemos que  $-|x| \leq \text{sen}x \leq |x|$  e com isso podemos, facilmente, calcular que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Pelo teorema do confronto,  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}x = 0$ .



### Matemática básica

Na figura a seguir podemos ver que  $-|x| \leq \text{sen}x \leq |x|$ .

### Atividades de avaliação

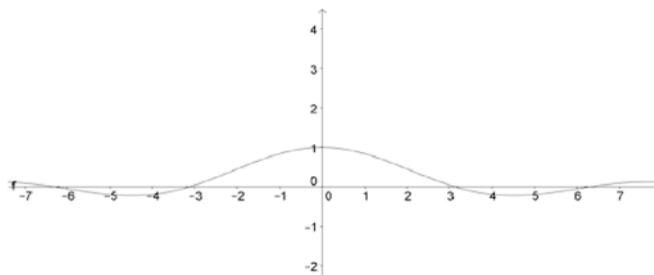
1. Estude  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{2}{x} k$ .

Note que: Para  $x \neq 0$ , temos que  $-1 \leq \cos \frac{2}{x} k \leq 1$ .

2. Sabendo que  $1 - 2x^2 \leq f(x) \leq 1 + 3x^2$ , para todo  $x \neq 0$ . Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

## 8. Limite trigonométrico fundamental

**Exemplo:** Note que não podemos aplicar a regra do quociente para determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$ . Fazendo uma análise do gráfico, vemos que este limite é igual a 1.



**Teorema:** Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Este é um importante resultado e, por vezes, é chamado de limite trigonométrico fundamental. Para demonstrá-lo utilizaremos o teorema do confronto.

**Demonstração:**

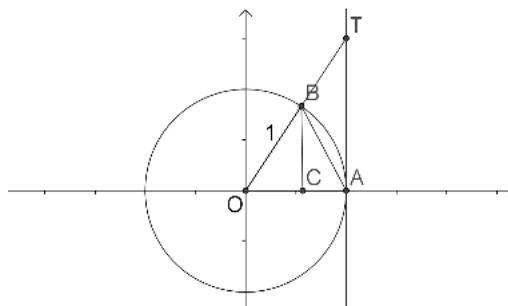
Observe que:

$$\overline{AT} = \operatorname{tg} x$$

Para:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$A_{\Delta AOB} \leq A_{SAOB} \leq A_{\Delta AOT}$$



Notação:  $\Delta AOB$  = triângulo de vértices A, O e B,

$SAOB$  = área do setor circular A, O e B e

$\Delta AOT$  = triângulo de vértices A, O e T.

$$\frac{1 - \operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 - \operatorname{tg} x}{2} \quad \& \quad \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \quad \& \quad \operatorname{sen} x > 0$$

Logo,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \& \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ , pelo teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Depois da recordação das identidades trigonométricas, podemos resolver outro limite importante para o capítulo 2, no qual estudaremos as derivadas.

**Exercícios resolvidos**

1. Calcule o limite a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

**Solução:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

**Atividades de avaliação**

1. Calcule os limites, quando existirem:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}$

Use  $t = 5x$  e note que quando  $x \rightarrow 0$ , temos que  $5x \rightarrow 0$ , ou seja,  $t \rightarrow 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

Observação: Outros limites importantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{1 + \frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^{1 + \frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[1+x]{1+x} = e, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[1+x]{1+x} = e,$$

**Exercício resolvido**

1. Determine o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Solução: Considere  $a^x - 1 = u \Rightarrow a^x = u + 1 \Rightarrow x = \log_a(u+1)$ . Note que quando  $x \rightarrow 0$ , temos que  $u \rightarrow 0$ .

Fazendo as substituições temos,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(u+1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{1}{u} \log_a(u+1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(u+1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\log_a e} = \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}} = \ln a.$$

## Atividades de avaliação



1. Calcule os limites, se existirem:

a)  $\lim_{x \rightarrow +3} a1 + \frac{1}{x} k^{3x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +3} a1 + \frac{1}{3x} k^x$

## Síntese do Capítulo



Iniciamos esta unidade com exemplos de sequências e gráficos de retas para compreendermos a noção de limite. Considerando uma função  $f(x)$  definida em um intervalo aberto em torno de  $x_0$ , dizemos que  $L$  é o limite da função  $f$  quando  $x$  tende a  $x_0$  se à medida que  $x$  se aproxima de  $x_0$ , o valor de  $f(x)$  se aproxima de  $L$ . Neste caso, escrevemos:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ . Uma função  $f$  é dita contínua em  $x_0$  quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ; em geral, a função é contínua num intervalo  $[a, b]$  quando ela é contínua em cada ponto do intervalo.

Em seguida, descrevemos algumas propriedades operatórias básicas envolvendo limites de mais de uma função, por exemplo: considerando funções  $f$  e  $g$ , tais que existam  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$ , com  $L, K \in \mathbb{R}$ , temos:

soma:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L + K$ .

diferença:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = L - K$ .

produto por uma constante:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot L$

produto:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$ .

quociente:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ , com  $K \neq 0$ .

potência:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = L^{g(x)}$ .

composta:  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = g(L)$ .

Introduzimos o conceito de limites laterais e observamos que em pontos de descontinuidade podemos encontrar limites laterais diferentes, e que o limite existe sempre os limites laterais coincidem

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Resolvemos exemplos e exercícios relacionados a limites de funções que tendem para infinito e que vão para o infinito. Apresentamos o teorema do confronto, que diz: se  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , para todo  $x \in (a, b)$ , e  $c \in (a, b)$  é tal que

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L, \text{ então } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

Finalizamos a unidade apresentando limites importantes, como limites envolvendo funções trigonométricas  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  e exponenciais  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

## Leituras, filmes e sites



Sugerimos a utilização de programas simples para a construção de gráficos, tais como o GeoGebra, WinPlot, Graph ou outro de sua preferência.

Cálculo Diferencial e Integral - Notas de Aula: <http://www.icmc.usp.br/~andcarva/sma301/Calculo1c-AM6.pdf>

Fórmulas de arco duplo, arco triplo e arco metade: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo06.htm>

## Referências



ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.



2

Capítulo

Derivadas



## Objetivos

- Compreender conceito de derivada
- Utilizar técnicas de derivação
- Calcular derivadas utilizando as propriedades operatórias
- Aplicar a regra da cadeia
- Conhecer derivadas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

A unidade a seguir contará com exemplos iniciais para dar uma noção de derivada. A partir dos exemplos, poderemos verificar que a derivada de uma função é o limite de um quociente de duas grandezas, quando ambas se aproximam de zero. Munidos dessa ideia, passaremos às definições. Ao final desta unidade esperamos que o aluno compreenda o conceito de derivada e saiba calcular derivadas de funções utilizando a definição, as técnicas que não precisam da definição e as operações, além de saber aplicar a regra da cadeia e conhecer as derivadas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Novamente partimos de exemplos para dar uma noção do que vem a ser a derivada.

## 1. Velocidade média e instantânea

Recordamos da física que a velocidade média de uma partícula que se movimenta segundo uma função do tipo  $f(t) = s$ , sendo  $s$  a posição e  $t$  o tempo, é descrita por:

$$V_m = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Essa é a velocidade média no intervalo de tempo entre  $t$  e  $t_0$ . Note que a velocidade instantânea no ponto  $t_0$  será calculada como o limite das velocidades médias quando  $t \rightarrow t_0$ , ou seja, será definida por:

$$V_i = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

**Exemplo:** Considere uma partícula que se movimenta segundo a equação  $s(t) = t^2 + t + 5$ , sendo  $s$  em metros e  $t$  em segundos.

Observe que a velocidade média entre os instantes 1 e  $t$  é dada por:

$$v_m = \frac{f^{\wedge}t - f^{\wedge}1}{t - 1} = \frac{t^2 + t + 5 - 1^2 - 1 - 5}{t - 1} = \frac{t^2 + t - 2}{t - 1}.$$

A velocidade, no instante em que  $t = 1$ , é:

$$v = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + t - 2}{t - 1} = \frac{(t - 1) \cdot (t + 2)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} t + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ m/s}.$$

Se considerarmos a velocidade média entre os instantes  $t_0$  e  $t$  podemos escrever:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{f^{\wedge}t - f^{\wedge}t_0}{t - t_0} = \frac{t^2 + t + 5 - t_0^2 + t_0 + 5}{t - t_0} = \frac{(t^2 - t_0^2) + t - t_0}{t - t_0} \\ &= \frac{(t - t_0)(t + t_0) + t - t_0}{t - t_0} = \frac{(t - t_0)(t + t_0 + 1)}{t - t_0} = t + t_0 + 1. \end{aligned}$$

Considerando a velocidade no instante em que  $t = t_0$ , temos:

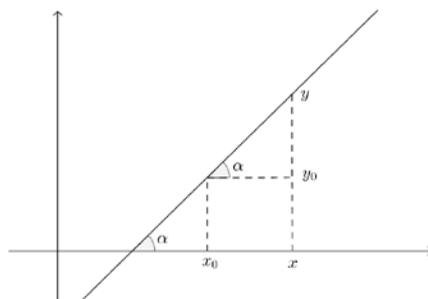
$$v_i = \lim_{t \rightarrow t_0} t + t_0 + 1 = 2t_0 + 1.$$

Teríamos, portanto, uma equação para a velocidade e poderíamos calcular a velocidade em um instante  $t$  qualquer. No caso particular de  $t = 1$ , escrevemos:

$$v^{\wedge}t = 2t + 1 \text{ e } v^{\wedge}1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ m/s}.$$

## 2. A reta tangente a uma curva

Observando o gráfico da reta  $r$ , dada como o gráfico da função afim  $f(x) = y$ , podemos determinar sua inclinação como vemos na figura a seguir.



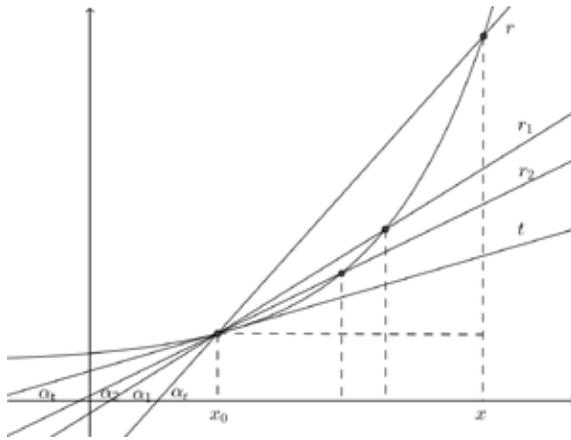
$$m_r = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f^{\wedge}x - f^{\wedge}x_0}{x - x_0} = \text{tga}$$

### Matemática básica

Lembramos que, num triângulo retângulo, temos que

$$\text{tga} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}.$$

Consideramos agora o gráfico de uma curva dada por  $f(x) = y$  e a reta  $r$  secante ao gráfico, como representado na figura a seguir. Note que quando  $x \rightarrow x_0$ , a reta  $r$  aproxima-se da reta  $t$  tangente à curva no ponto  $x_0$ .



Desta forma, quando o limite existir, temos que:

$$m_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Exemplo:** Seja  $f(x) = x^4 + 2x^2$ . Podemos encontrar a inclinação da reta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto  $x_0 = 3$ .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^4 - 2x^2 - x_0^4 + 2x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + x_0^2 \overset{h}{x - x_0} \cdot (x + x_0) - 2 \overset{h}{x - x_0} \cdot (x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x_0^2 - 2h(x + x_0)) \\ &= 2x_0(2x_0^2 - 2) = 4x_0^3 - 4x_0. \end{aligned}$$

Em particular, para  $x_0 = 3$ , temos que:

$$m = 4 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 = 96$$

**Conclusão:** A reta tangente ao gráfico de  $f(x) = y$  em um ponto  $P(x_0, f(x_0))$  é a reta  $r$  que passa pelo ponto  $P$  e que tem como coeficiente angular, quando o limite existir:

$$m_r = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

### 3. Definição de derivada

**Definição:** Dada a função  $f(x) = y$ , chamamos de **derivada de f** de  $x = x_0$ , e escrevemos por  $f'(x_0)$ , ao limite a seguir, quando ele existir.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Podemos fazer  $x = x_0 + h$ , e reescrever a definição de derivada na forma:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Para facilitar, podemos trocar  $x_0$  por  $x$  e escrever:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

**Observação:** A notação para a derivada de uma função pode variar bastante. Alguns autores preferem utilizar  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx} f'(x)$  ou outras notações para representar a derivada, que aqui optamos por usar  $f'(x)$ .

### Exercício resolvido

1. Determine a derivada da função  $f(x) = 2x^2 + 5x$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + 5(x+h) - 2x^2 - 5x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 5x - 2x^2 - 5x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + 5h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 5 \\ &= 4x + 5. \end{aligned}$$

Note que a definição foi apresentada por um limite semelhante aos apresentados nos exemplos dados, pois, a derivada mede a taxa de variação de uma função, que foi a ideia utilizada para determinar a velocidade em um ponto e o coeficiente angular da tangente em um ponto de uma curva.

Nos exemplos, observamos que os cálculos para obter a derivada utilizando a definição, nem sempre são tão fáceis, alguns poderão ser bastante trabalhosos e, por isso, passamos agora ao estudo de técnicas que facilitam o cálculo das derivadas, sem precisar recorrer à definição.

### Derivadas de funções elementares

- Derivada da função constante

Seja a função constante  $f(x) = c$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Note que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Exemplo: Dada a função  $f(x) = 5$ , temos que  $f'(x) = 0$ .

- Derivada da função  $f(x) = x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ . Lembre que quando  $n \in \mathbb{N}^*$ , podemos escrever  $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ . Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)(x^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (x^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}) = x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

**Exemplo:** Se  $f(x) = x$ , então  $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ .

**Exemplo:** Dada  $f(x) = x^4$ , a derivada da função é  $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$ .

### Atividades de avaliação

1. Obtenha a derivada da função  $f(x) = -3$  utilizando a definição e compare com a técnica das funções constantes.

2. Determine a derivada da função  $f(x) = x^3$  utilizando a definição e a técnica.

3. Utilizando as técnicas determine a derivada das seguintes funções:

a)  $f(x) = 11$

b)  $f(x) = x^7$

## 4. Continuidade e derivabilidade

Apresentamos, até o momento, vários exemplos de funções contínuas que são deriváveis em todo o seu domínio. Mostraremos, nesta seção, que toda função derivável é contínua, mas nem toda função contínua é derivável.

**Exemplo:** Seja  $f(x) = |x|$ , que é uma função contínua. Analisando a derivada da função no ponto  $x = 0$ , temos que:

Se existisse a derivada de  $f(x) = |x|$  em  $x = 0$  teríamos:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Porém,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = +1.$$

Como os limites laterais são diferentes, podemos afirmar que não existe  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$ . Portanto, a função não é derivável em  $x = 0$ .

**Conclusão:** A relação entre os limites, apresentadas no primeiro capítulo, vale para as derivadas, ou seja, uma função terá derivada em um ponto se e somente se possuir derivada à esquerda e à direita e estas forem iguais.

**Observação:** Dada uma função  $f(x)$  contínua em todo o seu domínio, a função será derivável sempre que houver uma reta tangente ao gráfico da função. Neste caso, a reta não será perpendicular ao eixo  $x$ . Se observarmos “bicos” no gráfico de funções, nestes pontos a função não será derivável.

**Teorema:** Se  $f$  possui derivada para  $x = x_0$ , então a função é contínua em  $x_0$ .

**Prova:** Vimos no capítulo 1 que uma função é contínua se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , ou seja,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ .

Como  $f$  é derivável em  $x_0$  então existe  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \\ &= 0 + f(x_0) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

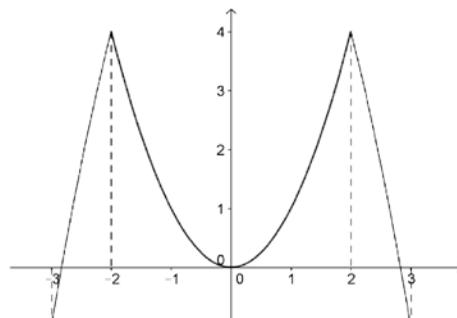
### Atividades de avaliação

1. Determine as derivadas laterais para  $x = 0$ , na função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Conclua se a função possui derivada no ponto  $x = 0$ .

2. Analise o gráfico abaixo e conclua se a função é contínua em todos os pontos do intervalo fechado dado e aponte se existirem pontos de descontinuidade. Observe, também, se a função é derivável em todo o intervalo e apresente, caso existam, pontos em que a função não é derivável.



## 5. Propriedades operatórias das derivadas

Aprendemos algumas técnicas que facilitam o cálculo de derivadas, sem necessariamente utilizar a definição.

Consideremos as funções  $r(x)$  e  $s(x)$  deriváveis, e suas derivadas  $r'(x)$  e  $s'(x)$ , respectivamente. Veremos como se torna fácil derivar funções utilizando as técnicas que apresentamos a seguir.

## Derivada do produto de uma constante por uma função

Dada  $f(x) = c \cdot r(x)$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Calculemos  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot r(x+h) - c \cdot r(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{r(x+h) - r(x)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h) - r(x)}{h} \\ &= c \cdot r'(x). \end{aligned}$$

### Exercício resolvido

1. Dada  $f(x) = 3x^4$ , calcule  $f'(x)$ .

**Solução:** Considere  $r(x) = x^4$ , assim  $f(x) = 3x^4$ . Logo:  $f'(x) = 3 \cdot r'(x) = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$ .

### Derivada da soma

Seja  $f(x) = r(x) + s(x)$ . Desejamos calcular  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h) + s(x+h) - r(x) - s(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{r(x+h) - r(x)}{h} + \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h) - r(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\ &= r'(x) + s'(x). \end{aligned}$$

**Observação:** A propriedade da derivada da soma vale para somas de funções com qualquer quantidade finita de parcelas.

**Exemplo:** Sejam  $f(x) = r(x) + s(x)$ , onde  $r(x) = 3x^2$  e  $s(x) = 2x$ . Podemos calcular a derivada da função  $f$  como:

$$f'(x) = r'(x) + s'(x) = 6x + 2.$$

### Derivada de um polinômio

A derivada de um polinômio pode ser facilmente encontrada, derivando termo a termo, utilizando as propriedades anteriores.

**Exercício resolvido:** Encontre a derivada da função polinomial

$$y = 2x^6 - x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x - 4.$$

**Solução:**

$$y^1 = 2 \cdot 6x^5 - 5x^4 + 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 6$$

$$y^1 = 12x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 4x + 6.$$

## Derivada do produto de duas funções

Considere agora  $f(x) = r(x) \cdot s(x)$ . Desejamos determinar uma expressão para encontrar  $f'(x)$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h)s(x+h) - r(x)s(x)}{h}$$

Sem alterar a expressão podemos somar e subtrair o termo  $r(x)s(x+h)$  e teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h)s(x+h) - r(x)s(x+h) + r(x)s(x+h) - r(x)s(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h)s(x+h) - r(x)s(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x)s(x+h) - r(x)s(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h) - r(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} s(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} r(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\ &= r'(x) \cdot s(x) + r(x) \cdot s'(x). \end{aligned}$$

### Exercício resolvido

1. Dada a função  $f(x) = (x^3 - 5x) \cdot (x - 1)$ , determine a derivada de  $f$ .

**Solução:** Considerando  $r(x) = x^3 - 5x$  e  $s(x) = x - 1$ , e, temos que  $r'(x) = 3x^2 - 5$  e  $s'(x) = 1$ . e. Assim,

$$f'(x) = r'(x) \cdot s(x) + r(x) \cdot s'(x) = (3x^2 - 5) \cdot (x - 1) + (x^3 - 5x) \cdot 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 10x + 5.$$

### Derivada do quociente de duas funções

Seja  $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ . Obteremos uma expressão para calcular  $f'(x)$ .

Podemos escrever que

$$r(x) = f(x) \cdot s(x)$$

Aplicando a regra da derivada do produto, temos que:

$$r'(x) = f'(x) \cdot s(x) + f(x) \cdot s'(x)$$

Substituindo  $f(x)$  e isolando  $f'(x)$ , encontraremos a expressão desejada.

$$r'(x) = f'(x) \cdot s(x) + \frac{r(x)}{s(x)} \cdot s'(x)$$

$$r'(x) \cdot s(x) = f'(x) \cdot s(x) + r(x) \cdot s'(x)$$

$$f'(x) = \frac{r'(x) \cdot s(x) - r(x) \cdot s'(x)}{s(x)^2}$$

**Exemplo:** Dada a função  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2x}$ , calculamos  $f'(x)$  considerando que  $r(x) = 2x$  e  $s(x) = x^2 - 2x$  e utilizando a expressão acima.

Calculando inicialmente as derivadas de  $r(x)$  e  $s(x)$ , temos que  $r'(x) = 2$  e  $s'(x) = 2x - 2$  e, logo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \cdot (x^2 - 2x) - 2x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} \\ &= \frac{-2x^2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2} \\ &= \frac{-2}{x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

## Derivada de potências com expoente negativo

Quando os expoentes são inteiros negativos, aplicamos a mesma técnica utilizada para inteiros positivos, demonstrada anteriormente. Dessa forma, se  $f(x) = x^n$ , então:

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

### Exercícios resolvidos

1. Determine a derivada da função  $f(x) = 5x^{-4}$ .

**Solução:**  $f'(x) = 5 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -20x^{-5}$

**Observação:** Na realidade, essa fórmula valerá para qualquer expoente real, como veremos mais adiante e demonstramos no exercício a seguir para  $f(x) = \sqrt{x}$ .

2. Dada a função  $f(x) = \sqrt{x}$ , encontre  $f'(x)$ , utilizando a definição.

**Solução:**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ , encontramos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Note que utilizando a regra da potência encontraríamos o mesmo resultado, isso é:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ e } f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

## Derivadas de ordem superior

Dada uma função  $f(x)$ , a derivada da função é chamada de derivada primeira e representada por  $f'(x)$ . Se  $f'(x)$  for derivável, sua derivada será chamada derivada segunda e será representada por  $f''(x)$ . Se  $f''(x)$  ainda for derivável, sua derivada será chamada derivada terceira e será representada por  $f'''(x)$  e assim sucessivamente, usando  $f^{(n)}(x)$  para representar as derivadas de ordens superiores.

### Atividades de avaliação

1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2x^5$

b)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

c)  $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x + 1$

d)  $f(x) = \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

e)  $f(x) = \frac{x}{24}$

f)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

g)  $f(x) = x^2 + 2x^2 - 2x + 1$

h)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

i)  $f(x) = \frac{3x + 1}{x^5}$

j)  $f(x) = 2x^{-4}$

k)  $f(x) = x^{-3} + 8x^{-2}$

l)  $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4}$ .

(Sugestão: escreva as potências de  $x$  como expoentes negativos).

2. Encontre uma equação para a reta tangente à curva  $c(x) = x^2 - 6x + 5$ , no ponto  $(2, -3)$ .

Sugestão: encontre o coeficiente angular que é a derivada da função e utilize os conhecimentos de Geometria Analítica para a determinação da equação da reta conhecendo a inclinação e um ponto, ou seja,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

3. Determine as derivadas de todas as ordens de  $f(x) = x^5$ .

## 6. A regra da cadeia

A regra da cadeia é uma regra de derivação para a composição de funções.

**Matemática básica:** Dadas duas funções  $r$  e  $s$ , com a condição de que a imagem de  $r$  esteja contida no domínio de  $s$ , podemos considerar a função composta:

$$f(x) = r(s(x)).$$

### Derivada da função composta

Sejam  $r$  e  $s$  funções reais tais que  $s$  seja derivável em  $x$  e  $r$  seja derivável em  $s(x)$ , ou seja, satisfeita a condição de que a imagem da função  $s$  esteja contida no domínio da função  $r$ , desejamos encontrar uma regra para derivar a função composta  $f(x) = r(s(x))$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(s(x+h)) - r(s(x))}{h}.$$

Multiplicando numerador e denominador por  $s(x+h) - s(x)$ , não alteramos a fração e podemos reagrupar o produto da seguinte maneira:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(s(x+h)) - r(s(x))}{s(x+h) - s(x)} \cdot \frac{s(x+h) - s(x)}{h}.$$

Note que quando  $h \rightarrow 0$ , temos que  $v = s(x+h) - s(x) \rightarrow 0$ . Utilizando a definição de derivada e a regra do produto para limites, escrevemos:

$$f'(x) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(s(x) + v) - r(s(x))}{v} \cdot \lim_{v \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h}.$$

$$f'(x) = r'(s(x)) \cdot s'(x)$$

### Exercícios resolvidos

1. Derive a função  $f(x) = x^2 + 3x^5$ :

**Solução:** Considere  $f(x) = r(s(x))$ , com  $r(s) = s^5$  e  $s(x) = x^2 + 3$ . Assim,  
 $f'(x) = r'(s) \cdot s'(x) = 5 \cdot s^4 \cdot 2x = 5 \cdot (x^2 + 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 3)^4$

2. Dada a função  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x}$ , determine a derivada da função  $f$ .

**Solução:** Fazendo  $f(x) = r(s(x))$ , com  $r(s) = \sqrt{s}$  e  $s = 4x^2 - 5x$ . Escrevemos:

$$f'(x) = r'(s) \cdot s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot (8x - 5) = \frac{8x - 5}{2\sqrt{4x^2 - 5x}}$$

### Atividades de avaliação

1. Calcule a derivada de cada uma das funções a seguir:

a)  $f(x) = x^5 + 2x^3x^4$

b)  $f(x) = \sqrt{x^6 + 2x^4 - 7x^2}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

e)  $f(x) = 3x^2 - 5x - 2x^2$

2. Determine a derivada primeira e a derivada segunda da função  $f(x) = x^2 - 7x^3$ .

## 7. Derivada de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Calcularemos agora as derivadas do seno, cosseno e tangente, utilizando os limites já encontrados no capítulo 1, na seção Limite Trigonométrico Fundamental, e algumas identidades trigonométricas bem conhecidas. A partir dessas derivadas poderemos calcular as derivadas das demais funções trigonométricas.

### Derivada do seno

Seja  $f(x) = \sin x$ , temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Recorde que:  $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}a \operatorname{cos}b + \operatorname{sen}b \operatorname{cos}a$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}x \operatorname{cosh} + \operatorname{sen}h \operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}h \operatorname{cos}x + \operatorname{sen}x (\operatorname{cosh} - 1)}{h} \\ &= \operatorname{cos}x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}h}{h} + \operatorname{sen}x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosh} - 1}{h} \\ &= 1 \operatorname{cos}x + \operatorname{sen}x \cdot 0 \\ &= \operatorname{cos}x. \end{aligned}$$

## Derivada do cosseno

Seja  $f(x) = \operatorname{cos}x$ , temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos}(x + h) - \operatorname{cos}x}{h}.$$

Recorde que:

$$\operatorname{cos}(a + b) = \operatorname{cos}a \operatorname{cos}b - \operatorname{sen}a \operatorname{sen}b$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos}x \operatorname{cosh} - \operatorname{sen}x \operatorname{sen}h - \operatorname{cos}x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \operatorname{cos}x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosh} - 1}{h} - \operatorname{sen}x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}h}{h} \right] \\ &= (\operatorname{cos}x) \cdot 0 - (\operatorname{sen}x) \cdot 1 \\ &= -\operatorname{sen}x. \end{aligned}$$

## Derivada da tangente

Seja  $f(x) = \operatorname{tg}x$ , temos que:

$$f(x) = \operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x}.$$

Utilizando a derivada do quociente, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{cos}x \operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x (-\operatorname{sen}x)}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

**Atividades de avaliação**

1. Obtenha a derivada das seguintes funções:

a)  $f'(x) = -2\sin x$

b)  $f'(x) = 5\cos x$

c)  $f'(x) = \cot x$

d)  $f'(x) = \sec x$

e)  $f'(x) = \operatorname{cosec} x$

f)  $f'(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2}$

g)  $f'(x) = 2\sin x + 3\cos x - 1$

2. Seja  $f(x) = \sin x$ , determine  $f^{(48)}(x)$ :

3. Encontre a derivada da função  $f(x) = \sin x \cdot \cos x - 1$

4. Utilize a regra da cadeia para derivar as seguintes funções:

a)  $f'(x) = \sin 2x$

b)  $f'(x) = \cos 4x$

c)  $f'(x) = \cos^5 x$

d)  $f'(x) = x \sin^2 x$

e)  $f'(x) = \sin(x^2 - 5x)$

## Derivada das funções exponenciais

Seja  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Desejamos calcular  $f'(x)$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

Lembre de que, no final do capítulo 1, encontramos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$ .

### Exercícios resolvidos

1. Determine a derivada da função  $f(x) = 3^x$ .

**Solução:**  $f'(x) = 3^x \ln 3$ .

2. Encontre  $f'(x)$  da função  $f(x) = e^x$ .

**Solução:**

$$f'(x) = e^x \ln e = e^x.$$

## Derivada das funções logarítmicas

Dada a função  $f(x) = \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Calcularemos  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\log_a(x+h) - \log_a x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\log_a a^{\frac{x+h}{x}}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \log_a a + \frac{h}{x} \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Fazendo  $t = \frac{h}{x}$  &  $\frac{1}{h} = \frac{1}{tx}$ , e quando  $h \rightarrow 0$ , temos que  $t \rightarrow 0$ . Assim, o limite anterior pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1+t)^{\frac{1}{tx}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t} \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln (1+t)^{\frac{1}{t} \frac{1}{x}}}{\ln a} \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

No último passo usamos o limite fundamental  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$ , visto na Unidade 1.

### Exercícios resolvidos

1. Determine a derivada das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2 \ln x$

**Solução:**  $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x \ln e} = \frac{2}{x}$ .

b)  $f(x) = \log x$

**Solução:**  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$ .

c)  $f(x) = 1 + 3 \ln x$

**Solução:**  $f'(x) = 0 + 3 \cdot \frac{1}{x \ln e} = \frac{3}{x}$ .

2. Generalize a derivada de  $f(x) = x^a$ , para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solução:** Seja  $f(x) = x^a$ , para  $a \in \mathbb{R}$ , temos que:  $\ln f(x) = \ln x^a$   
 $\ln f(x) = a \cdot \ln x$

Derivando e usando a regra da cadeia, encontramos que:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = a \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{a \cdot f(x)}{x} = \frac{a \cdot x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

### Atividades de avaliação

1. Determine as derivadas das funções:

a)  $f(x) = 5e^x$

b)  $f(x) = 2^x + x^2$

c)  $f'(x) = \log_3 x$

d)  $f'(x) = 3^x + 5 \ln x$

e)  $f'(x) = x \ln x$

f)  $f'(x) = 3^{x+1} + \ln x$

g)  $f'(x) = \sin x (e^x + \log_2 x)$

h)  $f'(x) = 5^x e^{-2x}$

2. Utilize a regra da cadeia para derivar as funções dadas:

a)  $f'(x) = 3^{\sin x}$

b)  $f'(x) = \log_3 \sqrt{x}$

c)  $f(x) = e^{x^2+1}$

**Observação:** Seja  $f(x) = y$  uma função derivável e bijetora em seu domínio de definição. Podemos determinar a derivada da função inversa.

Como  $f(x) = y$ , temos que  $f'(y) = x$ . Dessa forma, podemos aplicar a regra da cadeia para obter:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = 1$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \cdot$$

**Exemplo:** Seja  $f(x) = \arcsen x$ . Queremos encontrar a derivada da função  
f. Lembre que  $y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \sen y$ . Assim,

$$\sen y = x$$

Derivando, temos:

$$\cos y \cdot f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y}$$

Lembrando que  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ , temos que  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ .  
 Desta forma:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

## Atividades de avaliação



1. Determine as derivadas das funções trigonométricas inversas a seguir.

a)  $f(x) = \arccos x$

b)  $f(x) = \arctg x$

c)  $f(x) = \text{arccotg } x$

d)  $f(x) = \text{arcsec } x$

## Síntese do Capítulo



Iniciamos esta unidade com exemplos envolvendo o cálculo das velocidades média e instantânea de um objeto e gráficos de retas tangentes à curvas, para introduzir a noção de derivada. Dada uma função  $f(x) = y$ , definimos a derivada de  $f$  como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Concluimos, para  $r(x)$  e  $s(x)$  deriváveis, as seguintes propriedades operatórias:

$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$
$c \cdot r(x)$	$c \cdot r'(x)$
$r(x) + s(x)$	$r'(x) + s'(x)$
$r(x) \cdot s(x)$	$r'(x) \cdot s(x) + r(x) \cdot s'(x)$
$\frac{r(x)}{s(x)}$	$\frac{r'(x) \cdot s(x) - r(x) \cdot s'(x)}{s(x)^2}$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$

Provamos que se  $f$  possui derivada em  $x_0$ , então  $f$  é contínua em  $x_0$ . Padronizamos a notação para derivadas de ordem superior da função  $f(x)$ , usando  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  e  $f^{(n)}(x)$ , para  $n > 3$ .

Apresentamos a regra da cadeia para  $f(x) = r(s(x))$ , com  $s$  derivável em  $x$  e  $r$  derivável em  $s(x)$ , temos

$$f'(x) = r'(s(x)) \cdot s'(x).$$

Estudamos outras derivadas importantes:

$f(x)$	$f'(x)$
$\text{sen}x$	$\text{cos}x$
$\text{cos}x$	$-\text{sen}x$
$\text{tg}x$	$\text{sec}^2x$
$a^x$	$ax \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Encontramos a derivada da inversa de  $f(x) = y$ , derivável e bijetora em seu domínio de definição, como  $f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

## Leituras, filmes e sites



Derivadas: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada>

Derivadas de funções: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/calculo/derivada/derivada2.htm>

Tabela de derivadas: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Tabela\\_de\\_derivadas](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tabela_de_derivadas)

## Referências



ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.



# 3

## Capítulo

# Aplicações das Derivadas



## Objetivos

- Identificar intervalos de crescimento e decrescimento de funções
- Identificar pontos de máximos e mínimos, absolutos e relativos
- Utilizar a primeira e a segunda derivadas na construção de gráficos de funções
- Resolver problemas de otimização utilizando derivadas
- Aplicar a regra de L'Hôpital para resolver limites

No capítulo anterior já havíamos identificado que, com a derivada de uma função em um ponto, seria possível determinar a equação da reta tangente à curva neste ponto. Neste capítulo conheceremos outras aplicações das derivadas. Ao final do capítulo, esperamos que o aluno seja capaz de utilizar a derivada primeira para apontar pontos críticos de uma função, identificando se estes são pontos de máximo, mínimo ou inflexão. Além disso, desejamos que o aluno saiba utilizar a derivada primeira e a derivada segunda na construção de gráficos, em problemas de otimização e na aplicação da regra de L'Hôpital.

## 1. Equação da reta tangente

Como já mencionamos anteriormente, uma das aplicações das derivadas é a possibilidade de encontrar a equação da reta tangente a uma curva  $f(x)$  em um ponto dado, considerando que  $f(x)$  é derivável neste ponto e sabendo que  $f'(x)$  é o coeficiente angular da reta. Vejamos mais alguns exemplos.

### Matemática básica

A equação de uma reta que passa por um ponto dado  $(x_0, y_0)$  e tem coeficiente angular  $m$  é da forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

**Exemplo:** Podemos obter a equação da reta tangente à curva em .

$$f(x) = x^2 - 6x + 2 \text{ em } x = 4.$$

Note que, para  $x = 4$ , temos que:

$$y = f'(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 2 = 16 - 24 + 2 = -6.$$

Devemos calcular, agora, a derivada da função no ponto  $x = 4$ .

$f(x) = 2x - 6$ , logo  $f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$ . Dessa forma, a equação da reta tangente à curva no ponto  $(4, -6)$  é:

$$y - (-6) = 2(x - 4)$$

$$y + 6 = 2x - 8$$

$$y = 2x - 14.$$

### Atividades de avaliação

1. Encontre a equação da reta tangente à curva  $f(x) = 3x^2 - 5x$  no ponto em que  $x = 1$ .

2. Ache a equação da reta tangente à circunferência  $y = \sqrt{2 - x^2}$  no ponto  $(1, 1)$ .

## 2. Crescimento e decrescimento de funções

**Definição:** uma função  $f$  é **crescente** quando, atribuindo valores crescentes para  $x$ , encontramos valores crescentes de  $f(x)$ , ou seja, considerando  $x_1 < x_2$ , encontramos  $f(x_1) < f(x_2)$ .

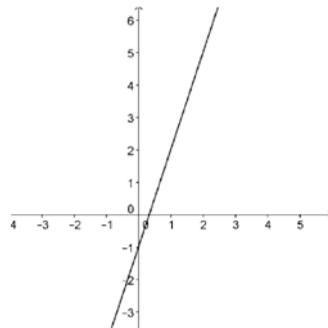
**Definição:** uma função  $f$  é **decrescente** quando, atribuindo valores crescentes para  $x$ , encontramos valores decrescentes de  $f(x)$ , ou seja, considerando  $x_1 < x_2$ , encontramos  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Uma função pode não ser crescente em todo o seu domínio. Nesse caso, podemos encontrar intervalos, nos quais a função é crescente e outros em que ela é decrescente.

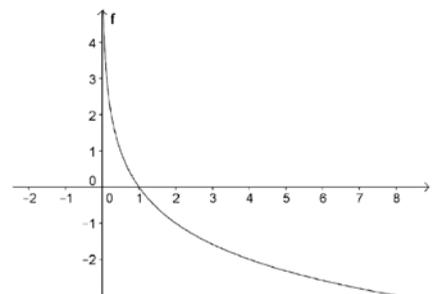
### Exemplos:

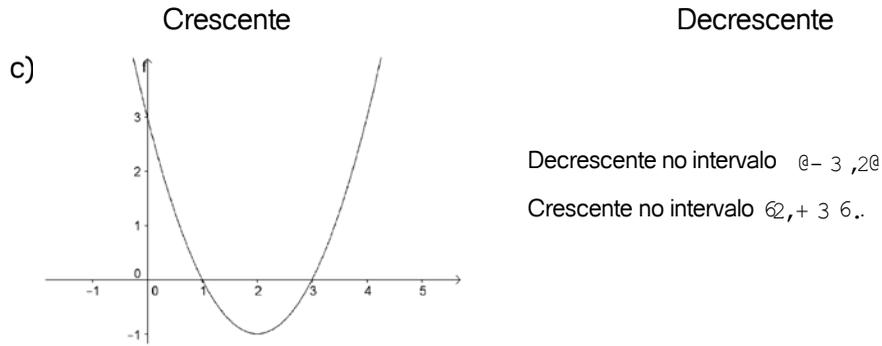
1. Observando os gráficos das funções, podemos verificar o seu crescimento ou decrescimento.

a)



b)





## 2. Analisando o crescimento e decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Notamos que, para valores maiores que zero e  $x_1 < x_2$ , temos:

$$x_1 < x_2$$

$$1 + x_1 < 1 + x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad f \text{ é crescente em } ]0, +\infty[$$

Para valores menores que zero e considerando , temos:

$x_1 < x_2$  multiplicando por  $-1$ .

$$-x_1 > -x_2$$

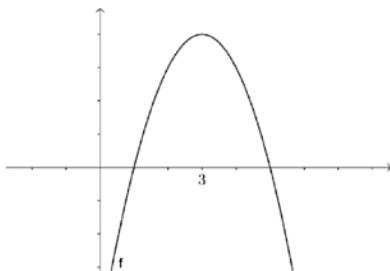
$$1 - x_1 > 1 - x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \text{é decrescente em } ]-\infty, 0[.$$

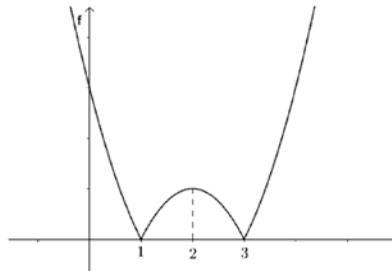
## Atividades de avaliação

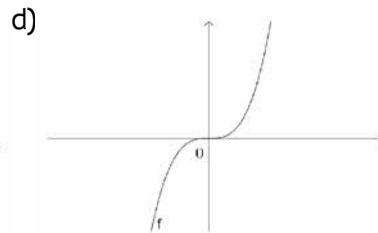
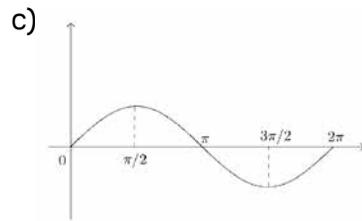
1. Observando os gráficos, identifique intervalos de crescimento ou decrescimento:

a)



b)





2. Analise, quanto ao crescimento ou decrescimento, a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , quando  $x > 0$ .

### 3. Máximos e mínimos

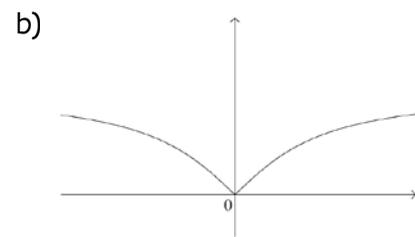
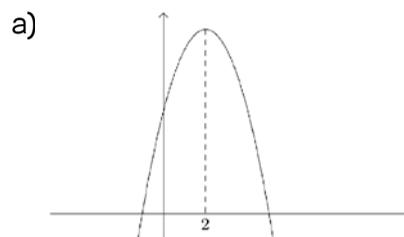
**Definição:** uma função  $f$  tem **máximo absoluto** em um ponto  $x_0$ , se para todo  $x$  do seu domínio, temos que  $f(x) \leq f(x_0)$ . Nesse caso,  $f(x_0)$  é chamado valor máximo da função.

**Definição:** uma função  $f$  tem **mínimo absoluto** em um ponto  $x_0$ , se para todo  $x$  do seu domínio, temos que  $f(x) \geq f(x_0)$ . Nesse caso,  $f(x_0)$  é chamado valor mínimo da função.

Podemos nos referir aos pontos de máximos e mínimos absolutos como pontos **extremos absolutos** da função.

#### Exercício resolvido

1. Determine o valor de máximo ou mínimo absoluto, analisando os gráficos das funções:



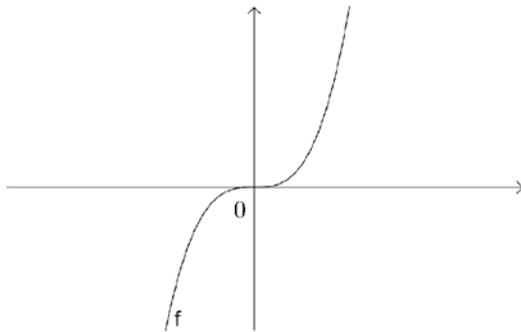
**Solução:**  $x = 2$  é ponto de máximo absoluto  $x = 0$  é um ponto de mínimo absoluto.

**Definição:** Considere  $x_0$  um ponto do domínio da função  $f$ . Temos que  $f(x_0)$  será:

1. um valor **máximo local (ou relativo)** em  $x_0$ , quando  $f(x) \leq f(x_0)$  para qualquer  $x$  na interseção do domínio de  $f$  com um intervalo aberto  $I$  contendo  $x_0$ .
2. Um valor **mínimo local (ou relativo)** em  $x_0$ , quando  $f(x) \geq f(x_0)$  para qualquer  $x$  na interseção do domínio de  $f$  com um intervalo aberto  $I$  contendo  $x_0$ .

Chamamos de **pontos críticos** os pontos em que  $f'(x) = 0$ . Os extremos locais são pontos que tem  $f'(x) = 0$ , pois a reta tangente ao gráfico, nesses pontos, é paralela ao eixo. Por outro lado, nem todo ponto que tem a derivada zero é um extremo local, como veremos no exemplo a seguir.

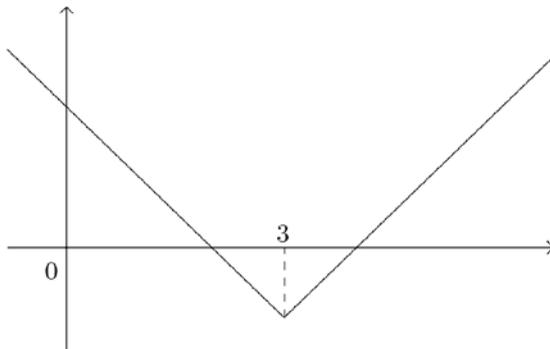
**Exemplo:** Seja  $f(x) = x^3$ . Neste caso,  $f'(x) = 3x^2$  e  $f'(x) = 0$  somente para  $x = 0$ . Porém, pela definição, este ponto não é um extremo local.



Nesse caso, o ponto  $x = 0$  é chamado **ponto de inflexão**.

Quando encontramos os valores em que a derivada se anula, temos os possíveis candidatos a extremos locais onde a função é derivável. Porém, extremos locais podem ocorrer em pontos onde a função não é derivável.

**Exemplo:** Considere a função  $f(x) = |-x + 3| - 1$ . Observe que a função não é derivável para  $x = 3$ , mesmo assim, pela definição, este ponto é um mínimo local.



**Conclusão:** Se o ponto  $x_0$  do domínio de uma função é um extremo local, então teremos que uma das seguintes afirmações é verdadeira:

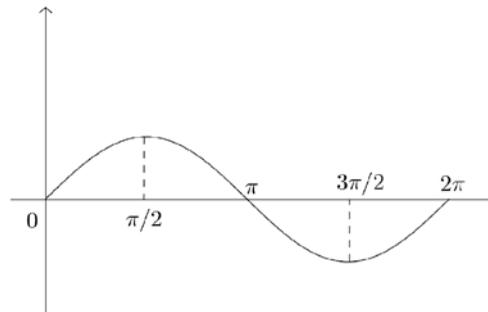
- $f$  não é derivável no ponto  $x_0$ .
- $f$  é derivável e  $f'(x_0) = 0$ .

Quando desejamos encontrar máximos e mínimos absolutos de funções deriváveis, em um intervalo  $[a, b]$ , determinamos os pontos críticos no intervalo

aberto  $(a,b)$  e comparamos com as extremidades  $f(a)$  e  $f(b)$ . O maior e o menor desses valores serão, respectivamente, o máximo e o mínimo absoluto.

### Exercícios resolvidos

1. Analise a função, para valores de  $x$  no intervalo fechado  $[0, 2\pi]$  e determine o que se pede:



a) máximos locais

**Solução:**  $x = \frac{\pi}{2}$  e  $x = 2\pi$

b) mínimos locais

**Solução:**  $x = \pi$  e  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

c) máximo absoluto

**Solução:**  $x = \frac{\pi}{2}$ .

d) mínimo absoluto

**Solução:**  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

2. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função  $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ , no intervalo  $[-1, 3]$ .

**Solução:**

A função não possui pontos de descontinuidade e para determinar os pontos críticos basta encontrar os pontos que anulam a derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

Determinamos os valores de  $f$  para os extremos e os pontos críticos.

$$f(-1) = 0, f(3) = 20, f(0) = 2 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}.$$

Comparando os valores, temos que: em  $x = -1$  encontramos o mínimo absoluto e em  $x = 3$  encontramos o máximo absoluto.

### Atividades de avaliação

1. Seja  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$ ,  $x \in [-3, 2]$ . Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos da função.

2. Determine os pontos críticos da função  $f(x) = |-x^2 + 4x|$ .

3. Encontre máximos e mínimos absolutos de cada função:

a)  $f(x) = 3x - 1$ , com  $x \in [-2, 3]$ .

b)  $f(x) = x^2 - 16$ , com  $x \in \mathbb{R}$

c)  $f(x) = x^2 - 3x - 11$ , com  $x \in [-2, 2]$

## 4. Utilizando a derivada primeira e a derivada segunda para traçar gráficos

**Teste da derivada primeira:** Seja  $f$  uma função derivável em  $(a, b)$ .

1) Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  é crescente em todo o seu domínio.

2) Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  é decrescente em todo o seu domínio.

**Demonstração:** Demonstraremos para  $f'(x) > 0$ . O caso em que  $f'(x) < 0$  pode ser feito de maneira totalmente análoga.

1) Supondo que  $f'(x) > 0$  para um ponto  $x \in (a, b)$  temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) > 0.$$

Sendo assim, para valores pequenos de  $h$ , temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0.$$

Se  $h > 0$  &  $x+h > x$  e  $f(x+h) - f(x) > 0$ , donde segue que

$$f(x+h) > f(x), \text{ para } h > 0.$$

Por outro lado, se  $h < 0$  &  $x+h < x$  e  $f(x+h) - f(x) < 0$ . Nesse caso, concluímos que  $f(x+h) < f(x)$ , para  $h < 0$ .

Em ambos os casos,  $f$  é crescente perto do ponto  $x \in (a,b)$ . Como  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (a,b)$ , a função  $f$  é crescente em todo o intervalo  $(a,b)$ .

Utilizamos essa informação para identificar se um ponto crítico é um extremo local.

**Conclusão:** Para identificar se um ponto crítico  $x_0$  é um extremo local de  $f$  é necessário verificar se  $f$  muda de sinal.

a) Se  $f(x) > 0$  antes de  $x_0$  (à esquerda de  $x_0$ ) e  $f(x) < 0$  depois dele (à direita de  $x_0$ ), temos que  $x_0$  é um ponto de máximo local da função  $f$ .

b) Se  $f(x) < 0$  antes de  $x_0$  (à esquerda de  $x_0$ ) e  $f(x) > 0$  depois dele (à direita de  $x_0$ ), temos que  $x_0$  é um ponto de mínimo local da função  $f$ .

c) Se não houver mudança de sinal antes e depois do ponto crítico  $x_0$ , então  $x_0$  não é máximo, nem mínimo local.

### Exercício resolvido

Encontre os pontos críticos da função  $f(x) = x^3 - 6x$ . Use a derivada primeira para identificar intervalos de crescimento e decrescimento e pontos de máximo e mínimo locais.

**Solução:** Calculamos inicialmente a derivada e os valores que tornam  $f'(x) = 0$ .

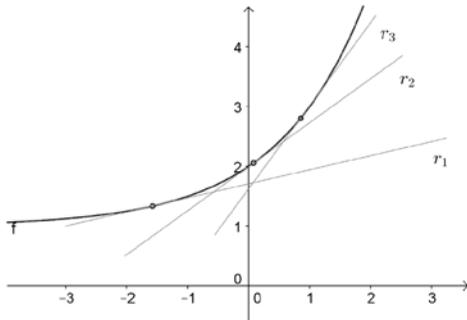
$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$$3x^2 - 6 = 0 \text{ \& } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}, \text{ ou que são os pontos críticos.}$$

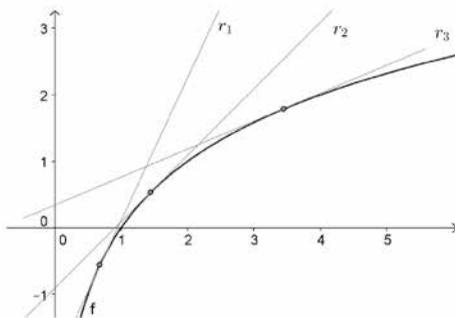
Testando valores temos: para  $x < -\sqrt{2}$ , vemos que  $f'(x) > 0$  e a função é crescente;  $f'(x) < 0$  para  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ , e a função é decrescente neste intervalo; para  $x > \sqrt{2}$ , vemos que  $f'(x) > 0$  e a função é crescente. Dessa forma, concluímos que  $-\sqrt{2}$  é um ponto de máximo local e  $\sqrt{2}$  é um ponto de mínimo local.

Analisando os gráficos de curvas crescentes e decrescentes, notamos que:

a) a concavidade está voltada para cima quando a derivada é crescente, ou seja, quando a derivada segunda é maior que zero. Note que na medida em que cresce a inclinação das retas tangentes também cresce.



b) a concavidade está voltada para baixo quando a derivada é decrescente, ou seja, quando a derivada segunda é menor que zero. Nesse caso, quando  $x$  cresce a inclinação das retas tangentes diminui.



**Teste da concavidade:** Seja  $f$  uma função que é duas vezes derivável em um intervalo aberto  $(a,b)$ .

a) Se  $f''(x) > 0$ , para todo  $x \in (a,b)$  então, neste intervalo, a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para cima.

b) Se  $f''(x) < 0$ , para todo  $x \in (a,b)$  então, neste intervalo, a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para baixo.

**Observação:** Se a concavidade mudar de sentido sem que a função tenha mudado o crescimento, temos um ponto de inflexão.

No teste da derivada primeira é necessário conhecer os sinais da derivada primeira em certos intervalos. O teste a seguir torna o trabalho ainda mais fácil, sendo necessário, apenas, conhecer a derivada segunda nos pontos críticos.

**Teste da derivada segunda:** Seja  $x_0$  um ponto crítico da função  $f$ , ou seja,  $f'(x_0) = 0$ .

a) Se  $f''(x_0) < 0$ , então  $x_0$  é um ponto de máximo local.

b) Se  $f''(x) > 0$ , então é um ponto de mínimo local.

**Observação:** Se em um  $(x_0)$ , temos que  $f''(x_0) = 0$  e a concavidade muda de sentido, então este ponto é um ponto de inflexão.

**Exercício resolvido:** Encontre os pontos críticos da função  $f(x) = x^3 - 6x$ . Use a derivada primeira e a derivada segunda para identificar pontos de máximo e mínimo absolutos.

**Solução:** Calculamos  $f(x)$ ,  $f'(x)$  e os valores que tornam  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \text{ e } f''(x) = 6x$$

$$3x^2 - 6 = 0 \text{ \& } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

que são os pontos críticos.

$$f''(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0, \text{ logo ponto de máximo.}$$

$$f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0, \text{ logo ponto de mínimo.}$$

Verificamos que os testes anteriormente mostrados são bons indicadores na hora da construção de gráficos de funções. Podemos ter em mente alguns dados importantes, como:

- conhecer os pontos críticos;
- intervalos de crescimento e decréscimo;
- posição da concavidade;
- interseções com os eixos coordenados;
- limites próximos dos pontos de descontinuidade e no infinito.

**Exercício resolvido:** Esboce o gráfico da função  $f(x) = x^5 - 5x$ .

**Solução:** Note que  $f$  é contínua. Calculando a derivada primeira e a derivada segunda, temos:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 \text{ e } f''(x) = 20x^3$$

$$5x^4 - 5 = 0 \text{ \& } x = -1 \text{ e } x = 1 \text{ que são as raízes reais e } 20x^3 = 0 \text{ \& } x = 0$$

Observe que

$$f''(-1) = 4 \text{ e } f''(1) = -20 < 0, \text{ logo ponto de máximo,}$$

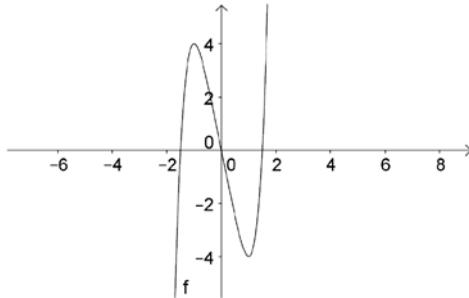
$$f''(-1) = -4 \text{ e } f''(1) = -20 > 0, \text{ logo ponto de mínimo.}$$

Quanto à concavidade,

$x < 0, f''(x) < 0$ , concavidade para baixo

$0 < x, f''(x) > 0$ , concavidade para cima e

$x = 0$  é ponto de inflexão.



### Atividades de avaliação

1. Esboce o gráfico das funções:

a)  $f(x) = x^3 - x^2$

b)  $f(x) = x^4 - 6x^2$

c)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

d)  $f(x) = x^2 - 1$

e)  $f(x) = 1 - 3\sin x$

## 5. Problemas de otimização

Daremos, a seguir, exemplos de problemas de otimização que podem ser resolvidos utilizando nossos conhecimentos de cálculo.

Destaque os pontos importantes:

a) identifique as grandezas envolvidas no problema;

b) analise valores que sejam possíveis para a resolução do problema;

c) escreva a equação ou as equações.

d) use a derivada primeira e a derivada segunda para detectar pontos críticos e possíveis soluções.

**Exercícios resolvidos:** Determine dois números cuja soma é 100 e o produto é o máximo possível.

**Solução:** Considere  $x$  e  $y$  como variáveis. Podemos escrever as seguintes equações:

$$x + y = 100 \text{ e } P = x \cdot y \Rightarrow P = x \cdot (100 - x) \Rightarrow P = -x^2 + 100x$$

Calculamos  $P'$  e  $P''$ , para determinar pontos críticos.

$$P' = -2x + 100 \text{ e } P'' = -2$$

$$-2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50 \text{ e } P''(50) = -2 \cdot 50 = -100 < 0, \text{ logo ponto máximo.}$$

Portanto, os valores devem ser  $x = y = 50$ .

2. Desejamos construir caixas, sem tampa, com folhas de dimensão 20 cm por 35 cm. A caixa será construída recortando-se quadrados dos cantos, como mostra a figura. Determine o lado dos quadrados que devem ser recortados para que se tenha uma caixa com volume máximo.



**Solução:**

Chamaremos de  $x$  o lado do quadrado do canto.

Escrevemos a equação para o volume:

$$V = x \cdot (35 - 2x) \cdot (20 - 2x)$$

$$V = 4x^3 - 110x^2 + 700x.$$

Sendo o domínio de definição o intervalo  $[0, 10]$ .

Encontramos  $V'$  e  $V''$ , para determinar pontos críticos.

$$V' = 12x^2 - 220x + 700 \text{ e } V'' = 24x - 220$$

De  $12x^2 - 220x + 700 = 0$  encontramos pontos críticos aproximados 4,1 e 14,2.

Podemos desprezar o segundo desses valores, pois 14,2 não está no intervalo de definição  $[0, 10]$ . Para a derivada segunda, temos que  $V''(4,1) = -121,6 < 0$ , donde concluímos que 4,1 é valor de máximo.

Portanto devemos escolher o valor  $x = 4,1$  cm

### Atividades de avaliação

1. Encontre a área máxima de um retângulo cujo perímetro é igual a 60 cm.
2. Determine um ponto do gráfico da função  $f(x) = x^2$ , que seja o mais próximo possível do ponto  $(1,0)$ . Lembre que a distância entre dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  é dada por  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
3. Um reservatório, no formato de um cilindro, deve ter a capacidade de  $20\pi m^3$ . Para construí-lo, o custo das bases é de R\$ 20,00 por metro quadrado e o custo da lateral é de R\$ 16,00 por metro quadrado. Determine o raio da base e a altura do reservatório para que o custo seja mínimo.

## 6. Regra de L'Hôpital

Concluimos a unidade apresentando mais uma aplicação das derivadas. A regra de L'Hôpital facilita muito o cálculo de limites que envolvem indeterminações utilizando os conhecimentos de derivadas.

No caso de indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$ : supondo  $f(a) = g(a) = 0$  e que existam  $f'(a)$  e  $g'(a)$ , com  $g'(a) \neq 0$ , a **Regra de L'Hôpital** nos diz que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

### Demonstração:

Partindo de  $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ , temos que:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Sabemos que  $f(a) = g(a) = 0$ , assim,

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Exercício resolvido:** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ .

**Solução:** Note que, para  $x = 0$ , temos uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicando a regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x}{1} = \text{cos } 0 = 1.$$

A regra de L'Hôpital pode ser utilizada em outras indeterminações do tipo  $\frac{3}{3}$ ,  $3 \cdot 0$  e  $3 - 3$ . Se quando aplicarmos a regra de L'Hôpital encontrarmos uma nova indeterminação, podemos utilizá-la novamente para a derivada segunda. No caso de uma nova indeterminação passamos à derivada terceira, e assim sucessivamente.

### Atividades de avaliação



1. Determine os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + x - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos } x}{x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 2x}{7x^2 + 1}$

### Síntese do Capítulo



A primeira aplicação de derivadas apresentada foi a possibilidade de determinar equações de retas tangentes às curvas.

Conceituamos funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos absolutos, máximos e mínimos locais, pontos críticos ( $f'(x) = 0$ ) e pontos de inflexão.

Verificamos que os pontos críticos são possíveis candidatos a extremos locais, porém, os pontos em que a função não é derivável também podem ser extremos.

Teste da derivada primeira: Seja  $f$  uma função derivável em  $(a, b)$ .

1) Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  é crescente em todo o seu domínio.

2) Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  é decrescente em todo o seu domínio.

Um ponto crítico  $x_0$  de  $f$  é extremo local se  $f$  muda de sinal em  $x_0$ . Se o sinal muda de positivo para negativo temos um máximo local em  $x_0$  e um mínimo local se o sinal de  $f'$  muda de negativo para positivo. Quando não há mudança de sinal, então  $x_0$  não é máximo, nem mínimo local.

Teste da concavidade: Seja  $f$  duas vezes derivável em um intervalo aberto  $(a, b)$ .

a) Se  $f''(x) > 0$ , a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para cima.

b) Se  $f''(x) < 0$ , a concavidade do gráfico de  $f$  está voltada para baixo.

Se a concavidade mudar de sentido sem que a função tenha mudado o crescimento (crescente ou decrescente), temos um ponto de inflexão.

Teste da derivada segunda: Seja  $x_0$  um ponto crítico da função  $f$ .

a) Se  $f''(x_0) < 0$ , então  $x_0$  é um ponto de máximo local.

b) Se  $f''(x_0) > 0$ , então  $x_0$  é um ponto de mínimo local.

c) Se  $f''(x_0) = 0$  e a concavidade muda de sentido, então  $x_0$  é um ponto de inflexão.

Estudamos problemas de otimização que podem ser resolvidos utilizando nossos conhecimentos da derivada primeira e derivada segunda e concluímos a unidade apresentando a regra de L'Hôpital, que facilita muito o cálculo de limites que envolvem indeterminações, e diz que:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ .

## Leituras, filmes e sites



Pesquise mais exemplos e exercícios de aplicações de derivadas:

[http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com\\_content&view=article&id=796:exercicios-aplicacoes-derivadas&catid=98:calculo1](http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=796:exercicios-aplicacoes-derivadas&catid=98:calculo1)

Máximos e mínimos:

<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/03/aplicacao-de-derivada-para-determinacao.html>.

Interpretação gráfica da derivada primeira e derivada segunda: [http://alfaconnection.net/pag\\_avsm/ldt0304.htm](http://alfaconnection.net/pag_avsm/ldt0304.htm)

## Referências



- ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. vol 1. São Paulo: LTC, 2003.
- GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.
- THOMAS, G. B. **Cálculo**. vol. 1. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

# 4

## Capítulo

# Noções de Integrais



## Objetivos

- Resolver integrais definidas e indefinidas
- Utilizar propriedades de integrais
- Utilizar o método da substituição para resolver integrais
- Compreender a interpretação geométrica das integrais
- Conhecer o Teorema Fundamental do Cálculo e as integrais de Riemann

Nesta unidade abordaremos noções e propriedades de integrais indefinidas, ou antiderivadas, as integrais das principais funções elementares, as integrais definidas, o teorema fundamental do cálculo e uma apresentação das integrais como limites de somas de Riemann. Ao final deste estudo, esperamos que o aluno saiba resolver integrais definidas e indefinidas e compreenda a interpretação geométrica das integrais.

## 1. A integral como antiderivada

Iniciamos esta unidade observando as derivadas de algumas funções.

$$G(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1 \text{ e } G'(x) = 8x^3 - 9x^2$$

$$H(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2 \text{ e } H'(x) = 8x^3 - 9x^2$$

$$I(x) = 2x^4 - 3x^3 \text{ e } I'(x) = 8x^3 - 9x^2$$

Note que apresentamos funções diferentes, mas encontramos a mesma derivada para todas as funções. E mais, todas as funções do tipo  $F(x) = 2x^4 - 3x^3 + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , geram derivadas  $f(x) = 8x^3 - 9x^2$ .

Chamamos a função  $F(x)$  de **antiderivada** ou **primitiva** da função  $f(x)$ , sempre que  $F'(x) = f(x)$ , para todo  $x$  do domínio da função.

**Definição:** Denominamos como **integral indefinida** da função  $f$  o conjunto das funções primitivas de  $f$  e representamos da seguinte maneira:

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

onde  $\int$  é o sinal da integral,  $f(x)$  é o integrando,  $x$  é a variável de integração,  $c \in \mathbb{R}$  e  $F$  é uma função tal que  $f = F'$ .

Exemplos:

1. Seja  $f(x) = 3x^4$ . Podemos determinar as primitivas da função  $f$ .

$$\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

De maneira geral calculamos este tipo de integral como:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq -1$$

Em particular,

$$\int dx = x + c.$$

2. Dada  $f(x) = \cos x$ , suas primitivas são da forma  $F(x) = \sin x + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ .

Vejamos mais algumas integrais de funções trigonométricas:

$$\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + c$$

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

3. Calculando a integral:

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2} + c.$$

Quando integramos funções exponenciais, temos:

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

4. Encontrando a integral indefinida, temos:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0.$$

Para calcularmos integrais precisamos lembrar bem as derivadas.

### Atividades de avaliação

1. Determine as primitivas das seguintes funções:

a)  $f(x) = 3x^4$

b)  $f(x) = -\operatorname{sen}\pi x$

2. Calcule as integrais:

a)  $\int \frac{1}{x} dx$

b)  $\int 2^x dx$

c)  $\int \sqrt{x} dx$

## 2. Propriedades da integral indefinida

As regras algébricas que aprendemos para limites e derivadas, também valem para o cálculo de integrais.

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule:  $\int (3x^4 + x^2 - 1) dx$ .

**Solução:** Podemos analisar a integral termo a termo, para encontrar a primitiva.

$$\begin{aligned} \int (3x^4 + x^2 - 1) dx &= \int 3x^4 dx + \int x^2 dx - \int dx = \frac{3x^5}{5} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2 - x + c_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + c, \quad c = c_1 + c_2 + c_3. \end{aligned}$$

2. Calcule a integral:  $\int \operatorname{sen}^2 x dx$ .

Lembre que:  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .

**Solução:** Desta forma,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c. \end{aligned}$$

### Atividades de avaliação

1. Encontre as integrais indefinidas:

a)  $\int (\sin x + \cos x) dx$

b)  $\int ax^2 - \frac{1}{x} k dx$

c)  $\int 5 \sin x dx$

d)  $\int x^{-1} dx$

e)  $\int 3e^{2x} dx$

### Método da substituição para calcular integrais

Podemos mudar a variável para resolver integrais. Sejam  $f$  e  $g$  funções tais que a composta  $f \circ g$  esteja definida. O método da substituição consiste na seguinte ideia: se soubermos calcular a antiderivada de  $f$ , então podemos encontrar.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

De fato, se  $F' = f$ , temos que  $(F \circ g)'(x) = (f \circ g)(x) \cdot g'(x)$ . Ou seja,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = (F \circ g)(x) + c = F(g(x)) + c.$$

Podemos sintetizar essa discussão: fazendo a substituição  $g(x) = u$ , temos

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c = F(u) + c = \int f(u) du.$$

Na prática, usamos a relação acima para justificar que: chamando  $g(x) = u$ , temos  $g'(x)dx = du$  e escrevemos diretamente a igualdade simplificada.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du.$$

**Exemplo:** Calcule a integral:

$$\int \sqrt{2x+1} dx$$

Chamaremos  $u = 2x + 1$  &  $du = 2dx$  &  $dx = \frac{1}{2} du$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+1} dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c. \end{aligned}$$

### Atividades de avaliação

1. Utilize a substituição de variável para calcular as integrais:

a)  $\int 3(2x - 5)^4 dx$

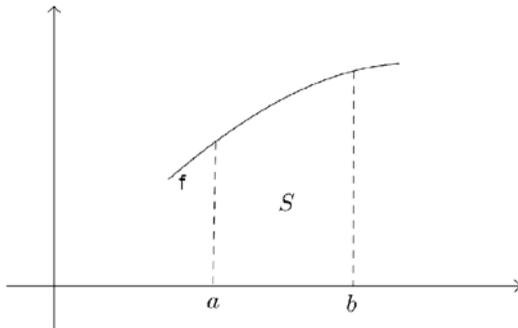
b)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$

c)  $\int \cos(5x + 2) dx$

d)  $\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx$

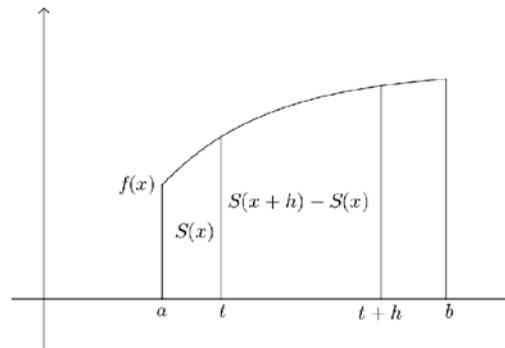
### 3. Integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo

Considere uma função contínua  $f(x)$  com  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  onde  $[a, b]$  é um intervalo fechado e  $a < b$ . Desejamos calcular a área  $S$  da região limitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , como mostra a figura. O **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)** diz que a área  $S$  é igual a  $F(b) - F(a)$ , onde  $F(t)$  é uma antiderivada da função  $f(t)$ .

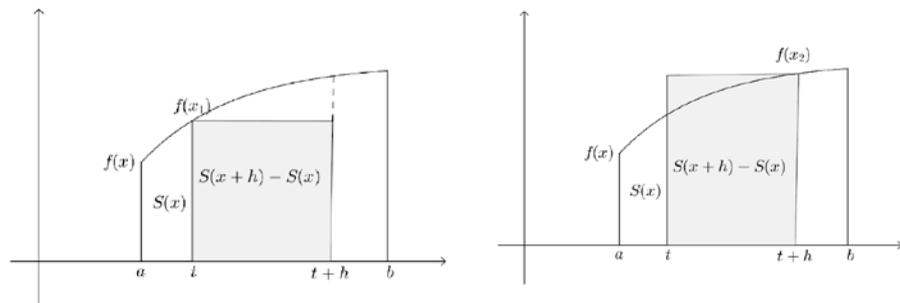


Para tanto, consideramos a área  $S(t)$  limitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = t$ , para cada  $t \in [a, b]$ . Observamos que  $S(a) = 0$  e  $S(b) = S(a)$ .

A fim de verificar o TFC, mostraremos que a função área  $S(t)$  satisfaz  $S'(t) = f(t)$ , ou seja,  $S(t) = F(t) + c$  é uma primitiva de  $f(t)$ .



Dados  $t \in (a, b)$  e  $h > 0$ , sejam  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  os valores de mínimo e máximo de  $f$  no intervalo  $[t, t+h]$ , respectivamente, com  $x_1, x_2 \in [t, t+h]$ . Uma função contínua, sempre atinge seus extremos em um intervalo desse tipo. Sendo assim, podemos comparar a área  $S(t+h) - S(t)$  representada na figura anterior, com as áreas dos retângulos de mesma base e alturas  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$



O mesmo ocorre com  $h < 0$ . Quando  $h \rightarrow 0$  temos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = f(t)$ .  
Dessa forma, concluímos que

$$f(t) \# \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \# f(t)$$

e, portanto,

$$S'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = f(t).$$

Em particular, para o cálculo da área da região que vai de  $a$  até  $b$ , devemos encontrar a função  $F$  cuja derivada é a função  $f$  e calcular  $S = F(b) - F(a)$ .

**Definição:** Seja  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$ . A área  $F(b) - F(a)$  é usualmente denominada **integral definida** da função  $f$  de  $a$  a  $b$ , onde  $F$  é a função área construída nos gráficos apresentados anteriormente. Indicamos a integral definida de  $f$  por

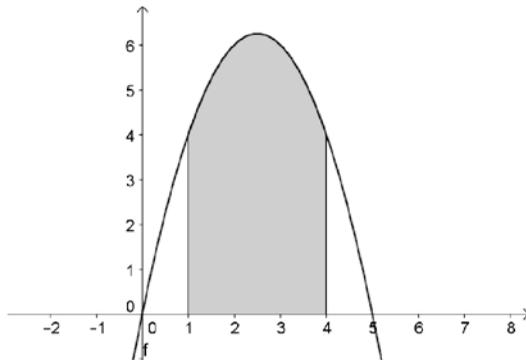
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Observação:** Na resolução das integrais definidas, usaremos a seguinte notação:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### Exercícios resolvidos:

1. Calcule a área da região sombreada na figura delimitada pelas curvas  $f(x) = -x^2 + 5x$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = 1$  e  $x = 4$ .



**Solução:** Calculamos a primitiva da função  $f$  e aplicamos nos valores  $x = 1$  e  $x = 4$ .

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$$

$$F(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} = \frac{13}{6} \quad \text{e} \quad F(4) = -\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} = \frac{112}{6}$$

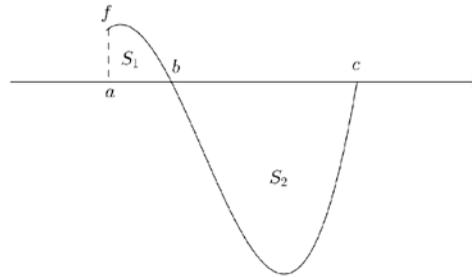
$$S = F(4) - F(1) = \frac{112}{6} - \frac{13}{6} = \frac{33}{2}.$$

2. Encontre a área da região limitada pelo gráfico da curva  $f(x) = x^2$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = -1$  e  $x = 4$ .

**Solução:** Calculamos a integral da função definida de  $x = -1$  até  $x = 4$ , ou seja,

$$\int_{-1}^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{64}{3} + \frac{1}{3} = \frac{65}{3}.$$

Passemos a analisar o caso em que a função assume valores positivos e negativos, ou seja, seu gráfico pode gerar regiões acima ou abaixo do eixo  $x$ . Dessa forma, as áreas formadas abaixo do eixo  $x$  são contadas com valor negativo na integral definida, ou seja:



1) Se  $f(x) \geq 0$ , para  $x \in [a, b]$ , temos que

$$S_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

2) Se  $f(x) \leq 0$ , para  $x \in [b, c]$ , temos que

$$S_2 = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx.$$

3) Finalmente, a integral definida de  $f$  em  $[a, c]$  é dada por

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = S_1 - S_2.$$

Além disso, podemos escrever a área delimitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = c$  em termos das integrais definidas como:

**Observação:** Sendo assim, a integral definida pode ser interpretada como a área delimitada pelo gráfico da função e o eixo  $x$  sendo essa área contada com sinal positivo ou negativo, dependendo do sinal da função. No entanto, o cálculo das integrais definidas de funções que mudam de sinal, também pode ser feito diretamente, como no caso das funções positivas: encontrando uma primitiva e aplicando o TFC.

Até agora, só demos sentido ao valor  $\int_a^b f(x) dx$  quando  $a < b$ . Mas também é importante considerar a **ordem de integração**. Sendo assim, quando escrevermos  $\int_a^b f(x) dx$  significa que estamos integrando a função  $f$  de  $a$  até  $b$ . Definimos a integral de  $f$  de  $b$  até  $a$  como sendo

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

**Exercício resolvido:**

1. Determine a área da região limitada pela curva  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$  e o eixo  $x$ .

**Solução:** Observamos que a função tem como raízes os valores  $x = -2$ ,  $x = 0$  e  $x = 4$ , ou seja, a função assume valores positivos e negativos. Note que  $f(x) \leq 0$  para valores de  $x \in [-2, 0]$  e  $f(x) \geq 0$  para  $x \in [0, 4]$ . Desta forma, devemos determinar:

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (x^3 - 2x^2 - 8x) dx - \int_0^4 (x^3 - 2x^2 - 8x) dx = \\ & = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} \right]_{-2}^0 - \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} \right]_0^4 \\ & = 0 - \left( \frac{(-2)^4}{4} - \frac{2(-2)^3}{3} - 4(-2)^2 \right) - \left( \frac{4^4}{4} - \frac{2(4)^3}{3} - 4(4)^2 \right) + 0 \\ & = \frac{20}{3} + \frac{128}{3} = \frac{148}{3}. \end{aligned}$$

2. Calcule

$$\int_{-2}^4 (x^3 - 2x^2 - 8x) dx.$$

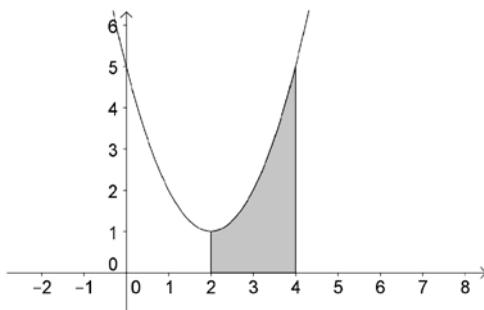
**Solução:**

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^4 (x^3 - 2x^2 - 8x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_{-2}^4 \\ & = \left( \frac{4^4}{4} - \frac{2(4)^3}{3} - 4(4)^2 \right) - \left( \frac{(-2)^4}{4} - \frac{2(-2)^3}{3} - 4(-2)^2 \right) \\ & = -\frac{128}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{148}{3}. \end{aligned}$$

### Atividades de avaliação

1. Determine a área da região limitada pelo gráfico da curva  $f(x) = -x^2 + 4$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = -2$  e  $x = 2$ .

2. Seja  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ . Calcule a área sombreada na figura:



3. Considere a função  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$ . Calcule a área limitada pelo gráfico da função  $f(x)$  e o eixo  $x$ .

### 3. Propriedades das integrais definidas

Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos usar as propriedades das integrais indefinidas para integrais definidas e acrescentar mais algumas.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Integração de  $a$  até  $a$  :

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Multiplicação por uma constante:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Soma ou subtração:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Adição de intervalos

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

**Exemplos:**

1. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções contínuas, tais que:

$$\int_1^3 f(x) dx = -2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 g(x) dx = 5.$$

Podemos calcular integrais utilizando as propriedades.

$$\int_1^3 6f(x) + g(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = -2 + 5 = 3$$

2. Calcule o valor da seguinte integral definida

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx.$$

Substituindo  $u = 1 - x^3$  e  $du = -3x^2 dx$  Observamos que  $x = 0$  implica  $u = 1$  e que  $x = 1$  implica  $u = 0$ , ou seja, a ordem de integração se inverte depois da mudança de variáveis. E assim, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx &= \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{-3} du \\ &= - \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

### Atividades de avaliação

1. Considere que  $\int_0^2 f(x) dx = 3$  e  $\int_2^5 f(x) dx = 5$ . Calcule o que se pede:

a)  $\int_0^2 5f(x) dx$

b)  $\int_2^0 f(x) dx$

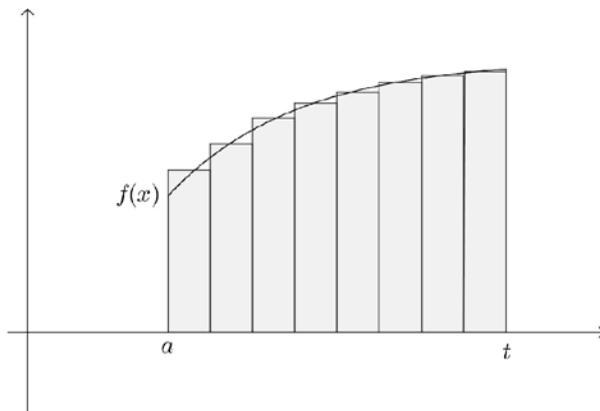
c)  $\int_0^5 f(x) dx$

2. Suponha  $\int_1^4 f(x) dx = -2$  e  $\int_1^4 g(x) dx = 7$ . e Calcule:

$$\int_1^4 (3f(x) - 2g(x)) dx.$$

## 5. Integrais de Riemann

Apresentaremos nessa seção uma maneira diferente de calcular a integral definida de uma função. Seja  $f(x)$  uma função que pode assumir valores positivos, negativos ou zero em um intervalo fechado  $[a, t]$ . Podemos dividir esse intervalo em subintervalos de comprimento  $h$ . Em cada subintervalo escolhemos um ponto  $x_i$ . Observe que a área  $S$  determinada pelo gráfico de  $f$  e pelo eixo  $x$  pode ser aproximada pela soma das áreas  $S_i$  dos retângulos, cujas bases são os subintervalos da divisão e de altura  $f(x_i)$  como podemos ver na figura a seguir.



Podemos escrever então

$$S \approx \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) h$$

Essas somas são chamadas **somas de Riemann** e, passando ao limite, quando  $n \rightarrow \infty$  e o comprimento dos subintervalos  $h \rightarrow 0$  obtemos um valor que é chamado de **integral de Riemann** da função  $f$  no intervalo  $[a, t]$ .

Dessa forma, temos:

$$\int_a^t f(x) dx = S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

**Exercício resolvido:** Calcule a soma de Riemann para a função  $f(x) = -x^2 - 2x$ , no intervalo  $-2 \leq x \leq 0$ , utilizando 5 subintervalos de mesmo tamanho. Ao final dos cálculos, compare com o valor de  $\int_{-2}^0 f(x) dx$ .

**Solução:** Dividimos o intervalo  $-2 \leq x \leq 0$ , em 5 subintervalos de comprimento  $h = \frac{2}{5}$  e escolhemos um ponto em cada intervalo

$$x_1 = -\frac{8}{5} \quad ; \quad -\frac{10}{5}, \frac{8}{5} \quad ; \quad x_2 = -\frac{6}{5} \quad ; \quad -\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \quad ; \quad x_3 = -\frac{4}{5} \quad ; \quad -\frac{6}{5}, -\frac{4}{5} \quad ; \\ x_4 = -\frac{2}{5} \quad ; \quad -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5} \quad ; \quad \text{e } x_5 = 0 \quad ; \quad -\frac{2}{5}, 0 \quad .$$

Calculamos os valores da função nos  $x_i$  e multiplicamos por  $h$  para obter a soma de Riemann pedida:

$$\begin{aligned} & f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + f(x_3) \Delta x + f(x_4) \Delta x + f(x_5) \Delta x = \\ & = : f\left(-\frac{8}{5}\right) \frac{2}{5} + f\left(-\frac{6}{5}\right) \frac{2}{5} + f\left(-\frac{4}{5}\right) \frac{2}{5} + f\left(-\frac{2}{5}\right) \frac{2}{5} + f(0) \frac{2}{5} = \\ & = : \frac{16}{25} + \frac{24}{25} + \frac{24}{25} + \frac{16}{25} + 0 \frac{2}{5} = 1,28. \end{aligned}$$

Calculando  $\int_{-2}^0 f(x) dx$ , temos:

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = -\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}.$$

Quando comparamos, observamos que o valor da área utilizando somas de Riemann é próximo do valor exato calculado com a integral definida no intervalo. Para obter uma aproximação melhor, seria necessário considerar uma quantidade maior de subintervalos.

### Atividade de avaliação

1. Utilize as somas de Riemann para calcular a área aproximada que o gráfico da função  $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$  faz com o eixo  $x$ , no intervalo  $-3 \leq x \leq 2$ , utilizando subintervalos.

2. Calcule a integral:

$$\int_3^2 (x^3 + x^2 - 6x) dx$$

e compare com o valor encontrado na atividade anterior.

Chamamos a função  $F(x)$  de antiderivada ou primitiva da função  $f(x)$ , sempre que  $F'(x) = f(x)$ , para todo  $x$  do domínio da função. Denominamos como integral indefinida da função  $f$  o conjunto das funções primitivas de  $f$  e representamos por:

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e  $F$  é tal que  $f = F'$ . Por exemplo, calculamos:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq -1.$$

Conhecemos integrais de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas:

$\int f(x) dx$	$F(x) + c$
$\int \operatorname{sen} kx$	$-\frac{\cos kx}{k} + c$
$\int \operatorname{cos} kx$	$\frac{\operatorname{sen} kx}{k} + c$
$\int \operatorname{sec}^2 x$	$\operatorname{tg} x + c$
$\int \operatorname{cosec}^2 x$	$-\operatorname{cot} g x + c$
$\int \operatorname{sec} x \operatorname{tg} x$	$\operatorname{sec} x + c$
$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cot} g x$	$-\operatorname{cosec} x + c$
$\int e^{kx}$	$\frac{e^{kx}}{k} + c$
$\int x^{-1}$	$\ln x + c$

Verificamos que as regras algébricas de limites e derivadas, valem para as integrais e apresentamos o método da substituição para a composta, substituindo  $g(x) = u$ , temos que

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c = F(u) + c = \int f(u) du.$$

Apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que diz que a área  $S = S(t)$  limitada pelo eixo  $x$  e pelo gráfico de  $f$  é uma antiderivada da função  $f(t)$ . Para o cálculo da região de  $a$  até  $b$ , encontramos a função cuja derivada é a função  $f$  e calculamos  $S = S(b) - S(a)$ . Definimos a integral definida da função contínua  $f$  em  $[a, b]$ , como o número real  $F(b) - F(a)$ , onde  $F$  é uma primitiva de  $f$  e a indicamos por

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em particular, verificamos que as propriedades das integrais indefinidas passam às integrais definidas:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ e } \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$$

bem como

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \text{ e } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Finalmente, apresentamos uma maneira de calcular, ou aproximar, integrais definidas como limites de somas associadas a partições do intervalo de integração (Somas de Riemann). Para  $f(x)$  definida em  $[a, t]$ , dividimos o intervalo em  $n$  subintervalos, e em cada subintervalo escolhemos um  $x_i$ , formando retângulos de mesma base  $h_n$  e altura  $f(x_i)$ . Usamos a soma das áreas desses retângulos para aproximar a integral definida de  $f$  entre  $a$  e  $t$ :

$$\int_a^t f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) h_n.$$

## Leituras, filmes e sites



Cálculo Integral: [http://cead.ufpi.br/conteudo/material\\_online/disciplinas/matematica/download/unidade6.pdf](http://cead.ufpi.br/conteudo/material_online/disciplinas/matematica/download/unidade6.pdf)

Integral: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Integral>

Soma de Riemann. Integral Definida. Propriedades. Área: [http://www.uff.br/webmat/Calc1\\_LivroOnLine/Cap21\\_Calc1.html](http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap21_Calc1.html)

## Referências



ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. vol 1. São Paulo: LTC, 2003.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**, Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

## Sobre a autora

**Raquel Montezuma Pinheiro Cabral:** Professora de matemática da rede estadual do ceará há 17 anos, trabalhando com educação semipresencial há 13 anos. Mestrado profissional de matemática pela universidade federal do ceará, concluído em 2014. Dissertação: introdução do estudo de vetores no ensino médio: um ganho significativo para o estudo da geometria analítica, sob a orientação do prof. Dr. Jonatan floriano da silva. Especialização em ensino da matemática pela universidade estadual do ceará, concluída em 2001. Monografia: um paralelo entre a educação matemática propostos pelos parâmetros curriculares nacionais e a preparação dos profissionais da área, sob a orientação da profa. Ms. Ivanice montezuma de carvalho pinheiro. Graduação em licenciatura plena em matemática pela universidade estadual do ceará, concluída em 1987.