



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

PRODUTO EDUCACIONAL

COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos

JEFERSON MOIZÉS LIMA

JOINVILLE, SC
2019

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Ensino de Matemática

Linha de Pesquisa: Tecnologias Educacionais.
Título: COVARIANÇA E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos
Autor: Jeferson Moizés Lima
Orientador: Rogério de Aguiar
Coorientadora: Ivanete Zuchi Siple
Data: 07/03/2019

Produto Educacional: Livro on-line - GeoGebraBook
Nível de ensino: Médio
Área de Conhecimento: Matemática
Tema: Conceito de Função

Descrição do Produto Educacional: O produto educacional é um GeoGebraBook, que contém objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem do conceito de função com o objetivo de propor uma abordagem dinâmica para este conteúdo.

Biblioteca Universitária UDESC: <http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria>

Publicação Associada: OBJETOS DINÂMICOS DE APRENDIZAGEM PARA EXPLORAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA PERSPECTIVA DA COVARIANÇA

URL: <http://www.cct.udesc.br>

Licença de uso: O autor é titular dos direitos autorais dos documentos disponíveis e é vedado, nos termos da lei, a comercialização de qualquer espécie sem sua autorização prévia (Lei nº 12.853, de 2013).

APRESENTAÇÃO

Caro Colega Professor(a),

Este produto educacional¹ é fruto do desenvolvimento da pesquisa intitulada “OBJETOS DINÂMICOS DE APRENDIZAGEM PARA EXPLORAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA PERSPECTIVA DA COVARIAÇÃO”² realizada no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade Estadual de Santa Catarina (UDESC), sob orientação da Professora Ivanete Zuchi Siple e do Professor Rogério de Aguiar.

O objetivo deste Produto Educacional é oferecer ao professor e ao estudante um material não convencional como o livro didático, mas sim um produto que contemple, em um mesmo ambiente, a interação e a visualização dinâmica. O professor contará com mais uma alternativa para explorar ideias referentes ao Conceito de Função, possibilitando o despertar do raciocínio covariacional.

O produto educacional é um GeoGebraBook, ambiente virtual no qual pode-se criar uma espécie de livro on-line no próprio GeoGebra³, inserindo imagens, textos, objetos de aprendizagem (OAs⁴) desenvolvidos no GeoGebra, slides, vídeos, links, questionários e pdfs.

Neste GeoGebraBook, denominado **“COVARIAÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos”** são disponibilizados objetos de aprendizagem relacionados ao ensino do conceito de função na perspectiva da covariação e ao despertar do raciocínio covariacional, sendo exploradas as potencialidades de alguns registros de representação, de simulação e de interação dinâmica presentes no GeoGebra.

O GeoGebraBook é disponibilizado on-line e para ter acesso basta utilizar o link do produto educacional, pesquisar pelo nome do produto no próprio site do GeoGebra ou até mesmo pesquisando no Google. Assim, o professor/usuário, ao acessar o livro, encontrará uma página inicial e poderá se direcionar ao capítulo

¹ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qdk8tjem> Acesso em: 29 jan. 2019.

² Dissertação de mestrado concluída no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do CCT/UDESC.

³ É um aplicativo de geometria dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Disponível em <https://www.geogebra.org/about> Acesso em: 29 jan. 2019.

⁴ Um objeto de aprendizagem é qualquer recurso digital, reutilizável, que serve de apoio em atividades que envolvam a produção de significados (SANTOS, 2007, p. 15).

desejado. Além disso, poderá salvar os arquivos e utilizá-los de modo off-line. A forma de utilizar/explorar os recursos não precisa ser linear, o usuário pode escolher a maneira em função dos seus próprios interesses e objetivos.

Em termos de implementação, o produto foi apresentado em 13 capítulos:

Capítulo 1 – APRESENTAÇÃO

Capítulo 2 – SUGESTÕES PARA OS PROFESSORES

Capítulo 3 – COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Capítulo 4 – BOLAS DE GOLFE

Capítulo 5 – ALTURA DO EDIFÍCIO

Capítulo 6 – CAIXA D'ÁGUA

Capítulo 7 – ALUGUEL DE BICICLETAS

Capítulo 8 – REPRESA DE ÁGUA

Capítulo 9 – LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Capítulo 10 – SINALIZADOR

Capítulo 11 – MANUAL

Capítulo 12 – DEIXE SUA OPINIÃO

Capítulo 13 – REFERÊNCIAS

Nos próximos tópicos será explicada a composição de cada capítulo.

Esperamos que este material possa contribuir efetivamente para com o ensino e aprendizagem do conceito de função na perspectiva da covariação e em especial para o despertar do raciocínio covariacional.

Jeferson Moizés Lima

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Tela inicial do Produto Educacional	9
Figura 2: Baixando um applet em “Detalhes”	10
Figura 3: Página que apresenta os detalhes do aplicativo e a opção descarregar ...	10
Figura 4: Baixando o <i>applet</i>	11
Figura 5: Opção de compartilhar	11
Figura 6: Itens do capítulo da apresentação	13
Figura 7: Itens do capítulo das sugestões.....	14
Figura 8: Três sugestões para aplicação das folhas de trabalho	14
Figura 9: Atividades para análise do conhecimento sobre Funções	15
Figura 10: Ilustração do resumo e do vídeo.....	16
Figura 11: Comprimento da Circunferência.....	17
Figura 12: Questões e vídeo do capítulo 3.....	18
Figura 13: Imagem do applet da folha de trabalho	19
Figura 14: Imagem da folha de trabalho na plataforma do GeoGebra	20
Figura 15: Bolas de Golfe.....	21
Figura 16: Imagem do applet do capítulo 4	22
Figura 17: Altura do Edifício	24
Figura 18: Imagem do applet do capítulo 5	25
Figura 19: Caixa d'água	26
Figura 20: Imagem do applet do capítulo 6	28
Figura 21: Aluguel de Bicicletas	29
Figura 22: Imagem do applet do capítulo 7	30
Figura 23: Represa de Água	31
Figura 24: Imagem do applet do capítulo 8.....	32
Figura 25: Lançamento de Projéteis.....	33
Figura 26: Imagem do applet do capítulo 9	35
Figura 27: Sinalizador	36
Figura 28: Imagem do applet do capítulo 10	37
Figura 29: Capítulo 12 – Deixe sua Opinião.....	39
Figura 30: Tela inicial do capítulo 13	40

SUMÁRIO

INFORMAÇÕES RELEVANTES.....	9
CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO.....	13
CAPÍTULO 2 – SUGESTÕES PARA OS PROFESSORES	13
CAPÍTULO 3 – COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA	17
CAPÍTULO 4 – BOLAS DE GOLFE	21
CAPÍTULO 5 – ALTURA DO EDIFÍCIO	23
CAPÍTULO 6 – CAIXA D'ÁGUA.....	26
CAPÍTULO 7 – ALUGUEL DE BICICLETAS	28
CAPÍTULO 8 – REPRESA DE ÁGUA	31
CAPÍTULO 9 – LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS	33
CAPÍTULO 10 – SINALIZADOR	36
CAPÍTULO 11 – MANUAL	38
CAPÍTULO 12 – DEIXE SUA OPINIÃO	38
CAPÍTULO 13 – REFERÊNCIAS.....	39
CONSIDERAÇÕES.....	40
REFERÊNCIAS.....	41

INFORMAÇÕES RELEVANTES

Ao acessar o produto educacional⁵, na tela inicial, aparecerá o título, uma breve descrição e o índice, conforme ilustra a Figura 1:

Figura 1: Tela inicial do Produto Educacional

The screenshot shows the initial screen of the educational product. On the left, there is a sidebar menu with the following items: COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO, APRESENTAÇÃO, SUGESTÕES PARA OS PROFESSORES, COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA, BOLAS DE GOLFE, ALTURA DO EDIFÍCIO, CAIXA D'ÁGUA, ALUGUEL DE BICICLETAS, REPRESA DE ÁGUA, LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS, SINALIZADOR, MANUAL, DEIXE SUA OPINIÃO, and REFERÊNCIAS. The main content area on the right displays the title 'COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos', the author 'Autor: Jeferson Lima', a brief description of the product, the UDESC logo, and a table of contents with links for 'APRESENTAÇÃO', 'Sobre os autores', and 'Descrição do Produto Educacional'.

Fonte: o autor.

Explorando a tela inicial, você poderá acessar os demais capítulos clicando nos links apresentados em "Tabela de Conteúdos", ou ainda, utilizando o menu que se encontra na lateral esquerda da tela.

Baixar *applets* e/ou folhas de trabalho do GeoGebrabook

No produto educacional, estão disponibilizadas folhas de trabalho, ou seja, cada um dos objetos de aprendizagem. Nestas folhas de trabalho estão os *applets*⁶ do GeoGebra, podendo o professor baixá-lo e utilizá-lo de forma off-line.

⁵ Disponível em: < <https://www.geogebra.org/m/qdk8tjem> > Acesso em: 29 jan.2019.

⁶ É um software menor que executa uma atividade específica dentro de outro programa maior, nesse caso o *applet* é simulação da situação-problema, dentro do programa maior, que é o GeoGebra.

Vamos utilizar uma folha de trabalho do livro para exemplificar como baixar o *applet*. Consideraremos a folha de trabalho intitulada “Bolas de Golfe”. Quando abrir a página, clique em “Detalhes”, assim como na Figura 2.

Figura 2: Baixando um applet em “Detalhes”

Situação Problema

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de golfe idênticas em um copo com água até o nível da água. Utilize o applet abaixo para responder as questões solicitadas.

Animação Parar Animação
Reiniciar

Número de Bolas (x)	Nível de Água (y)
0	9

Nível da água (y)

Número de bolas (x)

- Adicionar aos Favoritos
- Partilhar
- Abrir com uma App Geogbra
- Editar LivroGeoGebra
- Copiar LivroGeoGebra
- Editar Projeto
- Copiar Projeto
- Detalhes**

Fonte: o autor.

Na sequência, clique em ‘Descarregar’, como ilustra a Figura 3.

Figura 3: Página que apresenta os detalhes do aplicativo e a opção descarregar

GeoGebra

← Bolas de Golfe

Editar - Apagar - Faça uma Cópia

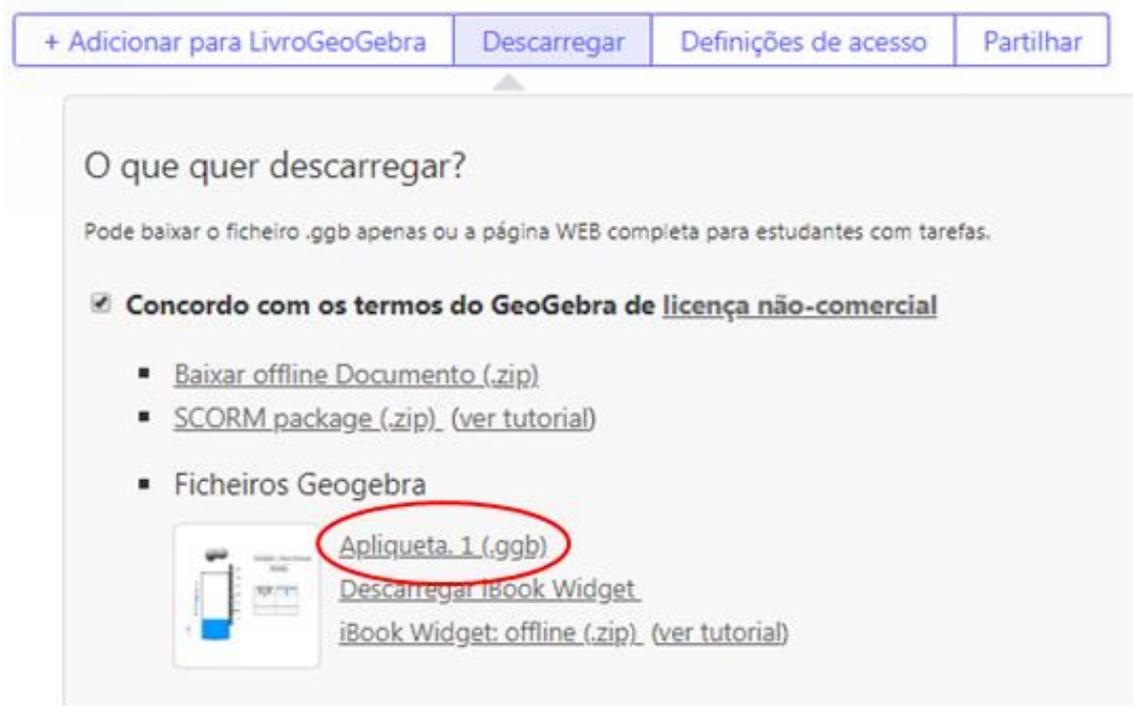
Ir para a apliqueta do estudante

+ Adicionar para LivroGeoGebra Descarregar Definições de acesso Partilhar

Fonte: o autor.

Imediatamente abrirá uma janela, conforme ilustra a Figura 4, basta confirmar que está concordando com os termos e em seguida clicar no arquivo (.ggb) para baixar o *applet*.

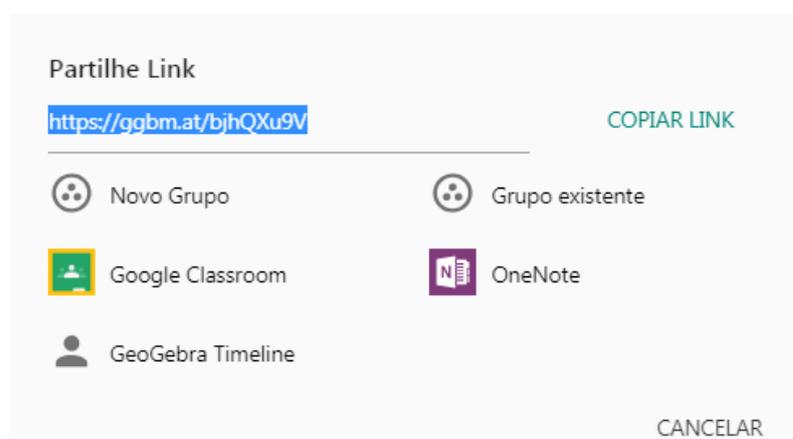
Figura 4: Baixando o *applet*



Fonte: o autor.

A Figura 5 mostra as opções de compartilhar os objetos de aprendizagem, ou seja, as folhas de trabalho, em um grupo do GeoGebra, ou em redes sociais ou por e-mail. Basta copiar o link fornecido ao clicar em compartilhar.

Figura 5: Opção de compartilhar



Fonte: o autor.

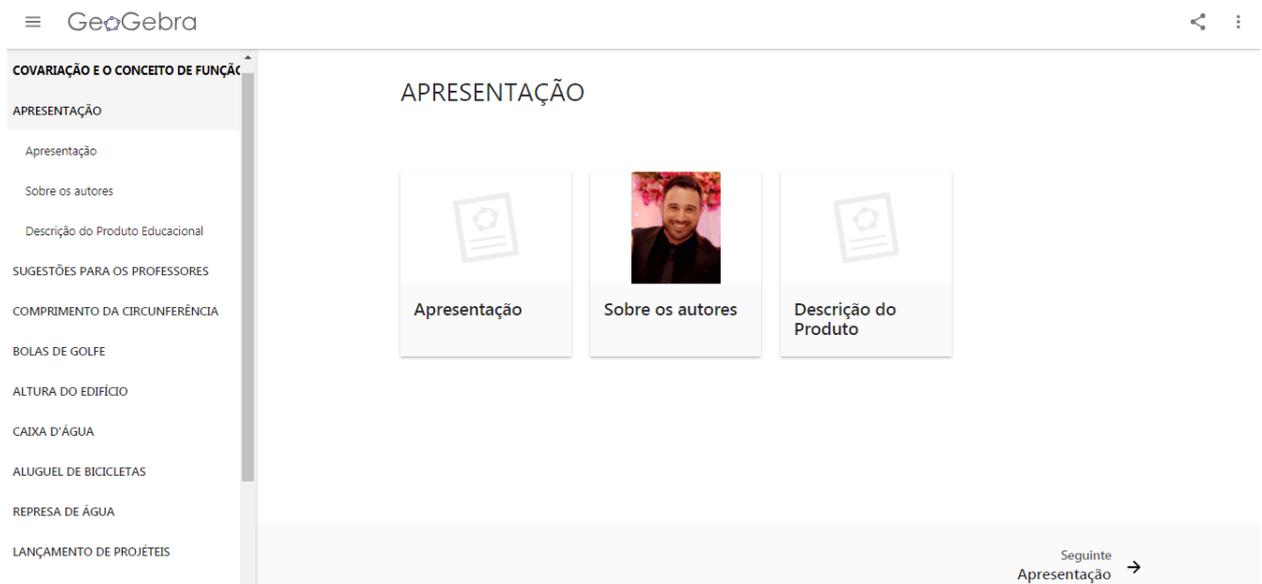
Criando-se uma conta no GeoGebra, qualquer professor e/ou aluno poderá criar um GeoGebraBook. É permitido organizar em forma de livro on-line, dinâmico e interativo, *applets*, ou materiais que a rede de colaboradores do GeoGebra tenha disponibilizado. Assim, pode-se organizar um acervo para ensino e aprendizagem de diversos níveis de ensino. A seguir tem-se a descrição, realizada em capítulos, deste GeoGebraBook.

CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO

O capítulo 1 descreve uma pequena apresentação do produto educacional, incluindo a autoria e a descrição deste Produto Educacional, em pdf, disponível no próprio produto.

A Figura 6 remete à tela inicial do capítulo de apresentação no GeoGebraBook. É possível clicar no ícone que quiser, seguir a sequência proposta na tabela de conteúdos ou ainda clicar em “Seguinte” na parte inferior direita da página.

Figura 6: Itens do capítulo da apresentação



Fonte: o autor.

CAPÍTULO 2 – SUGESTÕES PARA OS PROFESSORES

Este capítulo tem o objetivo de orientar e/ou sugerir para o professor a utilização das folhas de trabalho deste GeoGebraBook.

A Figura 7 ilustra o que esse capítulo oferece, ou seja, as orientações, as sugestões para aplicação das folhas de trabalho, as sugestões para avaliação e como utilizar a ferramenta Grupos do GeoGebra.

Figura 7: Itens do capítulo das sugestões.



Fonte: o autor.

No ícone, “Sugestões para Aplicação”, apresentamos três sugestões para utilização das folhas de trabalho. A Figura 8 demonstra estas sugestões.

Figura 8: Três sugestões para aplicação das folhas de trabalho



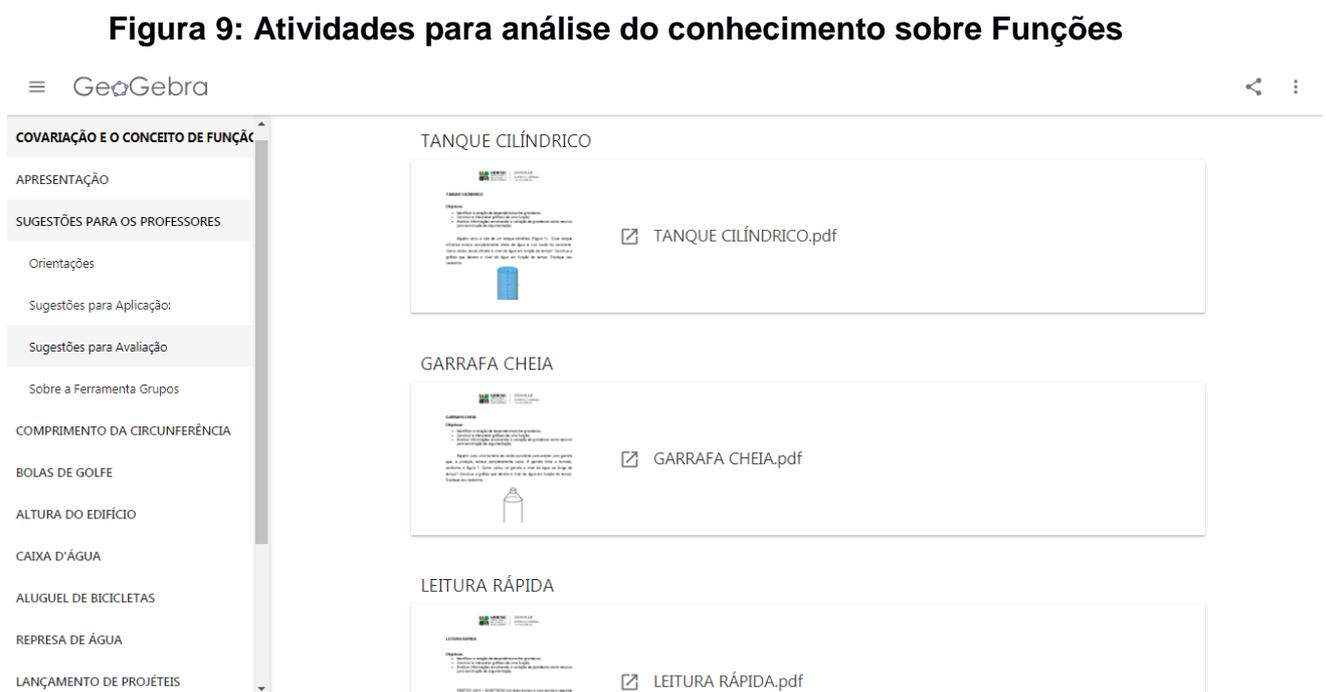
Fonte: o autor.

Já no ícone “Sugestões para Avaliação”, propomos algumas estratégias, principalmente no que diz respeito à utilização da ferramenta Grupos do GeoGebra. Vale informar que, ao aplicar este Produto Educacional em um contexto prático, sentimos falta de atividades que possibilitassem ao aluno reconhecer o comportamento da função em uma situação cotidiana, ou seja, que a partir das quais fosse possível analisar o raciocínio do aluno. Então, desenvolvemos e disponibilizamos 05 atividades que podem ser utilizadas tanto para introduzir

Funções ou na medida em que forem sendo trabalhados os conteúdos em sala de aula. Dessa forma, é possível que o professor tenha melhores condições de analisar o que os alunos já sabem sobre Função e quais habilidades ligadas ao raciocínio covariacional foram ou não utilizadas por eles.

O professor pode adaptar estas questões da forma que achar mais apropriado. Por exemplo, neste produto nós sugerimos que o professor analise os argumentos que o aluno relata ao construir o comportamento gráfico, entretanto, o professor poderá sugerir até mesmo que o aluno descreva uma lei de formação da função, por exemplo.

As atividades estão disponibilizadas em pdf. A Figura 9 ilustra como foram dispostas estas atividades



Fonte: o autor.

No ícone “Sobre a Ferramenta Grupos”, descrevemos um resumo do funcionamento desta ferramenta, pois na dissertação⁷ detalhamos o que é essa ferramenta, os objetivos e como utilizá-la em sala de aula. Entretanto, disponibilizamos também um vídeo⁸ de autoria do Professor Jorge Cássio Costa

⁷ LIMA, Jeferson Moizés. Objetos dinâmicos de aprendizagem para exploração do conceito de função na perspectiva da covariação, 2019.

⁸ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/Rb9MDPnb>> Acesso em 30 jan. 2019.

Nóbriga, que apresenta de forma gradual a utilização dessa ferramenta, sendo algo como um “minicurso”. A Figura 10 ilustra o resumo e o vídeo disponibilizados.

Figura 10: Ilustração do resumo e do vídeo.

The image shows a screenshot of the GeoGebra website. On the left is a sidebar menu with various categories. The main content area is titled "Sobre a Ferramenta Grupos" and contains text by Jeferson Lima. Below the text is a link to a YouTube video and a video player thumbnail showing a GeoGebra interface.

Fonte: o autor.

Os capítulos 3 ao 10 se referem a cada um dos objetos de aprendizagem. Apresentamos, em todos eles, sugestões de questionamentos que o professor pode lançar aos alunos antes de iniciar o conteúdo com o objetivo de estimulá-los a refletir sobre situações do cotidiano, construir ou reconstruir conceitos sobre a temática em questão, um *applet* dinâmico seguido de uma sequência de questões para o estudo do Conceito de Função vinculados ao raciocínio covariacional e a situação-problema, descrita no *applet*, em formato pdf. O recurso tecnológico oferece um ambiente confortável para apresentação e desenvolvimento do tema. As características dinâmicas do *applet* motivam o usuário a responder questões difíceis de serem exploradas apenas no ambiente clássico do lápis e papel.

Para compor os objetos de aprendizagem, isto é, as folhas de trabalho que contemplam uma situação-problema, um *applet* e uma sequência de questões, foram utilizadas e adaptadas atividades do livro⁹ “Matemática: 1º ano” de Santos e Inafuco, utilizado por mim, como professor, na Rede Salesiana Brasil Escolas. Os *applets* foram desenvolvidos para cada situação-problema. No total, são 08 objetos

⁹ SANTOS, Cláudia A. e INAFUCO, Julio. Matemática: 1º ano. Ensino Médio. Ed. Edebe, 2017.

de aprendizagem propostos para serem utilizados no ensino e aprendizagem do conceito de função, vinculados ao despertar do raciocínio covariacional dos estudantes no Ensino Médio.

CAPÍTULO 3 – COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Na Figura 11, tem-se um registro de como aparece a tela inicial, do capítulo 3: Comprimento da Circunferência¹⁰, no GeoGebraBook.

Figura 11: Comprimento da Circunferência



Fonte: o autor.

No ícone “**Orientações**”, deixamos descrito quando seria adequado utilizar esse objeto de aprendizagem, o nível de ensino e questões que o professor pode direcionar aos alunos oralmente antes de aplicar a folha de trabalho. Sugerimos questões que valorizam os conhecimentos prévios e as experiências vivenciadas por cada aprendiz com referência à temática em foco. Caso o professor perceba um déficit nas respostas dos estudantes, também disponibilizamos um vídeo¹¹ que pode ser utilizado para sanar as dúvidas que surgirem durante a aula. A Figura 12 ilustra como aparecem essas questões e o vídeo no capítulo.

¹⁰ Disponível em: < <https://ggbm.at/dyD2Vsc5> >

¹¹ Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?time_continue=5&v=GYiNFAIHWmA > Acesso em 30 jan. 2019.

Figura 12: Questões e vídeo do capítulo 3

3 COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Orientações

Comprimento da circunferência

Situação-Problema em PDF

4 BOLAS DE GOLFE

5 ALTURA DO EDIFÍCIO

6 CHUVA D'ÁGUA

7 ALUGUEL DE BICICLETAS

8 REPRESA DE ÁGUA

9 LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

10 SINALLIZADOR

- O que é circunferência?
- O que é círculo?
- Qual ou quais as diferenças entre círculo e circunferência?
- O que é raio?
- O que é diâmetro?

Caso Professor, perceba um déficit nas respostas relacionadas às questões, sugerimos um video sobre essa temática.

Isso Não É O Mesmo: Circulo e Circ...

Fonte: o autor.

Já no ícone “**Comprimento da Circunferência**”, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Esta folha de trabalho tem objetivo de ser respondida de forma on-line, visto que, seria adequado o aluno manusear o *applet* pelo fato de ele permitir ao aluno a visualização da simulação do raio sendo alterado no mesmo momento em que o comprimento da circunferência também se altera. Além disso, durante a simulação, instantaneamente acontece a representação tabular. Entretanto, como já discorreremos nas “Sugestões para os Professores”, é possível ao professor imprimir a situação-problema e as questões propostas, as quais disponibilizamos em pdf, entregar aos estudantes e mostrar o *applet* pelo projetor multimídia, pois sabemos que há escolas sem recursos para disponibilizar computadores/tablets e internet. Vale informar que, durante a experimentação deste objeto de aprendizagem, alguns alunos utilizaram smartphones e o *applet* funcionou sem falhas.

A seguir, apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 3, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, representado pela Figura 13, e as questões propostas.

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter a lei de formação da função.

Situação-Problema

O perímetro de uma figura plana é calculado por meio da soma das medidas de todos os seus lados. Entretanto, para calcular o perímetro (comprimento) de uma circunferência, é diferente. Regiões circulares não são formadas por segmentos de retas. Dessa forma precisamos do valor do raio e do valor da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro, ou seja, um número irracional chamado de “pi” e representado por $\pi = 3,141592 \dots$

Observe a simulação **movendo r no controle deslizante** e analise o que acontece.

Figura 13: Imagem do *applet* da folha de trabalho



Fonte: o autor.

Neste *applet*, o estudante tem a oportunidade de mover o controle deslizante e perceber as mudanças que ocorrem tanto na representação tabular, quanto na algébrica, quanto na simulação da situação-problema. Após responderá às seguintes questões propostas.

Questões propostas:

- Quais as grandezas envolvidas na simulação?
- Cada valor de C se associa a quantos valores de r ?

- c) Quando você alterou os valores do raio (r), usando o controle deslizante, percebeu que os valores do comprimento da circunferência (C) mudam. Essa mudança é direta ou inversamente proporcional? Qual é a proporção?
- d) Qual é a relação matemática entre as grandezas dessa situação-problema? Essa relação é uma função? Justifique.
- e) Qual será o comprimento da circunferência se o raio medir 15 centímetros?
- f) Qual o valor do raio se o comprimento da circunferência medir 180 centímetros?
- g) Quando você alterou os valores do raio (r), usando o controle deslizante, percebeu que os valores do raio(r) e do comprimento (C) da circunferência foram representados em uma tabela. Você conhece outra forma de representar esses dados? Caso conheça, represente-os.

As questões acima são apresentadas na folha de trabalho on-line e podem ser respondidas utilizando a própria plataforma. Para isso haverá um campo “Escreva aqui sua respostas” abaixo de cada questão. A Figura 14 ilustra a imagem de como são dispostas as questões na folha de trabalho da plataforma do GeoGebra.

Figura 14: Imagem da folha de trabalho na plataforma do GeoGebra

The screenshot shows the GeoGebra interface. On the left is a sidebar with a menu titled "COVARIACÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO" containing items like "1 APRESENTAÇÃO", "2 SUGESTÕES PARA OS PROFESSORES", "3 COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA", "Orientações", "Comprimento da circunferência", "Situação-Problema em PDF", "4 BOLAS DE GOLFE", "5 ALTURA DO EDIFÍCIO", "6 CAIXA D'ÁGUA", "7 ALUGUEL DE BICICLETAS", "8 REPRESA DE ÁGUA", "9 LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS", and "10 QINAI 17A D'OR".

The main workspace contains the following text: "Comprimento da Circunferência: C" and "Se $r=10$ têm-se $C = 20\pi$ ". Below this is a table:

Raio (r)	Comprimento da Circunferência (C)
1	π
2	4π
3	6π
4	8π
5	10π
6	12π
7	14π
8	16π
9	18π
10	20π

To the right of the table is a diagram of a circle with a center point. A pink radius line is drawn from the center to the circumference, labeled with the letter r . The circumference of the circle is labeled with the letter C .

Below the diagram, there is a text prompt: "A partir de sua observação e análise, responda:" followed by the question "a) Quais as grandezas envolvidas na simulação?". Below the question is a text input field with the placeholder "Escreva aqui a sua resposta ...".

Fonte: o autor.

CAPÍTULO 4 – BOLAS DE GOLFE

Na Figura 15, tem-se um registro de como aparece a tela inicial do capítulo 4: Bolas de Golfe¹², no GeoGebraBook.

Figura 15: Bolas de Golfe



Fonte: o autor.

No ícone “**Bolas de Golfe**”, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de trabalho, é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação e a representação algébrica e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das percepções. Nesta folha de trabalho foram propostas questões em 03 etapas. Na primeira e terceira etapa, as questões são discursivas. Já na segunda as questões são objetivas.

A seguir, apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 4, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 16, e as questões propostas.

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;

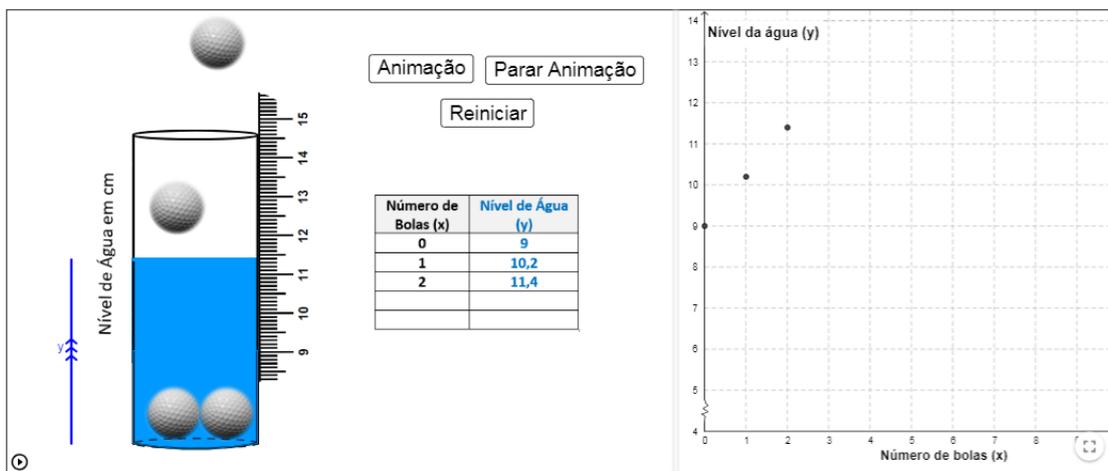
¹² Disponível em: <https://ggbm.at/bjhQXu9V>

- Obter a lei de formação da função.

Situação-Problema

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de golfe idênticas em um copo com água até certo ponto e medir o nível da água. Utilize o *applet* para responder às questões solicitadas.

Figura 16: Imagem do *applet* do capítulo 4



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

Etapa 01

- Quais as variáveis envolvidas no experimento?
- Qual o nível inicial da água?
- Os dados da simulação foram representados graficamente. O número de bolas de golfe representa uma variável independente. Dessa forma o intercepto, no eixo, que representa o nível da água é de quantos centímetros? Justifique.
- Qual a taxa de variação média do nível da água em relação ao número de bolas de golfe?

- e) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre o nível da água e o número de bolas. Essa relação é uma função? Justifique.
- f) É possível adicionarmos mais uma bola de golfe no copo? Justifique.

Etapa 02

Supondo que queremos alterar o valor da taxa média no nível da água em relação ao número de bolas no experimento dado. Quais condições aumentariam o valor dessa taxa média? **Marque a(s) opção(ões) correta(s) com um x.**

- Diminuir o diâmetro do copo de vidro.
- Soltar duas bolas no copo ao mesmo momento.
- Adicionar 6 centímetros de água ao copo.
- Adicionar bolas de golfe no copo de vidro a uma taxa média mais rápida.
- Usar bolas de golfe maiores.

Etapa 03

Se repetíssemos a simulação, porém com um copo de vidro diferente e supondo que o novo copo de vidro terá um raio menor que o original. A taxa média com relação ao nível da água muda? Justifique.

CAPÍTULO 5 – ALTURA DO EDIFÍCIO

Na Figura 17 tem-se um registro de como aparece a tela inicial do capítulo 5: Altura do Edifício¹³, no GeoGebraBook.

¹³ Disponível em: <https://ggbm.at/PDFAXxs8>

Figura 17: Altura do Edifício

The screenshot shows the GeoGebra web interface. On the left is a sidebar menu with the following items: 4 BOLAS DE GOLFE, 5 ALTURA DO EDIFÍCIO (highlighted), Orientações, Altura do Edifício, Situação-Problema em PDF, 6 CAIXA D'ÁGUA, 7 ALUGUEL DE BICICLETAS, 8 REPRESA DE ÁGUA, and 9 LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS. The main content area is titled '5 ALTURA DO EDIFÍCIO' and contains the following text: 'Nesta folha de trabalho apresentamos um applet dinâmico seguido de uma sequência de questões para o estudo do Conceito de Função. O recurso tecnológico oferece um ambiente confortável para apresentação e desenvolvimento do tema. As características dinâmicas do applet estimulam o usuário a responder questões difíceis de serem exploradas apenas no ambiente clássico do lápis e papel.' Below the text are three preview thumbnails: 'Orientações' (a beach scene), 'Altura do Edifício' (a graph with a table), and 'Situação-Problema em PDF' (a document page).

Fonte: o autor.

No ícone **“Orientações”**, disponibilizamos as questões para motivação inicial da aula, com objetivo já escrito anteriormente. Como a situação-problema trata da altura de edifícios em cidades litorâneas, deixamos como curiosidade um vídeo¹⁴ que versa sobre o maior edifício do Brasil. Este edifício localiza-se na cidade litorânea de Balneário Camboriú, no estado de Santa Catarina.

Já no ícone **“Altura do Edifício”**, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de trabalho, é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação da situação-problema e a representação tabular e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das percepções.

A seguir, apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 5, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 18, e as questões propostas:

Objetivos:

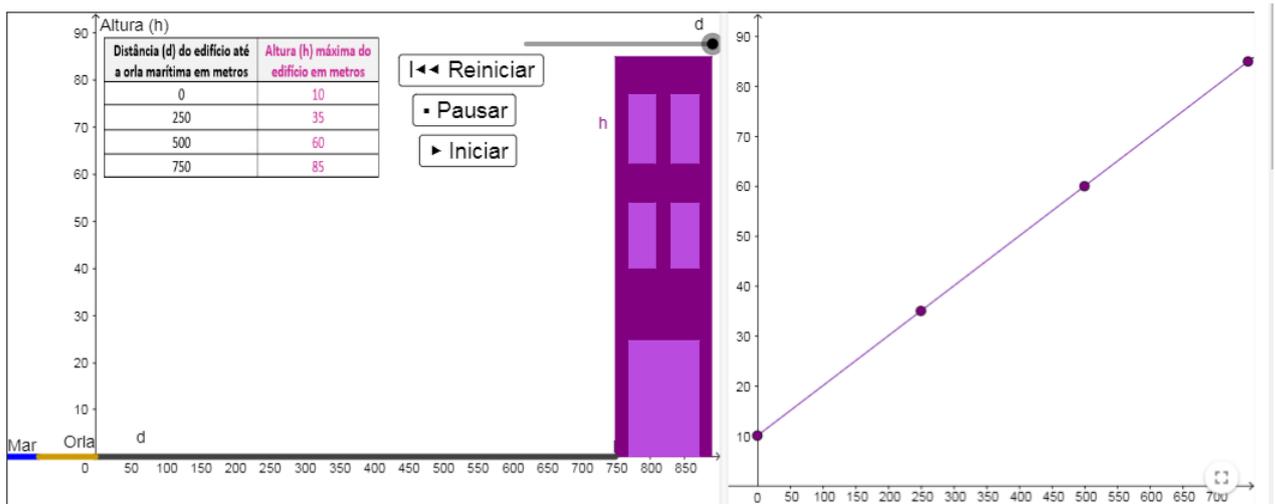
- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter a lei de formação da função.

¹⁴ Disponível em:< <https://www.youtube.com/watch?v=KoVtTyMzyIM>> Acesso em: 30 jan. 2019.

Situação-Problema

(UFPB - Adaptada) Em certa cidade litorânea, a altura máxima (h) permitida para edifícios nas proximidades da orla marítima é dada pela função $h(d) = md + n$, em que m e n são constantes reais e d representa a distância, em metros, do edifício até a orla marítima. De acordo com essa norma, um edifício localizado exatamente na orla marítima tem a altura máxima permitida de 10 metros, enquanto outro edifício localizado a 500 metros da orla marítima tem a altura máxima permitida de 60 metros. Tais informações podem ser visualizadas, **clcando no botão iniciar** ou **movendo o controle deslizante d** para após, responder aos questionamentos.

Figura 18: Imagem do *applet* do capítulo 5



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

- Quais as variáveis envolvidas na situação-problema?
- Qual a distância inicial, em relação à orla marítima, em metros, de um edifício que possui 10 metros de altura, sabendo que essa altura é a máxima permitida?
- Qual a taxa de variação média da altura máxima de um edifício em relação à distância da orla marítima?

- d) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da situação-problema, você consegue estabelecer uma relação matemática entre a altura máxima permitida de um edifício e a distância dele até a orla marítima. Qual é essa relação?
- e) Qual a altura máxima permitida de um edifício que será construído a 100 metros da orla marítima?
- f) É possível fazer uma estimativa da altura máxima permitida de um edifício com a relação matemática que você estabeleceu. Qual domínio, ou seja, distância de um edifício até a orla marítima seria adequado para esta função fazer sentido real?

CAPÍTULO 6 – CAIXA D'ÁGUA

Na Figura 19, tem-se um registro de como aparece a tela inicial do capítulo 6: Caixa d'água¹⁵, no GeoGebraBook.

Figura 19: Caixa d'água



Fonte: o autor.

Nesta folha de trabalho, o ícone “**Orientações**” oferece as questões para motivação inicial da aula, com objetivo já escrito anteriormente. Como a situação-problema trata de caixa d'água, deixamos como curiosidade um vídeo¹⁶ que informa como deve ser feita a limpeza dessas caixas.

Já no ícone “**CAIXA D'ÁGUA**”, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de

¹⁵ Disponível em: <https://ggbm.at/sjvk9aps>

¹⁶ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=XL3bHvChTis>> Acesso em: 30 jan. 2019.

trabalho, é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação da situação-problema e a representação tabular e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das percepções.

A seguir apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 6, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 20, e as questões propostas:

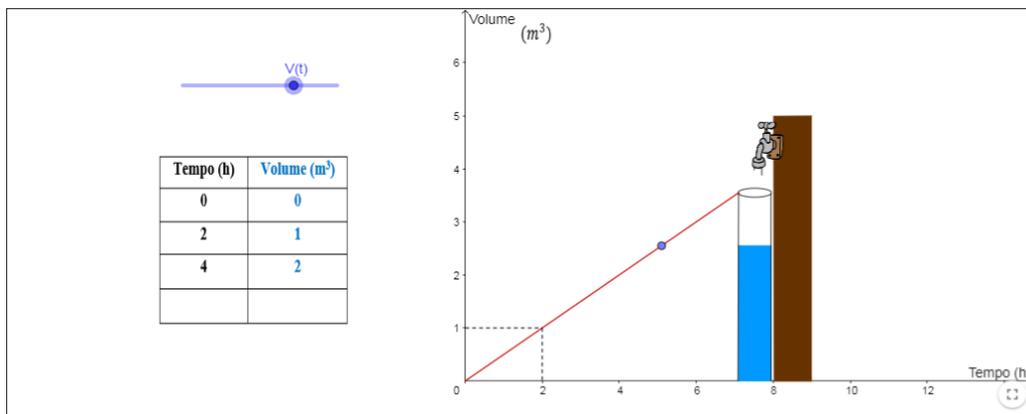
Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter a lei de formação da função.

Situação-Problema:

Uma caixa de água de forma cilíndrica é alimentada por uma torneira. Aberta a torneira, o volume da caixa de água vai aumentando em função do tempo, segundo o gráfico apresentado no *applet*. Sabendo que o volume dessa caixa é de 3,8 metros cúbicos e que a caixa estava vazia quando a torneira foi aberta, utilize o **controle deslizante $V(t)$** para ver o que acontece e responda as questões propostas.

Figura 20: Imagem do *applet* do capítulo 6



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

- Quais as variáveis envolvidas na simulação?
- Qual o volume inicial da água?
- Qual a taxa de variação média do volume da água em relação ao tempo?
- Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre o volume e o tempo. Qual é essa relação? Essa relação é uma função? Justifique.
- Qual o tempo que a torneira deverá permanecer aberta para encher completamente a caixa de água?

CAPÍTULO 7 – ALUGUEL DE BICICLETAS

Na Figura 21, tem-se um registro de como aparece a tela inicial, do capítulo 7: Aluguel de Bicicletas¹⁷, no GeoGebraBook.

¹⁷ Disponível em: <https://ggbm.at/zf3sncgg>

Figura 21: Aluguel de Bicicletas

The screenshot shows the GeoGebra web interface. On the left is a sidebar menu with the title 'COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO' and a list of seven topics. The seventh topic, '7 ALUGUEL DE BICICLETAS', is highlighted. The main content area has the title '7 ALUGUEL DE BICICLETAS' and a paragraph of introductory text. Below the text are three preview cards: 'Orientações' with a bicycle image, 'Aluguel de Bicicleta' with a line graph, and 'Situação-Problema em PDF' with a document icon.

Fonte: o autor.

No ícone “**Orientações**”, temos as questões para motivação inicial da aula, com objetivo já escrito anteriormente. Como a situação-problema trata de bicicletas, deixamos como curiosidade um vídeo¹⁸ que exhibe como um professor de Matemática utiliza esse tema para ensinar Matemática e ainda auxiliar profissionais de Educação Física.

No ícone “**Aluguel de Bicicletas**”, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de trabalho, é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação da situação-problema e a representação tabular e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das percepções.

A seguir, apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 7, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 22, e as questões propostas:

Objetivos:

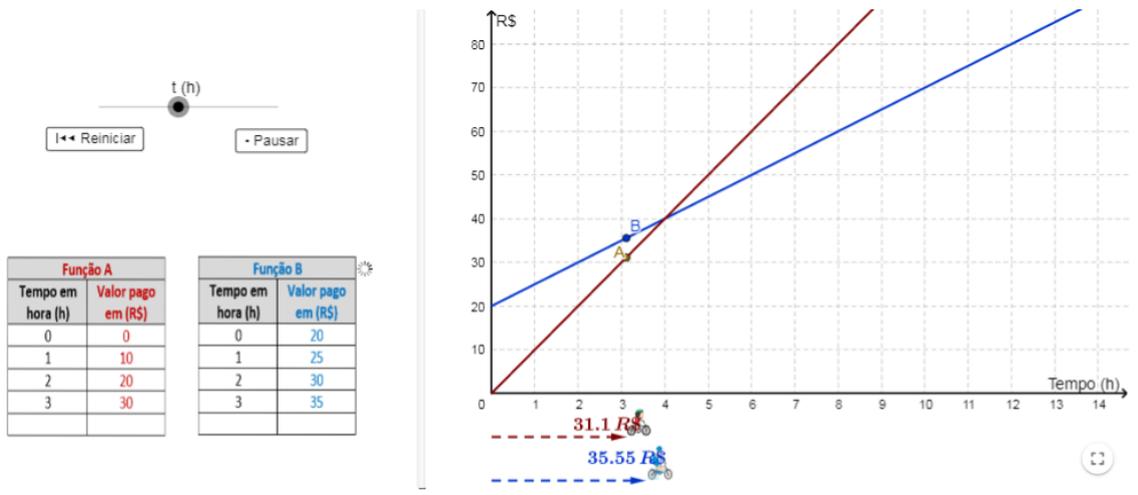
- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter a lei de formação da função.

¹⁸ Disponível em: <<https://globoplay.globo.com/v/2155878/>> Acesso 30 jan. 2019.

Situação-Problema:

O gráfico apresentado no *applet* indica duas opções de preços para locação de bicicletas a turistas. Responda aos questionamentos abaixo utilizando o *applet* para verificar os preços de cada locadora.

Figura 22: Imagem do *applet* do capítulo 7



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

- Nas duas locadoras, o valor a ser pago está em função de qual variável?
- Qual locadora possui uma taxa fixa de administração? Qual o respectivo valor? Justifique.
- Em que tempo o valor a ser pago para locadora da bicicleta é o mesmo para as duas opções? Qual é esse valor?
- Se um turista pretende alugar uma bicicleta por um período de 3 horas, qual é a opção mais barata para ele? Justifique
- Acima de quantas horas a opção B é mais vantajosa?
- Qual a taxa de variação média do preço do aluguel pago na locadora A em relação ao tempo? Explique como chegou ao resultado.
- Qual a taxa de variação média do preço do aluguel pago na locadora B em relação ao tempo? Explique como chegou ao resultado.

- h) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre o preço pago para as locadoras A e B e o tempo. Essas relações são funções? Quais são essas relações? Justifique.

CAPÍTULO 8 – REPRESA DE ÁGUA

Na Figura 23, tem-se um registro de como aparece a tela inicial, do capítulo 8: Represa de Água¹⁹, no GeoGebraBook.

Figura 23: Represa de Água



Fonte: o autor.

No ícone “**Orientações**”, temos as questões para motivação inicial da aula, com objetivo já escrito anteriormente. Como a situação-problema trata sobre represas de água, deixamos como curiosidade um vídeo²⁰ que explica o funcionamento de uma represa.

Logo, no ícone, “**Represa de Água**”, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de trabalho, é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação da situação-problema e a representação tabular e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das suas percepções.

¹⁹ Disponível em: <https://ggbm.at/wzxbaTR3>

²⁰ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JlPhAjolmYI>> Acesso 30 jan. 2019.

A seguir, apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 8, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 24, e as questões propostas.

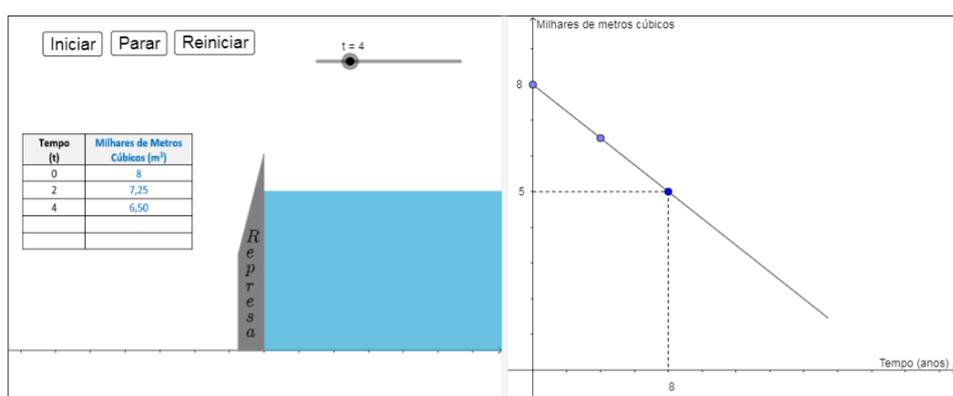
Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter a lei de formação da função.

Situação-Problema:

Ao ser inaugurada, uma represa possuía 8 mil m^3 de água. A quantidade de água da represa vem diminuindo anualmente (vide o *applet*). O gráfico mostra que a quantidade de água na represa 8 anos após a inauguração é de 5 mil m^3 . Sendo mantida essa relação de linearidade entre o tempo e a quantidade de água em m^3 , responda aos questionamentos abaixo, utilizando o *applet*.

Figura 24: Imagem do *applet* do capítulo 8.



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

- Quais as variáveis envolvidas na simulação?
- Qual a quantidade inicial da água?

- c) Os dados da simulação foram representados graficamente. O tempo representa uma variável independente. Dessa forma o intercepto, no eixo das ordenadas, que representa a quantidade da água pode ser representado por qual ponto?
- d) Qual a taxa de variação média da quantidade de água em relação ao tempo? Explique como chegou ao resultado.
- e) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre a quantidade de água e o tempo. Qual é essa relação? Essa relação é uma função? Justifique.
- f) Em quantos anos, após a inauguração, a represa terá 2 mil m^3 de água?

CAPÍTULO 9 – LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Na Figura 25, tem-se um registro de como aparece a tela inicial do capítulo 9: Lançamento de Projéteis²¹, no GeoGebraBook.

Figura 25: Lançamento de Projéteis



Fonte: o autor.

No ícone “**Orientações**”, temos as questões para motivação inicial da aula, com objetivo já escrito anteriormente. Como a situação-problema trata sobre

²¹ Disponível em: <https://ggbm.at/qw5MaauD>

lançamento de projéteis em movimentos parabólicos, deixamos como curiosidade um vídeo²² que ensina como fazer uma catapulta.

Já, no ícone, “**Lançamento de Projéteis**”, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de trabalho é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação da situação-problema e a representação algébrica, tabular e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das percepções.

A seguir apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 9, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 26, e as questões propostas.

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter o valor de máximo ou de mínimo de uma função quadrática.

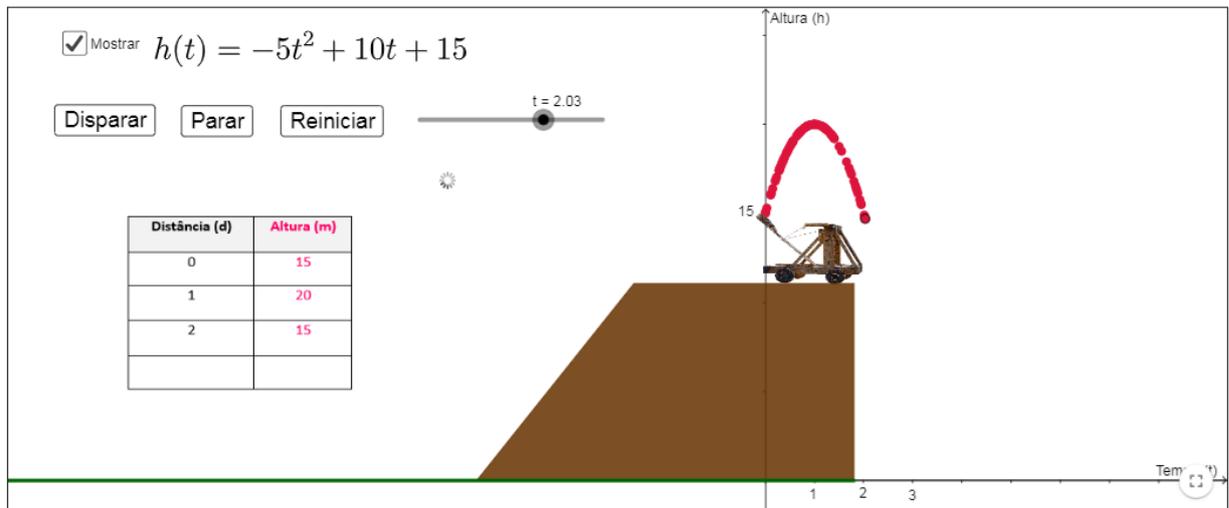
Situação-Problema:

Projéteis ao serem lançados, descrevem trajetória parabólica. A altura h em metros, de uma pedra lançada num lago, a 15m de sua superfície é dado por $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ em que t representa o tempo em segundos. Considere $t = 0$ como o instante do lançamento da pedra, e assim, sua trajetória pode ser visualizada no *applet*. Responda aos questionamentos que seguem, utilizando esse *applet*.

²² Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?list=PLYjrJH3e_wDMrQ5U7YjFwTquX513ulLBY&v=JRg4dc71Scs>
Acesso 30 jan. 2019.

Figura 26: Imagem do *applet* do capítulo 9



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

- Quais as variáveis envolvidas na simulação?
- Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, é possível identificar o intercepto no eixo das ordenadas, que representa o instante de lançamento da pedra. Esse intercepto pode ser representado por qual ponto?
- Qual a taxa de variação em cada intervalo de tempo apresentado na tabela?
- A parábola que representa a função intercepta o eixo das ordenadas no ramo crescente ou decrescente? Justifique.
- Após o lançamento da pedra, ela tocará o lago em que instante? Caso não fossem apresentadas as representações (em tabela e gráfica), como você chegaria a esse resultado?
- A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo?
- O eixo de simetria intercepta o eixo das abscissas em qual ponto? Justifique.
- Que ponto representa as coordenadas do vértice da parábola? Esse ponto é de máximo ou de mínimo?
- Qual o conjunto imagem dessa função?

CAPÍTULO 10 – SINALIZADOR

Na Figura 27, tem-se um registro de como aparece a tela inicial do capítulo 10: Sinalizador²³, no GeoGebraBook.

Figura 27: Sinalizador



Fonte: o autor.

Nesta folha de trabalho, o ícone **“Orientações”** apresenta as questões para motivação inicial da aula, com objetivo já escrito anteriormente. Como a situação-problema trata sobre sinalizadores náuticos e movimentos parabólicos, deixamos como curiosidade um vídeo²⁴ explicando como acionar um sinalizador em alto-mar.

Já no ícone **“SINALIZADOR”**, apresentamos a folha de trabalho com os objetivos, a situação-problema, o *applet* e as questões propostas. Nesta folha de trabalho é possível o aluno perceber, no mesmo ambiente e ao utilizar o *applet*, a visualização da simulação da situação-problema e a representação algébrica, tabular e gráfica. Após o aluno é convidado a responder às questões propostas para formalização das percepções.

A seguir, apresentaremos detalhadamente o conteúdo da folha de trabalho do capítulo 10, ou seja, os objetivos, a situação-problema, a imagem do *applet*, ilustrado pela Figura 28, e as questões propostas.

²³ Disponível em: <https://ggbm.at/vpzg2p2r>

²⁴ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=7ASF0H3Sgk0> Acesso 30 jan. 2019.

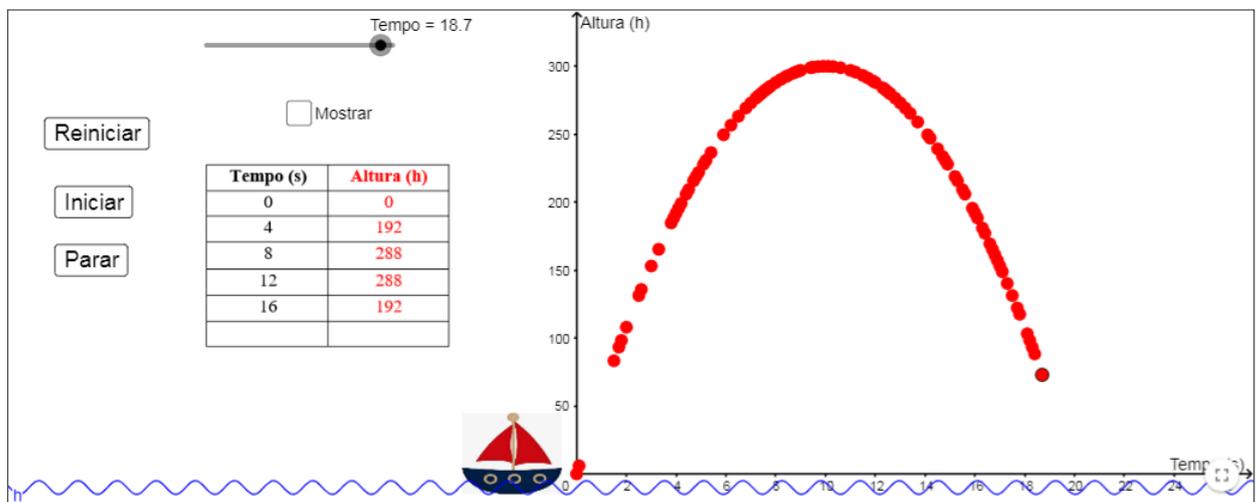
Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas;
- Visualizar a função em diferentes registros de representação;
- Estabelecer conjecturas com base na simulação apresentada;
- Obter o valor de máximo ou de mínimo de uma função quadrática.

Situação-Problema:

O capitão de um barco percebeu que iria naufragar e lançou um sinalizador para avisar a guarda costeira. O sinal luminoso viajou em trajetória de arco de parábola. O trajeto do sinal luminoso foi descrito pela função $h(t) = 60t - 3t^2$, sendo h a altura do sinal, em metros, e t o tempo decorrido após o disparo, em segundos. Diante da circunstância descrita, utilize o *applet* para responder aos questionamentos que seguem:

Figura 28: Imagem do applet do capítulo 10



Fonte: o autor.

Questões Propostas:

- a) Quais as variáveis envolvidas na simulação?

- b) Após o lançamento do sinalizador, ele tocará o mar em que instante? Caso não fossem apresentadas as representações (em tabela e gráfica), como você chegaria a esse resultado?
- c) Qual foi a altura do sinal luminoso após 5 segundos de disparo?
- d) Qual a altura máxima que o sinal luminoso atingiu? Em que instante?
- e) Que ponto representa as coordenadas do vértice da parábola? Esse ponto é de máximo ou de mínimo?
- f) Qual a taxa de variação em cada intervalo de tempo apresentado na tabela?
- g) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, é possível identificar uma mudança de comportamento (crescimento e decrescimento). Quais os intervalos de crescimento e decrescimento?
- h) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo?
- i) O eixo de simetria intercepta o eixo das abscissas em qual ponto? Justifique.
- j) Qual o conjunto imagem dessa função?
- k) Ao atingir 288 metros, o sinal luminoso havia viajado quantos segundos? Considere o período de descida do sinal e não o de subida até seu ponto máximo.
- l) Se o aviso for lançado de uma plataforma de 10 metros de altura, qual a altura máxima que o sinal luminoso atingirá?

CAPÍTULO 11 – MANUAL

O capítulo 11 destina-se a professores e futuros professores que queiram aprender a usar o GeoGebra. Nele, deixamos três links de acesso a manuais e tutoriais, basta clicar naquele que desejar: manual da plataforma GeoGebra²⁵ de autoria do Professor Jorge Cássio Costa Nóbrega (este foi o que utilizamos para aprender o que não sabíamos e sanar as dúvidas que surgiram na produção deste Produto Educacional), manual e tutoriais do próprio site do GeoGebra.

CAPÍTULO 12 – DEIXE SUA OPINIÃO

Neste capítulo o usuário pode deixar comentários como: sugestões, críticas e dúvidas. O objetivo deste capítulo é possibilitar a melhora deste Produto

²⁵ Disponível em: <https://ggbm.at/K8PybR8R> Acesso 30 jan. 2019.

Educacional sempre que necessário, em vista de que não se trata de um material acabado e está em constante evolução. Logo, sugestões e críticas sempre serão bem-vindas. A Figura 29 ilustra a tela desse capítulo ao acessar o link²⁶.

Figura 29: Capítulo 12 – Deixe sua Opinião

COVARIANÇA E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos

Link do GeoGebraBook: <https://ggbm.at/qdk8tjem>

*Obrigatório

Espaço para deixar comentários, sugestões e/ou críticas sobre o produto educacional "COVARIANÇA E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos" *

Sua resposta

ENVIAR

Fonte: o autor.

CAPÍTULO 13 – REFERÊNCIAS

O capítulo 13 apresenta todas as referências utilizadas ao longo da elaboração do Produto Educacional. A Figura 30 ilustra a tela inicial deste capítulo. Clicando no ícone aparecerão todas as referências utilizadas.

²⁶ Disponível em: <https://goo.gl/forms/XNO9BQ4dogDXPFp43>

Figura 30: Tela inicial do capítulo 13

Fonte: o autor.

CONSIDERAÇÕES

As folhas de trabalho do capítulo 3 (Comprimento da Circunferência) e do capítulo 4 (Bolas de Golfe) foram experimentadas com um grupo de alunos do primeiro ano do Ensino Médio, o que possibilitou que verificássemos o funcionamento da ferramenta Grupos do GeoGebra e analisássemos os resultados obtidos por meio das respostas dos participantes. Com isso, conseguimos implementar melhorias no material. Os dados e percepções poderão ser consultados na dissertação que se refere esse Produto Educacional, intitulada: “OBJETOS DINÂMICOS DE APRENDIZAGEM PARA EXPLORAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA PERSPECTIVA DA COVARIAÇÃO”.

As principais contribuições resultantes dessa experimentação foram o aprimoramento das questões propostas às situações-problemas e a construção de atividades que possibilitassem ao aluno reconhecer o comportamento da Função numa situação cotidiana, conforme explicado no capítulo 02, para que os professores tenham melhores condições de analisar o que os alunos já sabem sobre Função e quais habilidades ligadas ao raciocínio covariacional são ou não utilizadas por eles. Dessa forma, acreditamos que o professor poderá direcionar melhor a abordagem do conteúdo.

Ao aplicar as folhas de trabalho na prática citada acima, ficou evidente que os *applets* foram potencializadores para que os estudantes pudessem escrever suas conclusões após a simulação, o que indica que esse material torna-se um facilitador para compreensão do conceito de função e para a percepção da covariação existente entre duas grandezas simultaneamente. A prática também demonstrou o quanto a ferramenta Grupos oportuniza a interação virtual entre aluno e professor, tornando o feedback dado pelo professor um meio para que o aluno possa construir ou reconstruir conceitos que não tenham aprendido.

Esperamos que esse produto educacional possa colaborar efetivamente com professores e alunos, em especial ao ensino e aprendizagem do conceito de função vinculado ao despertar do raciocínio covariacional. Da mesma forma, esperamos que este material possa encorajar os professores a utilizarem a tecnologia digital para ensinar Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Luísa Silva; KAIBER, Carmen Teresa. REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSEMÍÓTICO. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS**, v. 2, n. 14, 2014. BRASIL.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Aprendendo matemática com o Geogebra. **São Paulo: Editora Exato**, 2010.

Base Nacional Comum Curricular/ Ministério da Educação – Brasília : Ministro de estado da educação: Mendonça Filho; Secretaria executiva: Maria Helena Guimarães de Castro; Secretaria de educação básica: Rossieli Soares da Silva, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 07 set. 2017

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

LEMKE, Raiane; SILVEIRA, Renata Feuser; SIPLE, Ivanete Zuchi. GeoGebra: uma tendência no ensino de matemática. In: **II COLBEDUCA** - Colóquio Luso-Brasileiro de Educação, 2016, Joinville. **II COLBEDUCA** - Colóquio Luso-Brasileiro de Educação, 2016. v. 1. p. 607-619. Disponível em: <<http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8413>>. Acesso em: 19 set. 2017.

ORFALI, Fabio. **A conciliação das ideias do cálculo com o currículo da educação básica: o raciocínio covariacional**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2017.

THOMPSON, P. W., & CARLSON, M. P. (2017). **Variation, covariation, and functions**: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SANTOS, Cláudia A. e INAFUCO, Julio. **Matemática: 1º ano**. Ensino Médio. Ed. Edebe, 2015.

SILVEIRA, Renata Feuser. **DINAMICIDADE NO ENSINO DE CÁLCULO**: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra. 2017. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologia da Universidade do Estado de Santa Catarina – Joinville. 2017.

VILLA-OCHOA, Jhony. Raciocínio “covariacional”: O caso da função quadrática. 2011.