

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E ANÁLISE DE LIVROS

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento
de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática
Resolução de Problemas e Análise de Livros

Francisco Régis Vieira Alves

Fortaleza, CE
2014

CRÉDITOS

Presidente

Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação

José Henrique Paim

Presidente da CAPES

José Almeida Guimarães

Diretor de EaD - CAPES

João Carlos Teatini Clímaco

Reitor do IFCE

Virgílio Augusto Sales Araripe

Pró-Reitor de Ensino

Reuber Saraiva de Santiago

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE

Cassandra Ribeiro Joye

Coordenadora Adjunta UAB

Gina Maria Porto de Aguiar

Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática

Priscila Rodrigues de Alcântara

Elaboração do conteúdo

Francisco Régis Vieira Alves

Colaboradoras

Lívia Maria de Lima Santiago

Jane Fontes Guedes

Marília Maia Moreira

Equipe Pedagógica e Design Instrucional

Daniele Luciano Marques

Francisca Venâncio da Silva

Iraci de Oliveira Moraes Schmidlin

Isabel Cristina Pereira da Costa

Karine Nascimento Portela

Kellyany de Sousa Brito Teles

Lívia Maria de Lima Santiago

Luciana Andrade Rodrigues

Maria das Dores dos Santos Moreira

Maria Irene Silva de Moura

Márcia Roxana da Silva Regis

Marília Maia Moreira

Saskia Natália Brígido Batista

Virgínia Ferreira Moreira

Equipe Arte, Criação e Produção Visual

Benghson da Silveira Dantas

Camila Ferreira Mendes

Cícero Felipe da Silva Figueiredo

Denis Rainer Gomes Batista

Elson Felipe Gonçalves Mascarenhas

Érica Andrade Figueirêdo

Luana Cavalcante Crisóstomo

Lucas Diego Rebouças Rocha

Lucas de Brito Arruda

Quezia Brandão Souto

Rafael Bezerra de Oliveira

Suzan Pagani Maranhão

Equipe Web

Aline Mariana Bispo de Lima

Benghson da Silveira Dantas

Corneli Gomes Furtado Júnior

Fabrice Marc Joye

Germano José Barros Pinheiro

Herculano Gonçalves Santos

Lucas do Amaral Saboya

Pedro Raphael Carneiro Vasconcelos

Samantha Onofre Lóssio

Tibério Bezerra Soares

Revisão

Antônio Carlos Marques Júnior

Aurea Suely Zavam

Débora Liberato Arruda Hissa

Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Saulo Garcia

Logística

Francisco Roberto Dias de Aguiar

Secretários

Breno Giovanni Silva Araújo

Laide Ane de Oliveira Ferreira

Auxiliar

Daniel Oliveira Veiga

Nathália Rodrigues Moreira

Yara de Almeida Barreto

Catálogo na Fonte: Tatiana Apolinário Camurça (CRB 3 – Nº 1045)

A474r Alves, Francisco Régis Vieira.

Resolução de Problemas e Análise de livros / Francisco Régis Vieira Alves;
Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2014.
140p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-63953-42-1

1. ANÁLISE DE LIVROS. 2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. 3. TRANSPOSIÇÃO
DIDÁTICA. 4. METODOLOGIA DE ENSINO I. Joye, Cassandra Ribeiro (Diretora
IEAD/IFCE.). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará –
IFCE. III. Universidade Aberta do Brasil – UAB. IV. Título.

CDD – 510.7

Apresentação 7
Referências 137
Currículo 140

SUMÁRIO

Aula 1

Aspectos psicológicos inerentes à atividade solucionadora de problemas em Matemática 8

Tópico 1

Aspectos psicológicos relacionados com a solução de problemas 9

Tópico 2

A manifestação do “insight” na atividade solucionadora de problemas 17

Aula 2

Registros de representação e semiótica na atividade solucionadora de problemas de Matemática 27

Tópico 1

A teoria das representações semióticas 28

Tópico 2

Considerações sobre a atividade solucionadora de problemas 40

Aula 3

Noções de lógica empregadas pelos livros didáticos e as funções polinomiais 47

Tópico 1

Noções de lógica empregadas pelos livros didáticos 48

Tópico 2

Funções polinomiais discutidas nos livros didáticos 55

Aula 4

Análise de livros de matemática - Parte I 64

Tópico 1

Análise de livros: estudo do conceito de conjuntos numéricos 65

Tópico 2

Análise de livros: estudo do conceito de funções 72

Tópico 3

Estudo do conceito de função exponencial e logarítmica 81

Aula 5

Análise de livros de matemática - Parte II 90

Tópico 1

Análise da noção de sequências numéricas e progressões 91

Tópico 2

Análise da noção de matrizes e determinantes 106

Tópico 3

Análise da noção de sistemas lineares 114

Aula 6

Análise de livros de matemática - Parte III 119

Tópico 1

Análise das noções de geometria analítica 120

Tópico 2

Análise das noções de trigonometria presentes nos livros didáticos 124

Tópico 3

Análise das noções de números complexos e questões lógicas sobre as definições matemáticas 129

APRESENTAÇÃO

Olá, aluno(a)!

Neste livro abordamos uma matemática que envolve um conhecimento indubitavelmente imprescindível, no que concerne ao saber pedagógico específico do professor de Matemática. Referimo-nos ao conhecimento sobre a qualidade e dos pressupostos adotados nas abordagens de livros didáticos de Matemática, em seus diversos conteúdos. Deste modo, trazemos ao leitor, um momento *sui generis* atinente a uma prática sistemática reflexiva, sobre um dos principais instrumentos didáticos, tendo em vista a estruturação de uma *práxis* fundamentada em sala de aula. Falamos, pois, do livro didático de Matemática. O elemento básico assumido diz respeito ao fato de que a qualidade de um livro didático de Matemática contribui de algum modo, na qualidade de uma transmissão (transposição) didática envolvendo o saber matemático. Destarte, na medida em que conhecemos as debilidades de um compêndio didático, embora razoavelmente conhecido no mercado sedutor de livros texto, desenvolveremos um olhar com mais propriedade, atinente ao cuidado com seu trato, em parceria com os aprendizes. Ademais, com origem na indicação particular de certos conteúdos, trazemos ao leitor (professor) uma série de exemplos práticos e situações-problema que exigem o olhar de vigilância do docente.

Prof. Francisco Régis Vieira Alves

AULA 1

Aspectos psicológicos
inerentes à atividade
solucionadora de problemas
em Matemática

Olá, aluno(a)!

Nesta aula inicial, abordaremos algumas questões pouco visíveis, sobretudo no contexto do ensino e, principalmente, na aprendizagem em Matemática. Sua importância reside no fato de que, a internalização de conceitos matemáticos depende das peculiaridades idiossincrásicas e privadas de cada sujeito, que está imbuído e interessado na resolução de um problema significativo em Matemática. Por isso, nossa primeira discussão será acerca da compreensão e entendimento do fenômeno cognitivo conhecido como ***insight*** ou **momento de iluminação**. Tal fenômeno despertou o interesse de muitos pensadores no contexto da resolução de problemas na Matemática e nas Ciências.

Então, vamos à aula?

Objetivo

- Identificar os aspectos de natureza cognitiva relacionados à resolução de problemas em Matemática

TÓPICO 1

Aspectos psicológicos relacionados com a solução de problemas

OBJETIVO

- Compreender e identificar os aspectos psicológicos relacionados com a solução de problemas em Matemática, bem como suas etapas a serem seguidas

Nesta aula discutiremos as relações entre saber matemático escolar, professor e aluno, com ênfase na atividade solucionadora de problemas. Veremos que a compreensão dos fenômenos de natureza cognitiva é condição *prévia* para o entendimento das escolhas, êxitos, decisões e fracassos de um sujeito, ante à resolução de problemas em Matemática.

Em outras disciplinas, temos enfatizado a importância primordial do domínio de conteúdo específico, do conhecimento dos aspectos históricos/epistemológicos dos conceitos matemáticos, da compreensão da dimensão epistemológica/filosófica daquilo que se vai ensinar, da essencialidade do conhecimento de uma metodologia adequada de ensino, a operacionalização de uma transposição didática efetiva e, por fim, da compreensão, pelo menos em parte, dos mecanismos cognitivos peculiares e inerentes à resolução de problemas em Matemática.

Temos discutido, recorrentemente, fatores preocupantes com que nos deparamos no contexto escolar, no âmbito específico do ensino de Matemática e que, em vários casos, não contamos com pontos de vista ou argumentos consistentes, no sentido de explicar os motivos ou razões pelos quais registramos tamanha repulsa e pouco entendimento, da maioria dos estudantes, com respeito a Matemática.

Temos advertido o professor de Matemática para o fato de que não é uma prática muito interessante desenvolver suas ações com a preocupação predominante voltada ao **ensino** em detrimento de **aprendizagem**. É certo que atitudes e posicionamentos particulares, muitas vezes construídos e elaborados a partir da

anterior formação acadêmica, e as experiências desenvolvidas com seus formadores não são fáceis de serem identificados.

Estas atitudes que indicamos no parágrafo anterior, observadas no contexto do ensino de Matemática são explicadas por Brousseau (2002) que descreve a noção de **contágio epistemológico**. Este **contágio** acontece quando o professor de Matemática, por exemplo, acredita que um bom domínio do conteúdo, o desenvolvimento de uma aula magistral, o enunciado de todos os teoremas, a realização de todas as demonstrações formais e a colocação precisa das **definições formais** garantirão uma boa e sólida aprendizagem. Portanto, depreende de modo equivocado que, sua missão, como professor, se resumirá basicamente a estes pontos e o cumprimento deste ritual.

O **contágio epistemológico** se manifesta, neste caso, quando o professor adquire a crença segundo a qual, basta realizar com precisão suas atividades de ensino, e que irremediavelmente o aluno aprenderá. Não obstante, sabemos que, ações em torno do ensino/aprendizagem não podem assumir esta concepção simplista, reducionista e afetada por uma perspectiva anacrônica de ensino.

Tais **concepções** podem ser observadas quando o professor de Matemática age e leciona de modo sério e rigoroso, pois o conteúdo matemático é rígido e preciso, ou ainda que o professor de Matemática seja meticuloso e sistemático, pois leciona um saber submetido às inferências lineares condicionados pela Lógica Clássica.

As consequências disto no contexto visível, seja da escola ou da universidade, podem ser preocupantes. Neste sentido, na figura 1, exibimos os elementos principais que exigem a figura e a função dinâmica do professor. Assumimos a relevância do fato de que não se pode privilegiar o **ensino** em detrimento da **aprendizagem**, todavia como antever a possibilidade de uma razoável aprendizagem? Como antever entraves no momento real e imediato de uma mediação?

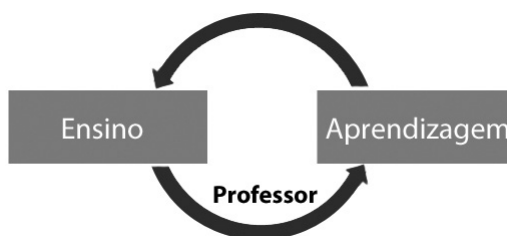


Figura 1 - Relações entre ensino/aprendizagem (elaborado pelo autor)

Não podemos questionar o fato de que o aprendizado depende, em muitos aspectos, do interesse do indivíduo. Por outro lado, recordamos a perspectiva de

Brousseau (1995, p. 62) ao acrescentar um ponto de vista singular, na medida em que argumenta que “o aluno aprende, adaptando-se a um meio que é um fator de contradição, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco semelhante à sociedade humana”. Desta forma, a figura do professor é essencial, como um agente promotor de situações desejáveis de desequilíbrios e adaptações, culminando em uma aprendizagem.

Não obstante, indicar apenas o aluno ou apenas o professor como agente principal neste processo propicia uma visão reducionista no contexto. Ademais, esta visão pode deixar a responsabilidade primordial para o estudante, o que também não é conveniente. Todavia a preocupação, de modo equilibrado, com os dois elementos do binômio ensino-aprendizagem (figura 1) depende, em determinada instância, dos padrões de formação introjetados no ambiente acadêmico (figura 2).



Figura 2 - Fluxograma proposto para uma adequada formação (elaborado pelo autor)

Feita esta explicação inicial e destacando as concepções que assumiremos neste curso figura 2, nos deteremos à discussão da relevância do conhecimento dos caracteres psicológicos de quem aprende e de quem se encontra na atividade solucionadora de problemas de Matemática ou seja, situações específicas em que o sujeito depara uma situação intrigante, no campo da Matemática, a qual estimula sua ação física ou mental.

Inicialmente, o professor deve ter em mente duas fases distintas. A primeira diz respeito às representações mentais mobilizadas ante a uma situação-problema

que chamou a atenção do estudante. Dentre o repertório de representações mentais e, conseqüentemente, o sistema simbólico escolhido para a resolução efetiva do problema, o segundo momento, então, se caracteriza pela colocação em prática das estratégias e conjecturas levantadas.

Ao final, o professor precisa colocar em evidência as estratégias mais exitosas e as estratégias que concorreram para o fracasso na resolução do problema. Notemos que nem sempre o aluno aprende mais a partir de estratégias implementadas que funcionaram. Às vezes, ele adquire uma capacidade mais aprofundada de reflexão a partir dos seus erros.

Para concluir, vamos adaptar o fluxograma proposto por Robert e Benn-Zev (1996, p. 37) e indicar etapas importantes na atividade solucionadora de problemas. Na figura 3, os momentos ou fases destacadas merecem comentários e reflexões aprofundadas.



Figura 3 - Modelo esquemático da resolução de problemas (elaborado pelo autor)

Reparamos que, no que diz respeito ao professor de Matemática, ele apresenta aos seus alunos a informação que incluiu o **saber matemático** o qual, geralmente, envolve a leitura de um texto ou de enunciados no quadro branco ou na tela do computador. Do ponto de vista cognitivo, e nem sempre de modo consciente, o aprendiz relaciona, identifica, seleciona e separa as palavras-chave mais importantes e que se supõe serem relevantes para a situação problema ou, pelo menos, fazem sentido para o leitor.

Na coluna da direita (figura 3), indicamos que os verbos que empregamos, como **selecionar** ou **identificar**, do ponto de vista da cognição, implicam a ativação de modelos mentais, a mobilização de imagens mentais arquivadas na **memória a longo prazo** do sujeito.

Notemos ainda que, de modo consciente ou não, o solucionar de problemas não mobiliza ou ativa **modelos mentais ou imagens mentais** que envolvem representações matemáticas aleatórias e, sim, vinculadas/relacionadas com a situação problema em foco. Assim, no conjunto dos **modelos mentais** que resultam na atividade argumentativa do sujeito, na próxima etapa, se identificam os modelos mentais mais pertinentes àqueles em que o sujeito manifesta um sentimento de confiança.

Em sua tese, Maio (2002) explica que **memórias de primeira ordem** são constituídas de registros sensoriais de longa duração. Tais registros sensoriais possuem uma existência real em nossos cérebros, são independentes e ligam-se por meio de **sinapses nervosas**.

No contexto da Matemática, no ensino de Matrizes, o professor que prioriza o lado algorítmico e operacional não estimula a formação de um registro sensorial visual (apoiado na percepção) a respeito da interpretação gráfico-geométrica de uma matriz. A aprendizagem envolve um *lqfkrj* de situações vivenciadas pelo sujeito e, neste sentido, Maio (2002, p. 115) acrescenta que “se alguém enunciar à criança o nome gato, na sua língua, a criança gerará um registro auditivo noutra região e, se posteriormente ensinarmos à criança a palavra gato, escrita simbolicamente, ela criará outro registro, na região dos símbolos e o ligará aos demais pelas sinapses”.

O exemplo destacado pelo autor é perfeitamente aplicado ao contexto de aprendizagem e resolução de problemas em Matemática. De fato, ao pronunciar palavras como **números complexos**, ao vivenciar situações relacionadas a este conceito, ao presenciar o discurso do professor que traz uma explicação sobre este tema, progressivamente, a ligação das sinapses nervosas vinculadas às memórias particulares a este saber específico evolui e adquire maior sistematização.

Maio (2002, p. 116) ainda destaca que



SAIBA MAIS!

Maio (2002, p. 114) explica que “qualquer criança, ao ver um gato, animal físico, pela primeira vez, terá o registro sensorial visual dele. Se, neste mesmo momento, o gato também miar, a criança terá um registro sensorial auditivo que, ao ser repetido, gerará uma ligação sináptica entre os dois registros”.

“para cada caso uma metodologia, se possível a mais adequada ao grupo e ao tipo de conhecimento envolvido no processo ensino-aprendizagem. Se quisermos que o aluno decore simplesmente o resultado de uma operação ou uma regra simples, basta usar o processo de estímulo/resposta, até criar as sinapses desejadas”.

Outra dimensão do processo de ensino-aprendizagem refere-se à que procura fazer com que o aluno decore algo, sem grandes esforços. Um exemplo disso são as “músicas” ou fórmulas mnemônicas criadas pelos professores para que seus alunos decorem/memorizem regras e propriedades. “Este processo não desenvolve o raciocínio lógico-matemático, como veremos adiante, mas simplesmente usa as memórias de primeira ordem.” (MAIO, 2002, p. 116).

Algumas memórias que não apresentam uma aprendizagem reforçada em determinadas circunstâncias, na maioria das vezes, são apagadas pelo cérebro, devido ao pouco uso **a posteriori**. Em casos desta natureza, os alunos ficam como se não tivessem aprendido pouco ou quase nada. O lado visível deste problema é registrado por quem ministra aulas em Universidades o qual verifica que seus alunos trazem do contexto escolar muitas lacunas acumuladas no contexto escolar.

Retomando o movimento descrito na figura 3, salientamos que, na fase final da solução do problema, o solucionador emprega a estratégia **optimal** que suspeita ter chances de êxito, todavia, o processo não se encerra aí. Com efeito, dependendo da atitude do professor, um novo ciclo de reflexão poderá iniciar, envolvendo a sistematização, generalização e mais elevada abstração de ideias matemáticas.

Porém, do ponto de vista cognitivo, o solucionador de problemas pode ser estimulado a pensar sobre uma classe de objetos que satisfazem uma propriedade verificada ou refutada de um objeto particular. Maio (2002, p. 120) explica o mecanismo envolvido neste caso, quando esclarece que

O nosso cérebro, seguindo a lei geral do nosso Universo que é formar grupos e ordenar a partir dos registros sensórios, memórias de primeira ordem, forma grupos de elementos com propriedades comuns e gera, cria, um novo registro que chamaremos de conjunto, a classe de, a categoria de, o grupo de... Esses registros correspondem às classes de equivalência das relações binárias da Matemática. Chamaremos estes novos registros de memórias de segunda ordem. Estes novos registros correspondem aos substantivos coletivos, ou abstratos.

Assinalamos, com apoio nas considerações deste autor, que a organização

neurológica de dados por parte do cérebro não é aleatória e, sim, hierarquizada em termos de classes, de relações de pertinência.

Mais uma vez, o autor recorda que desde criança,

“vemos vários tipos de gatos, reais, que geram, em nosso cérebro, registros sensoriais de primeira ordem de cada um deles, e podemos reconhecer o gatinho da família e os demais. Todos esses registros sensoriais de primeira ordem possuem uma propriedade em comum: são gatos.” (MAIO, 2002, p. 121).

O nosso cérebro, a partir dessa propriedade semelhante e comum, conjunto ou classe de características comuns, proporciona a formação de um novo registro que é chamado de: **o gato, ideia de gato, conceito de gato, classe dos gatos, categoria dos gatos, ou conjunto de gatos**, ver figura 4.



Figura 4 – Formação de novo registro

Na aprendizagem em Matemática ocorre o mesmo mecanismo cognitivo, respeitadas às particularidades. Assim, no contexto da resolução de problemas, o aluno deve conhecer as propriedades particulares de uma função $f(x) = 2x + 3$ (um objeto particular), como também deve possuir ligações sinápticas convenientes que o permitam descrever e prever o comportamento da classe das funções afins ou a classe das funções polinomiais do primeiro grau.

Estes tipos de memória envolvendo classes chamadas de memória de segunda ordem (MAIO, 2002). Podemos abstrair a situação e considerar o conjunto de gatos $G := \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$. Tal atitude que envolve a abstração é frequentemente exigida

na resolução de problemas (ver figura 5). Cada elemento detém uma relação de pertinência com um conjunto maior G. Apresentamos na figura 5 algumas relações de incidência e pertinência.

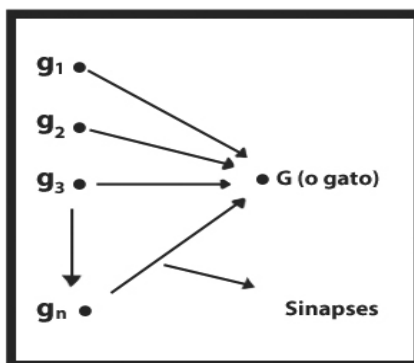


Figura 5 - Exemplo envolvendo a noção de memória de segunda ordem descrita por Maio (2002)

Para concluir este tópico, destacamos as considerações de caráter neurofisiológicas de Maio (2002, p. 208). Com respeito aos elementos indicados por este autor, assinalamos o papel do centro lógico, região, na qual, os cálculos exatos são executados, localizado no lóbulo frontal esquerdo. Numa região bem próxima, temos uma porção do cérebro responsável pela linguagem, que gera o raciocínio Lógico-matemático. Maio (2002) observa que esta modalidade de raciocínio que possui “todas as características de ter uma estrutura de grupo, pois todas as representações formais, ou não, associadas a este centro, são representadas por essa estrutura, e as ligações sinápticas, do tipo soma espacial, dão o suporte neurológico a ela.”.

Evidenciamos ainda, no campo da pesquisa que, todos os estudos realizados os quais envolvem esta modalidade de conhecimento apontam que o raciocínio Lógico-matemático, produz imagens mentais, e os neurologistas patenteiam o papel fundamental do Centro lógico neste processo.

A partir de suas considerações, torna-se claro que os fenômenos de natureza neuropsicológica não podem ser negligenciados no ensino de Matemática. O problema apontado no trecho há pouco considerado indica que, do ponto de vista neurológico, o Centro Lógico deve ser acionado, para que possamos contar com uma aprendizagem satisfatória e duradoura. No próximo tópico, discutiremos a noção filosófica que envolve o ápice da atividade cognitiva, que recebe o nome de *insight* e suas características de difícil identificação.

TÓPICO 2

A manifestação do “insight” na atividade solucionadora de problemas

OBJETIVO

- Apresentar os aspectos psicológicos relacionados com a noção de insight

Os fenômenos de natureza cognitiva intervêm de modo incessante na atividade solucionadora de problemas em Matemática. Por outro lado, apesar de tratarmos de um objeto de natureza extremamente subjetiva (de caráter privado) e pouco visível, em determinados momentos presenciamos, nas atividades dos estudantes, suas consequências e implicações. Possivelmente, por este fato, vários pensadores se detiveram ao estudo e à compreensão da manifestação do *flash de insight* ou o **momento de iluminação**. Neste tópico, discutiremos tal fenômeno cognitivo indispensável à atividade matemática.

Em um contexto específico para a resolução de problemas em Matemática, o significado da palavra *flash de insight* transformou-se em objeto de atenção e uso frequente para vários estudiosos, como Hadamard (1945), Poincaré (1899, 1905, 1908), Polya (1945, 1962, 1982). Mais recentemente, nas investigações desenvolvidas na área de Psicologia Cognitiva, o referido termo é utilizado para nomear “o processo pelo qual um solucionador de problemas subitamente move-se de um estado em que não sabe para um estado mental em que sabe como proceder para resolver o problema” (MAYER (1992 apud DAVIDSON & STERNBERG, 1992, p. 4).

Mayer relaciona o processo de *flash de insight* à compreensão e ao entendimento. Dallob e Dominowki (1992 apud DAVIDSON & STERNBERG, R, 1992), ao referirem-se à manifestação do *flash de insight*, relatam de modo semelhante a possibilidade de uma **plena compreensão** atinente a um evento particular. Essa compreensão é baseada num movimento dialético cognitivo de uma confusão mental, para um estágio psicológico de clareza, de maior discernimento.

Seifert (1992) explicam o *fkpfde q* como a possibilidade de enxergar e compreender a natureza interna das coisas claramente, em especial por intuição (de modo tácito). Neste contexto, ele sublinha que “intuição significa o conhecimento imediato a respeito de algo, sem a consciência imediata do uso do raciocínio.” SEIFERT (1992). Neste caso, observamos que os autores conduzem, no campo da investigação psicológica, o acréscimo do termo intuição à significação da palavra *fkpfde q*, entretanto a relação entre *fkpfde q* e **intuição** nem sempre é esclarecida pelos mesmos autores.



ATENÇÃO!

Na tese de Moraes (2006, p. 20), encontramos interessante discussão filosófica sobre este vocábulo. Ele diz que relacionado ao termo percepção notamos duas vertentes: a vertente internalista que caracteriza a percepção como um processo que resulta de ideias, imagens ou conceitos dados a priori pelo entendimento, e o princípio externalista que caracteriza a percepção como um processo que se inicia através do contato direto do organismo com seu meio, propiciando o desenvolvimento de representações internas que codificam esse mundo.

De fato, Fischbein (1987, p. 3) relata “a pouca atenção dedicada nos estudos em psicologia, para explicar claramente o papel e a natureza da *fkqfađl*, enquanto fenômeno psíquico”. Ele fornece uma perspectiva interessante ao se referir ao termo *fkqfađl*, ressaltando-se que é usado de forma equivalente ao conhecimento intuitivo. Com a intenção de fornecer melhor esclarecimento, Fischbein enfatiza ainda a distinção entre **percepção** e **intuição**. “A percepção se trata de uma cognição imediata” (FISCHBEIN, 1987, p. 13). Ele diz que podemos perceber algo, mas não necessitamos demonstrar a sua existência.

Por outro lado, embora ele declare que a **intuição** também se caracteriza por uma **cognição imediata**, ela ainda se relaciona com

enunciados ou proposições evidentes, que excedem a nossa simples observação sensorial e que podem ser vinculados de algum modo a uma teoria ou modelo, mas por uma via generalizante. Por exemplo, aceitamos que o conjunto dos números naturais é infinito, no entanto, manifestamos certa dificuldade (desconfiança), em adquirir o entendimento relativo ao qual o infinito do conjunto dos naturais é bem menor do que o infinito que representa a quantidade de números reais.

Ademais, “a intuição expressa uma necessidade humana de evitar a incerteza” (FISCHBEIN, 1987, p. 28). Neste trecho, percebemos que cada vez mais buscamos enfraquecer nossas incertezas sobre o que sabemos ou como conhecemos um objeto matemático particular. Nós conhecemos, desenvolvemos algumas crenças

e concepções, afirmamos ou infirmamos algo sobre o objeto específico envolvido, por intermédio da intuição. Contudo, esta forma de intuição é acompanhada, em certos casos, de imagens e representações mentais, produzidos a partir da interação com tal objeto, o que, neste caso, Fischbein (1987, p. 57) denomina de “intuição geométrica”.

Por outro lado, no que diz respeito à validade do que sabemos sobre o objeto matemático, não reduziremos o grau de incerteza a zero, uma vez que a *fkqr fađl* □ *ĩđiđbi* (HANNA, 2001, p. 172). No ambiente específico da Matemática, basta observar, por exemplo, o desastre em se ter considerado a intuição geométrica como fundamentação para a Análise no século XVIII (HERSH, 1997). Já nos séculos seguintes, com o progresso da formalização e maior fundamentação, identificaram-se a falibilidade e a contradição presentes nos conhecimentos matemáticos assentados nesta forma de raciocínio.

Desta maneira, foi observado um movimento de mudança nas crenças e concepções, de ideias predominantes acerca do saber matemático do século XIX. Este movimento buscou a direção de se alcançar a **verdade matemática**, na medida em que se reduzia a incerteza para níveis desprezíveis ao se restringir o papel da intuição, em contrapartida, que se atribuía à hegemonia e proeminência do **método axiomático**, que discutimos na disciplina de Filosofia das Ciências e da Matemática. Contudo, não nos deteremos mais em discussões sob um viés filosófico vinculado ao que nomeamos de “intuição. Daqui em diante, nos restringiremos aos aspectos psicológicos, num contexto da resolução de problemas de Matemática.

Observamos, todavia, um elemento sempre presente nas reflexões do matemático húngaro George Polya (1962) e outros estudiosos: a noção de problema matemático, em que o solucionador possivelmente encontrará condições de manifestar o seu *fkpfdeq* na busca do alcance de determinado objetivo particular.

Neste sentido, Smith (1992, p. 232) define o termo *fkpfdeq* □ *đol_ibj*, para destacar em um contexto que temos um problema não singular, cuja solução pode ser obtida por meio de uma experiência e a atividade solucionadora envolve



VOCÊ SABIA?

O estudo da palavra insight na história das Ciências e da Matemática relaciona-se com a expressão Eureka, que caracteriza uma experiência emblemática vivenciada por Archimedes (GRUBER, 1994, p. 397). George Polya (1887-1985), por exemplo, mesmo admitindo a difícil definição, cunhou o termo heurística, ao se referir à atividade de resolução de problemas que requerem algum insight, entretanto em um âmbito específico da atividade matemática.

um *fkpfde q*. A partir dessa afirmação surgem alguns questionamentos: O que é mesmo um problema? Na investigação de um problema, em que momento temos a possibilidade de identificar o surgimento do *fkpfde q*? Quais as características predominantes do *fkpfde q*? Que espécies de raciocínio permitem explorá-lo? Qual a importância didática do *fkpfde q* no ensino do Cálculo? Que elementos identificados numa metodologia de ensino permitem/estimulam a manifestação de um *fkpfde q*?

Para responder à primeira pergunta, recorremos a Dallob & Dominowski (1992, p. 33) que consideram um problema “quando temos uma situação difícil ou perplexa, como um jogo”. Os autores afirmam que “um problema existe quando percebemos um objetivo para ser atingido não muito claro ou uma tentativa inicial que falha em alcançar tal objetivo”. O ingrediente-chave de um problema é a necessidade da descoberta de uma resposta apropriada para a situação apresentada.

Polya (1962, p. 117) lembra que “o grau de dificuldade é intrínseco a toda situação-problema”, isto é, deve existir dificuldade na situação apresentada para quem tenciona solucioná-lo. Quando não existe obstáculo na resolução, não há problema. Este grau de dificuldade se manifesta de maneira diferenciada em inúmeros aspectos, tanto para os alunos como para o professor.

O papel e a função destes aspectos relacionados a uma situação-problema podem ser esclarecidos com o auxílio da Psicologia Cognitiva, por exemplo, ao *afspjkd rfoj bj ^of^ ab* *il kdl [b] r oq [m]^u* (DALLOB & DOMINOWSKI, 1992, p. 34). Para o aluno, a situação pode envolver uma tarefa relacionada a um objeto matemático familiar, contudo, num contexto inusitado, fazendo recurso da sua memória de curto prazo, enquanto para o professor, os anos e

as experiências vivenciadas com aquele objeto matemático, o auxiliam no processo de enriquecimento de sua memória de longo prazo e a disponibilidade de um extenso repertório flexível de representações mentais, relacionadas com a mesma situação. Situações desta natureza distinguem as duas categorias de memórias.



ATENÇÃO!

Hambrick & Engle (2003, apud DAVIDSON & STERNNERG, 2003, p. 176) lembram que “a capacidade de trabalho de memória se refere ao suprimento cognitivo que pode ser alocado flexivelmente dependendo da demanda da tarefa”. A função da memória é trazer ao foco de atenção do solucionador de problemas representações mentais estimuladas pelo objeto e mantê-las de forma altamente associadas e acessíveis. Deste modo, torna-se natural esperarmos, por parte do professor, uma perspectiva global da situação de previsão e de antecipação das ações necessárias que conduzem ao êxito e também ao fracasso, no caso das intuições equivocadas.

Para o professor *bunboq*, entretanto, deve ficar claro que o momento do *fkpfde q* no aluno caracterizará uma forma privada e idiossincrásica, para compreender um problema, esboçar as estratégias (formular hipóteses) táticas exequíveis e, posteriormente, apresentar sua solução. As estratégias e táticas exequíveis constituem a etapa de compreensão. Sublinhamos que estas duas etapas, “compreensão” e “solução”, na perspectiva que objetivamos, busca a utilização metodológica do *fkpfde q*, podendo apresentar considerável distância e requerendo tempo didático considerável.

Na “compreensão”, temos a mobilização de uma representação adequada do problema. Mayer (1992, apud DAVIDSON & STERNBERG, 1992, p. 4) confirma nossa afirmação, quando explica que um solucionador “constrói uma representação mental interna de um problema que sugere um plano de solução”.

A construção da representação mental ocorre durante a busca da solução e requer uma atenção confrontada a partir da própria situação. Este é o momento característico de ocorrência do *fkpfde q*. O *fkpfde q* compreende e determina o que deve ser feito na resolução da situação-problema. A representação mental constituída no *fkpfde q* requer vigilância para atender as especificidades das situações, uma vez que estas podem encerrar alguma inconsistência. Respondemos, portanto, a segunda pergunta.

Na solução, temos a sistematização das ideias que apresentam possibilidade de êxito e, gradativamente, intervém e se fortalece o raciocínio lógico. Neste momento, temos a necessidade de uma **demonstração formal** justificada, concisa, de maneira formal e rigorosa. Concordamos com Hilbert (1902, p. 61), quando assume a ideia de que “o rigor de uma prova é o requisito para uma solução perfeita de um problema e a prova e/ou a demonstração” finalizam o processo de solução de um problema relevante.

Além disso, o **rigor** assume um determinante papel no momento da solução, uma vez que este fornecerá os elementos de validação e consistência. Nesta etapa, identificamos frequentemente um raciocínio inferencial, isto é, um discurso linear, consistente e fundamentado em um *l omr p* teórico, cada vez mais afetado pela certeza matemática.



SAIBA MAIS!

Balacheff (1988, p. 31) designa o termo **validação** como “a atividade que possui a finalidade de assegurar a validade de uma proposição ou eventualmente produzir uma explicação (prova ou demonstração)”.



ATENÇÃO!

Encontramos na literatura vários escritores (LAKATOS, 1978; POINCARÉ, 1899), que registram a presença da intuição em cada passo do raciocínio silogístico de prova.

Neste momento, a **intuição** deixa de ser preponderante e o **raciocínio lógico matemático** adquire papel de destaque (ver figura 6), conquanto que, registramos a influência da intuição em cada passo de inferência.

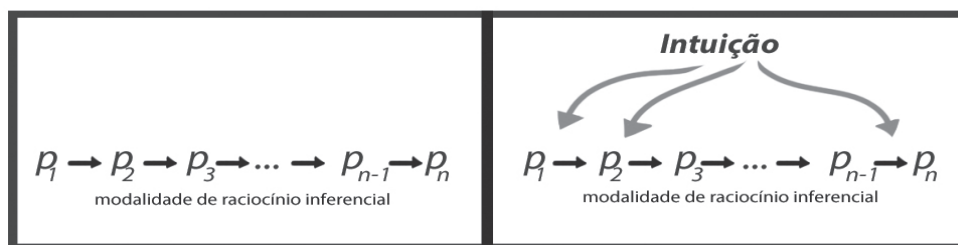


Figura 6 - Descrição de um raciocínio inferencial e linear, em que, cada etapa, intervém a intuição

Recordamos, de modo resumido, as características da **intuição** descritas anteriormente em Hanna (2001): as experiências sensoriais; o caráter **não inferencial**; não se basear em alguma razão ou premissa, mas apenas no próprio episódio intuitivo e na possibilidade do erro ou do equívoco cedem lugar para o paradigma do raciocínio formal, estruturado de forma **axiomática**, entretanto, o raciocínio intuitivo nunca é completamente banido neste processo e o professor de Matemática necessita compreender tais características no sentido de conseguir desenvolver uma mediação didática adequada, no sentido de uma aprendizagem significativa.

Após estas considerações, concluímos que o **raciocínio lógico formal** não é o mais adequado, metodologicamente falando, para a exploração do insight, haja vista que ele mesmo possui algumas características que se opõem às apontadas em Hanna (2001). Tendo em vista tal posicionamento, que **raciocínio você considera** o mais propício ao **insight**? Para responder a esta questão, lembramos que uma das variáveis importantes apresentada na etapa de solução de problemas, e que pode ser explorada pelo professor, diz respeito à transferência e ao grau de similaridade entre o que foi aprendido para problemas inusitados, que detém fatores de ineditismo.

Por exemplo, Bassok (2003) e DAVIDSON & STERNBERG, 2003, p. 344)

diferencia problemas que superficialmente apresentam a mesma aparência, embora as ideias estruturais necessárias para a sua resolução sejam bastante diferentes, e *ml_ibj.^p* que se apresentam superficialmente distintos, ainda que necessitem estruturalmente dos mesmos argumentos para a sua solução.



GUARDE BEM ISSO!

A estes grupos de problemas ele atribui o termo *surface-structure problems*.

Estes grupos de problemas propiciam o **raciocínio por analogia**, forma de raciocínio que mereceu atenção por parte dos matemáticos. Com as reflexões do matemático francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877), evidenciamos a ligação do **raciocínio por analogia** com outra espécie de raciocínio, frequentemente necessário em Matemática, chamado de **raciocínio indutivo (raciocínio por indução)**.

Cournot (1851, p. 92) relaciona os raciocínios quando acentua que “o julgamento por analogia se aproxima do julgamento por indução. O pensamento por analogia conclui semelhanças parciais entre duas coisas do mesmo gênero, em direção às suas semelhanças totais. Portanto, temos conclusões do particular ao geral, o que para Kant, caracterizava a indução”.)

Por sua vez, Polya (1945) diz que tanto o raciocínio por analogia como o raciocínio por indução constituem uma base para o raciocínio heurístico, exigido na resolução de problemas e que requerem o *fkpfde q*. Portanto constatamos duas subclasses de raciocínio que pertencem a uma classe mais ampla, nominado por Polya de **raciocínio heurístico**. Entendemos que esta forma de raciocínio se apresenta mais propícia ao estímulo do *fkpfde q*, contudo, necessitamos, agora, compreender qual o significado do termo “**heurística**”.

Polya (1982) adverte para o fato que o termo “heurística” era conhecido desde a antiguidade, embora assinalar que vários especialistas fazem referência ao mesmo termo, sem um cuidado e atenção necessários. Além disso, **este termo nunca teve sua significação delimitada e aprofundada, consequência de pertencer à lógica, filosofia ou psicologia** (POLYA, 1945). Para facilitar a compreensão do **raciocínio heurístico**, Polya fornece a equação:

$$\frac{\text{metodologia}}{\text{'heurística'}} = \frac{\text{estratégias}}{\text{táticas}} \Rightarrow x = \text{'heurística'} = \frac{\text{metodologia}}{\text{estratégias}} \times \text{táticas}$$

Sua ideia é observar, na equação acima, três termos que admitimos serem conhecidos, enquanto o termo “*u□ebroçj^f^□*” faz o papel de uma **incógnita**.

Desta forma, por meio desta equação concebida por Polya (1982), poderíamos adquirir uma compreensão/entendimento maior do referido vocábulo, inclusive o modo como o *insight* se relaciona com esta modalidade de raciocínio.

Buscando responder ao questionamento sobre o significado da palavra *insight*, concluiremos nossa discussão, destacando ainda quatro características, descritas por Seifer *et al.* (1992, *et al.* DAVIDSON & STERNNERG, 1992) frequentemente atribuídas ao *insight* que podem ser observadas ao longo de uma sessão de ensino do conteúdo, a saber:

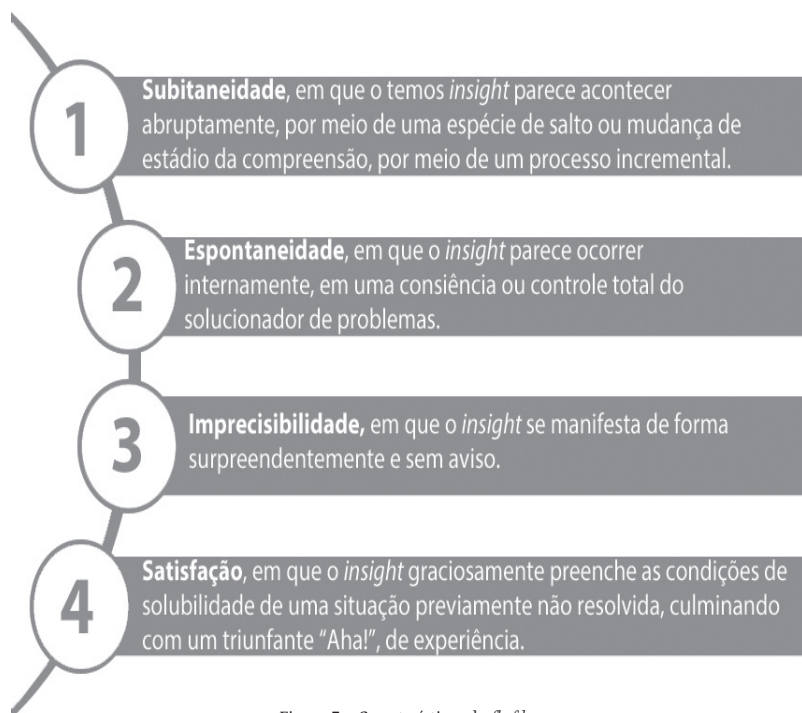


Figura 7 – Características do *insight*



ATENÇÃO!

Advertimos que os elementos indicados anteriormente não são de fácil registro ou identificação empírica, tendo sua ocorrência demarcada em sala de aula.

Para concluir esta aula, destacamos ainda dois pontos importantes. O **primeiro** diz respeito à atenção na atividade solucionadora de problemas, pois, somente através dela, pode-se proporcionar uma real aprendizagem do aprendiz. Tal pressuposto é contrário à visão de um ensino que prioriza a memorização.

De fato, pelo que discutimos no primeiro tópico desta aula, a manifestação de uma memória ou uma ligação sináptica que possibilita a resposta do estudante para uma questão não é certeza de que tal conhecimento é sempre acessível. É necessário um método

adequado para que tal conhecimento adquira sistematização e o sujeito possa sempre contar com este saber particular. Daí a importância de distinguirmos **memória a curto prazo** e **memória de longo prazo**.

Tal esquecimento, do ponto de vista neurológico, indica que as **sinapses nervosas** adequadas e vinculadas a este saber específico foram, ao decorrer do tempo, deixadas de serem acionadas, que as ligações foram paulatinamente enfraquecendo, até sumirem por completo depois de alguns anos de formado.

Com respeito ao **segundo** ponto, nos apoiamos nas considerações de Maio (2002, p. 212) ao declarar que “o Homem é um ser biologicamente estruturado para ser racional, ou seja, possui capacidade biológica para desenvolver o raciocínio lógico-matemático e para produzir Matemática”.

Logo, cabe ao professor encontrar uma metodologia adequada no sentido de conduzir seus estudantes na direção de uma aprendizagem significativa, embora tal percepção exija alguns anos de experiência e tentativas que podem mesmo ser “frustradas”.

Concluimos que nesta aula evidenciamos as relações entre **saber matemático, professor e aluno**, em torno da atividade mais importante e que concorre diretamente para a aprendizagem em Matemática, a atividade solucionadora de problemas em Matemática. Tal atividade, como mencionamos ao longo da aula, não pode ser vista a partir de uma perspectiva reducionista e anacrônica, que concebe a atividade de mediação de ensino do professor, como um elemento suficiente e garantidor neste processo, de uma real aprendizagem imediata (ALVES, 2012).

Assim, comentamos e descrevemos, ao longo do texto, os elementos de natureza cognitiva relacionado ao que chamamos de *fkpfdeq* na atividade solucionadora de problemas. Tais elementos, quando conhecidos e bem estimulados pelo professor, podem gerar atitudes profícuas nos estudantes, a partir de um real entendimento e compreensão do aluno, sobretudo, a manifestação do interesse pela resolução efetiva de um problema, e não a simples repetição automática de um receituário previsto, estabelecido pelo professor *bumboq*.



GUARDE BEM ISSO!

A **memória a curto prazo** é evidenciada quando questionamos o leitor, por exemplo, o que de fato se recorda dos conteúdos do **Cálculo Diferencial e Integral** ou da **Álgebra Linear**, ou ainda sobre os métodos fastidiosos de integração?



ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO

1. Nos primeiros anos de escolaridade, interagimos e compreendemos propriedades matemáticas particulares de objetos. Num estágio, subsequente, o ensino formal nos orienta no sentido de compreender propriedades matemáticas de conjunto de objetos. Por fim, no contexto acadêmico, precisamos compreender as relações e de que modo tais conjuntos ou classes de objetos se relacionam e se combinam. Do ponto de vista neurológico, o que isto tem haver com memórias de 1ª e 2ª ordem?
2. Descreva duas atividades em que exploramos de modo predominante mais a **percepção**, e outra, em que se destaca a **intuição**.
3. Explique o processo matemático de abstração intrínseco ao que apontamos na figura 4 do texto.
4. Diferencie, com suas palavras, os termos percepção e intuição.
5. Forneça exemplos práticos que se encaixam ao que descrevemos na figura 3.

AULA 2

Registros de representação semiótica na atividade solucionadora de problemas de Matemática

Olá, aluno(a)!

Nesta aula, discutiremos alguns problemas relacionados à noção de simbologias, notações e símbolos matemáticos exigidos na atividade solucionadora de problemas. O professor de Matemática não pode perder de vista que o emprego e o desenvolvimento de operações mentais com o amparo de simbologias (e a sua mobilização) exigem, de modo intrínseco, um processo de abstração matemática. A grande questão é observar que o grau de abstração do professor e do aluno são, reconhecidamente, bem diferentes. Por isso é natural esperar a manifestação de sérias dificuldades e entraves ao entendimento por partes dos estudantes, no que concerne à significação dessas estranhas notações, de modo *standard*, adotadas pelo professor *expert*.

Então, vamos à aula?

Objetivos

- Estudar as Teorias das Representações Semióticas
- Compreender a aplicação da Teoria das Representações Semióticas no ensino/aprendizagem em Matemática no contexto da resolução de problemas

TÓPICO 1

A teoria das representações semióticas

OBJETIVO

- Conhecer a Teoria das Representações Semióticas

Um discurso cifrado, a linguagem e os “jargões matemáticos” que encontramos nos livros de Matemática, em todos os níveis escolares, são híbridos, no sentido de que, eles se apropriam, exploram e se apoiam em elementos da língua materna, elementos simbólicos e diagramas, desenhos e/ou figuras.

Neste sentido, são esclarecedoras as colocações de O’halloren (2005), quando declara:

o discurso matemático sucede através da mistura de linguagens gramaticais, simbolismo matemático e imagens visuais, o que significa que a mudança pode ser feita sem a emenda entre estas três fontes. Todavia, cada fonte semiótica possui uma contribuição particular e função no interior do discurso matemático (p. 94, tradução nossa.)

Ora, as simbologias são empregadas pelo homem desde os períodos mais antigos e primitivos. Nos livros de História da Matemática, evidenciamos a evolução dessas simbologias a acréscimo de sofisticação, ao longo dos séculos, dos próprios sistemas de representação simbólica notacional, adotada pelos matemáticos. Certamente, seu marco inicial pode ser registrado na Matemática desenvolvida pelos gregos.

É interessante perceber que esse tipo de ação mental implica a substituição e representação daquilo que desejamos colocar em evidência, seja de modo

consciente ou inconsciente. Com relação a este fato, Duval (1995) explica que sistemas variados da escrita de números, notações simbólicas para objetos, escritas algébricas e lógicas adquirem um estatuto paralelo ao da língua natural para explicar relações e operações, etc. Entretanto, a utilização de uma diversidade de sistemas de representação semiótica é essencial ou apenas cômoda para o exercício do desenvolvimento das atividades cognitivas vinculadas à Matemática? O repertório vasto de simbologias se torna um entrave para um sujeito que busca apreender entidades conceituais matemáticas?

Mais adiante, Duval (1995, p. 1) fornece indícios interessantes para responder este primeiro questionamento ao mencionar que a resposta desta questão “ultrapassa o domínio das Matemáticas e do seu ensino”, uma vez que necessitamos compreender o próprio funcionamento do sistema cognitivo humano. Por outro lado, tornam-se prementes algumas questões subjacentes que dizem respeito à Matemática e sua aprendizagem escolar. Neste sentido, Duval (1995) estabelece que não existe compreensão em Matemática se não distinguimos um objeto (matemático) de sua representação. “É essencial não confundir os objetos matemáticos, isto é, números, funções, retas, etc., com suas representações” (DUVAL, 1995, p. 1-2).

De maneira recorrente, no início de sua obra principal, intitulada **Sémiosis et Pensée Humaine**, Duval (1995) sublinha a peculiaridade da aprendizagem das matemáticas a qual requer atividades cognitivas que exigem a utilização de sistemas de expressões e representações diferenciados da língua natural.

No contexto do ensino e da aprendizagem em Matemática, lidamos com números, simbologias cifradas para objetos conceituais complexos, quantificadores existenciais e universais, escritas algébrico/analíticas e lógicas que podem assumir um papel tão essencial quanto a nossa própria língua natural, no que diz respeito à transmissão das noções matemáticas.

O emprego recorrente de notações particulares em diversos ramos elementares com que nos deparamos no contexto escolar, como na Aritmética, Álgebra e Geometria (e outros ramos da Matemática Avançada), constitui um modo



ATENÇÃO!

Professor do *École Normale Supérieure de Lille*, na cidade de Lille, pesquisador internacionalmente conhecido na área de Educação Matemática, Raymond Duval, ao conceber a *Quelques aspects de la sémiosis mathématique*, forneceu uma leitura e interpretação diferenciada, além de extrair profícuas implicações para certos fenômenos eminentemente de natureza cognitiva da aprendizagem em Matemática.

particular de comunicar, transmitir, generalizar e sistematizar determinadas ideias e concepções, relacionadas com estes e outros ramos da Matemática. Diante destes elementos indicados, a ação do professor não pode negligenciar esses e outros elementos, tendo em vista a realização de uma práxis. Duval (1995) questiona se a utilização de vários sistemas semióticos de representações e expressões é imprescindível ou, de outro modo, é um meio cômodo, mas secundário, para o exercício e desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais.

A tal reflexão, acrescentamos ainda que, além disso, um professor qualquer, mesmo o especialista na área, não obteria uma resposta adequada para tal indagação, amparado apenas num *corpus* teórico formal inerente ao **saber matemático** que, embora reconhecamos seu enorme avanço e evolução, no último século, “fracassa na tentativa de explicar o motivo pelo qual os conceitos científicos matemáticos podem ser efetivamente apreendidos, internalizados, elaborados e organizados (reestruturados) em esquemas cognitivos idiossincrásicos ao sujeito cognoscente” (ALVES, 2012, p. 2).

A perspectiva de Duval, possibilita concluir que um bom ensino de Matemática pressupõe a promoção e, conseqüentemente, a evolução de um repertório de **representações mentais** heterogêneas e flexíveis para cada situação-problema, envolvendo potencialmente uma situação digna de atenção do aprendiz. Note-se que, em seguida, concernentemente à atividade matemática e à resolução de problemas, exigimos a mobilização mental de um registro conveniente, que se constitui e se manifesta na atividade matemática por meio de símbolos (enunciados na língua natural, fórmulas algébricas, gráficos, figuras geométricas, etc). Por influência de Pearce, Duval (1995, p. 3) nomeia tais objetos de representações semióticas e explica que tais representações semióticas “são inteiramente subordinadas às representações mentais e preenchem uma função de comunicação”, entre os sujeitos epistêmicos.

Duval (1995) salienta ainda uma função das representações que se constitui a partir da possibilidade de **codificação da informação**, de modo que a informação pode ser descrita em determinado sistema de tratamento. Outra consequência reside na circunstância de recordar, trazer em nossa memória objetos ausentes e não captáveis pelos nossos órgãos sensoriais. Neste último trecho, indicamos uma relação clara e imediata de dependência entre a percepção e a intuição.

Por exemplo, nos gráficos abaixo, a partir de uma atividade perceptiva relacional entre os **registros geométricos** que constituem gráficos de funções, é

mais simples compreender que, no primeiro caso, existe um ponto de máximo aparentemente no vértice da parábola. De modo tácito, extraímos tal propriedade da figura 1.

No gráfico (fig.1) do meio existe um ponto de mínimo também no vértice e, ao comparar o terceiro gráfico com os anteriores, o observador pode concluir, também por uma atividade perceptiva relacional entre os objetos e tácita, que o terceiro registro geométrico não se trata de uma parábola; deste modo, se espera que os estudantes enfrentem mais dificuldades para compreender suas propriedades particulares que podem ser mais facilmente esclarecidas quando comparado aos outros dois primeiros.

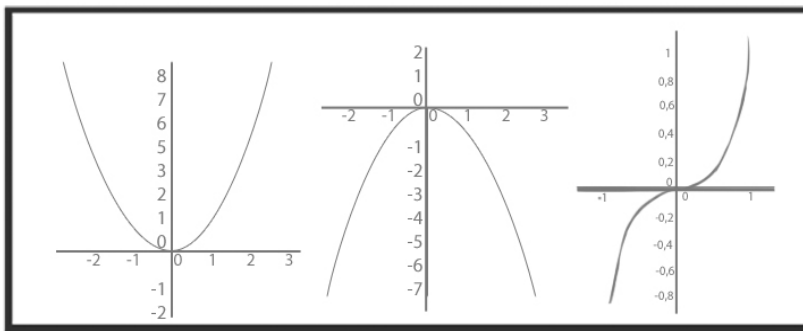


Figura 1 - Atividade de percepção relacional entre gráficos no i^2

Por ultimo, vale destacar que as **representações mentais** dizem respeito a um domínio mais amplo do que das **imagens mentais**; entretanto, ambos os elementos destacados se relacionam e participam de todo raciocínio matemático que, reconhecidamente, propicia a abstração dos conceitos matemáticos. Por exemplo, podemos fechar os olhos e “enxergar” com os “olhos da mente” os gráficos acima, todavia, quanto maior a complexidade do **registro geométrico** ou **registro algébrico**, maior a quantidade de informações a serem processadas no processo de abstração mental.

Por exemplo, vamos considerar duas representações distintas para o objeto matemático que conhecemos por matrizes.

<p>(I)</p> $m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	<p>(II)</p> $m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$	<p>(III)</p> $m = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & h_1 \\ a_2 & x_2 & h_2 \\ a_3 & x_3 & h_3 \end{pmatrix}$
---	---	--

Na segunda representação, a partir de uma análise mais atenta, a notação é menos “carregada”. De fato, é mais simples desenvolver uma apreciação (identificar) de elementos com um índice apenas do que elementos com dois índices, como indicamos primeiramente. A ordem também dos elementos não é aleatória, neste sentido, o matemático escolhe as letras a , b e c . Você pode observar que a ordem poderia ter sido qualquer uma, como no terceiro caso.

Observe que a “noção de representação é essencial em Psicologia, no que se refere ao comportamento com vias à aquisição de conhecimentos” (DUVAL, 1995, p. 23). E, de modo particular, na Matemática, em toda troca de informações, principalmente quando no referimos ao contexto do ensino, os conhecimentos são sistematizados e veiculados de modo cifrado em linguagens próprias desta Ciência.

Sublinhamos a diversidade de representações de registros de representação semiótica para designar o mesmo objeto matemático, em atividades elementares como as que, doravante, indicaremos (ALVES, 2012). Ademais, o domínio de algumas regras operacionais é imprescindível. Por exemplo, vamos considerar as seguintes situações: (i) calcular a

$$\begin{aligned} & \text{a inversa de } f(x) = 2x + 3; \text{ (ii) encontrar a } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}. \text{ (iii)} \\ & |z - 2 - 3i| = 5; \text{ (iv) } |z + 1| = |z - 3|. \end{aligned}$$

Notamos que o **tratamento** dos registros exigido no item (i) é completamente distinto do que é requisitado em (ii). A partir do registro inicial, de modo tradicional, encontramos o seguinte “procedimento” $y = 2x + 3$. Ora, por que não se preserva o registro inicial $f(x) = 2x + 3$? Já identificamos aqui uma **conversão** necessária nesta questão. O resto do tratamento destes **registros algébricos** é conhecido: $y = 2x + 3 \xleftrightarrow[x \text{ por } y]{\text{substituir}} x = 2y + 3 \leftrightarrow 2y = x - 3 \leftrightarrow y = \frac{x - 3}{2}$.

No segundo caso, registramos a aplicação de um tratamento mais complexo. De fato, é necessária a aplicação da definição do produto de matrizes, assim: $\begin{pmatrix} 3a - 2b & a + 2b \\ 3c - 2d & c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$. Mas antes de prosseguirmos, sublinhamos a possibilidade do seguinte registro algébrico $X \cdot A = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$. Note-se que, desde que $\det A = 6 + 2 \neq 0$, podemos empregar outro registro algébrico que designa a matriz inversa A^{-1} , e assim o tratamento $X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1} \therefore X = B \cdot A^{-1}$.

No item (iii) temos o seguinte registro algébrico $|z - 2 - 3i| = 5$, a dificuldade

aqui é a conversão necessária que o aluno precisa visualizar para interpretar o que esta condição significa em termos de registros geométricos, ou melhor dizendo, descrição dos complexos que cumprem esta condição no plano.

Reparamos que $|z - (2 + 3i)| = 5 \leftrightarrow |z - (2 + 3i)| = 5$ e temos que interpretar o mesmo registro algébrico com o significado da localização de todos os complexos $z = x + yi$ que estão a uma distância igual a 5 do ponto $(2,3)$. Note-se que, no que diz respeito à Matemática, realizamos a identificação $(2 + 3i) \equiv (2,3)$ para interpretar $|(x, y) - (2,3)| = 5$ como o módulo da diferença ($\phi = 5$) entre um complexo desconhecido e um complexo conhecido no plano.

No ultimo item temos $|z + 1| = |z - 5|$ ou $|(x, y) - (-1,0)| = |(x, y) - (5,0)|$. Perguntamos ao solucionador de problema onde estão os complexos $z = x + yi$ que cumprem esta condição? O que a mesma representa geometricamente?

Perceba que o registro '1' interpretamos como $(0, 1)$. Enquanto que no registro aritmético '3' realizamos a conversão para o par ordenado $(0,5)$. Assim, o problema está em identificar no plano o lugar geométrico onde as distâncias $|z + 1|$ e $|z - 5|$ são iguais. Na figura 2, vemos o triângulo isósceles do lado direito.

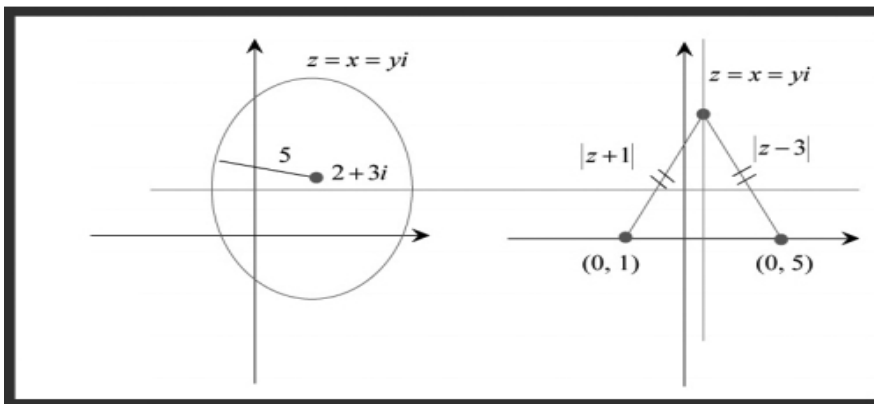


Figura 2 - Registro geométrico que podem auxiliar a resolução das situações problemas

Aqui, fazemos referência a uma operação intrínseca à Matemática. Por exemplo, em Matemática, fazemos a “identificação” de $2 + 3i \equiv (2,3)$, ou ainda $x + yi \equiv (x,y)$. Tal operação é viável graças à definição de uma função que torna tal “identificação” possível. Reparamos que isto não se trata de conversão de registros, e sim, quando nos atemos aos números complexos, considerando o eixo imaginário, através de um ponto, formamos o registro $2 + 3i$.

Formalmente falando, utilizamos o plano para compreender o significado de um número complexo. A identificação nos permite falar que tratam-se da mesma

coisa, entretanto, formalmente falando $a + bi$ é o afixo do ponto (a, b) e o ponto (a, b) é imagem de um complexo $a + bi$.

Por exemplo, quando tomamos ainda o registro $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$. O que de interessante neste registro algébrico é a seguinte interpretação “o produto de dois números complexos pode fornecer um número real, que designamos por $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ ”.

E quando tomamos o plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e tomamos o ponto $(2, 3)$, formamos outro registro particular. A identificação entre os dois objetos nos permite afirmar que tratam do mesmo objeto. Tal operação é diferente no caso de $x + 1$ e $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Tais expressões podem ser vislumbradas como expressões algébricas. Podem ser observadas também como funções polinomiais do tipo $X + 1$ e $\frac{X^2 - 1}{X - 1}$. Podem também serem tomadas como funções do tipo $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Neste caso, à primeira vista podemos pensar que tratam-se de objetos distintos, todavia $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$.

Assim, por meio deste tratamento particular de registros que nominamos de “fatoração”, para valores $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, vemos que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 = f(x)$, portanto, tratam-se das mesmas funções, para valores diferentes de $x \neq 1$.

No contexto de interpretação da teoria de Duval, toda e qualquer ação que executamos sobre o mesmo registro, sem alterar sua natureza e com a aplicação de regras de inferências que incidem sobre um registro, são chamadas de “tratamento”.

Por outro lado, quando produzimos uma ação capaz de alterar a natureza do registro, ora representado no quadro aritmético, ora no quadro algébrico ou geométrico, é chamado de ‘conversão de representações’.

Na figura 3, Santos (2011) explica o processo de conversão de registros. Reparamos que no tratamento de registros, realizamos transformações e aplicamos “regras” no interior do mesmo registro. Mas na conversão, registramos transformações que relacionam o registro inicial diferente do registro final. Ademais, a conversão é a transformação da representação de um “objeto para uma diferente representação desse mesmo objeto no registro de chegada” (SANTOS, 2011, p. 40).



Figura 3 - Conversão de registros relacionada ao conceito de função logarítmica. Fonte: Adaptada Santos (2011)

Entretanto, Santos (2011) aponta um dimensão delicada neste processo ao relatar que a conversão requer a percepção (identificação) da diferença entre o sentido e a referência dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e o conceito do que está sendo representado. Sem essa percepção, a atividade de conversão pode ser incompreensível. O problema fundamental aqui é a dependência de uma capacidade privada e ontológica que conhecemos como “percepção”. Ninguém questiona que a percepção do professor é mais sofisticada e “treinada” do que a percepção do estudante que dirige sua atenção a um conteúdo (ou objeto) pela primeira vez.

Assim, pela figura 3 é fácil para o professor compreender as relações conceituais existentes entre cada registro semiótico explicitado, todavia, o mesmo se pode esperar no que diz respeito ao estudante? Temos aqui um grande problema.

Antes, porém, de prosseguirmos em nossa discussão, enunciaremos três propriedades essenciais relacionadas aos fenômenos de natureza cognitiva. A primeira, como já mencionamos, diz respeito ao ‘tratamento’ de uma representação



SAIBA MAIS!

A exploração de uma diversidade de representações de um mesmo objeto matemático não é regra no ensino de Matemática. Duval (1995, p. 43) reforça nossa ilação, ao constatar que o ensino privilegia a aprendizagem de regras concernentes à formação de representações semióticas e as concernentes ao seu tratamento.



ATENÇÃO!

É importante o professor ficar atento para o fato de que gráficos, desenhos e figuras desempenham um papel destacado na atividade matemática do estudante. Neste sentido, observamos que a utilização de uma figura em uma atividade geométrica, por exemplo, é comum encontramos explicações de que, se utilizássemos somente a apreensão verbal em um enunciado, seria mais difícil a resolução do problema.

semiótica, que, segundo Duval (1995) consiste numa transformação que produz outra representação no mesmo registro. Antes de dispormos de uma determinada representação semiótica, no entanto, devemos contar com uma teoria formal que fornece e define, de modo consistente e preciso, seus próprios objetos, simbolizados por notações matemáticas. Assim, Duval (1995) caracteriza a noção de ‘formação de uma representação’, como a atividade que exprime uma representação mental e salienta que tal atividade implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres do que desejamos representar.

Assim, para que possamos evitar o fortalecimento de rituais de ensino que priorizam a algoritmização, o professor pode explorar a conversão de registros, como os que exemplificamos na figura 4.


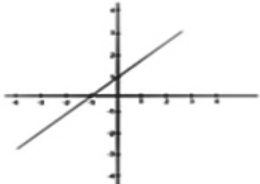
Representação no RLN	Representação no RF
Uma reta é determinada por dois pontos distintos	
Representação no RS	Representação no RG
$y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) \cdot (x - x_A) + y_A$	

Figura 4 - Exemplos de conversão de registros em Karrer & Barros (2011)

As representações apontadas na figura 4 podem ajudar na percepção de relações e hipóteses que não parecem evidentes na representação discursiva; sendo assim, as figuras são meios interessantes que auxiliam, antecipam e facilitam a exploração de diferentes aspectos da situação, assim como “permitem perceber a ideia central de uma demonstração” (MACIEL, 2004, p. 78). Na figura abaixo adaptamos as possibilidades de apreensão figural explicadas em Maciel (2004).



Figura 5 - Descrição das atividades de apreensão figural descritas em Maciel (2004, p. 79)

No que concerne à figura 5, cabe a explicação de Duval (1994), quando sugere uma classificação das modalidades de apreensão de uma figura. Com respeito à **apreensão perceptiva**, Santos (2004, p 79) explica:

a primeira delas é a apreensão perceptiva, a mais imediata das apreensões, ou seja, aquela que permite identificar, reconhecer, imediatamente, uma forma, ou um objeto, seja em um plano seja no espaço. Essa apreensão está somente relacionada com a visualização e com a interpretação das formas da figura na situação.

A **segunda forma de apreensão** é a discursiva, por meio da qual uma figura é vista em relação a uma denominação, uma legenda ou uma hipótese que apresentam alguma de suas propriedades (SANTOS 2004). A **terceira forma de apreensão** é descrita do seguinte modo [...] é a sequência, que está relacionada com a ordem de construção de uma figura. Essa ordem não depende somente das propriedades matemáticas da figura, mas também das necessidades técnicas dos instrumentos utilizados, que podem ser régua e compasso ou os comandos de um menu de um programa de computador.

As operações cognitivas descritas por Duval (1994) possuem um valor inigualável para o professor que delas pode extrair implicações pedagógicas se as explorar de modo consciente. A boa didática aconselha a introdução progressiva de um conceito, assim, em seus momentos iniciais, por meio da visualização, o professor apresenta um diagrama, quer feito no ambiente lápis e papel, quer produzido pelo computador.

Perceba que a construção da figura é condicionada pela própria visão e experiência do mestre (experiência anterior), assim, o professor pode explorar a apreensão discursiva ao atribuir alguma legenda ou frase significativa para a figura. Na **última fase**, o professor não pode efetuar a construção da figura de modo solitário e, sim, com o apoio e sinergia da sua turma. Por fim, o aluno deve acompanhar de modo ativo a construção de uma figura e adquirir a capacidade de explorá-la de modo eficiente.

Vale ressaltar que alguns objetos matemáticos possuem restrições internas, intrínsecas à sua própria natureza e que, em vários casos, o uso da tecnologia pode proporcionar a superação de entraves metodológicos. Por exemplo, um matemático profissional, partindo do registro algébrico $f(x, y) = x^3y - xy^3$ não conseguiria obter os registros gráficos que exibimos na figura 6.

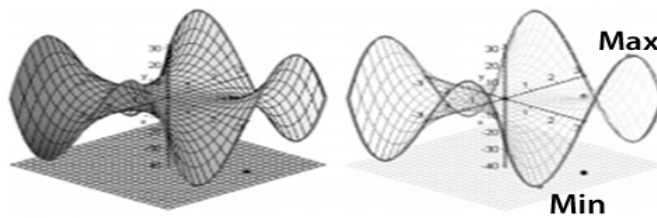


Figura 6 - Registros gráficos em 3D de natureza complexa

Outra dificuldade envolvendo o emprego de registros da língua natural diz respeito à natureza polissêmica do nosso idioma, enquanto que em Matemática, buscamos a monossêmia e precisão dos significados e operações. Por exemplo, na figura 7 temos alguns exemplos que, apesar de formalmente incorretos, envolvem o emprego de uma “lógica pessoal” do solucionador de problemas.

Simplificando um resultado obtido

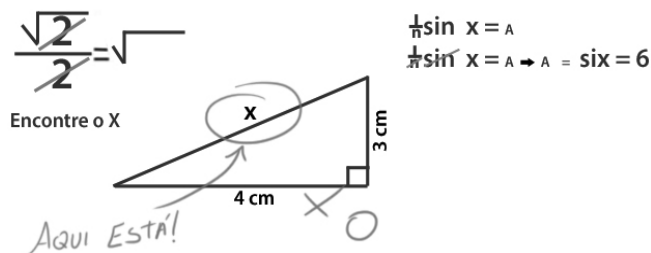


Figura 7 - Exemplos de erros devido ao emprego pouco adequado de registros em língua natural

Note-se que os exemplos da figura 7 envolvem o uso e a interpretação de simbologias particulares da Matemática. Neste sentido, algumas particularidades dos próprios registros induzem determinadas concepções e maneiras de se interpretar ou criar regras pessoais que, do ponto de vista formal, podem ser incongruentes.

Por exemplo, o registro algébrico $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, para $a, b \in \mathbb{R}^+$, pode sugerir a elaboração do seguinte registro algébrico $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou ainda $\sqrt{(-1) \cdot i} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{i}$, que estão em flagrante contradição com definições e propriedades formais da função raiz quadrada $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Para concluir, nesta aula, evidenciamos aspectos importantes da Teoria das Representações Semióticas que podem nos auxiliar no sentido de proporcionar um ensino mais eficiente, na medida em que considera características importantes e necessárias à aprendizagem. No próximo tópico, veremos e discutiremos algumas aplicações desta teoria.

Portanto, assinalamos que a disposição de um repertório mental adequado e flexível está diretamente relacionado com um bom desempenho em Matemática. Não obstante, os sujeitos que manifestam alguma dificuldade maior em Matemática manifestam, de modo geral, um limitado repertório de imagens mentais.

TÓPICO 2

Considerações sobre a atividade solucionadora de problemas

OBJETIVOS

- Compreender aplicações da Teoria das Representações Semióticas
- Identificar questões sob a ótica da Teoria das Representações Semióticas no contexto da resolução de problemas

No tópico anterior discutimos a Teoria das Representações Semióticas concebida por Raymond Duval. A partir deste ponto de vista e de determinados fenômenos cognitivos destacados por ele, torna-se, no mínimo, “imprudente” um ensino de Matemática que desconsidera os saberes mobilizados pelos estudantes quando constroem gráficos, esboçam desenhos ou rabiscos no papel. Assim sendo, nesse tópico, apresentamos algumas situações-problema interpretadas segundo o viés desta fundamentação teórico/prática.

Orienta a Didática da Matemática, iniciar uma aula a partir de um bom problema de Matemática. Apontamos ainda a necessidade de se explorar situações-problema e não apenas exercícios de Matemática que, de modo geral, exigem apenas o tratamento dos registros algébricos (e pode se pautar na aplicação automática de simbologias). Observamos ainda que os problemas discutidos em seguida não se destacam pelo caráter de ineditismo, e sim, pela interpretação diferenciada a partir da teoria que discutimos na seção passada. Vejamos, pois, alguns exemplos de situações-problema.

PROBLEMA 1

Determine explicitamente os coeficientes a , b e c do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ em função dos valores $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$. (FONTE: Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (2007, p. 47)).

Reparamos que este problema é descrito em termos de registros da língua materna e **registros algébricos**. Note-se que o diferencial deste tipo de problema é que em geral, os estudantes se acostumam a efetuar tratamentos sobre os registros algébricos com a intenção de encontrar relações entre os pares (x, y) no gráfico ou a incógnita 'x'.

Neste caso, é necessário o emprego dos seguintes registros algébricos

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ e a partir deste, escrevemos } \begin{cases} f(0) = a(0)^2 + b(0) + c \\ f(1) = a(1)^2 + b(1) + c \\ f(2) = a(2)^2 + b(2) + c \end{cases} . \text{ O resto}$$

$$\text{do tratamento sobre os mesmos é trivial } \begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f(2) = 4a + 2b + c \end{cases} . \text{ O ponto de vista}$$

diferenciado é que os estudantes se acostumam ao tratamento indefectível do registro 'x' como incógnita. Neste caso, os registros a, b e c assumem o papel de incógnita a partir do seguinte tratamento dos registros

$$\begin{cases} c = f(0) \\ a + b + c = f(1) \\ 4a + 2b + c = f(2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a + b = f(1) - f(0) \\ 4a + 2b = f(2) - f(0) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 2f(1) - 2f(0) \\ 4a + 2b = f(2) - f(0) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -2f(1) + 2f(0) \\ 4a + 2b = f(2) - f(0) \end{cases} \\ \{2a = f(2) - f(0) - 2f(1) + 2f(0) = f(0) - 2f(1) + f(2)\} \\ a = \frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2}$$

Realizando o tratamento semelhante dos registros algébricos, a partir do sistema, se escreve $a + b = f(1) - f(0) \leftrightarrow b = f(1) - f(0) - a = f(1) - f(0) - \left[\frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2} \right]$.

PROBLEMA 2

Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética na qual a soma dos n primeiros termos é, para todo $n \in \mathbb{N}$: a) $S_n = 2n^2 + n$; b) $S_n = n^2 + n + 1$.

Note-se que o enunciado é desenvolvido a partir de registros algébricos e a língua materna. Observamos que os registros algébricos $S_n = 2n^2 + n$ e $S_n = n^2 + n + 1$ são formados a partir dos seguintes registros algébricos $f(x) = 2x^2 + x$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, onde $x \in \mathbb{R}$.

(FONTE: Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (2007, p. 75)).

PROBLEMA 3

Consideremos o triângulo $\triangle ABC$ e o ângulo α do vértice apontado na figura abaixo. A partir deste ângulo definimos as seguintes razões $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{cos}\alpha = \frac{c}{a}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$. Perguntamos o que nos “garante” se tomarmos outro triângulo como representante (outro triângulo retângulo em que o ângulo α apareça)? O que nos garante que a definição destas razões estão bem definidas?

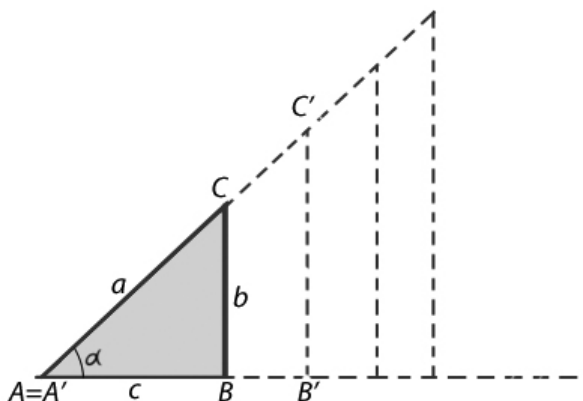


Figura 8 - Desenho esquemático que garante a boa definição das razões trigonométricas

Observe que este problema envolve preocupações eminentemente voltadas ao professor. Quando se questiona se tais razões estão “bem definidas”, na verdade tentamos averiguar que tais definições não podem depender de um representante particular, ou melhor dizendo, se tomamos outro triângulo retângulo $\triangle ABC$ com um ângulo α , as razões devem ser as mesmas. Mas o que torna possível esta definição é a semelhança de triângulos!

Esse e vários outros exemplos podem ser recordados em Matemática e que se relacionam a concepções superficiais em Matemática, mas que exigem uma verificação e cuidado maior do professor.

No próximo exemplo acentuamos a inversão pedagógica necessária em determinados conteúdos matemáticos. De fato, nos livros didáticos, por exemplo, encontra-se a Lei dos cossenos, seu enunciado, sua demonstração e aplicações e exercícios. Atualmente este tipo de sequência pode ser alterada. Assim, no lugar de começar pelo enunciado, sempre que o conteúdo permitir, iniciar a aula com um exemplo ou situação particular, ao alcance dos estudantes, que envolva a referida Lei.

PROBLEMA 4

Consideremos o triângulo abaixo e questionamos como calcular o lado indicado. O professor pode fornecer ou não o registro geométrico que exibimos abaixo. No caso em que não fornece o registro, é um interessante exercício estimular os estudantes na atividade de formação do seu próprio registro geométrico. A tarefa proposta pode ser feita por alunos que ainda não aprenderam a Lei dos cossenos. Uma estratégia possível é decompor a figura em dois triângulos retângulos (lado direito). E com o auxílio das razões trigonométricas desses triângulos, tentaremos identificar as medidas desejadas. Outro pré-requisito nesta situação-problema é o conhecimento do teorema de Pitágoras.

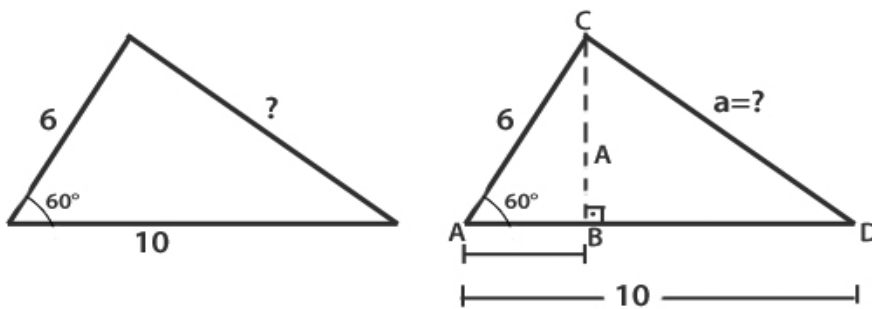


Figura 9 - Resolução de um problema no caso particular

Observe que no triângulo $\triangle ABC$, a partir das razões trigonométricas dos ângulos agudos, o aluno deve empregar o seguinte registro $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{6} \therefore \overline{AB} = 3$. O aluno pode também efetuar o seguinte tratamento $6 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ que é o valor do segmento. No próximo passo, o solucionador encontra o restante do comprimento $10 - 3 = 7$ (figura lado direito). Em seguida, a partir do registro envolvendo o triângulo retângulo $\triangle BDC$, garantimos a formação do seguinte registro algébrico $a^2 = h^2 + 7^2 = (6^2 - 3^2) + 7^2 = 36 - 9 + 49 = 27 + 49 = 76 \therefore a = \sqrt{76}$, onde $6^2 = h^2 + 3^2$.

A boa Didática da Matemática, no orienta que sempre que possível, devemos proporcionar aos estudantes depararem situações em que se pode generalizar e sistematizar as ideias matemáticas relacionadas aos conteúdos já aprendidos. Assumindo este princípio, enunciamos o seguinte problema.

PROBLEMA 5

Em qualquer triângulo em que conhecemos dois lados e um ângulo formado

por eles, podemos calcular o terceiro lado? Baseando-se no raciocínio empregado no problema anterior, o professor deve conduzir seus alunos no sentido positivo deste problema. Neste sentido, consideramos um triângulo qualquer $\triangle ABC$, de lados conhecidos b e c , e o ângulo α formado pelos lados b e c . Assim, usando o raciocínio anterior, tomando a altura 'h', podemos determinar, usando as razões trigonométricas, os valores dos segmentos que decompõem o lado 'c', onde escrevemos $b \cdot \cos \alpha + c - b \cdot \cos \alpha$.

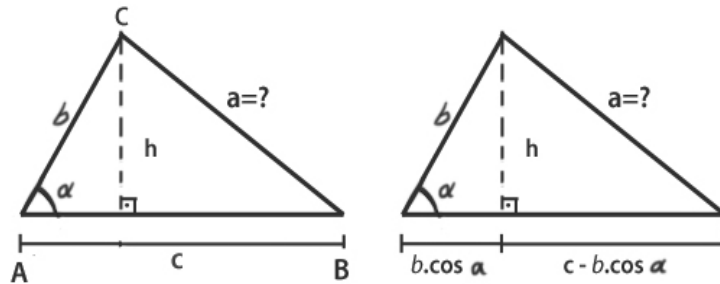


Figura 10 - Tentativa de generalização do problema envolvendo a Lei dos cossenos

Usando mais uma vez o teorema de Pitágoras, vem que:

$$(*) \begin{cases} h^2 + (c - b \cdot \cos \alpha)^2 = a^2 \\ h^2 + (b \cos \alpha)^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - (c - b \cdot \cos \alpha)^2 = b^2 - (b \cos \alpha)^2$$

$$a^2 - (c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha) = b^2 - (b^2 \cos^2 \alpha)$$

$$a^2 - c^2 + 2b \cdot \cos \alpha - b^2 \cdot \cos^2 \alpha = b^2 - b^2 \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha = b^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

O professor deve perceber que a Lei dos cossenos (caso particular) escrita na relação acima diz respeito às relações trigonométricas ou razões de seno e cosseno para ângulos agudos. A Lei verificada no caso particular vale também quando $\alpha = 90^\circ$. Por outro lado, o professor, deve estar cômico que apenas o caso particular foi demonstrado.

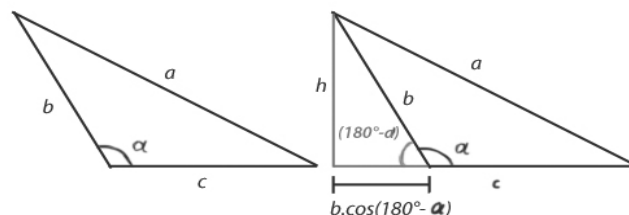


Figura 11 - Generalização do problema da Lei dos cossenos

No caso geral da Lei dos Cossenos, não podemos nos prender apenas aos ângulos agudos. Se tivermos definições formais das razões trigonométricas apenas

para ângulos agudos, algumas expressões podem perder o sentido matemático. Neste caso, o valor de cosa pode não ter sentido.

Mas em todo caso, o problema ainda pode ser resolvido, observando o diagrama acima, consideramos $\cos(180^\circ - \alpha)$. Usando os triângulos retângulos que

dispomos, escrevemos as relações (**)

$$\begin{cases} h^2 + (b \cdot \cos(180^\circ - \alpha))^2 = b^2 \\ h^2 + (c + b \cdot \cos(180^\circ - \alpha))^2 = a^2 \end{cases}$$

Reparamos que a única diferença desta expressão (*) para a expressão (**), é que no lugar de α , aparece $180^\circ - \alpha$, e no lugar do sinal de menos aparece o sinal de mais. Então, desenvolvendo as contas semelhantes ao caso anterior, obtemos: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$. Verificamos então que (i) (ângulo agudo α) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$; (ii) (ângulo obtuso) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$.

Surge agora o problema da definição matemática formal do cosseno para valores obtusos. Aqui se evidencia o valor pedagógico correto da Lei dos cossenos. A discussão metodológica aqui para o professor de Matemática nesta situação-problema é que temos duas fórmulas em cada caso.

Entretanto, “convém” definir formalmente o $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Neste caso, a mesma fórmula funcionará para os dois casos de ângulos. De certo modo, a Lei dos cossenos indica a necessidade desta definição formal.

Salientamos, para concluir, que o professor de Matemática deve adquirir o *Übbifkdi*, no sentido de distinguir/diferenciar uma situação-problema que avalia apenas o conhecimento e habilidades operatórias ou algorítmicas, das situações-problema em que podemos avaliar o conhecimento conceitual do aluno e que essas situações-problemas requer um olha do aprendiz rico em relações, como uma “rede” de ramificações.

Para os incipientes ou especialistas de outras áreas do conhecimento, o primeiro tipo envolve uma avaliação quantitativa, enquanto que no segundo caso, o mestre tem condições de avaliar qualitativamente o aprendiz. Todavia, a estruturação e a concepção de situações-problema que permitem inferir um conhecimento do aprendiz, rico em relações conceituais é bem mais importante do que a aplicação de extensas listas de exercícios que envolvem a aplicação da mesma fórmula para todos eles e que exige um raciocínio matemático estruturado em inferências lógicas. Para os profissionais de outras áreas, alertamos, tal modalidade de raciocínio impulsiona uma automatização das ações, conquanto não garanta, necessariamente, um entendimento pleno da situação.

Além disso, situações-problema de caráter interessante exigem tempo, esforço e dedicação por parte do professor que as concebe com um objetivo precípuo de promover o debate entre os estudantes e não simplesmente indicar os gabaritos. Em muitos casos, a experiência com a sala de aula, e a condução da disciplina, proporciona conhecimentos ao professor que, em muitos casos, não consegue obter na academia.

Nas próximas aulas nos deteremos ao estudo dos livros didáticos de Matemática. O aspecto preocupante é que o professor deve se manter vigilante e não confiar plenamente na qualidade dos livros didáticos. Igualmente, assinalaremos de que modo a abordagem atual de muitos livros didáticos pode afetar e condicionar a abordagem do professor e dos aprendizes, no que concerne ao uso adequado de simbologias e representações.

AULA 3

Noções de lógica empregadas pelos livros didáticos e as funções polinomiais

Olá, aluno(a)!

A Lógica Clássica, de raízes aristotélicas preserva raízes profundas na Matemática. Tal impregnação mútua de ambas as áreas do saber científico é tão enraizado que muitos manifestam dificuldades em distinguir o que de fato é originalmente da Lógica e pode ser empregado pela Matemática e, reciprocamente. Nesta aula colocaremos em evidência as inúmeras advertências indicadas por Lima *et al.* (2001) a respeito desta forte relação.

Objetivo

- Analisar as noções de lógica e de funções polinomiais apresentadas nos livros didáticos de Matemática

TÓPICO 1

Noções de lógica empregadas pelos livros didáticos

OBJETIVO

- Analisar as noções de Lógica Clássica explorada nos livros didáticos de Matemática

Na Lógica Clássica, de raízes em Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.), identificamos as raízes de fundamentos importantes do saber matemático, sobretudo, no que diz respeito à sua fundamentação e confiabilidade. Um dos principais modelos empregados na Matemática é o **modelo de inferência simples** do tipo $\underset{\text{hipótese}}{H} \rightarrow \underset{\text{tese}}{T}$.

No contexto da Lógica proposicional, afirmar que o valor lógico assumido por hipótese tese $\underset{\text{hipótese}}{H} \rightarrow \underset{\text{tese}}{T}$ é Verdadeiro ou (V) é significar que a hipótese H é suficiente para que tenham a condição expressa pela tese T. Ou ainda, a tese T acontece sempre que temos as condições descritas pela hipótese H. De outra parte, a tese T é apenas necessária para que se tenha a condição expressa pela hipótese H.

Por exemplo, a condição de c ser injetora, é uma condição suficiente para que C seja função. Por outro lado, quando dizemos que c é função, tal propriedade é necessária, mas não suficiente para que a mesma seja injetora. Ou ainda, quando dizemos que c é crescente, mais uma vez, tal condição, por definição, é suficiente para que c seja função, entretanto, se c é uma função, tal condição é apenas necessária, mas não suficiente para que tal função seja crescente.

De fato, se c não é crescente, a mesma poderá ser decrescente ou constante. Outra propriedade que envolve inferências lógicas do tipo $\underset{\text{hipótese}}{H} \rightarrow \underset{\text{tese}}{T}$ é a seguinte: se c é crescente, então c será injetora. Afirmações deste tipo exigem do professor o domínio aprofundado das definições formais. Note-se que se temos uma função c injetora, não necessariamente c será crescente. Assim, a condição de ser crescente,

é suficiente para possamos declarar que fé injetora, todavia, a propriedade da injetividade ou a relação 1-1 (um por um) é apenas necessária, mas não suficiente, basta tomar a função $f(x) = x^2$ que é injetora, mas não é crescente.

Outro modelo que não se pode esquecer, refere-se ao emprego do operador de inferências bicondicional \Leftrightarrow que envolve sentenças proposicionais do tipo $p \Leftrightarrow q$ o que, em termos de Matemática e de Lógica, pode ser desmembrado em dois “sentidos”: $p \Rightarrow q$ e $p \Leftarrow q$. Por fim, no contexto ainda da Lógica proposicional, encontramos propriedades recorrentemente exploradas em Matemática, como por exemplo, a propriedade descrita por uma sentença proposicional m e sua negação $\neg m$.

Antes de referenciar as preocupações específicas de Lima (2001), acentuamos os seguintes exemplos:

Exemplo (A): Seja Π um plano no espaço E , onde se escolheu um sistema de coordenadas $OXYZ$. Tomemos a reta AO , que passa pela origem, pelo ponto $A = (a, b, c)$ e é perpendicular ao plano Π . Então existe um número real ‘ d ’ tal que a equação do plano Π é $ax + by + cz = d$, isto é $P = (x, y, z) \in \Pi$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a relação acima.

Como mencionamos em algumas aulas, um dos sérios problemas dos livros didáticos é o tratamento superficial dedicado às definições formais. A tônica geral é a apresentação de situações-problema em que a exigência do domínio e da compreensão das definições matemáticas formais é praticamente inexistente. O problema se acentua no contexto acadêmico, em que são exigidos dos estudantes uma série de atitudes e hábitos matemáticos que não foram paulatinamente trabalhados no contexto escolar.

Observe no enunciado do exemplo (A) a palavra “existe”. Em Matemática, as questões de existência ou verificar a existência de um objeto conceitual que satisfaz propriedades específicas particulares nem sempre se traduzem por uma fácil tarefa. No contexto acadêmico, tal exigência é constante e não se admite a falta de compreensão relativa a tal noção, no que se refere ao professor de Matemática. Vejamos então o próximo enunciado.

Exemplo (B): Dada a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas a satisfazem é uma circunferência se, e somente se, $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

Sublinhamos que na aula 5, demonstraremos o sentido (\Rightarrow) enunciado acima. Por outro lado, gostaríamos de discutir o caso geral descrito por Lima

^i+(1999) o caso geral. Se o centro da circunferência Γ é um ponto arbitrário $M(x_0, y_0)$ e consideremos a nova circunferência Γ' , de mesmo raio, com centro na origem. Reparamos que o ponto de coordenadas $(x, y) \in \Gamma'$ se, e somente se, o ponto $(x+a, y+b) \in \Gamma$, isto é, se, e somente se $A(x+a)^2 + B(y+b)^2 + C(x+a)(y+b) + D(x+a) + E(y+b) + F = 0$ ou $Ax^2 + By^2 + Cxy + D'x + E'y + F' = 0$ (*).

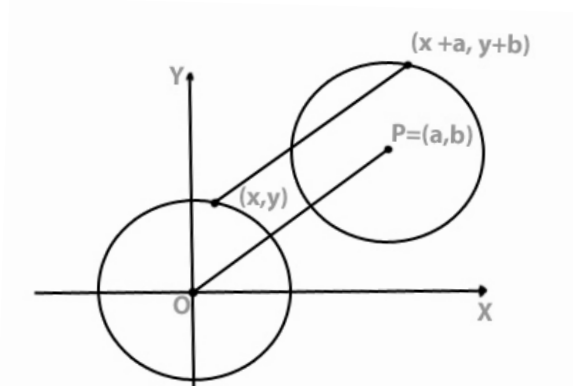


Figura 1 - O caso geral discutido por Lima et al. (1999, p. 45)

A equação (*) representa, conforme Lima et al. (1999, p. 45), a circunferência Γ' . Note que os coeficientes A, B e C são os mesmos da equação de Γ (os demais coeficientes não nos interessam.) Como Γ' tem centro na origem, podemos garantir que $A = B \neq 0$ e $C = 0$ (será demonstrado na aula 6). Deixamos aqui uma argumentação específica descrita por Lima et al. (1999).

De fato, o autor considera que a equação dada por ser sempre reduzida ao caso $Ax^2 + Ay^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$. Vamos agora completar os quadrados, o que é pouco explorado pelos autores de livros didáticos neste caso (LIMA et al. 2001), assim, escrevemos:

$$0 < \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}, \quad \text{assim, concluímos que}$$

$$\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0 \text{ o que resulta em } D^2 + E^2 - 4AF > 0 \leftrightarrow D^2 + E^2 > 4AF.$$

Deixamos a cargo do leitor indicar o centro da circunferência e seu raio. Este tipo de enunciado envolve o bicondicional \Leftrightarrow . Vejamos uma situação envolvendo o caso das condições lógicas presentes em uma definição matemática formal.

Exemplo (C): $f : A \rightarrow B$ não é função.

Temos aqui um conceito que representa a “pedra angular” de tudo o que o estudante toma contato na escola. Já discutimos alguns aspectos relacionados com

este conceito nas aulas passadas, todavia, do ponto de vista lógico, como negar tal propriedade?

Do que diz respeito à definição formal, quando temos os conjuntos $A, B \neq \emptyset$, dizemos que $f: A \rightarrow B$ é função quando cumpre duas condições descritas em Lima (2010, p. 13), diz que $\forall x \in A$, existe um único $f(x) \in B$. E uma regra que evita ambiguidades no sentido de se obter de modo explícito $f(x) \in B$, para todo $x \in A$.

Assim, do ponto de vista lógico, negar esta propriedade significar negar as duas propriedades que caracterizam uma função ou negar apenas uma delas. Note-se, por exemplo, que podemos declarar que $\exists x \in A$, que corresponde a mais de uma imagem em B . Ou ainda sua negação consiste em dizer que a regra possui ambiguidades e não se pode obter $f(x)$ para todos os elementos de $x \in A$.

A importância da compreensão da definição formal, do ponto de vista lógico, permite o professor de Matemática estruturar, conceber e descrever situações-problema interessantes e que não recaem nos exercícios tradicionais envolvendo “setas” e “bolinhas” entre conjuntos.

Exemplo (D): O quociente e o resto da divisão de um polinômio D por um polinômio d (não identicamente nulo) existem e são únicos. No exemplo (D) temos um exemplo de um teorema importante envolvendo o conceito de funções polinomiais. De modo geral, o professor de Matemática ou não sabe realizar a demonstração ou não possui o tempo didático necessário para sua execução em sala de aula, todavia, na condição de fazê-lo, a quantidade de alunos que se interessa é pequena e, com raras exceções, alguns estudantes entendem a ideia da demonstração formal.

Dois aspectos que devem merecer atenção aqui. O **primeiro** diz respeito à noção de existência e o **segundo** aspecto que se refere à unicidade dos objetos que devem satisfazer as propriedades descritas em (D). Temos aqui um dos raros momentos em que os autores de livros fazem referência a tais preocupações.

Mais uma vez advertimos que, embora o professor de Matemática, de acordo com o nível da turma em que leciona, não realize a demonstração formal de (D), sua obrigação moral de conhecê-la nunca poderá ser descartada. Assim, para ilustrar a demonstração correta, recorreremos Lima [\(1999\)](#) quando inicia a demonstração pela unicidade.

Assim, supomos que existem dois pares de polinômios (q_1, r_1) e (q_2, r_2) satisfazendo a definição de divisão de D por d . Isto é: $D = d \cdot q_1 + r_1$ e $D = d \cdot q_2 + r_2$.

Temos então que $D = d \cdot q_1 + r_1 = d \cdot q_2 + r_2 \therefore d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Em seguida, os autores observam

que o polinômio do lado direito tem grau menor que o grau de a , por ser diferença de dois polinômios de grau menor do que o grau de d . Já o polinômio da esquerda tem grau maior ou igual ao de a , a menos que $(q_1 - q_2)$ seja identicamente nulo. Logo, a identidade ocorre somente quando os polinômios em ambos os lados são identicamente nulos. Portanto, temos, necessariamente que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$ (LIMA *l. 1*, 2001, p. 206).

No caso da demonstração de existência, os autores empregam um processo algorítmico através do qual reduzimos sucessivamente o grau do dividendo até que ele se torne menor que o do divisor e a divisão se torne imediata. Note-se que, “se D tem grau menor que d , então certamente D pode ser dividido por d , já que $q = 0$ e $r = D$ cumprem as condições $\text{grau}(r) < \text{grau}(d)$ e $D = dq + r$ (LIMA *l. 1*, 2001, p. 206).

Exemplo (E): $f : A \rightarrow B$ é uma função par ou ímpar.

Os erros de natureza lógica são recorrentes, relacionados aos dois conceitos que indicamos no item (E). De modo tradicional, os estudantes aprendem que $f(x) = x^2$ é uma função ímpar e que $f(x) = x^2$ é uma função par. Todavia, uma condição lógica importante dessas noções é a noção de simetria. Neste caso, para todo ponto $(x, f(x)) \in \text{Graf}(f(x))$ no gráfico de uma função

que possui simetria, o ponto $(-x, f(-x)) \in \text{Graf}(f(x))$. No caso em que $f(x) = x^2$ temos uma função par. No caso em que $f(x) = x^3$ temos uma função ímpar.

Outra propriedade lógica formal pertinente a estes conceitos pouco acentuada pelos autores de livros didáticos, diz respeito ao fato de que qualquer função $f(x)$ pode ser decomposta em termos de uma soma de função par com função ímpar. De fato,

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Por fim, consideramos as funções obtidas nas expressões há pouco destacadas que são descritas por $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Por fim, pode-se demonstrar que a função $g(x)$ é par, enquanto que a função $h(x)$ é ímpar. Na figura 2, comentamos ainda alguns erros frequentes dos alunos.



SAIBA MAIS!

Deixaremos a indicação de leitura do livro de Lima *l. 1* (1999, p. 206-207). Na mesma, você poderá adquirir contato com outras demonstrações de existência e unicidade em Matemática.

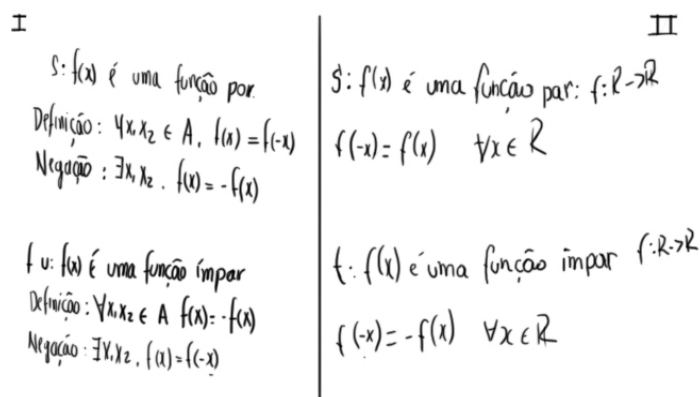


Figura 2 - Exemplos de erros conceituais dos alunos

O lado mais preocupante destacado na figura 2 é que as resoluções (I) e (II) são provenientes de professores em formação em um curso de licenciatura no modelo presencial. Nota-se que no caso (I), o sujeito errou de modo flagrante a condição lógica que caracteriza a negação da propriedade. Em parte substituiu o quantificador universal “pelo quantificador existencial \exists ”.

No caso (II), o problema é a incapacidade de generalizar um modelo matemático. Reparamos que as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ exemplificadas na figura 2 (II), restringem-se à classe de funções . Mais uma vez a condição fornecida pelo estudante de licenciatura é incompleta, pois desconsidera a propriedade de simetria que o gráfico precisa possuir para que se possa declarar algo sobre a função em foco.

Exemplo (F): Uma função: $f: A \rightarrow B$ possui inversa se, e somente se, é uma bijeção.

O enunciado que destacamos em (F) diz respeito ao problema de comentar/mencionar com os estudantes determinadas propriedades que precisam ser demonstradas e pormenorizadas a posteriori. Todavia, muitas vezes são tomadas como definições formais ou simplesmente não questionadas/admitidas, o que caracteriza uma atitude muito nociva e improdutiva com vista ao real entendimento, tendo em vista que o referido item se refere a algo que pode ser formalmente verificado.

No que diz respeito ao caráter matemático de domínio do professor, a condição acima em (F) pode ser desmembrada em duas outras condições: (i) Dadas às funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$, dizemos que g é inversa à esquerda de f quando $g \circ f: A \rightarrow A$ ou $g(f(x)) = x, \forall x \in A$. E de modo semelhante, para

$h: B \rightarrow A$ dizemos que h é inversa à direita de f quando $f \circ h: B \rightarrow B$ ou $g(f(x)) = x, \forall y \in B$. Repare que as funções g e h podem não ser a mesma função.

Por fim, Lima (2010, p. 22) comenta que “uma função $f: A \rightarrow B$ possui inversa à esquerda, se somente se, é injetora”. E uma função $f: A \rightarrow B$ possui inversa à direita, se somente se, é sobrejetora. Um conhecimento como este não é objeto de ensino no contexto escolar, todavia, diz respeito às propriedades importantes da função inversa e o professor não pode restringir seu conhecimento do conteúdo específico apenas ao universo do livro didático.

Para concluir este tópico, destacamos que o objetivo deste tópico foi indicar os problemas de ordem lógica que comprometem outros fatores de ordem matemática. Mencionamos mais uma vez que a quase totalidade dos estudantes não consegue diferenciar o que é Lógica do que é Matemática. Como já mencionamos, temos duas áreas específicas do conhecimento científico e, em muitos casos, a Matemática se apropria e emprega noções da Lógica Clássica que não são objeto direto de ensino por parte do professor e nem por parte dos autores dos livros didáticos.

Por fim, um problema que merece eterna vigilância por parte do professor, quando adotar um livro didático, diz respeito à clareza dos enunciados, à precisão das afirmações e à consistência lógica das definições matemáticas formais. O professor deve possuir uma capacidade crítica a ponto de identificar tais falhas conceituais que podem implicar em aprendizagens inadequadas e se prolongar durante toda a vida adulta do sujeito, como indicamos na figura 2.

No próximo tópico abordaremos e discutiremos alguns problemas relacionados ao conteúdo de funções polinomiais abordadas no contexto escolar. Tal conteúdo apresenta teoremas importantes que, embora não demonstrados no contexto escolar, o professor não pode se eximir da responsabilidade de conhecê-los.

TÓPICO 2

Funções polinomiais discutidas nos livros didáticos

OBJETIVO

- Analisar a noção de funções polinomiais apresentadas nos livros didáticos de Matemática

Neste tópico discutiremos o importante conceito de função polinomial e suas propriedades. Mais uma vez destacaremos e discutiremos problemas preocupantes apontados por Lima ^{et al.} (2001) no que diz respeito à abordagem deste conceito pelos livros didáticos brasileiros.

Para iniciar esta aula, sublinhamos que nosso objetivo principal gira em torno das funções polinomiais; assim, nada mais coerente do que iniciar a aula fornecendo a seguinte definição: chama-se **polinômio complexo** a uma expressão formal do tipo $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_1 X^1 + a_0$, onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e X é um símbolo, chamado de indeterminada. Quando dizemos “expressão formal” “queremos dizer que, essencialmente, vemos o polinômio como a lista ordenada $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ de seus coeficientes e que somamos e multiplicamos polinômios através das regras usuais de multiplicação de monômios e adição de monômios semelhantes.” (LIMA ^{et al.} 1999, p. 202).

Com referência ao contexto do seu ensino e sua abordagem pelos livros didáticos, Lima ^{et al.} (2001, p. 308) menciona que

no estudo de polinômios há três aspectos a considerar: o aritmético, em que se consideram as propriedades de divisibilidade, análogas às dos números inteiros, o algébrico, em que se trata da resolução de equações, e o analítico, em que os polinômios são vistos como uma importante categoria de funções de uma variável.

Tais aspectos podem ser explorados de modo metodológico e de modo equilibrado pelo professor de Matemática, entretanto, na prática, não observamos o equilíbrio indicado por Lima (2001). “Embora esses três pontos de vista se entrelacem e se complementem” (LIMA 2001, p. 308), em alguns livros o aspecto analítico é praticamente inexistente, a divisibilidade se resume ao fator $(x-a)$ e à Álgebra, que predominantemente é incipiente.

Apontamos algumas definições formais ambíguas assinaladas, por exemplo, por Lima (2001). Inicialmente o autor salienta que a definição de polinômio como a “expressão que define a função polinomial” não é conveniente. Além disso, “o polinômio nulo é definido por alguns livros didáticos como aquele que assume o valor zero para todo valor de x e daí, sem nenhuma explicação, os livros concluem que seus coeficientes são todos iguais a zero.” (LIMA 2001, p. 308).

Outro exemplo preocupante diz respeito ao conceito de polinômios idênticos. Conforme Lima (2001, p.308) “Tais conceitos são definidos como aqueles que assumem o mesmo valor para todo x e, novamente sem explicação, conclui-se que seus coeficientes são iguais”. Isto é uma propriedade interessante e poderia ser provada. Mas quando Lima (2001, p. 308) faz a opção em não provar, “de modo algum deveria tratá-la como óbvia consequência de uma redação obscura.”

Na figura 3, trazemos a definição introdutória de função polinomial. Nela identificamos como se adequam as indicações de Lima (2001).

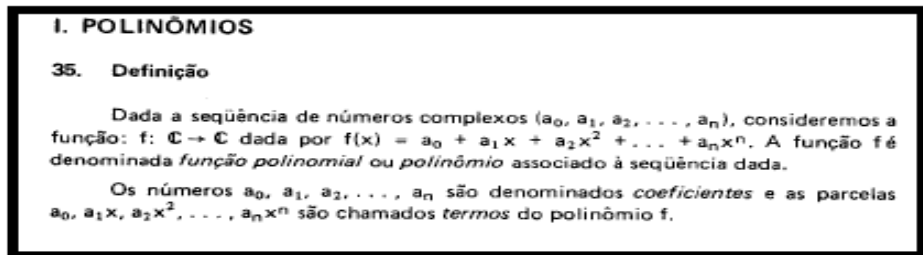


Figura 3 - Definição de função polinomial segundo Iezzi (1981, p. 47-F)

Lima (2001, p. 453) acentua que “o problema deste tipo de definição formal é o perigo de conduzir o leitor a crer que só podem ser considerados polinômios complexos.”. E com base nesta definição, alguns autores de livros declaram de modo categórico que: “um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes são iguais a zero, e indicamos por $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$.”

Mais adiante, Lima (2001, p. 454) alerta que

É correto dizer que a função identicamente nula é aquela que se anula para todos os valores da variável, e ela tem realmente todos os coeficientes nulos, mas isso é uma consequência da definição e do fato de uma função polinomial complexa de grau n poder ter, no máximo, n zeros. Não é preciso aguardar um grande desenvolvimento do conteúdo para se mostrar esse fato, que decorre do seguinte resultado: se um número complexo a é zero de uma função polinomial P , então $P(x)$ é divisível por $x - a$. E isso pode ser provado com base na simples identidade $x^k - a^k = (x - a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + ax^{k-3} + \dots + a^{k-1})$ válida para todo inteiro $k \in \mathbb{Z}^+$.

Outro método que não recebe o devido cuidado por parte dos autores de livros didáticos refere-se à pesquisa das raízes racionais de uma equação com coeficientes inteiros. Neste caso, Lima (2001, p. 308) critica que o método “é introduzido sem nenhuma justificativa ou pelo menos uma desculpa. Este tipo de atitude deve ser evitada, pois dá uma falsa ideia de como se faz Matemática.”.

Na figura 4 exibimos o enunciado do método criticado por Lima (2001).

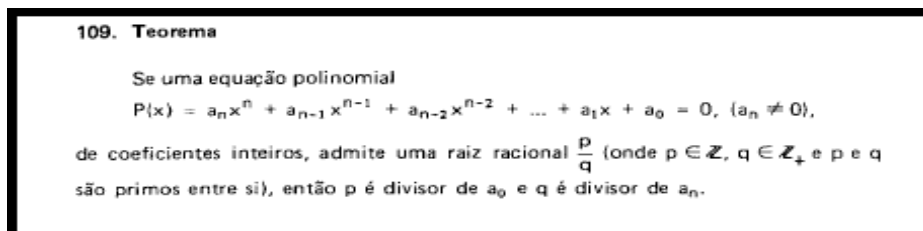


Figura 4 - Iezzi (1981, p. 119-F) fornece o teorema e a demonstração para a identificação de raízes racionais de um polinômio

Observe que sua demonstração é rápida e de fácil entendimento, na condição em que seu enunciado seja fornecido de modo preciso.

Com efeito, Lima (2001) aponta que em outros casos semelhantes, após enunciar e provar (por meio do algoritmo da divisão de polinômios) o teorema do resto (o resto da divisão de um polinômio $M(x)$ por $x - a$ é $M(a)$ e o texto diz que o teorema de D’Alembert é uma consequência do teorema do resto. De fato, “o resultado é imediato, porém em nenhuma parte do capítulo é dito o que significa um polinômio ser divisível por outro, de modo que a compreensão do teorema é comprometida” (LIMA (2001), p. 310).

F.229 (EPUSP-63) Mostre que a equação $1000x^5 + 20x^2 - 1 = 0$ admite uma raiz positiva inferior a $\frac{1}{5}$.

Solução

Façamos $P(x) = 1000x^5 + 20x^2 - 1$ e calculemos $P(0)$ e $P(\frac{1}{5})$:

$$P(0) = 1000(0)^5 + 20(0)^2 - 1 = -1 < 0$$

$$P(\frac{1}{5}) = 1000(\frac{1}{5})^5 + 20(\frac{1}{5})^2 - 1 = \frac{1000 + 2500 - 3125}{3125} = \frac{375}{3125} > 0$$

Como $P(0) \cdot P(\frac{1}{5}) < 0$, resulta que P apresenta um número ímpar de raízes reais no intervalo $]0; \frac{1}{5}[$ (teorema de Bolzano).

F.230 Quantas são as raízes reais da equação $x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$, no intervalo $]0; 3[$?

F.231 Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + 2x$, pede-se construir seu gráfico cartesiano e, a partir daí, estabelecer o número de raízes reais da equação $f(x) = 0$.

F.232 Determinar α de modo que a equação $x^3 + x^2 + 5x + \alpha$, tenha ao menos uma raiz real no intervalo $] -2; 0[$.

F.233 (EPUSP-64) — Mostre que a equação $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + a = 0$, ($a > 0$) só tem uma raiz real. Diga qual é o sinal da raiz.

F.234 (EPUSP-68) — Considere a equação, na incógnita x , $3x^3 - 2x^2 + 3x + t^2 - 2t - 1 = 0$.

- Mostre que, para cada t real, ela admite uma raiz única real $r(t)$.
- Determine o valor de t para o qual a raiz $r(t)$ é máxima.
- Determine essa raiz máxima.

Figura 5 - Exercícios extraídos dos concursos vestibulares explorados por Iezzi (1981, p. 118-F).



GUARDE BEM ISSO!

Atitudes como adotada por prof. Gelson Iezzi devem ser constantemente valorizadas e exploradas pelo professor de Matemática.

Na figura 5 evidenciamos o caráter algorítmico adotado por Iezzi (1981) ao sugerir atividades extraídas dos concursos vestibulares. A tônica geral é a exigência de regras operatórias e “habilidades algorítmicas” do leitor.

Algumas exceções são encontradas. Por exemplo, no caso do teorema de Bolzano (figura 6) enunciado por Iezzi (1981, p. 123), o autor

fornece a interpretação geométrica ou as ideias heurísticas (figura 7) envolvidas no enunciado do teorema.

104. Teorema de Bolzano

Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a; b[$ um intervalo real aberto.

1º) se $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais da equação em $]a; b[$.

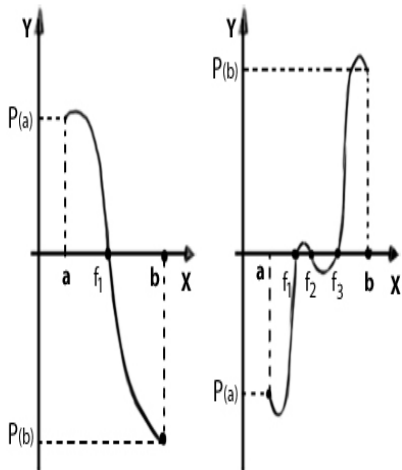
2º) se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a; b[$.

Figura 6 - Teorema explorado do ponto de vista formal e intuitivo

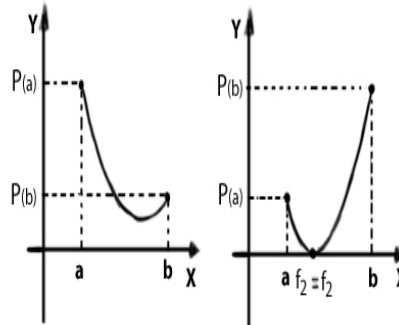
Na figura 7 não distinguimos nenhum gráfico ou recurso relativo à pintura no sentido de apoiar a percepção e a intuição do leitor. Tal prática reducionista já foi apontada por nós em aulas passadas e se manifesta em praticamente todos os conteúdos do contexto escolar.

Exemplos

sinal de $P(a) \neq$ sinal de $P(b)$



sinal de $P(a) =$ sinal de $P(b)$



número ímpar de raízes

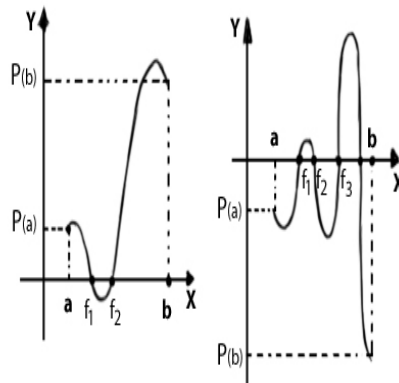


Figura 7 - Iezzi (1981, p. 117-F) explora as ideias heurísticas do teorema de Bolzano

O teorema de Bolzano é estudado no contexto acadêmico, com o uso específico do Cálculo Diferencial e Integral. Neste caso, embora não discutido no contexto escolar, o professor deve estar consciente de que tal conteúdo possui raízes conceituais bem mais complexas, assim, constitui parte de sua didática, uma abordagem conveniente ao entendimento dos seus alunos.

Outro teorema fundamental relacionado com funções polinomiais $f(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$, diz respeito ao Teorema Fundamental da Álgebra. Lima (2001, p. 455) comenta que também “seria altamente desejável dizer algo

acerca do fato de a demonstração desse teorema não ser acessível ao estudante do contexto escolar por se fundamentar em tópicos avançados.” Observe que a atitude didática de simplesmente não justificar ou demonstrar aos alunos é questionável e insuficiente. Por outro lado, o professor pode encontrar meios heurísticos e informais para a transmissão deste tópico particular.

A atitude mais coerente, diante da omissão desse assunto por parte dos autores de livros, é conhecer com profundidade a demonstração ao ponto de identificar os elementos inapropriados e longe ainda do alcance dos estudantes do nível escolar. O Teorema Fundamental da Álgebra é enunciado nos livros didáticos do seguinte modo: todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa. Em outras palavras, o corpo dos números complexos é algebricamente fechado (LIMA, 1999, p. 210).

Lima (1999, p. 219) esclarece o verdadeiro motivo da omissão de sua demonstração ao acentuar que “no contexto escolar ao mencionar que embora fundamental à Álgebra, o teorema acima é um teorema de Análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas [...]”. Em seguida Lima (1999, p. 219) enuncia o seguinte teorema: **todo polinômio complexo de grau n pode ser fatorado na forma $p(x) = c \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, onde c é um número complexo e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as raízes complexas de $p(x)$ (possivelmente repetidas). Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.**

Com referência aos teoremas de enunciado semelhantes ao apresentado anteriormente, há poucos destacados, Lima (2001, p. 455) comenta suas abordagens feitas em alguns livros didáticos ao

indicar que o enunciado do teorema da decomposição de um polinômio não faz referência à unicidade dessa decomposição nem à possibilidade de as raízes se repetirem, e a multiplicidade de uma raiz só é abordada três páginas adiante, em outra seção, de forma obscura. Em consequência, a demonstração do teorema também não é apresentada claramente.

Lima (1999) fornece algumas indicações que, apesar de omitidas pelos autores de livros, podem ser exploradas do ponto de vista metodológico pelo professor de Matemática. Neste sentido, Lima (1999, p. 456) traz uma informação preocupante que diz respeito ao fato de que há

[...] uma grande quantidade de problemas quanto à conceituação. O tratamento que conferem aos polinômios enfatiza exclusivamente o seu aspecto algébrico, não aparece nenhum gráfico, ou seja, não há referência ao seu aspecto analítico. Como o texto nada diz sobre a analogia entre a divisibilidade entre os inteiros e a divisibilidade entre polinômios, o aspecto aritmético é despercebido.

Lima (2001) aponta algumas imprecisões históricas abordadas por autores de livros didáticos, sem maiores implicações no decurso natural do conteúdo. Critica, por exemplo, as referências ao termo ‘incógnita’ empregado pelos autores, sem maiores cuidados e indicações de bases confiáveis na literatura.

Lima (2001, p. 219) corrige a imprecisão do comentário acima ao explicar que, na realidade, “esta era a visão da Álgebra no final do século XVIII. Desde as primeiras décadas do século XIX, com os estudos sobre grupos e corpos, e com a generalização do conceito de função, a Álgebra, não se reduz mais a isto.”. Assim, além de constituir uma conclusão imprecisa e equivocada, tal atitude acaba sendo predominante durante toda a abordagem do livro didático.

Um razoável conhecimento da História da Matemática evidencia o caráter não trivial relativo ao surgimento e sistematização da teoria que envolve equações algébricas. Como discutimos nos parágrafos anteriores, os conhecimentos em Análise Real são necessários para a compreensão de muitas das propriedades nesta teoria abstrata.

Para concluir, comentamos um importante caso de divisão de polinômios em que o divisor é da forma $(x-a)$. Lima (1999, p. 210) comenta que “sempre que um número a é identificado como uma raiz de um polinômio $p(x)$ podemos concluir que $p(x)$ é divisível por $(x-a)$. O teorema da divisão oferece um outro modo de chegar à mesma conclusão.”.

Para dividir um polinômio qualquer por $(x-a)$ obtemos um quociente $q(x)$ e um resto $r(x) = r_0$, satisfazendo a equação $p(x) = (x-a)q(x) + r_0$. Calculando o valor numérico de ambos os lados para $x = a$, obtemos que $p(a) = 0 \cdot q(a) + r_0 \therefore r_0 = p(a)$. Assim, conclui Lima (1999, p. 210), que “o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x-a)$ é igual a $p(a)$. Em particular, concluímos que um número a é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $(x-a)$.”. O autor indica como executar, de modo eficiente, a divisão de um polinômio por fatores da forma $(x-a)$.

Consideremos um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e sejam $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ e $r(x) = r_0$ o quociente

e o resto, respectivamente, da divisão de $p(x)$ por $(x-a)$. Dessa forma, $p(x) = (x-a)q(x) + r_0 \therefore$

$$\begin{aligned} &= (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0)(x-a) + r_0 = \\ &(b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \dots + b_1x^2 + b_0x) - \\ &(ab_{n-1}x^{n-1} - ab_{n-2}x^{n-2} - \dots + ab_1x + ab_0) + r_0 = \\ p(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2})x^{n-2} + \dots \\ &\dots + (b_0 - ab_1)x + (r_0 - ab_0) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes acima, obteremos que: $b_{n-1} = a_n$; $a_{n-1} = (b_{n-2} - ab_{n-1}) \therefore b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$; $a_{n-2} = (b_{n-3} - ab_{n-2}) \therefore b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$; etc. No passo final, $r_0 - ab_0 = a_0 \therefore r_0 = a_0 + ab_0$ que é o resto da divisão. Lima (1999, p. 211) complementa que como “os cálculos e comentários acima mostram, temos um processo recursivo para obter sucessivamente os termos de n° a partir do termo de mais alto grau, e resto da divisão.”

Por fim, depois de mostrar a fundamentação do método chamado no contexto escolar de Briot-Ruffini, Lima (1999, p. 211) conclui que “os cálculos descritos acima são facilmente efetuados quando dispostos na forma abaixo (figura 8), que constitui o chamado dispositivo de Briot-Ruffini.”

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	$b_1 \dots b_0$	r	\dots

Figura 8 - Lima et al. (1999, p. 211) comenta e caracteriza o método chamado dispositivo de Briot-Ruffini

No contexto escolar, Lima (2001, p. 404) comenta que as abordagens de livros didáticos, limitam-se a “mostrar como utilizar o algoritmo de Briot-Ruffini como ferramenta para a decomposição de um polinômio em fatores lineares.”

Todavia, na perspectiva do professor, sua visão não pode ser apenas de ferramenta ou utilitarista. O mesmo deve compreender o motivo lógico e formal pelo qual o dispositivo de Briot-Ruffini é verdadeiro.

Outros exemplos podem ser mencionados aqui, ainda no contexto do estudo das equações polinomiais, como as relações de Girard. Mais



SAIBA MAIS!

Acesse o site <http://educacao.uol.com.br/matematica/relacoes-de-girard-soma-e-produto-de-raizes-de-uma-equacao.jhtm> e revise seus conhecimentos sobre as relações de Girard.

uma vez, cabe ao professor analisar de modo crítico a abordagem conduzida pelo autor de livros, consultar, de preferência, mais de um ou consultar a internet. Assim, ele terá mais elementos no sentido de escolher, avaliar e conduzir o desenvolvimento dos conteúdos, evitando, deste modo, a mera repetição de regras e procedimentos irrefletidos.

Por fim, como discutimos no início desta aula, a atenção com respeito ao papel da Lógica formal é uma exigência constante no ofício da vida de professor. Deste modo, com um bom domínio de conteúdo específico e uma razoável formação em Lógica Matemática, o professor poderá adquirir uma percepção apurada relacionada às abordagens de livros encontrados por aí no mercado, destinados ao ensino escolar.



ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Demonstre o teorema de Briot Ruffini.
2. Forneça teoremas que envolvem a noção de existência e unicidade de objetos no contexto do Ensino Fundamental.
3. Forneça teoremas que envolvem a noção de existência e unicidade de objetos no contexto do Ensino Médio.
4. Forneça teoremas que envolvem a noção de existência e unicidade de objetos no contexto do Ensino Superior.

AULA 4

Análise de livros de matemática - Parte I

Olá, aluno(a)!

Nesta aula iniciamos a discussão em torno do livro didático de Matemática. Atentamos para o fato de que nas aulas passadas nos detivemos ao âmbito da resolução de problemas. Diferenciamos no material de Didática da Matemática a natureza essencial de uma situação-problema e de um mero exercício, entretanto, sua exploração num ensino eficaz de Matemática depende, em grande parte, da qualidade do livro didático.

Objetivo

- Compreender a abordagem, por parte dos livros didáticos, das noções de conjuntos numéricos e funções exponencial e logarítmica.

TÓPICO 1

Análise de livros: estudo do conceito de conjuntos numéricos

OBJETIVO

- Identificar erros conceituais e o uso inadequado de conceitos de conjuntos numéricos abordados nos livros didáticos.

Nesta aula discutiremos problemáticas nem sempre visíveis e muito menos identificáveis para olhares descuidados. Tais problemáticas dizem respeito ao principal, se não o único instrumento de apoio, que serve como guia e direcionamento para toda a ação do professor. Com relação a isto, Lima (2001, p. 462) destaca que:

O livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor para realizar seu trabalho. Dele são tiradas as listas de exercícios, é nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com a classe. Muitas vezes (quase sempre) o livro didático é onde o professor aprende aquilo que vai transmitir a seus alunos, pois em geral não estudou na faculdade (se é que frequentou) um número considerável de assuntos que fazem parte do currículo escolar. Portanto, o nível, a qualidade do ensino e, conseqüentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis. Daí a importância dos mesmos.

Lima (2001) aponta, critica e denuncia sérios problemas no excerto acima. Problemas intrínsecos e específicos na frente de ensino da Matemática e que têm sido atacados com mais seriedade em outros países (Portugal, Inglaterra, França), referentes à formação do professor de Matemática. E, a partir de uma formação precária, dificilmente se adquire um cabedal de conhecimentos matemáticos na graduação capazes de indicar fraquezas e deficiências no livro didático.

Desde que assumimos como principal referência a obra de Lima (2001) e os exemplos emblemáticos apontados por ele e por sua equipe de professores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, iniciamos com a noção de conjunto, abordada no programa de Matemática do Ensino Médio. Lima (2001, p. 6) aconselha que “o principal uso desta noção é dar uma interpretação concreta para algumas ideias, fundamentais porém abstratas, de natureza lógica, traduzindo-as com relações entre conjuntos”.

Lima (2001) comenta também as primeiras noções lógicas e regras de inferências necessárias para traduzir e empregar propriedades matemáticas. Deste modo, Lima observa que o matemático refere-se sempre ao conjunto de propriedades ou a uma condição, o matemático refere-se sempre ao conjunto de objetos que gozam daquela propriedade ou satisfazem aquela condição. Além disso, em muitos casos, “o matemático precisa assumir ou demonstrar uma implicação lógica do tipo $p \Rightarrow q$, interpreta-a como uma inclusão entre conjuntos” (LIMA, 2001, p. 6).

Infelizmente, na maioria dos compêndios de Matemática usados em nossas escolas não fica claro para o leitor o motivo pelo qual os conjuntos são colocados no começo do livro (LIMA, 2001). Mas antes de prosseguir com exemplos específicos, recordamos a definição de conjunto que é formado por elementos (LIMA, 2004). Mais especificamente, dado um conjunto A e um objeto qualquer a (que pode até mesmo ser outro conjunto), a única pergunta cabível em relação a eles é: $a \in A$ ou $a \notin A$?

Lima (2001, p. 6) critica a falta de conexão entre conjuntos e lógica. Por exemplo, em alguns livros analisados pelo autor e sua equipe, observa que a negação de uma proposição ($\sim p$) se relaciona com a noção de complemento de um conjunto $A^c = U - A$. E que podemos olhar a contrapositiva $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \Rightarrow \sim q$ de modo semelhante que verificamos em $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$. Lima (2001, p. 7) critica que “as Leis de Morgan são demonstradas de maneira formal, usando símbolos em vez de palavras, o que torna o argumento ininteligível neste estágio de aprendizagem”.

O autor aponta algumas “invenções” pedagógicas no sentido de significar e dar sentido a noção de conjunto como as descrições $xu \{y \mid u\}$ é satélite natural da Terra} ou $xu \{y \mid u\}$ é o mês do ano que começa pela letra M . O autor condena tais criações ao explicar que isto não é Matemática.



GUARDE BEM ISSO!

Seria mais vantajoso desenvolver referências em conjuntos no contexto da Geometria e trabalhar a interdisciplinaridade.

Lima (2001) comenta alguns erros de concordância nas obras quando registra o uso da frase “@é o conjunto dos elementos u tal que u obedece a propriedade M ”. Quando o correto seria “@é o conjunto dos elementos u tais que u goza da propriedade M ”. Lima (2001) indica o uso inapropriado do verbo obedecer e explica que é mais adequado afirmar que um objeto goza de uma propriedade.

Outras notações introduzidas pelos autores de livros podem proporcionar confusão para o estudante e cabe ao professor, com sua sensibilidade, adotar aquela que transmite maior significado e não aquela que lhe é mais familiar. Neste sentido, registramos a notação “carregada” da inclusão de conjuntos $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$. Outra notação comentada por Lima (2001) é a de igualdade de Conjuntos $A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Lima (2001) acrescenta que essa definição é complicada e pouco natural. O professor poderia simplesmente explicar, no caso da igualdade de conjuntos que se são o mesmo conjunto, devem possuir os mesmos elementos.

Este tipo de abordagem conjuntista coloca ênfase maior nos “símbolos” do que em seu “significado”. Note-se, todavia, que durante todo o seu percurso de formação acadêmica, o professor recebe e vivencia justamente a predominância das simbologias e estruturas.

Lima (2001) discute um exemplo interessante relacionado à noção de complementar de um conjunto. Considera os conjuntos $A = \{2,5,7,9\}$ e $B = \{5,7\}$ e adota a seguinte tabela (ver tabela 1). Notamos que este recurso didático apoiado em tabelas apresenta um caráter interessante, todavia, o mesmo esquema pode ser explorado nas demais relações e propriedades entre conjuntos? Neste exemplo, se o uso da tabela é pontual e esporádico, sem continuidade na abordagem do conteúdo, para que explorar? Tais questionamentos serão deixados para o leitor como elemento de reflexão.

	A	B
3	\in	\notin
5	\in	\in
7	\in	\in
9	\in	\notin

Tabela 1 – Descrição das relações de pertença entre elementos

Com relação à introdução ao conjunto numérico dos naturais, Lima (2001, p. 7) comenta:

Os alunos que ingressam no Ensino Médio certamente já tiveram um longo contato anterior com os números naturais, inteiros, racionais e até mesmo certos irracionais, como o número p e algumas raízes quadradas não exatas. Reapresentar-lhes esses números só tem sentido se o objetivo for o de ganhar mais consistência teórica, explicando-lhes de forma mais conveniente fatos que foram impostos peremptoriamente antes e, ao mesmo tempo, mostrar, mediante exemplos, problemas e outras aplicações, que essas sucessivas ampliações do conceito de número têm alguma utilidade, na Matemática e fora dela.

Por exemplo, quando escrevemos $m < n$, estamos condicionados a uma **definição formal** e, mais precisamente falando a seguinte equivalência $m < n \Leftrightarrow n - m \in \mathbb{N}^*$. E isto deve ser de conhecimento do professor. Ademais, quando o livro didático apresenta a igualdade $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ o professor deve saber que a construção axiomática deste conjunto é garantida pela **função sucesso** $s(n)$. Lima (2001) critica a apresentação descuidada do conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ e seus subconjuntos \mathbb{Z}_+^* , \mathbb{Z}_- , \mathbb{Z}_-^* , \mathbb{Z}_+ são notações complicadas. Que tal \mathbb{Z}_+^* para indicar o que os matemáticos simplesmente denotam por \mathbb{N}^* ?

Outro problema propicia margem às imprecisões no sentido de distinguir o raciocínio Indutivo do modelo de Indução Matemática. De fato, é comum os autores de livros explorarem alguns casos particulares e, em seguida, declarar, de modo precipitado que a propriedade em estudo continua sendo válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Advertimos que o raciocínio indutivo é empregado no modelo formal de Indução Matemática e, apoiados somente no raciocínio indutivo não se pode afirmar coisas desta natureza. Na próxima aula nos deteremos de modo pormenorizado a este problema no estudo de progressões.

Lima (2001, p. 8) questiona também a linguagem inapropriada e uso de termos do tipo “temos”, “observamos”, “verificamos”, etc., o que não é educativo, pois dá a impressão ao leitor que as proposições gerais da Matemática são estabelecidas mediante a observação de alguns exemplos. Em alguns casos, os autores empregam a expressão, após a discussão de exemplos, “temos que”, o que é semanticamente incorreto, pois “temos que” significa “devemos”. No próximo segmento discutiremos o uso de determinadas operações lógicas no âmbito dos conjuntos numéricos.

1.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS E NÚMEROS REAIS

O caso da abordagem dos números racionais e números reais por parte de

autores de livros é delicada. Com efeito, recordamos que em disciplinas passadas descrevemos o símbolo $\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \mid (x, y) \sim (a, b)\}$ (FERREIRA, 2010, p. 63) e que “o conjunto \mathbb{R} denotado no ambiente escolar na verdade representa o conjunto dos cortes de \mathbb{R} , que podem ser cortes racionais e cortes não racionais”. Reparamos que o professor precisa ser um conhecedor destas formalidades, todavia, como discutir isto com os alunos?

Inevitavelmente, o professor precisa se amparar em uma “metodologia de ensino” que lhe auxilie na discussão extremamente abstrata envolvendo os números reais e seus subconjuntos. Infelizmente, como apontou Lima (2001) no início desta aula, o professor não aprende na academia aquilo que efetivamente lecionará na escola. Lima (2001) aponta pequenos deslizes conceituais dos autores de livros que declaram que a desigualdade do tipo $3 < 7$ não se altera quando se soma o mesmo número a ambos os membros, resultando, por exemplo, $4 = 3 + 1 < 7 + 1 = 8 \therefore 4 < 8$.

O que não se altera é o sentido da desigualdade. Possivelmente uma boa definição de número real, sem mencionar a noção de cortes de Dedekind, é explicar que um número real é o resultado da medida de uma grandeza, que podemos imaginar como um segmento de reta. Número irracional é a medida de um segmento incomensurável com a unidade adotada (LIMA, 2004).

O professor pode explicar também aos seus alunos que um número real é uma expressão decimal (finita ou infinita). Quando tal expressão é finita ou periódica, tem-se um número racional. Em caso contrário, tem-se um número irracional (LIMA, 2001).

Diferentemente dos números complexos que não são ordenados de modo semelhante é que se constrói a noção de ordenação dos números naturais, inteiros e racionais. Os autores de livros dizem que a ordenação dos reais se baseia em no sentido de que a está à direita de b, todavia, o que podemos decidir com relação aos números reais 0,1563847 e 0,1563798561?

De modo recorrente, encontramos no *il`rp* acadêmico, considerações do tipo: o “professor de Matemática deve adotar uma Didática”, “O professor de Matemática deve possuir uma abordagem inter e transdisciplinar”, “O professor de Matemática não pode avaliar seus alunos baseando-se apenas em uma prova ou avaliação”. Estas concepções equivocadas, sem fundamentação e sem consistência, além de generalistas, não indicam em nenhum aspecto como resolver o problema.

De fato, é notório no contexto de ensino escolar, abordagens estanques,

abordagens que não possibilitam que o estudante vislumbre a inter-relação entre os conceitos matemáticos, todavia, a situação é bem mais preocupante, pois, em alguns casos, nem mesmo o professor compreende e domina a inter-relação dos conceitos matemáticos. Sem mencionar o fato de que não tem sentido exigirmos um ensino interdisciplinar, se na maioria dos casos, em sua formação, o licenciando é submetido a um ensino estanque, com pouca ou nenhuma relação, explicação e orientação relativa ao modo pelo qual os conteúdos escolares se relacionam.

Para exemplificar este quadro preocupante, citamos o caso do estudo das funções que encontramos nos livros didáticos. Neste rol, podemos mencionar o estudo das funções polinomiais do primeiro grau, das funções polinomiais do segundo grau, operações com funções, função exponencial e logarítmica e as trigonométricas.

No que diz respeito ao estudo de funções polinomiais do primeiro grau, o primeiro a se observar é a nomenclatura empregada por parte dos autores de livros. De fato, em expressões do tipo “funções do primeiro grau” já observamos uma falha conceitual, pois tal terminologia não existe. Lima (2001) comenta que os exemplos e problemas interessantes cedem lugar a um formalismo monótono e muitas vezes mal orientado. O modelo linear e a noção de proporcionalidade não são explorados de modo adequado pela maior parte dos autores analisados em Lima (2001, p.10).

Em outros casos, a noção de função é apresentada em toda a sua generalidade, a partir de pares ordenados, produto cartesiano e relação binária. Tudo isto é absolutamente desnecessário e inútil. O próprio livro, depois de dada a definição geral, todas as vezes que introduz uma função, trata-a como uma correspondência sem nunca mais falar em pares ordenados.

A propósito, vale recordar aqui a definição formal de par ordenado encontrada em Lima (2004) que caracteriza o símbolo $m = (u, v)$ como formado de um objeto u , chamado a primeira coordenada de m e um objeto v , chamado a segunda coordenada de m . Por outro lado, Lima (2001) critica a noção encontrada nos livros didáticos que chama de par ordenado (u, v) como “um conjunto de dois elementos considerados numa certa ordem”. Tal definição formal é imprecisa, pois se tomamos os pares ordenados do tipo uv , tal que $u=v$, por meio dessa definição, temos o conjunto $\{u, v\} = \{u\}$ e neste não identificamos a que ordem o autor se refere.

Não podemos nos furtar de destacar a definição fornecida por Halmos (2001, p. 123) quando questiona:

o que significa dispor os elementos de A em uma ordem qualquer? Suponha, por exemplo, que o conjunto $>$ é a quádrupla (x, y, z, w) elementos distintos, e suponha que queiramos considerar seus elementos na ordem: $\{x, y, z, w\}$. Mesmo sem definição, podemos, no entanto, fazer dele algo inteligente em termos de conjunto. Ou seja, podemos considerar para cada posição particular na ordenação $\{x, y, z, w\}$, o conjunto de todos os elementos que aparecem naquela posição, ou antes, dela; deste modo obtemos os conjuntos $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}, \{x, y, z, w\}, \dots\}$.

Podemos ir adiante e então considerar o conjunto (ou coleção, se isto soa melhor) $C = \{\{a, b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{c\}\}$ que tem exatamente por seus elementos aqueles conjuntos. Os elementos de C e os elementos destes últimos, estão apresentados de modo não sistemático. Isto foi feito para enfatizar que se baseando na intuição e possivelmente num obscuro conceito de ordem, pode-se produzir algo sólido mais simples e direto.

É interessante a discussão “ingênua” relacionada com os conjuntos e a tentativa de definição formal de um par ordenado. Mais adiante, Halmos (2001, p. 37) decreta que “para um conjunto qualquer X : $(x, y) \in X \times X$ e, se na ordem desejada, x vem primeiro, então $(x, y) \in X \times X$; se, todavia, y vem primeiro, então $(y, x) \in X \times X$ ”. Assim, ele define formalmente o par ordenado de X com primeira coordenada x e segunda coordenada y , como o conjunto definido por: $\{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$. Naturalmente, do ponto de vista de uma metodologia de ensino, é inviável apresentar tal noção com toda sua formalidade no contexto escolar, todavia, tal saber deveria ser familiar ao professor.

TÓPICO 2

Análise de livros: estudo do conceito de funções

OBJETIVO

- Identificar e analisar a abordagem do conceito de função nos livros didáticos

Na aula passada discutimos a situação referente à qualidade dos livros didáticos com respeito às noções básicas de Lógica Matemática e os conjuntos numéricos. No que segue, abordaremos questões preocupantes relacionadas com o conceito de função que se caracteriza com a “pedra angular” no contexto escolar.

Vamos recordar agora, do ponto de vista mais formal, a definição de função descrita em Lima (2010, 13) quando explica

uma função $f : A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto $>$, chamado de domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto $?$, chamado de contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permita associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado de o valor que a função assume em u (ou no ponto u).

Mas quando no detemos na análise pelo modo como o qual os autores introduzem esta definição formal nos livros didáticos, ficamos surpresos. Com efeito, Lima (2001, p. 10) explica que como toda a preparação, a definição de função, é dada incorretamente como “uma relação que a cada elemento u de $>$, faz corresponder um único elemento \square de $?$ ”. O maior questionamento deste autor refere-se à condição em que a relação ‘ O ’ é, por definição, um subconjunto de $>?$ ’ e é necessário saber de modo explícito como ocorre tal correspondência.

Mais adiante, Lima (2001) comenta que apesar de toda a complicação e do

aparato formal, em todo o livro ocorrem apenas dois tipos de funções: aquelas com bolinhas e setinhas (que ilustram bem os conceitos gerais, mas que não são usadas para nada mais) e aquelas definidas por meio de fórmulas.

Neste sentido, vale recordar as condições de injetividade (dados $x_1, x_2 \in A$, tais que se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) e sobrejetividade (dado $y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$) de uma função $f: A \rightarrow B$. Todavia, os livros didáticos dão a impressão que a maioria das funções se comporta como a que exibimos na figura abaixo.

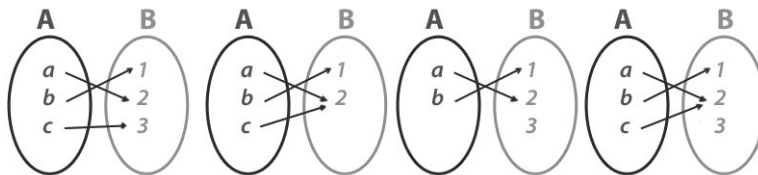


Figura 1 - Diagramas pictóricos de bolinhas criticados por Lima (2001)

Advertimos ainda que, o professor de Matemática deve ser um bom conhecedor das **definições formais** acima e suas **equivalências lógicas**, embora, na maioria dos casos, não as explicita em sala de aula. Reparamos que dados $x_1, x_2 \in A$, tais que se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ é a **contrapositiva** da condição de **injetividade**. Todavia, o ensino predominantemente baseado nestas **condições lógicas** pode provocar barreiras ao estudante que não possuem um razoável amadurecimento para compreender tais **inferências lógicas**. E em muitos casos o professor perde a oportunidade de explorar situações mais interessantes de gráficos ($f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = |n| + 2$) como o que exibimos abaixo.

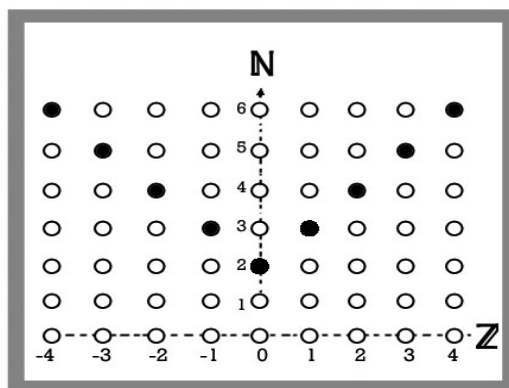


Figura 2 - Diagramas explorando conjuntos numéricos e funções (HAMMACK, 2009, p. 184)

Ora, os exemplos anteriores indicam um caminho cômodo para o *burboq*, no sentido de imprimir ênfase ao formalismo. Não obstante, na figura 2, trazemos uma

descrição gráfico-geométrica das relações. O caráter preocupante é o fortalecimento de apenas um desses componentes. Este tipo de atitude é improdutiva e provoca complicações ao entendimento. Lima (2001) pondera que o estudo da Matemática deve proporcionar aos jovens a oportunidade de desenvolver o seu espírito crítico, aprender a raciocinar corretamente, fortalecer a imaginação e a criatividade, e habituar-se a tomar decisões baseadas na análise cuidadosa dos fatos. Estudada de modo como está mostrada neste livro, a Matemática é monótona, desagradável e desestimulante.

Os autores de livros não fornecem também características precisas da noção de função. Com efeito, a principal característica de função afim, por exemplo, é que para acréscimos iguais dados a variável u , corresponde a acréscimos iguais para c e d ; todavia, o professor pode apoiar-se nos gráficos e buscar transmitir de modo intuitivo esta propriedade, uma vez que, se o mesmo for enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (LIMA, 2004) e, em seguida, enunciar e demonstrar o seguinte teorema: seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de e , mas não de u , então $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim (op.cit 2004, p. 100).

Decididamente, ao se depararem com este enunciado, os alunos desistirão da Matemática, todavia, no que diz respeito ao professor, tal conhecimento deveria ser familiar. Observamos que Teorema Fundamental da Proporcionalidade indica propriedades intrínsecas a um objeto particular, implicando outros cuidados, na medida em que nos apoiamos na língua materna para a transmissão desses saberes. Note-se, por exemplo, o modo inapropriado da seguinte declaração: uma reta que intercepta outra., quando o correto é afirmar que uma reta que intersecta outra.

A boa Didática da Matemática recomenda a introdução intuitiva dos conceitos e, depois de algum tempo para a familiarização com os mesmos, efetua-se, em adequação à clientela ou ao público, a formalização dos conceitos (ALVES, 2010), assim, explorar os significados geométricos dos coeficientes presentes na função afim $f(x) = a \cdot x + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Neste sentido, Lima (2001, p. 51) acentua que não se observa que b é a ordenada do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo v , ou seja, d e c . E (nem ao menos para justificar a expressão “coeficiente angular”) não se chama a atenção para o fato de que o valor de ‘ a ’ determina a inclinação do gráfico em relação ao eixo u .

Outro conhecimento básico que o professor deve saber é que quando se constrói o conjunto dos números reais, nele definem-se, de modo axiomático, as

relações de ordem, assim, podemos afirmar que \mathbb{R} é um corpo ordenado. Ademais, valem as seguintes regras, para

$$a, b, c \in \mathbb{R} : \quad (i) \ a < b \Rightarrow a + c < b + c ; \quad (ii) \ a < b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c < b \cdot c \text{ se } c > 0 \\ a \cdot c > b \cdot c \end{cases} .$$

Estas propriedades axiomáticas justificam a descrição do estudo do sinal da função $f(x) = y = ax + b$. No ensino escolar, encontramos afirmações, sem maiores

detalhes dando conta do $f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$ $\begin{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \\ a > 0 \\ \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \\ a < 0 \end{cases}$. Observamos

que foi necessário aplicar uma regra axiomática que apresentamos em (ii). Sem essas propriedades, que são fundamentais e indispensáveis, resolver inequações é impossível (LIMA, 2001, p. 51).

Em outra verificação das propriedades em que as propriedades dos números reais são inevitáveis refere-se ao caso em que a função $f(x) = ax + b$, onde $f : A \rightarrow B$ é **crecente** ou **decrecente**. Observamos que se $a > 0$, dados $x_1, x_2 \in A$ e se

$$x_1 < x_2 \xrightarrow[\text{a} > 0]{\text{monotonicidade da multiplicação}} ax_1 < ax_2 \xrightarrow[\text{monotonicidade da adição}]{\text{monotonicidade da adição}} ax_1 + b < ax_2 + b \therefore f(x_1) < f(x_2) \text{ e a função é}$$

crecente quando $a > 0$. Com o mesmo raciocínio se mostra que se $a < 0$ a função é decrescente.

O problema é que o professor não vai dar sua aula fazendo referência à monotonicidade de adição em \mathbb{R} e a monotonicidade da multiplicação em \mathbb{R} , todavia, mesmo sem ancorar suas explicações nas mesmas e sem o livro de Matemática indicar de modo explícito, o professor deve conhecer e dominar estas propriedades.

Ademais, deve ser de conhecimento do professor o significado das funções **monótonas não-decrescentes** (se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$) e funções **monótonas não-crecentes** (se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$) em qualquer caso a função é dita monótona, o que representa uma extensão geral do conceito e, apesar dos livros não mencionarem, o professor deve conhecer todas as suas condições.

Com respeito ao conceito de função, o professor precisa ficar atento ao fato de que os estudantes manifestam dificuldades para compreender conjuntos do tipo $Dom(f(x)) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ (**domínio da função**) $Im(f(x)) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (**imagem da função**), para funções do tipo $f : A \rightarrow B$.

Por fim, quando os autores abordam e apresentam o conceito de função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, não deviam influenciar o leitor a compreender seu

gráfico como uma definição matemática formal. No que diz respeito a isso, é primordial que o professor conheça o seguinte teorema: “o gráfico de uma função afim $f : x \rightarrow ax + b$ é uma linha reta e, reciprocamente, toda reta não vertical é gráfico de uma função afim” (LIMA, 2004, p. 89-91). E apesar de tratar-se de uma propriedade que explora noções da Geometria Analítica, tal falha conceitual deve ser identificada pelo professor.

Para concluir esta parte inicial, recordamos a definição formal de função inversa.

Lima (2004) apresenta este conceito ao comentar que uma função $g : Y \rightarrow X$ é dita a **inversa** de $f : X \rightarrow Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ (*), para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, a partir desta **definição formal**, d é inversa de c se, e somente se, c é inversa de d .

Como de costume, os autores de livros didáticos abusam da exploração do **raciocínio algorítmico** (OTTE, 1991) que discutimos na disciplina de Filosofia das Ciências e da Matemática. O exemplo emblemático é tomar funções do tipo $f(x) = 2x + 3$ e ensinar ao estudante a seguinte “receita de bolo”: chamamos $y = 2x + 3$

$$y = 2x + 3 \xrightarrow[\text{x por y}]{\text{trocando}} x = 2y + 3 \xrightarrow[\text{a variável y}]{\text{isolando}} 2y = x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{x - 3}{2}$$

Assim, a função que procuramos é descrita por $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$. Como já discutimos em outros trabalhos (ALVES, 2011 (a)), o aluno pode resolver dezenas de “exercícios” desta natureza e, mesmo assim, não conseguirá adquirir o real significado e a essência da noção de função inversa.

De fato, o conhecimento envolvido nestes “malabarismos algébricos” não nos permitem afirmar nada a respeito sobre a **injetividade** e a **sobrejetividade** da função $f : X \rightarrow Y$ que possui uma inversa $g : Y \rightarrow X$. Poderíamos questionar por que argumentos algébricos como o que discutimos não poderiam ser aplicados para funções do tipo $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ou $f(x) = \sqrt{2x + 3}$?

Lima (2004, p. 187) recorda que se temos as condições que falamos em (*), então, a função f , como consequência, deverá ser **injetora** e **sobrejetora**. De fato, dados $x_1, x_2 \in X$ de modo que $f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow[\text{aplicando g}]{\Rightarrow} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \xrightarrow[\text{hipótese}]{\Leftrightarrow} (x_1) = (x_2)$. Por sua vez, a igualdade $f(g(y)) = y$, vale para todo $y \in Y$. Isto implica que a função $f : X \rightarrow Y$ é **sobrejetiva**, pois dado $y \in Y$, mas como temos a função $g : Y \rightarrow X$, por hipótese, tem sentido escrever $g(y) \in X$ que chamaremos de $x = g(y) \in X$. Por fim, exibimos que o elemento $y \in Y$ tomado, é realizado por este elemento em X ,

do seguinte modo $f(x) = f(g(y)) \stackrel{\text{hipótese}}{=} y \therefore f(x) = y$. Isto quer dizer que $f(X) = Y$.

Agora, o conceito de função polinomial do 2º grau. Com o mesmo estilo, os autores de livros são criticados por Lima (2001, p. 52) quando declara que “as afirmações feitas nunca são justificadas,” os fatos mais relevantes e básicos sobre as funções quadráticas são omitidos, os exercícios são quase todos de natureza manipulativa e nunca o leitor é induzido ou solicitado a raciocinar.

Demodo semelhante ao que sublinhamos com a função afim, o gráfico da **função quadrática** se chama **parábola**, sem maiores explicações, todavia, Lima (2004, p. 114) discute de modo formal e preciso a noção de **função quadrática**, quando observa que os coeficientes a, b, c de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Em outras palavras, devemos verificar as condições lógicas $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em seguida, tomamos $x = 0 \therefore 0 + c = 0 + c' \leftrightarrow c = c'$. Assim, segue a condição $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Em seguida, escrevemos $(ax + b)x = (a'x + b')x \Leftrightarrow (ax + b) = (a'x + b')$. Fazemos agora $x = 1 \therefore (a + b) = (a' + b')$ e $x = -1 \therefore (-a + b) = (-a' + b')$. Resulta no final das contas que $a = a'$ e $b = b'$.

A partir desta argumentação, Lima (2004, p. 114) declara que se pode identificar uma função quadrática com um trinômio do segundo grau, entretanto, vale destacar a diferença entre um **trinômio do segundo grau** e uma **função quadrática**. Um **trinômio do segundo grau** é representado pelo autor pela expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A palavra formal ai significa que a letra X é apenas um símbolo, sendo X^2 um outro modo de escrever XX . Por definição, dois **trinômios** $aX^2 + bX + c$ e $a'X^2 + b'X + c'$ são iguais quando $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

Lima (2004) explica ainda que um trinômio por ser identificado com um **terno ordenado** (a, b, c) . A cada **trinômio** corresponde a **função quadrática** por $x \mapsto ax^2 + bx + c$ e tal correspondência é biunívoca.

Outra propriedade descuidada dos autores de livros didáticos, mas deve fazer parte do conhecimento do professor refere-se a seguinte propriedade: se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para três valores distintos de u , então $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

Neste sentido, Lima (2001, p. 115) admite que duas funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ assumam os mesmos valores em

$f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = f(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, onde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ são distintos. A estratégia pouco usual no ensino escolar consiste em tomar os coeficientes $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$ e mostrar, usando tais hipóteses que todos são nulos.

Por fim, Lima (2004) enuncia o seguinte teorema:

Teorema: Sejam $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ tais que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são pontos distintos de uma parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Outra propriedade peremptoriamente assumida pelos autores de livros didáticos diz respeito ao comportamento da concavidade da parábola, que os mesmos alegam representar o gráfico de uma função quadrática, na “condição do sinal do coeficiente” $a > 0$ ou $a < 0$.

Lima (2004) recorda que a tangente a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta. A tangente de uma parábola tem sua posição determinada pelo seguinte teorema.

Teorema: Sejam $P = (x_0, y_0)$ um ponto da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $Y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ o valor de $f(x_0)$. Então, a tangente à parábola no ponto P é a reta $y = 2ax_0x + Y_0 + 2ax_0^2 + bx_0 + c$.

DEMONSTRAÇÃO:

Lima (2004, p. 137) realiza demonstração verificando que todos os pontos dessa parábola que têm abscissa diferente de x_0 estão fora da reta mencionada e no mesmo semi-plano determinado por ela. A figura 3 explicita a heurística da situação.

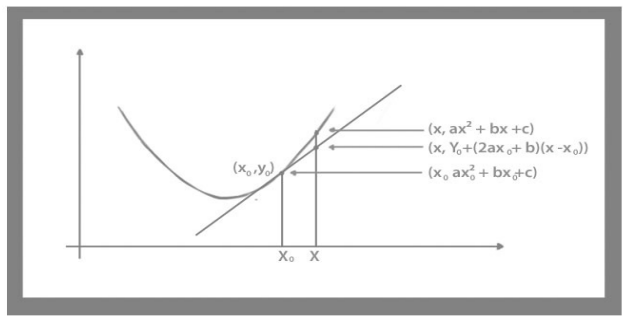


Figura 3 - Desenho sugerido por Lima (2004, p. 137)

Lima (2001, p. 137-138) inicia sua argumentação, admitindo inicialmente que $a > 0$. E declara “a necessidade de mostrar que para todo $x \neq x_0$, o ponto (x, y) da parábola, com $y = ax^2 + bx + c$ está acima do ponto $(x_0, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0))$ ” como podemos identificar na figura 3, de mesma abscissa x , situado sobre a reta. Noutras palavras, queremos mostrar que

$$\begin{aligned} x \neq x_0 &\Rightarrow \underset{\text{gráfico da parábola}}{ax^2 + bx + c} > \underset{\text{inclinação do gráfico}}{y_0 + (2ax_0 + b) \cdot (x - x_0)} = \\ &= (ax_0^2 + bx_0 + c) + (2ax_0 + b)(x - x_0) \end{aligned}$$

Mas verificar isto, basta notar que se $x \neq x_0$, temos:

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c - [y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)] \\ &= ax^2 + bx + c - [(ax_0^2 + bx_0 + c) + (2ax_0 + b)(x - x_0)] \\ &ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + 2ax_0x + bx - 2ax_0x_0 - bx_0] \\ &= ax^2 - [ax_0^2 + 2ax_0x - 2ax_0^2] = \\ &= ax^2 + ax_0^2 - 2ax_0x = a \cdot \underset{x \neq x_0}{(x - x_0)^2} > 0 \text{ se } a > 0 \end{aligned}$$

Isto mostra que “a reta de inclinação $(2ax_0 + b)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) , com $y_0 = f(x_0)$, tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de $f(x)$ que todos os pontos da parábola estão acima dessa reta. Logo esta reta é tangente à parábola neste ponto”, (LIMA, 2004, p. 138). Quando $a > 0$, a parábola se situa acima de qualquer de suas tangentes, conforme acabamos de ver. Se $a < 0$ então a parábola se situa abaixo de todas as suas retas tangentes.

Decerto que esse modelo generalizado não pode ser completamente discutido pelo professor com seus alunos, todavia, mesmo se os autores de livros não explicarem de modo preciso e pormenorizado esse modelo, o professor de Matemática deve conhecê-lo. No contexto escolar, se tornaria estranho explicar por que a **inclinação** $(2ax_0 + b)$ condiz com a reta tangente que construímos nesta demonstração.

Por outro lado, quando sabemos que inclinação (e não coeficiente angular) nos interessa, aplicamos a equação da reta: $(y - y_0) = (2ax_0 + b)(x - x_0)$. $\therefore y = y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)$ e temos agora conhecimentos de Geometria Analítica, conteúdo ainda desconhecido, dependendo da série que consideramos. Para concluir, reparamos que nas desigualdades que escrevemos, concluímos que $ax^2 + bx + c - [y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)] = a \cdot \underset{x \neq x_0}{(x - x_0)^2} < 0$ se $a < 0$

Portanto, no caso de $a < 0$, temos $ax^2 + bx + c < [y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)]$, para todo $x \neq x_0$. Sugerimos para o leitor esboçar o desenho para este caso como o que exibimos na figura 3.

Neste tópico discutimos elementos relacionados com funções mais simples. Na próxima seção, abordaremos algumas questões atinentes ao estudo das funções $f(x) = e^x$ e $d\%&\square\square d\%&\square\square$

TÓPICO 3

Estudo do conceito de função exponencial e logarítmica

OBJETIVO

- Identificar e analisar a abordagem do conceito de função exponencial e logarítmica nos livros didáticos

No tópico passado salientamos algumas propriedades descuidadas por autores em relação a livros que podem comprometer a evolução do conhecimento conceitual do estudante. Nesta seção, passaremos a uma discussão referente à **função exponencial** definida para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, temos $f(x) = a^x$. Lima (2001, p. 53) menciona uma característica intrínseca à mesma quando destaca que **trata-se da única função monótona** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. Acrescenta também que as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as **únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h , mas não de x** (LIMA, 2001, p. 32).

Lima (2001) questiona os autores de livros didáticos pelo fato de não darem ênfase às principais aplicações e variedades de situações na vida real em que as grandezas variam segundo essas normas, todavia, não estudam com a devida clareza sua monotonicidade e, além disso, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Em vez disso, o livro é voltado inteiramente para equações e inequações exponenciais, sem observações interessantes nem conclusões inteligentes (op.cit 2001).

Uma noção importante neste tópico apresentados pelos livros didáticos diz respeito à extensão da noção de potência de um número positivo para o caso em que o expoente é um inteiro, um número racional ou um número real. Lima (2001)

critica o modo “por decreto”, sem preocupação alguma em explicar por que foram escolhidas essas definições e não outras.

De modo particular, as propriedades operatórias, como “ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ” e “ $(a^m)^n = a^{mn}$ ”, são mencionadas de passagem, sem justificativa alguma no caso de inteiros, e aceitas como válidas, sem comentário adicional algum, para expoente racional. Nem ao menos se observa que se $r = \frac{m}{n}$, a definição de $a^{m/n}$ depende apenas do número racional ‘r’ e não da fração que o representa” (LIMA, 2001, p. 53).

Caraça (1951, p. 27) desenvolve um comentário interessante no contexto desta discussão. Neste sentido, o autor questiona as definições adequadas para expressões do tipo $a \cdot 0$ e a^0 . O autor recorda que sabemos que a operação de multiplicação é comutativa e, por outro lado, que “ $0 \cdot a = 0$ ”, logo, se queremos conservar esta lei formal – comutatividade – a definição a dar deve ser tal que $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$. Portanto, como nova definição, temos $a \cdot 0 = 0$. Vemos agora a potência de a^0 e que a potenciação goza da propriedade multiplicativa “ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ” (CARAÇA, 1951, p. 27).

Se queremos manter esta **lei formal**, a entidade a definir $X := a^0$ tal como o produto se efetue segundo esta lei. Isto é, deve vir a ser do seguinte modo $a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$, todavia, admitimos a seguinte propriedade axiomática $n = 0 + n$, para $\forall n \in \mathbb{N}$, logo deve ser descrita por $a^0 \cdot a^n = a^n$. **E esta igualdade exige necessariamente que $a^0 = 1$. E, portanto, como consequência de obedecermos esta propriedade operacional, definimos $a^0 = 1$.**

Exemplos como este explicado por Caraça (1951) podem conduzir o estudante a compreender a natureza e o motivo do estabelecimento de uma definição formal. E como já mencionamos nas aulas de Didática da Matemática, o professor deve se esforçar para explicitar e fornecer significado para elas. Diferentemente do que muitos livros didáticos que produzem definições formais sem muitos cuidados e dão a impressão de um determinado “artificialismo” e “arbitrariedade”.

Outro aspecto que funciona como “entrave metodológico” para o professor diz respeito às representações e construções dos gráficos de funções do tipo:

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad h(x) = \pi^x$$

É interessante que antes de explorar propriedades de funções particulares da função exponencial, os autores falam de propriedades gerais, como o crescimento e

decrecimento. Note-se que com o auxílio de algum software de Matemática, como o Geogebra, traçamos com facilidade seus gráficos.

Numa era tecnológica, nos admiramos ainda a falta de intimidade com o manuseio de programas computacionais que podem auxiliar o ensino tecnológico. E o que não se pode perder de vista é que seu uso deve ser apoiado em propostas metodológicas de ensino da Matemática a partir de um aparato computacional.

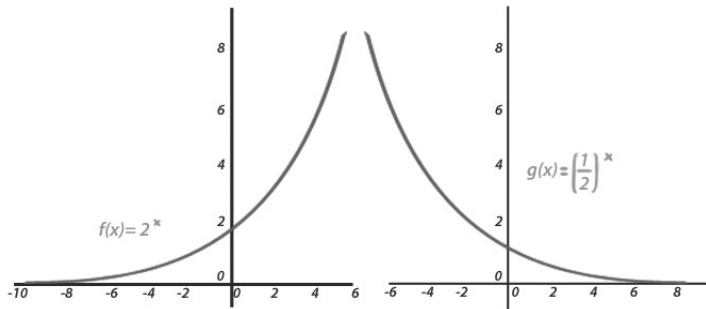


Figura 4 - Plotagem de gráficos da função exponencial com o Geogebra (elaboração própria)

De acordo com o que discutimos na disciplina de Didática da Matemática, o professor pode auxiliar o entendimento do estudante na medida em que relaciona e explora os aspectos numéricos, geométricos e algébricos do mesmo conceito matemático, entretanto, se no principal instrumento (o livro didático) de uso didático do professor, Lima (2001, 2004) indica uma preferência e atitude em transformar a Matemática num jogo que envolve “malabarismos algébricos” e o emprego sem maiores cuidados de fórmulas, o que se pode esperar do ensino e da aprendizagem destes estudantes? O “lúdico” pode evitar a hegemonia do raciocínio algorítmico em sala de aula? Mas como?

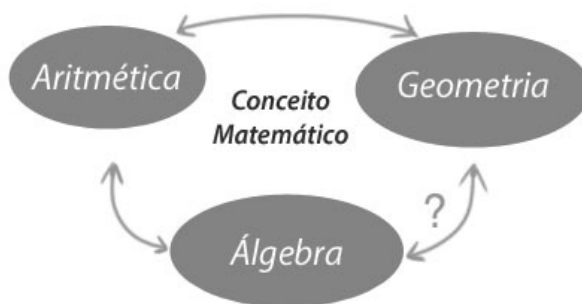


Figura 5 - Relações conceituais exploradas no ensino de Matemática (ALVES, 2011)

Por outro lado, Lima (2001, p. 462) alerta que “estamos certos de que as coleções aqui analisadas são adotadas pela absoluta maioria dos professores”. Mais ainda: elas refletem em seu bojo a atitude, a visão de matéria, a linguagem,

os hábitos e o conhecimento matemático predominantes no meio em que estão inseridas. Por isso, baseando-se em suas colocações e nas relações evidenciadas na figura 5, a mudança metodológica e a tônica geral no ensino não sofrerá mudanças se o próprio professor, desde sua etapa inicial de formação, não vivenciar e experienciar situações de ensino diferenciadas.

Em outro trecho, Lima (2001, p. 173) critica a seguinte orientação dos autores de livros para o leitor: “para resolvermos uma equação exponencial, devemos transformar a equação...em igualdade de mesma base...”. No entanto, em todos os exemplos abordados, os dados são preparados para que se chegue a esta forma de maneira explícita e sem o mínimo recurso ao uso de logaritmo ou mudança de base. Não se faz nenhuma menção sobre se isto é sempre viável e permitido (op.cit 2001, p. 173).

Lima (2001, p. 123), critica que equações do tipo $3^x = 2$ envolvem seções descritas como “Resolução de equações com o auxílio de Logaritmos”, onde não é feita nenhuma menção à “equação exponencial”. Dentro da visão geral dos alunos, segundo a qual a atividade matemática é essencialmente de manipulação numérica, os setores de Matemática são compartimentalizados a partir de receitas envolvidas.

Outros exemplos encontrados nos livros didáticos podem ser apontados, todavia, sua discussão se torna interessante na medida em que o professor domina com profundidade a seguinte definição formal que considera $a \in \mathbb{R}^+$, e suporemos que $a \neq 1$. A **função exponencial** de base ‘a’, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$: (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; (2) $a^1 = a$; (3) $\begin{cases} \text{se } x < y \Rightarrow a^x < a^y & \text{para } a > 1 \\ \text{se } x < y \Rightarrow a^x > a^y & \text{para } a < 1 \end{cases}$.

Reparamos que a propriedade (1) pode ser descrita como $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ e que c não pode assumir o valor 0. De fato, se existe algum $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$, segue que $f(x) = f(x - x_0 + x_0) \stackrel{(1)}{=} f(x - x_0) \cdot f(x_0) = f(x - x_0) \cdot 0 = 0$, portanto, $f(x) = 0$. Mais ainda, se uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ possui a propriedade (1) será sempre positiva (como vemos os casos particulares na figura 3).

Lima (2004) escreve que $\forall x \in \mathbb{R}$, temos: $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$. Assim, diante da propriedade (1), tanto faz dizer que a **função exponencial** é definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ou $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Por outro lado, **quando tomamos na definição acima $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, a tornamos sobrejetiva, ou seja, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$** . Lima (2004).

Estes cuidados e o conhecimento aprofundado das definições formais é condição $pfkb\bar{r}^{\wedge}\bar{a}l\bar{k}$ para um ensino de Matemática com segurança. Assim,

concordamos com Lima (2001) quando, a partir de suas considerações, nos permite afirmar que o professor de Matemática deve, antes de qualquer coisa ou preocupação, ser “conteudista”. Isto quer dizer que domina com profundidade aquilo que vai ser objeto de sua regência.

Apenas após preencher esta exigência, é que podemos nos preocupar com alguma forma de “abordagem metodológica”, sem descuidar dos aspectos epistemológicos e filosóficos (ALVES, 2011(b)) e históricos (2011(a)). Relacionadas as propriedades que mencionamos, Lima (2001) critica que muitos autores de livros não esclarecem propriedades do tipo $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, sem mencionar o conceito de função injetiva.

Em outro comentário, Lima (2001, p. 56) denuncia

mais uma vez, não é apresentada qualquer motivação relativa ao estudo de funções exponenciais. Nem mesmo exemplos de situações práticas em que as funções exponenciais já são fornecidas pelo enunciado. Deve-se notar que questões deste tipo (muitas vezes associadas com modelos de crescimento populacional ou desintegração radioativa) ocorrem em vestibulares e o autor não selecionou nenhuma delas para a seção dos problemas de vestibulares.

Não é feito nenhum comentário entre funções exponenciais e progressões geométricas. Neste sentido, como o professor pode desenvolver uma mediação pedagógica do seu conteúdo específico que explore a relação conceitual dos conceitos matemáticos, se o mesmo é apresentado (seja no ambiente de formação ou pelos livros didáticos) de modo estanque e sem conexão?

Para exemplificar o comentário do último excerto, consideramos uma função exponencial do tipo $f(x) = b \cdot a^x$, com $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se considerarmos uma **progressão aritmética** $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$, de razão ‘h’, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots\}$ também formam uma **progressão aritmética**.

O argumento é simples e pode ser encontrado em Lima (2004, p. 185). De fato, ele dispõe a seguinte lista: $\{b \cdot a^{x_1}, b \cdot a^{x_2}, b \cdot a^{x_3}, b \cdot a^{x_4}, \dots, b \cdot a^{x_n}, \dots\}$ e pode-se observar que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n+h} = b \cdot a^{x_n} \cdot a^h = (b \cdot a^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h$, segue que $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = a^h = cte$. O que foi discutido, em determinadas circunstâncias de ensino não é explicitada ou mesmo conhecida pelo professor.

Por exemplo, na figura 5, vemos os gráficos gerais apresentados por Lima et al (2001, p. 55), todavia, com o auxílio computacional, plotamos o gráfico da função

$f(n) = 2^n$, para $n \geq 0$ que diz respeito à restrição de uma **função exponencial** ao conjunto \mathbb{N} . Reparamos que nos **modelos discreto** (lado direito) tais propriedades são mais evidentes.

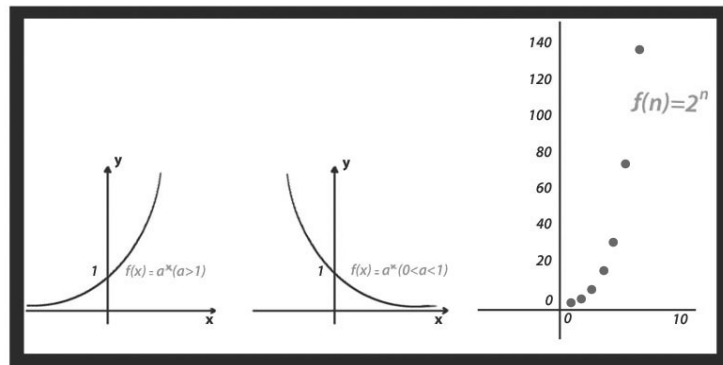


Figura 6 - Lima (2001, p. 55) e modelo exponencial restrito aos números naturais

Para concluir os comentários, críticas, considerações e sugestões pertinentes ao conceito de função exponencial, enunciamos dois teoremas que condicionam todo o tratamento formal desta função. Tais teoremas são encontrados em Lima (2004).

Teorema (Caracterização da função exponencial):

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua satisfazendo as condições:

- (i) $f(1) = a$, $a > 0$, $a \neq 1$
- (ii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

Então, $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Ver Lima (2004, p. 183). Lima (2001) explora o seguinte ciclo de equivalências lógicas (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (i). Note-se que este tipo de demonstração é omitido dos livros didáticos (op.cit 2001). Entretanto, pode-se optar por (ii) \rightarrow (i) \rightarrow (iii) \rightarrow (ii) ou (iii) \rightarrow (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii).

Sugerimos ao leitor o estudo deste teorema no sentido de testar seus conhecimentos e domínio deste modelo formal pertencente ao contexto escolar. E, apesar do fato de que este modelo formal serve para caracterizar o objeto matemático que chamamos usualmente de função exponencial não ser exigido dos estudantes, assumimos o pressuposto de que o professor deveria conhecer e dominar, de modo aprofundado, bem mais do que realmente vai efetivamente ensinar e explorar. Os mesmos comentários se encaixam com respeito ao próximo teorema.

Teorema (Caracterização das funções do tipo exponencial):

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente tal que $f(x+h) - f(x) = f(x)$ para todo $x, h \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = g(0) \cdot \frac{g(1)}{g(0)}^x = b \cdot a^x$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$.

DEMONSTRAÇÃO:

Ver Lima (2004, p. 185).

Lima (2004, p. 184) faz um comentário interessante relacionado com o teorema da caracterização da função exponencial. O autor explica que a hipótese de monotonicidade pode ser substituída pela hipótese de que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ seja **contínua**, que diz respeito a um tópico estudado pelos egressos de um curso de licenciatura ou bacharelado em Matemática. O teorema fica agora descrito do seguinte modo.

Teorema (Caracterização da função exponencial):

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = a^x$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = a^x$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = a^x$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = a^x$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$.

Repare que Lima (2004) emprega um argumento de densidade dos números reais. Argumentos como este demonstram que muitos tópicos estudados no contexto escolar são apoiados em conteúdos complexos e que envolvem ideias que exigem modelos matemáticos de abstração sofisticados (como o caso do Cálculo Diferencial e Integral).

O problema que se coloca é que metodologia ou abordagem este professor deverá adotar em sua escola para que explore as “ideias intuitivas” e mesmo

provisórias deste e de outros modelos matemáticos formais sem incorrer no mesmo “erro” ou omissão dos autores de livros didáticos que optam simplesmente por não discutir e apresentar para o leitor.

Para concluir este tópico, nos resta discutir a função logarítmica. Com relação a este conteúdo, Lima (2001) acentua que é claro que as situações contextualizadas motivam a leitura e aumentam a cultura do aluno, mas, justamente por isso, exemplos artificiais devem ser evitados. Com relação aos aspectos formais necessários a esta definição, o autor critica o descuido com respeito às garantias da existência e unicidade do logaritmo.

Em outros textos, Lima (2001, p. 279) menciona que “a exposição da função logarítmica traz um caráter manipulativo”. Não há aplicações por meio de problemas em cujo enunciado não apareça a palavra “logaritmo”. Pois uma das características da situação-problema é o solucionador descobrir do que se trata a situação.

Para recordar, mencionamos que Lima (2004, p. 190) comenta que para todo o número $a \neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, é uma correspondência **biunívoca (injetora e sobrejetora)** entre os conjuntos \mathbb{R} e \mathbb{R}^+ , crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Com a propriedade adicional que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Segue-se que f possui uma função inversa. Sua inversa é a função $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}^+$, o número real $\log_a x \in \mathbb{R}$, chamado de **logaritmo de x na base a**. Lima (2004).

Reparamos que temos agora $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, pela definição descrita, devemos ter que $f(f^{-1}(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x)) = x$. Por definição de função inversa, mas isto vai equivaler a escrever: $f(f^{-1}(x)) \underset{f^{-1}(x)=\log_a x}{=} f(\log_a x) = a^{\log_a x} \underset{\text{definição inversa}}{=} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De modo equivalente, empregando a definição de inversa de uma função, escrevemos: $f^{-1}(f(x)) \underset{\text{definição função}}{=} f^{-1}(a^x) = \log_a(a^x) \underset{\text{definição inversa}}{=} x$. Assim, estas propriedades são conseqüências das definições das funções acima e das condições exigidas para funções que admitem **função inversa**.

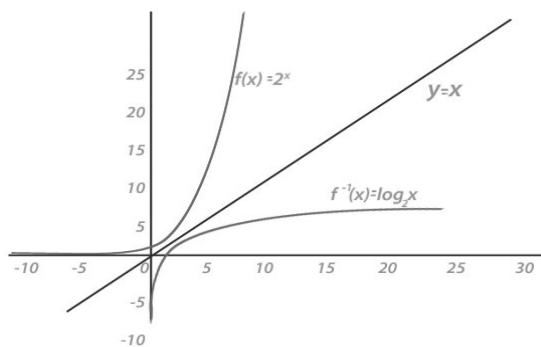


Figura 7 - Relações entre as funções exponencial e logarítmica (elaboração própria)

Mais uma vez sugerimos o apoio computacional para que possamos observar as propriedades geométricas extraídas das relações e a exponencial e sua inversa. Lima (2001) critica a falta de atenção com respeito às afirmações sobre a função logarítmica que exigem demonstração formal. De fato, Lima (2001) desenvolve um comentário quando descreve que **após esboçar gráficos de exponenciais e logaritmos (para $a > 1$ e $0 < a < 1$), observa que os gráficos de $y = a^x$ e $y = \log_a x$ são simétricos em relação à reta $y = x$.**

Mais uma vez, Lima (2001) critica o modo pelo qual os autores de livros conduzem o leitor a generalizar resultados a partir da observação ou da análise de alguns casos particulares. O problema pode se refletir quando o professor de Matemática se entrega ao modo mais “cômodo” e realiza ou reforça este “hábito” em seus alunos.



ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Demonstre e conceba exemplos de aplicações para o “contexto escolar” do seguinte teorema (Caracterização das Funções Quadrática): a fim de que a função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda a progressão aritmética não constante $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ seja transformada por f em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots\}$.

2. Analise as seguintes definições formais:

(i) Seja a relação $f: X \rightarrow Y$, dizemos que a função $g: Y \rightarrow X$ é sua inversa se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

(ii) Seja a bijeção $f: X \rightarrow Y$, dizemos que a função $g: Y \rightarrow X$ é sua inversa se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

(iii) Seja a função $f: X \rightarrow Y$, dizemos que a função $g: Y \rightarrow X$ é sua inversa se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Além disso, tal função é única.

Em seguida responda:

Qual destas definições apresenta hipóteses apenas necessárias para definir o conceito de função inversa?

Qual destas definições apresenta propriedades que são consequências da definição formal, entretanto, não fazem parte do conceito de função inversa?

Qual destas definições caracteriza a existência e a unicidade do referido conceito?

3. Consideremos a função $f(x) = 2x^2 + x - 3$ e o ponto $f(2) = 7$

4. Demonstre que $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca (injetora e sobrejetora). Dica: Lima (2004).

AULA 5

Análise de livros de matemática - Parte II

Olá, aluno(a)!

Na aula passada nos detivemos às análises dos conteúdos de: conjuntos numéricos e classes de funções. Nesta aula, apresentamos críticas e sugestões para o aperfeiçoamento que Lima (2001) apresenta com respeito aos conteúdos de sequências numéricas, matrizes, determinantes, sistemas lineares. As indicações que fazemos doravante podem ser úteis no sentido de aperfeiçoar a visão crítica do professor com respeito ao livro didático de Matemática.

Objetivo

- Compreender os elementos relacionados a adequação de abordagem e apresentação dos conceitos de sequências numéricas, matrizes, determinantes, sistemas lineares

TÓPICO 1

Análise da noção de sequências numéricas e progressões

OBJETIVO

- Identificar erros conceituais e conceitos descritos de modo inapropriado pelos autores de livros didáticos no que concerne aos conceitos de sequências e progressões

O conceito de sequência numérica definida como uma aplicação do tipo $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto x_n$ é muito importante e alguns casos particulares e mais triviais são objetos de ensino no contexto escolar. Lima (2001, p. 177) comenta que:

Muitas vezes necessitamos considerar os elementos de um conjunto, colocados ou dispostos numa certa ordem, constituindo o que se chama de uma sucessão ou sequência. Trata-se de um engano e, talvez os autores não tenham notado que isso impediria que em uma sequência houvesse termos iguais.

Mais uma vez, Lima (2001) desenvolve objeções com respeito à linguagem matemática empregada na apresentação deste assunto. Em outros momento, o autor aponta que não há uma tentativa de relacionar a ideia de progressão aritmética com a ideia de aumento constante (LIMA, 2001, p. 177) e “tampouco há tentativas de conexões com conteúdos estudados nas séries anteriores”.

Lima (2001, p. 244) faz outra advertência quando registra que

em alguns livros didáticos o autor declara que uma sequência numérica pode não ter uma lei de formação. Isto é um equívoco. Se não tiver uma lei de formação, a sequência não existe. Talvez o autor queira dizer que nem sempre existe uma fórmula que permita determinar cada elemento da sequência.

Adequadamente, o livro referido por Lima (2001) define sequência como função

com o domínio nos naturais. Não se entende, entretanto, a razão de se excluir o zero do domínio, e também se sente falta de uma palavra sobre sequências finitas. Mas antes de discutirmos a abordagem deste conteúdo, recordamos que uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural num número real x_n , chamado de n -ésimo termo da sequência Lima (2010). Observe que, no contexto da Análise Real, este autor considera o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Mas como já comentamos na disciplina de Filosofia das Ciências e da Matemática, podemos considerar também o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Em qualquer caso, Lima (2010) estabelece as seguintes notações para esta entidade conceitual $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, \dots, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alguns livros desenvolvem a preocupação em explorar representações geométricas da noção de sequências numéricas, apesar de que o diagrama de Venn exibido na figura 1 não transmite bem a noção de “ordenação” dos elementos do conjunto que descrevemos em $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, \dots, \dots)$.

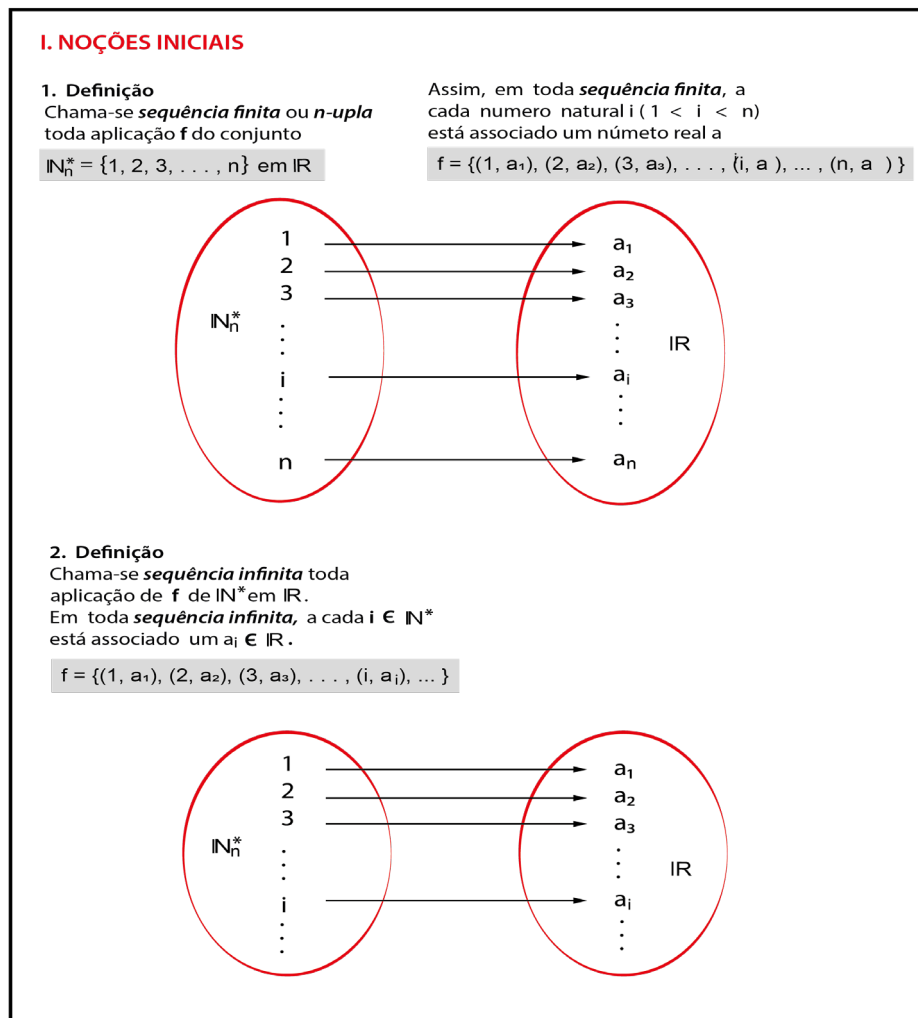


Figura 1: Noção de sequência abordada por Iezzi & Hazzan (1977, p. 1-D)

Observe ainda que apesar de realizar a seguinte identificação no plano cartesiano $(n, a_n) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}$, os autores Iezzi & Hazzan (1977) não exibem seu possível comportamento no plano cartesiano. A seção correspondente de exercícios explora apenas “notações algébricas” e não se observa a intenção do autor em reforçar a ideia da interpretação geométrica apresentada desde o início. Além disso, a tônica geral é a proposição de “exercícios” e não de “situações-problema” envolvendo situações do dia-a-dia ou situações-problema relacionando este novo conceito com outros conceitos estudados em etapas anteriores.

Observamos que em nenhum item da figura 2 os autores Iezzi & Hazzan (1977) pedem do leitor que represente as sequências no plano cartesiano e reempregue as notações $(n, a_n) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}$ introduzidas no início do assunto.

EXERCÍCIOS

D.1. Escrever os seis termos iniciais das sequências dadas pelas seguintes fórmulas de recorrência:

a) $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, $\forall n \geq 2$
 b) $b_1 = 3$ e $b_n = 2 \cdot b_{n-1}$, $\forall n \geq 2$
 c) $c_1 = 2$ e $c_n = (c_{n-1})^2$, $\forall n \geq 2$
 d) $d_1 = 4$ e $d_n = (-1)^n \cdot d_{n-1}$, $\forall n \geq 2$
 e) $e_1 = -2$ e $e_n = (e_{n-1})^n$, $\forall n \geq 2$

D.2. Escrever os seis termos iniciais das sequências dadas pelas seguintes leis:

a) $a_n = 3n - 2$, $\forall n \geq 1$ b) $b_n = 2 \cdot 3^n$, $\forall n \geq 1$
 c) $c_n = n(n + 1)$, $\forall n \geq 1$ d) $d_n = (-2)^n e$, $\forall n \geq 1$
 e) $e_n = n^3$, $\forall n \geq 1$

D.3. Descrever por meio de uma fórmula de recorrência cada uma das sequências abaixo:

a) (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)

b) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)

c) (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)

d) (5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)

e) (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)

Figura 2: Padrão de “exercícios” explorados em Iezzi & Hazzan (1977, p. 4-D)

Lima (2001, p. 244) comenta que

as fórmulas dos termos gerais das progressões são obtidas por um método desnecessariamente complicado. Não são feitas as conexões da progressão aritmética com a função afim e da progressão geométrica com a função exponencial. Não aparecem também os gráficos que permitiriam fazer facilmente essas ligações.

A partir deste excerto indicado acima, destacamos que o conhecimento do professor de Matemática deve ser bem maior e mais aprofundado daquilo que realmente o mesmo vai ensinar, transmitir. Deste modo, recordamos os seguintes teoremas que devem ser de conhecimento geral e de domínio familiar para o mesmo.

Teorema: $Pb^{\frac{1}{n}} l p^{\frac{1}{n}} \wedge crka \dot{l} j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (l k^{\wedge} q k^{\wedge}) \quad bkq \dot{l} \quad d b j \quad pb$
 $b^{\frac{1}{n}} j \quad bkq \quad pb \quad q^{\wedge} k p c l o j \quad \wedge r j \quad \wedge m \rightarrow t j \quad l r q o^{\wedge} m \rightarrow +$

E sobre uma propriedade fundamental relacionando funções quadráticas e progressões aritméticas, temos o teorema seguinte.

Teorema: $> \quad a j \quad a b \quad n r b \quad \wedge \quad c r k a \dot{l} \quad l k q \dot{k} r^{\wedge} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad p b g^{\wedge}$
 $n r^{\wedge} a o \dot{A} q f^{\wedge} \quad d b \quad b p p \dot{A} o f l \quad d p r \dot{a} j \quad b k q b \quad n r b \quad d \quad a^{\wedge} \quad m o l \quad d o b p p \dot{l} \quad \wedge o f q j \quad \dot{I} q f^{\wedge}$
 $k \dot{l} \quad l k p q^{\wedge} k q b \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots \quad p b g^{\wedge} \quad q^{\wedge} k p c l o j \quad \wedge a^{\wedge} \quad m l o \quad c$
 $k r j \quad \wedge \quad m o l \quad d o b p p \dot{l} \quad \wedge o f q j \quad \dot{I} q f^{\wedge} \quad a b \quad p b d r k a^{\wedge} \quad l o a b j \quad k \dot{l} * a b d b k b o^{\wedge} a^{\wedge}$
 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), y_4 = f(x_4), \dots, y_n = f(x_n),$
 $M o^{\wedge} \quad l k \quad i r f o \quad d b p q^{\wedge} \quad j \quad l p \quad d b l o b j \quad \wedge \quad k r k \quad f^{\wedge} a l \quad m o \quad f j \quad \wedge \quad (j - 1) \quad n r$
 $. 53 \quad n r b \quad o b i^{\wedge} \quad f l k^{\wedge} \quad p \quad k \quad b f q \quad p \quad a b \quad m o l \quad d o b p p \quad b p \quad d b l j \quad \dot{I} q f^{\wedge} \quad p \quad d b \quad \text{função}$
exponencial

Teorema: $P b g^{\wedge} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad r j \quad \wedge \quad c r k a \dot{l} \quad j \quad l k^{\wedge} q k^{\wedge} \quad f k g b f s^{\wedge}$
 $\% p q \quad r \quad o b p \quad b k q b \quad r \quad a b \quad o b p \quad b k q b \quad n r b \quad q^{\wedge} k p c l o j \quad \wedge \quad q \quad a^{\wedge} \quad m o l \quad d o b p p \dot{l}$
 $\wedge o f q j \quad \dot{I} q f^{\wedge} \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots \quad k r j \quad \wedge \quad m o l \quad d o b p p \dot{l} \quad d b l j \quad \dot{I} q f^{\wedge}$
 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), y_4 = f(x_4), \dots, y_n = f(x_n),$
 $P b \quad n r p b o j \quad l p \quad b = f(0) \quad b \quad a = \frac{f(1)}{f(0)} \quad j \quad q o b j \quad l p \quad f(x) = b \cdot a^x \quad n r o^{\wedge} \quad d \quad a l$
 $x \in \mathbb{R} +$

Destacamos que não adianta exigir um ensino de Matemática rico em ligações conceituais se, em seu período de formação, o licenciando não for submetido a um ensino acadêmico que privilegia também as relações conceituais entre várias definições matemáticas. Todavia, a partir das ponderações de Lima

(2001), evidenciamos que ocorre justamente o contrário, ou seja, o futuro professor não conhece com profundidade os resultados matemáticos que concretizam tais relações conceituais.

DEFINIÇÃO

8. Chamam-se progressão aritmética (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

onde a e r são números reais dados.

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do seguinte, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Eis alguns exemplos de progressões aritméticas:

$f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ onde $a_1 = 1$ e $r = 2$
 $f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$ onde $a_1 = 0$ e $r = -2$
 $f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \dots)$ onde $a_1 = 4$ e $r = 0$
 $f_4 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots)$ onde $a_1 = \frac{1}{2}$, e $r = 1$
 $f_5 = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \dots)$ onde $a_1 = 4$ e $r = -\frac{1}{3}$

Figura 3: A desconsideração do caráter geométrico da noção de P.A. abordada em Iezzi & Hazzan (1977, p. 5-D)

Mas antes de discutir um pouco mais esta e outras questões preocupantes, exibimos na figura 3 o viés algébrico no qual a definição formal de P.A. é apresentada ao leitor.

Sugerimos a abordagem geométrica do conceito de progressão aritmética e progressão geométrica. Neste sentido, destacamos que os autores Alves & Borges Neto (2011) exploram numa aplicação didática, apoiada em uma metodologia de ensino chamada de Sequência Fedathi, dos conceitos de progressões. O apoio computacional é empregado como um aliado do professor no sentido de facilitar o entendimento.

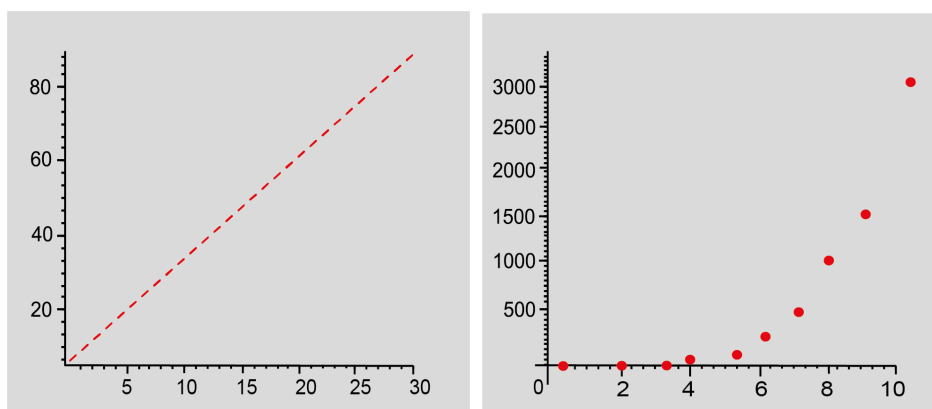


Figura 4: Figura sugerida por Alves & Borges Neto (2011) que proporciona distinguir o caráter linear da P.A. e o caráter exponencial da P.G

Lima (2001, p. 432) desenvolve uma argumentação importante ao comentar que, finalmente, o texto define sequências numéricas como “aquelas cujos termos são números reais” e continua dizendo que dará maior importância às sequências que obedecem a uma “lei de formação”. Na verdade, toda sequência tem que obedecer a uma lei de formação dos seus termos, ou seja, uma regra que permita dizer, para todo $n \in \mathbb{N}$, qual é o n -ésimo termo. É provável que o autor ache que “lei de formação” é o mesmo que “fórmula algébrica”, mas não é.

Lima *et al.* (2000) comenta uma importante propriedade de uma progressão Aritmética $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, a função que associa a cada natural ‘ n ’ o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais de uma função afim $a(x) = a(0) + r \cdot x$. Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural o valor a_n , o gráfico dessa função “é formado por uma sequência de pontos colineares no plano” (LIMA *et al.*, 2000, p. 5). Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, etc.$ estiverem em linha reta.

Na figura 5, exploramos a significação geométrica da equação $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ que podemos interpretar como o conjunto de pontos sobre a reta $a(x) = a(0) + r \cdot x$, onde $x \in \mathbb{R}$. Do lado direito, Lima *et al.* (2000, p. 5) exhibe os pontos (*) no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e do lado esquerdo, os autores Alves & Borges Neto (2010) destacamos termos $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = (a_1 - r) + (r) \cdot n = (a_1 - r) + (r) \cdot n$.

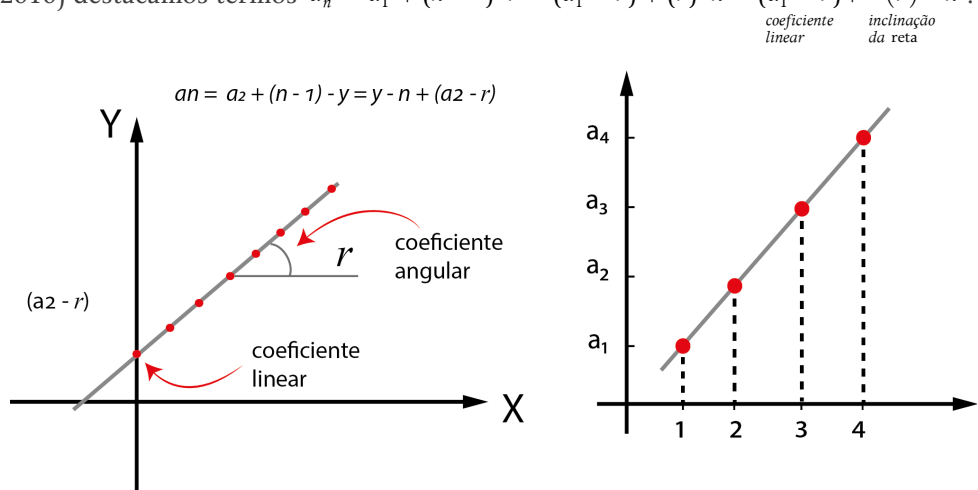


Figura 5: Interpretação geométrica da P.A. (LIMA, 2000)

Lima *et al.* (2000, p. 4-5) esclarece que em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em k , $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = (r) \cdot n^1 + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio

é de grau 1. Se $r=0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor do que 1. E reciprocamente, se em uma sequência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n , de grau menor que ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética. Com efeito, se $x_n = a \cdot n + b$, (x_n) é a progressão aritmética na qual $a = r_{\text{razão}}$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r_{\text{razão}} = a$ e $a_1 = a + b$ é seu primeiro termo.

Outra questão que pode passar despercebido para leitor pouco cauteloso diz respeito à soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética conhecida por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Note-se que esta fórmula como todas as outras relacionadas com P.A e P.G. podem ser demonstradas por Indução Matemática, embora não seja um modelo discutível no contexto escolar. Lima *et al* (2000, p. 6) escreve

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ e pela comutatividade em \mathbb{R} , garantimos também que $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$. Em seguida, o autor somas tais expressões obtendo:

$$\begin{aligned} S_n + S_n &= 2 \cdot S_n \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) \stackrel{\text{associatividade em } \mathbb{R}}{=} \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1) = n \cdot (a_1 + a_n) \therefore 2 \cdot S_n \\ &= (a_1 + a_n) \cdot n \text{ ou } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

Como de costume, Lima et al (2000, p. 7) evidencia as relações conceituais entre o conceito de P.A e outros conceitos estudados nas etapas anteriores. Neste sentido, o autor observa que a soma dos n primeiro termos pode ser observada da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{((a_1 + (a_1 + (n-1)r))n)}{2} = \frac{(2a_1 + nr - r)n}{2} = \frac{r}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) \cdot n$$

Comenta que se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do segundo grau em n , desprovido de termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio do segundo grau menor que 2, sem termo independente (op.cit 2000, p. 7). Mais ainda, se todo polinômio do segundo grau em n , desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética. De fato, considerando a expressão $P(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética na qual $\frac{r}{2} = a$ e $\left(a_1 - \frac{r}{2}\right) = b \therefore r = 2a$ e $a_1 = a + b$. Por exemplo, considerando a função $f(x) = 2x^2 + 3x$, ao considerar sua restrição em \mathbb{N} , teremos $P(n) = 2n^2 + 3n$, o que equivale a termos as igualdades: $\frac{r}{2} = 2 \therefore r = 4$

e $a_1 = 2 + 3 = 5$. Portanto, temos a seguinte P.A.: $(5, 9, 13, \dots)$ associada a este polinômio.

Mas antes de concluir nossas considerações acerca das noções de P.A., vale a pena comentar a noção de operador Δ que se relaciona com tais noções. O operador diferença é descrito por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. E, podemos concluir que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças neste operador formam uma progressão aritmética não-estacionária.

Lima et al (2000, p. 8) ilustra com o seguinte exemplo $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$ e argumenta que se trata de uma progressão aritmética de segunda ordem, pois: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = (b_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ é uma progressão aritmética não-estacionária. O autor define que uma progressão aritmética de ordem h ($h > 2$) é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $h - 1$ (LIMA *et al*, 2000, p. 8).

No que diz respeito ao conceito de P.G. de modo semelhante ao que comentamos no caso de P.A., seu termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou $a_{n+1} = a_n \cdot q$ que pode ser encontrado em qualquer livro didático de Matemática, pode ser interpretado como a restrição no conjunto \mathbb{N} , de uma função exponencial do tipo $a(x) = b \cdot q^{x-1}$, para $x \in \mathbb{N}$.

Antes, contudo, destacamos que uma progressão geométrica é uma sequência $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ onde cada termo a partir do segundo é o produto $x_{n+1} = x_n \cdot r$. Tem-se, portanto: $x_2 = x_1 \cdot r$, $x_3 = x_2 \cdot r = x_1 \cdot r^2$, \dots e em geral $x_{n+1} = x_1 \cdot r^n$.

Lima et al (2000, p. 40) aconselha que “não encha a cabeça de seus alunos com casos particulares desnecessários. Isso só serve para obscurecer as ideias gerais e acaba dificultando as coisas”. Saber que, numa progressão aritmética, cada termo é a média aritmética entre seu antecedente e seu conseqüente não só não substitui, ou pelo menos não substitui de modo eficiente, o conhecimento de que uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o anterior é constante.

Mais adiante, Lima et al (2000, p. 41) comenta ainda que: “entretanto é bom lembrar que o conhecimento apenas dessas fórmulas costuma atrapalhar muito os alunos quando a progressão começa em a_0 ”. É certamente mais eficiente saber que para avançar um termo, basta somar r ou multiplicar por q ; para avançar dois termos, basta somar $2r$ ou multiplicar por q^2 [...]

A soma dos termos em P.G. é descrita nos livros do seguinte modo:

VII. SOMA DOS TERMOS DE P.G FINITA

18. Sendo dada uma P.G., isto é, conhecendo-se os valores de a_1 e q , procuremos uma fórmula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais da sequência.

Temos:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros por q , obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (2)$$

Comparando os segundos membros de (1) e (2), podemos observar que a parcela a_1 só aparece em (1), a parcela a_1q^n só aparece em (2) e todas as outras parcelas são comuns às duas igualdades, então, subtraindo, temos:

$$(2) - (1) \Rightarrow qS_n - S_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1q^n - a_1$$

Supondo $q \neq 1$, resulta:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}$$

Este resultado sugere o seguinte teorema:

Figura 6: Método de verificação sem usar Indução Matemática descrito em Iezzi & Hazzan (1977, p. 26-D)

Nossa preocupação incide sobre aquele tipo de aluno que gosta de se antecipar à figura do professor. Assim, o aluno autodidata pode sofrer muitas dificuldades ao se deparar com o que o autor comenta na página seguinte uma vez que o mesmo menciona o método de demonstração por Indução Matemática que não é objeto de ensino no contexto escolar.

TEOREMA

A soma dos n termos iniciais de uma P.G é

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Demonstração

Demonstra-se aplicando o princípio da indução finita:

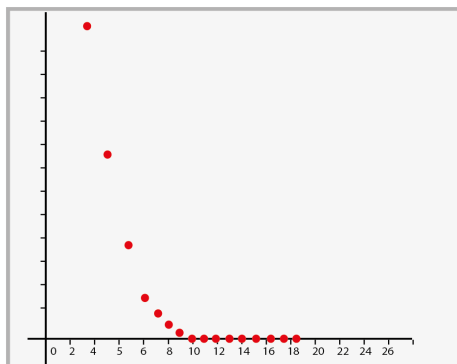


Figura 7: O teorema segundo Iezzi & Hazzan (1977, p. 27-D) e o gráfico de convergência

Inicialmente, já observamos que o modelo de demonstração por meio de Indução Matemática não pertence ao ambiente escolar. Segundo, no raciocínio indutivo empregado no modelo de indução não se restringe na verificação da “possibilidade” de validade da propriedade apenas para um número fixo, mas arbitrário k como é verificado na figura 6. E como tal verificação particular pode “sugerir” um teorema que, segundo o autor, necessita do modelo de Indução?

Assim, apontamos que além de confusa, tal descrição é inadequada para o contexto escolar. Por fim, Lima (2001) discute estudo da noção de soma infinita do tipo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$. Para isto, o autor lança mão de um dos paradoxos de Zenão – Aquiles e a tartaruga. Considerando a progressão $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \dots\right)$, mostra que a soma de seus k primeiros termos tende a 4 quando n tende ao infinito.

Observamos o emprego de determinadas expressões que fazem referência a determinados conceitos que não são objeto de estudo específico no contexto escolar. Expressões do tipo “os termos tendem para determinado valor” ou “quando fazemos n tender ao infinito”. Apesar dos estudos dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral consumir um bom tempo de estudo no contexto acadêmico, o futuro professor de Matemática não pode desenvolver um discurso baseado em conceitos complexos que lhe são familiares, mas que, entretanto, dizem respeito a modelos matemáticos abstratos, fora do alcance e do entendimento dos seus alunos na escola, com raríssimas exceções é claro.

Na figura 7, usando o software Geogebra, plotamos o gráfico a . Neste caso, sabemos que $n \in \mathbb{N}$ e podemos observar que quanto maior são os valores assumidos pelo expoente k mais próximo de zero suas imagens se aproximam.

Assim, a condição em que alguns livros didáticos apresentam em que condições podemos avaliar a expressão $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = S = \frac{a_1}{1-q}$, com $|q| < 1$. Na figura 8 identificamos a declaração “Esta última sequência converge para 1”. Note-se que o autor faz referência à noção de reduzidas de uma série de números reais ao escrever a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ sem nenhuma “cerimônia” ou cuidado com o leitor.

X. SOMA DOS TERMOS DE P.G INFINITA

25. Exemplo Preliminar

Consideremos a P.G infinita $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$

Formemos a seqüência $\{ S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \}$ onde:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Esta última seqüência converge para 1 pois:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Quer dizer, que, quanto maior o número de termos somados na P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right)$, mais nos aproximamos de 1.

Dizemos, então, que a soma dos infinitos termos dessa P.G. é 1.

Figura 8: Explicação fornecida por Iezzi & Hazzan (1977, p. 29-D)

Comentamos ainda o modo “restrito” da introdução da noção de interpolação Aritmética e interpolação geométrica. Mais uma vez, a preferência pela abordagem algébrica se coloca em evidência. Decididamente os autores de livros não valorizam a exploração do plano cartesiano; deste modo, propomos os termos interpolação geométrica dos termos de uma P.A. e interpolação geométrica dos termos de uma P.G. no $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Neste caso, empregando o exemplo da figura 9, passamos a considerar as condições de interpolar de modo geométrico, no plano cartesiano, cinco pares

ordenados de modo que os pares (1,1) e (7,2) são os pares ordenados extremantes. Você consegue esboçar o desenho desta situação geométrica?

V. INTERPOLAÇÃO ARIMÉTICA

Em toda sequência finita $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, os termos a_1 e a_n são chamados **extremos** e os demais são chamados **meios**. Assim, na P.A. (0, 3, 6, 9, 12, 15) os extremos são 0 e 15 enquanto os meios são 3, 6, 9 e 12.

Interpolar, inserir ou **intercalar** k meios aritméticos entre os números a e b significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.A. é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow b = a + (k+1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{b-a}{k+1}$$

Exemplo

Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.

Vamos formar uma P.A. com 7 termos onde $a_1 = 1$ e $a_7 = 2$. Temos:

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot r \Rightarrow r = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

então a P.A. é $(1, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, 2)$.

Figura 9: A noção de interpolação aritmética apresentada por Iezzi & Hazzan (1977, p. 11-D)

Como de costume, os autores que optam pela abordagem que exibimos na figura 9 perdem a oportunidade de explorar a relação conceitual entre P.A. e função afim, inclusive a relação inversa das relações, ou seja, se a uma função afim $f(x)$ transforma um P.A. em outro P.A. o que se pode afirmar da função inversa $f^{-1}(x)$?

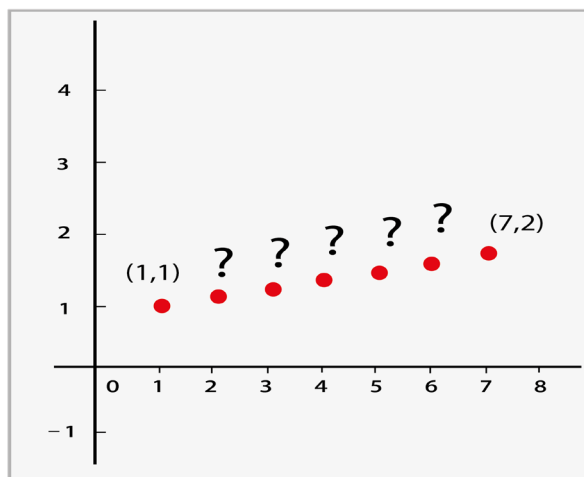


Figura 10: Noção de interpolação geométrica dos termos de uma P.A. (elaboração própria)

A seguir, enunciaremos alguns resultados formais pertencentes a um curso introdutório de Análise Real, entretanto, tais resultados possuem uma aplicação imediata e fornecem a validade de vários argumentos explorados no contexto escolar. Recordamos nosso pressuposto inicial de que o professor de Matemática deve conhecer bem mais aquilo do que efetivamente vai ensinar. Assim, enunciamos nosso primeiro teorema.

Teorema: $\forall h > -1, (1+h)^n \geq 1+n \cdot h \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DEMONSTRAÇÃO:

Seguiremos o argumento de Morgado; Wagner & Zani (2001, p. 24) quando conjecturam que para $n=0$, $(1+h)^0 = 1=1+0 \cdot h$ e a desigualdade é verdadeira. Supondo que a desigualdade é verdadeira para $n=k$, mostraremos que a mesma ocorre ainda para $n=k+1$. Mas se temos

$$\begin{aligned} (1+h)^k &\geq 1+k \cdot h \therefore (1+h)(1+h)^k \geq (1+k \cdot h)(1+h) \\ &= 1+kh+h+kh^2 = 1+(k+1)h+k \cdot h^2 \geq \\ &\geq 1+(k+1)h \therefore (1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h \text{ c.q.d.} \end{aligned}$$

Teorema: $\forall |q| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

DEMONSTRAÇÃO:

Se $q=0$ o resultado segue de imediato, pois $|q^n - 0| = 0 < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $n > 0$. Mas se $q \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que $|q| > 0$, assim escolhemos o elemento $h := \frac{1}{|q|} - 1$ ou $h+1 = \frac{1}{|q|}$ e reparamos que $|q| < 1 \leftrightarrow 1 < \frac{1}{|q|} \leftrightarrow 0 < \frac{1}{|q|} - 1 = h$. Por outro lado, notamos que:

$$|q^n - 0| = \left| \left(\frac{1}{1+h} \right)^n - 0 \right| = \left| \frac{1}{(1+h)^n} \right| = \frac{1}{|1+h|^n} = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+n \cdot h} \leq \frac{1}{n \cdot h}$$

Observamos, entretanto, que o elemento h está fixado e que estamos interessados em valores suficientemente grandes para $n \in \mathbb{N}$, portanto, escolhemos os valores para $\frac{1}{\varepsilon \cdot h} < n \leftrightarrow \frac{1}{n \cdot h} < \varepsilon$. Assim, podemos garantir que a diferença

$|q^n - 0| < \frac{1}{n \cdot h} < \varepsilon$, para k suficientemente grande.

Teorema: Se $|q| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Morgado; Wagner & Zani (2001, p. 26) comentam que, de modo intuitivo, o resultado é intuitivo, pois, q^n é aproximadamente igual a 0, se k é grande. Daí, $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \cong a_1 \cdot \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$. Provemos então o teorema.

Dado $\varepsilon > 0$, vamos tomar o número $h := \frac{1}{|q|} - 1$ ou $(h+1) = \frac{1}{|q|} \leftrightarrow |q| = \frac{1}{1+h}$ (*),

como no teorema anterior. Observamos que $h > 0$ e que $1-q > 0$. Segue que $|S_n - S| = \left| a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \right| = \frac{|a_1|}{1-q} \cdot |q|^n$. Agora, analisamos o comportamento de $a_1 \in \mathbb{R}$. Se $a_1 = 0$, temos que $|S_n - S| = \frac{0}{1-q} \cdot |q|^n = 0 < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $a_1 \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} |S_n - S| &= \left| a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \right| = \frac{|a_1|}{1-q} \cdot |q|^n \leq \frac{|a_1|}{1-q} \cdot \left(\frac{1}{1+h} \right)^n \\ &= \frac{|a_1|}{1-q} \cdot \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{|a_1|}{1-q} \cdot \frac{1}{1+n \cdot h} \leq \\ &\leq \frac{|a_1|}{(1-q)n \cdot h} \end{aligned}$$

Mais uma vez, analisamos o comportamento da expressão $\frac{|a_1|}{(1-q)n \cdot h}$ e que quando k assume valores suficientemente grandes, este quociente se aproxima de valores próximos de 0, assim $\frac{|a_1|}{(1-q)n \cdot h} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{|a_1|}{\varepsilon \cdot h \cdot (1-q)} < n$ (**). Prosseguindo, para valores suficientemente grandes e sempre maiores do que (**), estabelecemos:

$|S_n - S| \leq \frac{|a_1|}{(1-q)n \cdot h} < \varepsilon$. Como se queria demonstrar.

Para concluir este tópico, apontamos alguns dilemas que o professor deve enfrentar. **Primeiro**, o mesmo deve conhecer e compreender os modelos formais do Cálculo Diferencial que foram empregados, entretanto, não poderá explicitá-los

no contexto do ensino escolar, sob pena de gerar “confusão mental” nos alunos sem necessidade.

Evitando de modo explícito este formalismo, Morgado; Wagner & Zani (2001, p. 27) perguntam o limite da soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ que vale $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ e comentam que **este resultado admite uma interessante paráfrase**. Suponha que Raul deve percorrer uma distância de 1km. Na primeira hora, ele percorre metade dessa distância; na hora seguinte, ele percorre metade da distância que falta, isto é, $\frac{1}{4}$ km; e assim sucessivamente. Após n horas, Raul terá percorrido $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ km. Se n for grande essa soma será “aproximadamente” igual à distância total de 1km.

Um **segundo** dilema diz respeito ao método para a abordagem de conteúdos como esse último, envolvendo a noção de série de números reais. Nesta abordagem, caso o professor detenha o conhecimento de algum software, parte dessas noções podem ser abordadas de modo informal e intuitivo.

Chegamos ao final do tópico 1. Neste tópico estudamos determinadas preocupações que não podem ser negligenciadas no que concerne ao horizonte de reflexões do futuro professor de Matemática. Neste sentido, indicamos elementos atinentes à abordagem dos conteúdos de sequências e progressões. No próximo tópico, abordar-se-ão as noções de matrizes e determinantes, com o apoio de um olhar semelhante ao que indicamos no tópico 1.

TÓPICO 2

Análise da noção de matrizes e determinantes

OBJETIVO

- Identificar erros conceituais e conceitos descritos de modo inapropriado pelos autores de livros didáticos relativamente aos conceitos de Matrizes e Determinantes

Na aula passada discutimos as noções de sequências numéricas. Neste tópico, abordaremos os conceitos de Matrizes e Determinantes que apresentam um caráter ubíquo em toda a Matemática, quer seja no contexto escolar, quer seja no contexto acadêmico.

No tópico anterior, evidenciamos, a partir das indicações de Lima (2001) e Lima *et al.* (2000), várias falhas e equívocos conceituais presentes nas abordagens de sequências numéricas, P.A e P.G. Nesta seção nos deteremos ao conceito de Matrizes e determinantes. Com respeito a isto, Lima (2001, p. 94) comenta que “as matrizes são estudadas no Capítulo 3, introduzidas com uma boa dose de motivação, através de vários exemplos que apresentam matrizes como modelos matemáticos para tabelas de dupla entrada”. Por outro lado, passando a parte introdutória deste conceito, evidenciamos os primeiros problemas ao registrar que

O mesmo cuidado não é tomado no que se refere às propriedades das diversas operações. Elas são devidamente enunciadas, mas não é apresentada nenhuma justificativa (nem através de exemplos). Isto é um problema, por exemplo, no caso da associatividade do produto que não é, de modo nenhum, uma propriedade óbvia (LIMA, 2001, p. 329).

Em alguns livros, a noção de matrizes é apresentada fora do contexto e as matrizes surgem como um objeto sujeito a manipulações banais, inconsequentes e não justificadas (op.cit. 2000, p. 287). Em alguns livros didáticos, os exemplos são artificiais e os exercícios idem. As propriedades das operações são listadas sem

comentários. Deveria ser observado que a associatividade é mais complicada de provar do que as outras (op.cit. 2000, p. 287). Os livros podem explicar que muitas das propriedades, como $A + B = B + A$ é uma propriedade herdada da que já conhecemos em \mathbb{R} , em virtude de $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$.

Aconselha a boa Didática da Matemática, a se evitar iniciar uma aula ou uma parte de uma seção de ensino por meio de uma definição matemática formal. Neste sentido, vale recordar que o aluno aprende por meio da construção progressiva de conceitos matemáticos. Na disciplina de Filosofia da Matemática, diferenciamos uma definição formal de um conceito matemático. A exemplo disto, encontramos em Iezzi & Hazzan (1977, p. 45-D) o início do assunto de multiplicação de matrizes justamente por uma definição e suas propriedades formais.

VI. PRODUTO DE MATRIZES

45. Definição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B_{n \times p} = (b_{jk})$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$

Figura 11: Os autores de livros didáticos iniciam de modo inadequado a seção por meio da própria definição formal

Lima (2001, p. 118) exalta, todavia, que “uma boa qualidade dos livros didáticos que procuram desde logo relacionar sistemas de equações lineares à multiplicação de matrizes e destaca os aspectos em que as matrizes apresentam comportamento diferente do dos números reais”. Por outro lado, algumas outras propriedades são exploradas de forma deficitária. Por exemplo, as propriedades das transpostas não são enunciadas, embora haja um exercício em que se peça para verificar, em um caso particular de duas matrizes 2X2 dadas, que a transposta da soma é a soma das transpostas.

VII. MATRIZ TRANSPOSTA

51. Definição

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *transposta de A* a matriz $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ tal que a matriz $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ tal que $a_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j . Isto significa que, por exemplo, $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$, são respectivamente iguais a $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$, vale dizer que a 1ª coluna de A^t é igual a 1ª linha de A . Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A .

52. Exemplos

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$3^\circ) A = [1 \ 3 \ 5 \ 7] \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ilustração 12: Os autores Iezzi & Hazzan (1977, p. 55-D) iniciam de modo recorrente as seções do livro por meio de definições formais e depois exibem exemplos práticos

Lima (2001, p. 118) comenta ainda que “a matriz identidade é definida e sua principal propriedade ($I B = B A I = A$) só é apresentada – e sem justificativa – para A e B quadradas. Inversas são definidas corretamente, porém, não é citado que, se uma matriz é invertível (e não inversível) sua inversa é única – fato, aliás, muito fácil de provar – nem que se A é quadrada, $AB = I$, então $BA = I$ ”.

No que diz respeito ao conhecimento do professor de Matemática, deve ficar claro que em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares. “Num estudo elementar, a nível do Ensino Médio, convém motivar a multiplicações de matrizes mediante exemplos mais simples” (LIMA; CARVALHO; WAGNER & MORGADO, 1999, p. 131).

Vale recordar que dada a matriz quadrada m , do tipo $n \times n$, nem sempre existe uma matriz p , do tipo $n \times n$, tal que $m \cdot p = p \cdot m = I_n$. Quando uma tal matriz p existe, a matriz m se diz invertível e p chama-se a matriz inversa de m . Escreve-se então $p = m^{-1}$.

Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (1999, p. 135) fornecem um exemplo interessante em que não se verifica a propriedade característica de uma **matriz invertível**. Neste exemplo, eles consideram uma matriz m de tipo $n \times n$ tal que $m^2 = 0$. E neste caso, não pode existir uma matriz p tal que $m \cdot p = p \cdot m = I_n$. De fato, se uma tal p existisse teríamos $I_n = I_n \cdot I_n = (pm) \cdot (mp) \underset{\text{associatividade}}{=} p \cdot m^2 \cdot p = p \cdot 0 \cdot p = 0$.

Os autores Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (1999, p. 135-136) discutem a noção de **matriz invertível** não de modo isolado, mas no contexto também

de sistemas lineares do tipo $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \text{ (*)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ que pode ser interpretado,

em termos matriciais, do seguinte modo: $m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$.

Então, o sistema se escreve como $m \cdot x = d$. Se a matriz m possui inversa m^{-1} , o conhecimento de m^{-1} permite resolver o sistema multiplicando ambos os membros da igualdade acima, à esquerda, por m^{-1} , o que nos dá a elegante resposta (LIMA; CARVALHO; WAGNER & MORGADO, 1999, p. 136):

$$m \cdot x = d \Leftrightarrow m^{-1} \cdot m \cdot x = m^{-1} \cdot d \Leftrightarrow (m^{-1} \cdot m) \cdot x = m^{-1} \cdot d \Leftrightarrow x = m^{-1} \cdot d$$

A respeito deste problema Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (1999, p. 135-136) comentam:

acontece, porém, que o problema de determinar a matriz inversa m^{-1} (mesmo quando se sabe que ela existe) é muito mais trabalhoso do que resolver diretamente o sistema (*) por escalonamento. Por isso, embora a matriz inversa m^{-1} seja um objeto teoricamente muito interessante, ao contrário do que às vezes se diz, não é o instrumento mais eficaz para resolver um sistema de equações lineares.

Note-se que na definição de matriz inversa m^{-1} se exige que $m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = I_3$ (identidade 3×3), mas a solução do sistema $m \cdot x = d$ acima obtida usa apenas o fato de que $m^{-1} \cdot m = I_3$. Isto sugere naturalmente a pergunta: dada uma matriz m , do tipo $n \times n$, suponha que exista uma matriz p , ainda do tipo $n \times n$, tal que $p \cdot m = I_n$. Tem-se então necessariamente que $m \cdot p = I_n$? (LIMA; CARVALHO; WAGNER & MORGADO, 1999, p. 136).

Teorema (caracterização das matrizes invertíveis): Se $\det m \neq 0$, então a matriz m é invertível e $m^{-1} = \frac{1}{\det m} \text{adj}(m)$.

Lima, Carvalho, Wagner & Morgado (1999, p. 152) comentam que metade desta demonstração consiste no uso imediato da fórmula $\det(mn) = \det m \cdot \det n$. Com efeito, se a matriz m , possui inversa m^{-1} , da igualdade, $m \cdot m^{-1} = I_3$, se conclui que $\det m \cdot \det m^{-1} = 1$, logo $\det m \neq 0$ e mais ainda $\det m^{-1} = \frac{1}{\det m}$.

Os autores comentam que a recíproca, admitimos que $\det m \neq 0$ e procuremos

uma matriz p tal que $mp = I_3$. Escrevemos $m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A equação $mp = I_3$ significa que os vetores-coluna da matriz

procurada p são soluções (x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_3, y_3, z_3) .

49. TEOREMA

A multiplicação de matrizes goza das propriedades seguintes:

(1) é associativa: $(AB)C = A(BC)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ e $C = (c_{kl})_{p \times r}$

(2) é distributiva à direita em relação à adição: $(A + B)C = AC + BC$ quaisquer que sejam as matrizes

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \text{ e } C = (c_{jk})_{n \times p}$$

(3) é distributiva à esquerda: $C(A + B) = CA + CB$ quaisquer que sejam as matrizes

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \text{ e } C = (c_{ki})_{p \times m}$$

(4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam o número k e as matrizes

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ e } B = (b_{jk})_{n \times p}$$

Demonstração

(1) Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m \times p}$, $E = (AB)C = (e_{kr})_{m \times r}$ e $F = BC = (f_{jr})_{n \times r}$, temos

$$\begin{aligned} e_{kr} &= \sum_{i=1}^m d_{ik} \cdot c_{kr} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kr} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kr} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} \cdot c_{kr} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_{jr} \\ \text{então, } (AB)C &= A(BC) \end{aligned}$$

Figura 13: A formulação geral das propriedades das Matrizes na pratica pode ter pouca utilidade (IEZZI & HAZZAN, 1977, p. 67-D)

No que diz respeito à noção de determinantes, Lima (2001, p. 63) indica que “a redação de alguns autores de livros é confusa e desorientada”. De fato, o autor

registra que em alguns livros encontramos frases do tipo “Determinante de uma matriz quadrada é um número real que associamos a essa matriz segundo algumas regras”. Claro está que dizer isso ou não dizer nada dá no mesmo. Mais grave é que o capítulo não contém nenhuma definição de determinante que seja mais esclarecedora do que esta (2001, op.cit, p. 63).

Lima (2001) faz uma crítica preocupante quando destaca que o mais próximo daquilo que poderia ser considerado como uma definição é apresentado como um teorema. (Teorema de Laplace). Presumivelmente, se é um teorema, deve admitir algo se não se sabe o que é um determinante nem quais suas propriedades? O enunciado do Teorema de Laplace poderia ser tomado como uma definição indutiva de determinante (o que não foi feito).

Mesmo assim restaria o ônus de provar que a linha ou coluna que se toma para fazer o desenvolvimento não influi no resultado. E, como ocorre muitas vezes no livro, o próprio enunciado do Teorema de Laplace é defeituoso, não ficando claro que uma linha ou coluna foi escolhida e manteve-se fixada. Na figura 14 vemos a frase “...o número que podemos obter operando com os elementos de M...”. É necessário que o professor de Matemática esteja cômico da natureza e que tipo de operação os autores Iezzi & Hazzan (1977, p. 67-D) se referem.

II. DEFINIÇÃO DE DETERMINATE (n < 3)

Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos determinante da matriz M (e indicamos por det M) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

61. 1º) Se M é de ordem n=1, então det M é o único elemento de M.

$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$

Exemplo

$M = [6] \Rightarrow \det M = 6.$

Podemos também indicar o determinante de M pelo simbolo $[a_{11}]$, isto é, colocando uma barra vertical de cada lado de M.

62. 2º) Se M é de ordem n=2, o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundaria.

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{22}a_{11}$

Figura 14: Definição formal de determinante fornecida por Iezzi & Hazzan (1977, p. 67-D)

Poucos livros apresentam o enunciado formal e a demonstração formal

do Teorema de Laplace. No caso dos autores Iezzi & Hazzan (1977, p. 76-D), recomendam ao leitor que sua demonstração é feita no “apêndice” do livro.

V. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE LAPLACE)

O determinante de uma matriz M , de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores. Isto é,

a) Se escolhermos a coluna j da matriz M

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{então } \det M = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

b) Se escolhermos a linha i da matriz M

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{então } \det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Figura 15: Iezzi & Hazzan (1977, p. 76-D) enunciam e demonstram no “apêndice” o referido teorema

Mais adiante, Lima (2001, p.63) observa que em alguns livros didáticos:

são calculados vários determinantes 3×3 usando-se a regra de Sarrus. Em seguida, alguns determinantes 4×4 são obtidos via Laplace, sendo de observar que em todos os exemplos e exercícios propostos, as matrizes 4×4 cujos determinantes vão ser calculados têm sempre dois ou três zeros numa mesma linha ou coluna. Com isto, esconde-se o fato de que o desenvolvimento de Laplace é um processo de cálculo extremamente penoso e demorado.

Lima (2001, p.64) conclui, destacando ainda que

então determinante é uma noção inútil? Não. Do ponto de vista algébrico ele é importante, pois é (a menos de um fator constante) a única função multifuncional alternada das linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada. Ele fornece, portanto, um critério numérico para abordar noções sutis como a orientabilidade. Em virtude de suas propriedades características $\det(A) \neq 0$ é a condição necessária e suficiente para que as linhas (ou colunas) da matriz A sejam linearmente independentes. Do ponto de vista geométrico, seu valor absoluto é igual ao volume do paralelepípedo cujas arestas são seus vetores-

linha. Consequentemente, do ponto de vista analítico, os determinantes jacobianos ocorrem na fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas. Portanto, determinantes, desempenham papel fundamental na Álgebra, na Geometria e na Análise.

E no contexto do ensino escolar, Lima (2001, p. 64) adverte que

o erro que se comete no ensino de Matemática em nosso país é olhar para o determinante como um auxiliar para a resolução de sistemas lineares, via Regra de Cramer. Um sistema 20×20 resolvido por meio dessa regra, usando-se o desenvolvimento de Laplace para calcular os 21 determinantes, com o auxílio do computador mencionado acima, levaria 21 bilhões, 754 mil e 140 anos para ser resolvida. O mesmo sistema, no computador, sendo resolvido por escalonamento, demoraria 6 milésimos de segundo.

Decerto que as deficiências apontadas pelo autor preservam um forte potencial que pode atuar no sentido de prejudicar a aprendizagem dos estudantes. Apenas um professor de Matemática com uma sólida formação nos conteúdos em que efetivamente lecionará no contexto escolar, terá condições de evitar ou superar os obstáculos e entraves fornecidos pelos livros didáticos. No próximo tópico discutiremos a noção de Sistemas Lineares em seu contexto de abordagem pelos livros didáticos de Matemática.

TÓPICO 3

Análise da noção de sistemas lineares

OBJETIVO

- Identificar erros conceituais e conceitos empregados e descritos de modo inapropriado pelos autores de livros didáticos referentes ao conceito de sistemas lineares

Na aula passada discutimos as noções de Matrizes e Determinantes. Como de costume, os autores de livros não se esforçam para desenvolver as ligações conceituais entre estes conceitos e a noção de Sistemas Lineares que será justamente o objeto de nossa próxima discussão.

Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (1999) discutem a noção de Sistemas de Equações Lineares de modo intimamente relacionado a algumas noções de Geometria Analítica. De fato, os autores comentam que ao escreverem uma equação do tipo $ax + by = c$, assumem que $a^2 + b^2 \neq 0$, ou seja, os coeficientes não se anulam ao mesmo tempo. Uma solução do sistema linear $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (*) é um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas u, v satisfazem ambas as equações. O sistema (*) se diz **indeterminado**, **impossível** ou **determinado** quando admite **mais de uma solução**, **nenhuma solução** ou uma única solução.

Com esta preocupação, os autores recordam que cada equação de (*) tem como soluções as coordenadas (u, v) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas r_1 e r_2 representadas pelas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente (ver figura 16).

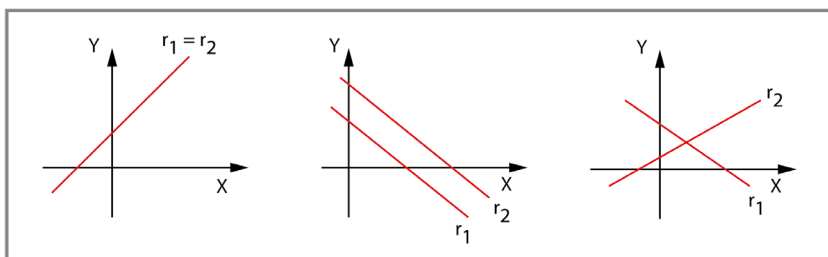


Figura 16: Interpretação geométrica dos sistema (*) fornecido por Lima; Carvalho; Wagner & Morgado (1999, p. 97)

Alguns autores de livros, segundo Lima (2001), os autores desse compêndio realizam uma interpretação semelhante, embora não façam de modo semelhante à interpretação no caso de sistemas 3x3. Por outro lado, de acordo com a tradicional exposição indefectível dos autores de livros, o leitor inicia seu processo de viciar-se na Regra de Cramer. Convenhamos que “é um absurdo resolver sistemas 2x2, calculando-se 3 determinantes” (LIMA, 2001, p. 291).

Os autores relacionam o sistema (*) com a seguinte representação matricial $m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$. Acrescentam que no caso de uma matriz do tipo $m_{2 \times 3}$, suas linhas são os vetores (a_1, b_1, c_1) e $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ e suas colunas são os vetores $(a_1, a_2); (b_1, b_2); (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. A matriz m chama-se matriz aumentada do sistema (*). Por outro lado, alguns autores de livros perdem a oportunidade de explorar o caráter geométrico desta noção como vemos o padrão algébrico de exemplos que exibimos na figura 17.

Exemplos

1º) O sistema linear	pode ser escrito na forma matricial
$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
2º) O sistema linear	pode ser escrito na forma matricial
$S_2 \begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
3º) O sistema linear	pode ser escrito na forma matricial
$S_3 \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Figura 17: Os autores Iezzi & Hazzan (1977, p. 117-D) comentam a forma matricial, entretanto, não exploram o caráter geométrico da noção de sistema linear

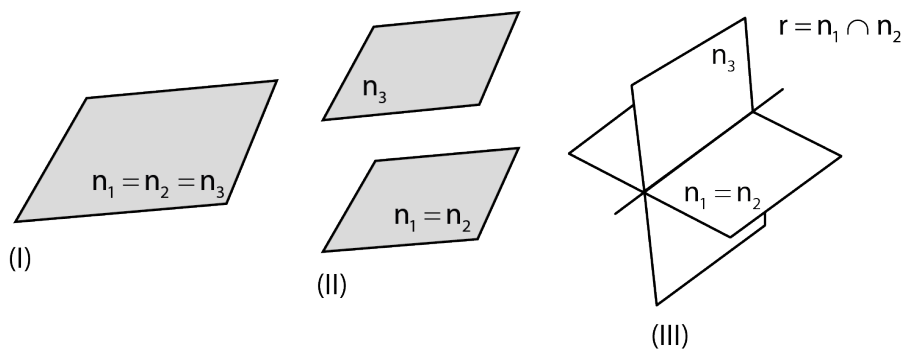


Figura18: Interpretação geométrica do sistema 3x3 em termos de planos no \mathbb{R}^3 (LIMA; CARVALHO; WAGNER & MORGADO, 1999, p. 108-109)

Possivelmente uma dificuldade aqui em termos de regência na sala de aula é que tais desenhos ficam na dependência da “habilidade pessoal” do professor no esboço dos casos possíveis (I, II, III, IV, V e VI).

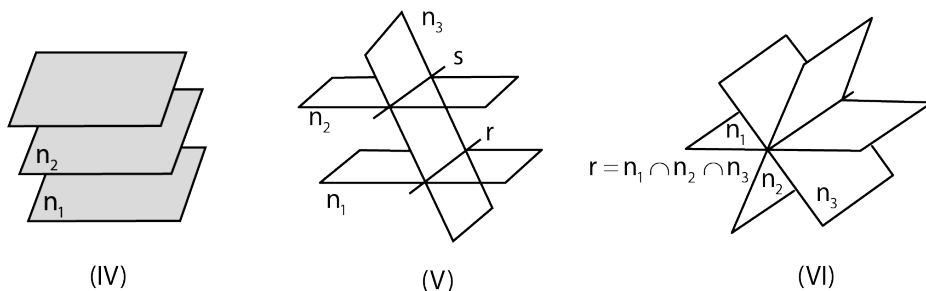


Figura19: Interpretação geométrica do sistema 3x3 em termos de planos no \mathbb{R}^3 (LIMA; CARVALHO; WAGNER & MORGADO, 1999, p. 109-110)

Antes de concluir esta aula, acrescentamos um último comentário sobre a Regra de Cramer que é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes. Consideremos,

portanto o sistema
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \text{ (***)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
. No qual supomos que a matriz m

dos coeficientes tenha determinante $\neq 0$. No que diz respeito ao conhecimento do professor, este deve estar cômico de que isto equivale a admitir que as linhas de m são linearmente independentes e, portanto o sistema (***) possui uma única solução.

Para deduzir a Regra de Cramer, em vez de operar com as linhas da matriz, trabalharemos com os vetores-coluna: $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$.

Em termos agora de vetores, essas três equações numéricas que constituem o sistema (***) se exprimem como uma única equação vetorial (LIMA; CARVALHO; WAGNER & MORGADO, 1999, p. 144). Dizem que o vetor d é combinação linear dos vetores a, b e c : $x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c = d$. Em seguida, os autores empregam as propriedades dos determinantes:

$$\begin{aligned} \det[d, b, c] &= \det[x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c, b, c] \\ &= x \cdot \det[a, b, c] + y \cdot \det[b, b, c] + z \cdot \det[c, b, c] = \\ &= x \cdot \det[a, b, c] + y \cdot \underset{=0}{\det[b, b, c]} + z \cdot \underset{=0}{\det[c, b, c]} \\ &= x \cdot \det[a, b, c] \end{aligned}$$

Portanto, $\det[d, b, c] = x \cdot \det[a, b, c] \leftrightarrow x = \frac{\det[d, b, c]}{\det[a, b, c]}$. Deixamos o resto como tarefa para o leitor.



ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Analisar e investigar nos livros didáticos o seguinte problema apontado por Lima (2001) ao comentar que o livro define determinantes de primeira e de segunda ordens. Em seguida, após definir menor complementar, cofator e matriz adjunta, afirma que o determinante de uma matriz qualquer pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz M pelos respectivos cofatores (Teorema de Laplace). Ou seja, o Teorema de Laplace é usado como definição dos determinantes (p. 148).
2. Analisar e investigar nos livros didáticos o seguinte problema apontado por Lima, Carvalho; Wagner & Morgado (2001, p. 144) ao comentar que a regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la fora desse caso pode conduzir a erros.
3. Pesquisar a definição formal de determinante de uma matriz 2×2 e 3×3 que recorre à noção de permutação para sua caracterização.
4. Completar a demonstração da Regra de Cramer e comparar com o que os livros didáticos apresentam.

AULA 6

Análise de livros de matemática - Parte III

Olá, aluno(a)!

Nas aulas passadas destacamos as sérias considerações acerca da qualidade dos livros didáticos de Matemática. Evidenciamos e fornecemos modelos de explicações temáticas formais que se apoiam em princípios que nem sempre podem ser discutidos no contexto escolar. Nos próximos tópicos, discutiremos outros aspectos preocupantes concernentes aos conteúdos específicos de Geometria Analítica, Trigonometria e Números Complexos.

Objetivo

- Identificar e compreender os elementos essenciais relativos à abordagem dos tópicos de Geometria Analítica, Trigonometria e Números Complexos nos livros didáticos

TÓPICO 1

Análise das noções de geometria analítica

OBJETIVO

- Discutir os principais conteúdos da Geometria Analítica, que necessitam de aperfeiçoamento e olhar atencioso do professor

A Geometria Analítica possibilita, de certo modo, a algebrização da Geometria. Entretanto, a intuição e a percepção de suas propriedades podem ser estimuladas por meio de figuras que funcionam como apoio ao entendimento.

Todavia, registramos abordagens que negligenciam tal perspectiva. De fato, como na maioria dos outros similares, a condição de alinhamento de três pontos no \mathbb{R}^2 é dada por intermédio de determinantes. Não há vantagem nisso, uma vez que a relação $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$, obtida da semelhança de triângulos, é mais simples e concreta e antecipa a noção de inclinação (LIMA et al, 2001).

A figura 1 apresenta o teorema de condição para alinhamento de três pontos:

VI. CONDIÇÃO PARA ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

22. Teorema

Três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se,

$$D = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 1: Iezzi (1984, p. 18-G) fornece o teorema que caracteriza a condição de alinhamento de pontos

A vantagem do livro de Iezzi (1984) é que o teorema enunciado acima é

demonstrado formalmente para o leitor, diminuindo o hábito de apresentar o conhecimento matemático como um saber que envolve apenas a aplicação de propriedades e fórmulas. Por outro lado, alguns livros apresentam o mesmo resultado sem mencionar a necessidade de uma demonstração e fornecem a impressão de que se trata de uma definição formal, o que é incorreto.

Ademais, vale ressaltar que Lima *et al.* (2001, p. 210) acentua que “a experiência didática tem mostrado que a condição de alinhamento de três pontos, dada em forma de um determinante, apesar de ser uma bonita fórmula, não deve ter o destaque que tem no livro (e em muitos outros), pois deste modo acaba funcionando como a receita de bolo favorita em matéria de equação de reta, escondendo os significados dos termos envolvidos”. A expressão $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, por exemplo, considerada intermediária nesta abordagem, é muito mais ilustrativa do que a expressão por meio de um determinante.

É evidente a crítica colocada por Lima *et al.* (2001) com referência à algoritmização excessiva explorada pelos autores de livros. Neste caso, a boa didática recomenda a exploração da interpretação geométrica da referida condição.

Com respeito à caracterização da equação que descreve uma reta r , Iezzi (1984) apresenta o teorema apontado na figura 2. É interessante que, ao se iniciar o estudo da reta, muita nomenclatura desnecessária é introduzida, como por exemplo, a noção de equação paramétrica da reta.

25. Teorema

“A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ onde a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e $\{x, y\}$ representa um ponto genérico de r ”.

Figura 2: A descrição analítica da equação da reta

Com respeito à noção de equações paramétricas, Lima et al. (2001, p. 211) salienta que a

apresentação das equações paramétricas de uma reta é feita sem nenhuma motivação e sem nenhuma aplicação interessante em que o parâmetro pudesse ter uma interpretação geométrica ou física (por exemplo, o tempo). O leitor fica sem saber porque inventaram equações paramétricas e para que elas servem. Mais uma vez a abordagem vetorial também faz falta.

Notamos as críticas incisivas indicadas por Lima et al. (2001). Nesta discussão ainda, os autores apontam que em alguns livros encontramos terminologias como “equação fundamental de uma reta” para se referir à forma $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ entretanto, não se preocupa em mostrar a relação desta equação com a equação geral descrita por $ax + by + c = 0$ ou $ax + by + c = 0$. Não podemos ainda esquecer a terminologia de equação de uma reta na forma reduzida. (LIMA *et al.*, 2001).

Uma grave inadequação consiste em considerar retas coincidentes como paralelas. Lima *et al.* (2001) sublinha expressões inconvenientes detectadas nos livros didáticos e na sua apresentação por parte dos autores. Assim, o autor destaca que é inadequado considerar “retas coincidentes como paralelas”. Ou ainda “retas paralelas distintas” e “retas paralelas coincidentes”.

Alguns argumentos formais envolvidos nas demonstrações requerem muito cuidado. Neste sentido, Lima *et al.* (2001, p. 449) acentua que

ao demonstrar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, o texto não referencia o fato de que a reta considerada é não-vertical (a precisa ser não nulo na equação $ax + by + c = 0$); também nada se diz a respeito do cálculo da distância quando a reta é vertical.

Com respeito ao estudo da circunferência, alguns autores chamam a equação de $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ de “equação reduzida”, enquanto a forma desenvolvida $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ de “equação geral”. Mais uma vez Lima *et al.* (2001) fornece uma indicação do uso excessivo de terminologias que tornam a leitura cansativa. Lima *et al.* (2001, p. 449) comenta ainda que na demonstração, um tanto confusa, que a condição necessária para que a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ represente uma circunferência é $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Comenta ainda que “na demonstração, além de usar parte da tese (a condição $A \neq 0$), o autor iguala os coeficientes correspondentes das equações” $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ e $x^2 + \left(\frac{B}{A}\right)y^2 + \left(\frac{C}{A}\right)xy + \left(\frac{D}{A}\right)x + \left(\frac{E}{A}\right)y + \left(\frac{F}{A}\right) = 0$.

Na sequência, o autor do livro didático admite tacitamente que duas equações definem a mesma curva têm coeficientes proporcionais, o que é falso. Lima *et al.* (2001, p. 450) indica que “não é difícil mostrar corretamente as condições $A = B \neq 0$, $C = 0$, e depois, usando o completamento de quadrados, chegar à condição $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.”.

O enunciado formal e correto envolvendo esta propriedade é descrito em Lima *lq*[1], (1999, p. 44): dada a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, o conjunto de pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas a satisfazem é uma circunferência se, e somente se, $A = B \neq 0$, $C=0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Mostraremos o sentido (\Rightarrow) demonstração baseando-se nas argumentações de Lima *lq*[1]. (1999). De fato, inicialmente, supondo que o centro da circunferência

Γ seja o ponto $O = (0,0)$, então os pontos coordenados $(-r,0)$ e $(r,0)$ pertencem a Γ . Substituindo sucessivamente estes valores na equação de Γ , obtemos $A(-r)^2 + B(0)^2 + C(-r) \cdot 0 + D(-r) + E \cdot 0 + F = 0 \therefore Ar^2 - Dr + F = 0$ e $Ar^2 + B(0)^2 + Cr(0) + Dr + E(0) + F = 0 \therefore Ar^2 + Dr + F = 0$.

Assim, avaliamos $(Ar^2 + Dr + F) - (Ar^2 - Dr + F) = 2Dr = 0 \stackrel{r \neq 0}{\Leftrightarrow} D = 0$.
Segue que $Ar^2 + F = 0$. Ou ainda $A = -\frac{F}{r^2}$. Mas como a origem $O = (0,0) \notin \Gamma$

não pertence à circunferência Γ descrita por $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, logo $F \neq 0$, segue-se como consequência que $A = -\frac{F}{r^2} \neq 0$. Usando um raciocínio semelhante, levando-se em conta que os pontos $(0,r)$ e $(0,-r)$ também estão sobre Γ ,

escrevemos: $A(0)^2 + Br^2 + C(0) \cdot r + D(0) + Er + F = 0 \therefore Br^2 + Er + F = 0$ e $A(0)^2 + Br^2 + C(0) \cdot (-r) + D(0) + E(-r) + F = 0 \therefore Br^2 - Er + F = 0$. Agora escrevemos a diferença $(Br^2 + Er + F) - (Br^2 - Er + F) = 0 \therefore 2Er = 0 \Leftrightarrow E = 0$.

Segue que $Br^2 + Er + F = Br^2 + F = 0 \therefore B = -\frac{F}{r^2}$. Portanto, se temos $A = B \neq 0$ e $D = E = 0$, a equação dada se reduz a $Ax^2 + By^2 + Cxy + F = 0$. Ademais, como o centro da circunferência Γ , de raio r , é a origem $O = (0,0)$, as coordenadas (x, y) de todos os pontos cumprem a relação $Ax^2 + By^2 + Cxy + F = Ax^2 + Ay^2 + Cxy + F = 0 \therefore A(x^2 + y^2) + Cxy + F = 0$.

Deixaremos a demonstração no sentido (\Leftarrow) a cargo do leitor, haja vista que a propriedade enunciada e discutida em Lima et al (1999) envolve o operador inferencial \Leftrightarrow que exige a verificação de ambos os sentidos, o que, geralmente, é negligenciado pelos autores de livros didáticos.

Para concluir esta seção, Lima et al. (2001, p. 451) comenta que no estudo da hipérbole, um autor de livros didáticos, diz que “as assíntotas da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ até encontra suas equações, porém, não diz o que é uma assíntota”. Diante disso, cabe ressaltar a indicação do tratamento com o autor na apresentação desta noção. Com efeito, no contexto da transmissão do saber, o professor não pode replicar o mesmo equívoco manifestado pelo autores de livros criticados por Lima et al (2001). No próximo tópico trataremos dos conteúdos de **Trigonometria**.

TÓPICO 2

Análise das noções de trigonometria presentes nos livros didáticos

OBJETIVO

- Discutir os aspectos negativos identificados nas abordagens dos livros didáticos envolvendo o conteúdo de Trigonometria

Neste tópico discutiremos um assunto que ocupa bastante o tempo do professor no contexto escolar. Todavia, de modo semelhante ao que indicamos no contexto da abordagem e transmissão dos conteúdos de Geometria Analítica pelos livros didáticos, o conteúdo de Trigonometria sofre do mesmo tratamento algébrico dos conceitos.

O tempo despendido no estudo dos conteúdos de Trigonometria é considerável. Para o início de nossa discussão, vejamos uma situação-problema, peculiar, tradicionalmente proposta pelo professor:

(a) provar que $(1 + \cot g^2(x)) \cdot (1 - \cos^2(x)) = 1$, para $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) provar que $(1 - \operatorname{tg}(x))^2 + (1 - \cot g(x))^2 = (\sec(x) - \operatorname{cosec}(x))^2$, para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Este tipo de enunciado geralmente provoca “calafrios” nos estudantes. De fato, expressões do tipo “Demonstrar que...” ou “Provar que...” ou ainda “Verificar...”, são familiares ao professor de Matemática que vivencia aproximadamente quatro anos de estudos acadêmicos.

Vamos descrever o que deve ser realizado no item (a). Reparamos que para se verificar que dois objetos A e B são idênticos, no caso da relação estabelecida por meio de uma igualdade, geralmente partimos do lado esquerdo e chegamos à expressão do lado direito. A recíproca pode ser verdade, na condição em que todas as inferências lógicas empregadas são do tipo \Leftrightarrow . Observamos que é inviável partir do lado direito para o lado esquerdo, assim, tomamos

$$(1 + \cot g^2(x)) \cdot (1 - \cos^2(x)) \stackrel{\substack{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ \text{identidade}}}{\Leftrightarrow} (1 + \cot g^2(x)) \cdot \text{sen}^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\text{definição}}{\Leftrightarrow} \left(1 + \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\right) \cdot \text{sen}^2(x) \stackrel{\text{distributividade}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\right) \cdot \text{sen}^2(x)$$

$$\stackrel{\text{identidade}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{\text{sen}^2(x)}\right) \cdot \text{sen}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\text{sen}^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\right) = 1$$

Observamos que o enunciado (a) precisa ser reformulado para o enunciado (c)

(c) provar que $(1 + \cot g^2(x)) \cdot (1 - \cos^2(x)) = 1$, para $\forall x \in \mathbb{R}$, onde $x \neq k \cdot \pi$.

Repare que para valores do tipo $x = k \cdot \pi \therefore \text{sen}(k\pi) = 0$ e assim não se pode efetuar o cancelamento do termo acima.

Vejamos agora o item (b) descrito por $(1 - \text{tg}(x))^2 + (1 - \cot g(x))^2 = (\sec(x) - \text{cosec}(x))^2$ e vamos efetuar uma estratégia semelhante. Assim $(1 - \text{tg}(x))^2 + (1 - \cot g(x))^2 \stackrel{\text{definição}}{\Leftrightarrow} \left(1 - \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{[\cos(x) - \text{sen}(x)]^2}{\cos^2(x)}\right) + \left(\frac{[\text{sen}(x) - \cos(x)]^2}{\text{sen}^2(x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{[1 - 2\text{sen}(x)\cos(x)]}{\cos^2(x)}\right) + \left(\frac{[1 - 2\text{sen}(x)\cos(x)]}{\text{sen}^2(x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow [1 - 2\text{sen}(x)\cos(x)] \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\text{sen}^2(x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow [1 - 2\text{sen}(x)\cos(x)] \cdot \left(\frac{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\text{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow [1 - 2\text{sen}(x)\cos(x)] \cdot \left(\frac{1}{\text{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x)}\right)$$

O restante da estratégia aqui, diferentemente da anterior, reside em desenvolver a expressão $(\sec(x) - \text{cosec}(x))^2$ e verificar, após a argumentação cansativa

acima, também que $[1 - 2\text{sen}(x)\cos(x)] \cdot \left(\frac{1}{\text{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x)}\right) = (\sec(x) - \text{cosec}(x))^2$.

O resultado segue então pela propriedade usada e pouco explicada no contexto escolar que conhecemos por **transitividade** que diz que se $a = b$ e $b = c \rightarrow a = c$.

Mas o que se destaca nestas situações é que o solucionador de problemas

precisa desenvolver uma habilidade perceptual sobre os registros algébricos e identificar as propriedades e outras identidades conhecidas que podem lhe auxiliar.

Assim, além de testar a memória do estudante, tarefas desta natureza (ver figura 2) não colocam em avaliação o conhecimento conceitual do solucionador de problemas. De fato, o sujeito não precisa nem saber o que é uma função $\text{pbk}\%$ ou $\text{lp}\%$. Didaticamente falando, o importante aqui é resolver.

Mas no estudo da **Trigonometria**, o problema que geralmente se coloca diz respeito à construção de funções. Mas com o advento da tecnologia, ainda tem sentido forçar o aluno na repetição de rituais indefectíveis de ensino que permanecem inalterados por décadas? Que aprendizagem esperar?

$$\begin{aligned} \text{c.99 } & \text{tg } x + \text{cotg } x = \text{sec } x \cdot \text{cossec } x \\ \text{c.100 } & (\text{tg } x + \text{cotg } x) (\text{sec } x - \cos x) (\text{cossec } x - \text{sen } x) = 1 \\ \text{c.101 } & \text{sec}^2 x + \text{cossec}^2 x = \text{sec}^2 x \cdot \text{cossec}^2 x \\ \text{c.102 } & \frac{\text{cotg}^2 x}{1 + \text{cotg}^2 x} = \cos^2 x \\ \text{c.103 } & \frac{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}{\text{sen } x - \cos x} = 1 + \text{sen } x \cdot \cos x \\ \text{c.104 } & \text{cossec}^2 x + \text{tg}^2 x = \text{sec}^2 x + \text{cotg}^2 x \\ \text{c.105 } & 2(\text{sen } x + \text{tg } x)(\cos x + \text{cotg } x) = (1 + \text{sen } x + \cos x)^2 \\ \text{c.106 } & (1 + \text{cotg } x)(1 - \text{cotg } x)^2 = 2 \cdot \text{cossec}^2 x \\ \text{c.107 } & \frac{1 - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^4 x}{1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x} = \text{tg}^4 x \\ \text{c.108 } & (\text{cotg } x + \cos x) + (1 - \text{sen } x)^2 = (1 - \text{cossec } x)^2 \\ \text{c.109 } & \frac{\cos x + \cos y}{\text{sen } x - \text{sen } y} = \frac{\text{sen } x + \text{sen } y}{\cos y - \cos x} \\ \text{c.110 } & \frac{\cos x + \text{cotg } x}{\text{tg } x + \text{sec } x} = \cos x \cdot \text{cotg } x \\ \text{c.111 } & \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} + 1 = \text{tg}^2 x \cdot \text{tg}^2 y \end{aligned}$$

Figura 3: Identidades trigonométricas exploradas em Jezzi (1980, p. 52-C)

Já mencionamos em trabalhos anteriores, que softwares como o Geogebra, permite a descrição rápida de funções do tipo $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$ e comparamos seu comportamento na figura 4. Todavia, no ensino tradicional, o aluno deve conhecer uma série de propriedades formais da função seno, que ocupa boa parte de uma aula, para que apenas no final de longa jornada, o professor lhe apresente o gráfico.

Tal abordagem não poderia privilegiar justamente o caminho inverso, na medida em que o solucionador de problemas identifica as propriedades mais importantes como exibimos nos gráficos abaixo?

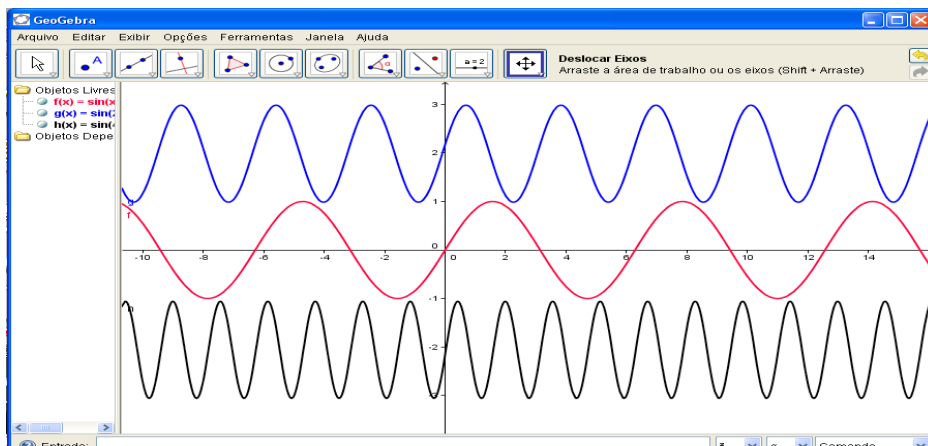


Figura 4: O software Geogebra permite a exploração de propriedades importantes no gráfico

A questão relativa ao estudo da trigonometria do triângulo envolve vários pontos nebulosos. De fato, as funções seno e cosseno têm como domínio um conjunto de todos os ângulos do plano, menores ou iguais a dois ângulos retos. Assim, essas funções $\text{sen} : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{cos} : A \rightarrow \mathbb{R}$ são independentes da forma como se definem os ângulos.

Outra questão apontada por Lima et al. (2001, p. 283) refere-se à questão preocupante, ao destacar que na seção em que define-se o ciclo trigonométrico, com alguma obscuridade, um arco é definido como “uma parte da circunferência determinada por dois de seus pontos”. Além de ser uma frase vaga, pois não se diz de que modo tal parte é determinada, esta tentativa de definição impede que haja arcos de mais de 360° , como ocorrerão logo a seguir.

Outra falta de precisão é indicada pelo autor ao declarar que um arco de 1 radiano é definido como aquele que tem comprimento igual ao raio da circunferência, mas não é dita uma palavra sequer sobre o significado do comprimento de um arco. Lima *et al.* (2001, p. 283) complementa ainda seu comentário acrescentando que o

termo “ciclo trigonométrico” é mais uma terminologia exclusiva dos autores de livros brasileiros para o ensino Médio.

Com referência ainda ao capítulo do livro didático sobre funções circulares, Lima (2001, p. 284) critica de modo veemente, ao comentar que

Neste capítulo, seno e cosseno serão definidos como funções reais de uma variável. As primeiras palavras são a definição de seno. Ou melhor, deveriam ser. Na verdade, não há definição alguma. Em primeiro lugar, não é correto definir um conceito matemático com referência a uma figura (embora o livro faça isso mais de uma vez). Mesmo assim, a definição é de seno mas não há u algum na figura. Ainda que o leitor descobrisse que u é a medida do arco AP, não está especificada a unidade: graus ou radianos. Em todo o livro esta indefinição persiste. Temos duas funções $\text{sen}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{sen}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para todo número real u , $\text{sen}_1 u$ é o seno do arco que mede u radianos e $\text{sen}_2 u$ é o seno do arco que mede u em graus. São duas funções diferentes, mas são tratadas no livro como se fossem a mesma.

No excerto acima, Lima (2001), aponta a imprecisão no momento do estabelecimento de definições formais e a ambiguidade na linguagem adotada pelo autor, além de detectar outros problemas graves à respeito deste conteúdo. Para concluir, anunciamos que na próxima seção discutiremos sobre Números Complexos. Evidenciaremos a ênfase no trato algébrico deste conteúdo.

TÓPICO 3

Análise das noções de números complexos e questões lógicas sobre as definições matemáticas

OBJETIVO

- Discutir e analisar a abordagem dos Números Complexos presentes nos livros de Matemática

Neste tópico discutiremos aspectos negativos relacionados aos Números Complexos. Sua importância conceitual reside no fato de que este conjunto constitui uma espécie de “expansão” dos números reais e que, grosso modo, é indicado no contexto escolar por $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Cabe o cuidado quando discutimos esse conjunto, uma vez que, formalmente, a identificação entre os conjuntos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e \mathbb{C} precisa ser bem compreendida apenas pelo professor.

Um pouco mais adiante discutiremos a natureza da simbologia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que no contexto escolar é chamado de produto cartesiano do conjunto \mathbb{R} por \mathbb{R} . Formalmente, o conjunto dos **números complexos** é construído a partir de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e com as operações de adição $\overset{+}{\underset{\mathbb{C}}{\times}}$ e multiplicação $\overset{\times}{\underset{\mathbb{C}}{\times}}$ designadas por: $\overset{+}{\underset{\mathbb{C}}{\times}} : (a,b) \overset{\text{definição}}{\underset{\mathbb{C}}{\times}} (c,d) = (a+c, b+d)$ e $\overset{\times}{\underset{\mathbb{C}}{\times}} : (a,b) \overset{\text{definição}}{\underset{\mathbb{C}}{\times}} (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Tais considerações de ordem axiomática e formal podem ser omitidas no contexto do ensino escolar, entretanto, não podem representar um conhecimento negligenciado pelo professor de Matemática, uma vez que representam os fundamentos matemáticos referentes aos números complexos.

Lima et al. (2001) critica de modo incisivo os autores de livros didáticos ; de fato, a necessidade de ampliações sucessivas dos conjuntos numéricos constitui uma boa motivação no tocante à introdução dos números complexos. Não obstante, a pergunta relativa ao significado do símbolo $\sqrt{-1}$ compromete e indica certo artificialismo. “Um encaminhamento melhor, que coroar o desenvolvimento que

vinham seguindo seria apresentar a equação $x^2 + 1 = 0$ e discutir a necessidade de ampliar o conjunto dos números reais a fim de que ela tenha solução” (LIMA *et al.*, 2001, p. 200).

De modo tradicional, a abordagem didática adotada pelos autores de livros preserva rituais de ensino indefectíveis que priorizam o caráter algorítmico deste conceito. De fato, “sente-se a pressa em livrar-se dessas dificuldades iniciais, e cair o mais rápido possível nos exercícios do tipo: “calcule $\frac{2+i}{3-2i}$ ”. (LIMA *et al.*, 2001, p. 215).

Algumas exceções são observadas no que diz respeito à preservação das origens históricas. Neste sentido, Lima *et al.* (2001, p. 215) acentua

Este livro não é exceção, embora se deva registrar um ponto positivo: enquanto muitos livros afirmam, sem maiores explicações, que os números complexos nasceram da necessidade de resolver equações do 2º grau com discriminante negativo, o presente livro ressalta corretamente que esta necessidade só surgiu no contexto da resolução de equações cúbica do 3º grau.

Como já pontuamos, no contexto escolar, as regras operacionais são preponderantes, assim, situações do tipo $(3+5i) \cdot (7-2i) = 21 - 6i + 35i - 10 \cdot i^2 = 31 + 29i$ são manipuladas, sob a condição de que $i^2 = -1$. Como mencionamos em disciplinas passadas, do ponto de vista do conhecimento do professor de Matemática, formalmente, dizemos que existe uma **imersão** de \mathbb{R} em \mathbb{C} , mas isto não significa que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e sim, definimos a função $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $k(x) = (x, 0)$.

Neste caso, sem maiores dificuldades, podemos provar que a função $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é injetora e preserva as operações de adição e multiplicação, isto é, $k(x+y) = k(x) + k(y)$ e $k(x \cdot y) = k(x) \cdot k(y)$. Assim, para o professor, deve ser de domínio geral, embora os autores de livros não mencionem este fato, que temos em $\mathbb{C} \supset k(\mathbb{R})$ uma **cópia algébrica** de \mathbb{R} , o que nos permite identificar \mathbb{R} com $k(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$.

Agora, admitindo esta identificação e adotando o símbolo i para o número complexo $(0,1)$, a expressão para $(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1)$ pode ser escrita como $a + bi$. Ademais, formalmente, escrevemos $i^2 = (0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ que se identifica com o real -1 .

Não é muito fácil distinguir o que de fato a Matemática se apropria da Lógica Formal. Todavia, para o bom professor, é importante ser vigilante quanto

aos elementos de natureza lógica que possibilitam, em muitos casos, a precisão e o sentido não ambíguo das definições matemáticas formais estudadas na escola. Um dos problemas é que na cultura escolar atual, não se define ou se questiona à respeito da existência e unicidade de nenhum objeto, tudo se resume em fazer contas e resolver equações.

Por outro lado, evidenciamos que o estudo de Números Complexos envolve a noção de par ordenado. Realizaremos uma pequena digressão no sentido de colocar em destaque a complexidade desta noção que, na maioria dos livros didáticos, recebe um tratamento inadequado. Para tanto, recordamos um problema histórico: O conjunto $\{1,2\}$ pode ser pensado como um par não ordenado, visto que $\{1,2\} = \{2,1\}$. Contudo, podemos precisar de outro par $(1,2)$ que caracterize uma ordem neste conjunto, de maneira a dizer que 1 é o primeiro componente e 2 é o segundo componente e, em particular, que $(1,2) \neq (2,1)$.

Do ponto de vista lógico e matemático, um mesmo par ordenado pode ser representado por (x,y) ou (a,b) , isto é, $(x,y) = (a,b)$, então suas representações são idênticas caso decorra daí que $(x,y) = (a,b) \rightarrow x = a \wedge y = b$.

Assim, qualquer caminho para o estabelecimento desta definição formal de par ordenado (x,y) é única e, embora esquecida, do ponto de vista formal no contexto escolar, deve satisfazer essa condição única de decomposição.

A História da Matemática registra que a definição formal de par ordenado mais simples e que obteve maior êxito foi devida à Kazimierz Kuratowski, em 1921 e descrita por: $(x,y) \stackrel{\text{definição}}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$. Assim, indicamos outra pseudodefinição.

DEFINIÇÃO: $(a,b) = (x,y) \leftrightarrow a \wedge y = b$.

Os autores de livros didáticos, por vezes, segundo Lima *et al.* (2001) apresentam-na como “propriedade” ou “definição”. De certo que do ponto de vista escolar, a intuição deve ser explorada, por outro lado, enunciamos o modo axiomático e formal de se obter o resultado acima.

LEMA:

Se $\{a,x\} = \{a,y\} \rightarrow x = y$.

DEMONSTRAÇÃO:

Temos por hipótese que $\{a,x\} = \{a,y\}$ e desejamos verificar a tese *Tese*: $x = y$. Vamos negar a propriedade, assumindo provisoriamente a possibilidade de que $a = y$, assim $x \in \{a,x\} \stackrel{\text{Hipótese}}{=} \{a,y\} \stackrel{a=y}{=} \{a\} \therefore x = a = y$. Se $a \neq y$, temos que $y \in \{a,y\} \stackrel{\text{Hipótese}}{=} \{a,x\} \stackrel{y \neq a}{\therefore} y \in \{a,x\} \leftrightarrow y = x$.

Teorema: $(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \wedge b = y$

DEMONSTRAÇÃO:

Aprendemos a verificar os seguintes sentidos (\Rightarrow) e (\Leftarrow). O que nenhum lógico purista vai lhe aconselhar, é que como aplicação na Matemática, a verificação da equivalência lógica entre duas fórmulas sempre apresenta um lado de implicação condicional simples e mais fácil. O problema aqui é saber, a priori, qual sentido escolher.

Vamos começar por (\Rightarrow) *Hipótese:* $(a, b) = (x, y)$ *Tese:* $a = x \wedge b = y$.

Note-se que precisamos da seguinte definição formal de par ordenado descrita em 1921 pela igualdade $\{\{a\}, \{a, b\}\} \stackrel{\text{definição}}{=} (a, b) \stackrel{\text{hipótese}}{=} (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Assim, escrevemos $\{x\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e temos duas alternativas: (i) $\{x\} = \{a\}$ ou (ii) $\{x\} = \{a, b\}$.

No primeiro caso, $x \in \{x\} = \{a\} \therefore x \in \{a\} \rightarrow x = a$. No segundo caso $\{x\} = \{a, b\}$ e daí $a \in \{a, b\} = \{x\} \therefore a \in \{x\} \rightarrow x = a$. De qualquer modo concluímos que $x = a$ (*).

Agora podemos usar que $\{x\} \stackrel{(*)}{=} \{a\}$ e $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{a, b\}\}$. Agora, pelo lema anterior, escrevemos:

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \stackrel{\text{lema}}{=} \{\{x\}, \{a, b\}\} \rightarrow \{x, y\} = \{a, b\} \stackrel{(*)}{=} \{x, b\} \therefore \{x, y\} = \{x, b\} \stackrel{\text{lema}}{\rightarrow} y = b.$$

Se $a = x \wedge b = y$, então é claro que $(a, b) \stackrel{\text{Hipótese}}{=} (x, b) \stackrel{\text{Hipótese}}{=} (x, y)$.

Assim, feita esta pequena digressão, colocamos em destaque as seguintes regras operatórias: (i) $\sqrt{-c} = \sqrt{c \cdot (-1)} = \sqrt{c \cdot i^2} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{i^2} = \sqrt{c} \cdot i$;

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{3i^2 \times 3i^2} = \sqrt{3i^2} \times \sqrt{3i^2} \\ \text{(ii)} \quad &= \sqrt{3} \cdot i \times \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i^2 = 3 \cdot (-1) = -3 \end{aligned}$$

No item (i), se não é dito que $c \in \mathbb{R}$ ou se $c \in \mathbb{R}^+$, muitas das operações efetuadas acima estão completamente equivocadas. Na linha (ii), mais uma vez, os autores de livros devem ter atenção em não conduzir o leitor na crença segundo a qual, propriedades como $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ para $a, b \in \mathbb{R}^+$ são válidas automaticamente em \mathbb{C} , o que é falso.

Destacamos ainda que na linha (ii) temos um exemplo de sofisma que quer dizer um enunciado falso com aparência de verdade ou credibilidade. Reparamos que a forma lógica de um enunciado é determinante para que atribuamos o termo de sofisma ou ainda a expressão “sofismar a verdade”.

Perceba que um sofisma nasce de um lapso da argumentação com a intenção de iludir o receptor da mensagem, ademais, pode ocorrer também que o próprio professor busca sofismar a verdade do aluno, uma vez que tal fato ou enunciado lógico encerra determinada propriedade que nem ele consegue explicar ou torná-la acessível ao entendimento do aprendiz.

Outro aspecto merecedor de atenção diz respeito ao formalismo exagerado registrado em determinadas coleções de livros didáticos. Comentamos, por exemplo, o caso de Iezzi (1980) que enuncia os dois teoremas que destacamos na figura 5.

TEOREMA

A operação de adição define em \mathbb{C} uma estrutura de grupo comutativo, isto é, verifica as seguintes propriedades:

- [A - 1] propriedades associativa
- [A - 2] propriedade comutativa
- [A - 3] existência do elemento neutro
- [A - 4] existência do elemento simétrico

TEOREMA

A operação de multiplicação define em \mathbb{C} uma estrutura de grupo comutativo, isto é, verifica as seguintes propriedades:

- [M - 1] propriedades associativa
- [M - 2] propriedade comutativa
- [M - 3] existência do elemento neutro
- [M - 4] existência do elemento simétrico

Figura 5: Iezzi (1980, p. 3-F) acentua o formalismo na apresentação do conceito

Saltam aos olhos os termos colocados em destaque como hipóteses de que \mathbb{C} possui a propriedade de grupo aditivo. Apesar de inoportuno e proporcionar dificuldades ao leitor, o professor de Matemática depara situações em que o mesmo verifica onde os conceitos de Estruturas Algébricas são aplicados e exemplificados.

A divisão de números complexos, por exemplo, é apresentada como uma receita: a divisão de dois números complexos....pode ser obtida, escrevendo-se o quociente em forma de fração; a seguir, procedendo-se de modo análogo ao utilizado na racionalização do denominador de uma fração, multiplicando-se ambos os termos da fração pelo....conjugado do denominador, isto é $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$.

Recomenda a boa Didática da Matemática, a exploração de vários quadros e modo de representação do mesmo objeto matemático. Seja um registro algébrico,

registro aritmético ou gráfico, quanto maior a conversão de registros explorada pelo professor, melhor. Na figura 6 colocamos em destaque a interpretação geométrica da soma algébrica $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$.

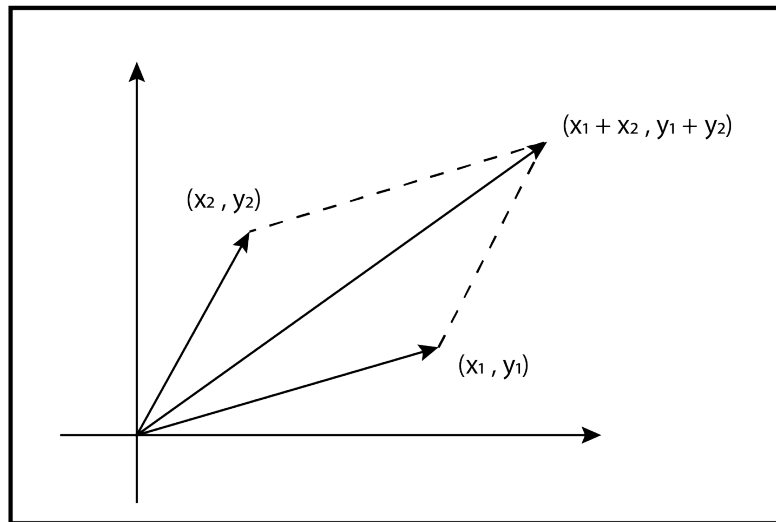


Figura 6: Lima et al (1999, p. 170) explica a interpretação geométrica da soma/diferença de complexos

Destacamos alguns problemas pontuais identificados por Lima (2001) que exigem atenção do professor: a imagem de um complexo é chamada de “afixo”, quando é justamente o contrário, afixo de um ponto é o complexo cuja imagem é o ponto; a definição de imaginário puro não pode excluir o zero; a fórmula de De Moivre pode ser demonstrada para expoentes inteiros positivos e negativos; propriedades operatórias envolvendo o conjugado $\left(\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} ; \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} ; z + \overline{z} = 2 \cdot \text{Re}(z) ; z \cdot \overline{z} = |z|^2 ; z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \right)$ podem ser exploradas de modo mais eficientes e não podem ser negligenciadas.

Para concluir este tópico, enunciamos um teorema discutido em Lima (1999, p. 172) que envolve uma argumentação diferente da que é adotada pela maioria dos autores de livros didáticos.

Teorema: $z_1 = r_1 \cos \theta_1 + i \text{sen} \theta_1$ $z_2 = r_2 \cos \theta_2 + i \text{sen} \theta_2$ $r_1, r_2 \neq 0$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] +$$

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] = z_1$$

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \times z_2 = z_1 \therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Concluiremos nosso estudo, recordando mais uma vez as palavras de

Lima (2001, p. 462) ao acentuar que “o nível, a qualidade do ensino e, consequentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis.”

Lima (2001) indica ainda as seguintes características preocupantes do livro genérico adotado aqui no Brasil:

- Ele é muito bem impresso e diagramado, embora as figuras matemáticas contenham imprecisões.
- Seu texto não induz o leitor (aluno) a pensar. Quando propõe problemas que exigem raciocínio, são quebra-cabeças que não se relacionam com a matéria ensinada.
- Transmite sistematicamente a impressão de que as conclusões gerais da Matemática resultam do exame superficial de dois ou três casos particulares.
- Contém afirmações gerais obviamente falsas.
- Usa uma terminologia peculiar, que o aluno deverá esquecer em estudos posteriores na Universidade.

- Não estabelece conexões entre os assuntos estudados em diferentes capítulos ou volumes.
- A manipulação é privilegiada em detrimento da conceituação e contextualização.

Finalizamos esta aula com o reconhecimento dos inúmeros elementos matemáticos que carecem da atenção por parte do professor de Matemática. De fato, evidenciamos vários elementos atinentes aos tópicos de Geometria Analítica e Números Complexos que merecem a vigilância do professor de Matemática, na medida em que detém certos pressupostos que não podem ser discutidos em sala de aula no contexto escolar. A omissão à qual nos referimos é consciente, tendo em vista a evolução adequada da aprendizagem do aluno.

REFERÊNCIAS

ALVES. F. R. V. ; BORGES NETO. H. **Uma aplicação da Sequência Fedathi no ensino de Progressões Geométricas e a formação do professor.** In: Conexões, Ciência e Tecnologia, 2011.

ALVES. F. R. V. **Didática da Matemática.** Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2010.

_____. **Filosofia das Ciências e da Matemática.** Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2011(a).

_____. **História da Matemática.** Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2011(b).

BASSOK, M. **Analogical Transfer in Problem Solving.** In: DAVIDSON, J. ; STERNBERG, R *The Psychology of Problem Solving*, New York: Cambridge University Press, 2003, p. 343-369.

COURNOT, A.A. **Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caracteres de la critique philosophique.** Tome Premier, Paris: Librairie de la Hachette, 1851.

DALLOB, P. ; DOMINOWSKI, R. **Insight and Problem Solving.** In: DAVIDSON, J. ; STERNBERG, R *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 127-156.

DAVIDSON, J. ; STERNBERG, R. **Teaching for Thinking.** Washington: American Psychological Association, 1996.

_____. **The Psychology of Problem Solving.** New York: Cambridge University Press, 2003.

DAVIS, p. ; HERSH, R. **L'Univers Mathématiques.** Paris: Gauthiers et Villars, 1985.

FISCHBEIN, Efrain. **Intuition in science and mathematics: an educational approach.** Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

HADAMARD, J. **An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field.** United Kingdom: Dover Publications, 1945.

HALMOS. Paul. **Teoria ingênua dos conjuntos.** São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2001.

HAMBRICK, D. e ENGLE, R. **The Role of Working Memory in Problem Solving**, In: DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. *The Psychology of Problem Solving*, New York: Cambridge University Press, 2003, p. 176-206.

HAMMACK, R. **Book of Proofs**. Virginia: Lon Mitchell, 2009.

HANNA, R. **Kant and The Foundations of Analytic Philosophy**. Oxford: Oxford University Press, 2001.

HILBERT, D. **Sur les Problèmes Futur de Mathématiques, Compte Rendu du Deuxième Congrès Internacional de Mathematiciens**, Paris: Gauthier-Villars, 1902, p. 58-114.

IEZZI, Gelson. ; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar: seqüências, matrizes e determinantes**. v. 4. São Paulo: Editora Atual, 1977.

_____. **Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria**. São Paulo: Editora Atual, 1980.

_____. **Fundamentos de Matemática Elementar: complexos, polinômios e equações**. São Paulo: Editora Atual, 1981.

Lima et al. **Matemática do Ensino Médio**. v. 2. Rio e Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

_____. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 3. Rio de Janeiro, 1999.

_____. **A Matemática do ensino médio**. vol. 2. . Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

_____. **Um curso de Análise**. v. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

_____. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

_____. **Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

_____. **Matemática do Ensino Médio**. v. 1, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

_____. **Cursos de Análise**. vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

LIMA, E. L; CARVALHO, Paulo. Cezar. P.; WAGNER, Eduardo ; MORGADO, Augusto. C. **Matemática do ensino médio**. v. 3, Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

MAIO, Valdemar de. **O raciocínio lógico matemático: sua estruturação neurofisiológica e aplicações em Educação Matemática** (tese de doutorado em Educação Matemática), São Paulo: UNESP/Rio Claro, 2002, 281p.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving**, cognition. In: STERNBERG, R. e DAVIDSON, J. *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 3-32.

MORAIS, S. R. **O papel das representações mentais na percepção-ação: uma perspectiva crítica** (tese de doutorado em educação matemática), Marília: Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, 2006, 234p.

MORGADO, Augusto. C.; WAGNER, Eduardo. ; ZANI, Sheila. C. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

POINCARÉ, H. **La logique et l'intuition dans la science mathématique, L'enseignement Mathématique**. v. 1, 1899, p. 158-162.

_____. **Science et Méthode, Oeuvres Philosophique de Henri Poincaré**, Paris: Ernest Flammarion, 1908.

_____. **La valeur de la Science**. Paris: Ernest Flammarion, 1905.

POLYA, George. **Mathematical Discovery**: on understanding, learning and teaching problem solving. New York: John Wiley and Sons, 1962.

_____. **Collected Papers**: Probability, Combinatory, Teaching and Learning in Mathematics, v.4 , London: MIT Press, 1982.

SEIFERT, C. et al. **Demystification of cognitive insight**: opportunistic assimilation and the prepared-mind perspective, In: DAVIDSON, J. e STERNBERG, R. The Nature of Insight, MIT: Press, 1992, p. 235-274.

SMITH, S. **Getting Into and Out of Mental Ruts**: A theory of Fixation, Incubation, and Insight, In: DAVIDSON, J. e STERNBERG, R. The Nature of Insight, MIT: Press, 1992, p. 123-145.

CURRÍCULO

Francisco Régis Vieira Alves

Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1998), graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1997), mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2001) e mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará (2002). Atualmente é professor do Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará / CE - 40h/a com DE, do curso de Licenciatura em Matemática. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Comutativa, atuando principalmente nos seguintes temas: Didática da matemática, História da Matemática, Análise Real, Filosofia da Matemática e Tecnologias aplicadas ao ensino de matemática para o nível superior. Com pesquisa voltada ao ensino de Cálculo I, II e III. E na Universidade Aberta do Brasil, com o ensino a distância de Matemática. Desenvolve pesquisa direcionada para o ensino do Cálculo a Várias Variáveis e sua transição interna. Atua também no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) - UFC.

