Licenciatura em Matemática

MATEMÁTICA BÁSICA I

CAPES

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

INSTITUTO FEDERAL Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

MATEMÁTICA BÁSICA I

Kiara Lima Costa
Diego Ponciano de Oliveira Lima
Darlan Portela Veras

Fortaleza | CE
2017

Elaboração do conteúdo
Kiara Lima Costa
Diego Ponciano de Oliveira Lima
Darlan Portela Veras

Colaboradores
Livia Maria de Lima Santiago
Raimundo Nonato Araújo da Silva

Equipe pedagógica e design educacional
Daniele Luciano Marques
Iraci de Oliveira Moraes Schmidlin
Isabel Cristina Pereira da Costa
Karine Nascimento Portela
Kiara Lima Costa
Livia Maria de Lima Santiago
Luciana Andrade Rodrigues
Maria das Dôres dos Santos Moreira
Márcia Roxana da Silva Régis Arruda
Maria do Socorro Nogueira de Paula

Equipe de arte, criação e produção visual
Camila Ferreira Mendes
Francisco César de Araújo Filho
Suzan Pagani Maranhão
Tamar Couto Parentes Fortes

Equipe Web
Corneli Gomes Furtado Júnior
Emanuel Lucas de Sousa e Silva
Fabrice Marc Joye
Herculano Gonçalves Santos
Ícaro Magalhães Holanda Barroso
Morgana Gomes da Silva

Revisão
Antônio Carlos Marques Júnior
Débora Liberato Arruda
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Sistema de Bibliotecas - SIBI - Campus Fortaleza
Bibliotecária responsável: Erika Cristiny Brandão F. Barbosa CRB Nº 3/1099

C837m Costa, Kiara Lima.
Matemática básica 1/ Kiara Lima Costa, Diego Ponciano de Oliveira Lima, Darlan Portela Veras. – Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

256 p.

ISBN 978-85-475-0057-3

1. Conjuntos. 2. Funções. 3. Trigonometria. I. Lima, Diego Ponciano de Oliveira. II. Veras, Darlan Portela. III. Título

CDD 510

Sumário

Apresentação

Caro(a) aluno(a),

Sejam bem-vindos(as) ao curso de Licenciatura em Matemática. A disciplina Matemática Básica I tem por objetivo fazer que o estudante revisite alguns conteúdos dessa área que foram estudados no Ensino Médio. Nessa disciplina, focaremos, basicamente, nos seguintes conteúdos: Conjuntos, Funções e Trigonometria. Eles serão de fundamental importância para as disciplinas vistas posteriormente e, dentre elas, podemos citar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A abordagem dada ao conteúdo será diferente da que foi vista no Ensino Médio, pois agora passaremos a nos apoiar em estruturas matemáticas bem definidas e as usaremos para demonstrar algumas afirmações que julgamos importantes para o desenvolvimento matemático do estudante. Ressaltamos que, nesse processo, outra parte dos conteúdos será abordada na disciplina de Matemática Básica II

A disciplina Matemática Básica I está organizada em oito aulas. Em cada uma, procuramos seguir uma ordem lógica no desenvolvimento dos conteúdos com o intuito de que o leitor avance de maneira independente a cada assunto abordado. Ao longo de cada aula, você encontrará exercícios resolvidos e também outros, deixados no próprio corpo do texto, para serem solucionados. Além disso, no final de cada aula, na sessão **Pratique**, você ainda poderá colocar em prática os conhecimentos adquiridos. Sendo assim, antes de resolver tais exercícios, é necessário que você entenda toda a teoria, analisando os exemplos e exercícios resolvidos. Não se esqueça, também, de olhar as referências citadas ao longo do texto no formato de ícones.

Sendo assim, convido-os a fazerem parte desse novo mundo da Matemática que será apresentado. Esperamos que, ao final da disciplina, todos possam ter sucesso e sintam-se motivados a enfrentar os desafios do curso de Matemática. Para isso, podem contar com nosso estímulo e nossa ajuda. Bons estudos!

Aula 1

Introdução à teoria dos conjuntos

Olá, estudantes!

Na nossa primeira aula da disciplina de Matemática Básica I, veremos uma breve introdução à teoria dos conjuntos. Começaremos com a ideia básica de conjuntos, que nada mais é do que uma coleção de objetos. Veremos que as vogais ou até mesmo as letras empregadas na construção dos algarismos romanos são exemplos de conjuntos.

Ainda no tópico 1, apresentaremos as formas de representar um conjunto, definiremos subconjunto e fixaremos a simbologia utilizada para relacionar elemento com conjunto, e conjunto com conjunto. Encerramos o primeiro tópico trabalhando com as operações entre conjuntos, como a união, interseção, diferença e complementar, juntamente com algumas de suas propriedades.

No segundo tópico, estudaremos os conjuntos numéricos fundamentais, Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e os Reais, e seus subconjuntos. Veremos quais são as operações consideradas fechadas em cada um desses conjuntos e a representação geométrica deles. Existe ainda o conjunto dos números complexos, porém não vamos estudá-lo nesta disciplina. Aproveitem ao máximo as informações e os conteúdos sobre nosso tema!

Objetivos

- Compreender a noção de conjunto e subconjunto
- Identificar as diferentes formas de representar um conjunto e seus subconjuntos
- Conhecer as operações realizadas entre conjuntos juntamente com suas propriedades
- Conhecer a característica de cada conjunto numérico, seus subconjuntos, suas representações geométricas, bem como as operações que são fechadas em cada um deles

Tópico 1

Conjuntos e Subconjuntos: estudo das notações, das relações, das operações entre eles e suas propriedades

OBJETIVOS

- Entender o conceito primitivo de conjuntos e subconjunto
- Compreender as simbologias utilizadas no estudo de conjuntos
- Estudar como se realizam as operações entre conjuntos e suas principais propriedades

Os dias da semana, os meses do ano ou até mesmo os dedos de nossas mãos nos dão a ideia de conjunto. O nosso esforço neste primeiro tópico será a formalização desta ideia, já que que a noção de conjunto é de fundamental importância, pois toda a Matemática é formulada nessa linguagem e, a partir dessa estrutura, podemos definir outros conceitos matemáticos (número, função, relação, ...).

Saiba mais...

Georg Cantor (1845 - 1918) foi um importante matemático suíço que contribuiu significativamente para os estudos sobre os conjuntos. No site indicado, você obtém mais informações sobre os estudos de Cantor http://super.abril.com.br/comportamento/georg-cantor-e-o-alefe-zero-o-homem-que-colocou-o-infinito-no-bolso.

Sendo assim, você deve estar se perguntando "O que é um conjunto?" ou "Qual é a definição de conjunto?". Na verdade, esta pergunta é muito difícil de ser respondida, pois, da mesma forma como o ponto, a reta e o plano, da geometria euclidiana básica, um conjunto não pode ser definido! Podemos apenas ter uma noção primitiva sobre ele. Queremos dizer com a expressão noção primitiva que conjunto trata-se de um conceito aceito sem definição matemática formal. Dessa forma, temos apenas uma noção intuitiva!

A noção de ***conjunto*** designa um agrupamento, coleção ou classes de **objetos** quaisquer bem definidos. Tais **objetos** são chamados de ***elementos*** do conjunto.

Da mesma maneira, temos que *elemento* é uma noção primitiva e, portanto, não apresenta definição.

Vimos que um conjunto é formado por elementos, mas como poderemos distinguir, matematicamente, um elemento de um conjunto? Um conjunto costuma ser, em geral, representado por letra maiúscula do nosso alfabeto, e um elemento qualquer por letra minúscula. Logo, podemos designar um conjunto por A, B, C, D, E e um elemento por a, b, c, d, e, ...

Dessa forma, dado um objeto qualquer a e um conjunto A apenas uma das possibilidades pode acontecer: ou a é um elemento de A, e escrevemos $a \in A$ (lê-se o elemento a pertence ao conjunto A), ou a não é um elemento de A, e escrevemos $a \notin A$ (lê-se a não pertence ao conjunto A). Acima usamos os símbolos de $\in$ e $\notin$ (lê-se, pertence e não pertence) para relacionar elementos com conjuntos. Designamos tal conceito como *relação de pertinência*. Da mesma forma que a noção de conjunto e de elemento é um conceito primitivo, o mesmo vale para o conceito de *pertinência.*

Vejamos abaixo alguns exemplos do que foi abordado até agora:

- Seja A o conjunto das vogais do nosso alfabeto. Seus elementos são as letras a, e, i, o e u. Como a é um elemento do conjunto A, denotamos por $a \in A$. Note ainda que b não é um elemento do conjunto A, e denotamos esse fato pela simbologia $b \notin A$.
- Seja B o conjunto dos algarismos romanos. Seus elementos são as letras maiúsculas I, V, X, L, C, D e M. Note que $\mathrm{I} \in B$ e que $\mathrm{O} \notin B$.

Mas então como poderemos representar os conjuntos acima usando a linguagem matemática? Para isto, usaremos as principais formas de representação: forma tabular, descrição por uma propriedade e diagrama de Venn. Vamos conhecê-las?

- **Forma tabular:** Usamos este tipo de representação quando definimos um determinado conjunto enumerando ou citando seus elementos. Neste caso, os elementos são separados por vírgula e compreendidos entre chaves. Por exemplo, o conjunto das vogais $A = \{a, e, i, o, u\}$ e o conjunto dos algarismos romanos $B = \{I, V, X, L, C, D, M\}$.
- **Descrição por uma propriedade:** Nesta forma de representação, definimos um conjunto determinando a propriedade que seus elementos precisam satisfazer. Neste caso, usamos uma letra, geralmente é x, para representar um elemento arbitrário. Ou seja, considere um conjunto J tal que seus elementos, que designaremos por x, possuam a propriedade P. Em notação

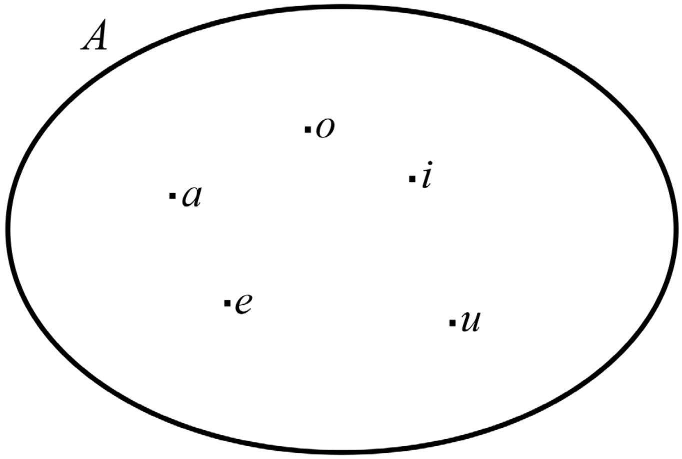
matemática temos que $J = \{x \mid x \text{ tem a propriedade de P}\}$ (Lê-se: *J* é o conjunto dos elementos x, tal que x tem a propriedade P). Por exemplo: $A = \{x \mid x \text{ é uma vogal do alfabeto}\}$ é a forma de representar o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é um algarismo romano}\}$ indica o conjunto $B = \{\mathrm{I}, \mathrm{V}, \mathrm{X}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{M}\}$.

- **Diagrama de Venn-Euler:** É habitual representar um conjunto usando diagramas. Dentre eles, destacam-se *diagramas de Venn-Euler* ou simplesmente *digramas de Venn*. Nesse tipo de representação, o conjunto é representado por uma região plana, limitada por uma curva fechada (geralmente, são usados círculos ou elipses) e simples (não entrelaçada, ou seja, sem auto intersecções). Os elementos são indicados, em seu interior, por meio de pontos; e pontos no exterior da região, indica elementos que não pertencem ao conjunto. Como exemplo desse tipo de representação, ilustramos abaixo o conjunto das vogais do nosso alfabeto (figura 1) e o conjunto dos algarismos romanos (figura 2).

Saiba mais...

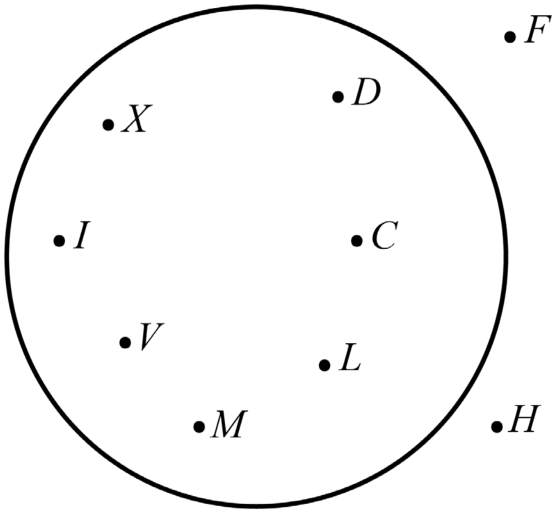
John Venn (1834 - 1923) foi um matemático inglês que desenvolveu a lógica booleana estabelecendo a criação de diagramas para a representação de conjuntos. Mais informações sobre John Venn podem ser encontradas no link http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Venn.html

Figura 1 – Diagrama de Venn para o conjunto das vogais



Fonte: DEaD | IFCE

Figura 2 – Diagrama de Venn para o conjunto dos algarismos romanos



Fonte: DEaD | IFCE

Observe que o conjunto das vogais (figura 1) apresenta cinco elementos e que o conjunto dos algarismos romanos (figura 2) apresenta sete elementos. Além disso, o conjunto dos meses do ano que possuem trinta e dois dias é um conjunto sem nenhum elemento. Percebemos assim que existem conjuntos com quantidades variáveis de elementos. Logo, como podemos caracterizar um conjunto de acordo com a sua quantidade de elementos ou de suas características? Existe uma nomenclatura específica para esses casos?

Em geral, podemos classificar os conjuntos, de acordo com a sua quantidade de elementos, em conjunto finito e conjunto infinito. Dizemos que um conjunto é finito quando apresenta uma quantidade finita de elementos distintos. Como exemplo, temos o conjunto das vogais e o conjunto dos algarismos romanos. Já os conjuntos que não são finitos são denominados de conjuntos infinitos. Por exemplo, o conjunto $C = \{x \mid x \text{ é um ponto de uma reta}\}$. Sabemos, da geometria euclidiana básica, que uma reta possui infinitos pontos. Logo, o conjunto C é um exemplo de conjunto infinito.

Vale destacar ainda alguns conjuntos notáveis como o conjunto unitário, o conjunto vazio e o conjunto universo.

- **Conjunto unitário** é o conjunto que possui apenas um elemento. Como exemplo, temos o conjunto B formado pela primeira letra do nosso alfabeto. Temos $B = \{a\}$.
- **Conjunto vazio** é o conjunto que não possui elemento. Denotamos o conjunto vazio pela letra $\varnothing$ ou o símbolo $\{\ \}$. Como exemplo, temos $A = \{x \mid x \neq x\} = \varnothing$.
- **Conjunto universo** aquele que representa o conjunto de todos os elementos que estão sendo estudados em um determinado contexto. Como exemplo,

temos que o conjunto universo dos números que serão estudados neste livro é o conjunto dos números reais que veremos mais adiante.

Vimos que podemos relacionar um elemento com um conjunto através da relação de pertinência. Será que podemos relacionar um conjunto com outro conjunto? Tal relação pode ser estabelecida a partir da definição de **subconjunto**, dada a seguir e é denominada de relação de inclusão.

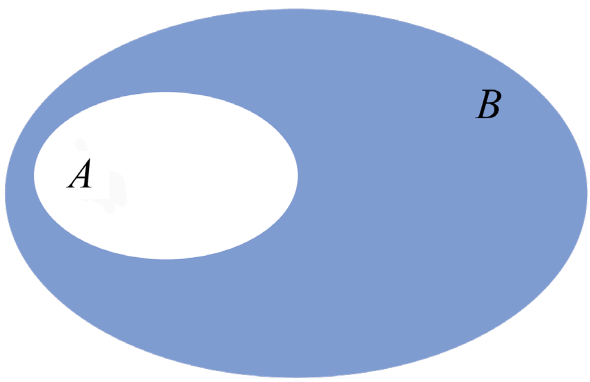
Definição 1.1 Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B se todo elemento de A é também elemento de B. Denotamos por $A \subset B$ (Lê-se: A está contido em B, ou A é um subconjunto de B). Usamos então a relação:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B\,.$$

(Lê-se: A está contido em B se, e somente se, para todo x pertencente a A, implica que x pertence a B).

Podemos ilustrar que $A \subset B$ usando o diagrama de Venn-Euler (figura 3).

Figura 3 – Representação de $A \subset B$ pelo diagrama de Venn



Fonte: DEaD | IFCE

Atenção!!! Usamos os símbolos $\in$ e $\notin$ para relacionar elementos e conjuntos; e usamos os símbolos $\subset$ e $\not\subset$ para relacionarmos conjuntos.

Caso exista algum elemento em A que não pertença a B, dizemos que A não está contido em B ou que A não é subconjunto de B e usamos a notação $A \not\subset B$ (lê-se: A não está contido em B). Por exemplo o conjunto $A = \{1,2,3\}$ é um subconjunto de $B = \{-üüüü \quad\}$. De fato, todos os elementos que pertencem a A também pertencem a B. Como $A \subset B$ e $A \neq B$, dizemos que A é um subconjunto próprio de B. Agora o conjunto $B = \{-üüüü \quad\}$ não é subconjunto do conjunto $A = \{1,2,3\}$ pois $-1 \in B$ e $-1 \notin A$.

Outro fato interessante é que o conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de todo conjunto A. De fato, para que $\varnothing \not\subset A$ é necessário que exista elemento em $\varnothing$ que não pertença a A. Mas $\varnothing$ não possui elementos, portanto $\varnothing \subset A$.

Dois conjuntos A e B são iguais, escrevemos $A = B$, se todos os elementos de A pertencem a B e, reciprocamente, todos os elementos de B B pertencem a A, ou seja $A = B$ significa mostrar que $A \subset B$ e que $B \subset A$.

A relação de inclusão satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedades (Inclusão) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer.

(i) Para qualquer conjunto A, $A \subset A$. Todo conjunto é subconjunto de si próprio. (Reflexiva)

(ii) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$. (Transitiva)

(iii) Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$. (Anti-Simétrica)

Agora veremos que dado um conjunto finito qualquer podemos formar um novo conjunto cujos elementos são todos os seus subconjuntos. Vamos a sua definição.

Definição 1.2 Dado o conjunto finito A, chama-se conjunto das partes de A – denotamos por $\wp(A)$ – o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Por exemplo, se considerarmos $A = \{1, 2, 3\}$, então temos que o conjunto das partes de A é dado por $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, ou seja, a partir dos elementos 1, 2 e 3, construímos todos os conjuntos possíveis usando nenhum, um, dois e três elementos. Se utilizarmos a análise combinatória (assunto que será visto em disciplina futura do seu curso), poderemos provar que o número de elementos do conjunto das partes $\wp(A)$ de um conjunto A, com n elementos, é dado por 2^n. No exemplo, vimos que o conjunto A possui 3 elementos, assim $\wp(A)$, tem $23=8$ elementos.

Agora que temos a ideia de conjunto, subconjuntos e conjunto das partes, estudaremos as operações que podem ser realizadas entre conjuntos. Dessa forma, como podemos operar com conjuntos? Dados dois números, da aritmética básica, podemos realizar operações de soma, subtração e multiplicação. E quanto aos conjuntos? Será que existem operações semelhantes? Para conjuntos, tais operações recebem o nome de união, interseção, diferença e complementação.

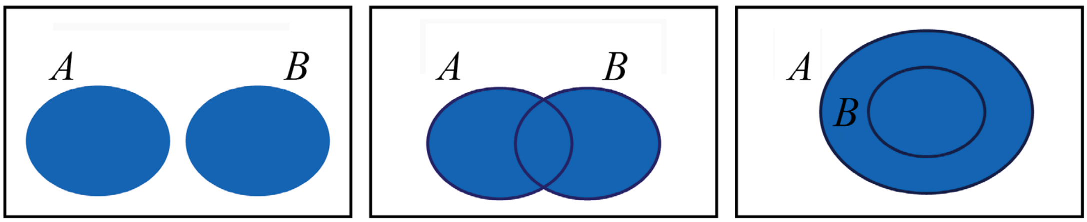
Faremos um estudo de cada uma dessas operações começando pela união. De maneira intuitiva, a união entre dois conjuntos A e B consiste em criar um novo conjunto a partir da junção de todos os elementos que se encontram no conjunto A e no conjunto B. No rigor matemático temos

Definição 1.3 (União de conjuntos) Dados dois conjuntos A e B, chama-se **união** de A e B o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Denotamos por $A \cup B$. Assim, podemos escrever:

$$A \cup B = \{ x | x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

Para representarmos a união entre os conjuntos acima, utilizaremos o diagrama de Venn como pode ser visto na figura 4.

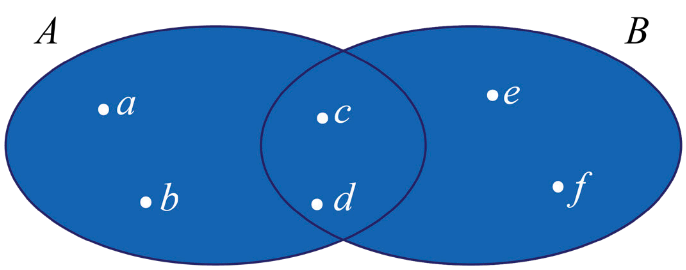
Figura 4 – Diagrama de Venn de $A \cup B$



Fonte: DEaD | IFCE

Note que, na figura 4, a união entre os dois conjuntos é toda a região pintada de cinza, ou seja, considera tanto os elementos de A quanto os elementos de B. Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{ a, b, c, d \}$ e $B = \{ c, d, e, f \}$, temos que $A \cup B = \{ a, b, c, d, e, f \}$. Observe ainda que os elementos que se repetem devem ser contabilizados apenas uma vez. Utilizando o diagrama de Venn, podemos representar a união desses conjuntos da seguinte forma:

Figura 5 – Representação da união $A \cup B$ pelo diagrama de Venn



Fonte: DEaD | IFCE

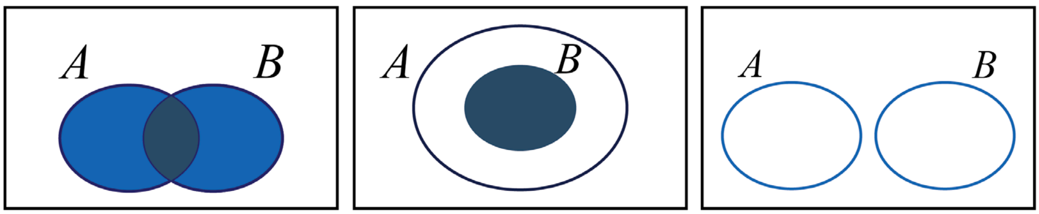
Uma outra operação muito usual entre conjuntos é a interseção. De forma intuitiva, a interseção entre dois conjuntos A e B consiste em criar um novo conjunto a partir da junção dos elementos em comum em ambos os conjuntos. No rigor matemático temos

Definição 1.4 (Interseção de conjuntos) Dados dois conjuntos, chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que estão em A e B, ao mesmo tempo. Denotamos por $A \cap B$. Assim, podemos escrever:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Para representarmos a interseção entre os conjuntos acima utilizaremos o diagrama de Venn como pode ser visto na figura 6.

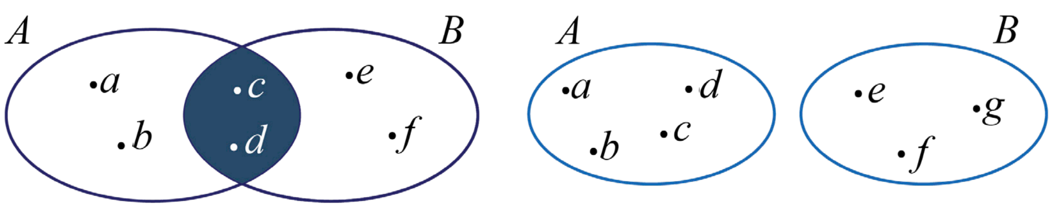
Figura 6 – Diagrama de Venn de $A \cap B$



Fonte: DEaD | IFCE

Note que, na figura 6, a interseção entre os dois conjuntos é a região pintada, ou seja, considera os elementos que estão em A e B ao mesmo tempo. Por exemplo, se considerarmos os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, temos que $A \cap B = \{c, d\}$ (figura 7). Perceba ainda que no último caso da figura 6, os conjuntos A e B não possuem elementos em comum. Neste caso, dizemos que os conjuntos são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Como exemplo, dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g\}$ temos que $A \cap B = \varnothing$ (figura 7).

Figura 7 – Representação da interseção $A \cap B$ pelo diagrama de Venn



Fonte: DEaD | IFCE

Agora que definimos a união e interseção de conjuntos, veremos algumas propriedades das mesmas.

> **Propriedades (União e Interseção de conjuntos)** Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então:
>
> i) *Idempotência:* $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$.
>
> ii) *Comutatividade:* $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.
>
> iii) *Associatividade:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
>
> iv) *Existência do Elemento Neutro:* $A \cup \varnothing = A$ e $A \cap U = A$, onde U é o conjunto universo.
>
> v) $A \subset (A \cup B)$; $B \subset (A \cup B)$; $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$

Demonstração: Demonstraremos apenas a propriedade v). As demais serão deixadas como exercício para o leitor. Mostraremos inicialmente que $A \subset (A \cup B)$. Pela definição de união de conjuntos, temos que $A \cup B$ contém todos os elementos de A ou B. Assim todos os elementos de A são elementos da união $A \cup B$, portanto $A \subset (A \cup B)$. Da mesma forma, temos que $B \subset (A \cup B)$.

Agora mostraremos que $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$. Observe que se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$, isto é, todo elemento da interseção é elemento de A e também de B. Logo $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$. ■

> **Saiba mais...**
>
> Existem muitos teoremas que relacionam a interseção com a união de conjuntos. Um desses é o que garante que a distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Você encontra algumas demonstrações das propriedades de conjuntos, no site https://www.sonoma.edu/users/w/wilsonst/Papers/finite/2/t2-6.html e https://www.sonoma.edu/users/w/wilsonst/Papers/finite/2/t2-5.html.

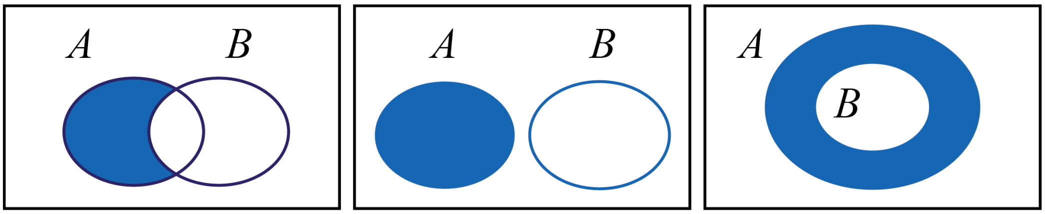
Agora veremos a diferença entre dois conjuntos que, de forma intuitiva, consiste em criar um novo conjunto comparando dois conjuntos e considerando os elementos que estão em um conjunto e que não são elementos do outro conjunto. No rigor matemático temos

Definição 1.5 (Diferença de conjuntos) Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto diferença entre A e B, denotamos por $A-B$, como sendo formado pelos elementos que estão em A, mas não estão em B. Da mesma forma, o conjunto $B-A$ será formado pelos elementos que estão em B, mas não estão em A. Podemos escrever

$$A-B=\{\, x\in A | x\notin B \,\} \text{ e } B-A=\{\, x\in B | x\notin A \,\}$$

Para representarmos a diferença entre os conjuntos acima utilizaremos o diagrama de Venn, como pode ser observado na figura 8.

Figura 8 – Representação da interseção $A-B$ pelo diagrama de Venn

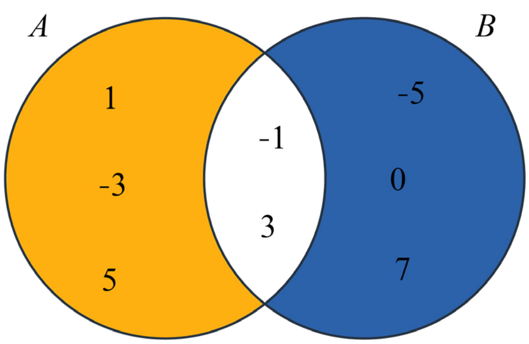


Fonte: DEaD | IFCE

Note que, na figura 8, a diferença $A-B$ corresponde à região pintada de azul, ou seja, corresponde a pintar os elementos que estão em A e não estão em B. Por exemplo, dados os conjuntos $A=\{-3,-1,1,3,5\}$ e $B=\{-5,-1,0,3,7\}$, temos que $A-B=\{-3,1,5\}$ (parte pintada de laranja na figura 9). De fato, os elementos -3, 1 e 5 pertencem a A, mas não pertencem a B. Além disso, $B-A=\{-5,0,7\}$ (parte pintada de azul na figura 9).

Como $A-B=\{x\in A\,|\,x\notin B\}$, temos que $A-B\subset A$. Da mesma forma, como $B-A=\{x\in B\,|\,x\notin A\}$, temos que $B-A\subset B$.

Figura 9 – Representação da interseção $A-B$ pelo diagrama de Venn



Fonte: DEaD | IFCE

Um caso especial da diferença de conjuntos ocorre quando temos $A \subset B$ ou $B \subset A$. Neste caso, faz sentido falar do complementar de um conjunto em relação a outro. De forma intuitiva, o complementar de B em relação a A consiste um criar um novo conjunto dos elementos que se devem acrescentar ao conjunto B para que ele se transforme no conjunto A. Em linguagem matemática:

Definição 1.6 (Complementação entre conjuntos) Dados dois conjuntos quaisquer A e B, tais que $B \subset A$, definimos o complementar de B em relação a A, denotamos por C_A^B, como sendo os elementos que estão em A, mas não estão em B. Ou seja, $C_A^B = A - B$. (figura 8)

Note que, se considerarmos os conjuntos $A = \{-7,-5,-3,-1,1,3,5,7\}$ e $B = \{-3,-1,1,3,5\}$, temos que $B \subset A$ e assim faz sentido falar do complementar de B em relação a A. Logo, $C_A^B = A - B = \{-7,-5,7\}$.

Agora listaremos algumas propriedades da complementação entre conjuntos, cujas demonstrações também ficarão a cargo do leitor

Propriedades (Complementação de conjuntos) Dados A, B e C conjuntos quaisquer tais que $B \subset A$ e $C \subset A$. Então:

i) $C_A^A = \varnothing$ e $C_A^\varnothing = A$

ii) $C_A^B \cap B = \varnothing$ e $C_A^B \cup B = A$

iii) $C_A^{B \cap C} = C_A^B \cup C_A^C$

iv) $C_A^{B \cup C} = C_A^B \cap C_A^C$

Finalizamos assim esse tópico onde estudamos as noções básicas de conjuntos. Definimos subconjuntos e o conjunto das partes. Vimos as formas de se representar um conjunto. Além disso, aprendemos as operações que podem ser realizadas entre eles e algumas de suas propriedades. Agora, vamos restringir o nosso estudo aos conjuntos numéricos, ou seja, aqueles cujos elementos são números. Este será o assunto do próximo tópico.

Tópico 2

Conjuntos numéricos

OBJETIVOS

- Estudar os conjuntos numéricos, seus subconjuntos e como representá-los geometricamente
- Entender quais operações são fechadas para cada um deles
- Compreender o que são e como são formados os intervalos reais

Desde a antiguidade, temos que os números vêm acompanhando a humanidade. Os primeiros números concebidos pelo homem surgem da necessidade de se contar objetos, desde o número de ovelhas num pasto até o desejo de saber a quantidade de habitantes de uma tribo. Um dos primeiros registros da noção de número pode ser encontrado no Papiro de Rhind.

Saiba mais...

O Papiro de Rhind é um longo papiro de origem egípcia datado de cerca de 1650 a.C. Seu nome é devido ao escocês Alexander Henry Rhind que o comprou no Egito. Neste papiro, está descrito vários problemas matemáticos. Para saber mais, acesse: http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/rhind/inicio.htm

Começaremos, nesse tópico, a estudar os chamados conjuntos numéricos, ou seja, os conjuntos cujos elementos são números que apresentam características comuns entre sim. Segundo Lima (1999): "Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza".

Os principais conjuntos numéricos que veremos serão naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Este último estará presente em grande parte deste livro. Começaremos com o conjunto dos números naturais.

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Desde os primeiros anos na escola, já temos contatos com os números. Os números estudados nas séries infantis são chamados de números naturais.

Partindo da necessidade de se contar objetos que surgiu o que conhecemos como o conjunto dos números naturais, que será indicado pela letra $\mathbb{N}$. Seus elementos serão chamados de números naturais e podem ser representados da seguinte forma:

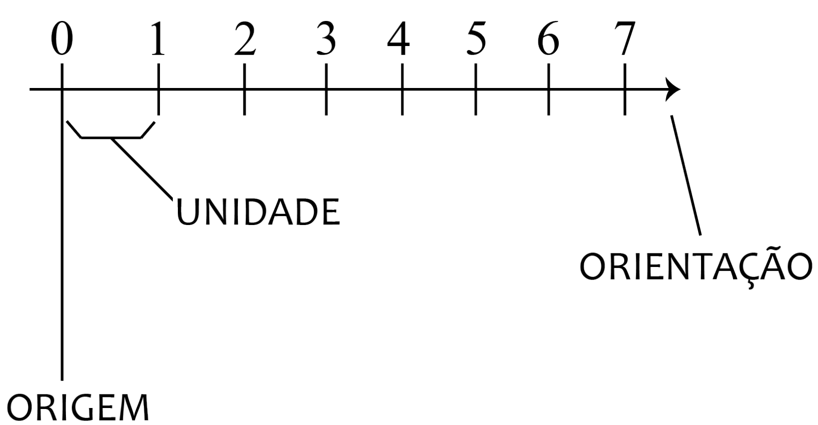
$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots\},$$

onde as reticências indicam que a contagem continua. Quando queremos excluir o zero de qualquer conjunto numérico, utilizamos o símbolo $*$. Assim, $\mathbb{N}^*$ representa $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots\}$ e é chamado conjunto dos números naturais não nulos.

Será possível representar geometricamente os números naturais? Isso é possível e é feito através da marcação de pontos numa reta. Para isso, inicialmente devemos considerar uma reta e fixar uma orientação (sentido do percurso, que indicaremos por uma flecha). Tal reta é chamada de reta orientada.

Agora iremos marcar, em qualquer posição, um ponto que representa a origem. Fixaremos ainda um segmento de reta u (unidade de comprimento). Agora, podemos inserir os números naturais na reta orientada, colocando o número 0 na origem; depois a partir do 0, no sentido positivo (ou seja, a sua direita), marcamos um segmento unitário u (ou seja, um segmento cujo comprimento mede um unidade) de forma que sua extremidade passará a representar o número 1. Agora, ainda no sentido positivo, iremos deslocar o segmento unitário u consecutivamente partindo do 1 e marcaremos os demais pontos. Os pontos obtidos representam os números naturais.

Figura 10 – Representação geométrica dos números naturais



Fonte: DEaD | IFCE

Como poderemos então operar com os números naturais? Dizemos que uma operação * é fechada em um conjunto numérico A, se para quaisquer dois elementos x e y pertencentes a A, tivermos $x * y \in A$. Assim, podemos afirmar que a adição e a multiplicação são fechadas em $\mathbb{N}$. De fato, a soma e a multiplicação de dois naturais é sempre um natural.

Isso não ocorre em relação à subtração. Por exemplo, $2-5 \notin \mathbb{N}$. Por isso, temos a necessidade de ampliar os naturais. Daí surgiu o conjunto dos inteiros no intuito de fornecer sentido às subtrações da forma $a-b$, onde a e b são naturais com $a<b$. Ficou estabelecido assim a ideia de números negativo.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros, que será denotado pela letra $\mathbb{Z}$, é o conjunto formado pelos números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$. Seus elementos serão chamados de números inteiros e podem ser representados da seguinte forma

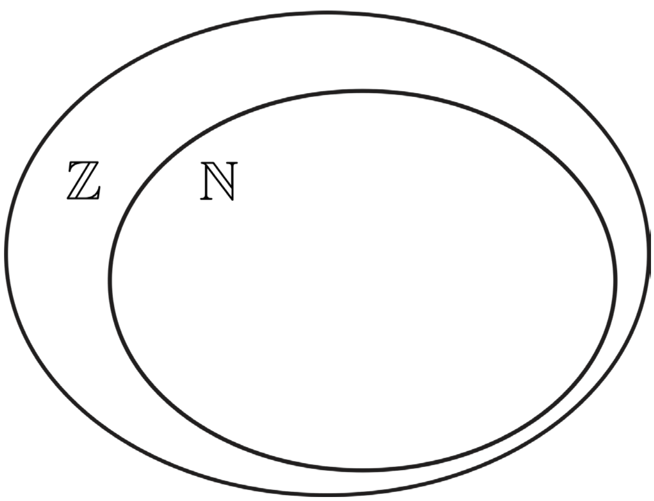
$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\},$$

onde as reticências indicam que a contagem continua tanto pela esquerda quanto pela direita.

Dois números inteiros são ditos *opostos* ou *simétricos* um ao outro quando sua soma é zero. Assim, se *a* é um inteiro, temos que *−a* é o seu oposto ou simétrico.

Se observamos os conjuntos $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots\}$ e $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$, notamos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, todo número natural é um número inteiro. Podemos representar essa relação de inclusão pelo diagrama de Venn.

Figura 11 – $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$



Fonte: DEaD | IFCE

Em $\mathbb{Z}$ temos alguns subconjuntos notáveis:

$\mathbb{Z}_+\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}=\mathbb{N}$ (conjunto dos números inteiros não-negativos)

$\mathbb{Z}_-\{\ldots,-3,-2,-1,0\}$ (conjunto dos números inteiros não-positivos)

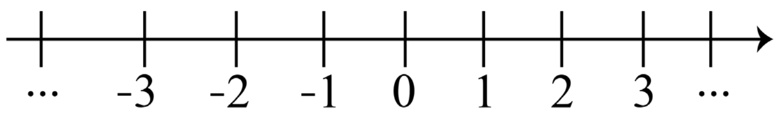
$\mathbb{Z}^*=\{\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$ (conjunto dos números inteiros não-nulos)

$\mathbb{Z}_+^*=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ (conjunto dos números inteiros positivos)

$\mathbb{Z}_-^*=\{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1\}$ (conjunto dos números inteiros negativos)

Da mesma forma que fizemos a representação geométrica dos números naturais na reta orientada, podemos proceder para os números inteiros. Para isso, basta completar a reta em que marcamos os naturais (figura 12). Utilizaremos o mesmo artifício, porém iremos para o sentido oposto, ou seja, no sentido negativo. Dessa forma, a partir da esquerda do zero, iremos deslocar o segmento unitário u no sentido negativo e iremos marcando todos os pontos. Os pontos obtidos representam os números inteiros negativos.

Figura 12 – Representação geométrica dos números inteiros



Fonte: DEaD | IFCE

No conjunto $\mathbb{Z}$, surge uma nova operação que não era possível no conjunto $\mathbb{N}$, a subtração. Dessa forma, além de $\mathbb{Z}$ ser fechado para a adição e multiplicação, temos que $\mathbb{Z}$ também é fechado para a subtração. Dessa forma, dados dois inteiros a e b, temos que $a+b$, $a-b$ e $a\cdot b$ são inteiros.

Vimos que, com a necessidade de se definir a subtração de dois números naturais, foi construído o conjunto dos inteiros. Mas claramente a divisão não é uma operação fechada nos inteiros. De fato, $1\div4\notin\mathbb{Z}$. Para resolvermos esse impasse foi construído o conjunto formado por todos os quocientes entre números

Você sabia?

O conjunto dos números naturais é denotado pela letra $\mathbb{N}$, por causa da primeira letra da palavra "natural". Mas, por que o conjunto dos números inteiros é representado pela letra $\mathbb{Z}$ e não $\mathbb{I}$? A melhor explicação é que diz que isso se dá por causa da palavra número em alemão que se escreve **zahl**. Resolveram denotar inteiro com $\mathbb{Z}$ para não confundir com o $\mathbb{I}$ de irracional (que estudaremos mais adiante).

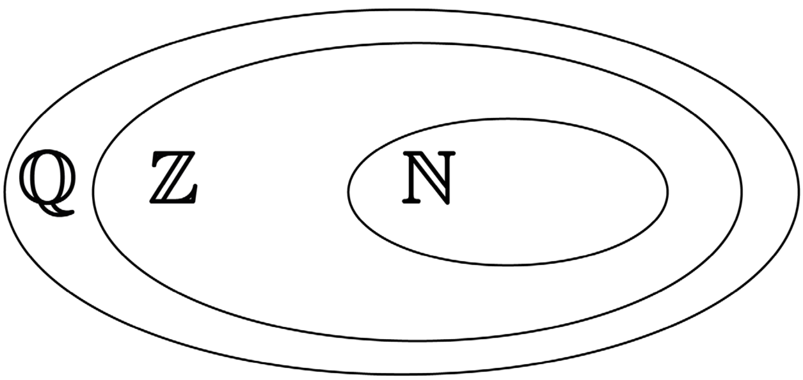
inteiros. Daí a notação desse conjunto ser $\mathbb{Q}$. Os números que formam esse conjunto são chamados de números racionais.

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é formado por todos os quocientes entre inteiros p e q, com $q \neq 0$. Assim, de modo simplificado, temos $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z \text{ e } q \in Z^* \right\}$.

Note que todo número inteiro x pode ser escrito da forma $x = \frac{x}{1}$. Dessa forma, temos que todo número inteiro é racional ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). Mas, como todo número natural é inteiro, segue que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Na figura 13, podemos observar essa relação de inclusão utilizando o diagrama de Venn.

Figura 13 – $\mathbb{Q}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$



Fonte: DEaD | IFCE

Quando a divisão entre dois números inteiros não é exata, o número resultante do cálculo é chamado de decimal. Existem dois tipos de decimais. Os decimais exatos e os decimais não exatos, mas periódicos, também conhecidos como dízimas periódicas. Os decimais exatos são aqueles em que o número de casas decimais (algarismos depois da vírgula) é finito. As dízimas periódicas são aquelas que a parte decimal possui um número (período) que se repete indefinidamente.

A fração (quociente) que gerou o decimal é chamada de **fração geratriz** do número decimal. Veremos a seguir alguns exemplos de como encontrarmos as frações geratrizes de decimais exatos e das dízimas periódicas.

Por exemplo, os números $2,34$ e $-0,875$ são considerados decimais exatos e suas frações geratrizes são dadas por $2,34 = \frac{234}{100} = \frac{117}{50}$ e $-0,875 = -\frac{875}{1000} = -\frac{7}{8}$.

Observe que, para transformar um decimal exato qualquer em uma fração, basta retirarmos a vírgula e colocarmos o número no numerador. O denominador será a potência 10^n, onde n é o número de algarismos depois da vírgula.

Os números $0{,}4444...$, $0{,}272727...$ e $2{,}12727...$ são considerados dízimas periódicas cujos períodos são 4, 27 e 27, respectivamente. Os números $0{,}4444...$ e $0{,}272727...$ são considerados dízimas periódicas simples, pois, depois da vírgula, vem o período. Já o número $2{,}12727...$ é considerado uma dízima periódica composta, pois existe o número 1 entre a vírgula e o período. Os números $0{,}4444...$, $0{,}272727...$ e $2{,}12727...$ ainda podem ser representados da forma $0,\overline{4}$, $0,\overline{27}$ e $2{,}1\overline{27}$, onde as barras indicam o período.

Encontraremos agora a fração geratriz de cada um desses números:

- Qual a fração geratriz da dízima $0,4444...=0,\overline{4}$?

Solução: Chamaremos de x a dízima. Assim, $x=0,4444...$ e, multiplicando ambos os membros por 10, teremos

$$x=0,4444...\Rightarrow 10x=4,444...\Rightarrow 10x=4+0,444...\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x=4+x\Rightarrow 9x=4\Rightarrow x=\frac{4}{9}$$

Logo a fração geratriz de $0,\overline{4}$ é $\frac{4}{9}$.

- Qual a fração geratriz de $0,\overline{27}$?

Solução: Chamaremos de x a dízima. Assim, $x=0,\overline{27}$ e, multiplicando ambos os membros por 100, teremos

$$x=0,\overline{27}\Rightarrow 100x=27,\overline{27}...\Rightarrow 100x=27+0,\overline{27}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100x=27+x\Rightarrow 99x=27\Rightarrow x=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}.$$

Logo a fração geratriz de $0,\overline{27}$ é $\frac{3}{11}$.

- Qual a fração geratriz de $2{,}1\overline{27}$?

Solução: Chamaremos de x a dízima. Assim, $x=2{,}1\overline{27}$ e, multiplicando ambos os membros por 10, teremos

$$x=2{,}1\overline{27}\Rightarrow 10x=21,\overline{27}...\Rightarrow 10x=21+0,\overline{27}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x=21+\frac{3}{11}\Rightarrow 10x=\frac{234}{11}\Rightarrow x=\frac{234}{110}.$$

Logo a fração geratriz de $2,1\overline{27}$ é $\dfrac{234}{110}$.

Do que vimos acima, podemos perceber que, no conjunto $\mathbb{Q}$, podemos definir a divisão (por números diferentes de zero). Dessa forma, o conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para as quatro operações adição, subtração, multiplicação e divisão.

Você sabia?

Dois números racionais não nulos são ditos inversos um do outro quando o produto deles é igual a 1. Por exemplo, o inverso de $\dfrac{5}{8}$ é igual a $\dfrac{8}{5}$, pois $\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{8}{5}=1$.

Além disso, uma propriedade interessante no conjunto dos números racionais é que, entre dois números racionais, sempre existe outro número racional. De fato, sejam a e b dois racionais, tais que $a<b$, vamos mostrar que $a<\dfrac{a+b}{2}<b$. Veja que $\dfrac{a+b}{2}-a=\dfrac{b-a}{2}>0 \Rightarrow a<\dfrac{a+b}{2}$ e da mesma forma, $b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}>0 \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}<b$.

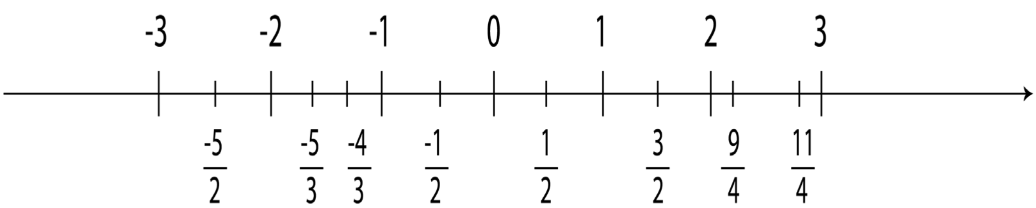
Vamos agora ver como podemos representar geometricamente os números racionais.

Como todo número inteiro é racional, iremos aproveitar a reta dos números inteiros (figura 12). O nosso desafio aqui será marcar os não inteiros. Daremos alguns exemplos para entendermos como isso funciona.

Começando com o número $\dfrac{1}{2}$. Temos que $\dfrac{1}{2}=0,5$. Assim, como $0,5$ está entre 0 e 1, marcamos o ponto médio do segmento de extremidades 0 e 1. Para marcarmos o racional $\dfrac{9}{4}$, devemos escrevê-lo da seguinte forma $\dfrac{9}{4}=2+\dfrac{1}{4}$. Assim, podemos perceber que $\dfrac{9}{4}$ está entre 2 e 3. Então, dividimos o segmento de extremidades 2 e 3, em quatro partes iguais e marcamos o primeiro desses pontos.

De modo geral, dados dois números inteiros consecutivos, dividimos o segmento compreendido entre eles em n partes iguais, em que n é um inteiro positivo qualquer. Prosseguimos assim para marcarmos qualquer número racional.

Figura 14 – Representação geométrica de alguns números racionais



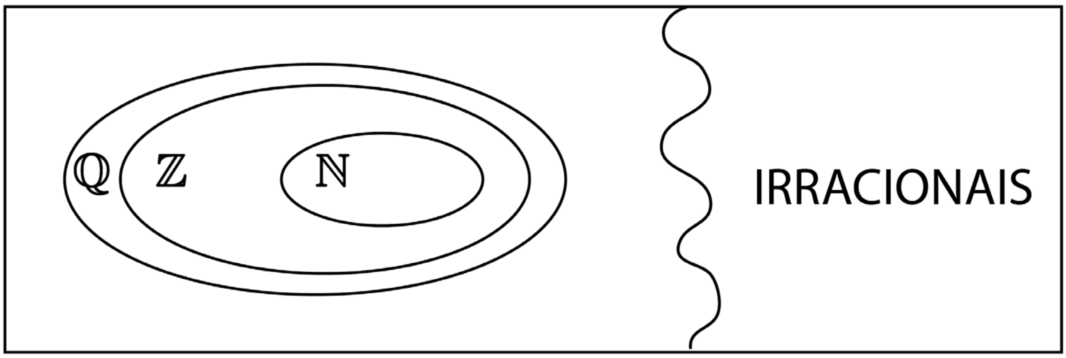
Fonte: DEaD | IFCE

Vimos, nessa seção, que todo número decimal exato e as dízimas periódicas são números racionais, isto é, eles podem ser colocados em forma de fração. No entanto, existem decimais não exatos que têm a parte decimal infinita e não periódica. Esses decimais são chamados de números irracionais. Este é o assunto da próxima seção.

Conjunto dos números irracionais ( )

Um número é dito irracional se ele **não** pode ser escrito da forma $\frac{p}{q}$, em que $p \in Z$ e $q \in Z^*$. Dessa forma, podemos concluir que $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$. Utilizando o diagrama de Venn para relacionar os conjuntos estudados, podemos representá-los da seguinte forma:

Figura 15 – Relação entre os conjuntos$\mathbb{I}$ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$



Fonte: DEaD | IFCE

Existem números irracionais muito famosos, devido à sua importância tanto na Matemática, como em outras áreas. Podemos citar, por exemplo, o número π que é aproximadamente $3{,}14$; o número irracional neperiano e que é, aproximadamente $2{,}718$, e o número de ouro representado por Φ que é aproximadamente $1{,}618$. Além disso, toda raiz n-ésima não exata é um número irracional. Como exemplo, podemos citar os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}$ e $\sqrt[5]{24}$.

Apesar do conjunto dos números racionais serem fechados para qualquer uma das quatro operações o mesmo não ocorre com o conjunto dos números irracionais. Podemos provar isso com alguns exemplos. Os números $x = -\sqrt{2} + 1$ e $y = \sqrt{2} + 1$ são irracionais, mas a soma $x + y = -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 1 = 2$ não é irracional. Assim como, o produto $xy = -1$ não é irracional. Se tomarmos $x = \sqrt{2} + 1$ e $y = \sqrt{2} - 1$, temos que $x - y = 2$ não é irracional. Por fim, tomando $x = y = \sqrt{2}$, teremos $\frac{x}{y} = 1$, que não é irracional.

O número π é o quociente da medida do comprimento de uma circunferência pela medida do diâmetro. Podemos encontrar mais informações sobre o número π no site http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html
O número Φ é conhecido por *número de ouro*, por suas incontáveis aplicações em várias áreas da matemática e fora dela. Aprenda um pouco mais sobre o número de ouro acessando o site http://www.infoescola.com/matematica/o-numero-de-ouro/.

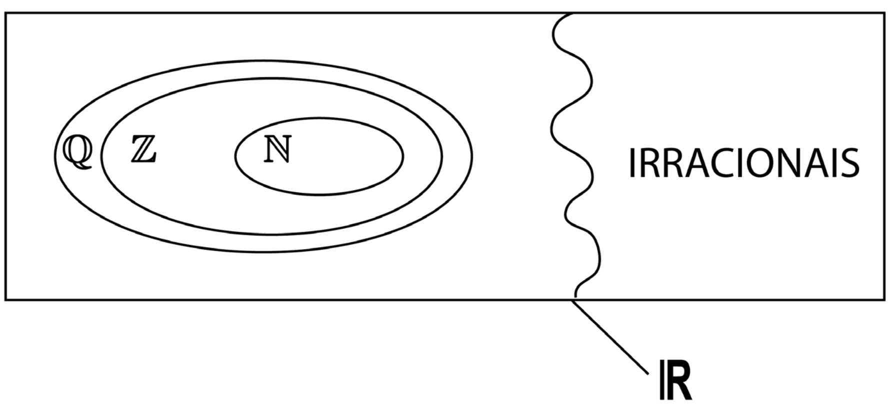
Note ainda que a soma de um racional com um irracional é sempre um irracional. De fato, considere a um número racional, ou seja $a \in \mathbb{Q}$, e seja b um número irracional, ou seja $b \in \mathbb{I}$. Vamos fazer a prova dessa afirmação pelo método do absurdo, ou seja, $a \in \mathbb{Q}$ e que $b \in \mathbb{I}$ e suporemos por absurdo que $a+b$ é um número racional. Sendo $a+b=m \in \mathbb{Q}$, então temos que $b=m-a \in \mathbb{Q}$, pois $m \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{Q}$ e portanto, $m-a \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ é fechado), ou seja, $b \in \mathbb{Q}$. Mas isso contradiz o fato que $b \in \mathbb{I}$. Logo, $a+b \in \mathbb{I}$. Da mesma forma, podemos provar que se $a \in \mathbb{Q}^*$ e $b \in \mathbb{I}$, então $a \cdot b \in \mathbb{I}$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{I}$ e $\frac{b}{a} \in \mathbb{I}$.

Para encerrar os conjuntos numéricos, que serão utilizados nesta obra, estudaremos agora o conjunto dos números reais.

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Chamamos de número real todo número racional ou irracional. Ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ é definido como sendo a união $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Utilizando o diagrama de Venn, podemos estabelecer a relação do conjunto dos números reais com os demais conjuntos.

Figura 16 – Representação dos números reais



Fonte: DEaD | IFCE

O conjunto dos números reais é fechado para todas as operações. De fato, dados dois números reais x e y temos que eles são racionais ou irracionais. Assim, para as quatro operações envolvendo x e y temos que o resultado é racional ou irracional. Logo, é um número real.

Vamos definir agora o módulo de um número real. Esta definição será útil quando definirmos função modular na quarta aula. Dado um número real x, definimos o módulo ou valor absoluto de x, denotamos por $|x|$, da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

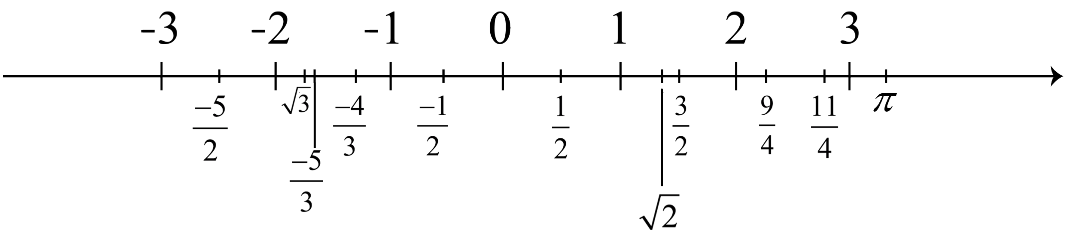
Por exemplo, $|2| = 2$ e $|-10| = -(-10) = 10$.

Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância desse número até a origem.

Vejamos como fica a representação geométrica dos números reais. Vimos que os números racionais não "completam" todos os pontos da reta. Por exemplo, entre os racionais $1,41$ e $1,42$ existe o irracional $\sqrt{2} \approx 1,414215$. Assim, quando inserimos os irracionais na reta, completamos a reta toda.

Todo número real corresponde a um único ponto da reta, assim como cada ponto da reta representa um único número real, por isso denominamos essa reta de **reta real**.

Figura 17 – Representação da reta real

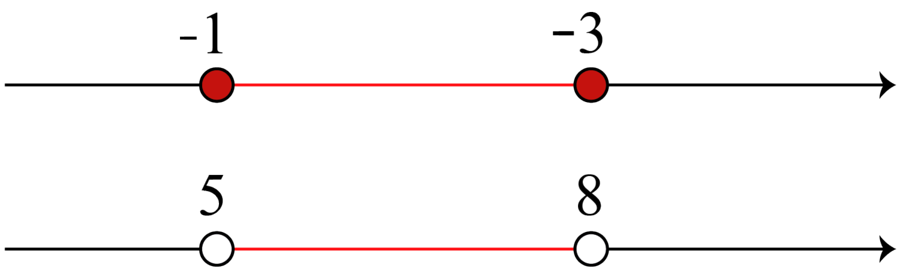


Fonte: DEaD | IFCE

Para encerrar o tópico, vamos estudar os subconjuntos dos números reais chamados de intervalos reais. Os subconjuntos dos números reais que estão entre dois números fixados, que designaremos por a e b com $a < b$, são chamados de intervalos reais. Os números a e b são chamados de extremos do intervalo. Um conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ é um intervalo real. Note que $C \subset \mathbb{R}$ e seus extremos são números a e b. Podemos ainda representar o conjunto C como sendo $C = [a,b]$. A notação $C = [a,b]$ significa que os extremos a e b pertencem ao intervalo C. Já a notação $D =]a,b[$ significa que os extremos a e b não pertencem ao intervalo D e a notação $E = [a,b[$ significa que o extremo a pertence ao intervalo E mas o extremo b não pertence ao intervalo E.

Por exemplo, se considerarmos o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$. Note que $A \subset \mathbb{R}$ e assim, A é um intervalo cujos extremos são os números -1 e 3. Observe ainda que os extremos pertencem a A. Logo, A é chamado de **intervalo fechado**. Podemos também representar o conjunto A como sendo $A = [-1, 3]$. Se considerarmos agora o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 8\}$. Note que $B \subset \mathbb{R}$ e assim, B é um intervalo cujos extremos são os números 5 e 8. Observe ainda que os extremos não pertencem a B. Logo, B é chamado de **intervalo aberto**. Podemos também representar o conjunto B como sendo $B =]5, 8[$. Na figura 18, temos a representação gráfica dos intervalos A e B.

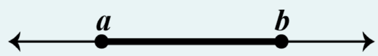
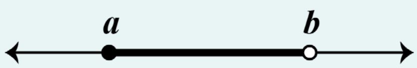
Figura 18 – Representação dos intervalos A e B

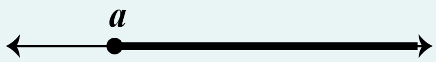
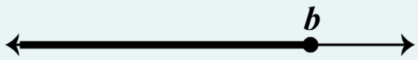
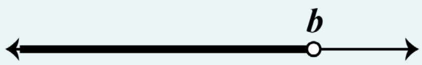


Fonte: DEaD | IFCE

Note que, na figura 18, quando os extremos pertencem ao intervalo, fazemos uma bolinha pintada na sua representação gráfica, e uma bolinha não pintada indica que o extremo não pertence ao intervalo. Observe ainda que, como intervalos são conjuntos, valem as mesmas operações: união, interseção, diferença e complementação.

De modo geral, conhecendo dois números reais a e b, com $a < b$,definimos

NOME	NOTAÇÃO SIMBÓLICA	REPRESENTAÇÃO NA RETA REAL
Fechado	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Aberto	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Semiaberto e semifechado	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	

Semiaberto e semifechado	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Semirreta fechada	$[a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Semirreta aberta	$[a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
Semirreta fechada	$[-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
Semirreta aberta	$[-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
Reta real	$[-\infty,+\infty] = \mathbb{R}$	

Fonte: DEaD | IFCE

Chegamos ao final da nossa primeira aula. Estudamos aqui os conjuntos, subconjuntos e as formas de representá-los. Além disso, definimos as operações que são realizadas entre eles. No segundo tópico, trabalhamos os conjuntos numéricos. Vimos também quais operações são fechadas em cada um deles e como representá-los geometricamente.

Toda essa estrutura servirá de base para a próxima aula. Nela estudaremos **funções**. Veremos que as funções nada mais são do que relações entre conjuntos. Até breve.

1. Determine o conjunto X tal que

$\{a,b,c,d\} \cup X = \{a,b,c,d,e\}$, $\{c,d\} \cup X = \{a,c,d,e\}$ e

$\{b,c,d\} \cap X = \{c\}$.

2. Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença simétrica de A e B o conjunto $A \Delta B$, tal que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

a) Determine $\{a,b,c,d\} \Delta \{c,d,e,f,g\}$.

b) Desenhe um diagrama de Venn-Euler representando o conjunto $A \Delta B$.

3. Coloque na forma de fração irredutível os seguintes números racionais:

a) $5,\overline{234}$

b) $3,3\overline{54}$

4. Represente cada conjunto sobre a reta real:

$A = \{x \in R \mid -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in R \mid x \leq 0 \ ou \ x > 1\}$ e

$C = \{x \in R \mid -1 < x < 0 \ ou \ x \geq 2\}$

Agora, descreva os conjuntos:

a) $A \cup B \ e \ A \cap B$

b) $A \cup C \ e \ A \cap C$

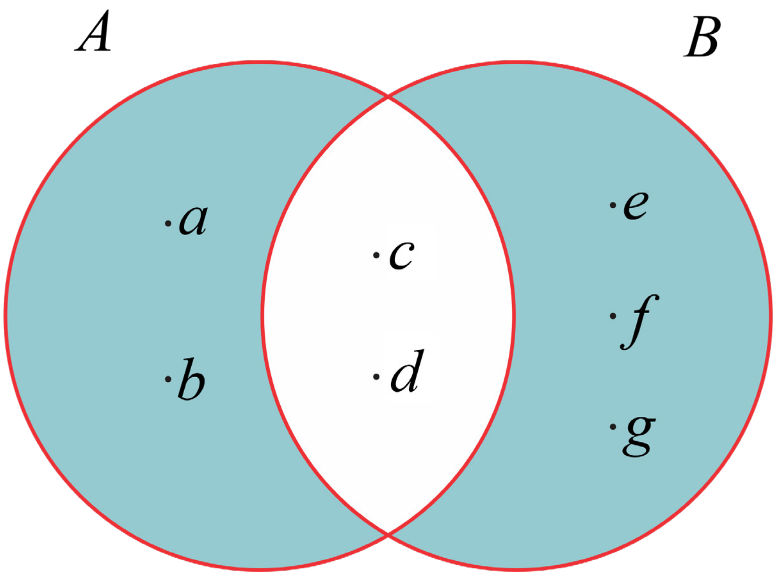
c) $A - B \ e \ B - C$

Gabarito

1. $X = \{a, c, e\}$

2. a. $A \Delta B = \{a, b, e, f, g\}$

   b. A parte pintada de azul representa o conjunto $A \Delta B$



Fonte: DEaD | IFCE

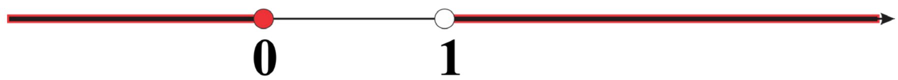
3. a. $\dfrac{581}{111}$

   b. $\dfrac{369}{110}$

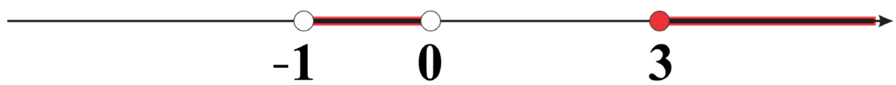
4. Representando cada conjunto sobre a reta real teremos:

Representação do conjunto A

Representação do conjunto B



Representação do conjunto C



Fonte: DEaD | IFCE

Dessa forma, teremos que:

a. $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } 1 < x < 3\}$

b. $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e $A \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$

c. $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ e $B - C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

Aula 2

Noções de Funções e Função Afim

Caros estudantes,

Nesta segunda aula, iremos relacionar os elementos de dois conjuntos quaisquer. Esta relação recebe o nome de função. Primeiramente, vamos definir o que é função de forma geral e, depois, iniciaremos o estudo das funções afins.

No primeiro tópico, daremos noções gerais como gráficos, zeros ou raízes, crescimento e decrescimento de funções, entre outras coisas. Por último, expomos as translações e reflexões de gráficos que são ferramentas importantes para o esboço de gráficos.

No segundo tópico, daremos ênfase às funções afins e seu caso particular, a função linear, funções estas, cujos gráficos são retas. Encerramos o tópico discutindo sobre o estudo dos sinais de uma função, que utilizamos para resolver determinados tipos de inequações, e a caracterização das funções lineares.

Aproveitem ao máximo a aula.

Boa leitura!

Objetivos

- Entender o conceito de função e de construção de gráficos
- Identificar uma função afim e seu gráfico
- Compreender a resolução de alguns tipos de inequações

Tópico 1

Noções de funções

OBJETIVOS

- Entender a noção de função e os elementos necessários para definir uma função
- Compreender os conceitos de zeros de funções, funções crescentes e decrescentes, através de seu gráfico
- Estudar as translações e as reflexões dos gráficos de uma função

Caro (a) aluno (a), suponhamos que você deseje ir ao cinema assistir a um filme. Então inicialmente você passa na bilheteria e compra o seu ingresso. Nesse momento, a atendente o pergunta qual filme você deseja ver. Nesse momento, você terá de fazer uma associação dentre todos os filmes disponíveis e escolher o que mais lhe agrada. Depois da escolha do filme, você também deve agora fazer uma outra associação: qual horário mais conveniente para assistir ao filme dentre todos os horários disponíveis para o filme. Feita a escolha do filme e do horário, a atendente o pergunta em qual cadeira você deseja sentar, mostrando-lhe a tela com as opções disponíveis. Nessa hora, você terá de fazer uma nova associação dentre todas as poltronas disponíveis para se sentar você deve determinar uma. Você escolhe uma cadeira indicando para a atendente a poltrona correspondente e lhe é emitido um bilhete com a sua identificação de sua poltrona, sala e filme.

Dessa forma, há uma regra específica, por exemplo, que indica a qual poltrona você deve se sentar. Ou seja, você tem exatamente uma poltrona, dentre as todas existentes na sala, reservada para você para assistir ao filme e ninguém mais poderá se sentar na poltrona que está reservada para você. Logo qualquer outra pessoa que também esteja na sala tem uma poltrona, designada a partir do momento da compra do bilhete, diferente da sua. Existe uma relação entre as pessoas da sala e as poltronas existentes. Do mesmo modo, dentre todas as salas existentes do cinema, existe uma sala reservada que passará o filme no horário a que você deseja assistir e tal sala está indicada no seu bilhete. Ou seja, para cada sala do cinema está associado um filme.

Sendo assim, podemos considerar, por exemplo, que estamos diante de dois conjuntos: um formado por todas as pessoas que estão numa mesma sala do cinema para assistir a um filme determinado e um outro conjunto pelas cadeiras disponíveis. Existe assim uma relação entre o primeiro e o segundo conjunto. Tal relação é dada pelo bilhete que foi comprado e que associa a cada pessoa uma cadeira na sala.

Tal relação acima recebe o nome de **função** de A em B. De maneira formal, temos:

Definição 2.1 Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função** $f : A \to B$ (Lê-se função f de A em B) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y = f\left(x\right) \in B$ (Lê-se f de x). Denotamos por

$$\begin{array}{l} f : A \to B \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \qquad f : A \to B\text{, tal que } y = f(x)$$

Assim, faremos uso da notação $f{:}A \to B$ tal que $y = f(x)$ e podemos destacar alguns elementos importantes de uma função:

- **Domínio:** O conjunto A é chamado de domínio e será representado por $D(f)$. O domínio corresponde ao conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ de forma que $y = f(x)$.
- **Contradomínio:** O conjunto B é denominado de contradomínio e será denotado por $CD(f)$.
- **Imagem:** Para cada elemento x de A, o elemento $y = f(x) \in B$ é a imagem de x pela função f.

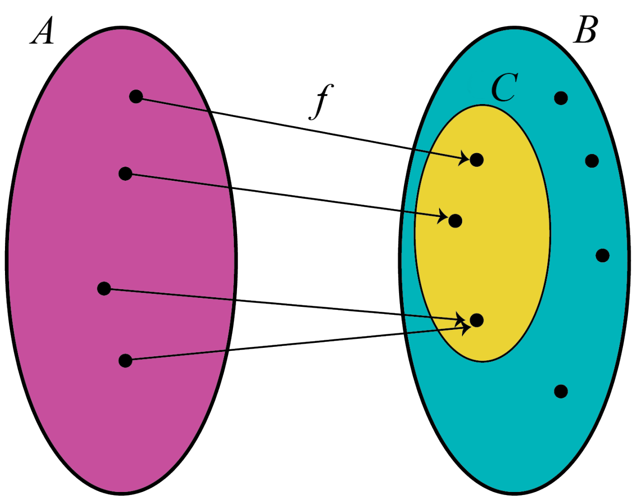
Dados dois conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado por $A \times B$, é $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$, onde $\left(x, y\right)$ é o par ordenado tendo x como primeiro elemento e y como segundo elemento. Já uma relação R de A em B é todo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Os elementos de B que são imagens de algum elemento de A, formam um subconjunto de B, chamado ***conjunto imagem*** da função f, denotamos por $Im(f)$. Em termos matemáticos, $Im(f) = \{y \in B | \exists x \in A \text{ e } y = f(x)\}$. Segue-se então que $Im(f) \subset CD(f)$.

- **Lei de formação ou de correspondência:** É uma regra que permite associar a cada elemento de A um elemento em B. Ou seja, é uma expressão matemática que nos permitirá definir como a função será representada. Dessa forma, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ e assim, $f = \{(x, y)|x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$. Logo, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

- **Diagrama de flechas:** É usado para relacionar os elementos de dois conjuntos A e B a partir da lei de correspondência. O conjunto A será o conjunto de partida (local de onde sairá as flechas) a partir de cada um dos elementos de A. Já o conjunto B será o conjunto de chegada, ou seja, local de onde chegará as pontas das flechas que se conectará a um dos elementos de B (veja Figura 19). Em resumo, os elementos de A são levados ao elementos de B por meio de flechas que simbolizam a correspondência definida pela função. Note que, na figura 19, o conjunto C representa a imagem de f.

Figura 19 – Diagrama de flechas

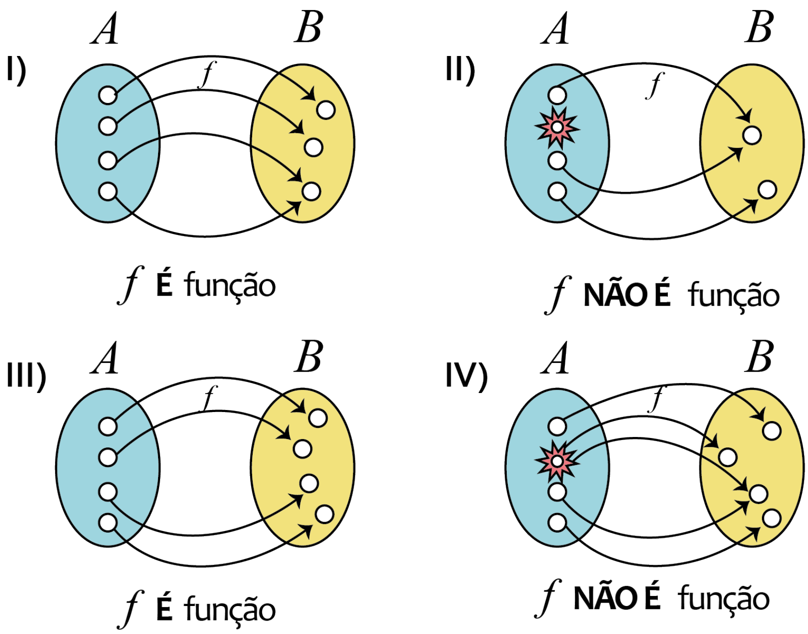


Fonte: DEaD | IFCE

Mas nem todo diagrama de flechas representa uma função. Deve ficar claro que para ser uma função todo elemento de A deve se relacionar com um único elemento de B. Vejamos alguns exemplos do que acabamos de expor.

Exemplo 1: Observe os diagramas de flechas dados pela figura 20. Note que os diagramas I) e III) representam uma função haja vista que todo elemento de A está relacionado com um único elemento de B. Observe ainda que apesar de no diagrama I) existir dois elementos de A associados ao mesmo elemento de B, isso não é contrário a definição de função. Já no diagrama II) não temos uma função, pois observe que existe um elemento de A que não está relacionado com um elemento de B. Com relação ao diagrama III), o mesmo não representa uma função pois um mesmo elemento de A está se relacionando com dois elementos de B (Tal relação deveria ser única).

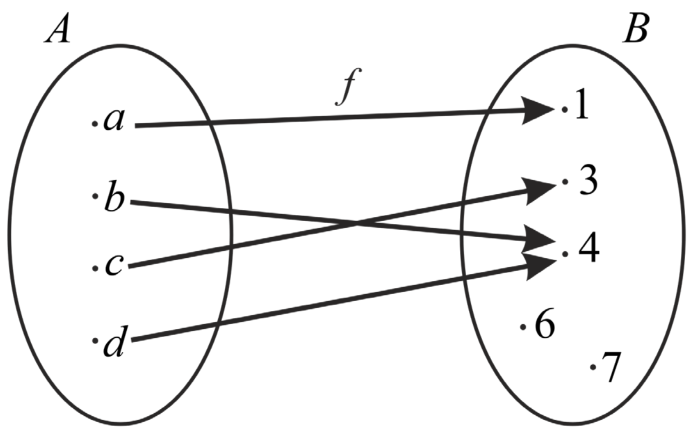
Figura 20 – Diagrama de Flechas



Fonte: DEaD | IFCE

Exemplo 2: Considere os conjuntos $A=\{a,b,c,d\}$ e $B=\{1,3,4,6,7\}$. Eles se relacionam segundo a função $f:A\rightarrow B$ definida pelo *diagrama de flechas* na figura 21.

Figura 21 – Função f de A em B



Fonte: DEaD | IFCE

Nesse caso temos que $D(f) = A = \{a, b, c, d\}$, $CD(f) = B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$. Com relação ao conjunto imagem, temos que $Im(f) = \{1, 3, 4\}$ (O conjunto imagem é formado apenas pelo elementos que estão relacionados com os elementos do conjunto A através das flechas.). Dizemos que: o número 1 é a imagem de a, pela função f. Escrevemos $f(a) = 1$; o número 3 é a imagem de c, pela função f. Escrevemos $f(c) = 3$; o número 4 é a imagem de b e d, pela função f. Escrevemos $f(b) = 4$ e $f(d) = 4$.

Exemplo 3: Considere os conjuntos $A=\{0,1,2,3\}$ e $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Eles se relacionam segundo a função $f:A\rightarrow B$ definida pela *fórmula (regra, expressão ou lei)* matemática $f(x)=3x$.

Tabela 1 – Lei de formação $f(x)=3x$

x	$3x$	$f(x)$
0	3.0	0
1	3.1	3
2	3.2	6
3	3.3	9

Fonte: DEaD | IFCE

Na tabela 1 substituímos cada valor do domínio de f na função $f(x) = 3x$. (O valor de x corresponde aos elementos do domínio de f). Fizemos isso substituindo onde tinha x pelo valor desejado como mostra a tabela acima). Nesse caso temos que $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$, $CD(f) = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $Im(f) = \{0, 2, 4, 6\}$. Note que dada uma lei de formação podemos descobrir o valor de uma função em qualquer valor do seu domínio.

Exemplo 4: Retornando à situação descrita no início do tópico, podemos concluir que o conjunto A formado pelas pessoas que estão na mesma sala para assistir um filme é o domínio da função e o conjunto B formado por todas as cadeiras disponíveis na sala é denominado o contradomínio. A imagem consiste do conjunto formado por todas as cadeiras ocupadas. Caso a sala esteja lotada, o conjunto imagem coincide com o conjunto B. Note ainda que não pode haver duas pessoas ocupando a mesma cadeira e nem uma pessoa pode sentar em quantas cadeiras quiser.

Os elementos que formam o domínio e o contradomínio de uma função podem ser de qualquer natureza. Um tipo especial de função são as funções numéricas. Tais funções apresentam como domínio e contradomínio os conjuntos numéricos estudados no tópico 2 da Aula 1. Trabalharemos nessa disciplina com as funções reais de variáveis reais. Ou seja, dados dois conjuntos A e B temos $A\subset\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$. Observe que como $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}$, e assim A e B podem ser o próprio conjunto dos números reais. De maneira formal, temos

> Chamamos de **função real de variável real** toda função $f:A\rightarrow B$ tal que os conjuntos A e B são subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Quando estivermos tratando de função real de variável real sempre que omitirmos o domínio e o contradomínio, e definirmos apenas a lei de formação da função, ficará implícito que o domínio e o contradomínio será um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o contradomínio será o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Observe ainda que o domínio de uma função corresponde a todos os números x para os quais é possível calcular $f(x)$.

Exemplo 5: Considere a função $f(x) = 2x - 5$. Para todo número real a, temos é sempre possível calcular $f(a)$ e seu valor $f(a) = 2a - 5$ é um número real. Assim, $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$. Já considerando a função $g(x) = \dfrac{4}{x-3}$. Para todo real a, diferente de 3, temos que $g(a) = \dfrac{4}{a-3}$ é um número real. Note que para $a = 3$, o valor $g(3)$ é indefinido (pois não podemos efetuar divisão por 0). Assim, $D(g) = \{3\}$ (o domínio é todos os números reais com exceção do número 3) e $CD(f) = \mathbb{R}$ (pois para qualquer valor que de $a \neq 3$, temos que $g(a)$ existe). Já dada a função $h(x) = \sqrt{2x-4}$. Um número real a pertencerá ao domínio de h se $2a - 4 \geq 0$ (pois a raiz quadrada só existe nos reais se o radicando for não negativo). Resolvendo a inequação, chegaremos que $a \geq 2$. Assim, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$. Na função $i(x) = c$, temos que c é imagem de todos os elementos do domínio $\mathbb{R}$ de i. Logo $D(i) = \mathbb{R}$ e $CD(i) = \mathbb{R}$. Neste caso temos que um elemento do contradomínio pode ser imagem de infinitos elementos do domínio. Esta função é chamada de **função constante**.

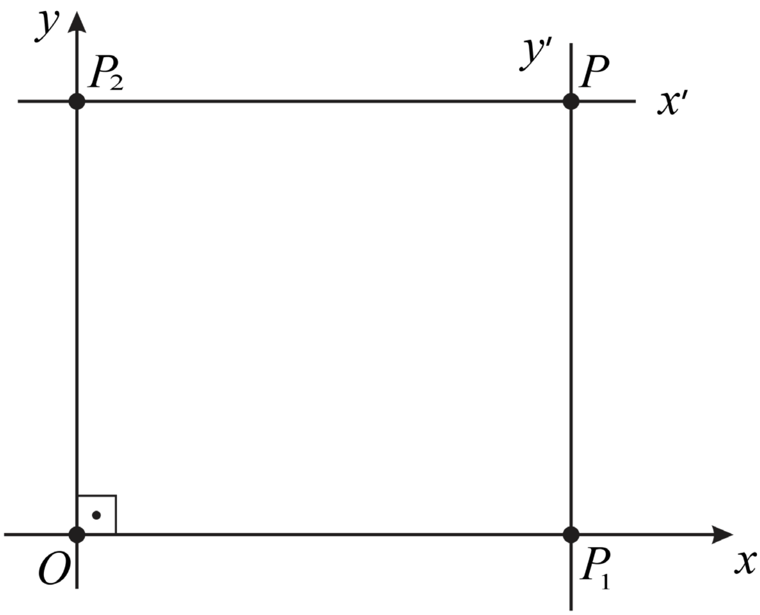
> **Você sabia?**
>
> As funções mais usadas na prática são as funções reais de várias varáveis. Mas, para entendê-las, temos que conhecer as funções reais de variável real.

De agora em diante, sempre que nos referirmos a uma função, estaremos falando da função real de variável real. Estudaremos agora como representar geometricamente tal função a partir da sua lei de formação. Chamaremos esta representação de **gráfico**. Inicialmente relembremos do sistema de coordenadas cartesianas (ou retangulares).

> **Você sabia?**
>
> Existem outros sistemas de coordenadas. Podemos encontrar as coordenadas polares, cilíndricas, esféricas etc. Saiba um pouco sobre as coordenadas polares acessando o site http://www.ufrgs.br/napead/repositorio/objetos/vetores/?p=coordenadas

Dado um plano π qualquer, consideramos duas retas perpendiculares entre si, x e y, concorrentes em O. Dado um ponto $P \in \pi$, passamos por ele duas retas x' e y', paralelas a x e y, respectivamente. Sendo P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x', temos que os números P_1 e P_2 são as coordenadas cartesianas do ponto P no sistema xOy.

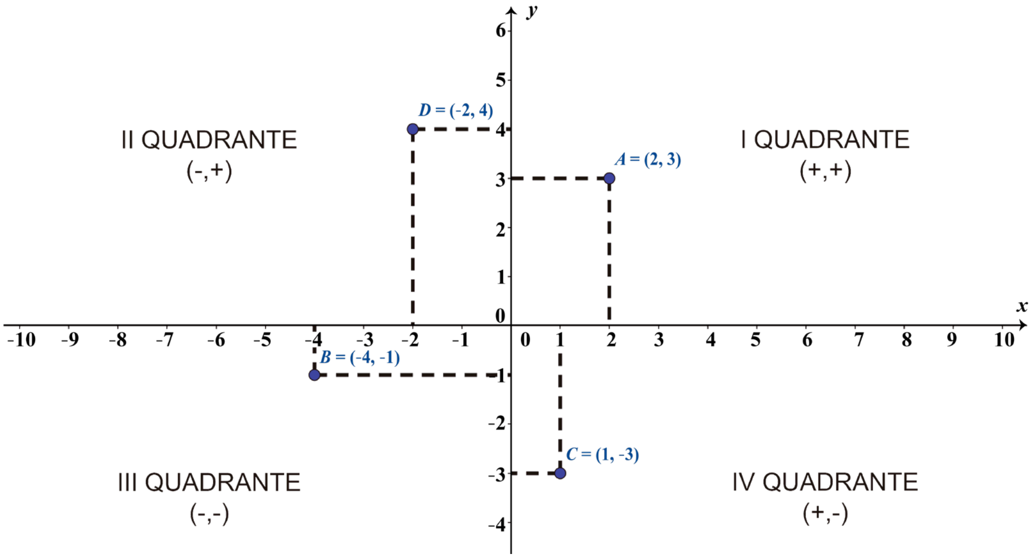
Figura 22 – Representação do ponto *P* no plano cartesiano



Fonte: DEaD | IFCE

A fim de destacar alguns elementos importantes, podemos citar a **abscissa** e **ordenada** do ponto P são, respectivamente, os números reais x_p e y_p que estão representados, respectivamente, por P_1 e P_2; Já as **coordenadas** do ponto P são formadas pelo par ordenado $\left(x_p, y_p\right)$, em que a primeira coordenada será a abscissa e a segunda coordenada será a ordenada (no caso em questão é dado por $P = \left(P_1, P_2\right)$); O sistema xOy é denominado **sistema de eixo cartesianos ortogonal**, onde o eixo x (ou Ox) é o **eixo das abscissas**, o eixo y (ou Oy) é o **eixo das ordenadas** e O é a **origem** do sistema; O plano π é chamado de **plano cartesiano**; O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas dividem o plano em quatro regiões, denominadas de **quadrantes**. O primeiro quadrante é formado pelos pontos que tem ambas as coordenadas positivas, já o segundo quadrante é formado pelos pontos que tem abscissa negativa e ordenada positiva, no terceiro quadrante temos todos os pontos que apresentam as coordenadas negativas, e no quarto quadrante tem-se os pontos que apresentam abscissa positiva e ordenada negativa. (veja figura 23)

Figura 23 – Quadrantes do Plano Cartesiano



Fonte: DEaD | IFCE

Podemos então afirmar que todo ponto do plano pode ser representado por um par ordenado de um sistema cartesiano. Da mesma forma, todo par ordenado em um sistema é visto como ponto do plano. O conjunto de todos os pares ordenados é o

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \text{x } \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}.$$

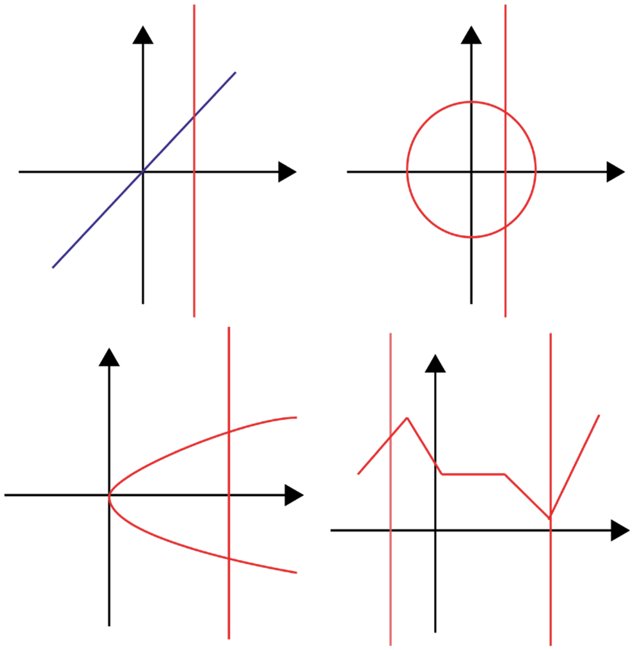
Muitas informações sobre uma função ficam bem evidentes quando estudamos os seus gráficos.

Definição 2.2 Seja $f : A \to B$ uma função real de variável real. Definimos o gráfico de f, denotamos por $G(f)$, como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), do plano cartesiano, tais que $y \in B$ é a imagem de $x \in A$, pela função *f*. Assim, $G(f) = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y = f(x) \in B\}$.

Com o gráfico de uma função *f*, podemos determinar seu domínio e imagem da seguinte maneira: o domínio corresponderá ao conjunto formado pelas abscissas dos pontos do gráfico de *f* enquanto que a imagem corresponderá ao conjunto formado pelas ordenadas dos pontos do gráfico de *f*. Além disso temos que nem todo gráfico do plano cartesiano está associado a uma função. Para verificarmos isso, devemos traçar, pelos pontos do domínio, retas paralelas ao eixo *y*, e se observarmos cada uma destas retas, elas devem cortar o gráfico de *f* em apenas um ponto. Caso isso não aconteça, dizemos que o gráfico não representa uma função.

Exemplo 6: Observe os gráficos a seguir

Figura 24 – Representação de gráficos

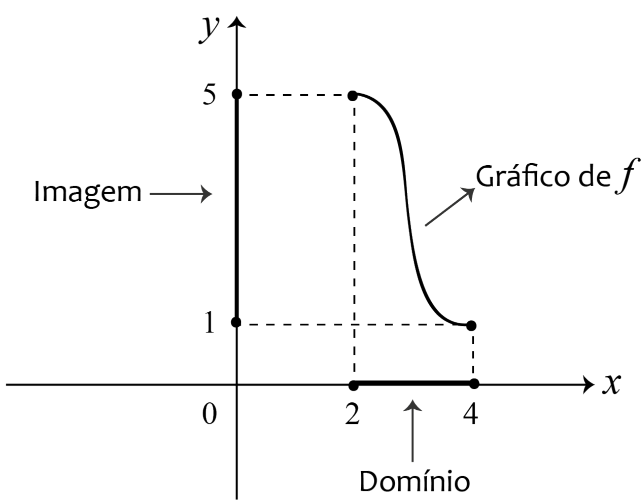


Fonte: DEaD | IFCE

Note que o segundo e o terceiro gráfico não representam nenhuma função, pois dada uma reta vertical paralela ao eixo y, ela corta o gráfico em dois pontos distintos. Nos demais caso, temos que o gráfico se trata de uma função $y = f(x)$.

Exemplo 7: Note, a partir da figura 25, que o gráfico de f está definido no eixo x no intervalo $[2, 4]$, ou seja, $D(f) = [2,4]$. Agora se observamos o eixo y vemos que o gráfico de f está definido no intervalo $[1, 5]$, ou seja, $Im(f) = [1, 5]$.

Figura 25 – Domínio e Imagem a partir do gráfico de f

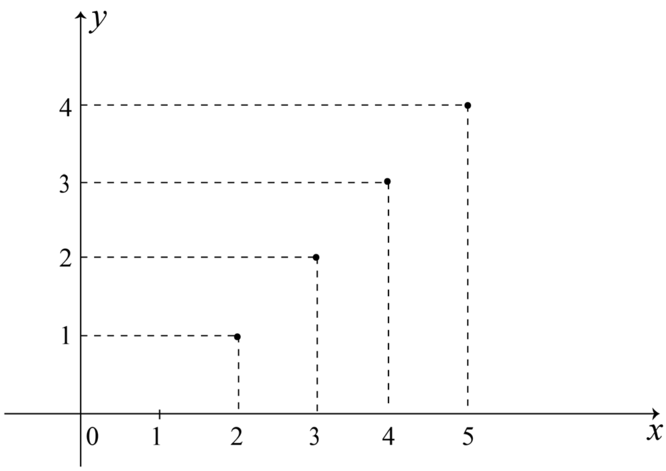


Fonte: DEaD | IFCE

Exemplo 8: Considere a função $f: A \to IR$, em que $A = \{üüüü \quad\}$ tal que $f(x) = x - 1$. Um dos métodos para a construção do gráfico de *f* será inicialmente a construção de uma tabela com todos os pontos do domínio de *f*. Depois, para cada valor de domínio, calcularemos a sua imagem através da lei de formação da função *f*. Depois, marcamos os pontos encontrados no plano cartesiano, como mostra a figura abaixo. A tabela abaixo apresenta os valores dos pontos.

x	$f(x) = x - 1$	$(x, f(x))$
1	$f(1) = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$f(2) = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$f(3) = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$f(4) = 4 - 1 = 3$	(4, 3)
5	$f(5) = 5 - 1 = 4$	(5, 4)

Figura 26 – Gráfico da função $f: A \to IR$, tal que $f(x) = x - 1$



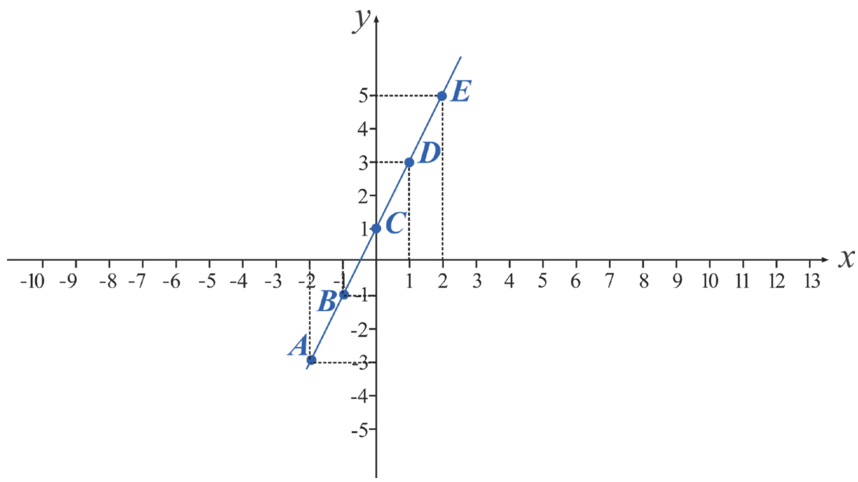
Fonte: DEaD | IFCE

Observe na figura 26 que, como o domínio possui apenas cinco números, o gráfico possui apenas cinco pontos. Isso sempre irá ocorrer. Ou seja, o número de pontos de um gráfico é exatamente igual ao número de elementos do domínio da função.

Exemplo 9: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x + 1$. Como temos infinitos números no domínio, o gráfico também possui infinitos pontos. Dessa forma, para fazermos o esboço do gráfico devemos criar uma tabela com alguns valores de x escolhidos do domínio da função e associar tais valores as suas imagens $y = f(x)$. Depois para cada ponto $(x, f(x))$ associarmos a um ponto do plano cartesiano e, a partir daí, formarmos o gráfico ligando os pontos encontrados. Ao fazermos isso, notamos que o gráfico se trata de uma reta.

x	$f(x) = 2x + 1$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = 2.(-2) + 1 = -3$	$(-2, -3)$
-1	$f(-1) = 2.(-1) + 1 = -1$	$(-1, -1)$
0	$f(0) = 2.0 + 1 = 1$	$(0,1)$
1	$f(1) = 2.1 + 1 = 3$	$(1, 3)$
2	$f(2) = 2.2 + 1 = 5$	$(2, 5)$

Figura 27 – Gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=2x+1$



Fonte: DEaD | IFCE

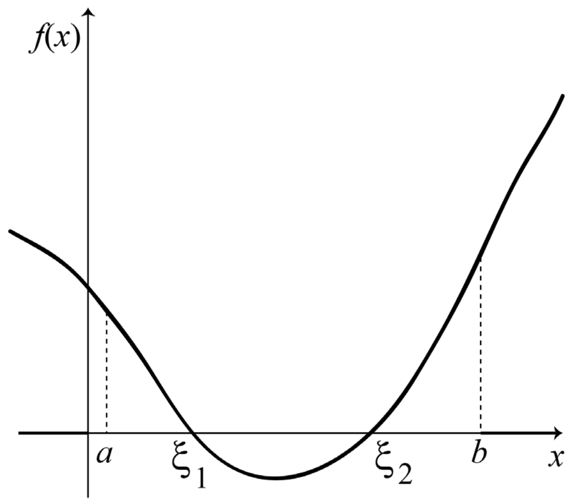
Veremos a seguir o que são os zeros ou raízes de uma função e como identificá-los no gráfico e, além disso, estudaremos quando que um gráfico de uma função cresce ou decresce.

> **Definição 2.3** Chamamos de **zero** ou **raiz** de uma função a abscissa x tal que sua imagem é o número zero. Em outras palavras, a raiz de uma função f será a solução da equação $f(x) = 0$.

Graficamente, a raiz da função é encontrada quando o gráfico da mesma intersecta o eixo das abscissas. No gráfico (figura 28), as raízes são os números ξ_1 e ξ_2.

> Nem todas as funções possuem zeros ou raízes. Por exemplo, a função $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ não possui nenhuma raiz. De fato, não existe solução para a equação $\dfrac{1}{x}=0$.

Figura 28 – Raízes da função f

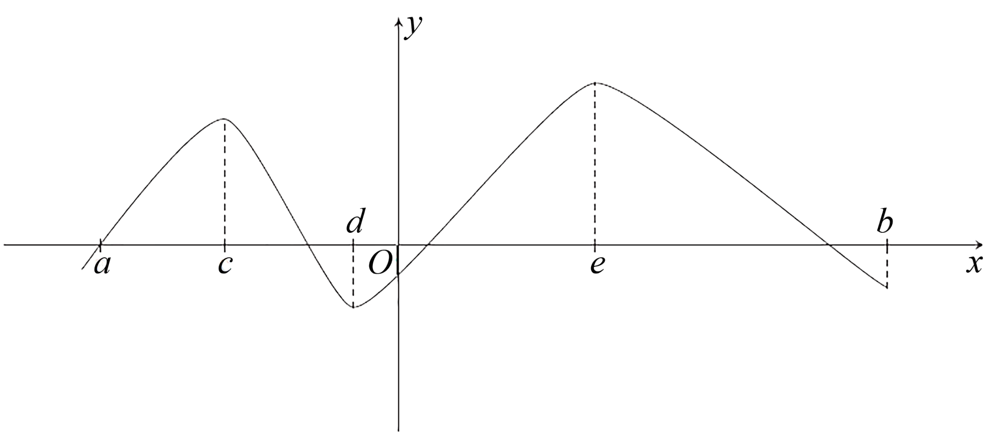


Fonte: DEaD | IFCE

Assim, quando dizemos que queremos estudar o comportamento de uma função num subconjunto do seu domínio, isso significa que queremos analisar para quais intervalos temos que o gráfico da função cresce ou decresce.

Definição 2.4 Seja f uma função real de variável real. Dizemos que f é crescente em $D \subset \mathbb{R}$, se para todo $x_1, x_2 \in D$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Dizemos que f é decrescente em $D \subset \mathbb{R}$, se para todo $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Figura 29 – Gráfico de uma função

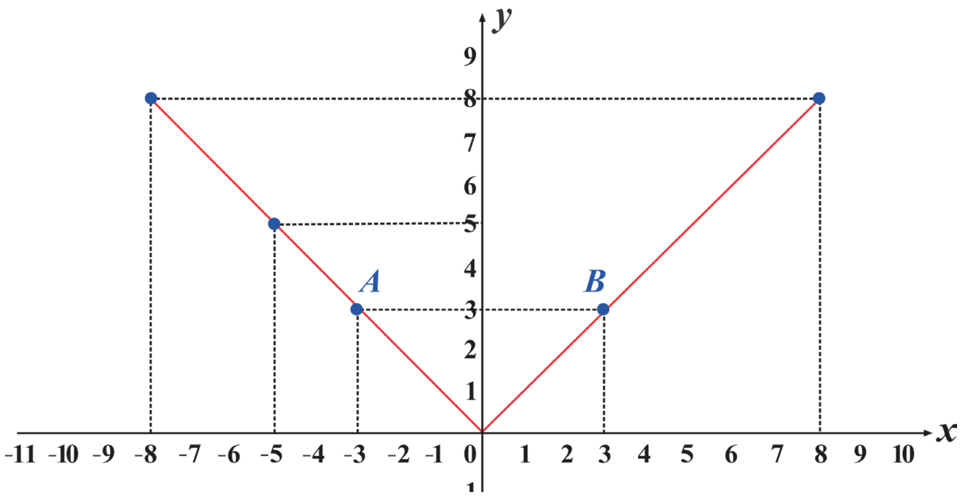


Fonte: DEaD | IFCE

Analisando o gráfico da figura 29, temos que a função é crescente nos intervalos $[a,c]$ e $[d,e]$. De fato, dados quaisquer $x_1, x_2 \in [a,c]$, com $x_1 < x_2$, temos, por observação do gráfico, que $f(x_1) < f(x_2)$. Isso ocorre com o intervalo $[d,e]$. Já a função é decrescente nos intervalos $[c,d]$ e $[e,b]$. De fato, dados quaisquer $x_1, x_2 \in [a,c]$ com $x_1 < x_2$, temos, por observação do gráfico, que $f(x_1) > f(x_2)$. Isso ocorre com o intervalo $[e,b]$.

Exemplo 10: Fazendo a análise do gráfico da figura 30, temos que os pontos A e B apresentam a mesma imagem, ou seja, $f(-3) = f(3) = 3$. Isso ocorre para os pontos P e Q, ou seja, $f(-8) = f(8) = 8$. O domínio de f é $[-8,8]$ e sua imagem é $[0,8]$. Temos que 0 é raiz de f. Além disso, f é decrescente no intervalo $[-8,0]$ e crescente no intervalo $[0,8]$. Observe ainda que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.

Figura 30 – Função num determinado subconjunto



Fonte: DEaD | IFCE

Muitas vezes, a partir do gráfico de uma função já conhecida, podemos traçar outros gráficos. Esse processo é feito através do que chamamos de **transformações geométricas** no plano.

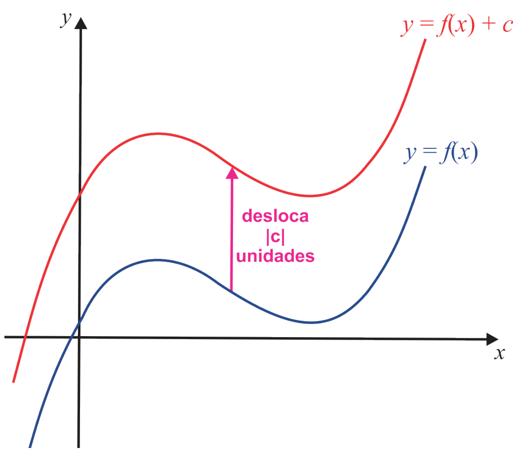
De um modo geral, uma **transformação geométrica** é uma função que a cada ponto do plano associa a um outro ponto do plano através de uma regra. As mais conhecidas que estudaremos serão as **translações** e **reflexões**. Vamos estudar o que são esses processos e como o utilizamos na determinação de outros gráficos. Comecemos pela **translação**.

De maneira intuitiva, transladar um gráfico é movê-lo totalmente ou para cima, ou para baixo, ou para a esquerda, ou para a direita, ou em ambas as direções. Estudaremos as translações verticais e horizontais.

> **Definição 2.5** Uma translação é uma transformação em que todos os pontos de um gráfico se deslocam numa mesma direção, sentido e de uma mesma distância. Essa distância pode ser vertical, horizontal ou combinação de ambas.

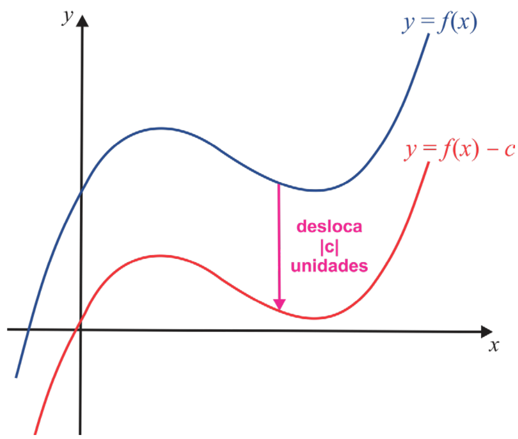
- **Translação vertical:** Considere as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) = f(x) + c$, em que $c \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. O gráfico da função g é uma translação vertical do gráfico da função f. De fato, para todo $a \in A$, temos $g(a) = f(a) + c$, isto é, a imagem de a pela função g é igual à imagem de a pela função f, adicionando c. Se $c > 0$, o gráfico de g é a translação do gráfico de f para cima c unidades. Se $c < 0$, o gráfico de g a translação do gráfico de f de $|c|$ unidades para baixo. Observe as figuras 31a e 31b. Na primeira, temos $c > 0$. Na segunda temos $c < 0$.

Figura 31a – O gráfico de $f(x) + c$, onde $c > 0$



Fonte: DEaD | IFCE

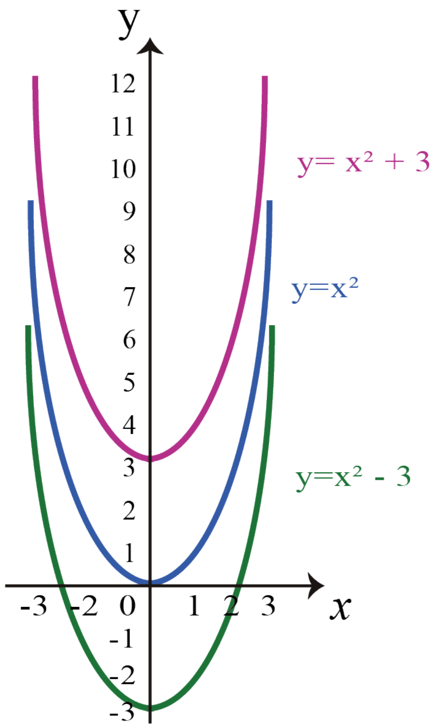
Figura 31b – O gráfico de $f(x) + c$, onde $c < 0$



Fonte: DEaD | IFCE

Exemplo 11: Note, na figura 32, que, conhecendo o gráfico da função $y = x^2$, podemos determinar os demais gráficos dados da seguinte forma: o gráfico da função $y = x^2 + 3$ foi obtida da função $y = x^2$ fazendo uma translação vertical para cima de 3 unidades $(c = 3 > 0)$ na direção do eixo y; já o gráfico da função $y = x^2 - 3$ foi obtida da função $y = x^2$ fazendo uma translação vertical para baixo de 3 unidades $(c = -3 < 0 \Rightarrow |c| = 3)$ na direção do eixo y.

Figura 32 – Translação do gráfico $y = x^2$

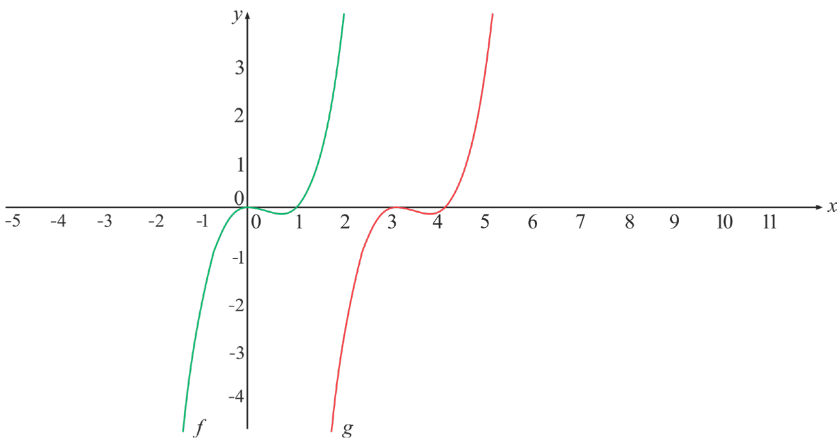


Fonte: DEaD | IFCE

- **<u>Translação horizontal:</u>** Considere as funções $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) = f(x-c)$, em que $c \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. O gráfico da função g é uma translação horizontal do gráfico da função f. De fato, para todo $a \in A$, temos $g(a) = f(a-c)$, isto é, a imagem de a pela função g é igual à imagem da abscissa $a-c$ pela função f. Se $c > 0$, a imagem de a, pela função g, é igual à imagem da abscissa $a-c$ (que está à esquerda de a), pela função f. Por isso, o gráfico de g é o gráfico de f deslocado para direita. Se $c < 0$, a imagem de a, pela função g, é igual à imagem da abscissa $a-c$ (que está a direita de a), pela função f. Por isso, o gráfico de g é o gráfico de f deslocado para esquerda.

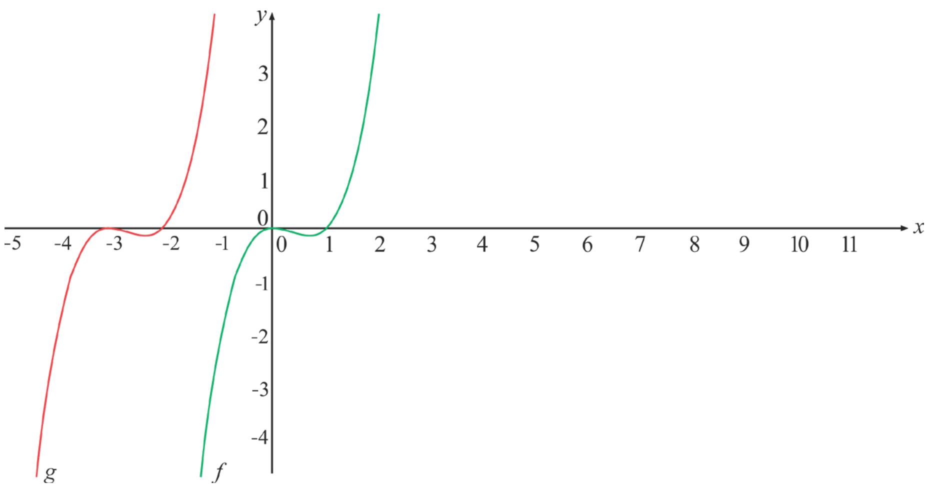
Nas figura 33, temos o gráfico da função $y = f(x)$ e suas translações tanto para direita $(y = f(x-c)$, com $c > 0)$, quanto para a esquerda $(y = f(x-c)$, com $c < 0)$.

Figura 33a – O gráfico de $f\left(x-c\right)$, com $c>0$



Fonte: DEaD | IFCE

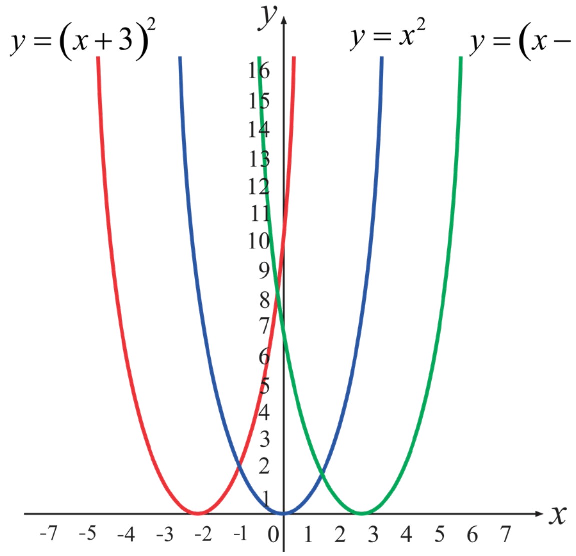
Figura 33b – O gráfico de $f\left(x-c\right)$, com $c<0$



Fonte: DEaD | IFCE

Exemplo 12: Note, na figura 34, que, conhecendo o gráfico da função $y=x^2$, podemos determinar os demais gráficos dados da seguinte forma: o gráfico da função $y=\left(x-3\right)^2$ foi obtido da função $y=x^2$ fazendo uma translação horizontal para a direita de 3 unidades ($c=3>0$) na direção do eixo x; já o gráfico da função $y=\left(x+3\right)^2$ foi obtida da função $y=x^2$ fazendo uma translação horizontal para a direita de 3 unidades $(c=-3<0 \Rightarrow |c|=3)$ na direção do eixo x .

Figura 34 – Translação do gráfico $y = x^2$



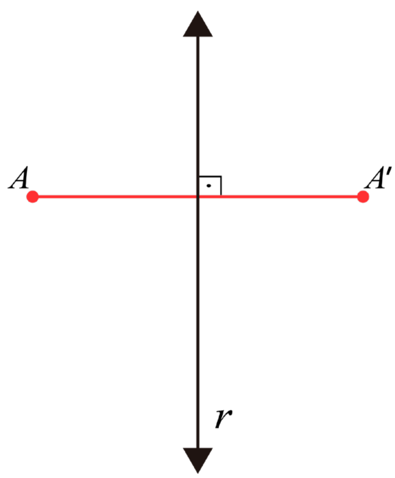
Fonte: DEaD | IFCE

Portanto, dependendo da expressão matemática da função, a translação será horizontal ou vertical. Agora estudaremos qual expressão matemática nos fornece uma reflexão de um gráfico de uma função já conhecida. Vamos inicialmente entender o que é a reflexão de um ponto em torno de uma reta.

> **Definição 2.6** Uma **reflexão** de um **ponto** A, em torno de uma reta r, chamada de eixo de reflexão ou simetria, é a transformação que associa A ao seu simétrico A', em relação a r. Ou seja, r é a mediatriz do segmento AA'.

Da definição acima, podemos concluir que as distâncias de A e A' a reta r é a mesma. A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.

Figura 35 – A' é a reflexão do ponto A em relação a reta r

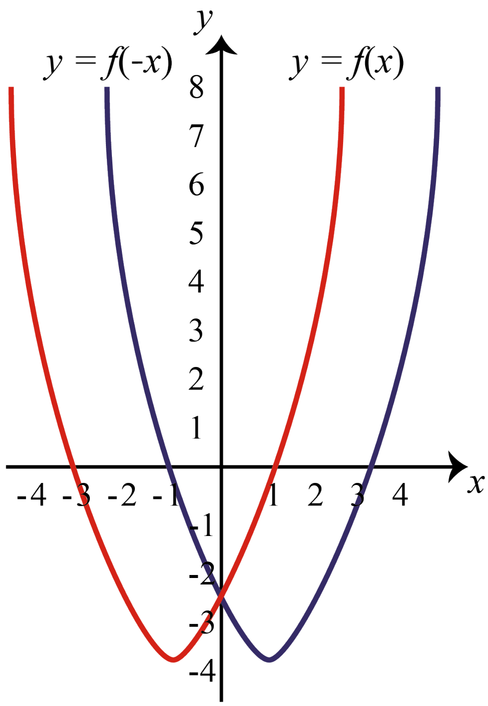


Fonte: DEaD | IFCE

Podemos definir a reflexão de um gráfico em relação a uma reta r, como sendo a reflexão de todos os pontos deste gráfico em relação a reta r. Dessa forma, podemos considerar duas formas de reflexão:

- **Reflexão em relação ao eixo y:** Considere as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, em que $A \subset \mathbb{R}$ e $g(x) = f(-x)$. O gráfico da função g é uma reflexão do gráfico de f, em relação ao eixo y. De fato, para todo $a \in A$ temos $g(a) = f(-a)$, isto é, a imagem de a, pela função g, é igual à imagem de $-a$, pela função f.

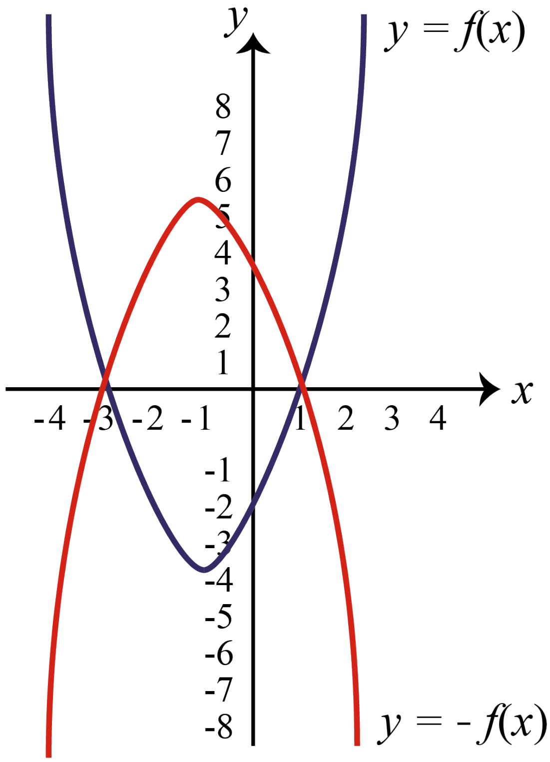
Figura 36 – Reflexão de gráficos em relação ao eixo y



Fonte: DEaD | IFCE

- **Reflexão em relação ao eixo x:** Considere as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$ e $g(x) = f(-x)$. O gráfico da função g é uma reflexão do gráfico de f, em relação ao eixo x. De fato, para todo $a \in A$, temos $g(a) = -f(a)$, isto é, a imagem de a, pela função g, é igual ao oposto de a, pela função f.

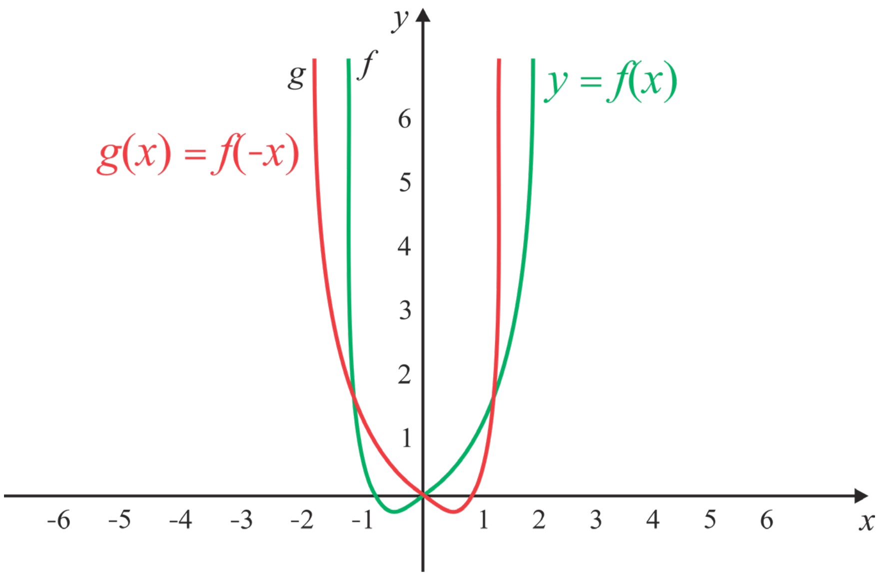
Figura 37 – Reflexão de gráficos em relação ao eixo x



Fonte: DEaD | IFCE

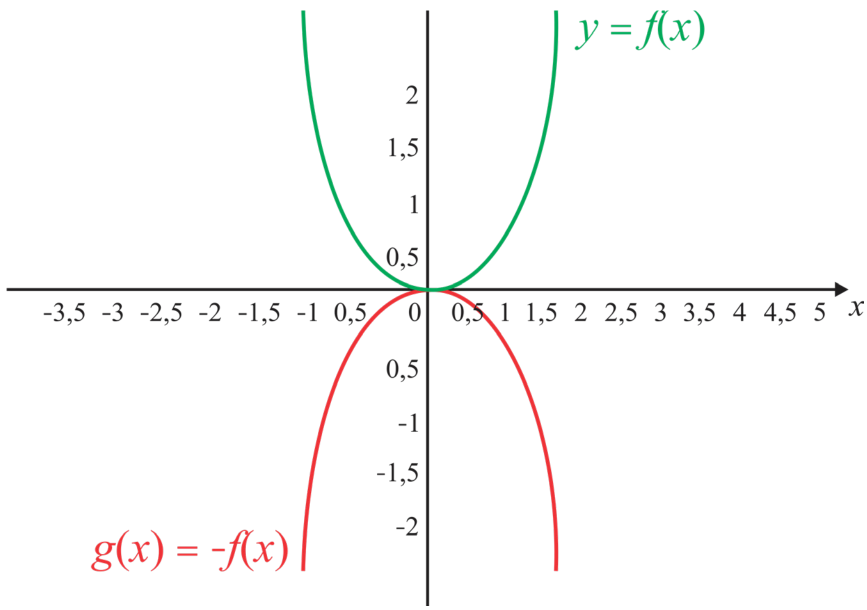
Exemplo 13: Na figura 38a, temos o gráfico da função $y = f(x)$ (em vermelho) e, a partir dele, obtivemos a sua reflexão em torno do eixo y, obtendo o gráfico em roxo da função g, dado por $g(x) = f(-x)$. Vemos que, para cada ponto do gráfico de f, foi levado para o lado oposto em relação ao eixo y formando assim o gráfico de g. Já na figura 38b, temos o gráfico da função $y = f(x)$ (em verde) e, a partir dele, obtivemos a sua reflexão em torno do eixo x, obtendo o gráfico em vermelho da função g, dado por $g(x) = -f(x)$, ou seja, cada ponto do gráfico de f foi levado para o lado oposto em relação ao eixo x formando assim o gráfico de g.

Figura 38a – O gráfico de $f(-x)$



Fonte: DEaD | IFCE

Figura 38b – O gráfico de $-f(x)$



Fonte: DEaD | IFCE

Encerramos aqui nosso primeiro tópico. Nele estudamos as noções básicas de funções, bem como a construção de gráficos. Falamos também sobre as translações e reflexões de gráficos. No próximo tópico, estudaremos as funções *afins*.

Tópico 2

Função afim

OBJETIVOS

- Conhecer a função afim e a construção do seu gráfico
- Reconhecer a equação de uma reta como consequência do gráfico da função afim
- Entender o estudo do sinal da função afim e a aplicação deste estudo para resolver alguns tipos de inequações
- Caracterizar as funções lineares

Este tópico será dedicado ao estudo de funções da forma $f(x) = ax + b$. Inicialmente considere a seguinte problemática.

Exemplo 14: A dona de casa Fernanda está procurando um novo plano de saúde, pois seu antigo plano acabou ficando mais caro e fora da sua realidade. Ela costuma ir ao médico, em média, umas quatro vezes ao mês para se consultar. Fez algumas pesquisas e encontrou dois planos satisfatórios. Agora ela precisa decidir qual o novo plano de saúde que deve contratar: Plano A ou Plano B. Tais planos estão sujeitos as seguintes condições:

- Plano A: Cobra um valor fixo de R$ 230,00 e mais parcelas R$ 10,00 por consulta.
- Plano B: Cobra um valor fixo de R$ 215,00 e mais parcelas R$ 20,00 por consulta.

Dessa forma, qual o plano se tornaria mais econômico para Fernanda?

Seja x o número de consultas por mês realizados por Fernanda. Agora vamos considerar as leis de formação das funções associadas aos planos A e B. Temos que os valores cobrados pelos planos A e B serão $f(x) = 230 + 10x$ e $g(x) = 215 + 20x$, respectivamente. Fazendo uma estimativa de valores a serem pagos dependendo da quantidade de consultas realizadas, obteremos a seguinte tabela:

Tabela 2: Estimativa de valores para os planos de saúde A e B

x	$f(x) = 230 + 10x$	$g(x) = 215 + 20x$
1	$f(1) = 230 + 10.1 = 230 + 10 = 240$	$g(1) = 215 + 20.1 = 215 + 20 = 235$
2	$f(2) = 230 + 10.2 = 230 + 20 = 250$	$g(2) = 215 + 20.2 = 215 + 40 = 255$
3	$f(3) = 230 + 10.3 = 230 + 30 = 260$	$g(3) = 215 + 20.3 = 215 + 60 = 275$
4	$f(4) = 230 + 10.4 = 230 + 40 = 270$	$g(4) = 215 + 20.4 = 215 + 80 = 295$
5	$f(5) = 230 + 10.5 = 230 + 50 = 280$	$g(5) = 215 + 20.5 = 215 + 100 = 315$
6	$f(6) = 230 + 10.6 = 230 + 60 = 290$	$g(6) = 215 + 20.6 = 215 + 120 = 335$

Fonte: DEaD | IFCE

Como Fernanda costuma fazer em média umas quatro consultas ao mês observamos, da Tabela 2, que o Plano A será mais vantajoso para ela.

No exemplo 14, obtemos as seguintes funções $f(x) = 230 + 10x$ e $g(x) = 215 + 20x$. Tais funções são denominadas de **funções afins**. De maneira formal, temos que

Definição 2.7 Uma **função afim** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ para todo x real, em que a e b são números reais dados e $a = 0$. Caso tivéssemos $a = 0$ e b um número real qualquer, a função se tornaria $f(x) = b$. Tal função é denominada de **função constante**.

Você deve estar se perguntando se função afim e função polinomial do 1º grau (ou função do 1º grau) não se tratam da mesma coisa. Na verdade, o termo "função polinomial do 1º grau" não faz sentido já que não podemos calcular o grau de uma função. Segundo Lima (2009), **a maioria dos nossos textos escolares refere-se à função afim como função do primeiro grau. Esta nomenclatura sugere a pergunta: o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio (quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau).** Portanto, sempre nos referiremos a função afim em vez de função polinomial do 1º grau (ou função do 1º grau).

Como $a \neq 0$ e b podem ser quaisquer números reais, temos alguns casos particulares que merecem atenção:

- Se $b = 0$, temos que $f(x) = ax$ e é denominada de **função linear**.
- Se $a = 1$ e $b = 0$, temos que $f(x) = x$ e é denominada de **função identidade**.
- Se $a = 1$ e b uma constante real diferente de zero , temos que $f(x) = x + b$ e é denominada de **translação(da função identidade)**.

Muitas vezes, dada uma função afim $f(x) = ax + b$, faz-se necessário determinar seu valor em um determinado ponto $x = x_0$, o que denominamos isso de valor da função em um determinado ponto. Para fazer isso, basta substituir na função onde existe x pelo valor de x_0 e ficaremos com $f(x_0) = ax_0 + b$.

Como aplicação dos conceitos vistos acima, temos os seguintes exemplos:

> **Saiba mais...**
>
> Para aprofundar um pouco mais seus conhecimentos a respeito das funções constantes acesse o site http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/funcao-constante.htm

Exemplo 15: Iremos determinar os valores de a e b nos seguintes casos: para a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x - 6$ temos que $a = 3$ e $b = -6$. Além disso, para $x = 4$, tem-se $f(4) = 3.4 - 6 = 12 - 6 = 6$. Já para a função afim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 5$, temos que $a = -1$ e $b = 5$. Fazendo $x = 6$, tem-se $f(6) = -6 + 5 = -1$. Na função linear (e, portanto, função afim) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \sqrt{3}\,x$ temos que $a = \sqrt{3}$ e $b = 0$. Para $x = 1$, tem-se $f(1) = \sqrt{3}.1 = \sqrt{3}$. Na função translação (da função identidade), a qual também é uma função afim, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 6$, temos que $a = 1$ e $b = -6$. Fazendo $x = 6$, obtemos $h(6) = 6 - 6 = 0$; Para função constante $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = 2$ temos que $a = 0$ e $b = 2$. Para $x = 8$, teremos $i(8) = 2$, ou seja, qualquer valor atribuído a x na função constante i não alterará o seu valor e ele permanecerá sempre igual a 2.

Agora se fosse pedido para que você observasse as funções afins do exemplo 15 e tirasse algumas conclusões a seu respeito, provavelmente você responderia *mas o que isso significa? Para quê que eu preciso observar tais funções*? Na verdade, seria necessário fazer uma representação visual desta função para observamos o seu comportamento e tirarmos algumas conclusões. Ou seja, por meio do gráfico de uma função afim é possível desvendar os seus segredos. Mas como fazer o seu gráfico?

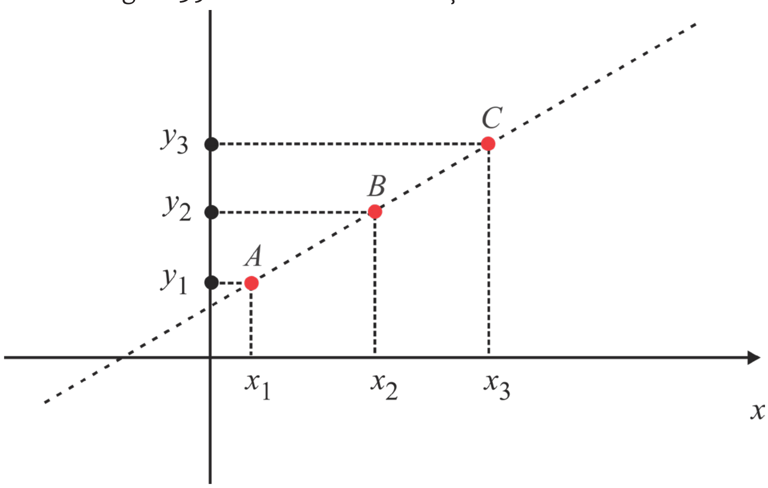
Estudamos, no tópico anterior, que o gráfico de uma função $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é o conjunto dos pontos $(x,\ y)$ do plano cartesiano, tal que $y = f(x)$. Para a função afim, temos a teorema a seguir que nos dará um norte de como fazer sua representação gráfica:

Teorema 2.1 O gráfico cartesiano da função afim é uma reta.

Demonstração: Para demonstrarmos o teorema mostraremos que dados três pontos quaisquer do gráfico, eles estarão sempre alinhados. Com efeito, sejam $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ três pontos quaisquer do gráfico de $y = f(x) = ax + b$. Logo, teremos que

$$\begin{cases} A \in G(f) \Rightarrow y_1 = f(x_1) \Rightarrow y_1 = ax_1 + b \\ B \in G(f) \Rightarrow y_2 = f(x_2) \Rightarrow y_2 = ax_2 + b \\ A \in G(f) \Rightarrow y_3 = f(x_3) \Rightarrow y_3 = ax_3 + b \end{cases}$$

Figura 39 – Gráfico de uma função afim é uma reta



Fonte: DEaD | IFCE

A distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, que indicamos por $d(A, B)$ é definida por

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Portanto, temos que $A = (x_1, ax_1 + b)$, $B = (x_2, ax_2 + b)$ e $C = (x_3, ax_3 + b)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2 < x_3$. Calcularemos em seguida as distâncias $d(A,C), d(A,B)$ e $d(B,C)$ e mostraremos então que uma das distâncias, em particular $d(A,C)$, é a soma das outras duas $d(A,B)$ e $d(B,C)$. Em termos matemáticos, queremos mostrar que $d(A,C)=d(A,B)+d(B,C)$. Sendo assim, teremos

$$d(A,C)=\sqrt{(x_1-x_3)^2+[ax_1+b-(ax_3+b)]^2}=\sqrt{(x_1-x_3)^2+[ax_1-ax_3)]^2}$$
$$d(A,C)=\sqrt{(x_1-x_3)^2+a^2(x_1-x_3)^2}=\sqrt{(x_1-x_3)^2.\left(1+a^2\right)}=(x_1-x_3)\sqrt{\left(1+a^2\right)}$$

Analogamente, encontraremos que $d(A,B)=(x_2-x_1)\sqrt{(1+a^2)}$ e $d(B,C)=(x_3-x_2)\sqrt{(1+a^2)}$. Agora, observe que

$$d(A,B)+d(B,C)=(x_2-x_1)\sqrt{(1+a^2)}+(x_3-x_2)\sqrt{(1+a^2)}$$
$$d(A,B)+d(B,C)=\sqrt{(1+a^2)}.(x_2-x_1+x_3-x_2)=\sqrt{(1+a^2)}.(x_3-x_1)=d(A,C)$$

Portanto, três pontos quaisquer do gráfico da função afim $f(x)=ax+b$ são sempre colineares e assim, seu gráfico é uma reta. ■

Do Teorema 2.1, o gráfico de uma função afim $f(x)=ax+b$ é uma reta r. Isto é, os pontos (x,y) do plano que satisfazem a igualdade $y=f(x)=ax+b$ estão todos alinhados. Concluímos assim que a equação $y=ax+b$, onde $a,b\in\mathbb{R}$, é a **equação da reta** r. Geometricamente, podemos então dizer que o coeficiente $\boldsymbol{b}$ indica a ordenada do ponto onde a reta (gráfico da função afim $f(x)=ax+b$) intersecta o eixo y. Com efeito, note que, ao fazermos $x=0$, obtemos $f(0)=a.0+b=0+b=b$ e obtemos assim o ponto $(0,\mathrm{b})$. Já o coeficiente $\boldsymbol{a}$ é a **inclinação** (ou **coeficiente angular**) dessa reta em relação ao eixo x.

Dessa forma, podemos agora traçar o gráfico de uma função afim qualquer. Usaremos ainda um dos axiomas bastante conhecido da geometria plana:

Axioma: Dois pontos distintos num plano, determinam uma única reta.

Ora, dessa forma, para construirmos o gráfico, basta marcar dois pontos do gráfico no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.

Exercício resolvido 1: Construa o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=3x$ e da função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\dfrac{x}{2}$.

Solução: Faremos o gráfico da função $f(x)=3x$ e deixaremos para o leitor a construção do gráfico $g(x)=\dfrac{x}{2}$. A construção do gráfico seguirá os seguintes passos:

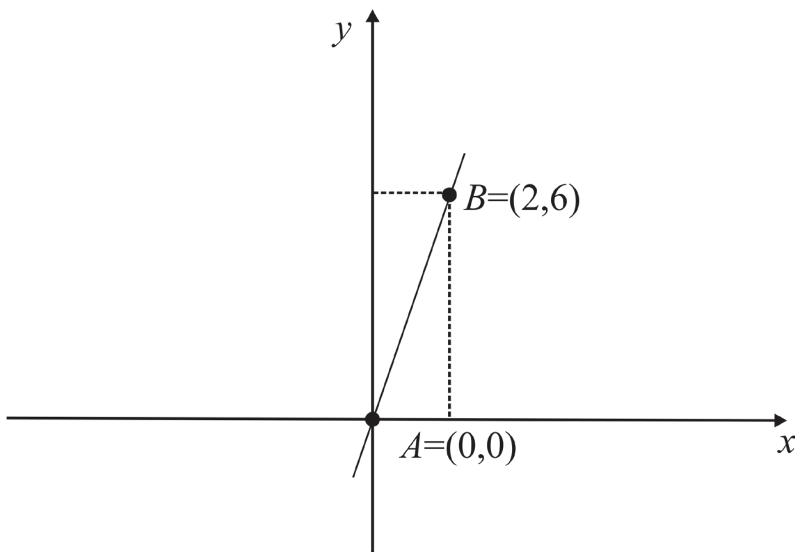
Passo 1: inicialmente precisamos determinar dois pontos quaisquer que pertençam ao gráfico. Para isso, basta determinarmos dois valores para x e encontrarmos o valor de $f(x)$ correspondente. No nosso caso, iremos escolher os valores $x=0$ e $x=2$ (mas você poderia escolher qualquer valor!).

Passo 2: iremos substituir esses valores em $f(x)$. Para $x=0$ temos $f(0)=3.0=0$ e para $x=2$ temos $f(2)=3.2=6$.

Passo 3: depois marcam-se os pontos encontrados no plano cartesiano. No nosso caso, encontramos os pontos $(0,0)$ e $(2,6)$.

Passo 4: Por fim traça-se a reta que passa pelos pontos encontrados. A figura abaixo ilustra o processo mencionado:

Figura 40 – Gráfico da função $f(x)=3x$



Fonte: DEaD | IFCE

Note, no exercício resolvido 1, que as função são lineares, pois são da forma $f(x)=ax$, com $a \neq 0$. Observe que ainda que, se fizermos $x=0$, temos que $f(0)=a.0=0$, ou seja, $f(0)=0$. Portanto, ao traçarmos o gráfico de qualquer função linear, verificaremos que ele sempre passará na origem, ou seja, pelo ponto $P=(0,0)$.

Guarde bem...

Para acharmos a raiz de uma função afim devemos resolver uma equação do primeiro grau. Acesse o link para revisar como se resolver uma equação http://geniodamatematica.com.br/como-resolver-equacao-do-primeiro-grau/

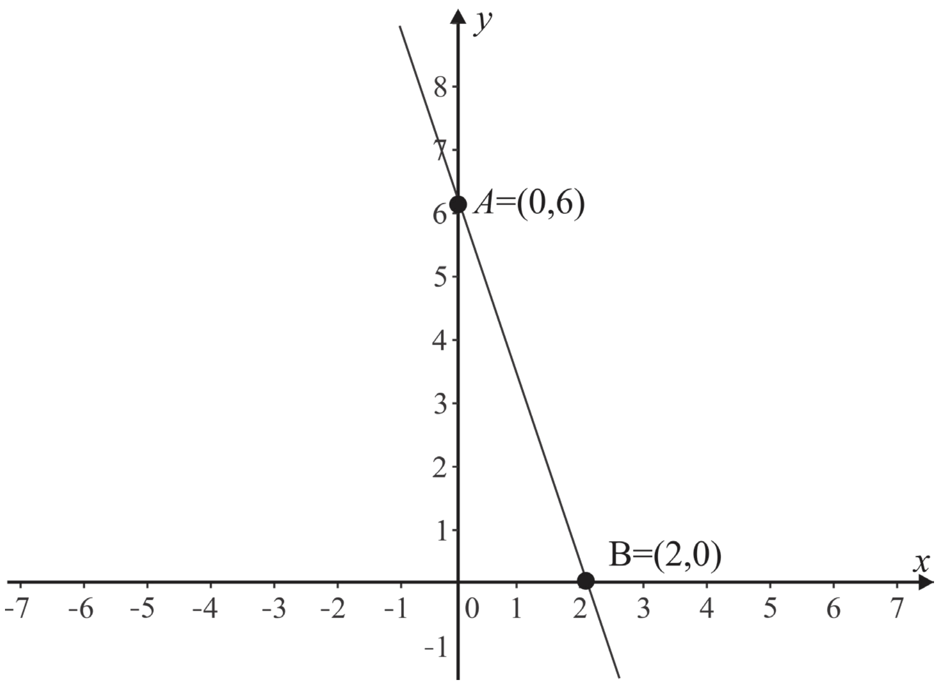
Exercício resolvido 2: Construa o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-3x+6$.

Solução: Como $f(x)=-3x+6$ é uma função afim, temos que seu gráfico será uma reta. Para construirmos seu gráfico, precisamos apenas de dois pontos. Escolheremos dois pontos estratégicos para facilitar a construção do gráfico. Primeiro, fazendo $x=0$ e substituindo esse valor em $f(x)$, teremos $f(0)=-3.0+6=0+6=6$, ou seja, $f(0)=6$. Obtemos assim o ponto $A=(0,6)$. Note que o ponto A apresenta uma propriedade interessante: ele será o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y, já que a sua coordenada x vale zero. Note que a ordenada do ponto A corresponde ao valor de b na função $f(x)=-3x+6$, ou seja, como foi visto acima, o coeficiente de b é a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo y. Agora iremos determinar o ponto em que o gráfico intersecta o eixo x, ou seja, onde a coordenada y será zero. Para isso, basta fazermos $y=f(x)=0$ e encontrarmos o valor de x associado. Assim,

$$f(x)=0\Rightarrow -3x+6=0\Rightarrow -3x=-6\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=\frac{6}{2}\Rightarrow x=2$$

Logo, temos o ponto $B=(2,0)$. Tal ponto é considerado o ponto em que o gráfico intersecta o eixo x. Observe ainda que a abscissa 2 é o valor de x que torna $f(x)=0$. Denominamos a abscissa 2 de raiz da função afim $f(x)=-3x+6$. Logo, o número 2 será o único valor por onde o gráfico cortará o eixo x. Abaixo, temos o gráfico da função.

Figura 41 – Gráfico da função $f(x)=-3x+6$



Fonte: DEaD | IFCE

De maneira geral dada uma função afim $y = f(x) = ax + b$ temos que

$$\begin{cases} \{x = 0 \Rightarrow y = a.0 + b = 0 + b = b \Rightarrow y = b \\ y = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Dessa forma, os pontos $(0, b)$ e $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ são onde o gráfico intersecta, respectivamente, o eixo y e o eixo x. Do que foi exposto acima, temos

Definição 2.8 Dada uma função afim $f(x) = ax + b$, o número $x = -\dfrac{b}{a}$ é denominado **raiz** ou **zero** da função. Já o coeficiente $\boldsymbol{b}$ indicará a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o y.

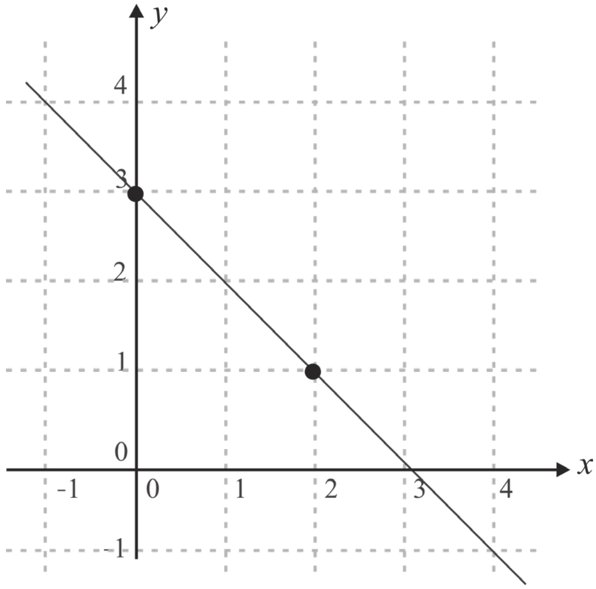
Exercício resolvido 3: Determine o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 3$.

Solução: Inicialmente, determinemos a sua raiz. Para isso, basta encontrar um número que torne $f(x) = 0$. Para a função $f(x) = -x + 3$ note que 3 é raiz, pois $f(3) = -3 + 3 = 0$. Uma outra forma seria fazer $f(x) = 0$ e resolver a equação e encontraríamos o mesmo valor. Com efeito,

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x + 3 = 0 \Rightarrow = -x = -3 \Rightarrow x = 3$$

Dessa forma, já temos que o ponto $(3, 0)$ é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo x. Note que, como o coeficiente b da função vale 3, temos que o ponto $(0, 3)$ é o ponto onde o gráfico intersecta o eixo y. Segue abaixo o gráfico solicitado

Figura 42 – Gráfico da função $f(x) = -x + 3$



Fonte: DEaD | IFCE

Como vimos no Teorema 2.2, o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta e, dessa forma, precisamos apenas de dois pontos para determinar um reta de modo único. Portanto, se conhecermos dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ de *f*, com $x_1 \neq x_2$, poderemos determinar os valores dos coeficientes a e b. Com efeito, sendo $f(x) = ax + b$, teremos

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{array}\right| \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 + b = ax_2 - ax_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Agora, substituindo o valor de $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ em $f(x_1) = ax_1 + b$, teremos

$$f(x_1) = ax_1 + b \Rightarrow b = f(x_1) - x_1\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right) = \frac{f(x_1).(x_2 - x_1) - x_1(f(x_2) - f(x_1))}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_1).x_2 - f(x_1).x_1 - x_1.f(x_2) + x_1.f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow b = \frac{f(x_1).x_2 - x_1.f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

Portanto, na resolução de problemas deste tipo, pode-se memorizar a fórmula ou fazer o processo descrito com os valores que forem informados na questão.

Exercício resolvido 4: Determine a função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida $f(x)=ax+b$ sabendo que $f(1)=2$ e $f(4)=6$.

Solução: Iremos imitar o processo acima para determinar os valores de a e b através da resolução do sistema. Logo $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(4)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.1+b=2 \\ a.4+b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 & (\mathrm{I}) \\ 4a+b=6 & (\mathrm{II}) \end{cases}$

Fazendo, membro a membro (II) – (I), obteremos

$$4a+b-(a+b)=6-2 \Rightarrow 3a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{3}.$$

Substituindo o valor de a, por exemplo, na equação (I), teremos

$$a+b=2 \Rightarrow \frac{4}{3}+b=2 \Rightarrow b=2-\frac{4}{3} \Rightarrow b=\frac{6-4}{3} \Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

Portanto, a função procurada é $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

Encontramos acima que dados os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ de $f(x)=ax+b$, com $x_1 \neq x_2$ então $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. De modo geral, dados dois números reais x e $x+h$ com $h \neq 0$, então

$$a=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} \Rightarrow a=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Dessa forma, o coeficiente a é a **taxa de variação (ou de crescimento)** da função f num intervalo cujos extremos são x e $x+h$.

Sendo assim, veremos, no próximo teorema, que, dependendo do sinal de a (positivo ou negativo), podemos determinar se a função será crescente ou decrescente.

Teorema 2.2 Dada uma função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax+b$.

i) Se o coeficiente a for positivo então a função f é crescente.
ii) Se o coeficiente a for negativo então a função f é crescente.

Demonstração: Demonstraremos o caso i). O caso ii) segue de forma análoga e será deixado como exercício para o leitor. No caso i), mostraremos que, se o coeficiente

$a > 0$, então f será crescente. Com efeito, considere dois números reais x_1 e x_2 tal que $x_1 < x_2$. Calculemos o valor da diferença $f(x_2) - f(x_1)$. Temos que

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) > 0$$

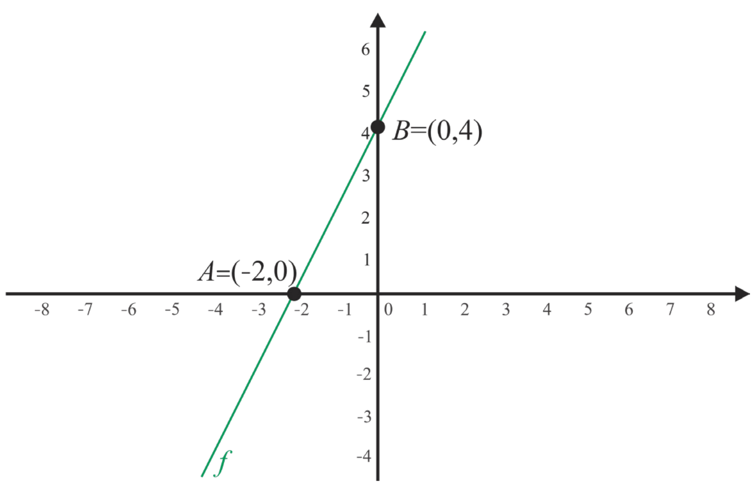
pois $a > 0$ e como $x_1 < x_2$ significa que $x_2 - x_1 > 0$. Assim o produto de dois números reais positivos é ainda positivo. Temos assim que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, como $x_1 < x_2$ obtemos $f(x_1) < f(x_2)$, o que garante que f é crescente. ■

Se retornamos ao exemplo 32, note que a função $f(x) = 2x + 1$ tem coeficiente $a = 2 > 0$ e, portanto, do Teorema 2.2, a função é crescente. Já no exemplo 33, a função $f(x) = -3x + 6$ tem coeficiente $a = -3 < 0$ e, portanto, do Teorema 2.2, a função é decrescente.

De maneira intuitiva, para saber se uma função é crescente ou decrescente, basta analisarmos o seu gráfico da esquerda para a direita. Se, à medida que formos considerando valores de x cada vez maiores, observamos que os valores de $f(x)$ também aumentam, então f será crescente (como pode ser visto na figura 40), caso contrário, f será decrescente (veja a figura 41).

Exemplo 16: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 4$. Note que -2 é raiz de $f(x)$, pois $f(-2) = 2.(-2) + 4 = -4 + 4 = 0$. Note ainda $b = 4$ e, portanto, o gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0,4)$. Observe que $a = 2 > 0$ e, portanto, a função é crescente. Observe abaixo o gráfico da função.

Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 4$



Fonte: DEaD | IFCE

Note que, no gráfico da figura 43, podemos descobrir para que valores de x temos $f(x)>0, f(x)=0$ ou $f(x)<0$. De fato, basta observar em quais intervalos o gráfico está acima ou abaixo do eixo x. Quando ele está acima, temos $f(x)<0$ e quando está abaixo, temos $f(x)<0$. Por exemplo, note que, para $x=1$, tem-se $f(1)>0$ (observe no gráfico que o valor da imagem associada ao número 1 se encontra acima do eixo x). Por outro lado, note que, para $x=-3$, tem-se $f(-3)<0$ (observe no gráfico que o valor da imagem associada ao número -3 se encontra abaixo do eixo x). De forma geral, para $f(x)=2x+4$, temos que

$$\begin{cases} x=-2 \Rightarrow f(x)=0 \\ x<-2 \Rightarrow f(x)<0 \\ x>-2 \Rightarrow f(x)>0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=-2 & \Rightarrow f(x)=0 \\ x\in(-\infty,-2) & \Rightarrow f(x)<0 \\ x\in(-2,\infty) & \Rightarrow f(x)>0 \end{cases}$$

Isso que acabamos de analisar é chamado do **estudo do sinal da função**, ou seja, fazer o estudo do sinal de uma função consiste em determinar os valores de x que tornem $f(x)>0, f(x)=0$ ou $f(x)<0$.

Iremos agora realizar o estudo do sinal de uma função afim $f(x)=ax+b$. Inicialmente lembremos que sua raiz é única e dada pelo número $x=-\frac{b}{a}$, ou seja, para $x=-\frac{b}{a}$, temos que $f\left(-\frac{b}{a}\right)=a.\left(-\frac{b}{a}\right)+b=-b+b=0$. Agora façamos a análise de dois casos:

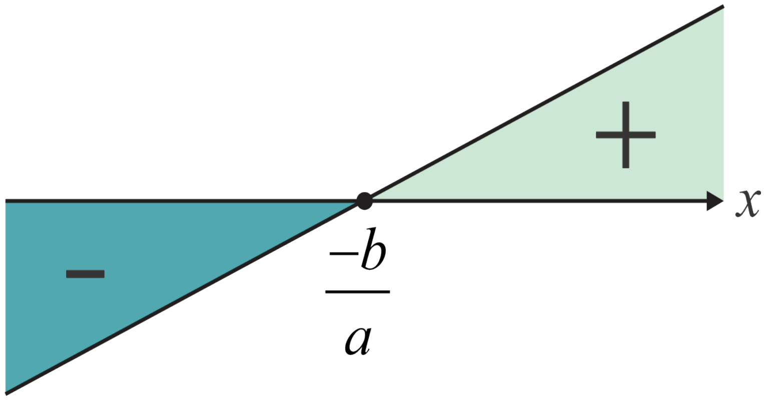
<u>Caso</u> $a>0$: Neste caso, a função é crescente. Dessa forma:

$x<-\frac{b}{a} \Rightarrow f(x)<f\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow f(x)<0$ e $x>-\frac{b}{a} \Rightarrow f(x)>f\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow f(x)>0$.

Em resumo, temos:

$$\begin{cases} x=-\frac{b}{a} \Rightarrow f(x)=0 \\ x<-\frac{b}{a} \Rightarrow f(x)<0 \\ x>-\frac{b}{a} \Rightarrow f(x)>0 \end{cases}$$

Figura 44 – Estudo do sinal da função afim crescente



Fonte: DEaD | IFCE

De forma intuitiva, quando temos $a > 0$, se considerarmos qualquer valor de x maior do que a raiz, teremos que a função assume valores positivos, caso contrário, assumirá valores negativos (figura 44).

Para fazermos o esboço do gráfico do estudo do sinal, inicialmente traçamos uma reta horizontal para representar o eixo x. Depois no eixo x, marcamos o valor da raiz. Feito isso, verificamos o sinal de a que, no caso em questão, é maior do que zero ($a > 0$). Por fim, sendo $a > 0$, temos que a função será crescente e então traçamos uma reta não horizontal que intersecta o eixo x na raiz da função (veja figura 44).

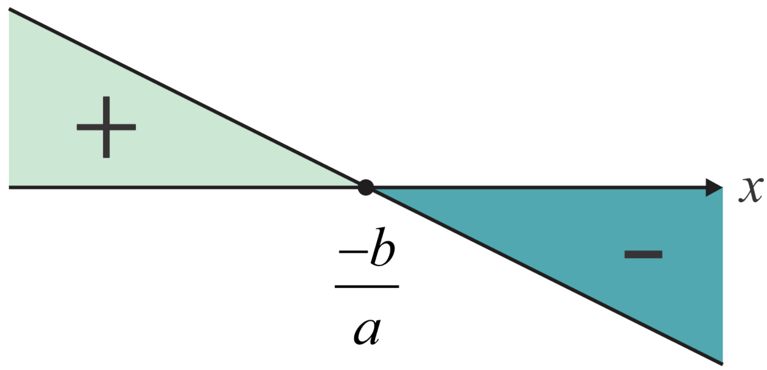
Caso $a < 0$: Neste caso, a função é decrescente. Dessa forma:

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) > f\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow f(x) > 0 \text{ e } x > -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) < f\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow f(x) < 0$$

Em resumo, temos:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) = 0 \\ x < -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x > -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

Figura 45 – Estudo do sinal da função afim decrescente



Fonte: DEaD | IFCE

De forma intuitiva, quando temos $a < 0$, se considerarmos qualquer valor de x maior do que a raiz, teremos que a função assume valores negativos, caso contrário, assumirá valores positivos (figura 45).

Para fazermos o esboço do gráfico do estudo do sinal, inicialmente traçamos uma reta horizontal para representar o eixo x. Depois no eixo x, marcamos o valor da raiz. Feito isso, verificamos o sinal de a que, no caso em questão, é maior do que zero ($a < 0$). Por fim, sendo $a < 0$, temos que a função será decrescente e então traçamos uma reta não horizontal que intersecta o eixo x na raiz da função (veja Figura 45).

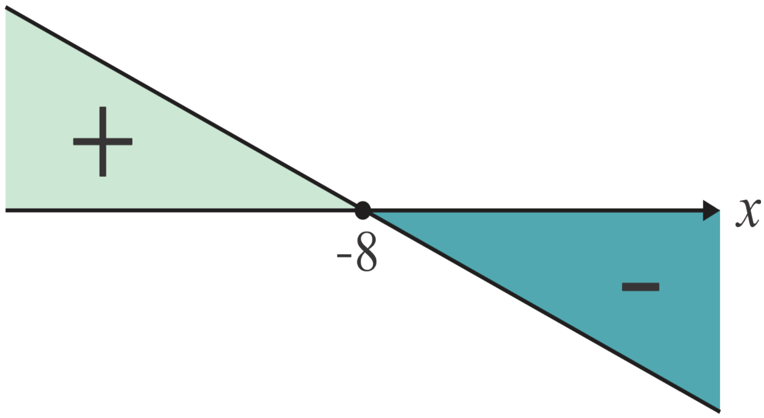
Exercício resolvido 5: Faça o estudo do sinal da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -8x - 64$

Solução: Inicialmente devemos determinar a raiz de $f(x) = -8x - 64$. Para isso, basta fazermos $f(x) = 0$. Assim:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -8x - 64 = 0 \Rightarrow -8x = 64 \Rightarrow 8x = -64 \Rightarrow x = -\frac{64}{8} \Rightarrow x = -8.$$

Note ainda que $a = -8 < 0$ e, portanto, a função será decrescente. Com base nisso, teremos o seguinte esboço do gráfico do estudo do sinal

Figura 46 – Estudo do sinal de $f(x) = -8x - 64$



Fonte: DEaD | IFCE

Dessa forma,

$$\begin{cases} x = -8 \Rightarrow f(x) = 0 \\ x > -8 \Rightarrow f(x) < 0 \\ x < -8 \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -8 & \Rightarrow f(x) = 0 \\ x \in (-8, \infty) & \Rightarrow f(x) < 0 \\ x \in (-\infty, -8) & \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$$

Uma das aplicações do estudo do sinal é a resolução de inequações. Vamos estudar agora o que são inequações e como utilizar o estudo do sinal da função para resolvê-las. Sabemos que expressões matemáticas unidas por uma igualdade são denominadas de equação. Por exemplo, $5x^2 - 4x = 3x - 1$ e $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Estudaremos agora expressões que são unidas por desigualdades. Chamamos isso de **inequação**. De modo geral, temos

Definição 2.9 Sejam f e g duas funções reais de variáveis reais. Chamamos de inequação na variável x a qualquer uma das sentenças: $f(x) < g(x), f(x) \leq g(x), f(x) > g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$.

Assim, podemos afirmar que as sentenças $5x^2 - 4x > 3x - 1$, $5x^2 - 4x < 3x - 1$, $5x^2 - 4x \geq 3x - 1$, $5x^2 - 4x \leq 3x - 1$, são exemplos de inequações. Caso a inequação possa ser colocada em uma das formas $ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0$ ou $ax + b \geq 0$, denominamos de inequação do 1º grau.

E como determinamos se um número é solução de uma inequação?

Definição 2.10 Dada a inequação $f(x) < g(x)$. Uma **solução** para uma inequação é um número real $\boldsymbol{x_0}$ que satisfaz a desigualdade $f(x_0) < g(x_0)$. O conjunto formado por todos os números que são soluções para a inequação é chamado **conjunto solução da inequação.**

Exemplo 17: Nos casos a seguir, iremos determinar se x_0 é ou não solução da inequação dada. Se considerarmos a inequação $x^2 - 3x < 2$ e sendo $x_0 = 3$ temos $3^2 - 3.3 < 2 \Rightarrow 0 < 2$ o que é verdade, ou seja, $x_0 = 3$ é solução de $x^2 - 3x < 2$. Já se considerarmos a inequação $x^3 - 3x^2 > 1$ e sendo $x_0 = 2$ temos $2^3 - 3.2^2 > 1 \Rightarrow 8 - 12 > 1 \Rightarrow -4 > 1$ o que não é verdade, ou seja, $x_0 = 2$ não é solução $x^3 - 3x^2 > 1$.

Algumas inequações merecem destaque especiais que definiremos a seguir:

Definição 2.11 Sejam f e g duas funções reais na variável x. Chamamos de **inequações-produto** a cada uma das inequações da forma $f(x) \cdot g(x) < 0, f(x) \cdot g(x) \leq 0, f(x) \cdot g(x) > 0$ ou $f(x).g(x) \geq 0$ e, de **inequações-quociente**, inequações da forma $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ ou $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

Daremos agora alguns exemplos de inequações-produto e inequações-quociente juntamente com o método de solução de tais inequações.

Exercício resolvido 6: (*Inequação-produto*) Resolva a inequação $(x+2)(2x-1) > 0$.

Solução: Queremos encontrar todos valores de x que tornam a expressão $(x+2)(2x-1)$ positiva. Para isso, vamos estudar o sinal de cada uma das funções que compõem a inequação. Depois disso aplicaremos a regra do sinal para a multiplicação, ou seja, se o produto é positivo, então ou os

Saiba mais...

Existem outro tipo de inequação importante que precisam ser estudadas. São denominadas inequações simultâneas. Para saber mais sobre o assunto acessando o site http://soexercicios.com.br/plataforma/video-aula-teoria/23611/inequacoes-simultaneas dois fatores são positivos ou são negativos. Dessa forma, seguiremos os seguintes passos:

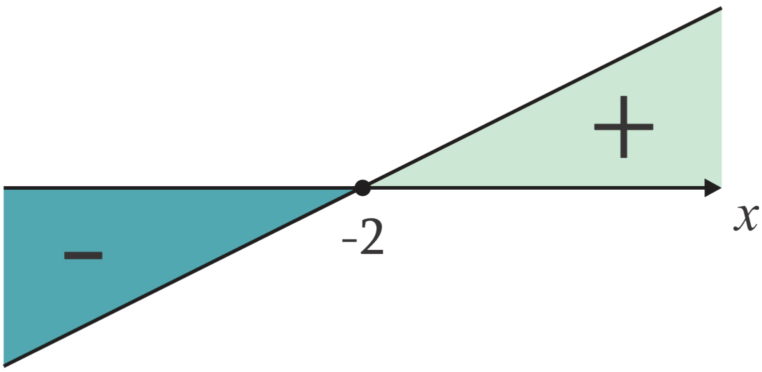
Passo 1: Na inequação $(x+2)(2x-1)>0$, temos dois fatores que designaremos por $f(x)=x+2$ e $g(x)=2x-1$.

Passo 2: Faremos o estudo do sinal de cada um dos fatores do Passo 1.

- $f(x)=x+2$: Como $a=1>0$, o gráfico de f será crescente. Além disso, temos que a raiz será $f(x)=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$. A figura 47 nos mostra como ficará o esboço do gráfico do estudo do sinal de $f(x)=x+2$.

Logo, $\begin{cases} f(x)<0, para\, x<-2 \\ f(x)>0, para\, x>-2 \\ f(x)=0, para\, x=-2 \end{cases}$

Figura 47 – Estudo do sinal da função $f(x)=x+2$

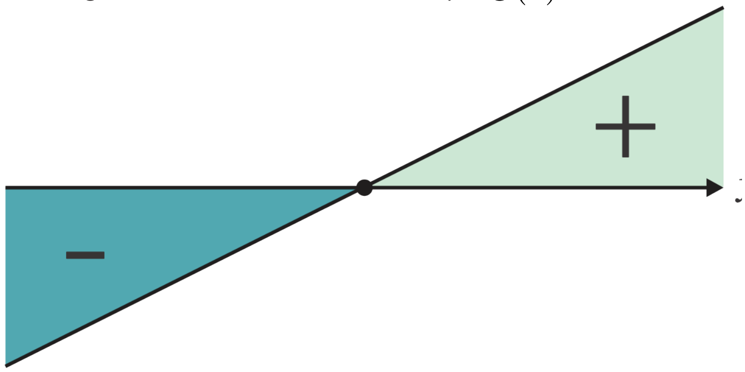


Fonte: DEaD | IFCE

- $g(x)=2x-1$: Como $a=2>0$, o gráfico da função g será crescente, também. Além disso, temos que a raiz será $g(x)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. A figura 48 nos mostra como ficará o esboço do gráfico do estudo do sinal de $g(x)=2x-1$.

Logo, $\begin{cases} g(x)<0, para\, x<\frac{1}{2} \\ g(x)>0, para\, x>\frac{1}{2} \\ g(x)=0, para\, x=\frac{1}{2} \end{cases}$

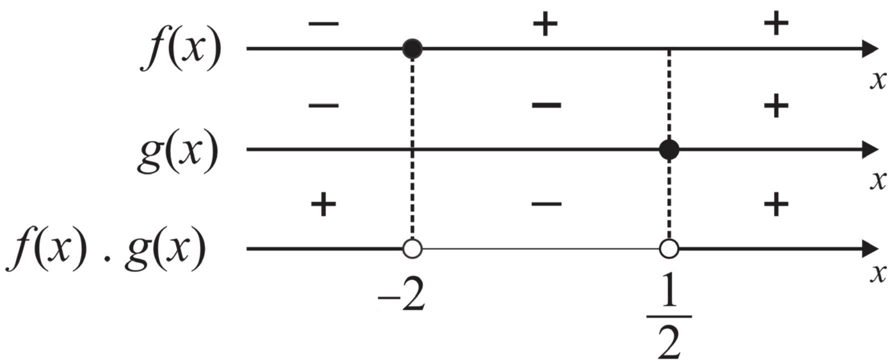
Figura 48 – Estudo do sinal da função $g(x) = 2x - 1$



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 3: Para montarmos o quadro dos sinais, procederemos da seguinte forma: para o preenchimento das duas primeiras linhas, iremos fazer a transposição do esboço do gráfico do estudo do sinal das funções em questão colocando apenas a raiz de cada função seguido dos sinais dos intervalos que tenham a raiz como um dos extremos. Agora para completar a terceira linha, iremos aplicar a regra dos sinais para a multiplicação $f(x) \cdot g(x) = (x-2) \cdot (2x-1)$ e colocamos as raízes encontradas para as duas funções. Por fim, marcamos na terceira linha os intervalos com uma linha mais grossa indicando a solução da inequação. Veja a figura.

Figura 49 – Estudo do sinal da função $f(x) \cdot g(x) = (x-2) \cdot (2x-1)$



Fonte: DEaD | IFCE

Portanto, temos a solução $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \ ou \ x > \dfrac{1}{2} \right\}$ ou $S = (-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty \right)$.

Note ainda que, na figura 49, as raízes são marcadas com uma **bola aberta,** pois estamos interessados em saber quando que o produto das funções será maior do que zero e sabemos que nas raízes as funções valem zero.

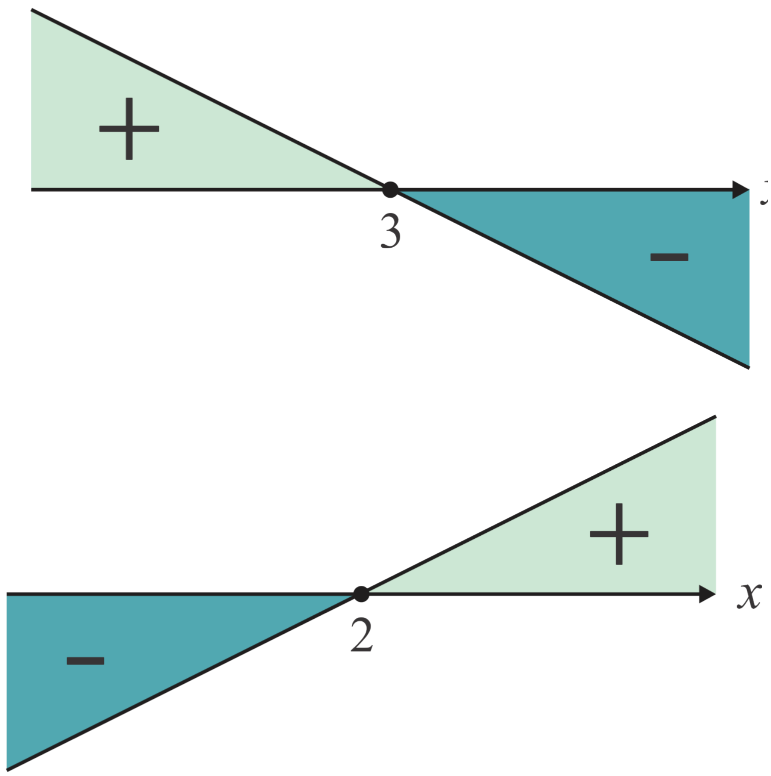
Exercício resolvido 7: (*Inequação-quociente*) Resolva a inequação $\frac{x}{x-2} \geq 3$.

Solução: Inicialmente ajeitaremos a inequação. Assim:

$$\frac{x}{x-2} \geq 3 \Rightarrow \frac{x}{x-2} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3.(x-2)}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3x+6}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x+6}{x-2} \geq 0$$

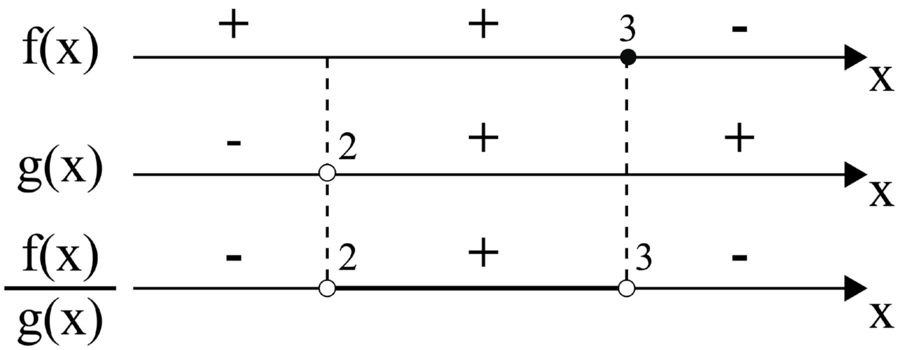
Trata-se de uma inequação quociente. Seja $f(x) = -2x+6$ e $g(x) = x-2$. Façamos o estudo do sinal de cada uma dessas funções. Para $f(x) = -2x+6$, temos que sua raiz vale 3 e sendo $a = -2 < 0$, a função é decrescente. Já para $g(x) = x-2$, temos que sua raiz vale 2 e sendo $a = 1 > 0$, a função será crescente. A figura 50 ilustra o esboço do estudo do sinal das funções e, na figura 51, temos o quadro dos sinais:

Figura 50 – Estudo dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: DEaD | IFCE

Figura 51 – Estudo do sinal da função $\dfrac{-2x+6}{x-2} \geq 0$



Fonte: DEaD | IFCE

Portanto, temos a solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$ ou $S = (2,3]$. Note ainda que, na figura 51, o denominador não pode ser zero. Dessa forma, na solução, o intervalo deve ficar com a bola aberta no número 2. Já o número 3 fica com a bola fechada, pois o numerador $-2x+6$ pode ser zero.

Para finalizar, falaremos sobre a caracterização da função linear. A função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. Uma proporcionalidade pode ser caracterizada como direta ou indireta. De maneira intuitiva, dizemos que duas grandezas são proporcionais quando multiplicamos a quantidade de uma delas por um determinado número e temos que a quantidade da outra fica multiplicado (diretamente proporcionais) ou dividida (inversamente proporcionais) pelo mesmo número. De maneira formal, temos

> Uma proporcionalidade é dita ser direta se dada uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem-se $f(c.x)=c.f(x)$ quaisquer que sejam os números reais c e x. Já é dita ser indireta se $f(x)=\dfrac{f(x)}{c}$, onde $c\neq 0$.

Observe agora que, como $f(c.x)=c.f(x)$ para quaisquer que sejam c e x, então considerando $a=f(1)$ e fazendo $x=1$, obteremos $f(c.1)=c\ .f(1)$, ou seja, $f(c)=c\ .a$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$. Portanto, temos $f(x)=ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E assim f é uma função linear.

Do que foi exposto acima, concluímos que uma grandeza y é diretamente proporcional a uma grandeza x se existe uma constante a, denominada de *constante de proporcionalidade*, tal que $y = ax$ qualquer que seja o valor de x. De forma análoga, podemos fazer a mesma análise para a proporcionalidade inversa.

Podemos agora então falar sobre o **Teorema Fundamental da Proporcionalidade**, que nos permite determinar se uma função é ou não linear. A demonstração o leitor pode encontrar na referência 3 e pode ser enunciado como segue.

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $f(n.x)=n.f(x)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e todo $x\in\mathbb{R}$.

(b) Pondo $a=f(1)$, tem-se $f(x)=ax$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(c) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$.

Por fim, o teorema abaixo nos permite caracterizar quando uma função é considerada uma função afim.

Teorema 2.4 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h)-f(x)=\varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

A demonstração deste teorema é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade e será deixado como exercício para o leitor.

Com a caracterização das funções lineares, encerramos a nossa segunda aula. Nesta aula, estudamos, primeiramente, as funções que relacionam conjuntos quaisquer. Depois estudamos aquelas que relacionam subconjuntos dos números reais, isto é, as funções reais de variáveis reais. Vimos como construir o gráfico destas funções no plano cartesiano. A partir do gráfico, conhecemos detalhes importantes da função, como suas raízes, os intervalos de crescimento e decrescimento e o estudo do sinal.

No segundo tópico, estudamos a função afim. Vimos que seu gráfico é uma reta e que para construirmos só precisamos marcar dois pontos e depois traçamos a reta. Para sabermos se a reta é crescente ou decrescente, basta observarmos o sinal da constante a. Fizemos o estudo do sinal da função e vimos que ele é fundamental para resolvermos inequações. Estudamos ainda a caracterização das funções lineares.

Na próxima aula, conheceremos as funções quadráticas e modulares. Além disso, construiremos os seus gráficos e resolveremos as inequações do 2º grau e as modulares.

Até a próxima aula.

Pratique...

1. Dada a função $f: R-\{1\} \rightarrow R$, $f(x)=\dfrac{4x-5}{x-1}$, qual o elemento do domínio que tem imagem 3?

2. Dê o domínio das funções reais:

   a. $f(x)=\sqrt{2x+6}+\sqrt{12-4x}$

   b. $h(x)=\sqrt{\dfrac{(1-2x)(3+4x)}{4-x}}$

3. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $(-2,5)$ e $(3,3)$.

4. Para quais valores de m a função $f(x)=m(x-1)+3-x$ é crescente, decrescente ou constante.

5. Resolva as inequações:

   a. $(5-3x)(7-2x)(1-4x)\leq 0$

   b. $\dfrac{(3x+1)}{(2x+5)(5x+3)}>0$

Gabarito

1. 2

2. a) $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3\le x\le 3\}$

   b) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{3}{4}\le x\le\frac{1}{2}\right\}$

3. Para $m=1$, a função será constante; Para $m>1$, a função será crescente; e para $m<1$, a função será decrescente.

4. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{3}\ \text{ e }\ x\ge\frac{7}{2}\right\}$

   b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{5}{2}< x<\frac{5}{3}\ \text{ e }\ x>-\frac{1}{3}\right\}$

Aula 3

Função Quadrática e Modular: conceitos e aplicações

Olá estudante,

Nesta aula, vamos conhecer duas funções importantes: a função quadrática e a função modular. No tópico 1, estudaremos a função quadrática. Ela vem inspirando cientistas desde a antiguidade até os dias de hoje. Por exemplo, Galileu, ao estudar o movimento de objetos em queda, observou que, se desconsiderássemos a resistência do ar, o espaço percorrido por esses corpos descreveria uma função quadrática. Veremos que as funções quadráticas, assim como as funções afins, podem ser representadas graficamente no plano cartesiano. A curva que descreve tal representação é denominada de parábola. As parábolas são bastante utilizadas pela humanidade para a construção de faróis de carros, fornos solares, antenas parabólicas, pontes, etc.

No tópico 2, abordaremos as funções modulares. Uma função modular é aquela em que sua lei de formação possui uma variável dentro de um módulo. Assim como a função quadrática, a função modular é bastante utilizada nas Engenharias e em outras ciências. Uma de suas aplicações consiste no cálculo de distâncias. Encerraremos o tópico 2discutindo como solucionar inequações modulares. Vamos à aula, então?

Bom estudo a todos.

Objetivos

- Compreender os conceitos de função quadrática e modular
- Entender o esboço dos gráficos das funções quadráticas e modulares
- Estudar a resolução de equações e inequações quadráticas e modulares

Tópico 1

Estudo da Função Quadrática

OBJETIVOS

- Entender o conceito da função quadrática e do seu estudo do sinal
- Estudar a aplicação do estudo do sinal da função na resolução de inequações
- Compreender a solução de problemas com máximos e mínimos de funções quadráticas

Olá, alunos (as),

Neste primeiro tópico, estudaremos as funções quadráticas. Conheceremos sua forma canônica e veremos que seu gráfico será representado por uma curva denominada de parábola. Além disso, a partir da forma canônica, encontraremos alguns elementos importantes, como raízes, vértice, máximos e mínimos. Resolveremos ainda as inequações do segundo grau fazendo uso do estudo do sinal. E, por fim, faremos a caracterização das funções quadráticas.

Começaremos então com a seguinte definição:

Definição 3.1 Uma **função quadrática** é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^2+bx+c$ para todo x real, em que a, b e c são números reais dados e $a\neq 0$. A expressão ax^2+bx+c, com $a\neq 0$ será denominada de trinômio do 2º grau.

A respeito da definição 3.1, podemos notar que, caso tivéssemos $a=0$, encontraríamos uma **função afim** (assunto que foi estudado na aula passada). Observe ainda que, dada uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, muitas vezes, faz-se necessário conhecer o seu valor em um determinado ponto $x=x_0$, o que denominamos de **valor da função em um determinado ponto**. Para isso, basta substituir na função onde existe x pelo valor de x_0 e ficaremos com $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$.

Como aplicação dos conceitos vistos acima, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Iremos determinar os valores de a, b e c nos seguintes casos: para a função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2-3x-6$, temos que $a=1$, $b=-3$ e $c=-6$. Além disso, para $x=5$, tem-se $f(5)=5^2-3.5-6=25-15-6=4$. Já para a função quadrática $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=-5x^2-7x$ temos que $a=-5$, $b=-7$ e $c=0$. Fazendo $x=3$, tem-se $f(3)=-5.3^2-7.3=-45-21=-66$. Na função quadrática $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=4x^2+9$ temos que $a=4$, $b=0$ e $c=9$. Para $x=-1$, tem-se $h(-1)=4.(-1)^2+9=4+9=13$. Por fim, se considerarmos a função quadrática $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $i(x)=-x^2$, temos que $a=-1, b=0$ e $c=0$. Para $x=5$ temos que $i(5)=-5^2=-25$.

Outra observação que surge é que, se tivermos $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ para todo $x\in\mathbb{R}$, então $a=a'$, $b=b'$ e $c=c'$. Com efeito, como a igualdade $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ vale para todo $x\in\mathbb{R}$, em particular, considerando $x=0$ obteremos que $c=c'$. Dessa forma, ficaremos com $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Note que essa igualdade vale para todo $x\neq 0$. Colocando x em evidência em ambos os membros de $ax^2+bx=a'x^2+b'x$ e cancelando o x, obteremos que $ax+b=a'x+b'$ vale para todo $x\neq 0$. Em particular, para $x=1$, teremos que $a+b=a'+b'$ e, para $x=-1$, teremos que $-a+b=-a'+b'$. Portanto temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+b=a'+\text{b}' \\ -a+b=-a'+b' \end{cases} \quad (3.1)$$

Somando membro a membro ambas as equações do sistema (3.1), obteremos $2b=2b'$, ou seja, $b=b'$. Agora, substituindo $b=b'$ na primeira equação de (3.1), obteremos que $a=a'$.

Com base na observação acima, podemos fazer a identificação natural de que a cada trinômio do segundo grau podemos associar uma função quadrática, de modo que para cada x associamos o valor ax^2+bx+c.

Vimos, do **Exemplo 1**, que todas as funções quadráticas estão representadas na forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Uma pergunta natural nos vem à cabeça: será que existe outra forma de representar uma função quadrática? A resposta à pergunta é sim e tal forma de representação é denominada de **forma canônica**. Antes de representarmos uma função quadrática na forma canônica, precisamos compreender o método de **completar o quadrado**.

Vamos considerar o trinômio $ax+bx+c$. Inicialmente lembre-se do seguinte produto notável

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2.x.y + y^2$$

Seu segundo membro é denominado **trinômio quadrado perfeito**. Dessa forma, **completar o quadrado** significa obter um trinômio quadrado perfeito, ou seja, dada a expressão ax^2+bx+c queremos deixá-la no formato do "quadrado do primeiro termo mais (ou menos) duas vezes o primeiro termo pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo" . Vamos mostrar alguns exemplos de aplicação desse método e depois faremos o caso geral.

Exemplo 2: Note que o trinômio x^2-6x+9 é quadrado perfeito, pois podemos escrevê-lo da seguinte forma: $x^2 - 6x + 9 \quad (x)^2 \quad 2 \; x \; 3 \quad (3)^2 \quad (x \quad 3)^2$. Já o trinômio $x^2-6x+13$ não é um quadrado perfeito, pois não podemos deixá-lo na forma $(x-d)^2$. Mas podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$x^2 - 6x + 13 \quad x^2 \quad 6x \quad 9 \quad 4 \quad \left(x \quad 3^2\right) \quad 4$$

Dessa forma, conseguimos completar o quadrado de $x^2-6x+13$. Note que juntamente com o quadrado perfeito aparece um termo a mais, o número 4. A expressão $(x-3)^2+4$ é denominada forma canônica de x^2-6x+9.

Exemplo 3: Vamos completar o quadrado do trinômio $x^2+5x+15$. Observe inicialmente que $x^2+5x+15=(x)^2+2.x.\frac{5}{2}+15$. Ou seja, já temos o quadrado do primeiro termo "x^2", temos também o dobro do primeiro termo pelo segundo termo "$2.x.\frac{5}{2}$". Sendo assim, devemos ter que o segundo termo deve ser "$\frac{5}{2}$" e assim seu quadrado será $\frac{25}{4}$. Dessa maneira, a fim de obtermos um trinômio quadrado perfeito, podemos escrever $x^2+5x+15$ da seguinte forma:

$$x^2+5x+15=(x)^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+15=(x)^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+15=$$

$$=\left[(x)^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]-\frac{25}{4}+15=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{35}{4}$$

A expressão $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{35}{4}$ é denominada forma canônica. Note que uma das principais vantagens de se colocar na forma canônica é de conseguirmos isolar a variável, no nosso caso x, dentro do quadrado. Isso será útil mais adiante.

Dessa forma, de maneira mais geral, dada uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ temos que

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\overset{(*)}{=}a\left(x^2+2.x.\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\text{Ä}}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\text{Ä}}{4a}$$

em que $\Delta=b^2-4ac$ é denominado de **discriminante** da função quadrática.Note que no passo $(*)$ aplicamos o método de completar o quadrado.

Agora fazendo $m=-\frac{b}{2a}$ e $k=-\frac{\Delta}{4a}$ na expressão $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$ obtemos

$$f(x)=a(x-m)^2+k \quad (3.2)$$

que é denominada **forma canônica** de $f(x)=ax^2+bx+c$. Pode-se verificar ainda que $k=f(m)$.

Uma das primeiras aplicações da forma canônica é encontrar as raízes de uma função quadrática. Para tanto, basta encontrarmos os valores de x para que tenhamos $f(x)=0$. Assim:

$$f(x)=0\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Observa-se que podem ocorrer três casos possível dependendo do sinal de Δ:

Caso 1: $\Delta>0$: Neste caso, podemos tirar a raiz da expressão $\frac{\Delta}{4a^2}$. Assim:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observa-se, neste caso, que a função quadrática apresenta duas raízes reais e distintas dadas por $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Caso 2: $\Delta = 0$: Neste caso, teremos que a expressão $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ valerá zero e assim teremos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{0}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Observa-se neste caso que a função quadrática apresenta duas raízes reais e iguais dadas por $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Neste caso, também podemos afirmar que possui uma raiz de multiplicidade dois.

Caso 3: $\Delta < 0$: Neste caso, não existe raiz real para $\sqrt{\Delta}$. Portanto a função quadrática não apresenta raiz real.

Em resumo, podemos dizer então que, se a função quadrática tiver raiz real, ela será calculada pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (3.3)$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$. A fórmula (3.3) é conhecida no Brasil como **fórmula de Bhaskara.**

Saiba mais...

Existe ainda uma grande discussão sobre se a fórmula foi realmente descoberta por Bhaskara. Para entender um pouco mais sobre esse assunto, acesse o link: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html

A partir de (3.3), podemos estabelecer uma relação entre as raízes x_1 e x_2, conhecida como **relações de Girard**. Sejam

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

as raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Note ainda que, com base nas relações de Girard, podemos obter a forma fatorada de uma função quadrática. Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2\right] = a\left(x^2-x\cdot x_1-x\cdot x_2+x_1\cdot x_2\right) \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

em que x_1 e x_2 são as raízes de $f(x)=ax^2+bx+c$.

Outra aplicação da forma canônica é no estudo de máximos e mínimos da função quadrática. Inicialmente definiremos o conceito de máximo e mínimo de uma função de uma variável real.

Definição 3.2 Seja f uma função de uma variável real e $D(f)$ e $Im(f)$ o domínio e a imagem da função f, respectivamente. Dizemos que o número $y \in Im(f)$ é o valor máximo de f se, e somente se, $y \geq f(x)$ para todo $x \in D(f)$. Da mesma forma, dizemos que o número $y \in Im(f)$ é o valor mínimo de f, se e somente se, $y \leq f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Sendo assim, estamos interessados em determinar o valor máximo e o valor mínimo de uma função quadrática . Considere a forma canônica da função quadrática $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$. Note que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ quando $x=-\frac{b}{2a}$. Analisemos agora dois casos possíveis:

Caso 1: $a > 0$

Note que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq 0 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Sendo assim, obtemos que $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$ para todo x real. Portanto, a função quadrática assume um **valor mínimo** para $y = -\frac{\Delta}{4a}$. Note ainda que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, ou seja, o valor mínimo é atingido em $x = -\frac{b}{2a}$.

Caso 2: $a < 0$

Observe que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq 0 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Sendo assim, obtemos que $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$ para todo x real. Portanto, a função quadrática assume um **valor máximo** para $y = -\frac{\Delta}{4a}$. Note ainda que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, ou seja, o valor máximo é atingido para $x = -\frac{b}{2a}$.

A partir da compreensão dos dois casos acima, podemos então dizer que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assumirá um **valor máximo** quando $\boldsymbol{a} < 0$ e um **valor mínimo** quando $\boldsymbol{a} > 0$. O ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é denominado de

vértice da função quadrática. Observe que esses valores aparecem na expressão (3.2) da forma canônica.

Com base nos conceitos que foi discutido, vamos considerar alguns exemplos:

Exemplo 4: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função quadrática definida por $f(x)=x^2-6x+5$. Temos que sua forma canônica é dada por

$$f(x)=x^2-6x+5=(x)^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+5=(x-3)^2-4.$$

Com base na forma canônica, podemos encontrar as raízes de f fazendo $f(x)=0$:

$(x-3)^2-4=0\Rightarrow(x-3)^2=4\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{4}\Rightarrow x-3=2$ ou $x-3=-2\Rightarrow x=5$ ou $x=1$.

Assim as raízes de $f(x)=x^2-6x+5$ são $x_1=1$ e $x_2=5$. Podemos ainda escrever sua forma fatorada:

$$f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=1\cdot(x-1)\cdot(x-5)=(x-1)(x-5).$$

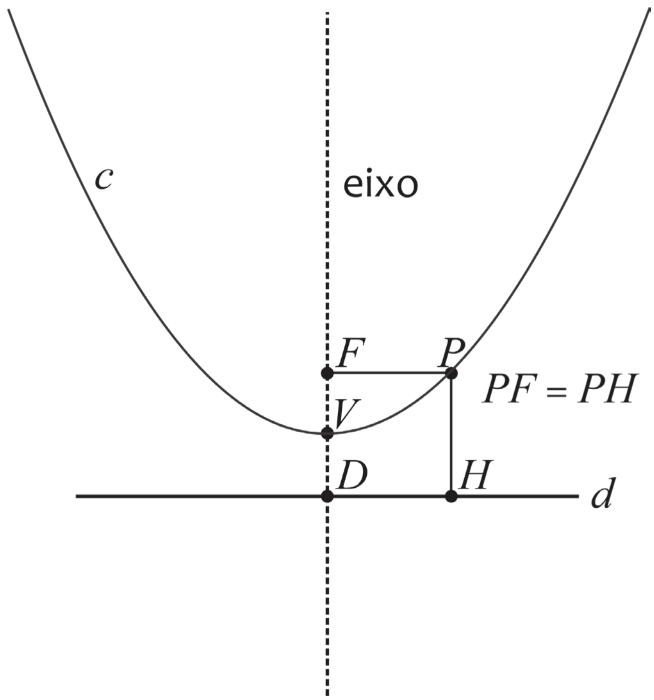
Observe que como $a=1>0$, a função $f(x)=x^2-6x+5$ assume um valor mínimo. Fazendo uso da forma canônica, descobrimos que esse valor mínimo vale -4. Além disso, o ponto $V=(3,\ -4)$ é o vértice da função quadrática $f(x)=x^2-6x+5$.

Exemplo 5: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função quadrática definida por $f(x)=x^2+5x+15$. Sua forma canônica, que já foi feita no **Exemplo 3**, é dada por $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{35}{4}$. Note que a função $f(x)=x^2+5x+15$ não apresenta raízes reais, pois $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot 1\cdot 15=25-60=-35<0$. Uma outra forma de visualizar a não existência de raízes reais seria fazendo $f(x)=0$ a partir da forma canônica: $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{35}{4}=0\Rightarrow\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{35}{4}$. Note que, como $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2\geq 0$, não podemos ter o segundo membro um resultado negativo. Observe ainda como $a=1>0$, a função $f(x)=x^2+5x+15$ assume um valor mínimo. A partir da forma canônica, descobrimos que esse valor vale $\frac{35}{4}$. Além disso, o vértice de $f(x)=x^2+5x+15$ é dado por $V=\left(-\frac{5}{2},\ \frac{35}{4}\right)$.

Vimos na aula passada que o gráfico de uma função afim era uma reta. Mostraremos agora que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Inicialmente precisaremos da seguinte definição:

Definição 3.3 Sejam uma reta d e um ponto F fora dela. A **parábola** de *foco* F e *diretriz* d é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e da reta d. A reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz chama-se o **eixo** da parábola. Chama-se o **vértice** da parábola, indicado pela letra **V**, o ponto dessa curva que se encontra mais próximo da diretriz. O vértice é o ponto médio do segmento formado pelo foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Figura 52 – Parábola e seus elementos



Fonte: DEaD | IFCE

Observe na figura 52 que, caso o ponto F estivesse abaixo da reta d, a parábola mudaria de posição, ou seja, o que chamamos de **concavidade da parábola** ficaria invertida.

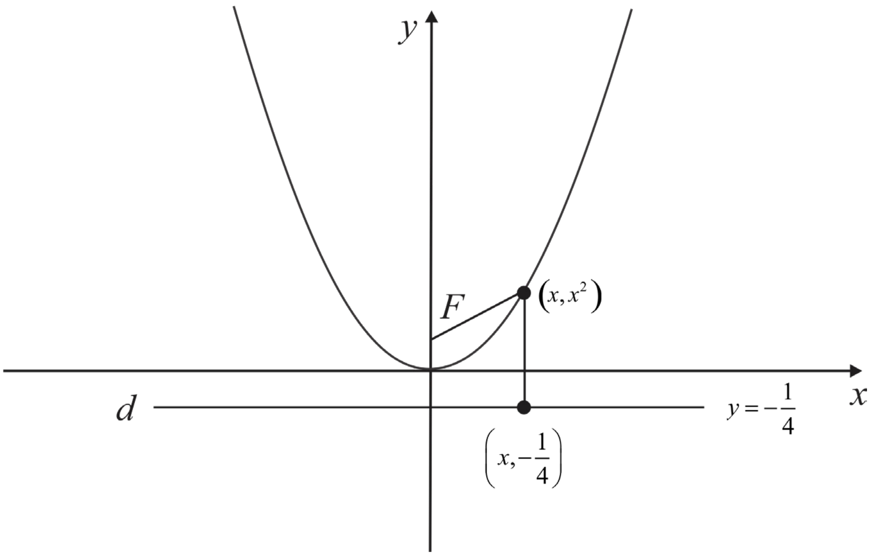
Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sua forma canônica pode ser escrita na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$ em que $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Sendo assim, para provarmos que o conjunto de pontos que satisfaz a igualdade $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é uma parábola, devemos considerar um ponto qualquer da forma $P = (x,\ ax^2 + bx + c)$ e mostrar que P é equidistante do foco e da diretriz, ou seja, que $d(P,\ F) = d(P,\ d)$, em que F é o foco e d é a reta diretriz da parábola.

Analisaremos os casos na forma de proposição:

Proposição 3.1 Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$.

O gráfico de *f* é uma parábola cujo foco é $F=\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $d: y=-\frac{1}{4}$.

Figura 53 – Gráfico de $f(x)=x^2$



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: De fato, dado P um ponto pertencente ao gráfico de *f*, temos que $P=(x,x^2)$. Temos ainda que $F=\left(0,\frac{1}{4}\right)$ e $y=-\frac{1}{4}$. Logo

$$d(P,F)=\sqrt{(x-0)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{x^2+x^4-2.x^2.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$$

$$d(P,F)=\sqrt{x^2+x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16}}=\sqrt{x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16}}=\sqrt{(x^2)^2+2.x^2.\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

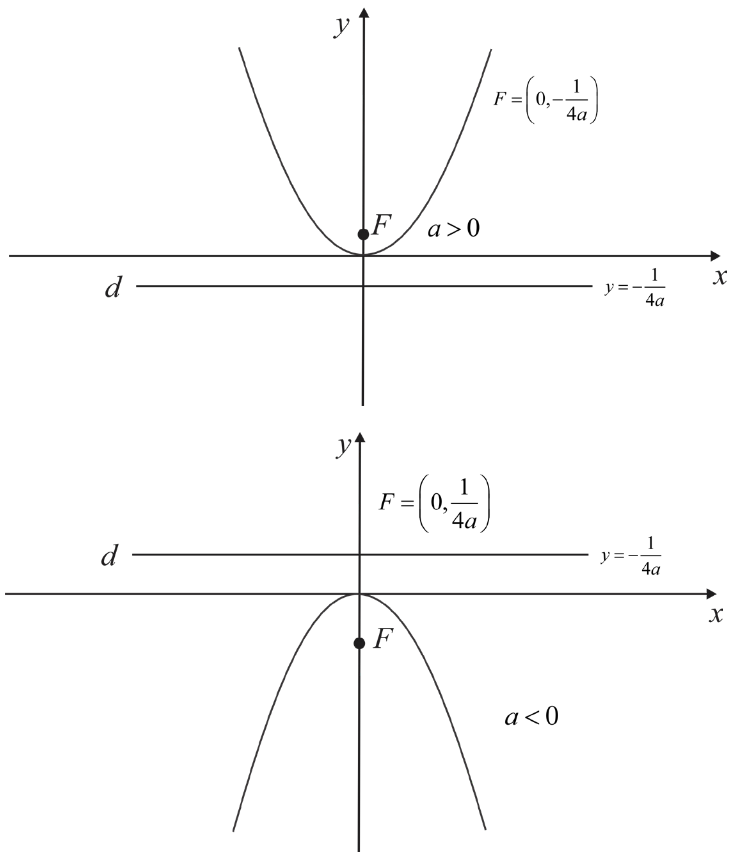
$$d(P,F)=\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}=x^2+\frac{1}{4}.$$

Por outro lado, $d(P,d) = \sqrt{(x-x)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}$. Logo, o resultado é válido. ■

Analisaremos agora o formato do gráfico de $f(x) = ax^2$.

Proposição 3.2 Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2$. O gráfico de f é uma parábola cujo foco é $F = \left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $d: y = -\frac{1}{4a}$.

Figura 54 – Gráfico de $f(x) = ax^2$



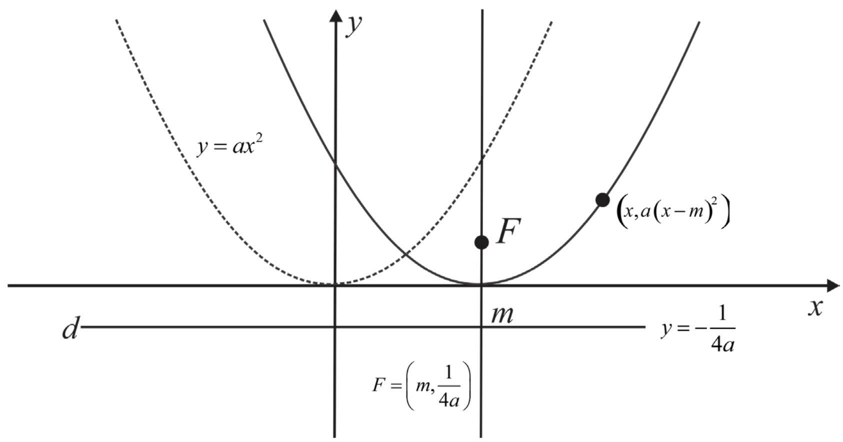
Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: A demonstração segue análoga ao caso anterior e será deixada como exercício para você. ■

Note que, na figura 54, o sinal do a altera a concavidade da parábola. Se $a > 0$, teremos que $f(x) = ax^2$ terá concavidade para cima, caso contrário, apresentará concavidade para baixo.

Proposição 3.3 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a(x-m)^2$ em que m é um número real. O gráfico de *f* é uma parábola cujo foco é $F=\left(m,\dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $d: y=-\dfrac{1}{4a}$.

Figura 55 – Gráfico de $f(x)=a(x-m)^2$



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: De fato, dado P um ponto pertencente ao gráfico de *f*, temos que $P=\left(x,a\left(x-m\right)^2\right)$. Temos ainda que $F=\left(m,\dfrac{1}{4a}\right)$ e $y=-\dfrac{1}{4a}$. Logo

$$d(P,F)=\sqrt{(x-m)^2+\left[a(x-m)^2-\frac{1}{4a}\right]^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{(x-m)^2+a^2(x-m)^4-2.a.(x-m)^2.\frac{1}{4a}+\left(\frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{a^2(x-m)^4+(x-m)^2.\left[1-\frac{1}{2}\right]+\left(\frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{a^2(x-m)^4+(x-m)^2.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{\left[a(x-m)^2\right]^2+2.a(x-m)^2.4a+\left(\frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{\left(a(x-m)^2+\frac{1}{4a}\right)^2}=a(x-m)^2+\frac{1}{4a}$$

Por outro lado,

$$d(P,d)=\sqrt{(x-x)^2+\left[a(x-m)^2-\left(-\frac{1}{4a}\right)\right]^2}=\sqrt{\left(a(x-m)^2+\frac{1}{4a}\right)^2}$$

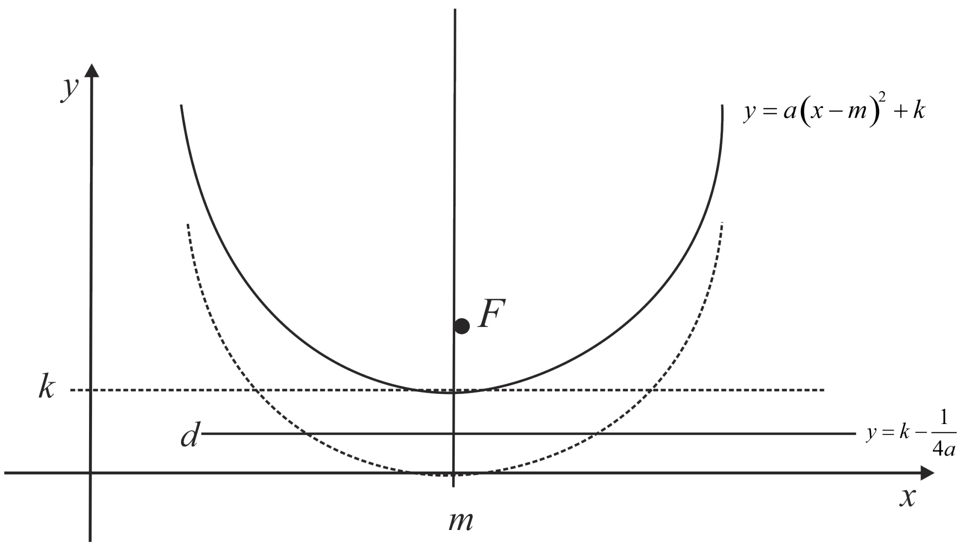
$$d(P,d)=a(x-m)^2+\frac{1}{4a}$$

E assim o resultado é verificado. ■

Observe que o gráfico de $f(x)=a(x-m)^2$ é obtido do gráfico de $f_1(x)=ax^2$ pela translação horizontal que leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$, ou seja, $(x,y)\mapsto(x+m,y)$.

Proposição 3.4 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a(x-m)^2+k$ em que m e k são números reais. O gráfico de f é uma parábola cujo foco é $F=\left(m,k+\frac{1}{4a}\right)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $d: y=k-\frac{1}{4a}$.

Figura 56 – Gráfico de $f(x)=a(x-m)^2+k$



Fonte: DEaD | IFCE

Note que o gráfico de $y = a(x-m)^2 + k$ resulta do gráfico $f_1(x) = a(x-m)^2$ pela translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y+k)$, que leva o eixo x na reta $y = k$ e a reta $y = -\dfrac{1}{4a}$ na reta $y = k - \dfrac{1}{4a}$. ■

Demonstração: Segue-se de forma análoga a Proposição 3.3 e será deixada como exercício para o leitor.

Saiba mais...

Uma *superfície parabólica* é obtida quando giramos a parábola em torno de seu eixo. Tal superfície apresenta inúmeras aplicações decorrentes da seguinte propriedade geométrica da parábola: *A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto*. Para saber mais sobre o assunto e de como demonstrar essa propriedade acesse o link: https://www.youtube.com/watch?v=CAmQw6uRUMY

Concluímos assim, da Proposição 3.4, que, toda função quadrática apresenta como gráfico uma parábola. Notamos ainda, dos casos analisados acima, que dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $a > 0$ a parábola é **côncava para cima** (ou seja, a parábola encontra-se inteiramente sobre a diretriz) e que quando $a < 0$ a parábola é **côncava para baixo** (ou seja, a parábola encontra-se inteiramente sob a diretriz). Observe ainda que podemos tirar algumas conclusões sobre o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

O coeficiente c indica a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo y, pois $f(0) = a \cdot 0^2 + b.0 + c = c$. Portanto, o ponto $P = (0,\ c)$ é o ponto onde o gráfico intersecta o eixo y.

As abcissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x são as raízes da equação. Logo, se $\Delta > 0$, o gráfico intersecta o eixo x em dois pontos distintos; se $\Delta = 0$ então o gráfico intersecta o eixo x em único ponto e para $\Delta < 0$ o gráfico não intersecta o eixo x.

O ponto médio do intervalo $[x_1, x_2]$, em que x_1 e x_2 são as raízes da função quadrática, é a abscissa do vértice da parábola. Além disso, a reta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola Note ainda que, quando a parábola é côncava para cima, o vértice é ponto limite entre o decrescimento e crescimento e no caso de concavidade para baixo é o ponto limite entre o crescimento e decrescimento

O valor mínimo e valor máximo de uma função quadrática é dado pelo $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Para saber será de máximo ou de mínimo, devemos analisar o sinal do a.

O conjunto imagem no caso em que $a > 0$ é dada por $Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\dfrac{\Delta}{4a} \right\}$. Já no caso em que $a < 0$ é dada por $Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\dfrac{\Delta}{4a} \right\}$.

Vejamos agora alguns exemplos dos conceitos que foram estudados até agora:

Exercício resolvido 1: Determine o gráfico das seguintes funções quadráticas:

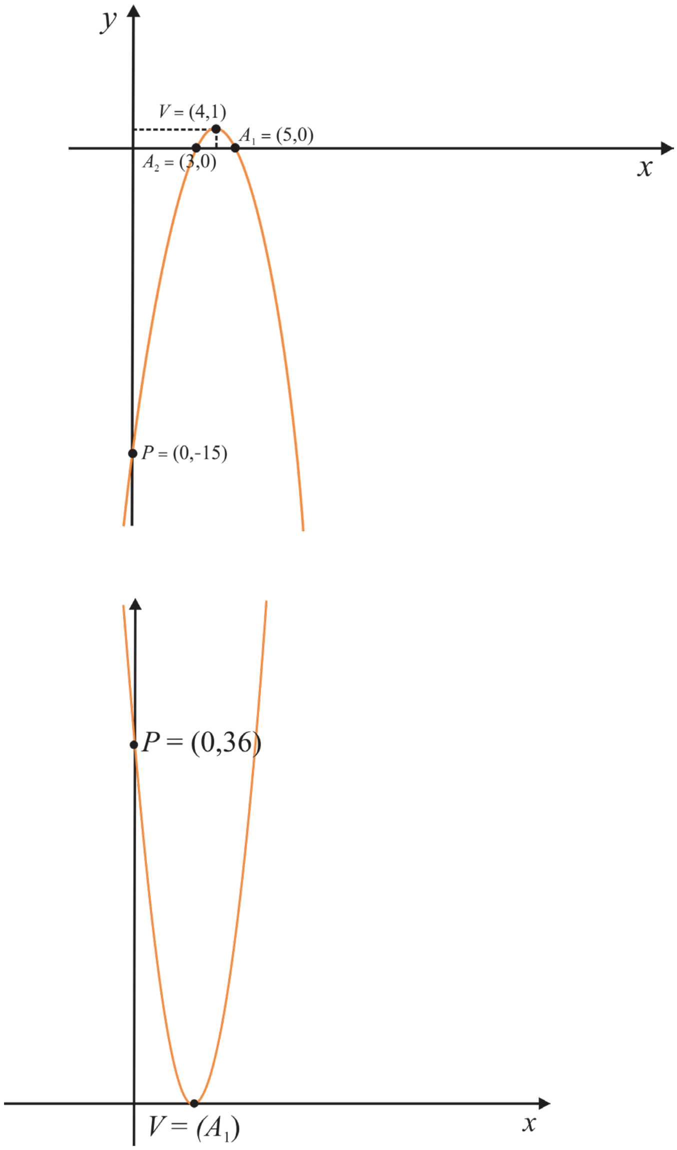
a) $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

b) $f(x) = x^2 - 12x + 36$

Solução:

a) Note que, como $a = -1 < 0$, a parábola é **côncava para baixo**. Sendo $c = -15$, temos que o gráfico intersecta o eixo y no ponto $P = (0, -15)$. Como sua forma canônica é dada por $f(x) = -(x-4)^2 + 1$, podemos então determinar suas raízes que são dadas por $-(x-4)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 1 \Rightarrow x = 5$ ou $x = 3$. Logo o gráfico intersecta o eixo x nos pontos $A_1 = (5,0)$ e $A_2 = (3,0)$. A forma fatorada é dada por $f(x) = (x-3)(x-5)$. Ainda da forma canônica, temos que o vértice é dado pelo ponto $V = (4,1)$. Logo f apresenta um valor máximo em $x = 4$. Note ainda que o conjunto imagem é dado por $\operatorname{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} | y \leq 4 \}$.

Figura 57 – Gráficos doExercício resolvido 1



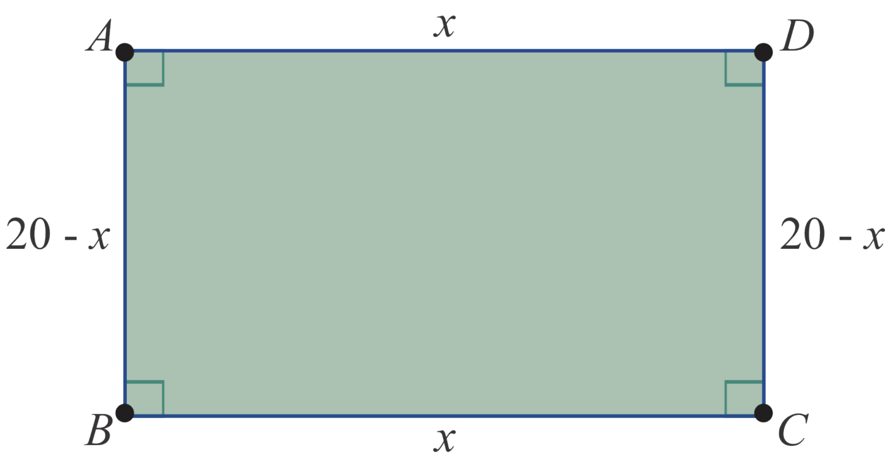
Fonte: DEaD | IFCE

b) Note que, como $a = 1 > 0$, a parábola é **côncava para cima**. Sendo $c = 36$, temos que o gráfico intersecta o eixo y no ponto $P = (0,36)$. Como sua forma canônica é dada por $f(x) = (x-6)^2$, podemos então determinar suas raízes que são dadas por $(x-6)^2 = 0 \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$. Logo o gráfico intersecta o eixo x apenas no ponto $A_1 = (6,0)$. A forma fatorada é dada por $f(x) = (x-6)^2$. Ainda da forma canônica, temos que o vértice é dado pelo ponto $V = (6,0)$. Logo f apresenta um valor mínimo em $x = 6$. Note ainda que o conjunto imagem é dado por $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$.

Exercício resolvido 2: De todos os retângulos de perímetro 40 cm, determine o retângulo que possui área máxima.

Solução: sejam x e y as medidas, em cm, dos lados de um retângulo. Como o perímetro é 40, segue que $2x + 2y = 40$, ou seja $x + y = 20$. Assim, $y = 20 - x$. A área $A(x)$ desse retângulo será dada por: $A(x) = x(20 - x) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 20x$, com $0 < x < 20$. Como $a = -1$, existe um valor máximo de $A(x)$, que ocorre quando $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{2(-1)} = 10$. Substituindo esse valor em $A(x)$, obtemos que sua área máxima será de $100\ \text{cm}^2$. Note ainda que as dimensões do retângulo valem 10 e, na verdade, a área máxima ocorre quando temos um quadrado.

Figura 58 – Retângulo com dimensões x e $20 - x$



Fonte: DEaD | IFCE

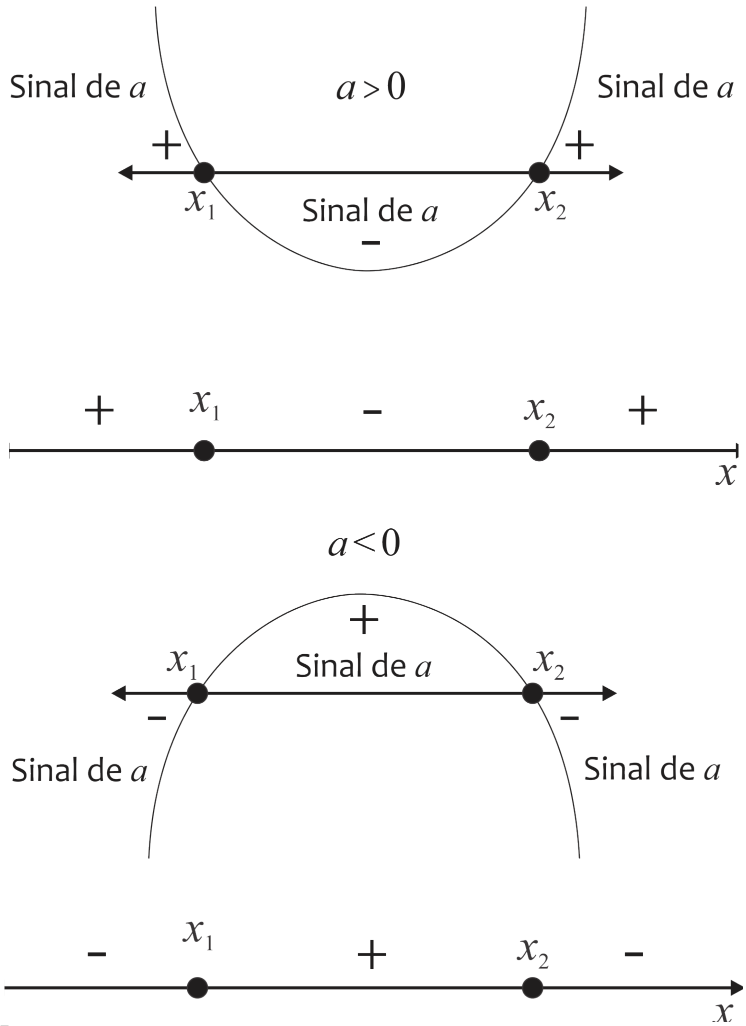
Agora iremos estudar o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, queremos encontrar os valores de x para os quais tenhamos $f(x) = 0, f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Para tanto, faremos uso da forma fatorada da função quadrática quando $\Delta \geq 0$ e de sua forma canônica quando $\Delta < 0$.

Caso 1: $\Delta > 0$. Como $\Delta > 0$, temos que a função quadrática apresenta duas raízes x_1 e x_2 reais e diferentes, ou seja, $x_1 \neq x_2$. Podemos supor que $x_1 < x_2$. Logo sua forma fatorada será

$$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \frac{y}{a} = (x - x_1)(x - x_2).$$

Observemos agora que,caso tenhamos $x < x_1$, então necessariamente temos $x < x_2$. Portanto $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, ou seja, $\dfrac{y}{a} > 0$. Logo y e a possuem o mesmo sinal. Agora, caso tenhamos $x > x_2$, então necessariamente temos $x > x_1$. Portanto $(x-x_1)(x-x_2) > 0$, ou seja $\frac{y}{a} > 0$. Logo y e a possuem o mesmo sinal. Por fim, caso $x_1 < x < x_2$, segue que $x - x_1 > 0$ e e $x - x_2 < 0$. Logo, $(x-x_1)(x-x_2) > 0$, ou seja, $\frac{y}{a} < 0$. Assim y e a possuem sinal contrário.

Figura 59 – Estudo do sinal quando $\Delta > 0$



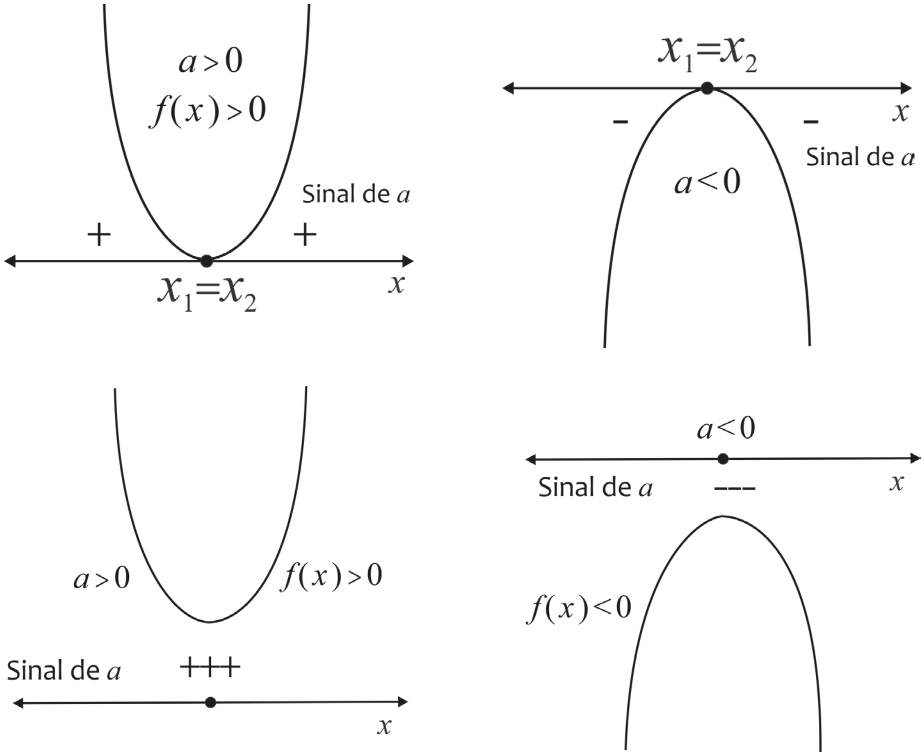
Fonte: DEaD | IFCE

Caso 2: $\Delta = 0$. Como $\Delta = 0$, temos que a função quadrática apresenta duas raízes x_1 e x_2 reais e iguais, ou seja, $x_1 = x_2$. Logo sua forma fatorada será

$$y = f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow y = a(x-x_1)^2 \Rightarrow \frac{y}{a} = (x-x_1)^2 .$$

Mas, como $(x-x_1)^2 > 0$ para $x \neq x_1$ temos que $\frac{y}{a} > 0$. Portanto y e a apresentam o mesmo sinal.

Figura 60 – Estudo do sinal quando $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$



Fonte: DEaD | IFCE

Caso 3: $\Delta < 0$. Da forma canônica, segue que $y = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$. Assim $\dfrac{y}{a} = \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Como $\Delta < 0$, segue que $-\Delta > 0$. Portanto $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ e como $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$ segue que $\dfrac{y}{a} > 0$. Logo y e a possuem o mesmo sinal.

Uma das aplicações do estudo do sinal é no estudo de inequações do segundo grau. Antes vejamos o que seria uma inequação do segundo grau.

Definição 3.4 Chamamos de inequação do segundo grau na variável x a toda inequação que pode ser expressa em uma das seguintes formas $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ ou $ax^2+bx+c\leq 0$ com a, b e c números reais e $a\neq 0$.

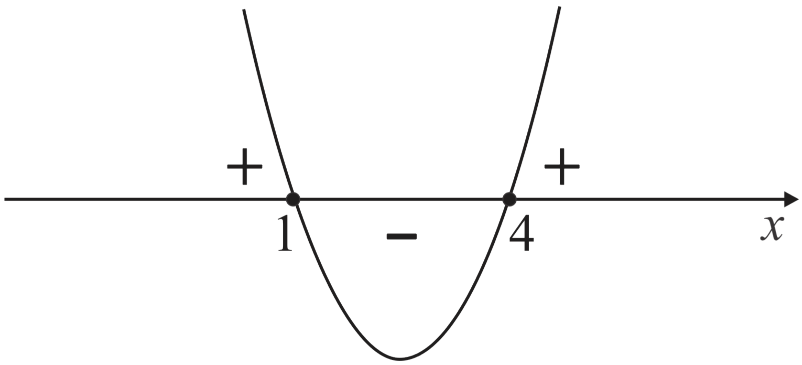
Vejamos agora algumas aplicações dos conceitos acima.

Exercício resolvido 3: Realize o estudo do sinal da função $y = x^2 - 5x + 4$.

Solução: um método prático para se realizar o estudo do sinal da função consiste em inicialmente desenharmos o eixo x. Depois disso, determinarmos as raízes da função e as marcamos no eixo x, levando em conta o sinal do termo a que irá determinar a concavidade. Por fim, analisamos os valores de x para os quais as imagens se encontram acima ou abaixo do eixo x.

As raízes de $y = x^2 - 5x + 4$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$. Note ainda que, como $a = 1 > 0$, temos que a parábola é côncava para cima. Note que temos $f(x) > 0$ quando $x < 1$ ou $x > 4$; $f(x) < 0$ quando $1 < x < 4$ e $f(x) = 0$ quando $x = 1$ ou $x = 4$.

Figura 61 – Estudo do sinal de $y = x^2 - 5x + 4$

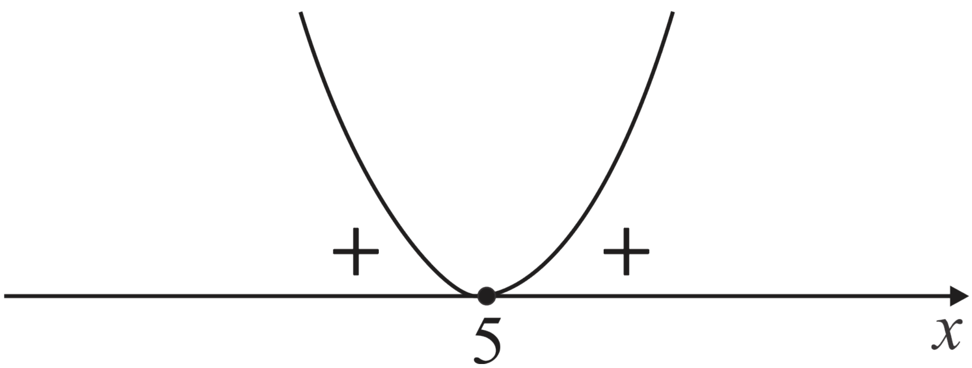


Fonte: DEaD | IFCE

Exercício resolvido 4: Dada a função $y = x^2 - 10x + 25$, realize o estudo da função.

Solução: As raízes de $y = x^2 - 10x + 25$ são $x_1 = x_2 = 5$. Note ainda que como $a = 1 > 0$ temos que a parábola é côncava para cima. Note que temos $f(x) > 0$ para todo $x \neq 5$ e $f(x) = 0$ para $x = 5$.

Figura 62 – Estudo do sinal de $y = x^2 - 10x + 25$

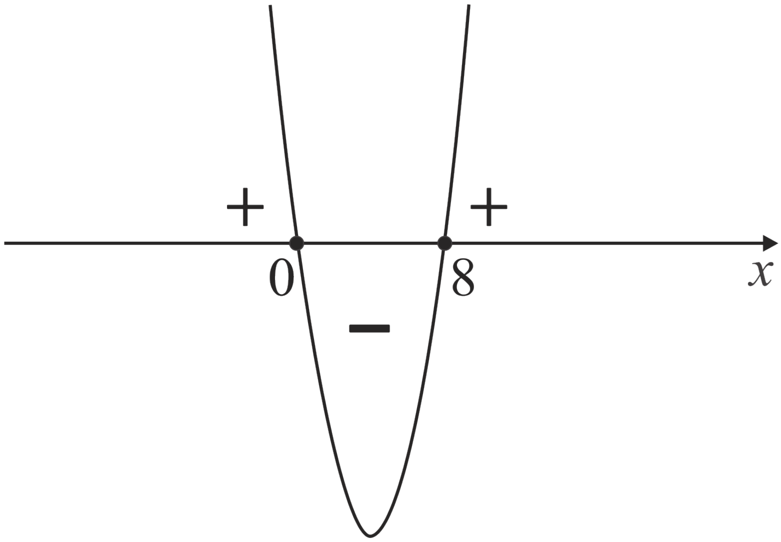


Fonte: DEaD | IFCE

Exercício resolvido 5: Resolva a inequação $y = x^2 - 8x \geq 0$

Solução: As raízes de $y = x^2 - 8x$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$. Note ainda que, como $a = 1 > 0$, temos que a parábola é côncava para cima. Logo o conjunto solução da equação será $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 8\}$.

Figura 63 – Estudo do sinal de $y = x^2 - 8x$



Fonte: DEaD | IFCE

Para encerrar o tópico falaremos agora sobre a caracterização das funções quadráticas. Antes disso, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 6: Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Se considerarmos a sequência dada por $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots)$. Teremos que $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16, \ldots, f(n) = n^2, f(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$ $f(n+2) = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4, \ldots$.

Observamos assim que a sequência inicial é uma progressão aritmética (P.A) de razão 1. Porém a sequência formada pelas imagens da função $(1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, n^2 + 2n + 1, n^2 + 4n + 4, \ldots)$ não se trata de uma P.A. Contudo, se agora considerarmos as diferenças entre os termos consecutivos da última sequência formada $(3 = 4 - 1, 5 = 9 - 4, 7 = 16 - 9, \ldots,$ $2n + 1 = n^2 + 2n + 1 - n^2, \quad 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1)$, ou seja, a sequência $(3, 5, 7, \ldots, 2n+1, \ldots, 2n+1, 2n+3, \ldots)$ é uma P.A de razão 2.

O resultado obtido no **Exemplo 6** é válido para qualquer que seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Em geral , temos o seguinte teorema de caracterização das funções quadráticas.

Teorema 3.1 (Caracterização das Funções Quadráticas) A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$

Para compreender melhor os conceitos abordados no **Teorema 3.1**, bem como a sua demonstração, sugerimos a leitura da seção 6.7, do capítulo 6, do livro *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1.*

Encerramos, assim, o estudo das funções quadráticas. Neste tópico, estudamos seu gráfico, forma canônica, forma fatorada, aplicações de máximos e mínimos, estudo do sinal e inequações envolvendo esta função. No próximo tópico, começaremos o estudo sobre as funções modulares.

Tópico 2

Função Modular

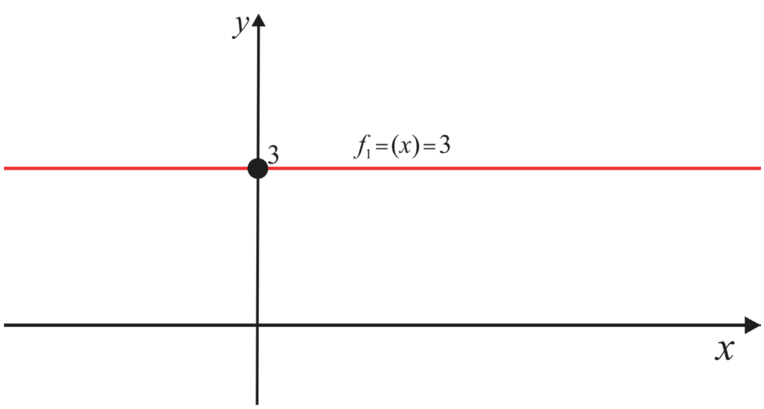
OBJETIVOS

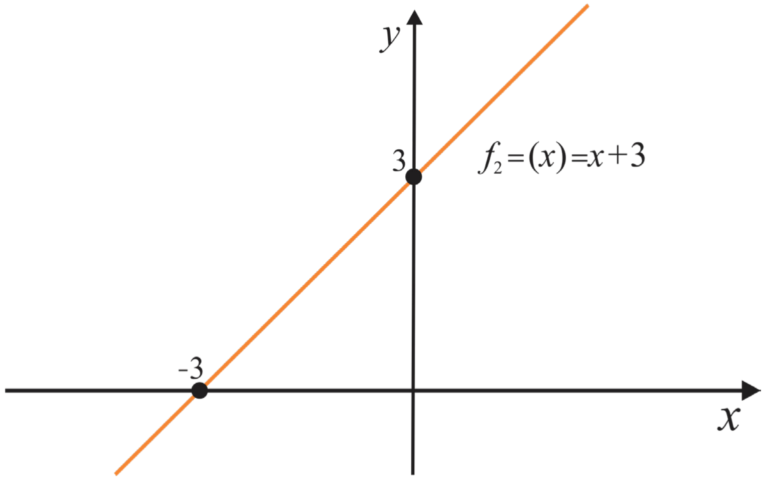
- Estudar o conceito de módulo de um número real e de função modular
- Conhecer o esboço do gráfico da função modular, bem como a resolução de equações e inequações modulares

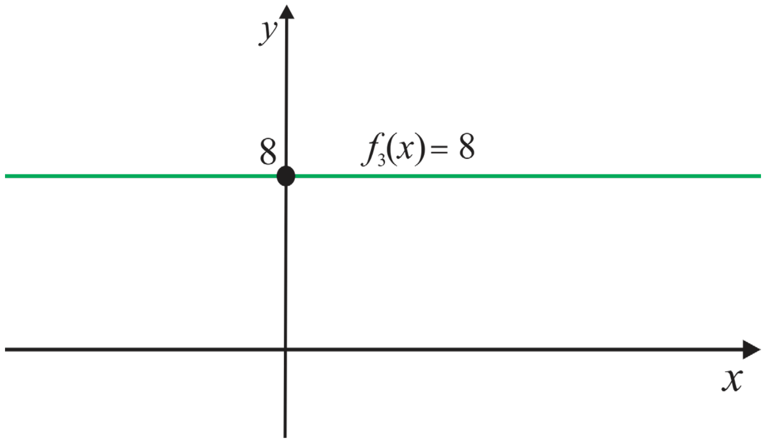
Nesse tópico dois, estudaremos a função modular e compreenderemos como se dá a representação dela graficamente. A função modular é importante no auxílio das demonstrações da disciplina de Cálculo I quando for tratado o assunto de limites envolvendo ξ $(epsilon)$ e δ $(delta)$. Aprenderemos ainda a resolver equações e inequações modulares.

Considere as seguintes funções definidas por $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f_1(x)=3$; $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; dada por $f_2(x)=x+3$ e $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e definida por $f_3(x)=8$. Na figura 64, temos os gráficos das três funções descritas acima.

Figura 64 – Gráfico de $f_1(x)=3$, $f_2(x)=x+3$, e $f_3(x)=8$







Fonte: DEaD | IFCE

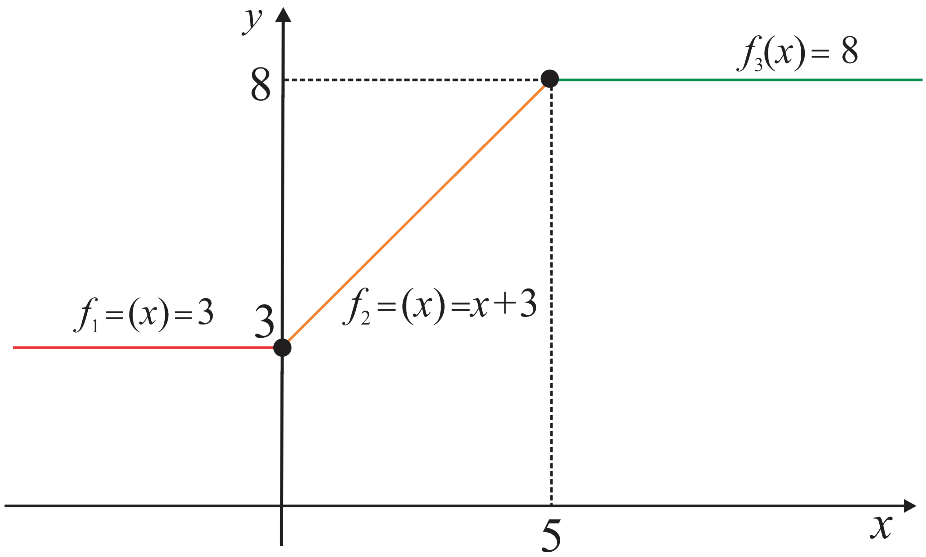
Agora, se considerarmos uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=f_1(x)=3$ para $x<0; f(x)=f_2(x)=x+3$ para $0\leq x<5$ e $f(x)=f_3(x)=8$ para $x\geq 5$. Dessa forma, teríamos

$$f(x)=\begin{cases}3, se\ x<0\\ x+3, se\ 0\leq x<5\\ 8, se\ x\geq 5\end{cases}.$$

Saiba mais...

Dizemos que uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é uma função poligonal quando existe $t_0<t_1<...<t_n$ tal que, para $x\leq t_0$, para $x\geq t_n$ e, em cada um dos intervalos $[t_{i-1},\ t_i]$, f coincide com uma função afim ou uma função constante. De maneira intuitiva, significa dizer que seu gráfico é uma linha poligonal.

Figura 65 – Gráfico de $f(x)$



Fonte: DEaD | IFCE

Sendo assim, o gráfico de *f* seria o gráfico de f_1 para valores de para valores de x menores do que zero, quando tivéssemos $x \in [0,5)$ o gráfico de f seria o gráfico de f_2 e o gráfico de f seria o gráfico de f_3 para valores de x maiores do que ou iguais a 5 (figura 65). Podemos então afirmar que a função *f* é definida por três sentenças. De maneira formal, temos que

Definição 3.5 Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada a um subdomínio $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original, ou seja, cada domínio D_i é um subconjunto de D, com $1 \leq i \leq n$.

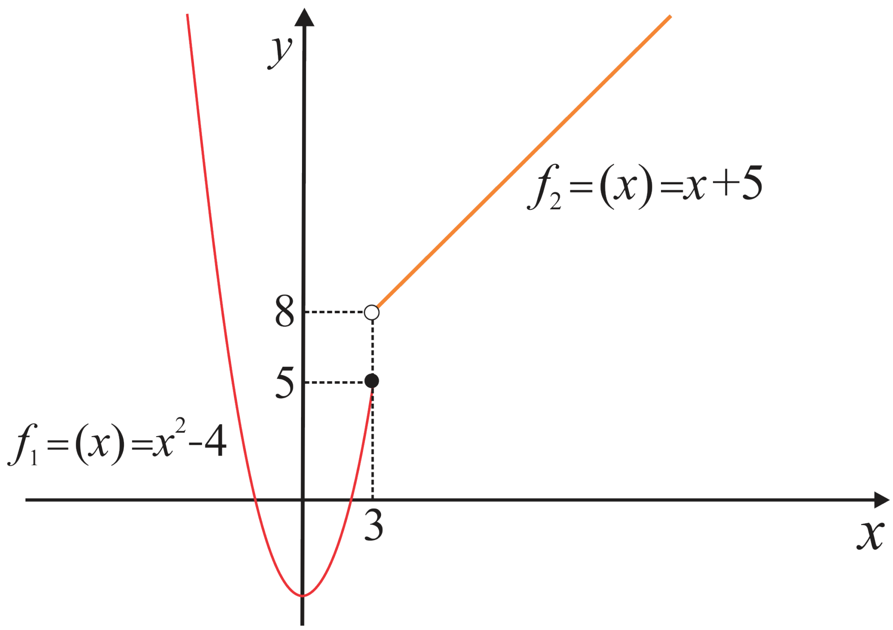
Da figura 65, podemos observar que a função *f* é definida por três sentenças $f_1(x)=3, f_2(x)=x+3$ e $f_3(x)=5$ cujos domínios são dados respectivamente por $D_1=(-\infty,0), D_2=[0,5)$ e $D_3=[5,\infty)$. Observe ainda que $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \mathbb{R} = D,$, em que D é o domínio de *f*. Note ainda que $f_1(0)=3, f_2(0)=3, f_2(5)=8, f_3(5)=8.$

Veja agora outro exemplo de aplicação deste conceito.

Exemplo 7: Seja a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-4, se\ x \leq 3 \\ x+5, se\ x>3 \end{cases}$.

Observe que a função f é definida por duas sentenças $f_1(x) = x^2 - 4$ e $f_2(x) = x + 5$ cujos domínios são dados respectivamente por $D_1 = (-\infty, 3]$ e $D_2 = (3, \infty)$. Observe ainda que $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R} = D$, em que D é o domínio de f. Note ainda que $f_1(3) = 5$ e $f_2(3) = 8$. Seu gráfico é dado por

Figura 66 – Gráfico de $f(x)$



Fonte: DEaD | IFCE

Relembremos ainda do conceito de módulo de um número real que foi visto na Aula 1.

Definição 3.6 Dado um número real x, definimos o módulo ou valor absoluto de x, que denotaremos por $|x|$ (lê-se valor absoluto ou módulo de x), como sendo

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}.$$

Da definição acima, concluímos que, se um número real é não negativo, então o módulo deste número é ele próprio. Já se o número real for negativo, então seu módulo é oposto deste número, ou seja, um número positivo.

Exemplo 8: Considere o número 5. Como $5 \geq 0$, temos que $|5| = 5$. Já se considerarmos o número -7, temos que $-7 \leq 0$ e assim $|-7| = -(-7) = 7$. Note ainda que, se tivéssemos o número $\sqrt{3}-2$ e como é um número real negativo, logo $\left|\sqrt{3}-2\right| = -\left(\sqrt{3}-2\right) = -\sqrt{3}+2$.

Segue ainda da definição algumas propriedades do módulo de número real que será apresentado na proposição a seguir:

Proposição 3.5 (Propriedades do módulo de um número real)
Sejam x, y e a números reais quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

a) $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

c) $|x.y| = |x|.|y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

d) $|x|^2 = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

e) $x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

f) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a \geq 0$;

g) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

h) $|x+y| \leq |x| + |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

i) $|x-y| \geq |x| - |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

j) $|x| \leq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

k) $|x| \geq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$.

Demonstração: Faremos a demonstração das propriedades **h)** e **j)**. As demais serão deixadas como exercício para você.

Propriedade h) Temos que

$$|x+y|^2 \overset{d)}{=} (x+y)^2 = x^2 + 2.x.y + y^2 \underset{e)}{\overset{d)}{\leq}} |x|^2 + 2.|x|.|y| + |y|^2 = \left(|x|+|y|\right)^2$$

Ou seja, $|x+y|^2 \leq \left(|x|+|y|\right)^2$. Portanto, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Propriedade j) Como $a > 0$ temos que

$$|x| \leq a \Leftrightarrow |x|^2 \leq a^2 \overset{d)}{\Longleftrightarrow} x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0.$$

O estudo do sinal da função $f(x) = x^2 - a^2$ nos revela que os valores menores do que ou iguais a zero ocorrem quando $-a \leq x \leq a$. Logo, segue o resultado. ■

Com base no que foi exposto acima, podemos então agora definir o conceito de função modular.

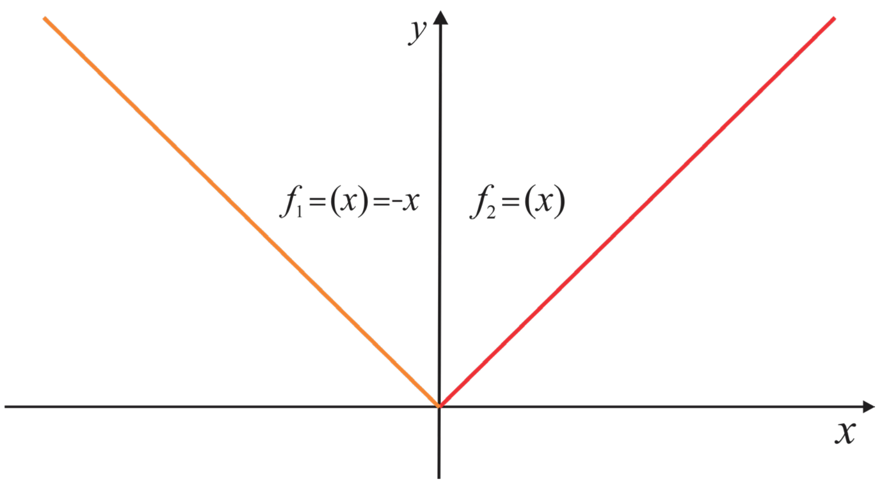
Definição 3.6 Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada de **função módulo** ou **função modular** se a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número $|x| \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = |x|$.

Da definição de módulo, segue que a função modular ainda pode ser definida como sendo

$$f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Portanto a função módulo é uma função definida por duas sentenças. Considerando em (3.4) as funções $f_1(x) = -x$ para $x \in (-\infty, 0)$ e $f_2(x) = x$ para $x \in [0, -\infty)$, teremos que o gráfico de $f(x) = |x|$ é dado por

Figura 67 – Gráfico de $f(x) = |x|$



Fonte: DEaD | IFCE

A partir do gráfico,podemos observar que seu domínio é o conjunto dos números reais, ou seja, $D = \mathbb{R}$; e seu conjunto imagem é o conjunto dos números reais não negativos, ou seja, $\mathrm{Im} = \mathbb{R}_+$.

Iremos agora dar alguns exemplos de como construir o gráfico de algumas funções modulares. Basicamente o método consistirá em transformar a função modular em uma função definida por duas sentenças.

Exemplo 9: Construa o gráfico da função $f(x)=|x-1|$.

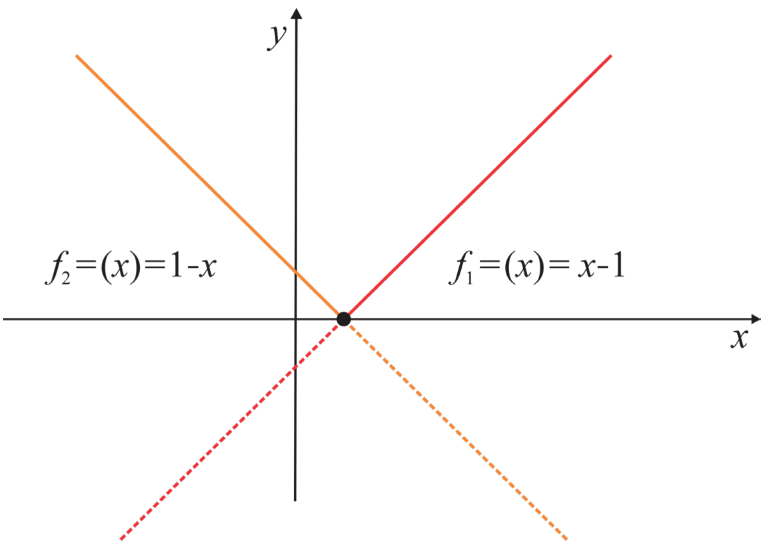
Solução: Da definição da função modular, temos que

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1, se\ x-1\geq 0 \\ -x+1, se\ x-1<0 \end{cases} \Rightarrow |x-1|=\begin{cases} x-1, se\ x\geq 1 \\ -x+1, se\ x<1 \end{cases}$$

Considerando $f_1(x)=x-1$, temos que, como se trata de uma função afim, seu gráfico é uma reta. Mas, como o domínio de $f_1(x)$ está definido apenas para $x\in[1,\infty)$, consideramos apenas a parte do gráfico definida para este intervalo (figura 68 em vermelho).

Agora sendo $f_2(x)=-x+1$, temos que também se trata de uma função afim e seu gráfico é uma reta. Mas, como o domínio de $f_2(x)$ está definido apenas para $x\in(-\infty,1)$, consideramos apenas a parte do gráfico definida para este intervalo (figura 68 em laranja). Note ainda que $f_1(1)=0=f_2(1)$. Logo

Figura 68 – Gráfico de $f(x)=|x-1|$



Fonte: DEaD | IFCE

Outra forma de fazer o gráfico de $f(x)=|x-1|$ é notarmos que ele trata de uma translação do gráfico $g(x)=|x|$ de uma unidade para a direita em relação ao eixo x. Em geral,

Saiba mais...

Para aprender mais sobre os diferentes tipos de translações do gráfico da função modular, acesse o link http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap02_Calc1.html#II-2_FuncaoModular se $f(x)=|x-a|$, temos que será uma translação do gráfico $g(x)=|x|$ em a unidades para a direita se $a>0$ ou em a unidade para a esquerda se $a<0$ com relação ao eixo x.

Exercício resolvido 6: Construa o gráfico da função $f(x)=|x^2-6x+5|$.

Solução: Da definição de função modular, temos que

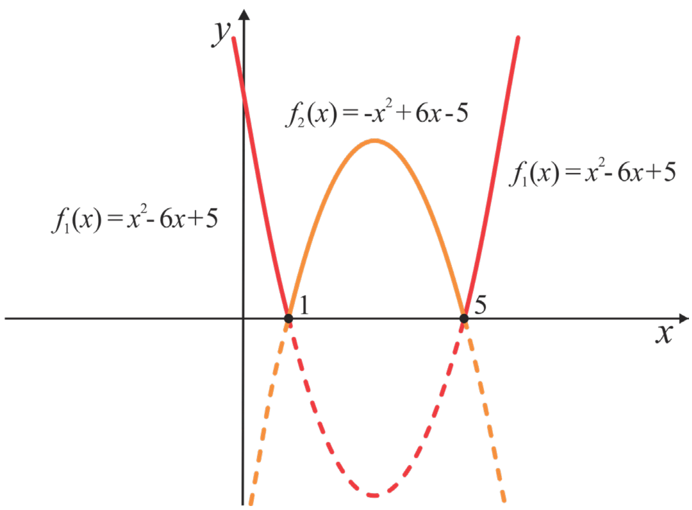
$$|x^2-6x+5|=\begin{cases} x^2-6x+5 \text{ se } x^2-6x+5\geq 0 \\ -(x^2-6x+5) \text{ se } x^2-6x+5<0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações do segundo grau $x^2-6x+5\geq 0$ e $x^2-6x+5<0$ obtemos a sentença abaixo

$$|x^2-6x+5|=\begin{cases} x^2-6x+5 \text{ se } x\leq 1 \text{ ou } x\geq 5 \\ -x^2+6x-5 \text{ se } 1<x<5 \end{cases}.$$

Considerando $f_1(x)=x^2-6x+5$, temos que se trata de uma função quadrática e seu gráfico é uma parábola cujas raízes são 1 e 5 e que apresenta concavidade para cima. Mas como o domínio de f_1 está definido apenas para $x\in(-\infty,1]\cup[5,\infty)$, consideramos apenas a parte do gráfico definida para este intervalo (figura 61 em vermelho). Agora sendo $f_2(x)=-x^2+6x-5$, temos que também se trata de uma função quadrática e seu gráfico é uma parábola cujas raízes são 1 e 5 e que apresenta concavidade para baixo. Mas, como o domínio de f_2 está definido apenas para $x\in(1,5)$, consideramos apenas a parte do gráfico definida para este intervalo (figura 69 em laranja). Note ainda que $f_1(1)=f_1(5)=0=f_2(1)=f_2(5)$. Logo

Figura 69 – Gráfico de $f(\mathrm{x})=|x^2-6x+5|$



Fonte: DEaD | IFCE

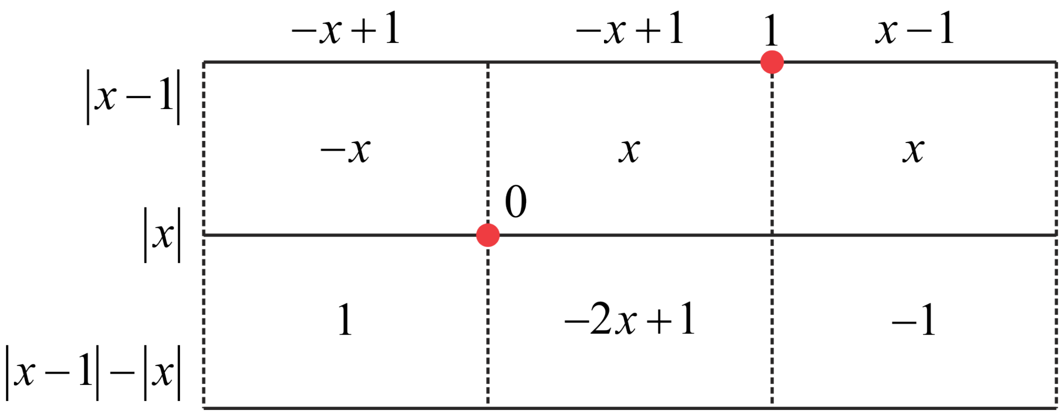
Exercício resolvido 7: Construa o gráfico da função $f(x) = |x-1| - |x|$.

Solução: Da definição de função modular, temos que

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, se\ x \geq 1 \\ -x+1, se\ x < 1 \end{cases} \text{ e } |x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}.$$

Como a função $f(x) = |x-1| - |x|$ é uma diferença de dois módulos, vamos analisar o que ocorre em cada intervalo especificado acima e faremos as interseções referentes aos domínios das funções consideradas. Veja a figura abaixo:

Figura 70 – Análise de $f(x) = |x-1| - |x|$



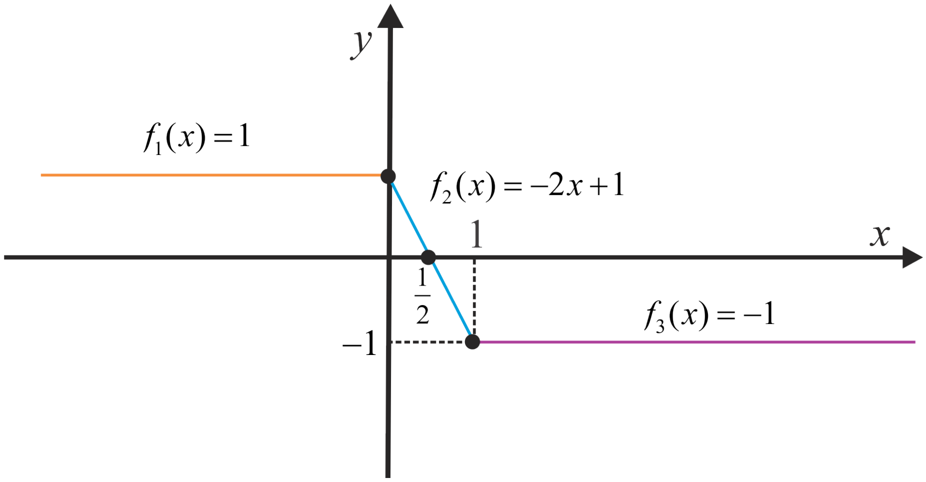
Fonte: DEaD | IFCE

Portanto, podemos definir $f(x) = |x-1| - |x|$ como sendo

$$f(x) = |x-1| - |x| = \begin{cases} 1 \text{ se } x \leq 0 \\ -2x+1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ -1 \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

cujo gráfico é representado a seguir.

Figura 71 – Gráfico de $f(x) = |x-1| - |x|$



Fonte: DEaD | IFCE

Para finalizar o tópico, falaremos sobre as equações e inequações modulares. De maneira geral, uma **equação modular** é uma equação que envolve funções modulares. Para resolvermos uma equação modular,usaremos basicamente as propriedades **a)**, **f)** e **g)**. Um tipo de equação modular bastante simples de ser resolvida são as da forma $|f(x)| = k$, onde $k \geq 0$ é um número real. Abaixo temos um exemplo de como proceder para resolvermos equações deste tipo.

Exercício resolvido 8: Resolva a equação modular $|x-7| = 15$.

Solução: Usaremos a seguinte propriedade da Proposição 3.5

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

Sendo assim, teremos:

$$|x-7| = 15 \Leftrightarrow x-7 = 15 \text{ ou } x-7 = -15$$
$$|x-7| = 15 \Leftrightarrow x = 15+7 \text{ ou } x = -15+7$$
$$|x-7| = 15 \Leftrightarrow x = 22 \text{ ou } x = -8$$

Portanto, $S = \{-8, 22\}$ é o conjunto solução da equação $|x-7| = 15$.

Um outro tipo de equação modular são as da forma $|f(x)| = g(x)$. Nesse tipo de equação, devemos inicialmente checar a condução inicial de que $g(x) \geq 0$ e só depois usar a propriedade de módulo para resolução. Abaixo temos um exemplo de como resolver equações desta forma.

Exercício resolvido 9: Resolva a equação modular $|2x-3|=3-x$.

Solução: Observe inicialmente que da Propriedade **a)** da Proposição 3.5 devemos ter $3-x\geq 0$, ou seja, $x\leq 3$. Usaremos ainda a seguinte Propriedade da Proposição 3.5

$$|x|=y \Leftrightarrow x=y \text{ ou } x=-y$$

Sendo assim, teremos

$$\begin{aligned} |2x-3|=3-x &\Leftrightarrow 2x-3=3-x \text{ ou } 2x-3=-(3-x) \\ &\Leftrightarrow 2x-3=3-x \text{ ou } 2x-3=-3+x \\ &\Leftrightarrow 3x=6 \text{ ou } x=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=0 \end{aligned}$$

Como da condição inicial, devemos ter $x\leq 3$, segue que $S=\{0,2\}$ é o conjunto solução da equação $|2x-3|=3-x$.

Exercício resolvido 10: Resolva a equação modular $|x-4|=|3x-20|$.

Solução: Usaremos a seguinte Propriedade: $|x|=y \Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$.

Sendo assim, teremos:

$$\begin{aligned} |x-4|=|3x-20| &\Leftrightarrow x-4=3x-20 \text{ ou } x-4=-(3x-20) \\ &\Leftrightarrow x-4=3x-20 \text{ ou } x-4=-3x+20 \\ &\Leftrightarrow 2x=16 \text{ ou } 4x=24 \\ &\Leftrightarrow x=8 \text{ ou } x=6 \end{aligned}$$

Portanto, $S=\{6,8\}$ é o conjunto solução da equação $|x-4|=|3x-20|$.

Exercício resolvido 11: Quais os valores de x que satisfazem a equação modular $|2x-6|+|3x+4|=11$.

Solução: Da definição de função modular, temos que

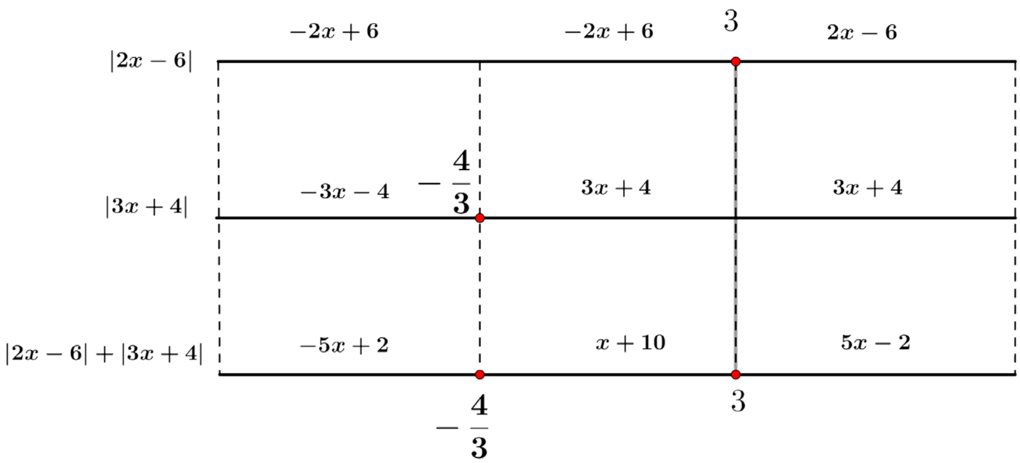
$$|2x-6|=\begin{cases} 2x-6, se\ 2x-6\geq 0 \\ -(2x-6), se\ 2x-6<0 \end{cases} \text{ e } |3x+4|=\begin{cases} 3x+4, \text{ se } 3x+4\geq 0 \\ -(3x+4), se\ 3x+4<0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$|2x-6| = \begin{cases} 2x-6, se\ x \geq 3 \\ -2x+6, se\ x < 3 \end{cases} \text{ e } |3x+4| = \begin{cases} 3x+4, se\ x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -3x-4, se\ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Dessa forma, teremos

Figura 72 – Análise de $f(x) = |2x-6| + |3x+4| = 11$



Fonte: DEaD | IFCE

Sendo assim, teremos que

- Para $x \leq -\dfrac{4}{3} : |2x-6| + |3x+4| = 11 \Rightarrow -5x+2 = 11 \Rightarrow x = -\dfrac{9}{5}$.

  Observe que, como $-\dfrac{9}{5} \in \left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$, logo é solução da equação.

- Para $-\dfrac{4}{3} < x < 3 : |2x-6| + |3x+4| = 11 \Rightarrow x+10 \Rightarrow x = 1$.

  Observe que como $1 \in \left(-\dfrac{4}{3}, 3\right)$, logo é solução da equação.

- Para $x \geq 3 : |2x-6| + |3x+4| = 11 \Rightarrow 5x-2 = 11 \Rightarrow x = \dfrac{13}{5}$.

Observe que como $\dfrac{13}{5} \notin [3, \infty)$, logo é solução da equação.

Portanto, $S = \left\{-\dfrac{9}{5}, 1\right\}$ é solução da equação $|2x-6| + |3x+4| = 11$.

Trataremos agora das inequações modulares. De maneira geral, uma **inequação modular** é uma inequação que envolve funções modulares. Para resolvermos uma inequação modular, usaremos basicamente as propriedades **a)**, **j)** e **k)**. Um tipo de inequação modular bastante simples de ser resolvida são as da forma $|f(x)| > k$ ou $|f(x)| < k$, em que k é um número real positivo. Exibiremos alguns exemplos de como resolver inequações desses tipos.

Exercício resolvido 12: Resolver a inequação $|x-9| < 4$.

Solução: Usaremos a seguinte Propriedade da Proposição 3.5

$$|x| \leq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Dessa forma, teremos

$|x-9| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-9 < 4 \Leftrightarrow -4+9 < x-9+9 < 4+9 \Leftrightarrow 5 < x < 13$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R}; 5 < x < 13\}$ é o conjunto solução da inequação $|x-9| < 4$.

Exercício resolvido 13: Resolver a inequação $|x^2 - x - 4| > 2$.

Solução: Usaremos a seguinte Propriedade da Proposição 3.5

$$|x| \geq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$

Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} |x^2 - x - 4| > 2 &\Leftrightarrow x^2 - x - 4 < -2 \text{ ou } x^2 - x - 4 > 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \text{ ou } x^2 - x - 6 > 0 \end{aligned}$$

Resolvendo agora separadamente cada inequação, temos que $x^2 - x - 2 < 0$ para $-1 < x < 2$ e $x^2 - x - 6 > 0$ para $x < -2$ ou $x > 3$. Fazendo agora a união das soluções encontradas, teremos que $S = \{x \in \mathbb{R}; x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$ é solução da inequação $|x^2 - x - 4| > 2$.

Exercício resolvido 14: Quais os valores de x que satisfazem a inequação modular $|2x-6|+|3x+4|>11$

Solução: Do Exercício resolvido 11, temos que

$$|2x-6|+|3x+4|=\begin{cases} -5x+2, se\ x\leq -\dfrac{4}{3} \\ x+10, se\ -\dfrac{4}{3}<x<3 \\ 5x-2, se\ x\geq 3 \end{cases}.$$

Sendo assim teremos que

- Para $x\leq -\frac{4}{3}:|2x-6|+|3x+4|>11\Rightarrow -5x+2>11\Rightarrow x<-\frac{9}{5}$.

  Como devemos ter $x\leq -\frac{4}{3}$ e $x<-\frac{9}{5}$, logo, fazendo a interseção, obtemos $x<-\frac{9}{5}$.

- Para $-\frac{4}{3}<x<3:|2x-6|+|3x+4|>11\Rightarrow x+10>11\Rightarrow x>1$.

  Como devemos ter $-\frac{4}{3}<x<3$ e $x>1$, logo, fazendo a interseção, obtemos $1<x<3$.

- Para $x\geq 3:|2x-6|+|3x+4|>11\Rightarrow 5x-2>11\Rightarrow x>\frac{13}{5}$.

  Como devemos ter $x\geq 3$ e $x>\frac{13}{5}$ logo, fazendo a interseção, obtemos $x\geq 3$.

Portanto, a solução deve ser a união dos três intervalos obtido acima, logo

$$S=\left(-\infty,-\frac{9}{5}\right)\cup(1,3)\cup[3,\infty)=\left(-\infty,-\frac{9}{5}\right)\cup(1,\infty)$$

Assim, $S=\left\{x\in\mathbb{R}; x<-\frac{9}{5} \text{ ou } x>1\right\}$ é solução de $|2x-6|+|3x+4|>11$.

Finalizamos assim o tópico 2 e a aula 3. Estudamos nesta aula sobre funções quadráticas e funções modulares. Aprendemos a resolver equações e inequações quadráticas e modulares. Na próxima aula, trataremos sobre alguns tipos especiais de funções. Espero vocês lá. Até mais!

1. Dentre todos os números reais cuja soma é 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

2. Dentre todos os números x e z tais que 2x + z = 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

3. Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

4. Em um triângulo isósceles de base 6cm e altura 4 cm está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

5. Estude o sinal das funções a seguir:

   a) $y = -2x^2$
   b) $y = x^2 + 2x + 1$
   c) $y = x^2 - 2x$
   d) $y = x^2 - 10x + 9$

6. Resolva as inequações a seguir:

a) $-x^2 + 5 > 0$

b) $x^2 + 5x \geq 0$

c) $-x^2 + 2x - 3 < 0$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e) $\left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 - 9\right) \geq 0$

f) $\dfrac{x^2 \cdot \left(x^2 - 4\right)}{x^2 - 1} \geq 0$

Dica: os itens **e** e **f** dos exercícios de aprofundamento podem ser resolvidos estudando os sinais das funções e, em seguida, fazendo uma tabela em que se multiplicam e se dividem os sinais obedecendo às regras de sinais.

7. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|x^2 - 3x - 1| = 3$

b) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

d) $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$

e) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

8. Resolva as inequações a seguir:

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$

b) $|x - 1| - 3x + 7 \leq 0$

c) $|x - 1| + 4 - 3x > 0$

9. Esboce o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = |x + 3|$

b) $f(x) = |3x + 1|$

c) $f(x) = |x^2 - 4x|$

d) $f(x) = |2x - 2| + |x + 3|$

e) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

Gabarito

1. 4 e 4

2. x = 2 e z = 4

3. 3 e 3

4. retângulos de lados 2 e 3.

5. a) {não existe x real para $f(x) > 0; f(x) = 0$ para $x = 0$; $f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 0\}$

   b) {não existe x real para $f(x) < 0; f(x) = 0$ para $x = -1$; e $f(x) > 0$ para $x < -1$ ou $x > -1\}$

   c) $\{f(x) > 0$ para $x < 0$ ou $x > 2; f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 2$ e $f(x) < 0$ para $0 < x < 2\}$

   d) $\{f(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 9; f(x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 9$ e $f(x) < 0$ para $a < x < 9\}$

6.

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R};\ x \leq -5 \text{ ou } x \geq 0\}$

c) não existe x real que satisfaça a desigualdade

d) $\{x = 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R};\ x < -3$ ou $-1 < x < 1$ ou $x > 3\}$

f) $\{x \in \mathbb{R};\ x \leq -2$ ou $-1 < x < 1$ ou $x \geq 2\}$

7.

a) $\{-1,\ 1,\ 2,\ 4\}$

b) $\{,\ 1,\ 3\}$

c) $\{-1,\ 1,\ 4,\ -6\}$

d) $\left\{-\frac{1}{3},\ -\frac{3}{2},\ 1\right\}$

e) $\{-13,\ -6\}$

8.

a) não existe x real

b) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}; x < 5\}$

Aula 4

Função Composta e Função Inversa

Caro(a) estudante,

Nesta aula, abordaremos a composição de funções e funções inversas. Começaremos, a partir do tópico 1, o assunto de composição de função. Para que possamos realizar a operação de composição, precisaremos de duas ou mais funções. O resultado obtido originará uma nova função que apresentará características das duas funções originais. Desse modo, a composição de função nos permitirá conhecer novas funções. Ainda veremos algumas propriedades importantes da composição de função. Na disciplina de Cálculo 1, você irá precisar das funções compostas quando for estudar os assuntos de derivada e integral.

Já no tópico 2, conheceremos novos tipos de funções. Entenderemos o que significa afirmar que uma função é sobrejetora, injetora ou bijetora. Veremos ainda que as funções bijetoras possuem uma propriedade interessante: elas nos permitem determinar uma nova função – as funções inversas. Analisaremos ainda o gráfico de uma função e da sua inversa e veremos que ele apresenta uma característica importante.

Objetivos

- Estudar a função composta e a função inversa
- Entender a lei de formação das funções compostas e inversas
- Conhecer as propriedades das funções compostas e inversas

Tópico 1

Função Composta

OBJETIVO

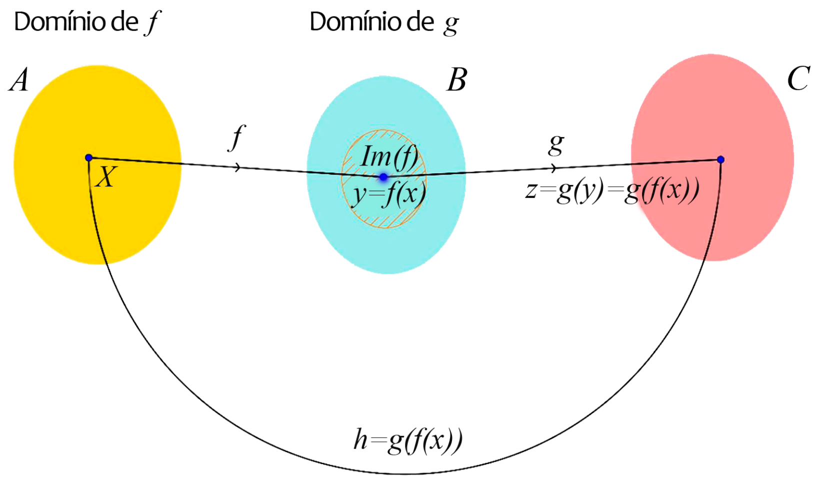
- Compreender o conceito e as propriedades de função composta

Neste tópico, estudaremos uma função especial: a função composta. Uma função composta é obtida a partir de duas ou mais funções respeitando uma determinada condição. Veremos neste tópico como se dá o processo de construção dessa função e estudaremos ainda algumas de suas propriedades.

Suponhamos que tivéssemos duas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Note que, dado um elemento $x \in A$, usando a função *f*, obteremos um elemento $y = f(x) \in B$ e, usando a função *g*, obteremos um elemento $z = g(x) \in C$. Dessa forma, podemos obter assim uma função $h: A \to C$, que associa a cada $x \in A$ um elemento $z = h(x) \in C$. Note ainda que a única condição que foi imposta para a existência da função h é que $\mathrm{Im}(f) \subset D(g)$ ou ainda que o contradomínio da função f fosse igual ao domínio da função *g*. A figura 73 ilustra o que acabamos de comentar.

> **Saiba mais...**
>
> Além da composição de função, existem outras operações que podemos efetuar com as funções. Para saber mais acesse o link http://www.dca.fee.unicamp.br/projects/mtk/fisch/colab_site/func_oper.ht ml

Figura 73 – Relação entre as funções f, g e h



Fonte: DEaD | IFCE

A figura 73 estabelece uma relação entre as funções f, g e h. A nova função h foi obtida da combinação das funções f e g. A este processo damos o nome de composição de função. De maneira formal, temos a seguinte definição:

Definição 4.1 Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Definimos a **composta** de f e g e denotamos por $g \circ f$, (Lê-se g "bola" f) a função dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. A função $h : A \to C$ definida por $h(x) = g(f(x))$ é denominada **função composta de f em g**, aplicada em x.

Note que, na Definição 4.1, faz-se necessário que a imagem de f esteja contida no domínio de g. Sendo assim, em termos gerais, para acharmos o valor de $g(f(x))$, inicialmente consideramos um $x \in A$ e, a partir dele, determinamos o valor de $f(x)$. Depois disso, com a função g determinamos o valor de $g(f(x))$. O exercício resolvido abaixo ilustra esse processo.

Guarde bem...

Não confunda as notações: $g \circ f$ e $g \circ f$. Na notação $g \circ f$ significa que a função g é aplicada primeiro e, em seguida, aplicamos a função f. Já a notação $g \circ f$ significa que a função f é aplicada primeiro e, em seguida, aplicamos a função g.

Exercício Resolvido 1: Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$ definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) Obtenha as leis de $g(f(x))$ e $f(g(x))$.

b) Calcule $g(f(-2))$ e $f(g(-2))$.

c) Determine os valores do domínio da função $f(g(x))$ que produzem imagem 10.

Solução:

a) Vamos determinar inicialmente a lei de formação de $g(f(x))$. Temos que $g(x)=1-2x$. Assim $g(f(x))$ consiste simplesmente em substituir onde tem x por $f(x)$ na lei de formação de $g(x)$. Logo

$$g(x)=1-2x \Rightarrow g(f(x))=1-2.f(x)=1-2(x^2-x-2)=1-2x^2+2x+4 \Rightarrow$$
$$g(f(x))=-2x^2+2x+5$$

Assim a lei da função composta de *g* com *f* é $g(f(x))=-2x^2+2x+5$.

No cálculo da lei da função $f(g(x))$, faremos uso do seguinte produto notável $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Para determinar a lei de formação de $f(g(x))$, temos que $f(x)=x^2-x-2$, assim $f(g(x))$ consiste simplesmente em substituir onde tem x por *g*(*x*) na lei de formação de *f*(*x*). Logo

$$f(x)=x^2-x-2 \Rightarrow f(g(x))=(g(x))^2-g(x)-2=(1-2x)^2-(1-2x)-2=$$
$$1-4x+4x^2-1+2x-2=4x^2-2x-2$$

Dessa forma, a lei da função $f(g(x))=4x^2-2x-2$

b) Para calcularmos o valor de $g(f(-2))$ e $f(g(-2))$, temos duas maneiras: A primeira seria substituindo cada um dos valores pedidos na funções correspondentes. Abaixo temos o processo detalhado:

A composição de funções não é comutativa pois em geral $g \circ f \neq f \circ g$.

- $g(f(-2))$ Calculamos o valor de $f(-2)$ na lei de *f*. Então teremos $f(-2)=(-2)^2-(-2)-2=4+2-2=4$. Logo $f(-2)=4$. Agora substituindo $f(-2)$ por 4, teremos $g(f(-2))=g(4)$. Vamos calcular $g(6)$ na lei da função $g(x)$, então teremos $g(4)=1-2.4=1-8=-7$. Logo, temos que $g(f(-2))=g(4)=-7$.

- $f(g(-2))$ Calculamos o valor de $g(-2)$ na lei de *g*. Então teremos $g(-2)=1-2.(-2)=1+4=5$. Logo $g(-2)=5$. Agora, substituindo $g(-2)$ por 5, teremos $f(g(-2))=f(5)$. Vamos calcular $f(5)$ na lei da função *f*(*x*), então teremos $f(5)=5^2-5-2=25-7=18$. Logo, temos que $f(g(-2))=f(5)=18$.

Outra maneira é determinarmos a lei de formação das funções compostas e depois calculamos as imagens dos valores pedidos nas respectivas leis. Como no item a) já foram determinadas tais leis de formação, vamos agora determinar os valores de $g(f(-2))$ e $f(g(-2))$ diretamente na lei de $g(f(x))$ e $f(g(x))$, respectivamente. Temos

$$g(f(x)) = -2x^2 + 2x + 5 \Rightarrow g(f(-2)) = -2.(-2)^2 + 2.(-2) + 5 = -2.4 - 4 + 5 =$$
$$g(f(x)) = -8 - 4 + 5 = -7$$

$$f(g(x)) = 4x^2 - 2x - 2 \Rightarrow f(g(-2)) = 4.(-2)^2 - 2.(-2) - 2 = 4.4 + 4 - 2 =$$
$$16 + 4 - 2 = 20 - 2 = 18$$

Portanto $g(f(-2)) = -7$ e $f(g(-2)) = 18$.

c) Queremos determinar os valores de x para o qual tenhamos $g(f(x)) = 10$. Dessa forma, teremos

$$f(g(x)) = 10 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 10 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 12 = 0$$

Então, calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, em que $a = 4, b = -2$ e $c = -12$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.(4).(-12) = 4 + 192 = 196$$

Dessa forma, $x = -\dfrac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{196}}{2.4} = \dfrac{2 \pm 14}{8}$. Teremos as raízes

$$x_1 = \frac{2+14}{8} = \frac{16}{8} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{2-14}{8} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

Os valores de x no domínio de $f(g(x))$ que satisfazem a igualdade $f(g(x)) = 10$ são $x = 2$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$.

Do exercício resolvido 1, podemos concluir que a composta $g \circ f$ só está definida quando o contradomínio da f for igual ao domínio da g. Já a composta $f \circ g$ só está definida quando o contradomínio de g for igual ao domínio de f. Então, quando as funções f e g são definidas de A em A, podemos calcular as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ e também as compostas $f \circ f$ e $g \circ g$.

No exercício resolvido 1, percebemos que as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ estavam definidas, mas nem sempre isso ocorre. O exemplo a seguir retrata esse fato.

Exemplo 1: sejam $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. Note que podemos definir a função $g \circ f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, uma vez que a imagem da *f*, que no caso seria $\mathbb{R}^*$, está contida no domínio de *g* que, no caso, seria $\mathbb{R}$.

Sendo assim,podemos obter a sua lei de formação:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = (f(x))^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = (f(x))^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Por outro lado, não faz sentido falar na função $f \circ g$, haja vista que a imagem de *g*, que seria $\mathbb{R}_+$, não está contida no domínio de *f*, que seria $\mathbb{R}^*$. ■

Algumas vezes, temos apenas a lei de definição de uma das funções (*f* ou *g*) e a composição da função ($f \circ g$ ou $g \circ f$) e queremos determinar a outra função (*f* ou *g*). Os exemplos a seguir mostram como procedermos neste caso.

Exemplo 2: sejam as funções reais definidas por $f(x) = 3x - 5$ e $f(g(x)) = x^2 - 3$. Como podemos proceder para determinar a lei de formação da lei da função *g*? A resposta é simples. Por definição, sabemos que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3.g(x) - 5$. Mas, por outro lado, temos que $f(g(x)) = x^2 - 3$. Assim:

$$3.g(x) - 5 = x^2 - 3 \Rightarrow 3g(x) = x^2 - 3 + 5 \Rightarrow 3g(x) = x^2 + 2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

Exemplo 3: sejam as funções reais definidas por $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Estamos agora interessados em determinar a lei de formação da função *f*. Para tanto, note inicialmente que, sendo $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$, teremos que $f(\mathrm{g}(x)) = 2x^2 - 4x + 1$. Temos ainda que $g(x) = 2x - 3$ e, dessa forma, obtemos que $x = \dfrac{g(x) + 3}{2}$.

Sendo assim

$$f(g(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2\left(\frac{g(x) + 3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{g(x) + 3}{2}\right) + 1$$

$$= 2\left(\frac{(g(x))^2 + 6(g(x)) + 9}{4}\right) - 2(g(x) + 3) + 1$$

$$= \frac{(g(x))^2 + 6g(x) + 9}{2} - 2(g(x) + 3) + 1$$

$$= \frac{(g(x))^2 + 6g(x) + 9 - 4g(x) - 12 + 2}{2} = \frac{(g(x))^2 + 2g(x) - 1}{2}$$

Portanto, temos que $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2}$

Apesar de termos notado que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$, ou seja, que a operação de composição de função não é comutativa, a Proposição a seguir nos diz que a operação de composição de função é associativa. Logo, a Proposição 4.1 afirma então que, se tivéssemos as funções *f*, *g* e *h* e pudéssemos realizar a operação de composição entre elas nessa ordem, ou seja, quiséssemos calcular $h \circ g \circ f$, não precisaríamos nos preocupar com a ordem de qual composição realizar primeiro.

Proposição 4.1 Dadas as funções $f : A \to B, g : B \to C$ e $h : C \to D$ temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Demonstração: Será deixada como exercício para o leitor. ■

Outra propriedade interessante da composição de função é conhecida como a existência do elemento neutro à esquerda e à direita, que pode ser enunciado na Proposição a seguir.

Proposição 4.2 Seja $f : A \to B$ uma função qualquer. Então, existem funções $I_A : A \to A$ e $I_B : \mathrm{B} \to B$, ambas definidas por $I_A(x) = x$ e $I_B(y) = y$, de modo que

$$f \circ I_A = f \text{ e } I_B \circ f = f$$

Demonstração: Note que inicialmente faz sentido definir as funções compostas $f \circ I_A$ e $I_B \circ f$ (verifique esse fato). Além disso, dado $x \in A$ temos que

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$
$$(I_B \circ \mathrm{f})(x) = I_B(f(x)) = I_B(y) = y = f(x)$$

Portanto, $f \circ I_A = f$ e $I_B \circ f = f$. ■

Finalizamos assim o tópico 1. Nesse tópico, falamos sobre a operação de composição de funções e exibimos algumas de suas propriedades. No próximo tópico, estudaremos a função inversa.

Tópico 2

Função Inversa

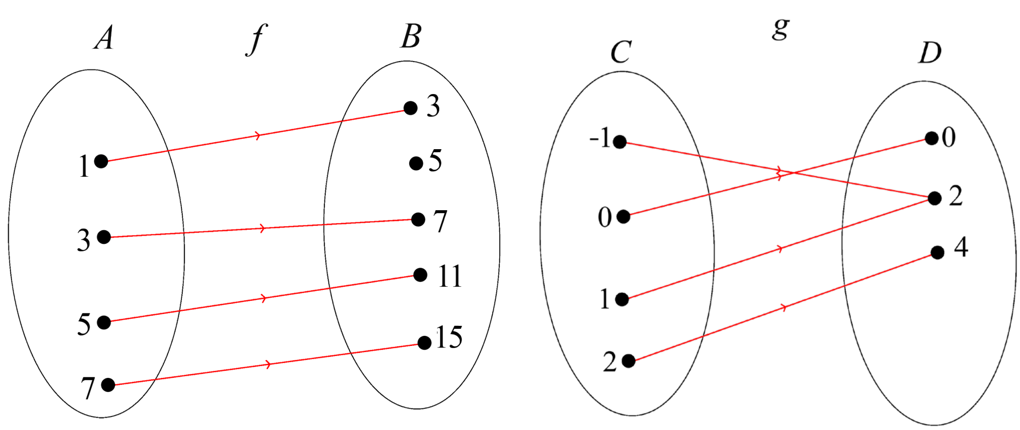
OBJETIVOS

- Compreender os conceitos das funções sobrejetora, injetora, bijetora e inversa
- Entender a lei de formação da função inversa dada a função bijetora correspondente

Neste segundo tópico, entenderemos inicialmente os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora. Aprenderemos a identificar tais funções a partir do diagrama de flechas e pela análise de seus gráficos. Exibiremos ainda a definição de função inversa, mostraremos o processo de obtençao da lei de formação e veremos a propriedade existente entre o gráfico de uma função bijetora e o de sua inversa.

Para iniciamos nossos estudos, consideremos as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ representadas pelos diagramas de flecha abaixo:

Figura 74 – Representação das funções *f* e *g* por meio do diagrama de flechas



Fonte: DEaD | IFCE

Ao analisarmos os diagramas das funções (figura 74), observamos que

- No diagrama de flechas da função *f*, notamos que, se considerarmos dois elementos diferentes quaisquer do domínio de *f* (por exemplo, os números 1 e 5 no conjunto *A*), observamos que suas imagens são diferentes (nesse caso, temos que $3 = f(1)$ é diferente de $11 = f(5)$ no conjunto *B*). De maneira geral, temos que dados $x_1, x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos que suas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ também são distintas, ou seja, elementos diferentes no domínio possuem imagens diferentes no contradomínio.

- Por outro lado, no diagrama de flechas da função *g*, notamos que essa propriedade não é válida, pois, se considerarmos os elementos –1 e 1 pertencentes ao domínio de *g*, temos que as suas imagens valem 2, ou seja, $g(-1) = 2 = g(1)$. Sendo assim, encontramos dois elementos distintos que possuem a mesma imagem.

De maneira formal, podemos dizer que

> **Definição 4.2** Uma função $f : A \to B$ é dita **injetora** (ou **injetiva**) se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em A, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ou equivalentemente, usando a contra-positiva da Definição 4.2, temos

> **Definição 4.3** Uma função $f : A \to B$ é dita injetora (ou injetiva) se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em A, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Com base nas definições acima, podemos agora ver alguns exemplos de funções injetivas.

Exemplo 4: Considere a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 6$. Para mostrarmos que *f* é uma função injetiva, usaremos a Definição 4.2, ou seja, consideraremos dois elementos distintos no domínio de g e mostraremos que suas imagens são iguais. Dessa forma, dados x_1 e x_2 dois números reais distintos, teremos

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 6 \neq 3x_2 - 6 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \blacksquare$$

Exemplo 5: Considerando agora o caso mais geral do Exemplo 2. Seja a função afim $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = ax + b$ com *a* e *b* números reais quaisquer e $a \neq 0$. Temos que h é uma função injetiva, pois, dados x_1 e x_2 números reais distintos, temos

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 \neq ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + b \neq ax_2 + b \Leftrightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$$

Exemplo 6: Seja a função quadrática $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $i(x)=x^2$. Note que *i* não é injetiva, pois, dados dois números quaisquer simétricos x_1 e $-x_1$ pertencentes ao domínio da função *i* , temos que suas imagens são iguais, pois $x_1^2=(-x_1)^2$.

Agora se retornarmos a figura 74, temos que, apesar da função g não ser injetora, ela apresenta uma propriedade interessante: todo elemento do seu contradomínio *D* é imagem de algum elemento de C. De maneira formal, podemos dizer que

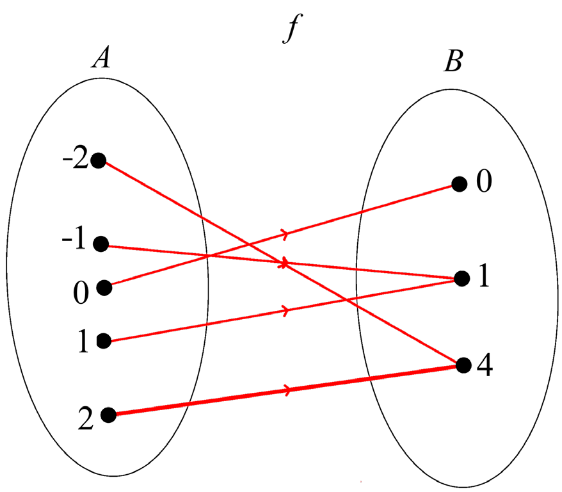
Definição 4.4 Uma função $f:A\to B$ é **sobrejetora** (ou **sobrejetiva**) se, e somente se, para todo y pertecente a B existe um elemento *x* em A tal que $f(x)=y$, ou seja, a imagem de *f* é igual ao contradomínio $B(Im(f)=B)$.

Dessa forma, analisando as funções f e g apresentadas no início do tópico, notamos ainda que a função *f* não é uma função sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(f)\neq B$. Por outro lado, a função g é sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(g)=D$.

Daremos agora outros exemplos de funções sobrejetivas.

Exemplo 7: Considere $f:A\to B$ onde $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ e $B=\{0,1,4\}$ definida pela lei $f(x)=x^2$. Note que f é sobrejetora, pois, para qualquer elemento $y\in B$, existe um elemento $x\in A$ tal que $y=x^2$ (veja figura 75). Note que todos os elementos de B são imagens de pelo menos um elemento de A: $0=f(0);1=f(1)=f(-1)$ e $4=f(2)=f(-2)$.

Figura 75 – Diagrama de flechas da função



Fonte: DEaD | IFCE

Exemplo 8: Considere a função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-6$. Observe que *f* é sobrejetiva. Para isso, devemos mostrar que para todo $y\in\mathbb{R}$ e existe um $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$. Sendo assim, note que $x=\dfrac{y+6}{3}\in\mathbb{R}$ já que $x\in\mathbb{R}$ e que

$$f(x)=f\left(\frac{y+6}{3}\right)=3.\left(\frac{y+6}{3}\right)-6=y+6-6=y$$

Note que conseguimos exibir um $x\in\mathbb{R}$ para o qual $f(x)=y\in\mathbb{R}$ qualquer que seja $y\in\mathbb{R}$, portanto *f* é uma função sobrejetora. ■

Exemplo 9: Considerando agora o caso mais geral do **Exemplo 8**. Seja a função afim $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=ax+b$ com *a* e *b* números reais quaisquer e $a\neq 0$. Mostraremos que g é uma função sobrejetiva. Para isso, basta considerar $x=\dfrac{y-b}{a}$. Note inicialmente que $x\in\mathbb{R}$, pois *y*, *b* e *a* são números reais. Além disso,

$$g(x)=g\left(\frac{y-b}{a}\right)=a.\left(\frac{y-b}{a}\right)+b=y-b+b=y$$

Note que exibimos $x\in\mathbb{R}$ para o qual obtemos $g(x)=y$ para todo $y\in\mathbb{R}$, assim a função g é sobrejetora. ■

Exemplo 10: Seja a função quadrática $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=x^2-7x+12$. Temos que a função h não é sobrejetiva, pois não existe *x* real para o qual tenhamos $h(x)=-2$. Observe que −2 pertence ao contradomínio de h. De fato,

$$h(x)=-2\Rightarrow x^2-7x+12=-2\Rightarrow x^2-7x+14=0$$

Mas note que $\Delta=(7)^2-4.1.14=49-56=-7<0$, ou seja, não apresenta raízes reais. ■

De maneira geral, para verificarmos se uma função é ou não sobrejetiva, devemos proceder da seguinte forma: inicialmente devemos procurar explicitar *x* em função de *y* e depois verificar as possíveis restrições para os valores de *x*, comparando com os possíveis valores que podem ser tomados no domínio.

Assim, para a função quadrática considerada no exemplo 10, teremos

$$y=x^2-7x+12\Rightarrow x^2-7x+12-y=0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-4(12-y)}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1+4y}}{2}$$

Com posse dos valores de *x*, notamos agora que uma condição para a existência da raiz é que $1+4y\geq 0$, ou seja, $y\geq-\dfrac{1}{4}$. Sendo assim, qualquer valor para *y* que seja menor que $-\dfrac{1}{4}$ tornará a função não sobrejetiva. Como no exemplo 10, consideramos $y=-2<-\dfrac{1}{4}$.

Exemplo 11: Ao analisarmos os exemplos acima, notamos que a função afim $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $l(x)=3x+6$ é injetora (veja o exemplo 2) e sobrejetora (veja o exemplo 6). Quando isso acontece, dizemos que a função é bijetora. ■

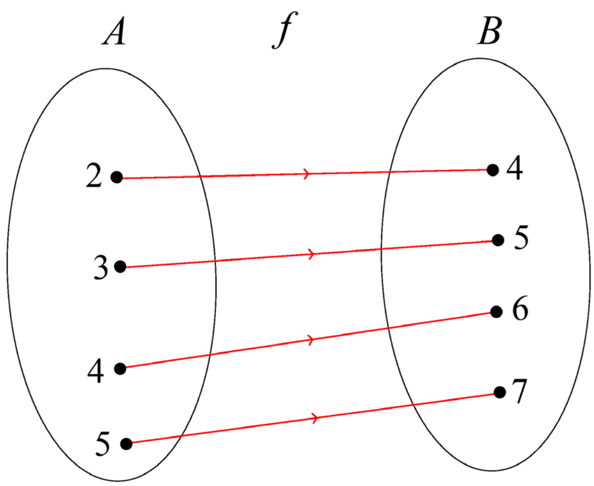
De maneira formal, temos a seguinte definição

> **Definição 4.5** Uma função $f:A\to B$ é bijetora (ou bijetiva) se, e somente se, ela é injetora e sobrejetora. Isso significa que a todo elemento do contradomínio corresponde um único elemento (do qual o primeiro elemento é imagem) no domínio. Em símbolos: $\forall y\in B, \exists! x\in A; y=f(x)\cdot$

Daremos agora outros exemplos de funções bijetoras:

Exemplo 12: Considere a função $f:A\to B$ na qual $A=\{2,3,4,5\}$ $B=\{4,5,6,7\}$ definida pela lei $f(x)=x+2$.

Figura 76 – Representação da função f por meio do diagrama de flechas



Fonte: DEaD | IFCE

Observe que a função é sobrejetora, pois qualquer que seja $y\in B$ existe $x\in A$ tal que $y=f(x)$. Por outro lado, ela também é injetora, uma vez que pontos diferentes em seu domínio têm imagens diferentes em seu contradomínio. ■

Exemplo 13: A função $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ é bijetora. De fato, fazendo $y=f(x)$ para verificar a sobrejetividade da função, podemos proceder da seguinte maneira: isolar a variável x em função da variável y. Sendo assim, teremos

$$y=\frac{x+1}{x-2}\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} y(x-2)=x+1\Leftrightarrow yx-2y=x+1\Leftrightarrow yx-x=2y+1\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x=\frac{2y+1}{y-1}$$

Logo qualquer que seja o valor de *y* real, diferente de 1 (sobrejetividade), existe apenas um valor correspondente de *x* (injetividade), unicamente determinado por $\frac{2y+1}{y-1}$ (o qual não vale 2), mas satisfaz a igualdade $y=f(x)$. Com efeito,

$$f(x)=f\left(\frac{2y+1}{y-1}\right)=\frac{\frac{2y+1}{y-1}+1}{\frac{2y+1}{y-1}-2}=\frac{\frac{2y+1+y-1}{y-1}}{\frac{2y+1-2(y-1)}{y-1}}=\frac{3y}{2y+1-2y+2}=\frac{3y}{3}=y$$

Muitas vezes, uma função não admite inversa, mas podemos restringir seu domínio e imagem, a fim de que ela possua inversa. O exemplo a seguir mostra esse fato:

Exemplo 14: A função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ com *a*, *b* e *c* números reais e $a\neq 0$ não é bijetora. Porém, se restringirmos seu domínio e, consequentemente, sua imagem, podemos torná-la bijetora. Ou seja, se considerarmos $f:\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)\to\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$ dada por $f(x)=ax^2+bx+c$ é uma função bijetora (verifique esse fato).

Outra forma de determinar se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora é através do seu gráfico. O teorema a seguir fornece a caracterização gráfica:

Teorema 4.1 Seja f uma função real de variável real (ou seja, cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$). Dizemos que

a) f é injetora se, e somente se, qualquer reta horizontal intersectar seu gráfico em, no máximo, um ponto.

b) f é sobrejetora se, e somente se, qualquer reta horizontal passando pelos pontos do contradomínio intersectar seu gráfico em, no mínimo, um ponto.

Demonstração: será deixada como exercício para o leitor. ■

Conclui-se do Teorema acima que, para uma função ser bijetora, qualquer reta horizontal deve intersectar o gráfico em apenas um ponto.

Exercício Resolvido 2: Determine, graficamente, se as funções abaixo são injetora, sobrejetora ou bijetora.

a) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x-1$

b) $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x^2-1$

c) $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $h(x)=x^3$

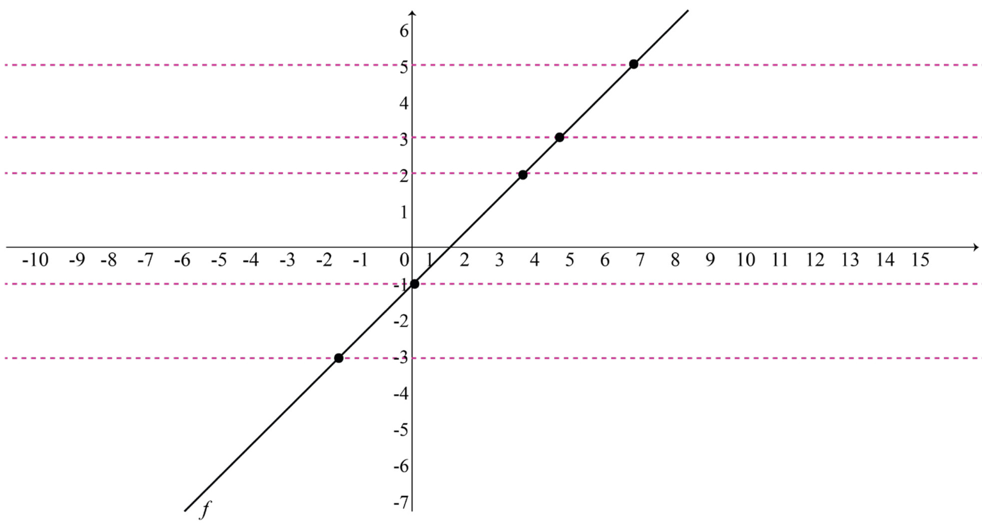
Solução: Traçemos retas paralelas ao eixo *x* nos gráficos das funções e lembremos que

1. se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um ponto ou nenhum ponto, então a função é injetora
2. se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um ou mais pontos então a função é sobrejetora
3. se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é bijetora.

Analisaremos agora cada função separadamente através de seu gráfico.

a) Para a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x-1$, temos que seu gráfico é dado pela figura 77.

Figura 77 – Representação do gráfico de f

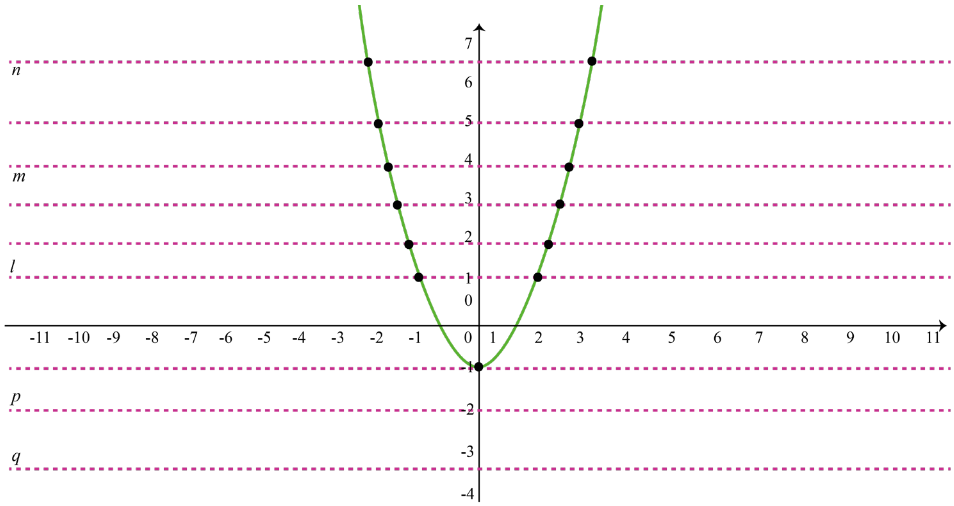


Fonte: DEaD | IFCE

Do gráfico da figura 77, notamos que qualquer reta horizontal intersecta o gráfico em um único ponto. Portanto a função é injetora e sobrejetora. Logo é bijetora.

b) Para a função $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x^2-1$, temos que seu gráfico é dado pela figura 78.

Figura 78 – Representação do gráfico de g

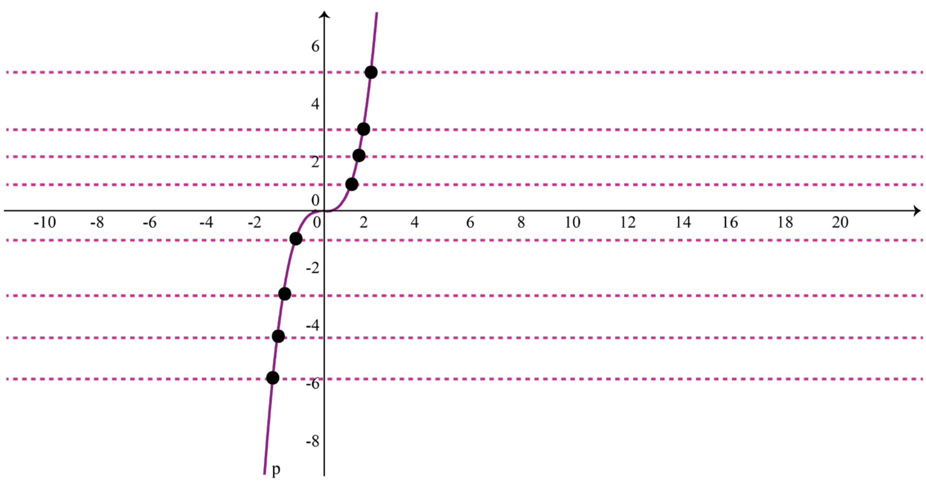


Fonte: DEaD | IFCE

Perceba pelo gráfico que temos retas que não tocam o gráfico nenhuma vez. Como seu contradomínio são os reais, isso implica que existem elementos sobrando no contradomínio. Logo, notamos que existe reta horizontal que intersecta o gráfico em nenhum ponto, um ponto ou dois pontos. Portanto a função não é injetora, nem sobrejetora e, consequentemente, não é bijetora.

c) Para a função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=x^3$, temos que seu gráfico é dado pela figura 79.

Figura 79 – Representação do gráfico de h



Fonte: DEaD | IFCE

Perceba que toda e qualquer reta sempre tocará o gráfico e, como seu contradomínio são os reais, isso indica que não sobram elementos no contradomínio. Do gráfico, notamos que qualquer reta horizontal intersecta o gráfico em um único ponto. Portanto a função é injetora e sobrejetora – logo é bijetora. ■

Podemos agora elencar algumas propriedades referente a funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras em relação à composição de função.

Proposição 4.3 Sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, temos que

a) Se $g \circ f$ é uma função injetora, então f é uma função injetora.

b) Se $g \circ f$ é uma função sobrejetora, então g é uma função sobrejetora.

c) Se f e g são funções injetoras, então $g \circ f$ é uma função injetora.

d) Se f e g são funções sobrejetoras, então $g \circ f$ é uma função sobrejetora.

e) Se f e g são funções bijetoras, então $g \circ f$ é uma função bijetora.

Demonstração: Os itens d) e e) ficarão a cargo do leitor.

a) Dados x_1 e x_2 em A, devemos mostrar que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. De fato, sendo $g \circ f$ uma função injetora, segue que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Sendo assim,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

b) Considere um elemento $x_3 \in C$. Como $g \circ f$ é uma função sobrejetora, segue que existe $x_1 \in X$ tal que $x_3 = (g \circ f)(x_1)$. Sendo assim, do fato de $x_3 = (g(f(x_1))$ garante que g é uma função sobrejetora.

c) Como as funções f e g são bijetoras, segue que f e g são função injetoras e sobrejetoras. Do fato de f e g serem injetoras, segue, do item c), que $g \circ f$ é uma função injetora. Agora, do fato de f e g serem sobrejetoras, segue, do item d), que $g \circ f$ é uma função sobrejetora. Portanto, $g \circ f$ é injetora e sobrejetora, ou seja, $g \circ f$ é uma função bijetora. ■

Ainda usando o conceito de composição de função, podemos então definir o que seria uma função inversa à esquerda e à direita e o que seria a função inversa de uma função. A definição a seguir abrange o que foi dito acima

Definição 4.6 Considere uma função $f: A \to B$, dizemos que

a) Uma função $g: B \to A$ é uma **função inversa à esquerda de *f*** quando $g \circ f = I_A$.
b) Uma função $h: B \to A$ é uma **função inversa à direita de *f*** quando $f \circ h = I_B$.
c) Uma função $i: B \to A$ é uma **função inversa** de f quando ***i* é uma função inversa à esquerda e à direita de *f***. Ou seja, i é inversa de $f \Leftrightarrow i \circ f = I_A$ e $f \circ i = I_B$. Dizemos ainda que f é **invertível.**

A proposição a seguir fornece uma caracterização das propriedades da função inversa.

Proposição 4.4 (Propriedades)

a) Uma função admite inversa à direita se, e somente se, for sobrejetora.
b) Uma função admite inversa à esquerda se, e somente se, for injetora.
c) Uma função é invertível se, e somente se, for bijetora.

Demonstração: a demonstração da proposição será deixada a cargo do leitor. ■

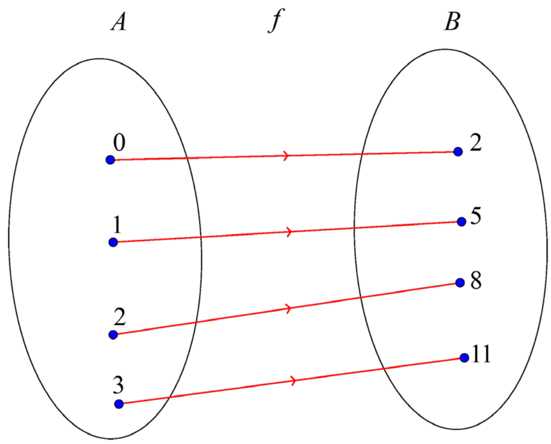
Segue do item c) da proposição 4.4 que, quando uma função *f* for bijetora, ela será uma função inversível. Podemos então definir o seguinte:

Definição 4.7 Se $f: A \to B$ é uma função bijetora, a relação inversa de f é uma função de B em A, denominada função inversa de *f*. Sua notação é dada por f^{-1}. A função inversa de f é tal que para $x \in A$ e $y \in B$ satisfaz a relação $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$.

Note que f^{-1} é também uma função bijetora e que vale $(f^{-1})^{-1} = f$. Assim podemos dizer que f e f^{-1} são inversas entre si. Segue abaixo um exemplo com os conceitos mencionados acima.

Exemplo 15: Dados os conjuntos $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{2,5,8,11\}$. Consideremos ainda a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = 3x + 2$. Vamos determinar se f admite ou não uma inversa. Inicialmente, vejamos sua representação através do diagrama de flechas.

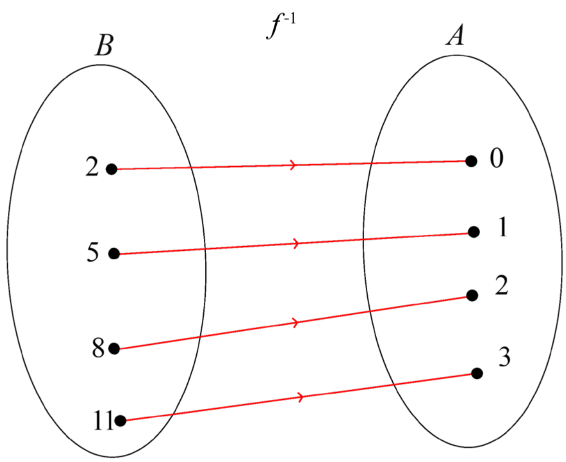
Figura 80 – Representação da função f por meio de diagrama de flecha



Fonte: DEaD | IFCE

Percebemos da figura 80 que a função f é uma função bijetora. Seus pares ordenados são dados por (0, 2), (1, 5), (2, 8), (3, 11). Note ainda que $D(f) = A$ e $CD(f) = B = \text{Im}(f)$. Dessa maneira, do fato de f ser uma função bijetora, ela admite uma inversa. A relação $f^{-1} = \{(y,x);(x,y) \in f\}$ é a inversa da função f e é também uma função. Assim, para todo $y \in B$, existe um único $x \in A$ tal que $(y,x) \in f^{-1}$. Podemos representar o diagrama de $f^{-1} : B \to A$, como sendo

Figura 81 – Representação da função f^{-1} por meio de diagrama de flecha



Fonte: DEaD | IFCE

Já a função f^{-1} é formada pelos pares ordenados (2 , 0), (5, 1), (8 , 2), (11, 3) (note que os pares ordenados são obtidos trocando de posição os elementos de cada par ordenado de *f*, ou seja,

Se duas funções são inversíveis então o domínio da função f é igual ao contradomínio da função f^{-1} e o contradomínio da função f é igual ao domínio de f^{-1}.

$(x,y)\in f \Leftrightarrow (y,x)\in f^{-1}$ de forma que $D(f^{-1})=B$ e $CD(f^{-1})=A=\mathrm{Im}(f^{-1})$. Note ainda que sendo *f* definida por $y=3x+2$ temos que f^{-1} será definida por $x=\dfrac{y-2}{3}$.

Com efeito

$$(f\circ f^{-1})(y)=(f(f^{-1}(y))=f\left(\frac{y-2}{3}\right)=3.\left(\frac{y-2}{3}\right)+2=y-2+2=y=I_B$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(3x+2)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x=I_A$$

Observe ainda que f leva cada elemento $x\in A$ até o $y\in B$ tal que $y=3x+2$ e f^{-1} leva cada elemento $y\in B$ até $x\in A$ tal que $x=\dfrac{y-2}{3}$. ■

No exemplo acima, determinamos a inversa de f e depois usamos composição de função para verificarmos a validade do resultado. A seguir, exibiremos uma regra prática que nos permite determinar a inversa de qualquer função:

> **(Regra prática)** Dada uma função bijetora $f:A\to B$ definida por uma sentença aberta $y=f(x)$. Para obtermos a sentença aberta que define a função f^{-1}, devemos, na sentença inicial $y=f(x)$, isolar o valor de x no primeiro membro e depois trocar x por y e y por x.

A seguir, explicaremos alguns exemplos de como se deve proceder:

Exercício resolvido 3: Determine a inversa das funções bijetoras a seguir:

a) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=5x+8$.

b) A função $f:\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ definida por $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-3}$.

c) A função $f:\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}_+$ definida por $f(x)=x^2$.

Solução:

a) Seja $y=f(x)$ em que $f(x)=5x+8$. Sendo assim, temos $y=5x+8$. Inicialmente vamos isolar x. Assim $y=5x+8\Rightarrow 5x=y-8\Rightarrow x=\dfrac{y-8}{5}$. Depois basta fazer a troca das variáveis, ou seja, como $x=\dfrac{y-8}{5}$, teremos $y=\dfrac{x-8}{5}$. Sendo assim, teremos que $f^{-1}(x)=\dfrac{x-8}{5}$.

b) Iremos proceder da mesma forma. Seja $y = f(x)$ em que $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$. Sendo assim, temos $y = \dfrac{x+2}{2x-3}$. Logo, sendo $x \neq \dfrac{3}{2}$, teremos:

$$y = \frac{x+2}{2x-3} \Rightarrow y.(2x-3) = x+2 \Rightarrow 2xy - 3y = x+2$$
$$\Rightarrow 2xy - x = 3y+2 \Rightarrow x(2y-1) = 3y+2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{2y-1}$$

Agora, fazendo as trocas das variáveis, obteremos que $y = \dfrac{3x+2}{2x-1}$. Dessa forma, a função $f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ é definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$.

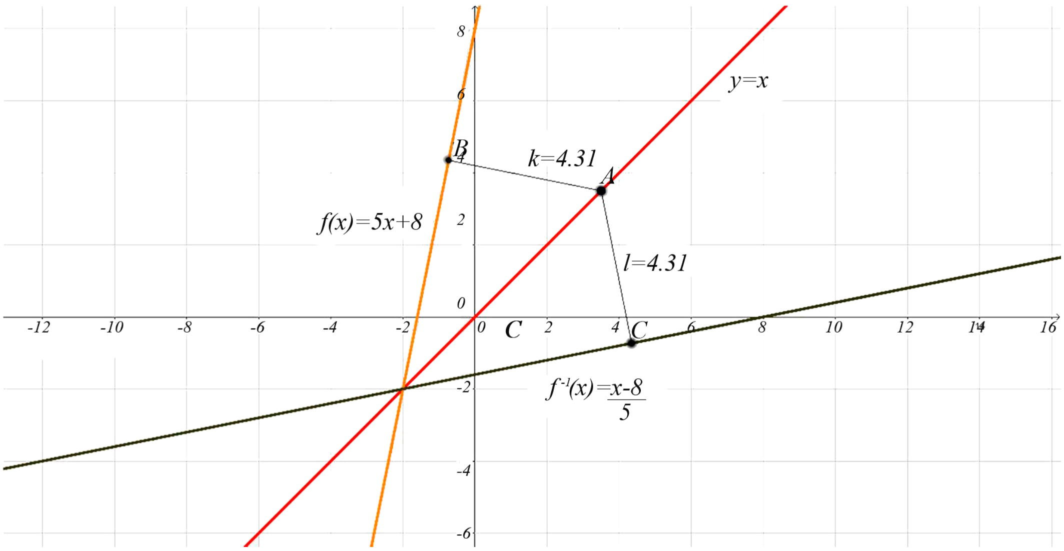
c) A função dada é $y = x^2$ com $x \leq 0$, pois o domínio da função é conjunto dos reais não positivos e $y \geq 0$ também pelo fato de seu contradomínio ser também o conjunto dos números reais não negativos. Aplicando a regra prática, teremos $x = \pm\sqrt{y}$. Agora, fazendo a troca das variáveis, ficaremos com $y = \pm\sqrt{x}$. Agora temos um problema que é decidir por $+\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$. Mas note que devemos ter $x \geq 0$ e $y \leq 0$, logo a função $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$ definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Uma propriedade interessante entre os gráficos cartesianos da função f e de sua função inversa f^{-1} é que eles são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares no plano cartesiano, ou seja, são simétricos em relação a reta $y = x$. Por exemplo, no item a) do exercício resolvido 3, encontramos que a inversa de $f(x) = 5x+8$ é $f^{-1}(x) = \dfrac{x-8}{5}$ Seus gráficos podem ser representados na figura 82:

Saiba mais...

Para saber um pouco mais sobre funções inversas, acesse o link http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/inversiveis/finversiveis.htm

Figura 82 – Gráfico das funções f e f^{-1}



Fonte: DEaD | IFCE

Encerramos assim a aula 4. Neste último tópico, estudamos as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Aprendemos ainda sobre funções inversas e como encontrar a inversa de uma função. Espero que tenham aproveitado bastante. Na próxima aula, estudaremos duas funções importantes: a função exponencial e a função logarítmica. Aguardo vocês lá. Até mais!

pratique...

1. Dadas as funções reais definidas por $f(x)=3x+2$ e $g(x)=2x+a$, determine o valor de a para $f(g(x))=g(f(x))$

2. Sejam as funções reais definidas por $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$, determine o domínio da função $f(g(x))$.

3. Sabendo que $f(x)=x^2+1$ e $g(x)=x-1$, calcule $\dfrac{f(g(x))-g(f(x))}{x-1}$, se $x\neq 1$.

4. Nas funções reais f e g, definidas por $f(x)=x^2+2$ e $g(x)=x-3$, obtenha as leis que definem $f\circ g, g\circ f, f\circ f$ e $g\circ g$.

5. Sejam as funções reais $g(x)=2x+3$ definida para todo x real e $(f\circ g)(x)=\dfrac{2x+5}{x+1}$ definida para todo x real. Determine a lei da função *f*.

6. Qual das funções abaixo são injetora, sobrejetora ou nenhuma das duas.

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ f(x)=2x+1$.

   b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ f(x)=1-x^2$

   c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_-\ f(x)=|x-1|$

   d) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ f(x)=2x+1$

7. Determine a inversa da função $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$, com $x\neq 3$.

8. Obtenha a lei de correspondência da função inversa das funções abaixo:

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=2x+1$.

   b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^3+2$.

   c) $f:\mathbb{R}_+\to B$ tal que $f(x)=4-x^2$ em que $B=\{y\in\mathbb{R}; y\leq 4\}$.

   d) $f:\mathbb{R}_-\to B$ tal que $f(x)=x^2-1$ em que $B=\{y\in\mathbb{R}; y\geq -1\}$.

Gabarito

1. a = 1.

2. $\{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$.

3. -2.

4. $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 1, (g \circ f)(x) = x^2 - 1, (f \circ f)(x)$
$= x^4 + 4x^2 + 6$ e $(g \circ g)(x) = x + 6$

5. $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-1}$ para $x \neq 1$.

6.
   a) injetora e sobrejetora, logo bijetora.
   b) não é injetora nem sobrejetora.
   c) nem injetora nem sobrejetora.
   d) injetora e sobrejetora.

7. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

8.
   a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.
   b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.
   c) $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$.
   d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.

Aula 5

Função Exponencial e Logarítmica: conceitos e aplicações

Caro(a) aluno(a)

Nesta aula, conheceremos duas funções bastante importantes para a Matemática: a função exponencial e a função logarítmica. Elas serão de fundamental importância na disciplina de Cálculo 1.

No tópico 1, começaremos a estudar a função exponencial. Primeiramente faremos uma breve revisão sobre potenciação e radiciação. Depois abordaremos o conceito de função exponencial e daremos alguns exemplos deste tipo de função. Em seguida, veremos algumas propriedades importantes que serão úteis no processo de construção de seu gráfico. Por fim, mostraremos como resolver equações e inequações exponenciais e daremos uma aplicação prática da exponencial no cotidiano.

Já no tópico 2, abordaremos a função inversa da exponencial: a função logarítmica. Inicialmente definiremos o que é o logaritmo de um número real e listaremos algumas propriedades importantes. Em seguida, abordaremos a função logarítmica juntamente com o seu gráfico. Mostraremos ainda como se dá o processo de resolução de equações e inequações logarítmicas.

Objetivos

- Conhecer as funções exponencial e logarítmica e suas propriedades
- Estudar gráficos das funções exponenciais e logarítmicas
- Estudar equações, inequações exponenciais e logarítmicas

Tópico 1

Função Exponencial

OBJETIVOS

- Entender o conceito de função exponencial, suas propriedades e caracterização
- Estudar o gráfico das funções exponenciais

Neste tópico, abordaremos a função exponencial. Primeiramente faremos um breve resumo sobre potência de um número e depois apresentaremos o conceito de função exponencial seguido de alguns exemplos. Mostraremos ainda algumas propriedades que serão importantes para a construção do seu gráfico. Em seguida, enunciaremos alguns teoremas importantes que caracterizam a função exponencial. Por fim, mostraremos como se resolvem equações e inequações exponenciais.

Começaremos com a definição de potência de um número real positivo.

> **Definição 5.1** Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n de base a e expoente n é definida como sendo o produto de n fatores iguais a a.

Da definição 5.1 segue que $a^0 = 1$ e $a^1 = a$. A seguir, exibiremos alguns exemplos:

Exemplo 1: A potência 5^2 apresenta como base o número 5 e como expoente o número 2. Seu valor é dado por $5^2 = 5.5 = 25$. Já na potência 3^4, apresenta como base o número 3 e como expoente o número 4. Seu valor é dado por $3^4 = 3.3.3.3 = 81$. Para a potência 10^0, temos como base o número 10 e como expoente o número 0. Da definição segue que $10^0 = 1$. ■

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades principais da potência.

Proposição 5.1 Sejam a e b números reais positivos e m e n números naturais, então são válidas as seguintes propriedades:

(i) $a^m.a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m : a^n = a^{m-n}$

(iii) $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

(iv) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

(v) $(a.b)^n = a^n.b^n$

(vi) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

A demonstração das propriedades será deixada como exercício para o leitor.

Definimos potência para número natural. Da propriedade (iv) da proposição 5.1, temos a definição de potência para número inteiro. A proposição 5.1 continua válida quando m e n são números inteiros.

Saiba mais...

Para saber mais sobre radiciação consulte o link http://www.campusdosertao.ufal.br/pet/petengenharias/cime/files/aulas/Radiciacao.pdf

Seria possível definir a potência para um número racional? Vejamos que sentido podemos dar para a^r em que $r \in \mathbb{Q}$, ou seja $r = \dfrac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a propriedade (i) da proposição 5.1 continue válida. Dessa forma,

$$(a^r)^n = a^r.a^r.a^r.....a^r = a^{r+r+r+...+r} = a^{rn} = a^m$$

Saiba mais...

Para saber mais sobre potência e suas propriedades, acesse o link http://www.educacional.com.br/upload/blogSite/4276/4276642/16877/Potenciacao_Radiciacao_Propriedades278200992545.pdf

Concluímos assim que a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Segue-se assim, pela definição de raiz, que este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Temos assim a seguinte definição:

Definição 5.2 A potência a^r, com r um número racional, ou seja, $r = \dfrac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ é dada por $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Podemos agora então definir o que seria a função exponencial.

Definição 5.3 Uma **função exponencial** na base a é toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = a^x$, em que a é um número real positivo e diferente de 1, que satisfaz as seguintes propriedades quaisquer que sejam os números reais x e y:

(i) $a^x . a^y = a^{x+y}$

(ii) $f(1) = \mathrm{a}^1 = a$

(iii) $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y \text{ quando } a > 1 \\ a^x > a^y \text{ quando } 0 < a < 1 \end{cases}$

A função exponencial na base e é função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = e^x$ ou $f(x) = \exp(x)$ onde e é um número irracional tal que $e \cong 2,71$.

Muitas vezes, dada uma função exponencial $f(x) = a^x$, faz-se necessário conhecer o seu valor em um determinado ponto $x = x_0$, o que denominamos isso de **valor da função em um determinado ponto**. Para isso, basta substituir na função em que existe x pelo valor de x_0 e ficaremos com $f(x_0) = a^{x_0}$.

Como aplicação dos conceitos vistos acima, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 2

a) Para a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = 2^x$, temos que sua base é 2. Fazendo $x = 4$, obtemos que $f(4) = 2^4 = 16$.

b) Para a função exponencial $\mathrm{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, temos que sua base vale $\dfrac{1}{3}$. Considerando $x = -2$, temos que $g(-2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$.

c) Na função exponencial, $\mathrm{h}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+$ tal que $f(x)=\left(\sqrt{5}\right)^x$ temos que sua base é $\sqrt{5}$. Para $x=6$, obtemos que $h(6)=\left(\sqrt{5}\right)^6=5^3=125$.

d) Por fim, se considerarmos a função exponencial $\mathrm{i}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+$ dada por $i(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, temos que como sua base vale $\frac{2}{3}$. Além disso, para $x=3$, temos que $i(3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$. ■

Como consequência da definição 5.3, temos algumas observações interessantes da função exponencial:

OBSERVAÇÃO 1

Da propriedade i) concluímos que f não pode assumir o valor 0, a menos que seja a função identicamente nula. De fato, dada uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ com a propriedade de que $f(x)\cdot f(y)=f\left(x+y\right)$ se existir x_0 tal que $f(x_0)=0$ então qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$, temos que $f(x)=f\left(x_0+\left(x-x_0\right)\right)=f(x_0)\cdot f\left(x-x_0\right)=0\cdot f(x-x_0)=0$ e, portanto, f seria a função identicamente nula.

OBSERVAÇÃO 2

Ainda da propriedade i) concluímos que $f(x)>0$ qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$. Com efeito, seja uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ com a propriedade de que $f(x)\cdot f(y)=f\left(x+y\right)$ e que não seja a função identicamente nula. Dessa forma, temos que $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0$. Sendo assim, na Definição 5.3, tanto faz afirmar que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ haja vista que sua imagem sempre será positiva.

OBSERVAÇÃO 3

Da propriedade iii) concluímos que a função exponencial será uma função crescente quando sua base for um número maior do que 1 $(a>1)$ e será uma função decrescente quando sua base tiver compreendida entre 0 e 1 $\left(0<a<1\right)$.

OBSERVAÇÃO 4

A função exponencial $f(x)=a^x$ será ilimitada superiormente, ou seja, quando $a>1$, temos que a^x cresce indefinidamente para valores de $x>0$ muito grande e, quando $0<a<1$, temos que a^x cresce indefinidamente para valores absolutos de $x<0$ muito grande.

OBSERVAÇÃO 5

A função exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ dada por $f(x)=a^x$ em que é bijetora.

A partir das propriedades listadas, podemos esboçar o gráfico da função exponencial. Para termos uma ideia de como o gráfico irá se comportar, iremos fazer alguns casos específicos e depois faremos o caso geral. O exemplo abaixo ilustra o processo de construção do gráfico.

Exercício resolvido 1: Esboce os gráficos das funções exponenciais abaixo**:**

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ \text{tal que } f(x)=3^x$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ \text{tal que } f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

Solução: Para a construção dos gráficos acima, iremos atribuir valores a x e encontramos as imagens correspondentes. Depois associaremos os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano e uniremos tais pontos, a fim de obter como seria o esboço dos gráficos. Sendo assim:

a) Para a função $f(x)=3^x$, obteremos a tabela abaixo:

Tabela 3: Valores para $f(x)=3^x$

x	-5	-3	-1	0	1	3
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}$	1	3	27
$(x, f(x))$	$A=\left(-5,\frac{1}{243}\right)$	$B=\left(-3,\frac{1}{27}\right)$	$C=\left(-1,\frac{1}{3}\right)$	$D=(0,1)$	$E=(1,3)$	$F=(3,27)$

Fonte: DEaD | IFCE

Com base na tabela acima, obtemos o gráfico a seguir:

Figura 83 – Gráfico da função $f(x) = 3^x$

Fonte: DEaD | IFCE

Note que, na função exponencial $f(x) = 3^x$, temos que sua base vale $3 > 1$ e, portanto, trata-se de uma função crescente, como observado através do seu gráfico.

Para a função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, obteremos a tabela a seguir:

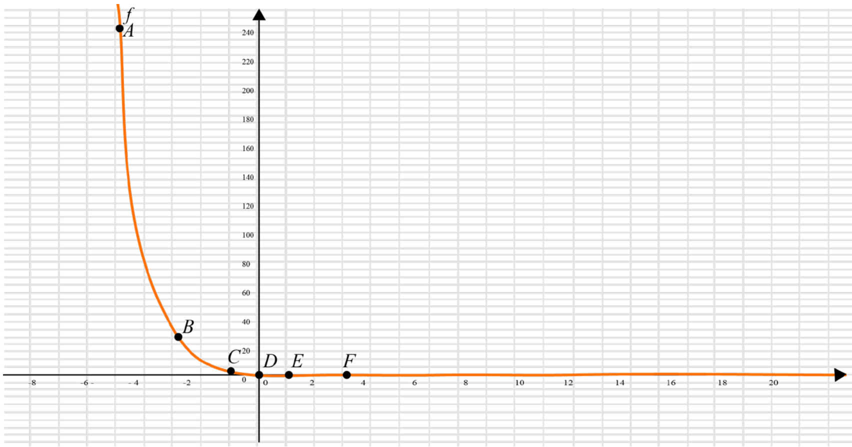
Tabela 4: Valores para $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-5	-3	-1	0	1	3
$f(x) = (1/3)^x$	243	27	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$
$(x, f(x))$	$A = (-5, 243)$	$B = (-3, 27)$	$C = (-1, 3)$	$D = (0, 1)$	$E = \left(1, \frac{1}{3}\right)$	$F = \left(3, \frac{1}{27}\right)$

Fonte: DEaD | IFCE

Com base na tabela 4, obtemos o seguinte gráfico:

Figura 84 – Gráfico da função $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

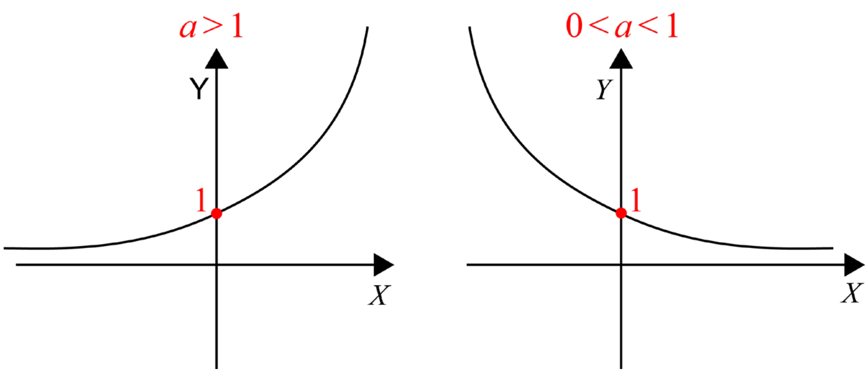


Fonte: DEaD | IFCE

Note que, na função exponencial $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, temos que sua base vale $\frac{1}{3}$ que está compreendida entre 0 e 1. Portanto, trata-se de uma função decrescente, como observado através do seu gráfico. ■

Dessa forma, com base nos gráficos vistos acima e nas propriedades da função exponencial, temos que, para a construção do gráfico de $f(x)=a^x$, devemos inicialmente observar o valor da sua base a. Caso $a>1$, temos que a função será crescente e, quando $0<a<1$, temos que a função será decrescente. Note ainda que quando $a>1$ temos que o valor de x varia da esquerda para a direita e a curva que representa a função exponencial apresenta um crescimento bastante lento, quando $x<0$. À medida que x cresce, o crescimento torna-se mais acelerado. No caso em que $0<a<1$, ocorre o contrário. Note ainda que o gráfico sempre intersecta o eixo y no ponto $(0,1)$ e que a função é sempre positiva. Observe ainda que o gráfico se aproxima do eixo x, mas nunca o toca. De forma geral, temos os gráficos a seguir:

Figura 85 – Gráficos da função $f(x)=a^x$



Fonte: DEaD | IFCE

Assim como fizemos para as funções afins e quadráticas nas aulas anteriores, podemos também enunciar as propriedades que caracterizam a função exponencial. Essa caracterização é importante, pois nos permite escolher o instrumento matemático adequado para a resolução de determinado problema. E para que essa escolha seja feita de maneira correta, é necessário conhecermos as propriedades que caracterizam determinada função.

O teorema a seguir determina a caracterização das funções exponenciais.

Teorema 5.1 (*Caracterização da Função Exponencial*) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ uma função crescente (ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx)=nf(x)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e todo $x\in\mathbb{R}$.

(2) $f(x)=a^x$ para todo x $\in\mathbb{R}$ onde $a=f(1)$.

(3) $f(x+y)=f(x).f(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}\cdot$

Também é verdade a recíproca do teorema 5.1, que é enunciada a seguir:

Teorema 5.2 (*Caracterização da Função Exponencial*) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ uma função crescente (ou decrescente) tal que, para $x,h\in\mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b=g(0)$ e $a=\dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x)=ba^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

A demonstração dos Teoremas 5.1 e 5.2 será deixada como exercício para o leitor. Tais demonstrações podem ser encontradas em Lima (2016) nas páginas 203 a 205, do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 1.

Agora iremos mostrar a relação existente entre as funções exponenciais e as progressões. Para tanto, necessitamos inicialmente da seguinte definição:

Definição 5.4 Dizemos que uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ é do tipo **exponencial** quando se tem $g(x)=ba^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, em que a e b são constantes positivas.

Dessa forma, dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=ba^x$. Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ uma progressão aritmética de razão h, ou seja, $x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \ldots, x_{n+1} = x_n + h, \ldots$ Veremos agora o que ocorre ao substituirmos esses valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ na função $f(x)=ba^x$.

Temos que

$$f(x_1)=ba^{x_1};f(x_2)=ba^{x_2}=b.a^{x_1+h}=b.a^{x_1}.a^h=f(x_1).a^h;\ldots;f(x_{n+1})$$
$$=ba^{x_{n+1}}=b.a^{x_n+h}=b.a^{x_n}.a^h=f(x_n).a^h.$$

Dessa forma, vemos que a sequência $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ constitui uma progressão geométrica de razão a^h.

Tal propriedade é característica das funções do tipo exponencial, de acordo com o Teorema a seguir:

Teorema 5.3 Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ em uma progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$ Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, teremos $f(x)=ba^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $b=f(0)$. Considere a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ definida por $g(x)=\dfrac{f(x)}{b}$. Note que g é crescente (ou decrescente) e PA em PG. Observe que $g(0)=\dfrac{f(0)}{b}=\dfrac{b}{b}=1$. Agora, dado $x\in\mathbb{R}$ qualquer, temos que a sequência $x, 0, -x$ é uma PA. Sendo assim, $g(x), g(0), g(-x)$ é uma PG. Mas como $g(0)=1$, temos que $g(x), 1, g(-x)$ é uma PG de razão $g(-x)$. Logo $g(-x)=\dfrac{1}{g(x)}$. Agora, considerando $n\in\mathbb{N}$ e $x\in\mathbb{R}$, temos que a sequência $0, x, 2x, \ldots, nx, \ldots$ é uma PA. Dessa maneira, $g(0)=1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx), \ldots$ é uma PG de razão $g(x)$ cujo $(n+1)$ n-ésimo termo vale $g(nx)=(g(x))^n$. Caso tenhamos $-n$ um inteiro negativo, então

$$g(-nx)=\frac{1}{g(nx)}=\frac{1}{(g(x))^n}=(g(x))^{-}.$$

Portanto, para quaisquer que sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $g(nx) = (g(x))^n$. Segue do Teorema 5.2 que, pondo $a = g(1) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, temos que $g(x) = a^x$ e, consequentemente, $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ■

Agora veremos algumas aplicações das funções exponenciais. Para tais aplicações, usaremos o fato de que a função exponencial é injetora, ou seja, dados os números x_1 e x_2 tal que $a^{x_1} = a^{x_2}$, então devemos ter necessariamente $x_1 = x_2$.

Aplicação 1 (*Resolução de Equações Exponenciais*) as equações exponenciais são aquelas em que a variável aparece no expoente de uma ou mais bases. Para a resolução de equações exponenciais, devemos inicialmente deixar tais equações na mesma base e depois aplicar a propriedade vista acima, ou seja, se as potências são iguais e de mesma base, devemos então igualar os expoentes.

Exercício resolvido 2: Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^x = 25$

b) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

c) $4^x + 4 = 5.2^x$

Solução:

a) Inicialmente deixaremos tudo na base 5. Como $125 = 5^3$ e $25 = 5^2$ temos que

$$\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25 \Rightarrow \left(\frac{1}{5^3}\right)^x = 5^2 \Rightarrow (5^{-3})^x = 5^2 \Rightarrow 5^{-3x} = 5^2$$

Obtemos assim $5^{-3x} = 5^2$. Segue então que $-3x = 2$ e, assim, $x = -\dfrac{2}{3}$. Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

b) Deixaremos tudo na base 2. Como $8 = 2^3$ e $4 = 2^2$, teremos que

$$2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1} \Rightarrow 2^{3x+2} : (2^3)^{2x-7} = (2^2)^{x-1} \Rightarrow 2^{3x+2} : 2^{3(2x-7)} = 2^{2(x-1)}$$
$$\Rightarrow 2^{3x+2} : 2^{6x-21} = 2^{2x-2} \Rightarrow 2^{3x+2-(6x-21)} = 2^{2x-2}$$
$$\Rightarrow 2^{-3x+23} = 2^{2x-2}$$

Sendo assim, obtemos $2^{-3x+23} = 2^{2x-2}$. Segue então que $-3x + 23 = 2x - 2$, ou seja, $5x = 25$. Logo $x = 5$. Portanto o conjunto solução é $S = \{5\}$.

c) Temos que

$$4^x + 4 = 5.2^x \Rightarrow (2^2)^x + 4 = 5.2^x \Rightarrow (2^x)^2 - 5.2^x + 4 = 0$$

Fazendo uma mudança de variável. Chamando $y = 2^x$, teremos que $y^2 - 5y + 4 = 0$. As raízes da equação são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Voltando agora para o valor de y, teremos que, para $y = 1: y = 2^x \Rightarrow 1 = 2^x \Rightarrow 2^0 = 2^x \Rightarrow x = 0$ e para $y = 4: y = 2^x \Rightarrow 4 = 2^x \Rightarrow 2^2 = 2^x \Rightarrow x = 2$. Portanto o conjunto solução é $S = \{0, 2\}$. ■

Aplicação 2 (*Resolução de Inequações Exponenciais*): as inequações exponenciais são desigualdades em que a variável aparece no expoente de uma ou mais bases. Para a resolução de inequações exponenciais, devemos usar o fato de que a função exponencial é crescente ou decrescente dependendo do valor da base. Sendo assim, seja a a base da função exponencial. Se $a > 1$ como a função exponencial é crescente, logo $a^b > a^c$ então devemos ter $b > c$ (nesse caso, o sinal da desigualdade se mantém para os expoentes) e no caso em que $0 < a < 1$ como a função exponencial é decrescente, logo $a^b > a^c$ então devemos ter $b < c$ (nesse caso, o sinal da desigualdade se inverte para os expoentes).

Exercício resolvido 3: Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^{5x-1} > 8$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} . \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} < \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}$

Solução:

a) Temos que $2^{5x-1} > 8$ e, como $8 = 2^3$, segue que $2^{5x-1} > 2^3$. Como igualamos as potências na mesma base e, sendo a base $2 > 1$, logo o sinal de desigualdade se mantém para os expoentes e assim teremos $5x - 1 > 3$, ou seja, $x > \frac{4}{5}$. Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x > \frac{4}{5}\right\}$.

b) Temos que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} . \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} < \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} . \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{2x+1} < \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{x-3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} . \left(\frac{2}{3}\right)^{4x+2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2+4x+2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{7x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9}$$

Obtemos assim que $\left(\frac{2}{3}\right)^{7x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9}$. Mas, como a base vale $\frac{2}{3}$ que está compreendido entre 0 e 1, então o sentido da desigualdade inverte para os expoentes, ou seja, $7x > 3x - 9$ e assim obteremos que $x > -\frac{9}{4}$. Portanto o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x > -\frac{9}{4}\right\}$.

Aplicação 3 (*Modelo Matemático*): em diversos problemas aplicados, estudam-se fenômenos que apresentam um crescimento ou decrescimento que não podem ser representado por uma função afim, ou uma função quadrática, ou uma função modular, etc. Muitos desses problemas requerem o emprego de funções exponenciais. Tais problemas ocorrem em diversas áreas como na Economia (calcular os juros de um investimento), Biologia (determinar a população de bactérias em uma determinada colônia), Química (determinar o decaimento de material radioativo).

A seguir, exibiremos um exemplo envolvendo a função exponencial.

Saiba mais...

Para ver outros problemas sobre aplicações da função exponencial em outras áreas do conhecimento acesse https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/funcao-exponencial-aplicacoes-em-biologia-quimica-e-matematica-financeira.htm

Exercício resolvido 4: Sob certas condições, o número de bactérias A de uma cultura, em função do tempo t, medido em horas, é dado por $A(t) = 2^{\frac{t}{12}}$. Determine o número de bactérias depois de 5 dias após a hora zero.

Solução: Note que, 5 dias após o início da hora zero, corresponde a um total de 120 horas $(5.24 = 120)$. Dessa forma, substituindo $t = 120$ em $A(t) = 2^{\frac{t}{12}}$, teremos

$$A(t) = 2^{\frac{t}{12}} \Rightarrow A(120) = 2^{\frac{120}{12}} = 2^{10} \Rightarrow A(120) = 1024$$

Logo, o número de bactérias 5 dias após a hora zero será de 1024. ■

Encerramos assim o tópico 1 da aula 5. Nesse tópico, estudamos o conceito de função exponencial juntamente com suas propriedades e caracterização. Vimos ainda o processo de construção de seu gráfico e algumas de suas aplicações como resolução de equações e inequações exponenciais, além de problemas do cotidiano que fazem uso de tal função. No próximo tópico, nos deteremos ao estudo das funções logarítmicas.

Função Logarítmica

OBJETIVOS

- Entender o conceito de logaritmo, função logarítmica, suas propriedades e caracterização
- Estudar o gráfico das funções logarítmicas

Neste tópico, abordaremos a função logarítmica e o logaritmo. Inicialmente apresentaremos o conceito de logaritmo juntamente com suas propriedades. Em seguida, apresentaremos a função logarítmica e mostraremos o processo de construção do seu gráfico. Abordaremos ainda um teorema importante que permite a caracterização da função logarítmica. Por fim, mostraremos como se resolve equações e inequações logarítmicas.

Considere o seguinte problema: existe algum número x que elevado ao número 2 resulte em 32? Em termos matemáticos, queremos encontrar o valor de x para o qual tenhamos $2^x = 32$. Dessa forma, o problema recai em resolver uma equação exponencial. Assim, devemos ter que $x = 5$. O número 5 é o que chamamos de logaritmo de 32 na base 2.

A seguir, apresentamos a definição formal do que seria o logaritmo de um número.

Definição 5.5 Sejam a e b números reais e positivos tal que $a \neq 1$. Definimos o **logaritmo de** b **na base** a, que representamos por $\log_a b$, como sendo o expoente que devemos ter em a de modo que a potência obtida seja igual ao número b. Em termos matemático, temos que $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, em que a é chamado a base do logaritmo, b é denominado de logaritmando e x é o logaritmo.

Como aplicação dos conceitos acima, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 3: Em $\log_2 64$, temos que sua base vale 2, o logaritmando é 64 e o logaritmo vale 6, pois $2^6 = 64$. Já em $\log_3 \frac{1}{9}$ temos que sua base vale 3, o logaritmando é $\frac{1}{9}$ e o logaritmo vale -2 pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$. Agora $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}$, temos que sua base vale $\sqrt{5}$, o logaritmando é $\frac{1}{125}$ e o logaritmo vale -6, pois $\left(\sqrt{5}\right)^{-6} = \frac{1}{125}$.

Saiba mais...

Para saber mais sobre a história do logaritmo e sobre quem foi John Neper acesse o link http://www.infoescola.com/matematica/historia-dos-logaritmos/

Da Definição 5.5, seguem algumas observações:

Observações	
(Condição de Existência do Logaritmo) Temos que $\log_a b$ só existe quando $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.	Quando a base do logaritmo for 10, iremos omiti-la. Sendo assim, ao escrevermos log b, fica subtendido que a base vale 10. Tais logaritmos são denominados de decimais.

A seguir, apresentaremos as principais propriedades dos logaritmos que facilitarão na realização de cálculos. Algumas dessas propriedades seguem diretamente da Definição 5.5.

Proposição 5.2 Sejam a, b e c números reais e positivos com $a \neq 1$ e $n, m \in \mathbb{R}$ com $m \neq 0$. São válidas as seguintes propriedades:

(i) $\log_a 1 = 0$

(ii) $\log_a a = 1$

(iii) $a^{\log_a b} = b$

(iv) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

(v) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

(vi) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}.\log_a b$

(vii) $\log_a b = \dfrac{\log_d b}{\log_d b}$ com $d > 0$ e $d \neq 1$

(viii) $\log_a b = \dfrac{\log_d b}{\log_d b}$ com $d > 0$ e $d \neq 1$

Demonstração: demonstraremos as propriedades **(v).** As demais serão deixadas como exercício para o leitor.

Propriedade (v): Sejam $\log_a b = x, \log_a c = y$ e $\log_a (b.c) = z$. Queremos mostrar que $z = x + y$.

Sendo assim teremos: $\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b.c) = z \Rightarrow a^z = b.c \end{cases}$

Como $a^z = b.c$ e sendo $b = a^x$ e $c = a^y$ temos que $a^z = a^x.a^y = a^{x+y}$. Portanto $z = x + y$. ■

Os exemplos a seguir ilustram o uso das propriedades dos logaritmos.

Exercício resolvido 5: Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ então expresse o $\log 144$ em função de a e b.

Solução: inicialmente escreveremos o número 144 em função dos números 2 e 3. Dessa forma, temos que $144 = 2^4.3^2$. Logo

$$\log 144 = \log\left(2^4.3^3\right) \overset{(v)}{=} \log 2^4 + \log 3^2 \overset{(vii)}{=} 4.\log 2 + 2.\log 3 = 4a + 2b$$

Exercício resolvido 6: Calcule o valor de $\log_{81} 125.\log_8 9.\log_{25} \sqrt[4]{32}$.

Solução: fatorando cada um dos números dados, teremos

$$\log_{81} 125.\log_8 9.\log_{25} \sqrt[4]{32} = \log_{3^4} (5^3).\log_{2^3} (3^2).\log_{5^2} \left(2^{\frac{5}{4}}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{4}.\log_3 5\right).\left(\frac{2}{3}.\log_2 3\right).\left(\frac{\frac{5}{4}}{2}\log_5 2\right)$$

Fazendo uma mudança de base para a base 3 em $\log_5 2$, teremos $\log_5 2 =$. Assim

$$=\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\left(\frac{5}{4}.\frac{1}{2}\right).\log_3 5.\log_2 3.\frac{\log_3 2}{\log_3 5}=\frac{5}{16}.\log_2 3.\log_3 2=\frac{5}{16}$$

Observe que $\log_2 3.\log_3 2 = 1$, pois, fazendo uma mudança de base em $\log_2 3$ para a base 3, resulta em $\log_2 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 2} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{1}{\log_3 2}$. Assim $\log_2 3.\log_3 2 = \dfrac{1}{\log_3 2}.\log_3 2 = 1$. Portanto $\log_{81} 125.\log_8 9.\log_{25} \sqrt[4]{32} = \dfrac{5}{16}$. ■

Depois que definimos o que era o logaritmo e enunciamos as suas propriedades podemos agora estudar a função logarítmica. No tópico 1 desta aula, estudamos sobre funções exponenciais e vimos que a função exponencial é bijetora e, portanto, admite uma função inversa. Dizemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. De maneira formal, temos a seguinte definição:

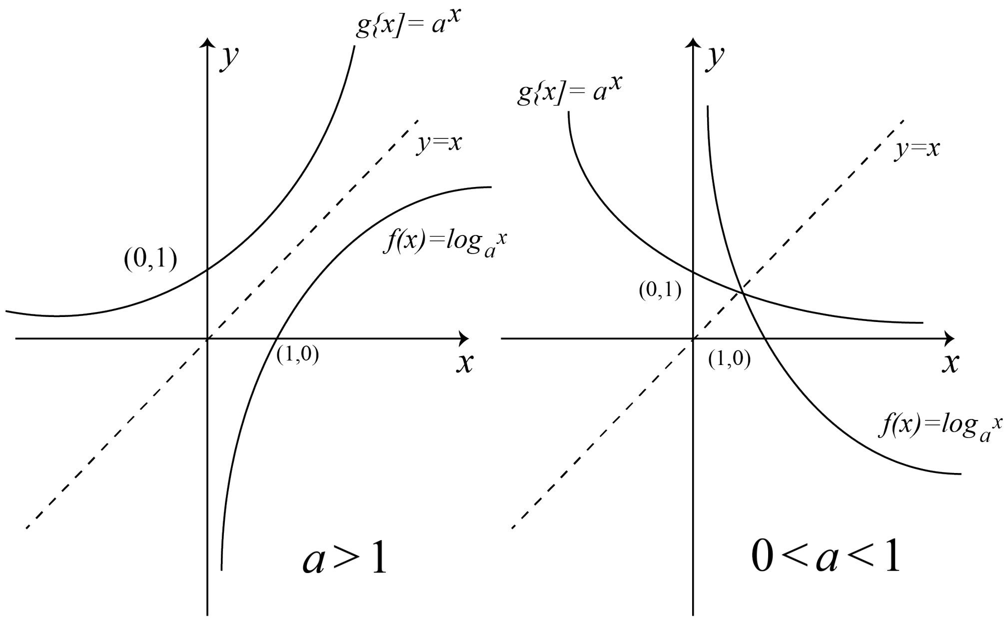
> **Definição 5.4** A inversa da função exponencial de base a é a função $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\log_a x$, ou seja, é a função que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, que é denominado o logaritmo de x na base a. A função logarítmica na base e é função $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln x$, que é denominada de logaritmo natural, onde e é um número irracional tal que $e \cong 2,71$.

Da definição de inversa, segue que $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a(a^x) = x$. Dessa maneira, temos então que o expoente ao qual devemos elevar a base a para obtermos x deve ser $\log_a x$, ou seja, $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Muitas vezes, dada uma função logarítmica $f(x) = \log_a x$, faz-se necessário conhecer o seu valor em um determinado ponto $x = x_0$, o que denominamos isso de **valor da função em um determinado ponto**. Para isso, basta substituir na função em que existe x pelo valor de x_0 e ficaremos com $f(x_0) = \log_a x_0$, ou seja, recai em encontrar o valor do logaritmo de um número, o qual foi feito anteriormente.

Como a função exponencial é a inversa da função logarítmica, podemos então determinar seu gráfico a partir da função exponencial. Como vimos na aula passada, o gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$. Teremos dois casos a analisar para a construção do gráfico $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Figura 86 – Gráfico da função exponencial



Fonte: DEaD | IFCE

Com base na figura 86, podemos concluir que

- O gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto $(0,1)$ e nunca intersecta o eixo y
- A função logarítmica será uma crescente quando $a > 1$ e será uma decrescente quando $0 < a < 1$
- Note ainda que, como a função logarítmica na base a é crescente se $a > 1$ e sendo $\log_a 1 = 0$, segue que os valores de x compreendidos entre 0 e 1 apresenta logaritmo negativo e os maiores que 1 apresenta logaritmo positivo. Agora se $0 < a < 1$, ocorre a situação contrária: $\log_a x$ é positivo se $0 < a < 1$ e negativo se $x > 1$
- A função exponencial $f(x) = \log_a x$ será ilimitada tanto superiormente quanto inferiormente. Por exemplo, para $a > 1$, por ilimitada superiormente significa que podemos atribuir um valor tão grande a $\log_a x$ desde que tomemos x suficientemente grande.
- A função logarítmica $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é bijetora.

Assim como fizemos para a função exponencial no tópico anterior, podemos também enunciar as propriedades que caracterizam a função logarítmica. Essa caracterização nos permite decidir quando usaremos a função logarítmica para resolver determinado tipo de problema. O Teorema a seguir determina a caracterização das funções logarítmicas.

> **Teorema 5.3** (*Caracterização da Função Logarítmica*): seja $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

A demonstração do Teorema 5.3 será deixada como exercício para o leitor. Tal demonstração pode ser encontrada em Lima (2016) nas páginas 215 a 217, do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 1.

Veremos agora algumas aplicações das funções logarítmicas.

> **Aplicação 1** (*Resolução de Equações Logarítmicas*): as equações logarítmicas são aquelas em que a incógnita aparece no logaritmando ou na base do logaritmo. Para resolver as equações logarítmicas, podemos dividir em três casos possíveis:
>
> **1° caso:** Logaritmos de mesma base – $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$.
>
> **2° caso:** Aplicação direta da definição de logaritmo – $\log_a f(x) = k \Rightarrow a^k = f(x)$.
>
> **3° caso:** Substituição de variável – para resolver equações deste tipo inicialmente faz-se necessário uma mudança de variável.

O exemplo abaixo faz aplicação dos três casos descritos:

Exercício resolvido 7: resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_4(3x+2) = \log_4(2x-5)$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5x) = 1$

c) $6.\log_2^2 x - 7.\log_2 x + 2 = 0$

Solução:

a) $\log_4(3x+2) = \log_4(2x-5)$

Devemos verificar a condição de existência, ou seja, devemos ter $3x+2>0$ e $2x+5>0$. Assim, $x > -\dfrac{2}{3}$ e $x > -\dfrac{5}{2}$. Segue assim que $x > -\dfrac{2}{3}$.

> Não se esqueça de verificar a condição de existência do logaritmo ao resolver equações logarítmicas.
>
> Saiba mais...

Agora vamos aplicar a regra de resolução e depois comparamos o resultado obtido com a condição de existência:

$$\log_4(3x+2)=\log_4\left(2x-5\right)\Rightarrow 3x+2=2x+5\Rightarrow x=3$$

Como $3>-\dfrac{2}{3}$, segue que o conjunto solução é $S=\{3\}$.

Guarde bem...

No caso em que temos $\log_a f(x)=k$ não precisamos nos preocupar com a condição de existência, pois $f(x)=a^k>0$.

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5x)=1$

Neste exemplo basta aplicarmos a definição de logaritmo. Assim:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(3+5x\right)=0\Rightarrow 3+5x=\left(\frac{1}{2}\right)^0\Rightarrow 3+5x=1\Rightarrow 5x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$$

Portanto, o conjunto solução é $S=\left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$.

c) $6.\log_2^2 x-7.\log_2 x+2=0$

As notações $\log_a^n f(x)$ e $\left(\log_a f(x)\right)^n$ significam a mesma coisa, ou seja, $\log_a^n f(x)=\left(\log_a f(x)\right)^n$. Dessa forma podemos reescrever o enunciado do problema da seguinte maneira $6\cdot\left(\log_2 x\right)^2-7\cdot\log_2 x+2=0$. Façamos agora a mudança de variável $y=\log_2 x$. Obteremos que $6y^2-7y+2=0$. Resolveremos então a equação do segundo grau. Temos que

$$\Delta=(-7)^2-4.6.2=49-48=1$$

Assim, $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7\pm1}{12}$ e obtemos que $y_1=\dfrac{2}{3}$ e $y_2=\dfrac{1}{2}$. Substituindo os valores obtidos em $y=\log_2 x$, teremos que, para $y_1=\dfrac{2}{3}$ segue que $\log_2 x=\dfrac{2}{3}$, ou seja, $x=2^{\frac{2}{8}}$. Já para $y_2=\dfrac{1}{2}$ segue que $\log_2 x=\dfrac{1}{2}$, ou seja, $x=2^{\frac{1}{2}}$. Portanto o conjunto solução é $S=\left\{2^{\frac{2}{8}},2^{\frac{1}{2}}\right\}$. ■

Aplicação 2 (*Resolução de Inequações Logarítmicas*) As inequações logarítmicas são desigualdades em que a incógnita aparece no logaritmando ou na base do logaritmo. Para resolver as inequações logarítmicas podemos dividir em três casos possíveis.

1º caso: Logaritmos de mesma base

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \text{ se } a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

2º caso: Desigualdade entre o logaritmo e um número real – $\log_a f(x) > \mathrm{k}$ ou $\log_a f(x) < \mathrm{k}$. Neste caso, é uma aplicação direta do 1º caso, pois basta notarmos que $k = k.\log_a a = \log_a a^k$. Dessa forma a solução será dada de acordo com o 1º caso.

3º caso: Substituição de variável – Para resolver inequações deste tipo, inicialmente, faz-se necessária uma mudança de variável.

O exemplo abaixo faz aplicação dos três casos descritos:

Exercício resolvido 8: Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações logarítmicas:

a) $\log_{0,3}(4x-3) < \log_{0,3} 5$ $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geq 2$

b) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 3\log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0$

Solução:

a) $\log_{0,3}(4x-3) < \log_{0,3} 5$

Temos que, como $0,3$ é um número compreendido entre 0 e 1, logo o sentido da desigualdade irá mudar. Assim:

$$\log_{0,3}(4x-3) < \log_{0,3} 5 \Rightarrow 4x-3 > 5 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2$$

Portanto, o conjunto solução será $S = \{x \in \mathbb{R}; x > 2\}$.

b) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geq 2$

Nesse caso, temos que podemos escrever 2 com sendo $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Note ainda que como a base está compreendida entre 0 e 1, o sentido da desigualdade será alterado.

Logo

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geq 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 0 < 4x-3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 < 4x-3 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow 0+3 < 4x-3+3 \leq \frac{1}{9}+3$$

$$\Rightarrow 3 < 4x \leq \frac{28}{9} \Rightarrow \frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{9}$$

Portanto o conjunto solução será $S = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{9}\right\}$.

c) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 3\log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0$

Façamos inicialmente uma mudança de variável. Chamando $y = \log_{1/2} x$, teremos que $y^2 - 3x - 4 > 0$. Note que os valores de y que satisfazem a desigualdade são dados por $y < -1 \text{ ou } y > 4$. Substituindo em $y = \log_{1/2} x$, para $y < -1$ segue que $\log_{1/2} x < -1$ e como $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$, teremos $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ e, portanto, $x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, ou seja, $x > 2$. Agora para $y > 4$ segue que $\log_{\frac{1}{2}} x > 4$ e como $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$ teremos $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$ e, portanto, $x < \left(\frac{1}{2}\right)^4$, ou seja, $x < \frac{1}{16}$. Mas devemos ter $x > 0$. Logo o conjunto solução será $S = \left\{x \in \mathbb{R}; 0 < x < \frac{1}{16} \text{ ou } x > 2\right\}$. ■

Finalizamos assim a aula 5 e o tópico 2. Neste tópico, estudamos o conceito de logaritmo e de função logarítmica juntamente com suas propriedades. Estudamos ainda a construção do gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da função exponencial. Enunciamos ainda um teorema importante sobre a caracterização da função logarítmica. Por fim, vimos o processo de resolução de equações e inequações logarítmicas. Na próxima aula, começaremos o estudo da Trigonometria. Espero todos por lá. Até mais.

Pratique...

1. Use as propriedades de potência para simplificar as expressões abaixo. Suponha que $a.b \neq 0$.

a) $(a^2.b^3)^2.(a^3.b^2)^3$

b) $\dfrac{\left(a^4.b^2\right)^3}{(a.b^2)^2}$

c) $\left[\left(a^3.b^2\right)^2\right]^3$

d) $\left(\dfrac{a^4.b^3}{a^2.b}\right)^5$

e) $\dfrac{\left(a^2.b^3\right)^4.\left(a^3.b^4\right)^2}{\left(a^3.b^2\right)^3}$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $9^x = 27$

b) $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

c) $\left(9^{x+1}\right)^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$

d) $\left(3^{2x-7}\right)^3 : 9^{x+1} = \left(3^{3x-1}\right)^4$

e) $9^x + 3^{x+1} = 4$

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação exponencial $25^x + 6.5^x + 5 > 0$

4. Encontre o valor de A nos seguintes casos:

a) $A = \log_8 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

b) $A = \log_4\left(\log_3 9\right) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$

c) $A = \log_3 5.\log_4 27.\log_{25} \sqrt{2}$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação logarítmica $\log_4^2 x - 2.\log_4 x - 3 = 0$

Gabarito

1.

a) $a^{13} \cdot b^{12}$

b) $a^{10} \cdot b^{2}$

c) $a^{18} \cdot b^{12}$

d) $a^{10} \cdot b^{10}$

e) $a^{5} \cdot b^{14}$

2.

a) $S = \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$

b) $S = \{10\}$

c) $S = \{-2, 3\}$

d) $S = \left\{ -\dfrac{19}{8} \right\}$

e) $S = \{0\}$

3. $S = \mathbb{R}$

4. Encontre o valor de A nos seguintes casos:

a) $\dfrac{19}{6}$

b) $-\dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{3}{8}$

5. $S = \left\{ 64, \dfrac{1}{4} \right\}$

Aula 6

Trigonometria, função de Euler e a medida dos ângulos

Caro(a) aluno(a),

Nesta aula, iniciaremos o estudo da Trigonometria. Daremos ênfase ao estudo das relações trigonométricas de um triângulo retângulo, função de Euler e medida dos ângulos.

Começaremos, a partir do tópico 1, conhecendo as relações trigonométricas em um triângulo retângulo e, em seguida, daremos algumas aplicações desse conceito. Veremos ainda dois resultados importantes: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. Estudaremos um pouco sobre ângulos notáveis para relacionarmos tais ângulos com a estrutura de função das relações trigonométricas de modo a compreendermos na próxima aula o esboço gráfico das funções trigonométricas. Já no tópico 2, iremos estudar a função de Euler para entendermos como determinamos o círculo trigonométrico e, em seguida, nos embasarmos para definirmos as relações trigonométricas como funções.

Objetivos

- Conhecer as relações trigonométricas, suas propriedades e aplicações
- Compreender a função de Euler e as medidas de ângulos

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

OBJETIVOS

- Estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo e suas aplicações
- Conhecer a Relação Fundamental da Trigonometria e suas aplicações
- Compreender a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

A Trigonometria (do grego *trigono*, triângulo, e *metria*, medida) é um ramo da Matemática que surgiu há mais de dois mil anos para lidar com as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Atualmente, temos inúmeras aplicações da Trigonometria, desde situações básicas até as mais complexas. Por exemplo, se um avião, ao decolar, formar um determinado ângulo com a pista horizontal, após percorrer 2000 metros, ele estará a certa altura. Se houver prédios muito altos próximos ao aeroporto, haverá a possibilidade de colisão do avião com algum prédio? Para resolver essa questão, devemos analisar o ângulo formado pelo avião e a pista, a distância percorrida pelo avião e a altura dos prédios. Isso é um estudo com base na Trigonometria.

Você sabia?

Os estudos iniciais sobre a trigonometria são associados ao grego Hiparco. Ele relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e possivelmente construiu a primeira tabela de valores trigonométricos, por isso muitos o consideram o pai da Trigonometria.

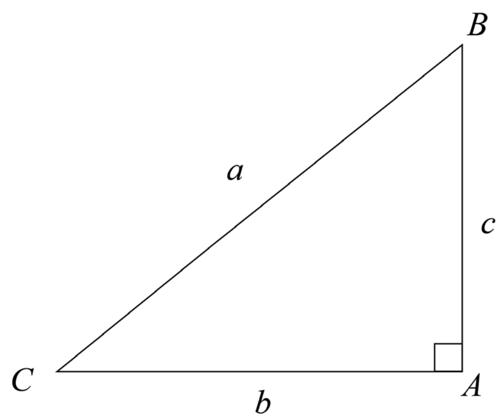
Neste primeiro tópico da aula 6, iremos conhecer as relações trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Depois veremos a Relação Fundamental da Trigonometria e suas aplicações. Veremos ainda o seno, cosseno e tangente de ângulos bastantes conhecidos, os chamados ângulos notáveis. Por fim, enunciaremos e demonstraremos as Leis dos Senos e Cossenos e daremos alguns exemplos de aplicações práticas dessas leis.

Começaremos então com a definição do que seria um triângulo retângulo e destacaremos seus principais elementos.

Definição 6.1 Dizemos que um triângulo é **retângulo** quando um de seus ângulos é reto, ou seja, mede 90°. O lado oposto ao ângulo reto é denominado de **hipotenusa** e os lados adjacentes ao ângulo reto são chamados de **catetos**. Os catetos podem ser classificados em **opostos** ou **adjacente**s. Fixado um ângulo, dizemos que um cateto é **oposto** quando está oposto a este ângulo; e dizemos que um cateto é **adjacente** quando está contido em um dos lados deste ângulo.

Na figura 87, temos triângulo retângulo no vértice A com hipotenusa de medida a e catetos com medidas b e c.

Figura 87 – Triângulo retângulo



Fonte: Adaptada de Iezzi (1997)

Note ainda, na figura 87, que os demais ângulos de um triângulo retângulo são agudos e sua soma vale 90°, ou seja, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares $(\hat{B}+\hat{C}=90^\circ)$.

Um resultado bastante importante em um triângulo retângulo é o Teorema de Pitágoras que enunciaremos na Proposição abaixo e cuja demonstração será deixada a cargo do leitor.

Proposição 6.1 Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Feitas as devidas considerações, começaremos agora os estudos trigonométricos em um triângulo retângulo. Podemos estabelecer algumas relações entre os lados de um triângulo retângulo e os seus ângulos agudos. Tais relações são dadas na definição a seguir e são denominadas **razões trigonométricas**.

Definição 6.2 Dado um triângulo ABC retângulo e seja α um de seus ângulos agudo, definimos:

Seno de um ângulo agudo: é o quociente do comprimento do cateto oposto ao ângulo agudo pelo comprimento da hipotenusa do triângulo ABC. O seno de um ângulo agudo α pode ser denotado como $sen\ \alpha$ ou $sen(\alpha)$. Assim, $sen\ \alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$.

Cosseno de um ângulo agudo: é o quociente do comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo pelo comprimento da hipotenusa do triângulo ABC. O cosseno de um ângulo agudo α pode ser denotado como $\cos\alpha$ ou $\cos\ (\alpha)$. Assim, $cos\ \alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$.

Tangente de um ângulo agudo: é o quociente do comprimento do cateto oposto ao ângulo agudo pelo comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo do triângulo ABC. A tangente de um ângulo agudo α pode ser denotada como $tg\ \alpha$ ou $tg\ (\alpha)$. Assim, $tg\ \alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$.

Cotangente de um ângulo agudo: é o quociente do comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo pelo comprimento do cateto oposto ao ângulo agudo do triângulo ABC. A cotangente de um ângulo agudo α pode ser denotada como $\text{cotg}\ \alpha$ ou $\text{cotg}\ (\alpha)$.

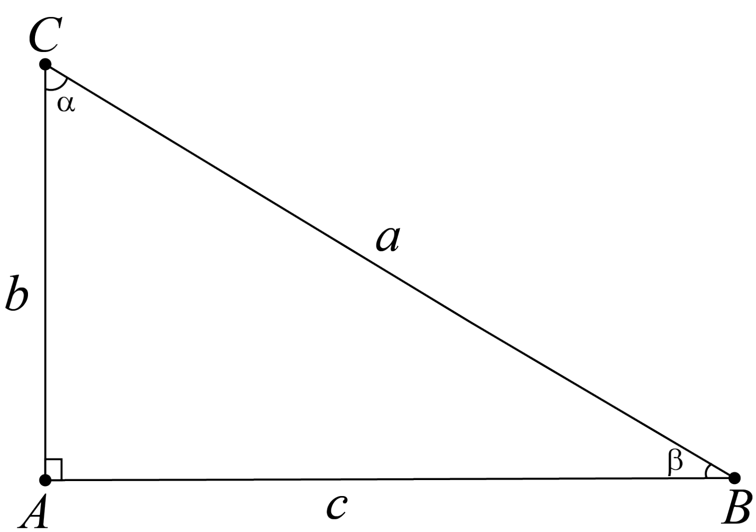
Assim, $\cot g\ \alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$.

Secante de um ângulo agudo: é o quociente do comprimento da hipotenusa pelo comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo do triângulo ABC. A secante de um ângulo agudo α pode ser representada como $\sec\alpha$ ou $\sec(\alpha)$. Assim, $\sec\ \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$.

Cossecante de um ângulo agudo: é o quociente do comprimento da hipotenusa pelo comprimento do cateto oposto ao ângulo agudo do triângulo ABC. A cossecante de um ângulo agudo α pode ser representado como $\operatorname{cossec}\ \alpha$ ou $\operatorname{cossec}(\alpha)$. Assim, $\operatorname{cossec}\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$.

Para exemplificar as razões trigonométricas citadas acima, considere o triângulo retângulo ABC abaixo.

Figura 88 – Triângulo Retângulo e seus elementos



Fonte: DEaD | IFCE

Da figura 88, temos que

$$sen\ \alpha = \frac{c}{a},\ \cos\ \alpha = \frac{b}{a}, tg\ \alpha = \frac{c}{b}, \cot g\ \alpha = \frac{b}{c}, \sec\alpha = \frac{a}{b}, \cos\sec\alpha = \frac{a}{c}$$

$$sen\beta = \frac{b}{a}, \cos\beta = \frac{c}{a}, tg\beta = \frac{b}{c}, \cot g\beta = \frac{c}{b}, \sec\beta = \frac{a}{c}, \cos\sec\beta = \frac{a}{b}$$

Podemos observar que

- Como $\alpha + \beta = 90^\circ$, temos que α e β são ângulos complementares. Assim, temos que $sen\ \alpha = \cos\beta$; $sen\ \beta = \cos\ \alpha$; $tg\ \alpha = \cot g\ \beta$; $tg\ \beta = \cot g\ \alpha$; $\sec\alpha = \cos\sec\beta$ e $\sec\ \beta = \mathrm{cossec}\,\alpha$.
- Note ainda que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são sempre números reais positivos menores que 1, pois qualquer cateto é sempre menor que a hipotenusa.

Podemos ainda enunciar algumas propriedades interessantes sobre as razões trigonométricas enunciadas na Definição 6.2. Tais propriedades estão descritas na Proposição abaixo:

Proposição 6.2 Seja ABC um triângulo retângulo e a um de seus ângulos agudos. Então:

1. $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$
2. $\cot g\ \alpha = \dfrac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$
3. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
4. $\cos\sec\alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$
5. $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria)
6. $tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
7. $1 + \cot g^2\alpha = \cos\sec^2\alpha$

Demonstração: Usaremos como base a Figura 88. Obtemos assim que

$$sen\ \alpha = \frac{c}{a}, \cos\alpha = \frac{b}{c}\ \text{e}\ tg\ \alpha = \frac{c}{b}$$

Mostraremos inicialmente a propriedade **1.** De fato, basta dividir numerador e denominador da fração $\frac{c}{b}$ pela medida da hipotenusa a. Assim temos

$$tg\ \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

As propriedades **2**, **3** e **4** serão deixadas como exercício para o leitor.

Provaremos agora a propriedade **5**. Como sabemos que $sen\ \alpha = \frac{c}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, teremos que

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (6.1)$$

Note que a relação $a^2 = b^2 + c^2$ foi obtida aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 88.

Da relação fundamental da trigonometria, podemos obter outras relações. Iremos agora mostrar que a propriedade **6** também é válida. Por exemplo, podemos dividir a igualdade 6.1 por $sen^2\alpha$ (para essas divisões, devemos ter cuidado, pois o denominador da fração deve ser diferente de zero). Como se trata de seno de ângulos agudos em um triângulo retângulo temos que $sen^2\alpha \neq 0$, então, nesse momento, não precisamos nos preocupar com isso. Mais à frente, quando formos definir as funções trigonométricas, atentaremos para o detalhe de funções fracionárias). Dessa forma, teremos que

$$\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{\cos^2}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{sen\alpha}\right)^2$$

Observando as relações trigonométricas nas propriedades **2** e **4**, temos

$$1 + \cot g^2\alpha = \cos\sec^2\alpha$$

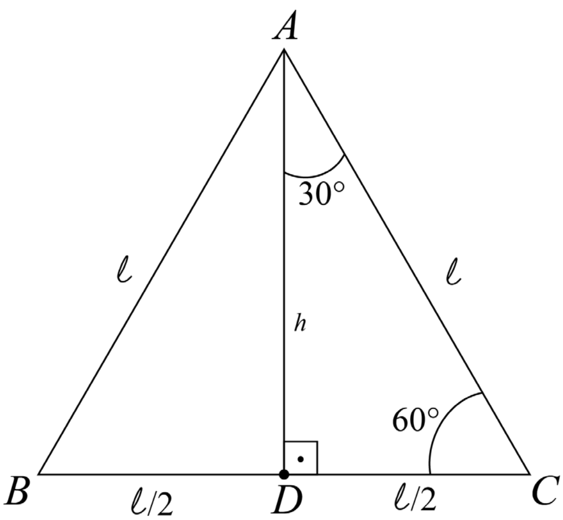
De modo análogo, se dividirmos a Relação Fundamental da Trigonometria por $\cos^2\hat{C}$, iremos obter

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Como aplicação da Definição 6.2, podemos determinar os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos mais conhecidos que são $30^\circ, 45^\circ$ e 60°. Tais ângulos são denominados de **ângulos notáveis.** Podemos calcular seus senos, cossenos e tangentes facilmente usando triângulos com propriedades bem conhecidas.

Para o cálculo de $sen\ 30^{\circ}, \cos 30^{\circ}, sen\ 60^{\circ}$ e $\cos 60^{\circ}$, iremos considerar o triângulo equilátero de lado l da Figura 89.

Figura 89 – Triângulo equilátero de lado l



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Seja ABC um triângulo equilátero cujo lado tem medida l, logo todos os seus ângulos medem 60°. Consideremos a sua altura AD relativa ao lado BC e denominemos seu comprimento por h. Como ABC é equilátero, temos que a altura AD é também mediana e bissetriz. Do fato de AD ser bissetriz, obtemos dois triângulos retângulos ABD e ACD com ângulos agudo medindo 30° e 60°. Agora o fato de a altura AD ser mediana, obtemos que o lado DC mede $\frac{l}{2}$. Temos então o triângulo retângulo ACD de hipotenusa l e catetos h e $\frac{l}{2}$. Vamos agora aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD e obter o valor de h. Assim

$$l^2 = h^2 + \left(\tfrac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Agora podemos aplicar as relações trigonométricas e determinar os valores do

Saiba mais...

Observe que $sen\ 30^{\circ} = \cos 60^{\circ}$ e que $sen\ 60^{\circ} = \cos 30^{\circ}$. Isso acontece devido aos ângulos 30° e 60° serem complementares. Essa propriedade está diretamente ligada às relações de simetria das funções seno e cosseno geradas pela simetria da função de Euler (essa função será estudada no próximo tópico).

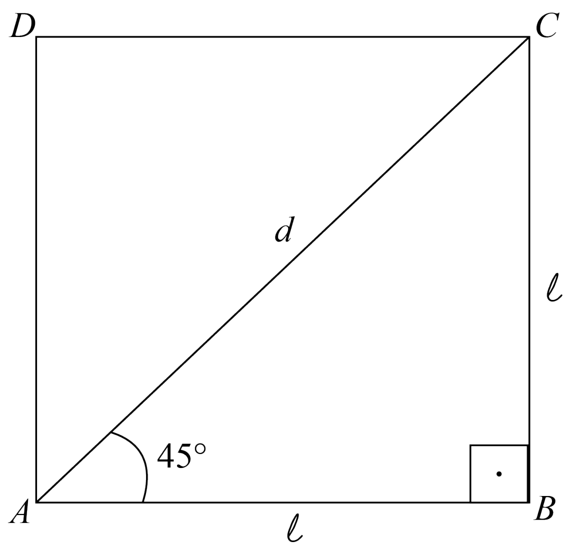
seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°. Assim, teremos

$$sen\ 30^\circ = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2};\cos 30^\circ = \frac{h}{l} = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } tg30^\circ = \frac{l/2}{h} = \frac{l/2}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2};\cos\ 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \text{ e } tg60^\circ = \frac{h}{l/2} = \sqrt{3}$$

Para calcularmos seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°, vamos considerar o quadrado de lado l mostrado na Figura 90.

Figura 90 – Quadrado de lado l



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Traçamos a diagonal AC do quadrado $ABCD$ e denominamos seu comprimento de d. A diagonal AC do quadrado divide-o em dois triângulos retângulos e isósceles. Dessa forma, os triângulos ABC e ADC possuem seus ângulos agudos medindo 45°, catetos iguais a l e hipotenusa igual a d. Novamente, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC e obter o valor de d em função de l, ou seja,

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

Em seguida, aplicando as relações trigonométricas no triângulo ABC, obteremos

$$sen\ 45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\cos 45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } tg\ 45^\circ = \frac{l}{l} = 1$$

É comum, em muitos livros do Ensino Médio, vermos uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis mais conhecidos. De modo a facilitar a fixação desses valores, seguem abaixo, na referida tabela, os valores calculados anteriormente:

Tabela 5: Tabela de seno, cosseno e tangente de $30^\circ, 45^\circ$ e 60°

	30^0	45^0	60^0
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{1}{2}$

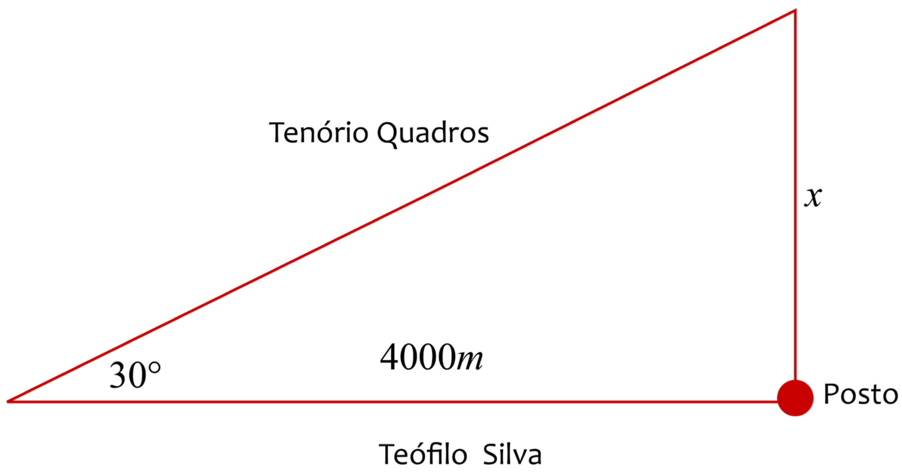
Fonte: DEaD | IFCE

Vejamos agora dois exemplos de situações problemas que envolvem os conceitos estudados anteriormente. Obviamente que, se você não lembrar o valor do seno, cosseno ou tangente do ângulo dado, poderá recorrer às demonstrações acima usando simplesmente o Teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas estudadas nessa aula.

Exercício resolvido 1: A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30°. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na avenida Teófilo Silva a 4000 m do citado cruzamento. Sabendo que o percurso do posto Estrela do Sul até a rua Tenório Quadros forma um ângulo de 90° no ponto de encontro do posto com a rua Teófilo Silva, determine, em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros.

Solução: Inicialmente iremos fazer uma figura para esboçar o que foi dito no enunciado do problema. A figura 91 retrata a situação descrita

Figura 91 – Representação do exercício resolvido 1



Fonte: DEaD | IFCE

Da figura 91, podemos observar no triângulo formado que podemos aplicar a tangente do ângulo de 30°, pois sabemos o valor de $tg\ 30^{\circ}$. Temos ainda o valor do cateto adjacente ao ângulo de 30° que vale 4000m, assim podemos descobrir o valor do cateto oposto ao ângulo de 30°, que denominamos de x, o qual corresponderá à distância pedida no enunciado. Sendo assim,

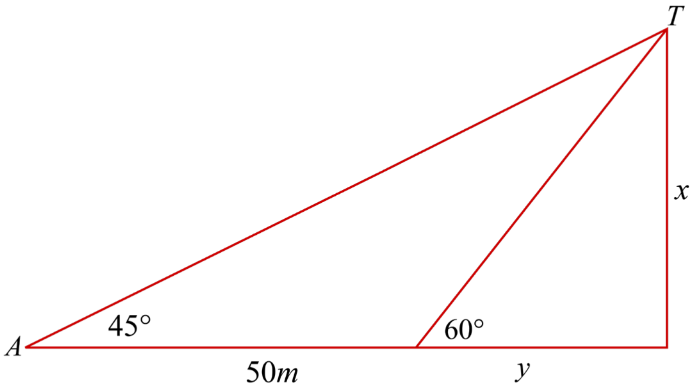
$$tg\ 30^{\circ} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Logo $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4000} \Rightarrow 3x = 4000\sqrt{3} \Rightarrow x \cong 2309,4\text{m}$. Como no enunciado é pedido o valor da distância em quilômetros, temos que $x \cong 2,3\,\text{km}$.

Exercício resolvido 2: De um ponto A, um agrimensor enxerga o topo T de um morro, conforme um ângulo de 45°. Ao se aproximar 50 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de 60°. Determine a altura do morro (use $\sqrt{3} = 1,7$).

Solução: Podemos representar o enunciado do problema de acordo com a figura 92.

Figura 92 – Representação do Exercício Resolvido 2



Fonte: http://malbatahannerd.blogspot.com.br/2015/03/mmn-e-propedeutica-6-de-um-ponto-uma.html

Usando os dados do enunciado, temos que

$$\begin{cases} tg\ 45^\circ = \dfrac{x}{50+y} = 1 \Rightarrow x = 50 + y \\ tg\ 60^\circ = \dfrac{x}{y} = \sqrt{3} = 1,7 \Rightarrow x = 1,7y \end{cases}$$

Comparando os dois valores de x, teremos

$$x = 50 + y \Rightarrow 1,7y = 50 + y \Rightarrow 0,7y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{0,7} \Rightarrow y \cong 71,43\text{m}$$

Como $x = 1,7y$, segue que $x = 1,7 \times 71,43$ e assim $x = 121,43\text{m}$. Portanto, o morro tem uma altura aproximada de $121,43$ m.

Vimos, até o momento, as relações trigonométricas sendo estabelecidas em um triângulo retângulo. Nesse momento, nos perguntamos: podemos estabelecer relações que envolvam seno e cosseno em outros triângulos que não sejam retângulos? A resposta para essa pergunta é sim!

Iremos agora apresentar duas leis importantes, que utilizamos bastante para resolver problemas geométricos ou até mesmo auxiliar a Trigonometria. São a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Começaremos com a Lei dos Cossenos que pode ser enunciada da seguinte maneira:

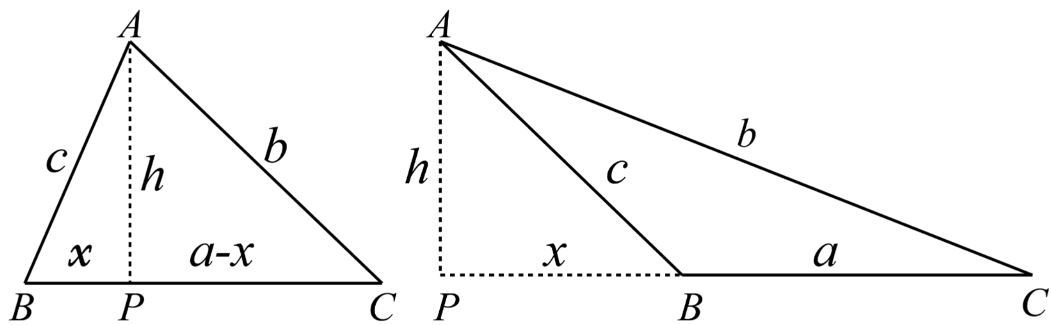
Proposição 6.3 Em um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração: Considere um triângulo ABC qualquer cujos lados medem a, b e c (Figura 93). Queremos mostrar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A} \quad (6.2)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\hat{B} \quad (6.3)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\hat{C} \quad (6.4)$$

Mostraremos então que a igualdade (6.2) é verdadeira. De forma análoga, demonstram-se as demais e serão deixadas como exercício para o leitor.

Figura 93 – Triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo



Fonte: Adaptada de Ross (2002)

Mostraremos que o resultado é válido para cada um dos triângulos acima. No primeiro triângulo, $h = \overline{AP}$ é a medida da altura baixada de A sobre o lado BC, dividindo o lado BC em duas partes. Considerando $\overline{BC} = a$, se denotarmos por x a medida de BP, ou seja, $\overline{BP} = x$ e então teremos que $\overline{PC} = a - x$. Observe que os triângulos ABP e APC formados são retângulos. Das relações trigonométricas estabelecidas no triângulo retângulo, temos que $\overline{BP} = x = c.\cos\hat{B}$, pois $\cos\hat{B} = \frac{x}{c}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABP e APC, fornecemos as duas igualdades abaixo:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad (6.5)$$
$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax \quad (6.6)$$

Substituindo o valor de (6.5) em (6.6), obtemos $b^2 = c^2 + a^2 - 2ax$. Substituindo $x = c.\cos\hat{B}$, obtemos

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\hat{B}$$

No segundo triângulo, temos que $\overline{BP} = x = c.\cos(\pi - \hat{B}) = -c.\cos\hat{B}$ (no próximo tópico, iremos tratar sobre medidas de ângulos e você entenderá o porquê de $\cos(\pi - \hat{B}) = -\cos\hat{B}$. A princípio, vamos nos ater a compreensão da existência e da validade da Lei dos Cossenos).

Continuando do Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos ABP e APC do segundo triângulo da Figura 93, temos

$$c^2 = h^2 + x^2 \qquad (6.7)$$

$$b^2 = h^2 + (a+x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax \qquad (6.8)$$

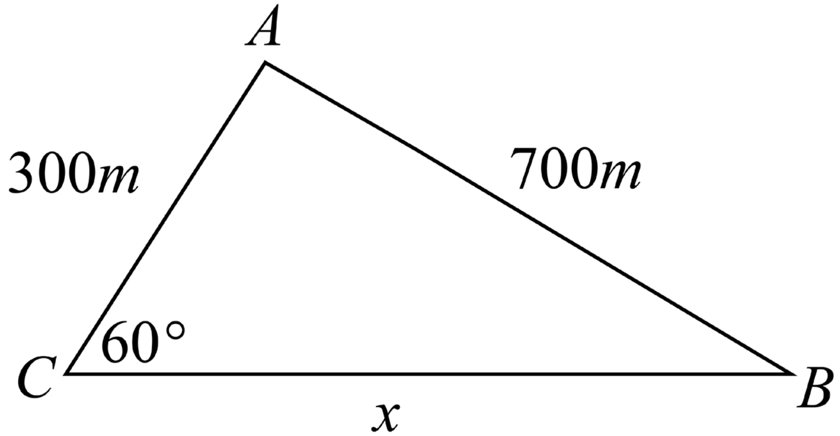
Substituindo o valor de (6.7) em (6.8), obtemos $b^2 = c^2 + a^2 - 2ax$. Como $x = -c.\cos\hat{B}$, teremos então que $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\hat{B}$. Portanto a igualdade vale em qualquer caso.

Note que a Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo retângulo nos dá o Teorema de Pitágoras. ■

Como aplicação da Proposição acima, temos o seguinte exemplo:

Exercício resolvido 3: Um topógrafo está fazendo as marcações e tirando as medidas de um terreno triangular, como mostra a Figura 94. Inicialmente, o topógrafo estava no ponto B e mediu a distância até o ponto A obtendo 700 metros. Do ponto A foi até o ponto C e obteve a medida de 300 metros. Com um equipamento chamado teodolito, o topógrafo consegue determinar o ângulo do triângulo sobre o ponto C, obtendo 60° . Calcule a distância do ponto C ao ponto B, sem a necessidade de fazer a medição em terra.

Figura 94 – Medidas do terreno triangular



Fonte: DEaD | IFCE

Solução: Da figura 94, aplicando a Lei dos Cossenos para o vértice C do triângulo ABC teremos que

$$700^2 = x^2 + 300^2 - 2.300.x.\cos 60^\circ$$

Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$, teremos que a igualdade acima resultará em

$$700^2 = x^2 + 300^2 - 300x$$

Simplificando a igualdade, obtemos a seguinte equação do segundo grau: $x^2 - 300x - 400000 = 0$. Aplicando o método de solução de uma equação do segundo grau (fórmula de Bháskara), obtemos as soluções $x_1 = -500$ e $x_2 = 800$. Como se trata de uma distância, obviamente que a resposta será positiva. Então a distância $x = \overline{CB} = 800$ metros.

Agora enunciaremos e demonstraremos a Lei dos Senos na Proposição abaixo:

> **Proposição 6.4** Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante.

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer cujos lados medem a,b e c. Queremos mostrar que

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Utilizando o primeiro triângulo na Figura 94, obtemos $h = c.sen\ \hat{B} = b.sen\ \hat{C}$. Daí temos que

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \quad (6.9)$$

Se traçarmos a altura baixada do vértice B ao lado $\overline{AC}$, obteremos, com o mesmo argumento, a relação

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \quad (6.10)$$

Podemos então concluir de (6.9) e (6.10) que, em um triângulo qualquer, tem-se

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Saiba mais...

Há uma interpretação geométrica para a razão $\frac{a}{sen\hat{A}}$. Ela é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC. Veja a demonstração no livro Fundamentos de Matemática Elementar vol. 3.

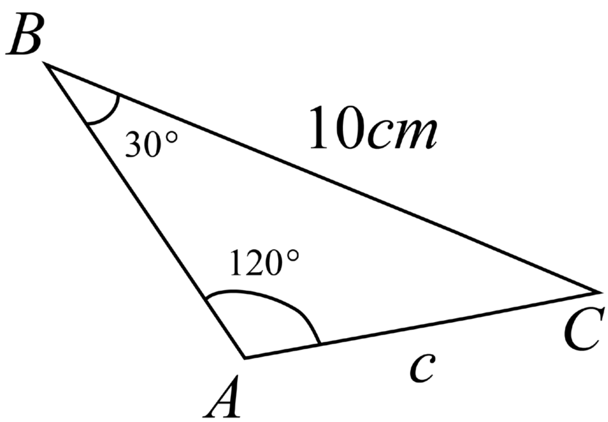
Para o segundo triângulo da Figura 94, a demonstração é análoga e será deixada como exercício.

Portanto, segue-se o resultado. ■

Como aplicação da Proposição anterior, temos o seguinte exemplo:

Exercício resolvido 4: Determine o valor de c no triângulo abaixo. Use que $sen\ 120^\circ = sen\ 60^\circ$.

Figura 95 – Triângulo Obtusângulo



Fonte: http://alunosonline.uol.com.br/matematica/lei-dos-senos.html

Solução: Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ABC, teremos

$$\frac{10}{sen\ 120^\circ} = \frac{c}{sen\ 30^\circ} \Rightarrow \frac{10}{sen\ 60^\circ} = \frac{c}{sen\ 30^\circ} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{10}{2} = \frac{\sqrt{3}c}{2} \Rightarrow \sqrt{3}c = 10$$

$$\Rightarrow c = \frac{10\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

Encerramos aqui o tópico 1 da aula 6. Vimos até aqui a definição das relações trigonométricas seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente e estudamos suas aplicações na determinação do valor dos ângulos notáveis e nas leis dos senos e lei dos cossenos. Vimos também a Relação Fundamental da Trigonometria e suas relações derivadas. No próximo tópico, iremos estudar a função de Euler que é fundamental para o estudo das funções trigonométricas.

Tópico 2

A função de Euler e as medidas de ângulos

OBJETIVOS

- Estudar o círculo trigonométrico e as medidas dos ângulos
- Conhecer a função de Euler e suas propriedades

Saiba mais...

Euler foi um importante matemático. Entre suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna estão a introdução da função gama e a relação entre o cálculo diferencial de Leibniz. Para mais informações, acesse o site do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/euler/euler.html

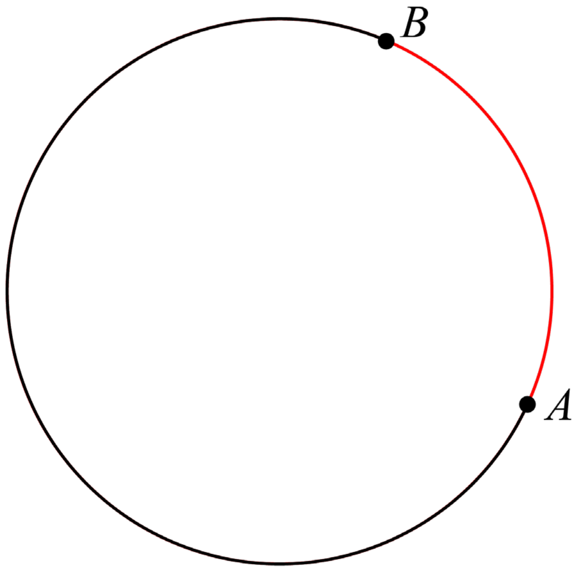
Neste tópico, iremos estudar a função de Euler para podermos, mais à frente, definir as funções trigonométricas. Inicialmente iremos estudar a noção de arcos e sua unidade de medida. Depois definiremos o conceito de círculo unitário e a função de Euler. Veremos ainda algumas propriedades da função de Euler e as suas principais simetrias.

Inicialmente definiremos o conceito de arco.

Definição 6.3 Sejam A e B dois pontos quaisquer numa circunferência. **Arco** é uma porção da circunferência delimitada por dois pontos (Figura 96). Usaremos a notação $\overset{\frown}{AB}$ para denominar arco. Os pontos A e B são denominados extremidades do arco e pode ser indicado por $\overset{\frown}{AB}$ (arco menor) ou $\overset{\frown}{BA}$ (arco maior).

Na figura 96, o arco $\overset{\frown}{AB}$, representado na cor vermelha, é o arco menor; e o arco $\overset{\frown}{BA}$, representado na cor azul, é o arco maior.

Figura 96 – Arcos



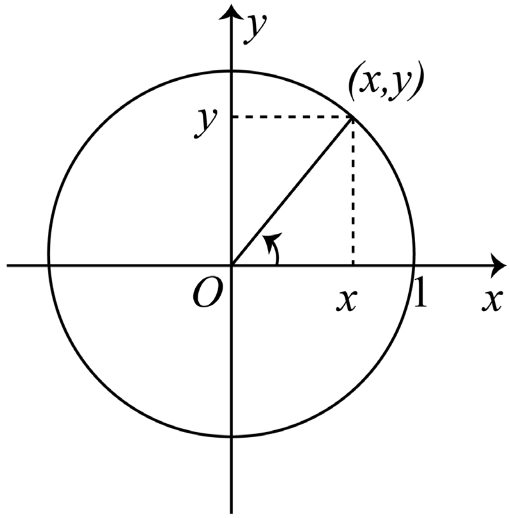
Fonte: DEaD | IFCE

Para determinar a medida de um arco, usamos o grau ou o radiano. O grau, denotado por $^\circ$, é um arco unitário igual a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido. Já o radiano, denotado por rad, é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido, ou seja, se esticarmos o arco $\overset{\frown}{AB}$, obteríamos um segmento de reta AB cuja medida seria exatamente o raio da circunferência.

Vamos entender o processo de construção do círculo trigonométrico. Começaremos com a definição:

Definição 6.4 A circunferência C de centro na origem do $\mathbb{R}^2$ e raio 1 será denominada de círculo unitário ou circunferência unitária (Figura 97). O círculo unitário pode ser descrito na forma $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Figura 97 – Círculo unitário



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Destacaremos abaixo algumas observações sobre o círculo unitário:

- Para qualquer ponto $P=(x,y)\in C$, temos que $-1\leq x\leq 1$ e $-1\leq y\leq 1$. Por exemplo, para qualquer ângulo α, temos que o ponto $P=(\cos\alpha, sen\ \alpha)$ pertence ao círculo unitário, pois $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria). Sendo assim, $-1\leq \cos\alpha \leq 1$ e $-1\leq sen\ \alpha\leq 1$.

Um círculo pode ser percorrido em dois sentidos. Quando um dos sentidos é escolhido e denominado positivo, dizemos que o círculo está orientado. Tradicionalmente, em Matemática, escolhemos o sentido anti-horário como positivo.

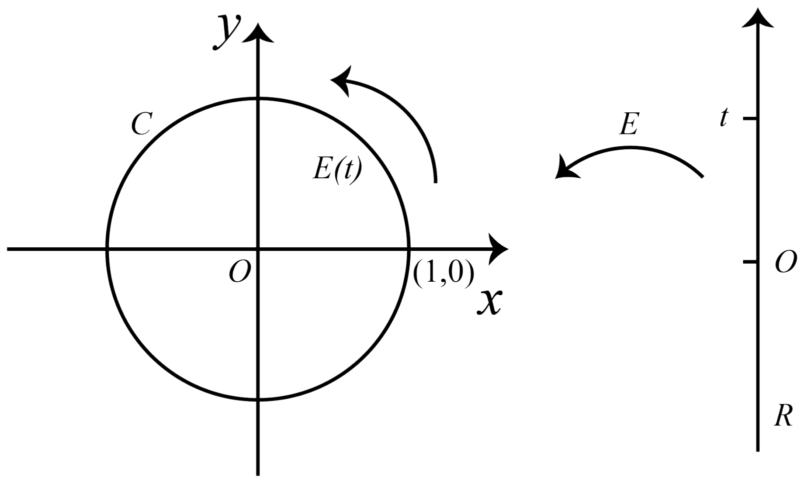
- Indicaremos o ponto $(1,0)$ como sendo a origem dos arcos do círculo unitário.
- Iremos considerar o sentido anti-horário. Dessa forma, podemos dizer que o círculo unitário é orientado.

Podemos agora então definir uma função que associa a cada número real um ponto do círculo unitário. Tal função foi criada por Euler e, por isso, é denominada de função de Euler. De maneira intuitiva, podemos pensar na reta real como se fosse um fio e, a partir do momento que fosse aplicada a função de Euler, tal fio seria enrolado no contorno do círculo unitário de forma que o número real 0 coincida com a origem dos arcos. Sua definição é dada a seguir:

Definição 6.5 A função de Euler $E:\mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t)=(x,y)$ do círculo unitário (Figura 98) de forma que

- $E(0)=(1,0)$
- Quando $t>0$, percorremos o círculo unitário, a partir da origem dos arcos, um caminho de medida *t*, no sentido anti-horário (sentido positivo). O ponto final do percurso será denotado por $E(t)$
- Quando $t<0$, percorremos o círculo unitário, a partir da origem dos arcos, um caminho de medida $|t|$, no sentido horário (sentido negativo). O ponto final do percurso será denotado por $E(t)$.

Figura 98 – Representação geométrica da função de Euler



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

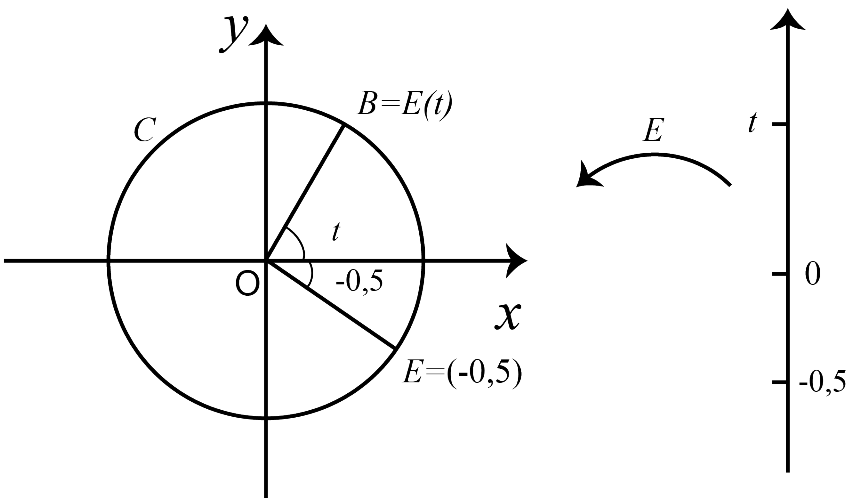
Note que, como estamos trabalhando com o círculo unitário, temos que seu raio vale 1. Dessa forma, seu comprimento valerá 2π. Temos que, quando t percorre um distância de 2π, sua imagem $E(t)$ terá percorrido um arco de igual comprimento e assim teremos dado uma volta completa no círculo unitário retornando ao ponto de origem dos arcos. Portanto, se tivermos $t>2\pi$ ou $t<-2\pi$, então o arco de comprimento $|t|$, partindo da origem dos arcos, dará mais de uma volta no círculo unitário. Podemos assim concluir que $E(t)=E(t+2k\pi)$, em que $t\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, dado um ponto $P\in C$, temos que ele é a imagem de infinitos números reais, pela função de Euler. Note ainda que $E(2k\pi)=(0,1)$.

Como $E(t)=E(t+2k\pi)$, dizemos que t e $t+2k\pi$ são *côngruos* e que $t+2k\pi$ são as *várias determinações* do ângulo AP. Por exemplo, suponha que tenhamos $t=\frac{\pi}{3}$. Dessa forma, temos um arco denominado de primeira determinação positiva dos arcos da forma $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ em que $k\in\mathbb{Z}$, pois $\frac{\pi}{3}$ é menor valor positivo que $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ assume. Se considerarmos $k=1$, teríamos $t=\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$ e seria considerada a segunda determinação positiva dos arcos da forma $\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Note ainda que, se considerarmos $k=-1$, teremos que $t=\frac{\pi}{3}-2\pi=\frac{5\pi}{3}$ é a primeira determinação negativa dos arcos da forma $\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

Vejamos agora a definição de medida dos ângulos.

Definição 6.6 Sejam $A=(1,0)$ e $0=(0,0)$. Para $t\in\mathbb{R}$ seja $B=E(t)$, definimos a medida do ângulo $A\hat{O}B$ como sendo t radianos.

Figura 99 – Representação de arcos



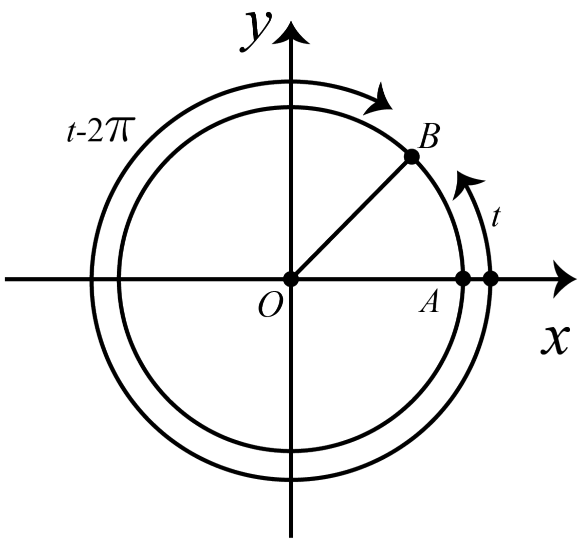
Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Da Definição acima, podemos tirar algumas conclusões importantes:

1. Podemos ter $B=E(t)$ com $t<0$ e assim teremos ângulos com medida negativa.
2. Como temos que $B=E(t)$, isso implica que $B=E(t+2k\pi)$ para todo $k\in\mathbb{Z}$ então a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é determinada apenas a menos de um múltiplo inteiro de 2π. Por exemplo, o ângulo de 5 radianos é também um ângulo de $5-2\pi$ radianos.

Generalizando, teremos que, se $B = E(t)$ então $B = E(t - 2\pi)$ pois há dois arcos (um de comprimento $|t|$ e outro de comprimento $|t - 2\pi|$) que vão de $A = (1,0)$ até o ponto B do círculo unitário.

Figura 100 – Arcos AB de comprimentos $|t|$ e $|t - 2\pi|$



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

1. O ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 radiano se, e somente se, o arco $\widehat{AB}$ da circunferência C tem comprimento igual a 1, isto é, igual ao raio da circunferência. Mas geralmente, numa circunferência de raio r, a medida de um ângulo central em radianos é igual a $\frac{l}{r}$, em que l é o comprimento do arco subentendido por esse ângulo.

Saiba mais...

A medida do ângulo $A\hat{O}B$ em radianos também pode ser expressa como $\frac{2a}{r^2}$, em termos da área a do setor circular AOB e do raio r.

Escreveremos $1\,grau = 1^\circ$ e 1 radiano = 1 rad. Podemos então relacionar radianos com graus. Temos que a circunferência inteira tem 2π radianos e 360° graus, segue-se que $2\pi rad = 360^\circ$ ou seja, $1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = 57,3$ graus. Temos ainda que $180^\circ = \pi$ rad, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$rad, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ rad, etc. Para saber as medidas de outros ângulos (ou em graus ou em radianos), basta fazermos uma regra de três usando

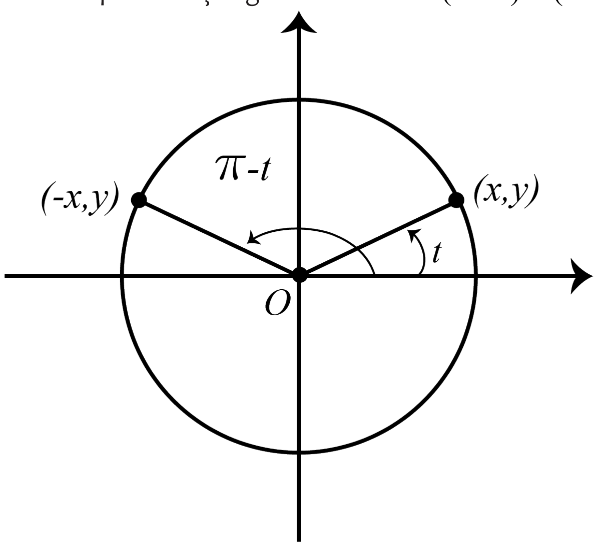
Veja como analisar a medida do ângulo em função da área do setor circular no livro "A Matemática do Ensino Médio" vol. 1 da coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

o fato de que 2π rad equivale a 360°. Note ainda que, como adotamos o sentido anti-horário como o sentido positivo, temos que os quadrantes do círculo serão contados também nesse sentido, ou seja, primeiro quadrante para $0^\circ < t < 90^\circ$, segundo quadrante para $90^\circ < t < 180^\circ$, terceiro quadrante para $180^\circ < t < 270^\circ$ e quarto quadrante, fechando o círculo, para $270^\circ < t < 360^\circ$.

Tendo conhecimento de como funciona a função de Euler e as medidas dos ângulos, devemos observar um fato importante na função de Euler. As relações de simetria. Tais relações serão importantes para o estudo das propriedades das funções trigonométricas. Vejamos algumas relações de simetria da função de Euler.

Se temos $E(t) = (x, y)$, então teremos $E(\pi - t) = (-x, y)$. Essa simetria, representada geometricamente pela Figura 101, nos mostra que qualquer ângulo t subtraído de π radianos terá imagem pela função de Euler com os mesmos valores absolutos da imagem de t com o sinal de x trocado. Isso ocorre porque, sendo t um ângulo que está no primeiro quadrante do círculo trigonométrico; $\pi - t$ será um ângulo do segundo quadrante e todos os pontos desse quadrante apresentam as coordenadas de x negativa e de y positiva.

Figura 101 – Representação geométrica de $E(\pi - t) = (-x, y)$



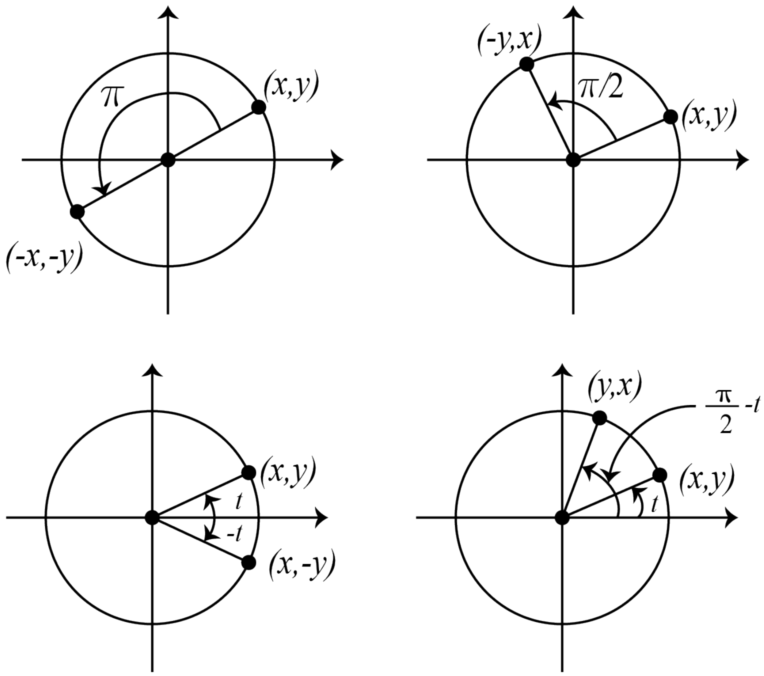
Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Outros exemplos de simetria, como

$$E(\pi+t)=(-x,-y),\ E\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=(-y,x),\ E(-t)=(x,-y) \text{ e } E\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=(y,x),$$

estão representados na Figura 102 a seguir:

Figura 102 – Representações de simetrias da função de Euler



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Como dito anteriormente, a simetria da função de Euler nos mostra algumas propriedades das funções seno e cosseno. No início do tópico, observamos que a relação fundamental $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ nos sugere que $\cos\alpha$ e $sen\ \alpha$ representam as coordenadas da circunferência $x^2+y^2=1$ de centro na origem e raio unitário. Assim sendo, se pormos $x=\cos\alpha$ e $y = sen\ \alpha$, podemos observar algumas propriedades do seno e do cosseno através das simetrias da função de Euler. Nesse caso, teríamos $E(\pi-t)=(-x,y)$. Na figura 102, observamos uma das simetrias da função de Euler, obtendo $E(\pi-t)=(-x,y)$. Comparando $E(\pi-t)=(-x,y)$ com $E(t)=(cos\ t, sen\ t)$, facilmente vemos que $\cos(\pi-\mathrm{t})=-\cos t$.

Veja, por exemplo, que, quando demonstramos a Lei dos Cossenos, utilizamos a igualdade $\cos\ (\pi-\widehat{B})=-\cos\widehat{B}$, que vem justamente da simetria da função de

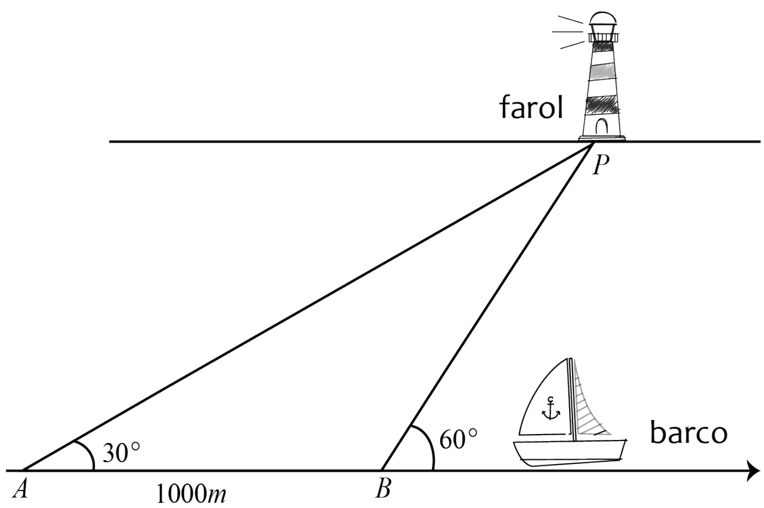
Euler como propriedade das funções trigonométricas seno e cosseno. Essas simetrias, quando tratadas nas funções trigonométricas, são chamadas de redução ao primeiro quadrante. De fato, alguns ângulos do primeiro quadrante têm seus senos e cossenos facilmente calculados. Assim, podemos calcular seno e cosseno de ângulos em outros quadrantes usando tais simetrias (ou uma redução ao primeiro quadrante). Obviamente que não conseguimos calcular facilmente os senos e cossenos de todos os ângulos do primeiro quadrante.

Chegamos ao final do tópico 2 e da aula 6. Neste tópico, definimos a função de Euler e, através dela, definimos a medida dos ângulos (em grau ou radianos) e verificamos algumas relações de simetria importantes para determinarmos as propriedades das funções trigonométricas. Na próxima aula, iremos começar o estudo das funções trigonométricas e estabelecer suas propriedades. Por enquanto, vocês podem estudar um pouco mais a nossa aula 6 com a prática dos exercícios propostos a seguir.

1. Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

2. Um barco navega na direção AB, próximo a um farol P, conforme a Figura 103.

Figura 103 – Navegação do barco

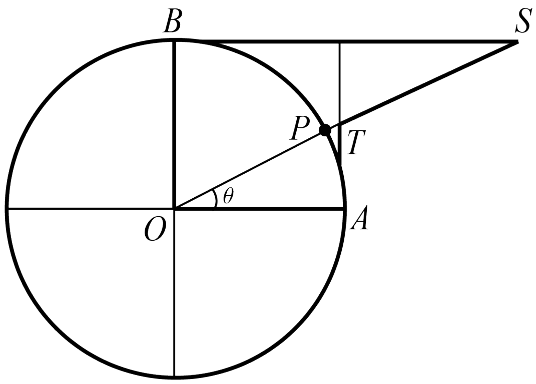


Fonte: http://www.profezequias.net/trigonometria.html

No ponto A, o navegador verifica que a reta AP, da embarcação ao farol, forma um ângulo de 30° com a direção AB. Após a embarcação percorrer 1.000 m, no ponto B, o navegador verifica que a reta BP, da embarcação ao farol, forma um ângulo de 60° com a mesma direção AB. Seguindo sempre a direção AB, qual a menor distância entre a embarcação e o farol será equivalente em metros?

3. A figura mostra uma circunferência de 1m de raio e centro O, à qual pertencem os pontos A, B e P sendo AO perpendicular a BO.
BS e AT são retas tangentes a essa circunferência.
Determine o perímetro do polígono $AOBSTA$ em função do ângulo teta.

Figura 104 – Circunferência de raio 1m



Fonte: Ross (2002)

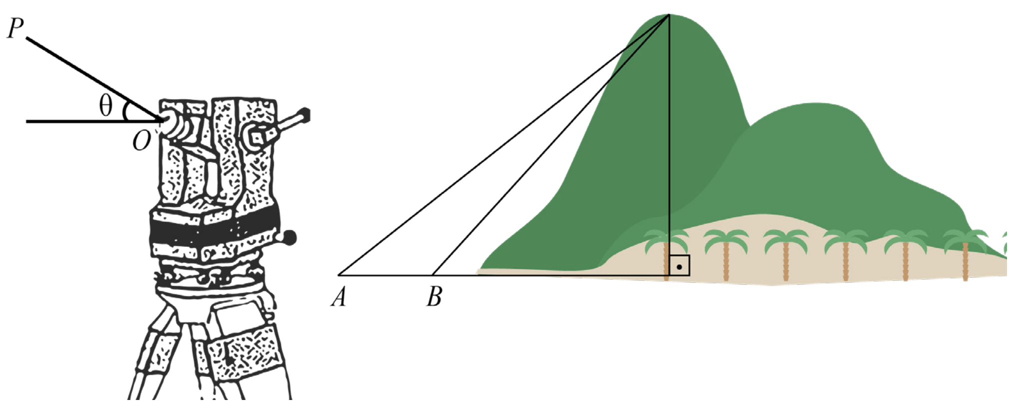
4. O teodolito é um instrumento ótico usado principalmente por engenheiros civis e agrônomos para realizar medidas indiretas de grandes distâncias e alturas. Uma luneta, apoiada em um tripé, permite que um observador O mire em um referencial P e o teodolito indica o ângulo agudo (representado pela letra grega Teta) que o segmento OP faz com o plano horizontal. Um engenheiro usou o teodolito para medir a altura do Pão de Açúcar do seguinte modo:

a) Em um ponto A, o teodolito indicou um ângulo de 45°.

b) Em seguida, o engenheiro foi em direção ao Pão de Açúcar até um ponto B, distante 99 metros de A, e o teodolito indicou um ângulo cujo seno é $0{,}8$.

Para calcular a altura do Pão de Açúcar, o engenheiro desprezou a distância da luneta do teodolito ao solo. Qual a altura calculada?

Figura 105: Pão de Açúcar



Fonte: http://www.profezequias.net/trigonometria.html

5. Mostre geometricamente as relações de simetria $E(\pi+t)=(-x,-y)$, $E\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)=(-y,x)$, $E(-t)=(x,-y)$ e $E\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=(y,x)$ da função de Euler.

Gabarito

1. 500 metros

2. $500\sqrt{3}$ metros

3. $\cot g\theta + \cos\sec\theta - \sec\theta + tg\theta + 2$

4. $154,6875$ metros

5. Questão de demonstração **DISCIPLINA: MATEMÁTICA BÁSICA I**

Aula 7

Funções Trigonométricas e suas inversas

Caro(a) aluno(a),

Nessa aula continuaremos nossos estudos sobre Trigonometria. Focaremos o estudo das chamadas funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante; e suas funções trigonométricas inversas: arco seno, arco cosseno e arco tangente. As funções trigonométricas foram estudadas por Hiparco de Niceia (180-125 a.C.), Ptolomeu do Egito (90-165 d.C.) e depois por muitos outros grandes matemáticos, como Leonhard Euler, que foi responsável por estabelecer o tratamento analítico das funções trigonométricas na Europa e estabeleceu as abreviações que conhecemos hoje: $sen, \cos, tg, \cot g, \sec$ e cossec.

No tópico 1, estudaremos as funções seno e cosseno. Listaremos ainda suas principais propriedades e, a partir delas, faremos a construção dos gráficos de tais funções. Mostraremos ainda os mais variados gráficos que podem ser construídos, usando as funções seno e cosseno. No tópico 2, continuaremos o estudo das funções trigonométricas e estudaremos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante. Veremos ainda as suas propriedades e a usaremos para realizar o esboço dos seus gráficos. E por fim, no tópico 3, iremos estudar as chamadas funções trigonométricas inversas: arco seno, arco cosseno e arco tangente. Veremos suas propriedades e analisaremos a construção de seus gráficos.

Objetivos

- Estudar as funções trigonométricas, suas propriedades e gráficos
- Entender as funções inversas trigonométricas, suas propriedades e gráficos

Tópico 1

Funções Trigonométricas

OBJETIVOS

- Estudar as funções seno e cosseno e suas propriedades
- Compreender o estudo do gráfico das funções seno e cosseno

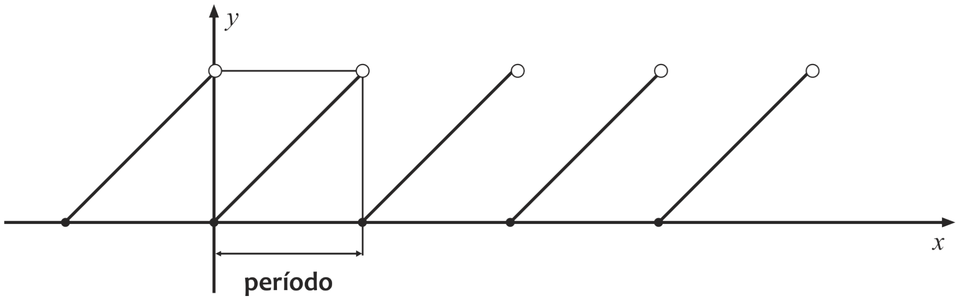
Neste primeiro tópico da aula 7, iremos conhecer as funções trigonométricas seno e cosseno. Veremos ainda algumas de suas propriedades importantes e estudaremos o gráfico de cada uma dessas funções.

Inicialmente daremos a definição do que seria uma função periódica.

Definição 7.1 Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se **periódica** quando existe um número real $T\neq 0$, tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Dessa forma, $f(t+kT)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{Z}$. O menor número $T>0$, tal que $f(t+T)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ chama-se **período** da função f.

O período pode ser verificado através da função de forma algébrica ou através do gráfico da função. Muitas vezes é bem simples determinar o período da função através do gráfico, pois basta observar o comprimento do segmento do gráfico que está sempre se repetindo. Por exemplo, na função *dente de serra* definida por $f(x)=x$ se $x\in\mathbb{Z}$ e $f(x+\alpha)=\alpha$ quando $0<\alpha<1$ e $x\in\mathbb{Z}$ podemos observar, conforme figura abaixo, que uma parte do gráfico da função está sempre se repetindo.

Figura 106 – Gráfico da função dente de serra



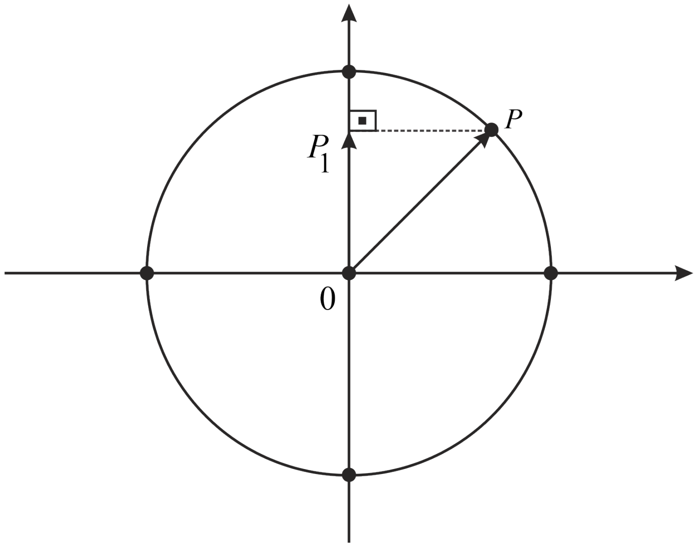
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 17)

O período da função é dado pela distância percorrida pela parte que se repete da função ao longo do eixo x. Nesse caso, o período da função é igual a 1, que é a distância entre dois pontos pretos sobre o eixo x.

Vamos agora então as definições das funções trigonométricas. A começar pela função seno.

Definição 7.2 Considere x um número real e seja P sua imagem no círculo unitário. Denominamos **seno de** x, indicamos por $sen\ x$, como sendo a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema cartesiano $x0y$ (Figura 107). A função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número $\overline{OP_1} = sen\ x$, ou seja, $f(x) = sen\ x$ é denominada **função seno.**

Figura 107 – Representação de $sen\ x$



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 14)

De maneira intuitiva, da figura 107 temos que um ângulo x determina um ponto P sobre a circunferência e, se projetarmos o ponto P sobre o eixo y, obteremos um ponto P_1. O segmento $\overline{OP_1}$ será a representação de $sen\ x$.

Da Definição 7.2 seguem algumas observações:

1. Temos que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e sua imagem é o conjunto $[-1,1]$.

2. A função seno é positiva, se x é um ângulo do primeiro $\left(0 < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ ou segundo quadrante $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ e será negativa no terceiro $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$.

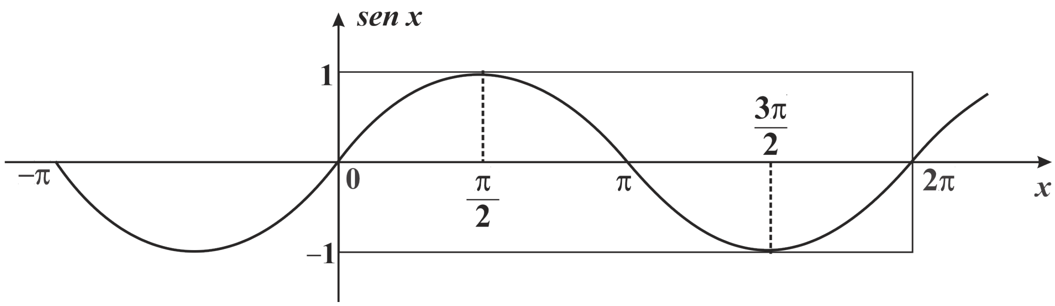
3. A função seno será crescente no primeiro $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ e será decrescente no segundo $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ ou terceiro quadrante $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$.

4. A função seno é periódica e seu período vale 2π.

5. Alguns valores notáveis para a função seno são: $sen\ 0 = 0,\ sen\ \frac{\pi}{2} = 1,\ sen\ \pi = 0, sen\frac{3\pi}{2} = -1$ e $sen\ 2\pi = 0$.

De acordo com as observações acima, podemos então fazer o esboço do gráfico da função seno, como segue na figura 108:

Figura 108 – Gráfico da função $f(x) = sen\ x$



Fonte: Adapatada de Iezzy(1997, p. 19)

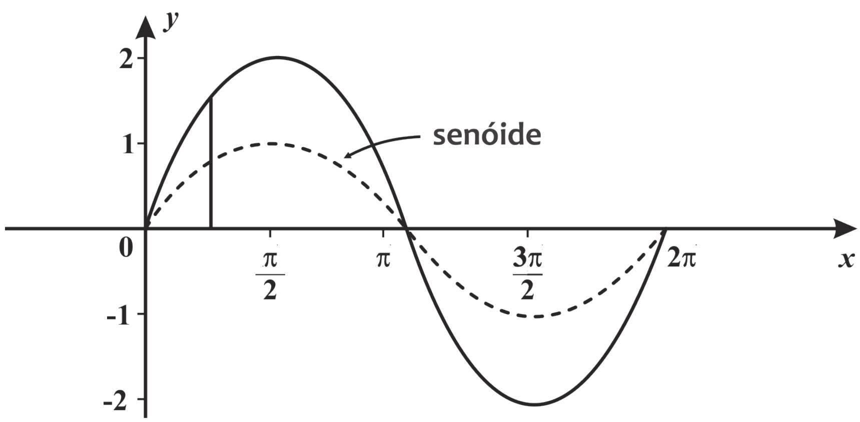
Note que só precisamos fazer o esboço do gráfico no intervalo de $[0, 2\pi]$. Sendo assim, quando a imagem de x (Ponto P) realizar uma volta completa no círculo unitário no sentido anti-horário, teremos que a ordenada de P descreverá a curva indicada na figura 108. O gráfico acima é denominado de *senoide e* nos indica como varia a função $f(x) = sen\ x$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de construção de gráficos.

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2sen\ x$. Para que possamos construir o gráfico da função pedida inicialmente, devemos atribuir um valor para x. Depois substituímos tais valores em $sen\ x$ e, por fim, multiplicamos o resultado por 2. A figura 109 apresenta o gráfico da função (à direita) e os valores usados para o esboço do gráfico (à esquerda).

Figura 109 – Gráfico da função $f(x) = 2sen\ x$

x	$sen\ x$	$f(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 21)

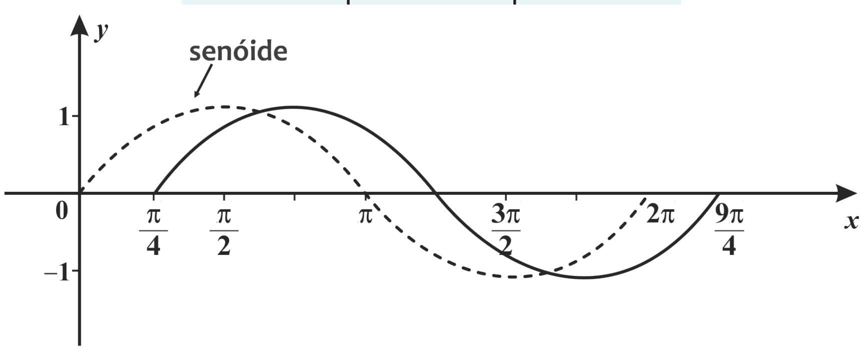
Veja que como $-1 \le sen\ x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2sen\ x \le 2$ e, dessa forma, a imagem da função $f(x) = 2sen\ x$ será o intervalo $[-2, 2]$, e seu o período continua sendo 2π.

Note que no gráfico da figura 109 descrevemos somente a parte que se repete. Na verdade, o gráfico dessas funções não se limita a esses segmentos de gráfico. Esses pedaços se repetem infinitamente, tanto para o lado positivo do eixo x como para o lado negativo.

Exemplo 2: Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Perceba que independente do ângulo $-1\leq sen\,x\leq 1$, temos que a imagem da função $f(x)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ será $[-1,1]$. Atribuiremos valores a x para obtermos os ângulos notáveis $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ e 2π em $x-\frac{\pi}{4}$. Dessa forma, temos o gráfico abaixo obtido através da tabela de valores:

Figura 110 – Gráfico da função $f(x)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

x	$x-\frac{\pi}{4}$	$f(x)$
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{9\pi}{4}$	2π	0



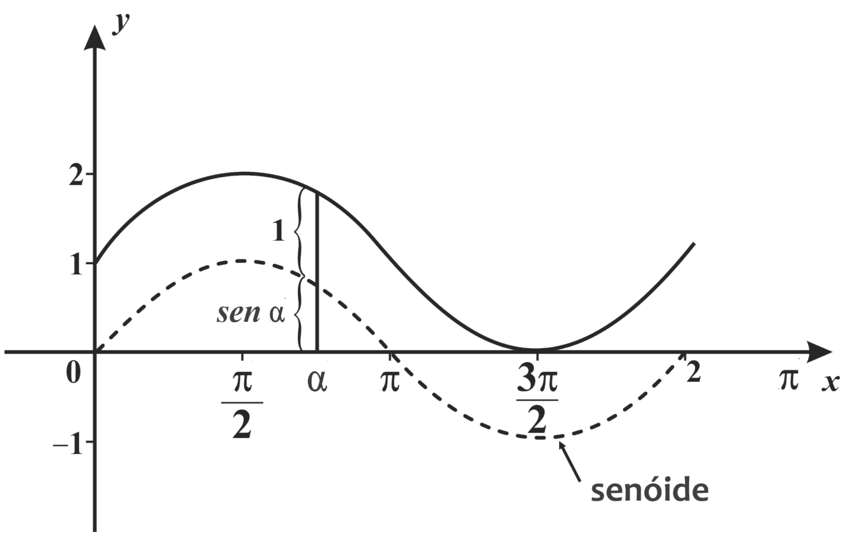
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 25)

Temos que o período da função é a distância percorrida pela parte que se repete da função sobre o eixo x, então essa distância será dada por $\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}=2\pi$, ou seja, o período da função não sofreu variação. O que aconteceu foi que o gráfico da função $f(x)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ sofreu uma translação para a direita (um afastamento para a direita de $\frac{\pi}{4}$ sobre o eixo x).

Exemplo 3: Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1+sen\ x$. Estamos adicionando a cada valor de $sen\ x$ uma unidade. Note que como $-1\leq sen\ x\leq 1\Rightarrow 1-1\leq 1+sen\ x\leq 1+1$, ou seja, a imagem da função $f(x)=1+sen\ x$ será o intervalo $[0,2]$. O gráfico da função é dado pela figura abaixo e foi obtido a partir da tabela de valores que se encontra à esquerda.

Figura 111 – Gráfico da função $f(x)=1+sen\ x$

x	$sen\ x$	$f(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 24)

Observe que o período da função $f(x)=1+sen\ x$ será 2π. Veja que todos os pontos sofreram um acréscimo de uma unidade, então para um ângulo α qualquer temos que o $sen\ \alpha$ será acrescido de 1. Com isso, o gráfico de $f(x)=1+sen\ x$ sofre uma translação para cima. Se ao invés de somarmos uma unidade, subtraíssemos um número real qualquer, então o gráfico da função sofreria uma translação para baixo.

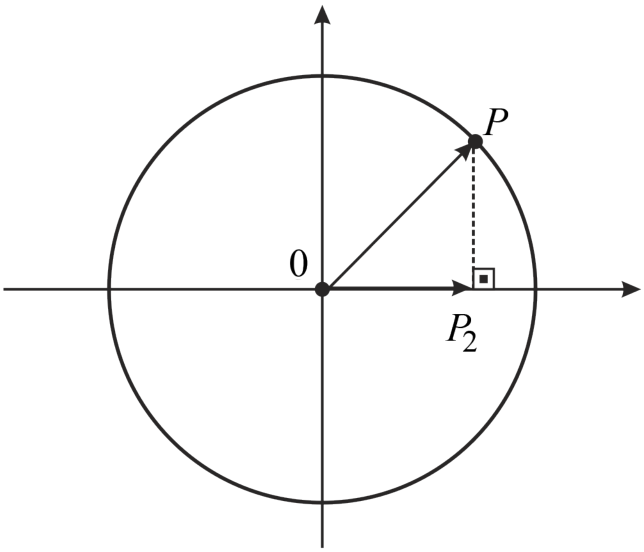
Com base nos exemplos acima, podemos então resumir as variações da função seno. Se tomarmos o caso geral da função $f(x)=a+bsen\ (cx+d)$, teremos que a imagem será dada por $\text{Im}(f)=[a-b,a+b]$ se $b>0$ ou $\text{Im}(f)=[a+b,a-b]$ se $b<0$. Além disso, podemos tirar outras conclusões:

1. Variações em a teremos um translação do gráfico para cima ou para baixo.
2. Variações em b teremos uma mudança na amplitude do gráfico ou inversão do gráfico.
3. Variações em c teremos uma mudança no período da função. O período da função será dado por $p=\dfrac{2\pi}{|c|}$, pois como o período determina distância e c pode assumir valores negativos, então colocamos módulo. Veja também, de acordo com os exemplos, que o período da função é inversamente proporcional a $|c|$.
4. Variações em d teremos uma translação para a esquerda ou direita.

Essas variações ocorrem também na função cosseno que definiremos a seguir.

Definição 7.3 Considere x um número real, e seja P sua imagem no círculo unitário. Denominamos **cosseno de** x, indicamos por $\cos x$, como sendo a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema cartesiano $x0y$ (Figura 112). A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número $\overline{OP_2}=\cos x$, ou seja, $f(x)=\cos x$ é denominada **função cosseno**.

Figura 112 – Representação de $\cos x$



Fonte: Adaptada de Ross (2002, p. 133)

De maneira intuitiva, da figura 112 temos que um ângulo x determina um ponto P sobre a circunferência e se projetarmos o ponto P sobre o eixo x, obteremos um ponto P_2. O segmento $\overline{OP_2}$ será a representação de $\cos x$ (como mostra a figura 112).

Da Definição 7.3 seguem algumas observações:

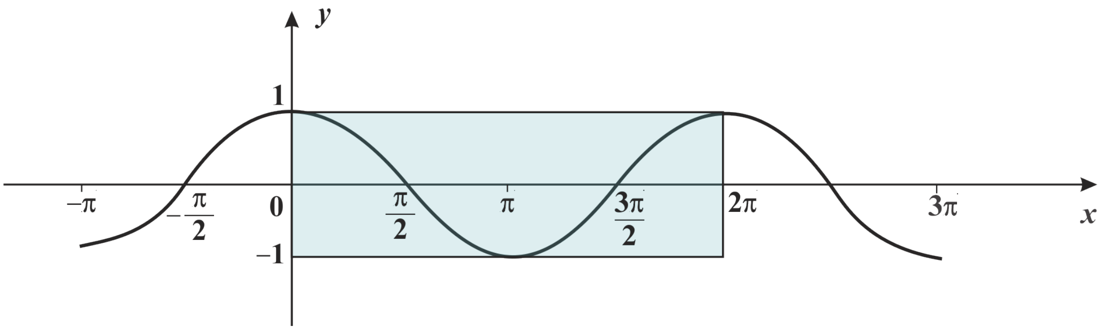
1. Temos que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e sua imagem é o conjunto $[-1,1]$.
2. A função cosseno é positiva, se x é um ângulo do primeiro $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ e será negativa no segundo $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ ou terceiro quadrante $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$.
3. A função cosseno será decrescente no primeiro $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ou segundo quadrante $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ e será crescente no terceiro $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$.
4. A função cosseno é periódica e seu período vale 2π.

5. Alguns valores notáveis para a função cosseno são:

$$\cos 0 = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = -1, \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \text{ e } \cos 2\pi = 1.$$

De acordo com as observações acima, podemos então fazer o esboço do gráfico da função cosseno como segue na figura 113:

Figura 113 – Gráfico da função $f(x) = cos\ x$



Fonte: Adaptada de Iezzy(1997, p.19)

O gráfico da função cosseno é defasado em 90° do gráfico da função seno, pois da simetria da função de Euler temos que $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Veja que na figura 113 o retângulo sombreado indica a parte do gráfico que se repete ao longo do eixo x, tanto para o sentido positivo como para o sentido negativo, isto é, a parte sombreada indica o período da função cosseno.

O gráfico da função cosseno sofre também as mesmas variações da função seno. Assim sendo, de modo análogo, podemos escrever de forma geral a função cosseno como $f(x) = a + b\cos(cx + d)$. Com isso, teremos que a imagem da função será dada por $\text{Im}(f) = [a - b, a + b]$ se $b > 0$ ou $\text{Im}(f) = [a + b, a - b]$ se $b < 0$. O período da função será dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

Com as generalizações das funções seno e cosseno podemos facilmente determinar imagem e período das funções e, com isso, esboçar seus gráficos. Vejamos um exemplo.

Exercício resolvido 1: Determine o período e a imagem da função $f(x) = 1 + 2\cos(3x)$.

Solução: Para encontrarmos o período, basta lembrar que se temos $f(x) = a + b\cos(cx + d)$, então $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$. Daí, observando a função do problema, temos que $c = 3$. Logo, o período da função será $p = \dfrac{2\pi}{3}$. Para obtermos a imagem, veja que $a = 1$ e $b = 2$. Como b é positivo, então $\operatorname{Im}(f) = [a - b, a + b]$. Logo, $\operatorname{Im}(f) = [1 - 2, 1 + 2]$. O esboço do gráfico será deixado como exercício para o leitor.

Outra questão bem interessante de analisarmos nas funções seno e cosseno é que elas sempre variam de – 1 a 1, isto é, $-1 \leq sen\ x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$, independente do ângulo x. Vejamos um problema em que usaremos essa situação.

Exercício resolvido 2: Para que valores de m existe x, tal que $sen\ x = 2m - 5$?

Solução: Para resolvermos esse problema, basta lembrar que $-1 \leq sen\ x \leq 1$, ou seja, $-1 \leq 2m - 5 \leq 1$. Somando 5 a todos os membros da desigualdade, teremos $5 - 1 \leq 2m - 5 + 5 \leq 1 + 5$ resultando em $4 \leq 2m \leq 6$. Agora basta dividir todos os membros da desigualdade por 2 e obtemos os possíveis valores de m para que exista x, tal que $sen\ x = 2m - 5$. Assim, $2 \leq m \leq 3$.

Outra propriedade não menos importante das funções trigonométricas seno e cosseno refere-se à paridade das funções. Dizemos que uma função $f(x)$ é par, quando temos $f(-x) = f(x)$ para todo x pertencente ao seu domínio. Dizemos também que uma função $f(x)$ é ímpar, quando temos $f(-x) = f(x)$ para todo x pertencente ao seu domínio. Se a função não satisfizer nenhuma das condições acima, dizemos simplesmente que a função não é par nem ímpar. Geometricamente, analisamos a paridade das funções de acordo com simetrias no gráfico. Uma função será par se seu gráfico for simétrico em relação ao eixo y. Em outras palavras, o eixo y funcionará como um espelho. Se os gráficos à direita e à esquerda do eixo y forem um espelho do outro, então a função é par. Isso ocorre, por exemplo, com a função $f(x) = \cos x$. Para uma função ser ímpar, o gráfico deverá ser simétrico em relação à origem do sistema. Podemos ver também a paridade das funções seno e cosseno, utilizando as simetrias da função de Euler. Com isso, verificamos também que a função $f(x) = sen\ x$ é ímpar.

Finalizamos assim o tópico 1. Neste tópico estudamos as funções trigonométricas seno e cosseno. Vimos ainda como é o esboço do gráfico dessas funções e suas principais propriedades. No próximo tópico definiremos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante.

Tópico 2

Funções tangente, cotangente, secante e cossecante

OBJETIVOS

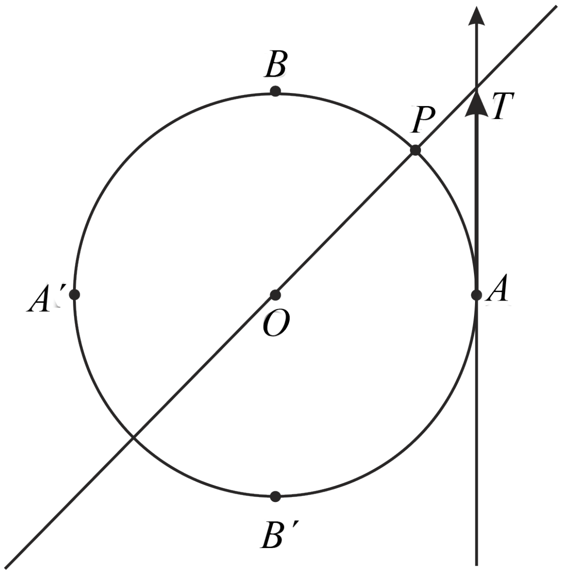
- Definir as funções tangente, cotangente, secante e cossecante e suas propriedades
- Entender as variações de seus gráficos

Neste segundo tópico da aula 7, iremos conhecer as funções tangente, cotangente, secante e cossecante juntamente com suas propriedades e seus gráficos. Como vimos na aula 6, podemos definir as funções tangente, cotangente, secante e cossecante, respectivamente por $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\cos x}, f(x)=\cot g\ x=\dfrac{1}{tg\ x}, f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

Começaremos nossos estudos com a função tangente. Devemos antes definir, como **eixo das tangentes**, a reta que tangencia o círculo unitário paralela ao eixo y. Vejamos agora como definir a função tangente do ponto de vista geométrico.

Definição 7.4 Dado um número real x, com $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Considere a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos por **tangente de x**, e indicamos por $tg\,x$, a medida do segmento $\overline{AT}$, representada na figura abaixo. Definimos a função tangente $f: D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=tg\ x$, que associa a cada real $x, x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, o valor real $f(x)=tg\ x$. Veja que o domínio da função tangente é dado por $D=\left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

Figura 114 – Representação geométrica da tangente



Fonte: Adaptada de Iezzy(1997, p. 29)

O valor de x deve ser diferente de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pois estes valores representam a reta $\overleftrightarrow{OP}$ sobre os pontos B e B'. Com isso, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes e, geometricamente, sabemos que elas não se encontram.

Da Definição 7.4 seguem algumas propriedades importantes:

1. O domínio será $D=\left\{x\in\mathbb{R}; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, e a imagem será $\mathbb{R}$.

2. A função tangente é sempre crescente.

3. A função tangente é positiva, se x é um ângulo do primeiro $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ou terceiro quadrante $\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ e será

Veja as páginas 29, 30 e 31 do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 3, e verifique uma demonstração sobre a função tangente ser sempre crescente. Verifique também a demonstração algébrica do período da função.

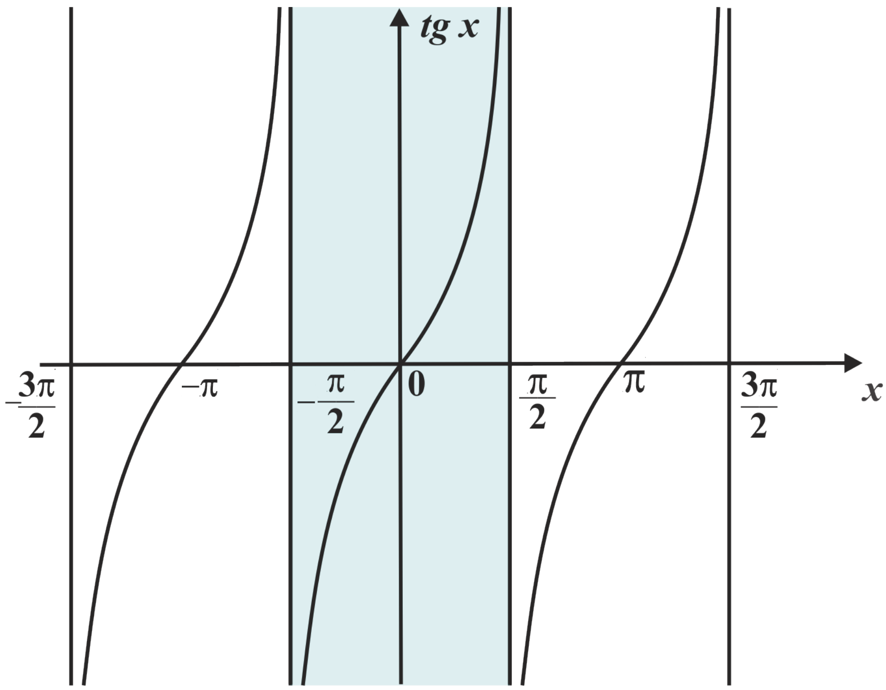
negativa no segundo $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$.

4. A função tangente é periódica, e seu período é π.

5. Alguns valores notáveis para a função cosseno são: $tg 0 = 0$, $tg\frac{\pi}{2}$ não existe, $tg\ \pi = 0, tg\ \frac{3\pi}{2}$ não existe e $tg\ \ 2\pi = 0$.

De acordo com as observações acima, podemos então fazer o esboço do gráfico da função tangente como segue na figura 115:

Figura 115 – Gráfico da função tangente



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 31)

Observe que a parte sombreada mostra a parte do gráfico da tangente que se repete ao longo do eixo x. Logo, vemos que o período da função será dado por $p = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. Observe que quando x percorre o intervalo

Existem algumas funções cujos gráficos se aproximam bastante de uma reta vertical, que é denominada assíntota vertical. O gráfico da função tangente tem infinitas assíntotas verticais. Elas são representadas no gráfico por todas as retas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, a tangente cresce indefinidamente, percorrendo todo o conjunto imagem $\mathbb{R}$, de $-\infty$ a $+\infty$.

Podemos também generalizar a função tangente, como fizemos com as funções seno e cosseno, escrevendo-a da forma $f(x)=a+btg(cx+d)$. Vale ressaltar que a função tangente tem amplitude infinita, então os valores de a e b não irão alterar a imagem da função-, que será o conjunto dos números reais. Com isso, podemos estabelecer um esquema geral:

1. Variação de a determina translação do gráfico para cima ou para baixo
2. Variação de b determina inversão do sinal do gráfico de positivo para negativo e vice-versa.
3. O período da função será dado por $p=\frac{\pi}{|c|}$.
4. Variação de d determina translação do gráfico para a esquerda ou para a direita.
5. O domínio da função será dado pelo conjunto $D=\left\{x\in\mathbb{R}; x\neq\frac{\pi}{2c}-\frac{d}{c}+\frac{k\pi}{c}\right\}$.

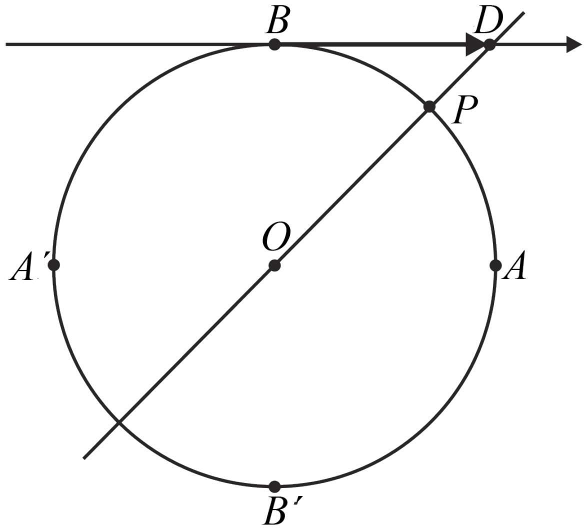
Saiba mais...

Veja as páginas 224 e 225 do livro **A Matemática do Ensino Médio, volume 1, da coleção do professor de Matemática da SBM** e estude um pouco mais sobre a paridade das funções trigonométricas.

A função cotangente segue a mesma ideia geométrica da tangente, a diferença é que a reta tangente ao círculo trigonométrico que representa o eixo das cotangentes será paralela ao eixo x. Vamos à definição geométrica.

Definição 7.5 Dado um número real x, $x\neq k\pi$, seja P sua imagem no círculo, como mostra a figura abaixo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D a sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos de **cotangente de** x, e indicamos por $cotg\ x$, a medida do segmento $\overline{BD}$. Assim, definimos a função $f:D\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\cot g\ x$, que associa a cada real $x, x\neq k\pi$, o valor real $f(x)=\cot g\ x$.

Figura 116 – Representação geométrica da cotangente



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p.33)

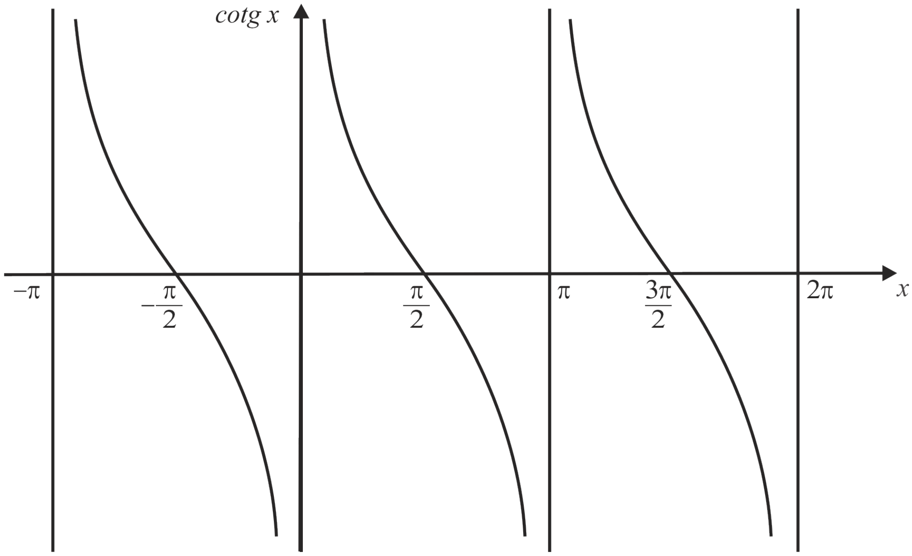
Da Definição 7.5 podemos elencar algumas propriedades importantes:

1. O domínio será $D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi\}$, e a imagem será $\mathbb{R}$.
2. A função cotangente é positiva, se x é um ângulo do primeiro $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ou terceiro quadrante $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ e será negativa no segundo $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$.
3. A função cotangente é sempre decrescente.
4. A função cotangente é periódica e seu período é π.

Você poderá observar que, quando o ângulo atinge os valores $0, \pi, 2\pi, \ldots$, isto é, $k\pi$, então a cotangente não existe pelo simples fato de a reta $\overleftrightarrow{OP}$ ficar paralela ao eixo das cotangentes. Com isso, temos alguns valores notáveis para a função cotangente: $cotg\ 0$ não existe, $cotg\ \frac{\pi}{2} = 0$, $cot\,g\ \pi$ não existe, $cotg\ \frac{3\pi}{2} = 0$ e $cot\,g\ 2\pi$ não existe.

Com base nas observações acima, obtemos o gráfico da função cotangente esboçado na figura 117.

Figura 117 – Gráfico da função cotangente



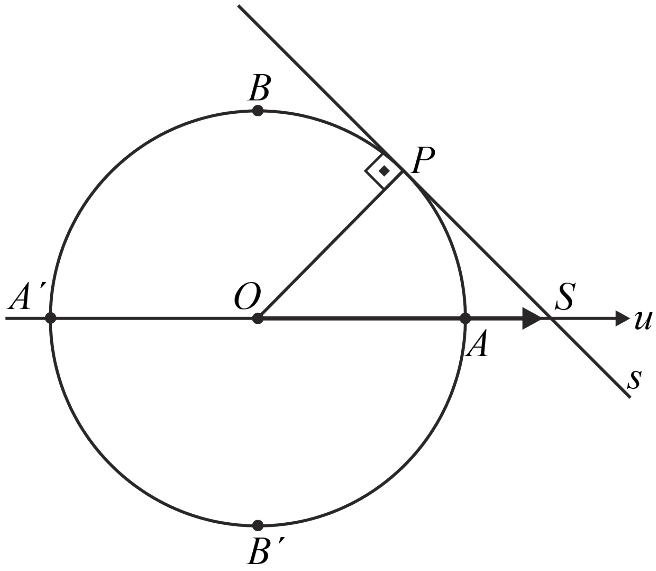
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 34)

Observem também que a função cotangente tem infinitas assíntotas que são as retas $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Observe ainda que quando x percorre o intervalo $]0,\pi[$, a cotangente decresce, percorrendo todo o conjunto imagem $\mathbb{R}$, de $+\infty$ a $-\infty$. É notável que o gráfico da função cotangente é bem semelhante ao gráfico da tangente. Isso ocorre, pois $cot\,g\ x = -tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Para entender o que ocorre na expressão acima, note que as funções seno e cosseno são ímpar e par, respectivamente. Com isso, $-tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{cos\,x}{senx} = cot\,g\ x$.

Agora iremos definir a função secante.

Definição 7.6 Dado um número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Considere a reta s tangente ao círculo em P, e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos, como mostra a figura 111. Denominamos a **secante de** x, que indicamos por $sec\,x$, o segmento de medida $\overline{OS}$. Definimos então a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sec\,x$, que associa a cada número real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o valor .

Figura 118 – Representação geométrica da secante



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 34)

Da Definição 7.6 seguem algumas observações importantes:

1. Temos que o domínio da função secante é $D=\left\{x\in\mathbb{R};x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ e a imagem da função é o conjunto $\mathbb{R}-(1,1)$, isto é, para todo $y=sec\,x$ real devemos ter $y\leq-1$ ou $y\geq1$.

2. A função secante é positiva, se x é um ângulo do primeiro $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2}<x<2\pi\right)$ e será negativa no segundo $\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ ou terceiro quadrante $\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$.

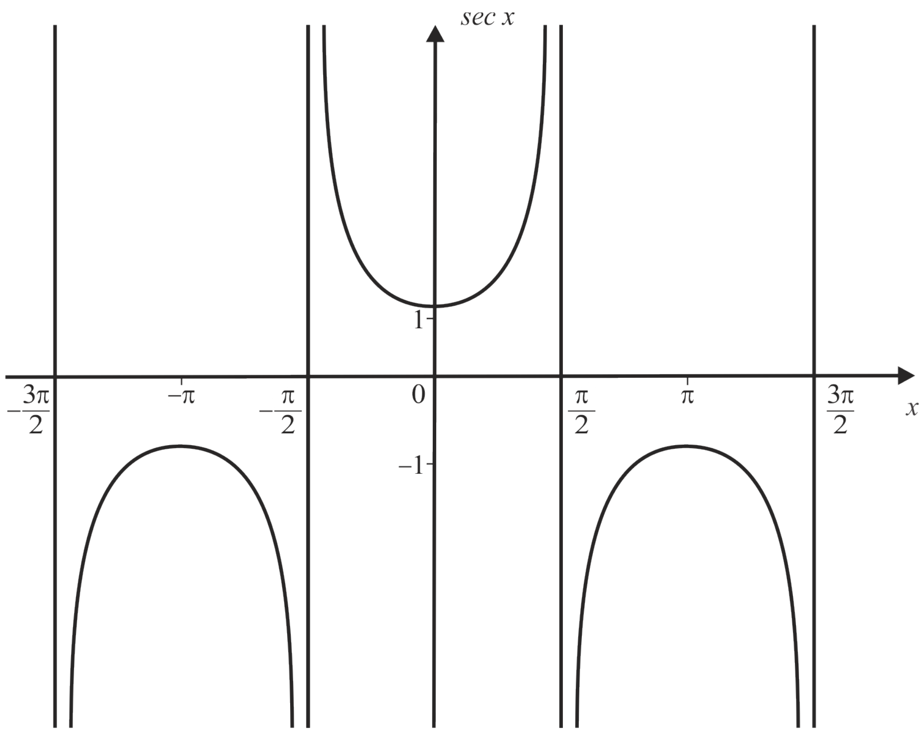
3. A função secante será crescente no primeiro $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ou segundo quadrante $\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ e será decrescente no terceiro $\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\frac{3\pi}{2}<x<2\pi\right)$.

4. A função secante é periódica e seu período vale 2π.

5. Alguns valores notáveis para a função secante são: $sec\,0=1, sec\frac{\pi}{2}$ não existe, $sec\,\pi=-1, sec\frac{3\pi}{2}$ não existe e $sec\,2\pi=1$.

De acordo com as observações acima, podemos então fazer o esboço do gráfico da função secante, como segue na figura 119:

Figura 119 – Gráfico da função secante



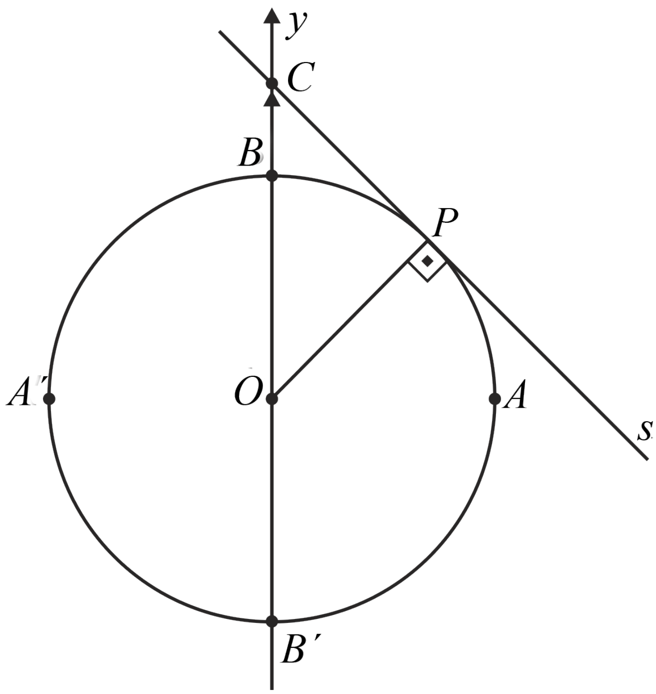
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 35)

Perceba que quando x assume valores próximos de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$, temos que $\cos x$ se aproxima de zero e assim o valor absoluto da fração $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ tende ao infinito.

Por fim, definiremos a função cossecante.

Definição 7.7 Dado um número real x, com $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Considere a reta s tangente ao círculo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos, como mostra a figura 120. Denominamos a **cossecante de** x, e indicamos por $\cos\sec x$, o segmento de medida $\overline{OC}$. Definimos a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\sec x$.

Figura 120 – Representação geométrica da cossecante



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 36)

Da Definição 7.7 seguem algumas observações importantes:

1. O domínio da função cossecante é $D=\{x\in\mathbb{R}; x\neq k\pi\}$, e sua imagem é o conjunto $\mathbb{R}-(1,1)$, isto é, para todo $y=cos\,sec\,x$ real devemos ter $y\leq -1$ ou $y\geq 1$.

2. A função cossecante é positiva, se x é um ângulo do primeiro $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ou segundo quadrante $\left(\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ e será negativa no terceiro $\left(\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\right)$.

3. A função cossecante será decrescente no primeiro $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ou quarto quadrante $\left(\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\right)$ e será crescente no segundo $\left(\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ ou terceiro quadrante $\left(\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

4. A função cossecante é periódica e seu período vale 2π.

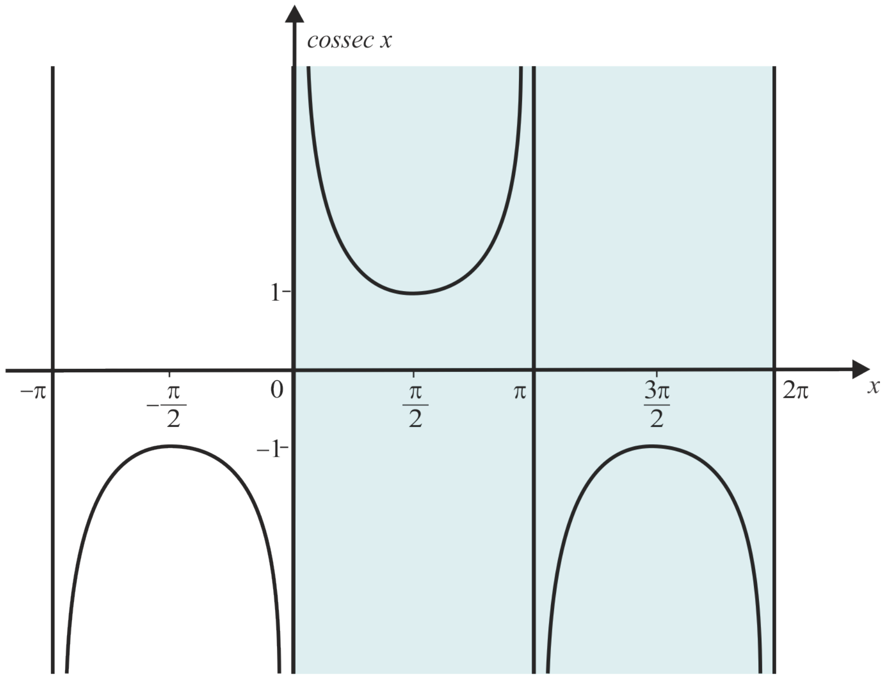
5. Observe na figura 120 que o ângulo x também está representado no triângulo OCP, que é o ângulo $O\hat{C}P$. Veja que $sen\ x = \dfrac{1}{\overline{OC}}$, pois o segmento $\overline{OP} = 1$ que é o raio do círculo trigonométrico. Assim, temos que $\overline{OC} = \dfrac{1}{sen\ x} = cos\,sec\,x$. Note também que à medida que o ângulo x se aproxima de $0, \pi, 2\pi, \ldots$ os valores de $cos\,sec\,x$ crescem ou decrescem infinitamente. Nesse momento, podemos observar que a reta s fica paralela ao eixo y, então a cossecante desses ângulos não existe. Basta notar também que $sen\ 0 = sen\ \pi = sen\ 2\pi = \cdots = sen\ k\pi = 0$ e não existe a fração $\dfrac{1}{0}$, por isso x deve ser diferente de $k\pi$. Com isso, temos alguns valores notáveis para a função cossecante são: $cos\,sec\,0$ não existe, $cos\,sec\,\dfrac{\pi}{2} = 1$, $cos\,sec\,\pi$ não existe, $cos\,sec\,\dfrac{3\pi}{2} = -1$ e $cos\,sec\,2\pi$ não existe.

Você sabia?

As funções cossecante e secante também têm valores máximos e mínimos como as funções seno e cosseno. Embora as funções cossecante e secante cresçam e decresçam para o infinito tanto positivo quanto negativo, -1 e 1 são valores máximo local e mínimo local, pois esses valores são máximos e mínimos em uma região do gráfico. Ressalte-se que isso ocorre ao contrário das funções seno e cosseno que têm 1 e -1 como máximos e mínimos globais, pois nenhum outro ângulo assume valores maiores do que 1 ou menores do que -1 quando aplicadas as funções.

Podemos agora descrever o gráfico da função cossecante (figura 121). Veja que a parte sombreada representa o período da função. Temos também que as retas $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas do gráfico da função cossecante.

Figura 121 – Gráfico da função cossecante



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 37)

Quanto à paridade, temos que as funções cotangente, secante e cossecante têm a mesma paridade das funções seno, cosseno e tangente, respectivamente. Note que isso decorre do fato de tais funções serem a inversa numérica da outra, ou seja, uma depende diretamente da outra.

Aqui devemos ter um cuidado! Quando falamos em inverso numérico, estamos nos referindo ao valor assumido pela função. Por exemplo, o inverso numérico de 2 é $\frac{1}{2}$, então o inverso numérico de $sen\ x$ é $\frac{1}{sen\ x} = cos\,sec\ x$.

Encerramos aqui o tópico 2 da Aula 7. Nesse tópico demos continuidade aos estudos das funções trigonométricas. Definimos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante. Além disso, vimos suas principais propriedades e fizemos o estudo dos seus gráficos. No próximo tópico, estudaremos o que conhecemos por inverso funcional das funções trigonométricas ou, mais simplesmente, as funções trigonométricas inversa, que são arco seno, arco cosseno e arco tangente.

Tópico 3

Funções trigonométricas inversas

OBJETIVOS

- Estudar as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente e suas propriedades
- Entender as variações dos gráficos das funções inversas trigonométricas

Neste terceiro e último tópico da aula 7, iremos conhecer as funções trigonométricas inversas arco seno, arco cosseno e arco tangente. Veremos ainda o processo de construção de seus gráficos e suas principais propriedades.

Antes de definirmos as funções trigonométricas inversas, devemos estar atentos às condições de existência de tais funções. Sabemos que toda função bijetora admite função inversa, então a primeira coisa a fazer é verificar se as funções seno, cosseno e tangente, da forma como foram definidas, são funções bijetoras.

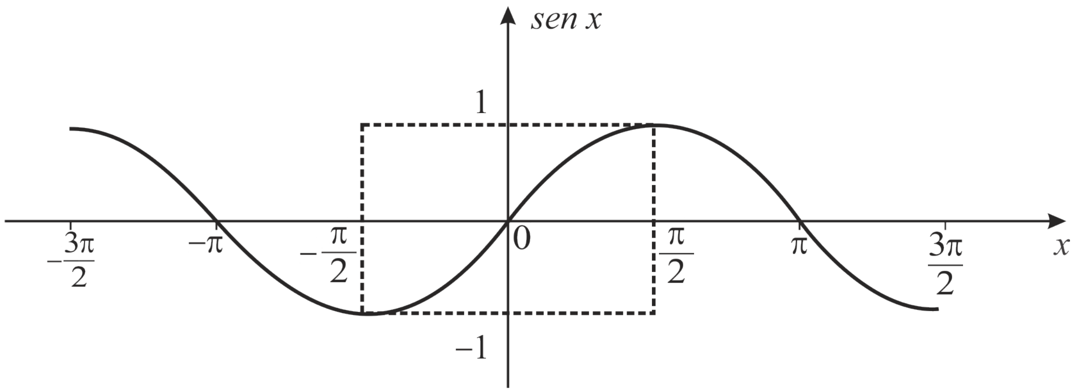
Uma função é dita bijetora quando ela é injetora e sobrejetora. Para que uma função f seja injetora, devemos ter $x_1 \neq x_2$ implicando $f(x_1) \neq f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in Dm(f)$ e para que f seja sobrejetora, devemos ter $\text{Im}(f) = CDm(f)$, ou seja, imagem igual ao contradomínio da função.

Vejamos inicialmente a função seno. Definimos no tópico 1 a função seno como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen\ x$. Temos assim que , e que a sua imagem é o conjunto $[-1,1]$. Podemos assim concluir que a função seno, definida dessa forma, não é sobrejetora, pois sua imagem e contradomínio são diferentes. Para verificarmos se a função é injetora ou não, note que a função seno é periódica, e seu período vale 2π. Dessa forma, por exemplo, temos que $sen\ 45^\circ = sen\ 405^\circ$, pois $sen\ 405^\circ = sen\ (360^\circ + 45^\circ) = sen\ 45^\circ$.

Veja que $45^{\circ} \neq 405^{\circ}$, mas $sen\ 45^{\circ} = sen\ 405^{\circ}$ que não satisfaz a condição necessária para a função seno ser injetora. Sendo assim, a função seno, da forma como foi definida, não é injetora nem sobrejetora, então ela não admitirá inversa. Podemos fazer algo com a definição da função seno de forma a torná-la injetora e sobrejetora? A resposta é sim!

Primeiro, vamos restringir o contradomínio da função de modo que ele fique igual à imagem, ou seja, definiremos a função seno agora como $f:\mathbb{R} \to [-1,1]$. Desta forma, a função seno será sobrejetora. E para torná-la injetora, basta restringirmos o domínio. Mas como fazemos isso? Vejamos então o gráfico da função seno abaixo.

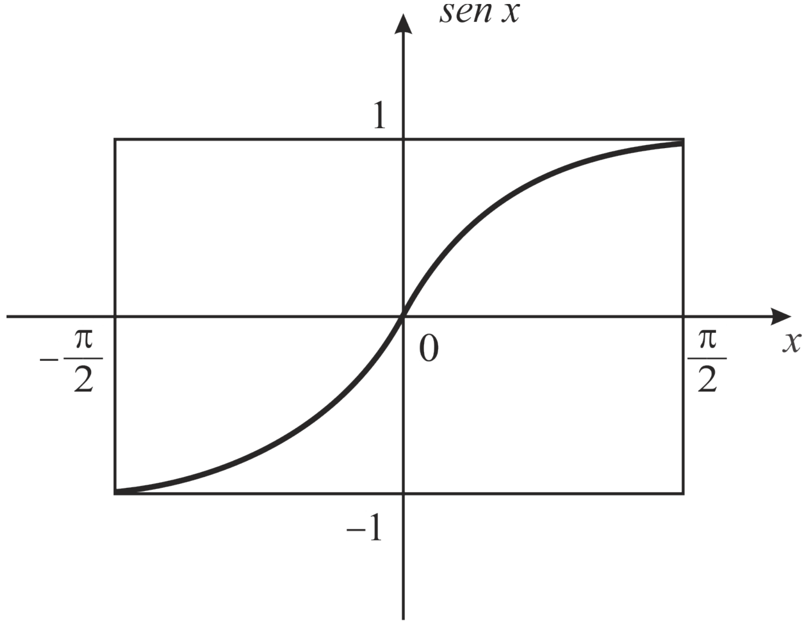
Figura 122 – Gráfico da função seno



Fonte: Adaptada de Ross (2002, p. 136)

Veja que se definirmos a função com domínio o conjunto $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, representado pelo retângulo pontilhado, quaisquer dois ângulos distintos que tomarmos nesse intervalo, terão valores na função distintos também. Então fazendo $Dm(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, teremos $f(x) = sen\ x$ injetora. Com isso, o gráfico da função seno passará a ser esboçado da forma na figura 123.

Figura 123 – Gráfico da função seno após as restrições no domínio e contradomínio



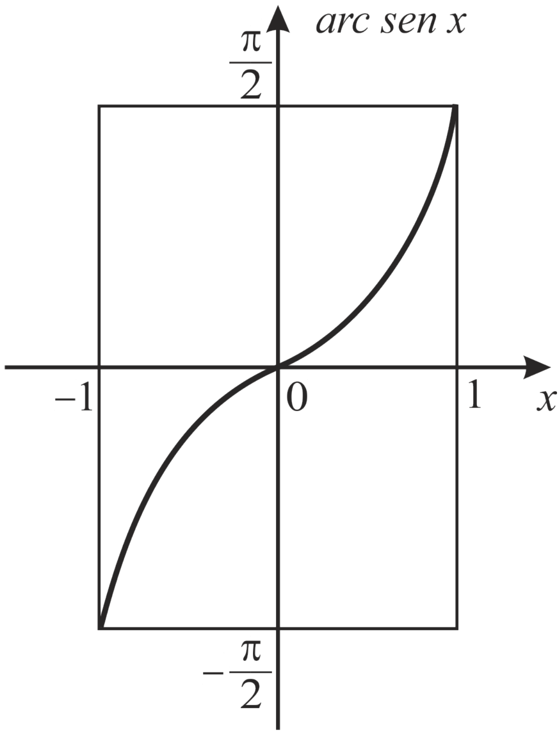
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 116)

Com base no que foi exposto acima, podemos agora definir a inversa da função seno, que será denominada de função arco seno. Sua definição é dada a seguir:

Definição 7.8 Seja a função $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ dada por $f(x)=sen\ x$. Definimos a inversa de f, denominada **função arco seno**, como sendo $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para a qual $f^{-1}(x)=arcsen\ x$ (ou seja, a *imagem de x é o arco cujo seno vale x*).

Portanto teremos que se $y=arcsen\ x$, então $x=sen\ y$ e $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$. Como já vimos anteriormente, os gráficos das funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes dos primeiro e terceiro quadrantes. Dessa forma, a partir do gráfico da função seno na figura 124, obtemos o gráfico da função arco seno esboçado na figura a seguir.

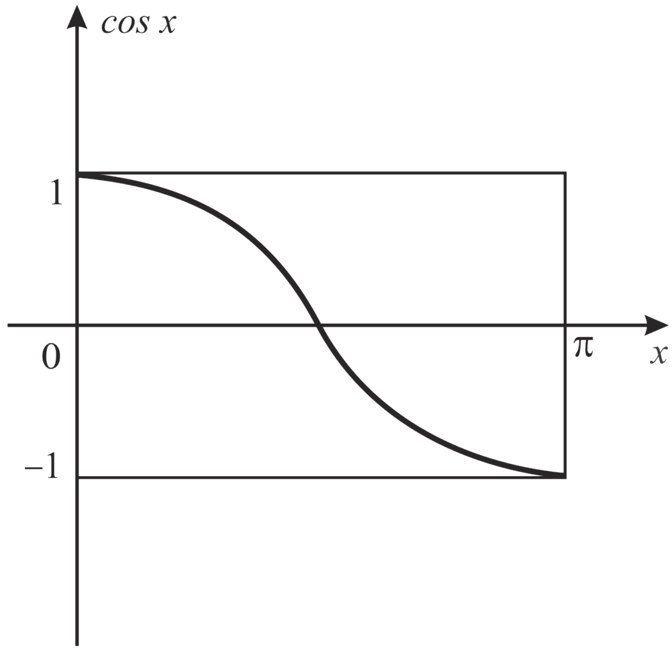
Figura 124 – Gráfico da função arco seno



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 116)

De modo análogo, iremos proceder com as funções cosseno e tangente, a fim de obtermos as funções arco cosseno e arco tangente. Para a função cosseno tornar-se bijetora, iremos, inicialmente, restringir o contradomínio de modo que a função torne-se sobrejetora e daí tenhamos contradomínio igual à imagem, ou seja, definiremos a função como $f:\mathbb{R}\rightarrow\left[-1,1\right]$. Para tornar a função injetora, iremos restringir do domínio. No caso da função cosseno, não podemos usar o mesmo conjunto $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ usado para a função seno, pois se observarmos o gráfico da função cosseno na figura 113 do Tópico 1, vemos que nesse intervalo haverá dois ângulos que terão seus cossenos iguais. O melhor para a função cosseno é restringir o domínio para o conjunto $\left[0,\pi\right]$. Assim sendo, definimos a função $f:\left[0,\pi\right]\rightarrow\left[-1,1\right]$ dada por $f(x)=\cos x$, que terá gráfico esboçado na figura 125.

Figura 125 – Gráfico da função cosseno após as restrições



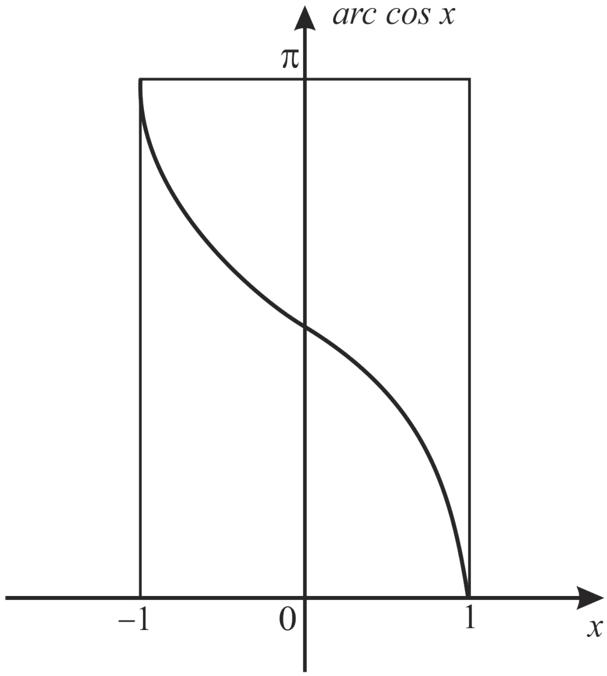
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 119)

Daí, podemos obter a definição do gráfico da função inversa da função cosseno.

Definição 7.9 Seja a função $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ dada por $f(x)=\cos x$. Definimos a inversa de f, denominada **função arco** cosseno, como sendo $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ para a qual $f(x)=\text{arccos}\, x$ (ou seja, a *imagem de* x *é o arco cujo cosseno vale* x).

A partir da simetria com a reta que contém as bissetrizes dos primeiro e terceiro quadrantes, obtemos o gráfico da função arco cosseno esboçado na figura 126.

Figura 126 – Gráfico da função arco cosseno

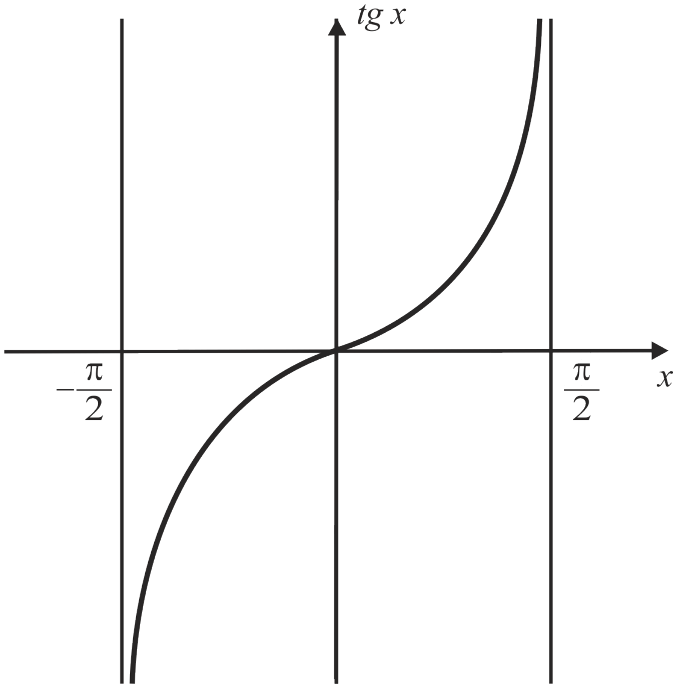


Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 119)

Veja que se $y = \arccos x$, então $x = \cos x$ e $0 \leq y \leq \pi$.

Por último, temos a função arco tangente que definiremos a partir da função tangente. Para tornarmos a função tangente em uma função bijetora basta restringirmos o domínio, pois a função tangente como foi definida já é sobrejetora. Bastaria então torná-la injetora pela restrição do domínio. Como a função tangente tem infinitas assíntotas, o mais obvio é tomar a parte do gráfico entre duas de suas assíntotas. São elas $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Logo, definiremos a função como $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tg\ x$. Veja que o domínio não é o conjunto fechado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pois $tg\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ não existem. Então devemos ter como domínio o conjunto aberto $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. O gráfico da função tangente ficará somente a parte representada na figura 127.

Figura 127 – Gráfico da função tangente após a restrição do domínio



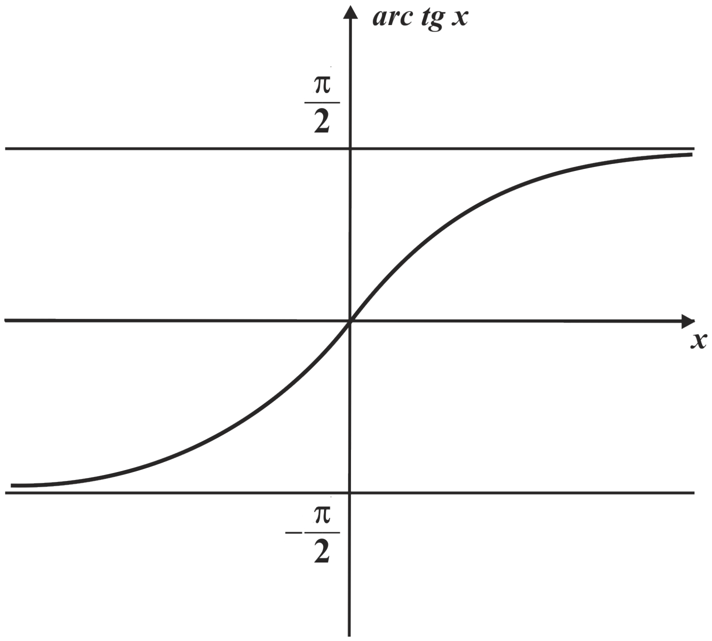
Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 122)

Assim, a função tangente admite inversa que será definida abaixo.

Definição 7.10 Seja a função $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tg\ x$. Definimos a inversa de f, denominada **função arco tangente**, como sendo $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para a qual $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ (ou seja, a *imagem de* x *é o arco cuja tangente vale* x).

Veja que se $y = arctg\ x$, então $x = tg\ x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Usando a simetria com a reta que contém as bissetrizes dos primeiro e terceiro quadrantes, esboçamos o gráfico da função representado pela figura 128.

Figura 128 – Gráfico da função arco tangente



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 122)

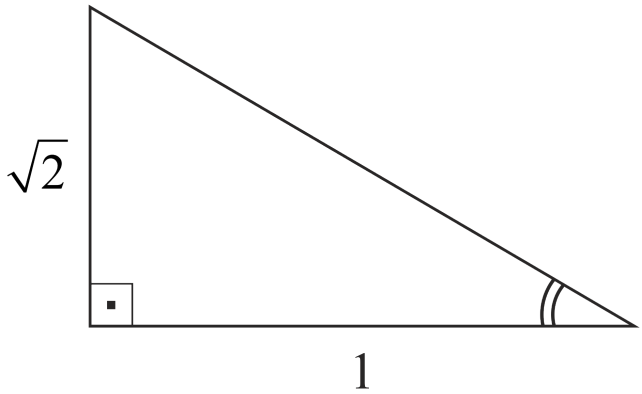
Note que a função arco tangente também tem assíntotas. Agora as assíntotas não são mais verticais, mas sim, horizontais. Uma observação importante sobre as funções trigonométricas inversas é que elas não são periódicas, basta observar pelos gráficos que não há pedaços do gráfico se repetindo ao longo do eixo x.

Outro detalhe muito importante sobre as funções inversas é a propriedade que nos diz que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$. Atenção sempre com o domínio das funções, pois podemos cair numa armadilha e atribuir valores a x que não nos permite substituir nas igualdades. Dessa propriedade segue que $sen(arcsen\ x) = x, arcsen(sen\ x) = x, \cos(\text{arccos}\, x) = x, ar\cos(\cos x) = x,$ $tg(arctgx) = x$ e $arctg(tgx) = x$. Vejamos uns exemplos de situação em que utilizaremos essa propriedade.

Exercício resolvido 3: Calcule o $sen\left(arctg\sqrt{2}\right) + \cos\left(arcsen\sqrt{2}\right)$.

Solução: Para resolver esse problema faremos $arctg\sqrt{2} = \alpha$, ou seja, temos que $tg\alpha = \sqrt{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Queremos calcular $sen\left(arctg\sqrt{2}\right) = sen\ \alpha$. Sabemos que tangente de um ângulo é igual a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo. Logo, esses catetos devem ser iguais a $\sqrt{2}$ e 1, respectivamente, pois $\frac{C.O.}{C.A.} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = tg\alpha$, como mostra a figura 129.

Figura 129 – Triângulo retângulo



Fonte: Adaptada de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004)

Usando o Teorema de Pitágoras, vemos que a hipotenusa do triângulo será igual a $\sqrt{3}$. Como a tangente tem valor positivo, então $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, que é um ângulo do primeiro quadrante. Logo $sen\,\alpha$ será positivo e terá valor igual a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Falta calcular $\cos\left(arcsen\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, mas veja que o arco cujo seno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ também terá cosseno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $arcsen\frac{\sqrt{2}}{2} = arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $\cos\left(arcsen\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, usando a propriedade acima. Portanto, a soma será igual a $\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Encerramos assim o tópico 3 e a aula 7. Neste tópico aprendemos sobre as funções trigonométricas inversa. Compreendemos ainda o processo de construção de seu gráfico e vimos algumas de suas propriedades. Na próxima aula, veremos algumas identidades trigonométricas, como soma de arcos, transformações de soma em produto, arco metade, arco duplo, etc. Essas identidades são muito importantes para solucionar problemas, como: "O que acontece com o cosseno da soma de dois ângulos?". Além disso, iremos ver algumas equações e inequações trigonométricas. Aguardo vocês lá. Até mais!

Pratique...

1. Determine o período e a imagem da função $f(x) = 1 - 2sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ e, em seguida, esboce seu gráfico.
2. Determine para que valores de m existe x, tal que $\cos x = \frac{m-1}{m-2}$.
3. Determine o sinal da expressão $sen\ 107^{\circ} + \cos 107^{\circ}$.
4. Esboce o gráfico da função $f(x) = senx + \cos x$.
5. Prove que se , então $sen\ x + \cos x > 1$.
6. Esboce o gráfico da função $f(x) = |1 - tgx|$.
7. Para que valores de α existe x, tal que $tg\ x = \sqrt{a^2 - 5a + 4}$?
8. Determine o domínio e o período das funções $f(x) = \cot g\left(x - \frac{\pi}{3}\right), g(x) = \sec 2x$ e $h(x) = \cos\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
9. Calcule $\cos\left(arcsen\frac{1}{3}\right)$.
10. Determine α tal que $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.
11. Calcule o $sen(arctg\sqrt{2})$.

Gabarito

1. $p = \pi$ e $\text{Im} = [-1, 3]$

2. $m < \dfrac{3}{2}$

3. positivo

4. Esboço de gráfico

5. Questão de demonstração

6. Esboço de gráfico

7. $\alpha \leq 1$ ou $\alpha \geq 4$

8. $Dm(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{3} \right\}$ e $p = \pi$; $Dm(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right\}$ e $p = \pi$ e $Dm(\text{h}) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi - \dfrac{\pi}{4} \right\}$ e $p = 2\pi$

9. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

10. $\dfrac{\pi}{6}$

11. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Aula 8

Transformações e equações trigonométricas

Caro(a) aluno(a),

Estamos na reta final da nossa disciplina. Nesta última aula, estudaremos as transformações trigonométricas como soma e diferença de arcos, arco duplo, arco triplo, arco metade, transformações de soma em produto. Além disso, abordaremos as equações e inequações trigonométricas.

No tópico 1, começaremos o estudo das fórmulas de soma e subtração de arcos, fórmulas de arcos múltiplos e divisores e fórmulas de transformações de soma e subtração em produto. Tais fórmulas serão usadas nas funções seno, cosseno e tangente para a determinação de valores ângulos até então desconhecidos, como o ângulo de 15^o .

Já no tópico 2, nos deteremos ao estudo das equações e inequações trigonométricas. Inicialmente estudaremos as equações trigonométricas básicas para resolver equações trigonométricas em geral. Por fim, estudaremos as inequações trigonométricas fazendo uma comparação com as equações trigonométricas.

Objetivos

- Entender as transformações trigonométricas
- Estudar as equações e inequações trigonométricas

Tópico 1

Transformações trigonométricas

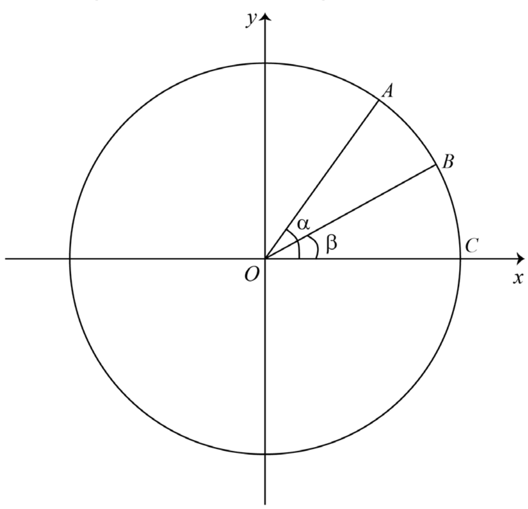
OBJETIVOS

- Estudar as fórmulas de soma e subtração de arcos
- Conhecer as fórmulas dos arcos múltiplos e divisores
- Entender as transformações de soma e subtração em produto

Neste primeiro tópico da aula 8, conheceremos as principais transformações trigonométricas. Começaremos pelas transformações de soma e diferença de arcos. Em seguida, trataremos das fórmulas dos arcos múltiplos e divisores, ou seja, veremos uma fórmula que nos permitirá determinar o arco metade, arco duplo e arco triplo de um determinado ângulo. Por fim, veremos como transformar soma e subtração em produtos.

Considere o círculo trigonométrico abaixo. A partir dele, iremos desenvolver as fórmulas de adição e subtração para as funções seno e cosseno.

Figura 130 – Círculo trigonométrico



Fonte: DEaD | IFCE

O setor circular AOC é determinado pelo ângulo α e o setor circular BOC é determinado pelo ângulo β. Observe então que o setor circular AOB é determinado pelo ângulo $\alpha - \beta$. As coordenadas dos pontos A e B são $(cos\,\alpha, sen\,\alpha)$ e $(cos\,\beta, sen\,\beta)$, respectivamente. Iremos obter a fórmula do cosseno da diferença de arcos analisando a distância entre os pontos A e B dada pela proposição abaixo.

Proposição 8.1 Dados os pontos A e B com coordenadas $(cos\,\alpha, sen\,\alpha)$ e $(cos\,\beta, sen\,\beta)$, respectivamente. A distância entre A e B, indicada por d_{AB}, é calculada por:

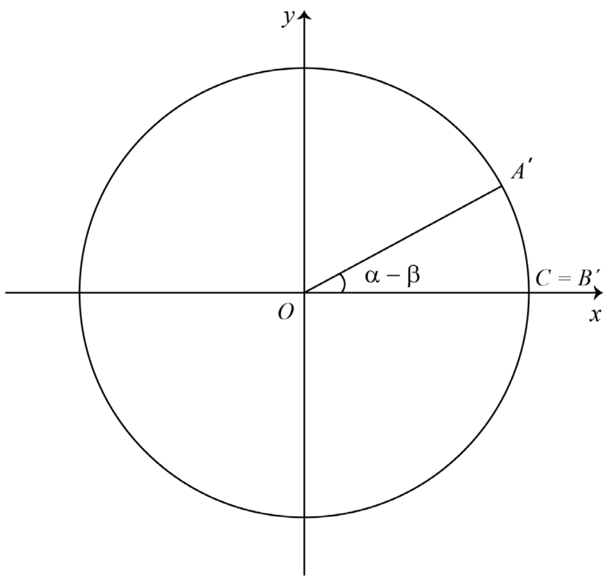
$$d_{AB} = \sqrt{(cos\,\alpha - cos\,\beta)^2 + (sen\,\alpha - sen\,\beta)^2}$$

Vamos guardar essa fórmula, pois a utilizaremos mais a diante. Agora vamos considerar os pontos A e B no círculo trigonométrico e arrastá-los pelo círculo de modo que o ponto B coincida com o ponto C e a distância entre A e B permaneça a mesma. Chamaremos esses novos pontos de A' e B', representados na figura 131.

A distância entre dois pontos quaisquer de coordenadas $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ num plano é cálculada por

$$\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

Figura 131 – Deslocamento dos pontos A e B



Fonte: DEaD | IFCE

O setor circular $A'OB'$ é determinado pelo ângulo $\alpha-\beta$, pois a distância entre A' e B' é a mesma distância entre os pontos A e B. Com isso, as coordenadas dos pontos A' e B' são $(cos(\alpha-\beta), sen(\alpha-\beta))$ e $(1,0)$ respectivamente. Dessa forma, a distância entre A' e B' será dada por:

$$d_{A'B'}=\sqrt{((cos\,\alpha-\beta)-1)^2+((sen\,\alpha-\beta)-0)^2}$$
$$=\sqrt{((cos\,\alpha-\beta)-1)^2+((sen\,\alpha-\beta))^2}$$

Como $d_{A'B'}=d_{AB}$, então as duas raízes quadradas são iguais, isto é,

$$\sqrt{(cos\,\alpha-cos\,\beta)^2+(sen\,\alpha-sen\,\beta)^2}=\sqrt{((cos\,\alpha-cos\,\beta)-1)^2+(sen(\alpha-\beta))^2}$$

Veja que estamos calculando raiz quadrada de números positivos, pois o quadrado de qualquer **número** real é maior ou igual a zero. Assim sendo, podemos eliminar as raízes sem prejuízo, ou seja,

$$(cos\,\alpha-cos\,\beta)^2+(sen\,\alpha-sen\,\beta)^2=(cos(\alpha-\beta)-1)^2+(sen(\alpha-\beta))^2$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos

$$cos^2\alpha-2cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen^2\alpha-2sen\alpha sen\beta+sen^2\beta$$
$$=cos^2(\alpha-\beta)-2cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)$$

Observando que $cos^2\alpha+sen^2\alpha=1, cos^2\beta+sen^2\beta=1$ e $cos^2(\alpha-\beta)+sen^2(\alpha-\beta)$, teremos

$$2-2cos\,\alpha\,cos\,\beta-2sen\alpha sen\beta=2-2cos(\alpha-\beta).$$

Efetuando algumas simplificações, obtemos a fórmula abaixo do cosseno da diferença de arcos:

$$cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta\ (8.1)$$

Saiba mais...

Veja uma demonstração da fórmula do cosseno da diferença de arcos usando semelhança de triângulos no sítio http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/04/demonstracao-da-adicao-e-subtracao-de.html

Para mostrarmos o cosseno da soma de arcos, vejamos a fórmula do cosseno da diferença entre dois ângulos x e y quaisquer, ou seja, $cos(x-y)=cos\,x.cos\,y+senx.seny$.

Fazendo $x=\alpha$ e $y=-\beta$, teremos

$$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha.cos(-\beta)+sen\alpha.sen(-\beta).$$

Vimos, na aula 7, que a função cosseno é par e a função seno é ímpar, ou seja, $cos(-\beta) = cos(\beta)$ e $sen(-\beta) = -sen(\beta)$. Daí se obtém a fórmula do cosseno da soma entre dois arcos dado por

$$cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha.cos\,\beta - sen\alpha.sen\beta \qquad (8.2)$$

Para obtermos as fórmulas do seno da soma e da diferença de arcos, basta lembrar que, se temos dois ângulos complementares x e y, então $cos\,x = seny$. Dessa forma, temos que $\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$ e $\alpha+\beta$ são ângulos complementares, pois

$$\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2}$$

Logo $sen(\alpha+\beta) = cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$.

Assim, podemos determinar a fórmula para o seno da soma de dois arcos usando a fórmula do cosseno da diferença entre dois arcos. Veja então que

$$cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos\,\beta + sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen\beta$$

Como $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ é ângulo complementar de α, então $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sen\alpha$ e $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cos\,\alpha$. Daí, teremos que o seno da soma de dois arcos será dado por

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\,cos\,\beta + sen\beta\,cos\,\alpha \ (8.3)$$

De modo análogo ao cosseno da soma de arcos, usamos a paridade das funções seno e cosseno para mostrar a fórmula do seno da diferença de arcos, obtendo assim

$$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\,cos\,\beta - sen\beta\,cos\,\alpha \ (8.4)$$

Para obtermos a tangente da soma e da diferença de arcos, o processo será mais simples, pois utilizaremos a definição de tangente que vimos na aula 6, que diz

$tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{cos\,\alpha}$.

Dessa forma, teremos $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}$ e $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)}$. Utilizando as fórmulas de seno e cosseno da soma e diferença de arcos vistas acima, teremos

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{sen\left(\alpha+\beta\right)}{cos\left(\alpha+\beta\right)}=\frac{sen\alpha\, cos\,\beta+sen\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta-sen\alpha sen\beta}$$

Dividindo numerador e denominador da fração por $cos\,\alpha\, cos\,\beta$, obtemos

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\dfrac{sen\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}+\dfrac{sen\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}}{\dfrac{cos\,\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}-\dfrac{sen\alpha\, cos\,\beta}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}}$$

Efetuando as devidas simplificações, obtemos a seguinte fórmula

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{a-tg\alpha.tg\beta}\ (8.5)$$

De modo análogo, obtemos a tangente da diferença de arcos

$$tg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha.tg\beta}\ (8.6)$$

Essas fórmulas funcionam como uma importante ferramenta para resolver problemas mais complicados em trigonometria. Por exemplo, suponhamos que você é um topógrafo e quer calcular a altura de uma serra.

Com a ajuda de um teodolito, você visualiza o pico alto da serra a 100 metros de distância dela a um ângulo com a horizontal de 15^o. Obviamente que você, com conhecimento em trigonometria, determinará que a altura da serra será calculada multiplicando a distância 100 metros pela tangente de 15^o. Mas, se você não tem uma calculadora científica capaz de calcular $tg15^o$, como efetuará esse cálculo? Bom, para isso, basta verificar que $tg15^o=tg\left(45^o-30^o\right)$ e $tg45^o$ e $tg30^o$ nós já conhecemos. Nesse momento, fazemos a seguinte pergunta: será que $tg15^o$ pode ser calculada utilizando $tg45^o$ e $tg30^o$? A resposta é sim, observe que

$$tg\left(45^o-30^o\right)=\frac{tg45^o-tg30^o}{1+tg45^o.tg30^o}=\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\cong 0,27$$

ou seja, a altura da serra, agora facilmente calculada, será de aproximadamente 27 metros.

Das fórmulas de soma e diferença de arcos obtemos o que chamamos de redução ao primeiro quadrante, que são as fórmulas relacionadas diretamente com as simetrias das funções trigonométricas obtidas pelas simetrias da função de Euler (estudada na aula 6). O quadro abaixo mostra todas as fórmulas de redução ao primeiro quadrante.

Quadro 1: Fórmulas de redução ao primeiro quadrante

Arcos Complementares	Arcos Suplementares	Arcos Explementares
$sen(90^o - x) = cos\,x$ $cos(90^o - x) = senx$ $tg(90^o - x) = cot\,gx$	$sen(180^o - x) = senx$ $cos(180^o - x) = -cos\,x$ $tg(180^o - x) = -tgx$	$sen(180^o + x) = -senx$ $cos(180^o - x) = -cos\,x$ $tg(180^o - x) = tgx$
Arcos Replementares üüüü(360 −) = − üüüü(360 −) = $tg(360^o - x) = -tgx$	Note que: $sen(0^o - x) = sen(-x) = -senx$ $cos(0^o - x) = cos(-x) = cos\,x$ $tg(0^o - x) = tg(-x) = -tgx$	

Fonte: DEaD | IFCE

Vejamos, por exemplo, $sen(90^o - x) = sen90^o . cos\,x - senx . cos\,90^o$. Como $sen\ 90^o = 1$ e $cos\,90^o = 0$, então teremos que üüüü(90 −) = . Podemos verificar todas essas fórmulas de simetria (ou redução ao primeiro quadrante) utilizando as fórmulas de soma e diferença de arcos, que ficará de exercício para você. Importante também é saber utilizá-las! Para isso, segue um exercício abaixo.

Exercício resolvido 1: Calcule $cos\,255^o$.

Solução: Para resolvermos esse exercício, iremos utilizar inicialmente uma das fórmulas de redução ao primeiro quadrante e, em seguida, utilizaremos uma das fórmulas de soma ou diferença de arcos. Veja que $255^o = 180^o + 75^o$, então temos que $cos\,255^o = cos(180^o + 75^o) = -cos\,75^o$.

Agora observe que $75^o = 45^o + 30^o$, então utilizaremos a fórmula do cosseno da soma de arcos, ou seja, teremos que

$$cos\,75^o = cos(45^o + 30^o) = cos\,45^o\,cos\,30^o - sen45^o\,sen30^o.$$

Lembrando que $cos\,45^o = sen45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, sen30^o = \frac{1}{2}$ e $cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, teremos

$$cos\,75^o = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Portanto $cos\,255^o = -\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Bom, a utilização dessa ferramenta não para por aqui. Podemos analisar muitas outras situações a partir dessas fórmulas até mesmo desenvolver outras fórmulas, que é o caso dos arcos múltiplos (arcos duplos, triplos, etc.). Vejamos inicialmente o arco duplo. Como calcular o seno, cosseno e tangente do dobro de um arco? Determinar essas fórmulas é bem simples, pois iremos utilizar as fórmulas de soma de $ar\cos sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha, \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$ e $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta}$ de modo que $\beta = \alpha$. Fazendo a substituição de $\beta = \alpha$, obteremos as seguintes fórmulas:

$$sen(2\alpha) = 2sen\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$
$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

A fórmula de $\cos(2\alpha)$ pode ter ainda duas outras variações. Lembre-se de que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e se fizermos $sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, teremos

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

De modo análogo, fazendo $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$, teremos

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha.$$

Assim, podemos ter

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ \cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1 \qquad (8.7) \\ \cos(2\alpha) &= 1 - 2sen^2\alpha \end{aligned}$$

Com as expressões apresentadas em 8.7, podemos determinar seno, cosseno e tangente de múltiplos arcos. Vejamos então como ficariam as fórmulas de seno, cosseno e tangente do triplo de um arco. Vamos determinar $üüüü(3\alpha)$ (3α) e (3α). Observe que $3\alpha = 2\alpha + \alpha$, então utilizaremos novamente as fórmulas de soma de arcos, ou seja,

$$sen(3\alpha) = sen(2\alpha+\alpha) = sen(\alpha+\beta) = sen(2\alpha)\cos\alpha + sen\alpha\cos(2\alpha)$$

Substituindo as fórmulas de arco duplo acima, teremos

$$\begin{aligned} sen(3\alpha) &= (2sen\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + sen\alpha(1 - 2sen^2\alpha) \\ &= 2sen\alpha\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-sen^2\alpha} + sen\alpha - 2sen^3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha. \end{aligned}$$

É interessante observarmos que podemos calcular o seno do triplo de um arco qualquer a partir do seno desse arco. De fato, $üüüü(3\alpha)=3\quad\alpha-4\quad{}^{3}\alpha$. De modo análogo, podemos determinar $cos(3\alpha)$ e $tg(3\alpha)$ em função de $cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$, respectivamente. Deixaremos para você aluno verificar que as fórmulas do arco triplo de cosseno e tangente serão $cos(3\alpha)=4cos^3\alpha-3cos\alpha$ e $tg(3\alpha)=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$.

A seguir, veremos um exercício para fixar o conteúdo abordado.

Exercícios resolvido 2: Sendo $tg\alpha=\dfrac{3}{4}$ e $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, calcule $sen(2\alpha)$.

Solução: Inicialmente, veja que podemos descrever um triângulo retângulo com cateto oposto ao ângulo α igual a 3 e cateto oposto igual a 4, pois teremos de toda forma $tg\alpha=\dfrac{3}{4}$. A hipotenusa desse triângulo tem medida 5, e será encontrada através do teorema de Pitágoras. Então temos que $sen\alpha=-\dfrac{3}{5}$ e $cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

Observe que os valores de seno e cosseno são negativos, pois α é um ângulo do terceiro quadrante $\left(\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}\right)$e, no terceiro quadrante, seno e cosseno de qualquer ângulo são negativos. Como queremos calcular $sen(2\alpha)$, bastam substituir os valores de $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$ na fórmula $sen(2\alpha)=2sen\alpha\,cos\,\alpha$. Isto é, $sen(2\alpha)=2.\left(-\dfrac{3}{5}\right).\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{24}{25}$.

Até momento, vimos as transformações de soma e diferença de arcos, vimos também que podemos verificar as fórmulas de simetria ou redução ao primeiro quadrante utilizando as transformações de soma e diferença de arcos. Determinamos também as transformações de alguns arcos múltiplos (duplo e triplo) e podemos expandir essas fórmulas para arco quádruplo, quíntuplos, etc., que ficarão de exercício para você estudante. Bom, mas se podemos determinar fórmulas de arcos múltiplos, então podemos determinar fórmulas para arcos divisores, por exemplo, determinar fórmulas para o arco metade. Aqui estaremos à procura de determinar fórmulas para $sen\left(\dfrac{x}{2}\right),cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Será possível mesmo? Vejamos.

Observe, inicialmente, que $cos(2\alpha)=2cos^2\alpha-1$ e $cos(2\alpha)=1-2sen^2\alpha$.

Isolando $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$ em ambas as fórmulas, teremos $cos\,\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1+cos(2\alpha)}{2}}$ e $sen\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-cos(2\alpha)}{2}}$. Se fizermos $\alpha=\dfrac{x}{2}$, então teremos as fórmulas de $sen\left(\frac{x}{2}\right)$ e $cos\left(\frac{x}{2}\right)$ procuradas, ou seja

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}} \quad (8.8) \qquad cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}} \quad (8.9)$$

Para obtermos a fórmula de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$, basta fazer $\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$. Assim obteremos a seguinte fórmula:

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} \quad (8.10)$$

Note ainda que

$$sen(2\alpha)=2sen\alpha\,cos\,\alpha=2sen\alpha.\frac{cos^2\,\alpha}{cos\,\alpha}=2\frac{sen\alpha}{cos\,\alpha}.cos^2\,\alpha=2\frac{sen\alpha}{cos\,\alpha}.\frac{1}{sec^2\,\alpha}=\frac{2tg\alpha}{sec^2\,\alpha}$$

Como $sec^2\,\alpha=1+tg^2\alpha$, então $sen(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ e $tg(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$. Se tomarmos $\alpha=\frac{x}{2}$, teremos

$$senx=\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (8.11) \qquad tgx=\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (8.12)$$

E mais, fazendo $cos\,x=\frac{sen\,x}{tg\,x}$ e substituindo as formulas acima, teremos

$$cos\,x=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (8.13)$$

A utilidade dessas três últimas fórmulas (8.11, 8.12 e 8.13) é permitir a substituição de $sen\,x, cosx$ e tgx por uma única função através de expressões racionais, no caso $tg\left(\frac{x}{2}\right)$. Esse tipo de substituição é frequentemente utilizado na resolução de equações trigonométricas, que veremos no próximo tópico.

Vejamos outra situação importante sobre transformações trigonométricas. Imagine que estamos buscando simplificar ao máximo uma expressão que envolve elementos trigonométricos. Suponha que queiramos simplificar a expressão $2sen40^o+2sen20^o-cos10^o$. É possível, por exemplo, fatorar essa soma? Ou reduzir essa soma para uma expressão menor?

Voltemos às fórmulas de soma e diferença de arcos. Temos, por exemplo, $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\,cos\,\beta-sen\beta\,cos\,\alpha$ e $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\,cos\,\beta-sen\beta\,cos\,\alpha$. Somando ambas expressões teremos $sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\,cos\,\beta$.

Efetuando a substituição $\alpha+\beta=p$ e $\alpha-\beta=q$, teremos que $\alpha=\dfrac{p+q}{2}$ e $\beta=\dfrac{p-q}{2}$. Assim obtemos a seguinte fórmula:

$$sen\ p+sen\ q=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\quad(8.14)$$

Exemplo 1: Respondendo a nossa pergunta, podemos simplificar ou fatorar a expressão $2sen40^o+2sen20^o-cos\,10^o$, pois note que $2sen40^o+2sen20^o-cos\,10^o=2\left(sen40^o+sen20^o\right)-cos\,10^o$ e $sen40^o+sen20^o=2sen\left(\dfrac{40^o+20^o}{2}\right)cos\left(\dfrac{40^o-20^o}{2}\right)=2sen30^o\,cos\,10^o$. Como $sen30^o=\dfrac{1}{2}$, então $sen40^o+sen20^o=cos\,10^o$, ou seja, nossa expressão será simplificada por $2\,cos\,10^o-cos\,10^o=cos\,10^o$.

Novamente com as fórmulas de seno da soma de arcos, efetuemos a subtração delas. Daí, obteremos $sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2sen\beta\,cos\,\alpha$. Obviamente que $\alpha=\dfrac{p+q}{2}$ e $\beta=\dfrac{p-q}{2}$, então teremos a seguinte fórmula:

$$sen\ p-sen\ q=2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\quad(8.14)$$

As fórmulas 8.13 e 8.14 são exemplos de transformações de soma em produto. Vejamos as demais, isto é, $cos\ p+cos\,q, cos\ p-cos\,q, tg\ p+tgq$ e $tgp-tgq$ .Para mostrarmos $cos\ p+cos\,q$ e $cos\ p-cos\,q$, vamos tomar as fórmulas do cosseno da soma e diferença de arcos. De modo análogo ao seno, iremos somar e depois subtrair as expressões

$$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\alpha sen\beta \text{ e } cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\alpha sen\beta$$

obtendo assim,

$$cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)=2\,cos\,\alpha \text{ e } cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)=-2sen\alpha sen\beta.$$

Fazendo $\alpha+\beta=p$ e $\alpha-\beta=q$, teremos que $\alpha=\frac{p+q}{2}$ e $\beta=\frac{p-q}{2}$. Daí, obtemos as seguintes fórmulas:

$$cos\ p+cos\ q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (8.15)$$

$$cos\ p-cos\ q=-2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (8.16)$$

Por último, para obtermos $tg\ p+tg\ q$ e $tg\ p-tg\ q$, basta utilizarmos a definição da tangente, ou seja, $tg\ p+tgq=\frac{sen\ p}{cos\ p}+\frac{sen\ q}{cos\ q}=\frac{sen\ p\,cos\,q+senq\,cos\ p}{cos\ p\,cos\,q}$. Como

$$senp\,cos\,q+senq\,cos\ p=sen\left(p+q\right),$$

então teremos que

$$tg\ p+tg\ q=\frac{sen\left(p+q\right)}{cos\ p\,cos\,q} \quad (8.17)$$

De modo análogo, desenvolvemos a diferença $tg\ p-tg\ q$ e obtemos

$$tg\ p-tg\ q=\frac{sen\left(p-q\right)}{cos\ p\,cos\,q} \quad (8.18)$$

Exercício resolvido3: Calcule o valor da expressão $y=sen\left(\frac{13\pi}{12}\right).cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Solução: Para resolvermos esse exemplo, podemos inicialmente substituir $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{11\pi}{12}$ por $\frac{p+q}{2}$ e $\frac{p-q}{2}$, respectivamente, ou seja, $\frac{p+q}{2}=\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{p-q}{2}=\frac{11\pi}{2}$. Daí, queremos calcular $sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, que será igual a $\frac{senp+senq}{2}$. Temos então das duas igualdades acima que $p=2\pi$ e $q=\frac{\pi}{6}$. Logo,

$$y=sen\left(\frac{13\pi}{12}\right)cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{sen2\pi+sen\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}.$$

Aqui encerramos o tópico sobre transformações trigonométricas. Vimos neste tópico o processo de se determinar fórmulas para soma e diferença de arcos. Estudamos ainda como obtemos o valor do arco duplo, arco metade e arco triplo. E mostramos que era possível transformar somas e diferenças de arcos em produtos. No tópico seguinte, iremos estudar as equações e inequações trigonométricas.

Tópico 2

Equações e inequações trigonométricas

OBJETIVOS

- Entender as formas básicas de equações trigonométricas
- Compreender a redução das equações trigonométricas a uma das formas básicas
- Resolver as equações e inequações trigonométricas

Nesse tópico,apresentamos conceitos muito importantes para a compreensão e resolução de problemas que envolvem equações e inequações trigonométricas. Nele, utilizaremos todo o conhecimento sobre trigonometria visto até o momento para trabalharmos situações modeladas matematicamente por equações ou inequações trigonométricas.

Inicialmente, iremos analisar as soluções das equações trigonométricas básicas para, em seguida, iremos reduzir qualquer equação trigonométrica para uma das equações básicas. Por fim, estudaremos as inequações trigonométricas comparando com o estudo feito com as soluções das equações trigonométricas básicas.

Um exemplo clássico de equação trigonométrica surge quando se deseja determinar, por exemplo, o ângulo que um determinado objeto forma em relação a dois referenciais. Sendo assim, suponha que você é um topógrafo e está a 70 metros de distância de uma serra e descobriu que a altura da serra é também 70 metros. Qual o ângulo que o teodolito formará com a terra (horizontal) de modo que você possa ver o pico da serra?

Desprezando a altura da base do teodolito, temos que esse problema será resolvido pela seguinte equação, $tg\alpha = \frac{70}{70} = 1$. Portanto, estamos procurando o ângulo de tal forma que a tangente dele será igual a 1. Facilmente, notamos que $tg\ 45^o = 1$. Então esse problema se resume na equação $tg\ \alpha = tg\ 45^o (*)$.

Mostraremos a seguir como resolver equações da forma (*). Primeiramente definiremos abaixo o que seria uma equação trigonométrica juntamente com o seu conjunto solução.

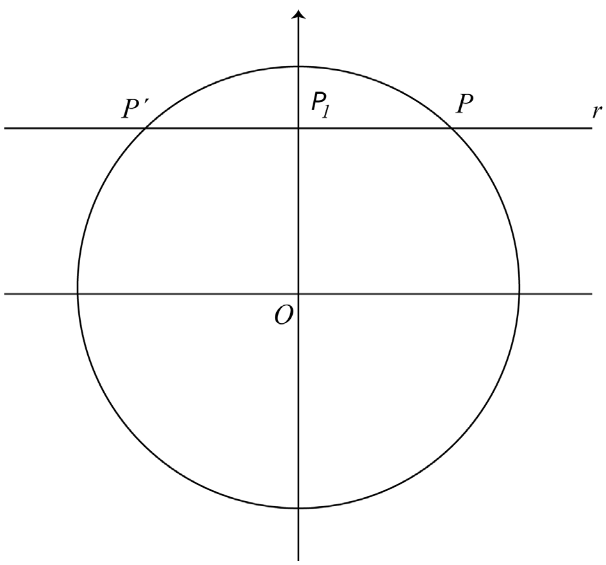
Definição 8.1 Dizemos que a equação $f(x) = g(x)$ é uma **equação trigonométrica** quando f ou/e g são funções trigonométricas na variável x. A **solução** de uma equação trigonométrica é um número real r de tal modo que $f(r) = g(r)$ seja uma sentença verdadeira. O conjunto S de todos os números que satisfazem $f(r) = g(r)$ é denominado **conjunto solução**.

Iremos estudar três tipos de equação trigonométricas básicas: $sen\ \alpha = sen\ \beta, cos\,\alpha = cos\,\beta$ e $tg\ \alpha = tg\ \beta$. Tais equações são denominadas de *equações fundamentais*, pois qualquer outra equação trigonométrica que possamos resolver poderá ser simplificada para qualquer uma das três equações acima. Então vamos analisar cada caso.

1º Caso: $sen\ \alpha = sen\ \beta$

Se $sen\ \alpha = sen\ \beta = \overline{OP_1}$, então as imagens de α e β no círculo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, as imagens estão sobre P ou P', como mostra figura 132.

Figura 132 – Representação de $sen\ \alpha = sen\ \beta$



Fonte: Adaptada de Ross (2002, p.278)

Há, portanto, duas possibilidades:

1) ou α e β têm a mesma imagem, isto é, são ângulos côngruos $(\alpha = \beta + 2k\pi)$;

2) ou α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares $(\alpha = \pi - \beta + 2k\pi)$.

Dessa forma:

> $sen\ \alpha = sen\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$ em que k é o número de voltas dadas no círculo trigonométrico.

Com base no que foi exposto acima, seguem dois exercícios para fixar o conteúdo.

Exercício resolvido 4: Determine os valores de x reais tais que $sen^2 x - senx = 0$.

Solução: Temos uma equação trigonométrica com aparência de equação do segundo grau, pois, efetuando a substituição $sen\ x = y$, teremos a equação $y^2 - y = 0$, que tem como soluções $y = 1$ ou $y = 0$. Ou seja, teremos reduzido tal equação para duas equações fundamentais.

A equação $sen\ x = sen\ 0$ tem como solução $x = 2k\pi$ ou $x = \pi - 0 + 2k\pi = \pi + 2k\pi$ (note que o conjunto solução será formada pelos ângulos $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$, que dá no mesmo que $x = k\pi,$ com $k \in \mathbb{Z}$). Já a equação $sen\ x = sen\dfrac{\pi}{2}$ tem como solução $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, ou seja, simplificamos ambas para $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Portanto, a solução da equação será o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}; x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vejamos abaixo um exemplo bem interessante que pode envolver em uma equação as funções seno e cosseno. Nesses casos, podemos utilizar as transformações acima ou a Relação Fundamental da Trigonometria para trabalharmos a equação com seno ou cosseno somente.

Exercício resolvido 5: Mostre que 18° é um ângulo notável.

Solução: Para essa questão, vamos lembrar que os ângulos 36° e 54° são complementares, pois a soma deles é igual a 90°. Com isso, temos inicialmente que $sen 36^o = cos\,54^o$. Agora uma observação importante, $36^\circ = 2.18^\circ$ e $54^\circ = 3.18^\circ$. Logo, teremos $sen\left(2.18^o\right) = cos\left(3.18^o\right)$.

Existem muito mais ângulos notáveis do que conhecemos. No Ensino Médio, aprendemos que 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° e seus arcos côngruos são notáveis, pois calculamos facilmente o valor de seus senos e cossenos. Utilizando as equações trigonométricas e as fórmulas de transformações, encontramos outras famílias de ângulos notáveis, como é o caso do 18°.

Voltemos ao tópico anterior para buscar duas fórmulas de arcos múltiplos, seno do arco duplo e cosseno do arco triplo.

Daí, teremos

$$sen\left(2.18^o\right) = 2.sen18^o.cos18^o$$
$$cos\left(3.18^o\right) = 4.cos^3 18^o - 3.cos18^o$$

Como as expressões acima são iguais, teremos que

$$2sen\ 18^o cos18^o = 4cos^3 18^o - 3cos18^o.$$

Note que $cos18^o \neq 0$, então podemos simplificar a equação para

$$2sen\ 18^o = 4cos^2 18^o - 3,$$

que é uma equação do segundo grau envolvendo elementos trigonométricos. Como não estudamos ainda o caso do cosseno, podemos utilizar a Relação Fundamental da Trigonometria para substituir $cos18^o$ por $1 - sen^2 18^o$, que envolve seno. Assim, teremos

$$2sen\ 18^o = 4\left(1 - sen^2 18^o\right) - 3 = 4 - 4sen^2 18^o - 3 = 1 - 4sen^2 18^o.$$

Fazendo $sen18^o = x$, veremos nossa equação do segundo grau, isto é, $2x = 1 - 4x^2$ que pode ser reescrita como $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Utilizando a fórmula de Bháskara, obtemos as raízes da equação, que serão $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ou $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

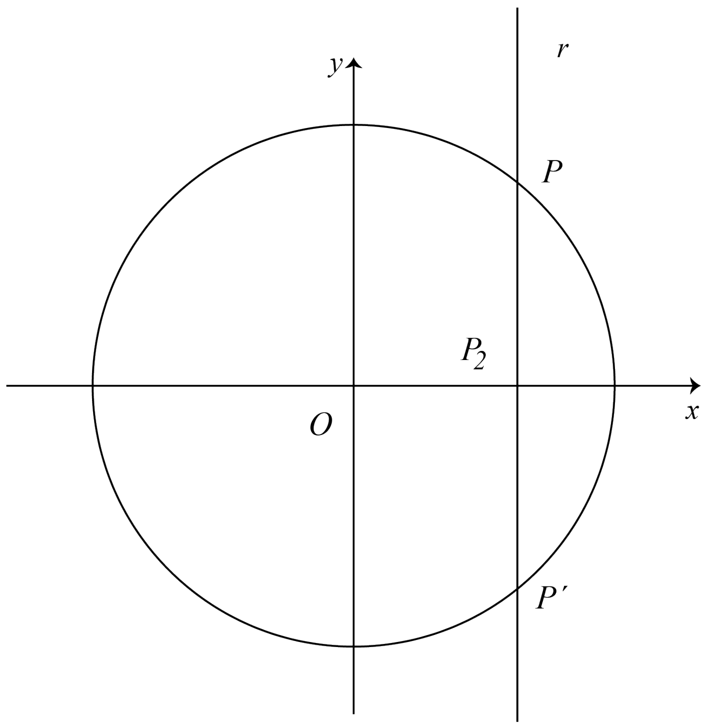
Como $x_1 < 0$ e $x = sen\ 18^o > 0$, então devemos ter $sen\ 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. E para obtermos $cos\,18^o$, basta lembrar que $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$, expressão resultante da Relação Fundamental da Trigonometria. Logo, temos que $cos\,18^o = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ e concluímos queé um ângulo notável.

Vejamos agora o segundo caso, ou melhor, o caso do cosseno.

2º Caso: $cos\,\alpha = cos\,\beta$

Analisando agora o eixo dos cossenos $cos\,\alpha = cos\,\beta = \overline{OP_2}$, se, então as imagens de α e β no círculo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, as imagens estão sobre P ou P', como mostra figura 133.

Figura 133 – Representação de $cos\,\alpha = cos\,\beta$



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 98)

Há, portanto, duas possibilidades:

1) ou α e β têm a mesma imagem, isto é, são ângulos côngruos $(\alpha = \beta + 2k\pi)$

2) ou α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares $(\alpha = -\beta + 2k\pi)$.

Dessa forma:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$, em que k é o número de voltas dadas no círculo trigonométrico.

Podemos assim resolver o seguinte exercício abaixo:

Exercício resolvido 6: Resolva a equação *üüüüü* $(\qquad +1) = 0$.

Solução: Como essa equação envolve um produto entre dois números resultando em zero, então teremos que um dos dois deverá ser zero, ou seja, $\cos x = 0$ ou $\cos x + 1 = 0$. A segunda igualdade implica que $\cos x = -1$. Daí, teremos $\cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, que tem como solução $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. E $\cos x = -1 = \cos\pi$ tem solução $x = \pm\pi + 2k\pi$.

Observe que $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ é o mesmo que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (Verifique os ângulos gerados pelos dois conjuntos e confirme!) e $x = \pm\pi + 2k\pi$ é o mesmo que $x = \pi + 2k\pi$.

Logo, o conjunto solução será $\left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

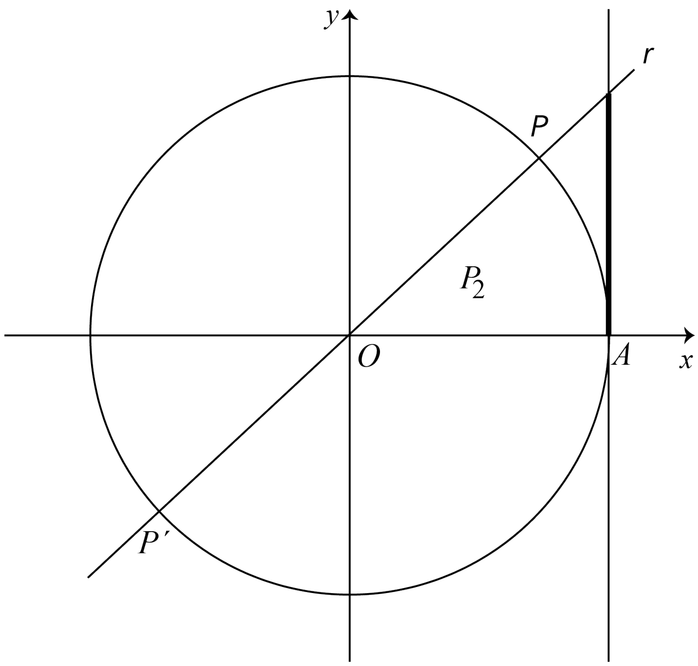
É interessante observarmos que outras equações podem ser simplificadas para a equação acima. Por exemplo, se tomarmos a equação $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$, podemos simplificá-la para a equação do Exercício resolvido 7, pois $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$. Daí, teremos que $1 - \cos^2 x = 1 + \cos x$. Cancelando os dois uns e passando $-\cos^2 x$ para o outro membro da igualdade, teremos $\cos^2 x + \cos x = \cos x.(\cos x + 1) = 0$. Nesse caso, a solução da equação inicial será a mesma solução do Exercício resolvido 7. Isso ocorre, pois as duas equações são equivalentes.

Para finalizarmos, vejamos o caso da tangente.

3° Caso: $tg\ \alpha = tg\ \beta$

De modo análogo a seno e cosseno, iremos analisar a tangente de acordo com sua representação geométrica, ou seja, se $tg\ \alpha = tg\ \beta = \overline{OT}$, então as imagens de α e β no círculo estão sobre a reta r determinada por O e T, isto é, as imagens estão sobre P ou P', como mostra figura 134.

Figura 134 – Representação de $tg\ \alpha = tg\ \beta$



Fonte: Adaptada de Iezzy (1997, p. 101)

Há, portanto, duas possibilidades:

1) ou α e β têm a mesma imagem, isto é, são ângulos côngruos $(\alpha = \beta + 2k\pi)$

2) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro da circunferência, isto é, são explementares $(\alpha = \pi + \beta + 2k\pi)$.

Dessa forma:

$$tg\ \alpha = tg\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi,$$ onde k é o número de voltas dadas no círculo trigonométrico.

Observe que $\alpha = \beta + 2k\pi$ e $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$ podem ser simplificadas em uma única expressão $\alpha = \beta + k\pi$, pois a segunda igualdade, $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$, está acrescentando meia volta (π radianos) a primeira igualdade. Portanto, basta tomar α e β acrescentando π radianos a cada iteração.

Vejamos um exemplo de questão, que inicialmente parece ser resolvida por um dos dois primeiros casos, mas na verdade vai recair no terceiro caso.

Exercício resolvido 7: Resolva a equação $sen\ x = cos\ x$.

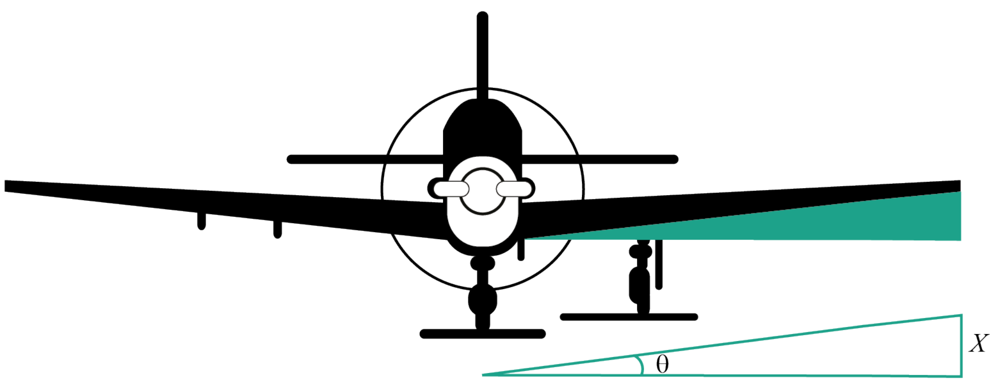
Solução: De cara, imaginamos que podemos resolver essa equação utilizando um dos dois primeiros casos, mas podemos ter algumas complicações se optarmos por esse caminho. Veja que, tomando $cos\ x \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da equação por $cos\ x$. Obtemos, assim, $\frac{senx}{cos\ x} = \frac{cos\ x}{cos\ x} = 1$. Como $\frac{sen\ x}{cos\ x} = tg\ x$, então nossa equação será reduzida ao terceiro caso, ou seja, $tg\ x = 1 = tg\frac{\pi}{4}$. Logo, a solução da equação será encontrada facilmente, verificando que $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

A maioria das modelagens matemáticas resultam em equações. No nosso caso, equações trigonométricas, mas há situações em que a modelagem matemática de um sistema nem sempre gera uma equação ou várias equações para resolvermos. Podemos nos deparar com situações que envolvem uma inequação.

Vamos supor que você é um engenheiro aeroespacial e está desenvolvendo um avião para fazer um percurso sem piloto, ou seja, um avião com piloto automático. Para o avião efetuar as manobras com sucesso, deve haver uma modelagem matemática muito eficaz e muitas das curvas e giros que o avião efetua fazem com que as asas do avião formem vários ângulos com um determinado eixo do avião. Pensando como engenheiros, fazemos uma pergunta importante:que variações de ângulo podemos determinar com as asas de modo que o avião não caia a determinada velocidade ou se estiver planando?

Vejamos a figura 135.

Figura 135 – Avião projetado



Fonte: DEaD | IFCE

Note que a asa do avião forma um ângulo θ com o eixo horizontal. À medida que o avião inclina sua asa esquerda para cima ou para baixo temos que o ângulo θ irá variar e a distância entre a ponta da asa (que chamamos de x) e o eixo horizontal também irá variar.Depois de muitos testes, descobrimos o valor máximo que x pode atingir de modo que o avião não caia se estiver planando. Suponha que a razão máxima (determinada pelos testes) entre x e a medida do comprimento da asa seja $0{,}5$. Então $sen\ \theta$, que é igual a essa razão, não pode superar esse valor máximo.

Na nossa modelagem, devemos determinar os possíveis ângulos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ de modo que $sen\ \theta < 0{,}5$. Como $sen\frac{\pi}{6} = 0{,}5$, então teremos $sen\ \theta < sen\frac{\pi}{6}$. Eis nossa inequação trigonométrica!

É importante termos noção que nem sempre teremos uma inequação simples como essa para resolvermos, mas todas as inequações trigonométricas se resumem a alguns casos da mesma forma que acontece com as equações trigonométricas estudadas acima.

De maneira formal, podemos então definir o que seria uma inequação trigonométrica.

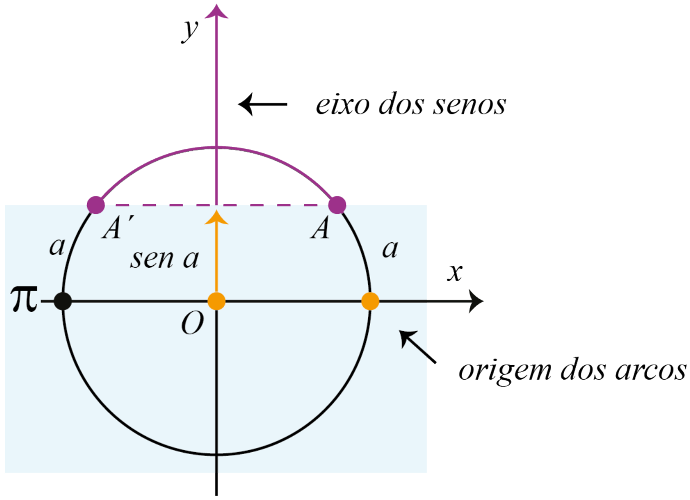
Definição 8.2 Dizemos que a inequação $f(x) > g(x)$, é uma **inequação trigonométrica** quando f ou/e g são funções trigonométricas na variável x. A **solução** de uma equação trigonométrica é um número real r de tal modo que $f(r) > g(r)$ seja uma sentença verdadeira. O conjunto S de todos os números que satisfazem $f(r) > g(r)$ é denominado **conjunto solução**.

Existem seis tipos básicos de inequações trigonométricas: $sen\ x < sen\ \alpha, sen\ x > sen\ \alpha, cos\ \ x < cos\,\alpha, cos\ \ x > cos\,\alpha, tg\ x > tg\alpha$ e $tg\ x < tg\alpha$. Observe que podemos ter também o sinal $\leq$ ou $\geq$ no lugar de $<$ ou $>$. Mas, de forma geral, podemos estudar somente os seis casos acima bastando substituir os sinais $\leq$ ou $\geq$ coerentemente no resultado, caso apareçam. Aqui vamos explicar bem o primeiro caso e os demais estarão ilustrados de forma bem didática.

1° caso: $sen\ x < sen\ \alpha$

Como o seno é representado no eixo y, então analisaremos o valor de $sen\ \alpha$ sobre o eixo y. Suponha que $sen\ \alpha > 0$, então teremos a situação ilustrada na figura 136.

Figura 136: Representação de $sen\ x < sen\ \alpha$



Fonte: DEaD | IFCE

Observando a figura 136, vemos que o arco azul determina todos os possíveis ângulos que x pode assumir, pois qualquer ângulo sobre o arco azul terá seno menor que $sen\ \alpha$. Observe também que α é determinado pelas extremidades A e A'. Cada ângulo desses pode ser acrescentado de $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, que representa as inúmeras voltas sobre a circunferência obtendo o mesmo arco (arcos côngruos). O arco determinado por A' pode ser analisado como $\pi - \alpha$. Com isso, temos que $x < \alpha + 2k\pi$ e $x > \pi - \alpha + 2k\pi = (2k+1)\pi + \alpha$, isto é, a solução para o primeiro caso será o conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; (2k+1)\pi - \alpha < x < 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$$

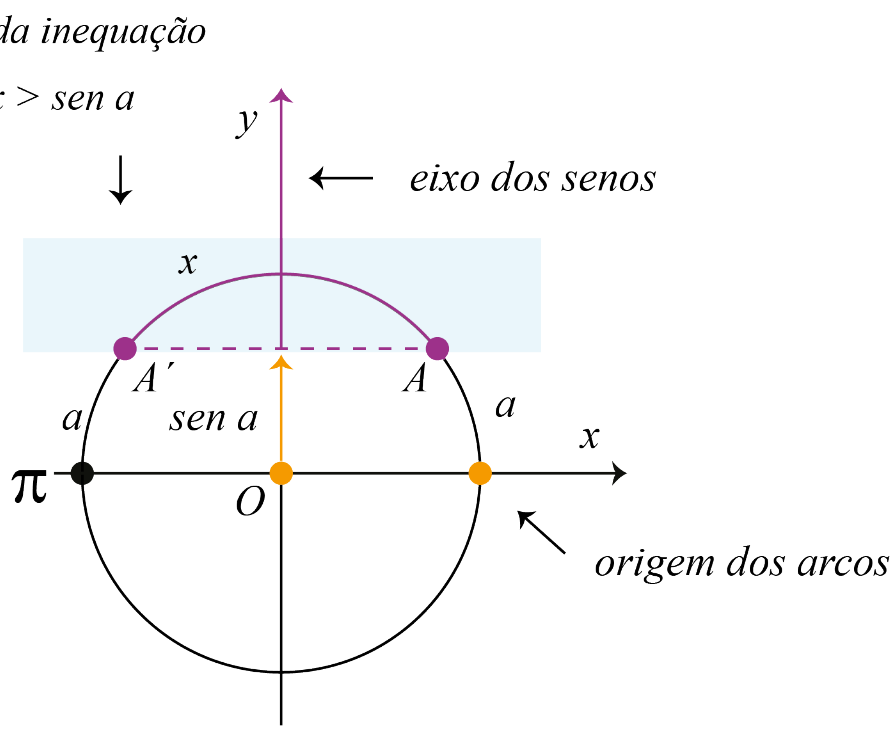
O exemplo a seguir exemplifica o que foi explicado anteriormente.

Exemplo2: Vejamos nosso caso proposto na ilustração do avião. Queremos resolver a equação $sen\ \theta < sen\frac{\pi}{6}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Se não tivéssemos a restrição $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, nossa solução seria simplesmente $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$. Com a restrição, podemos retirar as possíveis voltas sobre a circunferência obtendo $\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{5\pi}{6} < \theta < 2\pi$ ou $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$. Por fim, efetuando a interseção desse resultado com $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$, obtemos como solução $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$.

Os demais casos estão ilustrados a seguir:

2° caso: *sen x > sen a*

Figura 137 – Representação do *sen x > sen a*



As extremidades dos arcos x estarão sobre o arco A A´

$$\boxed{2k\pi + a < x < (2k + 1)\,\pi - a} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}$$

↑ *arcos com extremidade A*

↑ *arcos com extremidade A´*

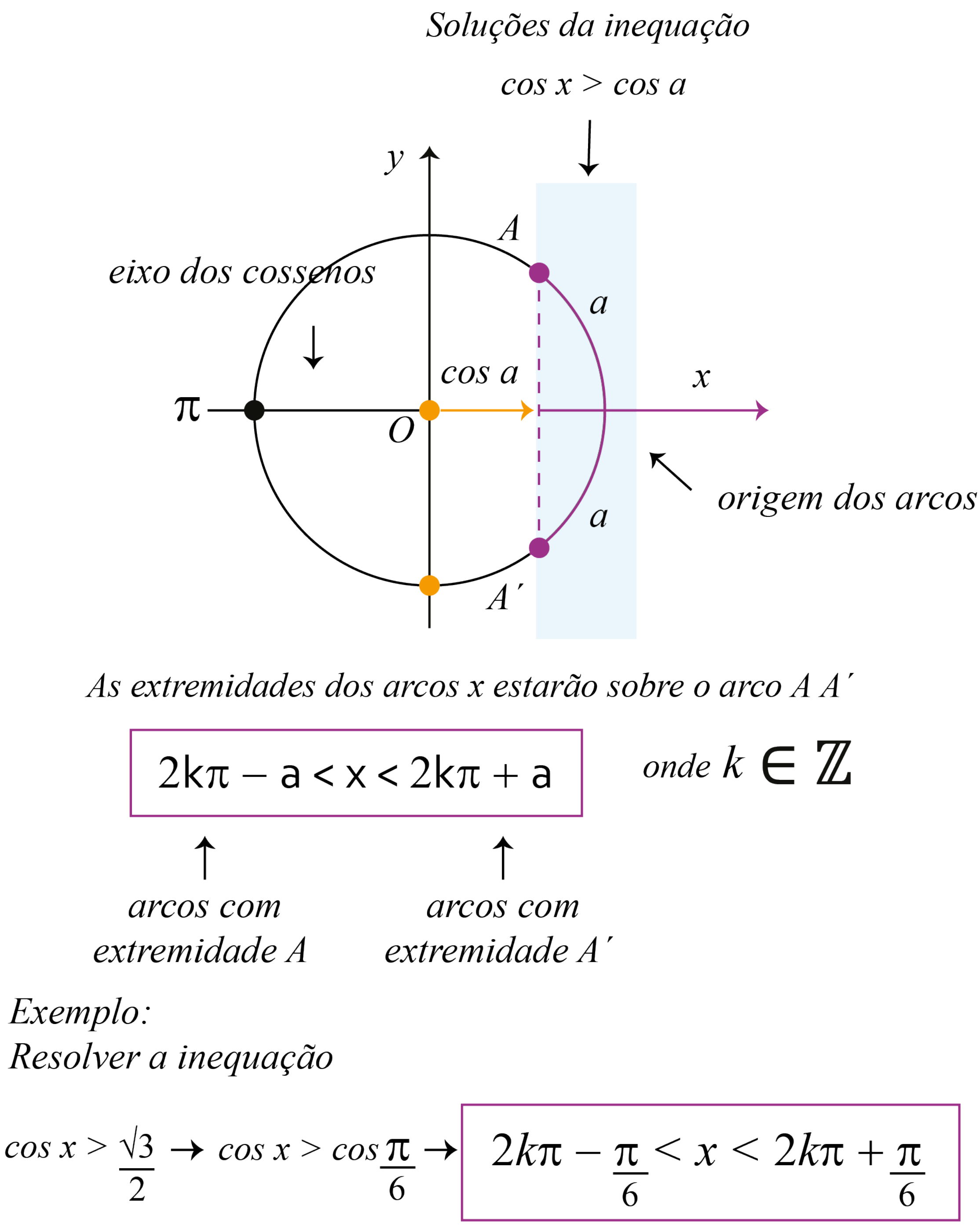
Exemplo:
Resolver a inequação

$$senx > \frac{1}{2} \rightarrow senx > sen\,\frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < (2k\pi + 1) - \frac{\pi}{6}}$$

Fonte: DEaD | IFCE

<u>3° caso</u>: $\cos x > \cos a$

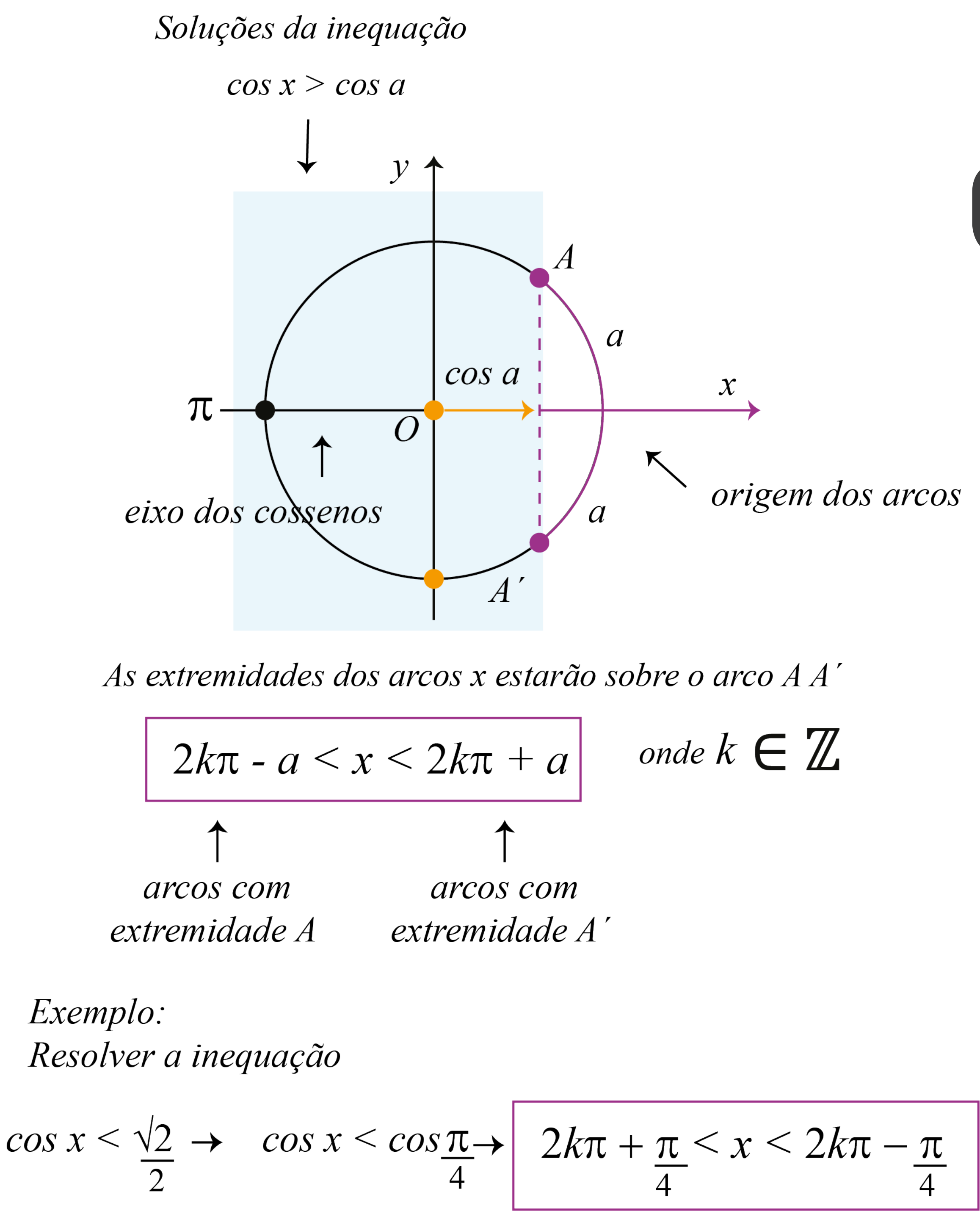
Figura 138 – Representação $\cos x > \cos a$



Fonte: DEaD | IFCE

$\underline{4^{\circ}\ \textbf{Caso:}}$ $\cos x < \cos a$

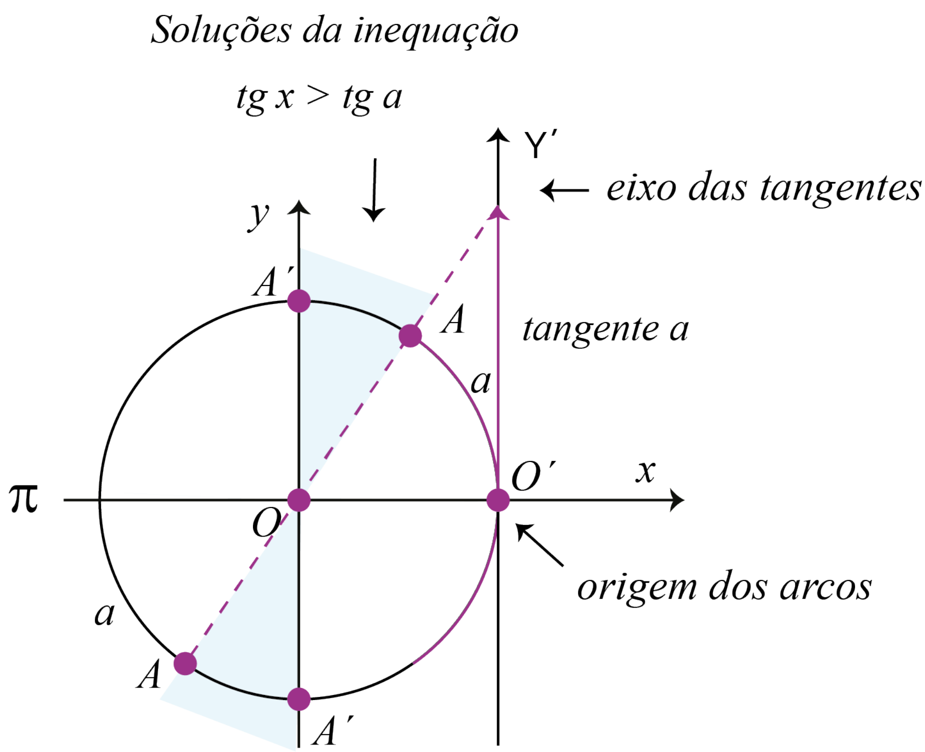
Figura 139: Representação $\cos x < \cos a$



Fonte: DEaD | IFCE

<u>5° caso</u>: $tg\ x > tg\ a$

Figura 140 – Representação $tg\ x > tg\ a$



$$\boxed{k\pi + a < x < k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}$$

arcos com extremidade A   *arcos com extremidade A´*

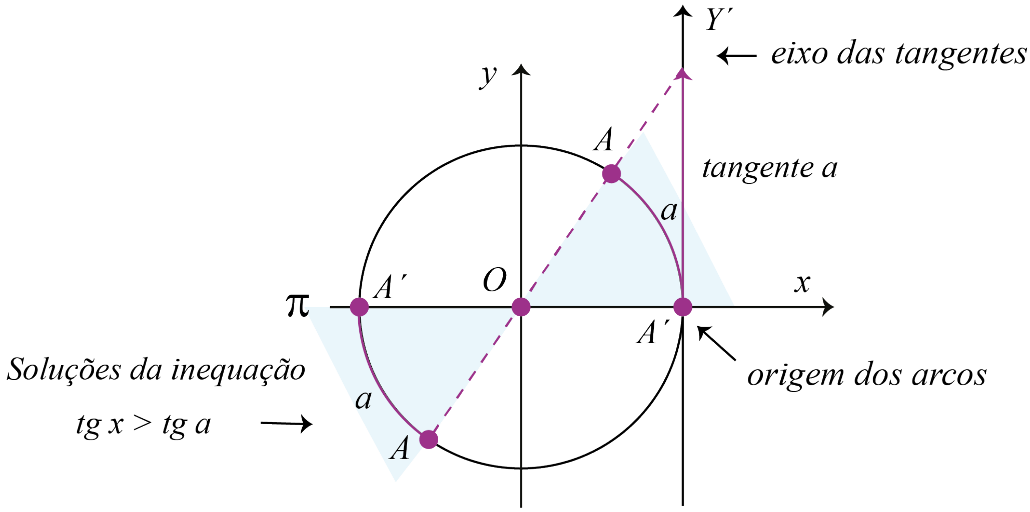
Exemplo:
Resolver a inequação

$$tgx > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow tgx > tg\frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{k\pi + \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Fonte: DEaD | IFCE

6º Caso: $tg\ x < tg\ a$

Figura 141 – Representação $tg\ x < tg\ a$



$$\boxed{k\pi < x < k\pi + a} \quad onde\ k \in \mathbb{Z}$$

↑ arcos com extremidade A´

↑ arcos com extremidade A

Exemplo:
Resolver a inequação

$$tgx < 1 \rightarrow tgx < tg\frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{4}}$$

Fonte: DEaD | IFCE

Concluímos aqui nosso último tópico e nossa aula 8. Nele estudamos o processo de resolução das equações e inequações trigonométricas utilizando todas as ferramentas de trigonometria que vimos nas aulas anteriores e no tópico 1 desta aula. Estudem bastante e aprofundem os assuntos resolvendo os exercícios propostos. Busquem sempre os livros indicados nas referências como apoio e para resolverem mais exercícios ainda. Só se faz Matemática exercitando! Bons estudos.

Pratique...

1. Sendo $\sec x = \dfrac{25}{24}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $tg(2x)$.

2. Calcule $sen^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + tg\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + tg\left(\dfrac{14\pi}{3}\right)$.

3. Mostre que $sen(4x) = 4.senx.\cos^3 x - 4sen^3 x.\cos x$.

4. Se $tgx = \dfrac{5}{12}$, calcule $sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

5. Sabendo-se que x é um arco do primeiro quadrante e que $\cos x = \dfrac{1}{3}$, calcule $sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

6. Prove que $(senA + \cos A)^4 = 4\cos^4\left(A - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. Calcule $\cos 40^\circ.\cos 80^\circ.\cos 160^\circ$.

8. Transforme em produto $\cos(2x) - sen(2x)$.

9. Resolva a equação $\cos(2x) + 3\cos x + 2 = 0$ $\cos(2x) + 3\cos x + 2 = 0$.

10. Resolva a equação $\cot gx - sen(2x) = 0$.

11. Resolva a inequação $\cos(2x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ supondo que $x \in [0, 2\pi]$.

12. Resolva a inequação $tg^2(2x) \leq tg(2x)$ supondo que $x \in [0, 2\pi]$.

Gabarito

1. $-\dfrac{336}{527}$

2. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Questão de demonstração

4. $\dfrac{\sqrt{26}}{26}$

5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, respectivamente.

6. Questão de demonstração

7. $-\dfrac{1}{8}$

8. $\sqrt{2}.sen\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$

9. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pm\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

10. $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, com $k\in\mathbb{Z}$.

11. $\dfrac{\pi}{12}\leq x\leq\dfrac{11\pi}{12}$

12. $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{8}$ ou $\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{5\pi}{8}$

Referências

ALMEIDA, David et al. **Matemática ciência e aplicações.** 6. ed. São Paulo: Atual, 2010.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar.** 2. ed. São Paulo: Atual, 1977. 3 v.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática ciência e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2010.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar.** 8. ed.

São Paulo: Atual, 2004. 1 v.

_______. **________.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 1 v.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio.** 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1999. 1 v.

LIMA, E. L et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2004. 1 v. (Coleção do Professor de Matemática).

_______. **_______.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 1v. (Coleção do Professor de Matemática).

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de matemática elementar**: introdução a análise. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 3 v.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigo da Rocha. **Coleção elementos da matemática.** 3. ed. Fortaleza: VestBeller, 2010. 1 v.

ROSS, Debra Anne. **Master math trigonometry**. Boston, USA: Course Technology, 2002.

Sobre os autores

Kiara Lima Costa

Nasceu e foi criada em Fortaleza. Fez todos os seus estudos na Universidade Federal do Ceará (UFC). Começou fazendo o curso de Licenciatura em Matemática, e depois fez o Mestrado em Matemática se especializando na área de Álgebra. Já foi professora da UFC, atuando tanto no presencial quanto no semipresencial e também ministrou aulas na Universidade de Fortaleza (UNIFOR). Atualmente é professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE) no *campus* Canindé atuando no curso de Licenciatura em Matemática.

Diego Ponciano de Oliveira Lima

Professor Diego Ponciano de Oliveira Lima é licenciado em Matemática pelo IFCE (2007), graduado em Mecatrônica Industrial pela mesma instituição (2009) e Mestre em Matemática pela UFC (PROFMAT/2013). Atuou, desde 2008, em várias disciplinas, como tutor a distância no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE/UAB e foi professor de Matemática do Colégio Militar de Fortaleza (2009 a 2013). Em 2011 e 2012, representou o Brasil como professor/tutor na Olimpíada Rioplatense de Matemática (ORM) realizada na Argentina; trabalhou, também, em vários projetos de extensão no IFCE com foco em Olimpíadas de Matemática. Desde dezembro de 2013, é professor efetivo de Matemática do IFCE. Atualmente, é coordenador de área do subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) no IFCE *campus* Canindé.

Darlan Portela Veras

Professor Darlan Portela Veras é Licenciado, Bacharel e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra. Desde 2009, é professor efetivo do Instituto Federal do Ceará, *campus* Fortaleza. Atuou como tutor e formador a distância no IFCE de 2008 até o início de 2014. Desde março de 2014, atua como coordenador de Área do projeto PIBID/IFCE no polo de Quixeramobim.

Ministério da Educação
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará