DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

Didática da Matemática

Franscisco Régis Vieira Alves

Fortaleza, CE
2011

CRÉDITOS

Presidente
Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário da SEED
Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância
Celso Costa

Reitor do IFCE
Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino
Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE
Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB
Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria
José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Zelalber Gondim Guimarães

Elaboração do conteúdo
Franscisco Régis Vieira Alves

Colaboradora
Lívia Maria de Lima Santiago

Equipe Pedagógica e Design Instrucional
Ana Claúdia Uchôa Araújo
Andréa Maria Rocha Rodrigues
Cristiane Borges Braga
Eliana Moreira de Oliveira
Gina Maria Porto de Aguiar Vieira
Iraci Moraes Schmidlin
Jane Fontes Guedes
Jivago Silva Araújo
Karine Nascimento Portela
Lívia Maria de Lima Santiago
Luciana Andrade Rodrigues
Maria Irene Silva de Moura
Maria Vanda Silvino da Silva
Marília Maia Moreira
Regina Santos Young

Equipe Arte, Criação e Produção Visual
Ábner Di Cavalcanti Medeiros
Benghson da Silveira Dantas
Davi Jucimon Monteiro
Diemano Bruno Lima Nóbrega
Germano José Barros Pinheiro
Gilvandenys Leite Sales Júnior
Hommel Almeida de Barros Lima
José Albério Beserra
José Stelio Sampaio Bastos Neto
Larissa Miranda Cunha
Marco Augusto M. Oliveira Júnior
Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento
Roland Gabriel Nogueira Molina

Equipe Web
Aline Mariana Bispo de Lima
Benghson da Silveira Dantas
Fabrice Marc Joye
Igor Flávio Simões de Sousa
Luiz Bezerra de Andrade FIlho
Lucas do Amaral Saboya
Marcos do Nascimento Portela
Ricardo Werlang
Samantha Onofre Lóssio
Tibério Bezerra Soares
Thuan Saraiva Nabuco

Revisão Textual
Débora Liberato Arruda Hissa
Saulo Garcia

Revisão Web
Antônio Carlos Marques Júnior
Aurea Suely Zavam
Débora Liberato Arruda Hissa
Nukácia Meyre Araújo de Almeida
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar
Virgínia Ferreira Moreira

Secretários
Breno Giovanni Silva Araújo
Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar
Bernardo Matias de Carvalho
Carla Anaíle Moreira de Oliveira
Maria Tatiana Gomes da Silva
Wagner Souto Fernandes
Zuila Sâmea Vieira de Araújo

Catalogação na Fonte: Islânia Fernandes Araújo CRB 3/917

V658d Vieira, Francisco Régis Alves.
Didática da Matemática / Francisco Régis Alves Vieira; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.
201p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-475-0010-8

1. MATEMÁTICA - DIDÁTICA. 2. MATEMÁTICA - ENSINO E APRENDIZAGEM. I. Joye, Cassandra Ribeiro (Coord.). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. III. Universidade Aberta do Brasil – UAB. IV. Título.

CDD – 510.7

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro(a) estudante,

O presente curso de Didática da Matemática foi concebido, estruturado e desenvolvido sob influência marcante da vertente francesa na área de pesquisa, internacionalmente conhecida como Didática da Matemática. Vale salientar um pressuposto básico explorado em todo momento por nós que diz respeito à impossibilidade de se estudar qualquer teoria de natureza didático-metodológica distante do seu domínio de 'aplicação'. Assim, para a compreensão e aprofundamento das teorias que serão discutidas neste curso, uma condição sine qua non que se apresenta é o domínio aprofundado do próprio conteúdo de matemática. Assim, sempre que possível, na ocasião da contextualização e aplicação das teorias que discutiremos, sugerimos a compreensão dos 'entraves' e obstáculos epistemológicos no campo do ensino/aprendizagem de matemática. Por fim, tudo que será discutido se insere no campo de uma 'teoria pedagógica específica' da Matemática e, seu estudo perde o sentido e o significado quando evolui distante do conhecimento matemático específico.

AULA 1 | Os fundamentos da Didática da Matemática

Olá, aluno(a)!

Nesta aula, discutiremos as bases epistemológicas da Didática da Matemática focalizando alguns pressupostos da Didática Geral. A necessidade de pensarmos em uma proposta específica para o ensino de Matemática é muito importante para a atuação do professor em formação.

Objetivos

- Apresentar as bases epistemológicas e os principais pressupostos epistêmicos assumidos na Didática da Matemática
- Caracterizar os principais elementos relacionados à transposição didática
- Discutir aspectos relevantes do ensino da Matemática e relacioná-los com a prática pedagógica

TÓPICO 1

Conceitos introdutórios: administração, organização, processo admistrativo e níveis hierárquicos

Objetivos

- Compreender o conceito de administração e organização
- Identificar a diferença entre eficiência e eficácia e sua importância para o bom desempenho organizacional
- Conhecer os níveis hierárquicos de uma organização

Libâneo (1995, p. 129), em uma obra clássica da área da pedagogia, a respeito das tendências pedagógicas, assim se manifesta:

> Os enfoques sobre o papel da didática na atividade escolar variam de acordo com as tendências pedagógicas, sendo possível encontrar na prática educacional pelo menos três: o tradicional, o renovado-tecnicista e o sociopolítico. O tradicional refere-se à didática assentada na transmissão cultural, concebendo o aluno como um ser receptivo/passivo, atribuindo um caráter dogmático aos conteúdos e métodos da educação; o renovado-tecnicista corresponde à versão modernizada da escola nova, acentuando o caráter prático-técnico do ensino e, assim, sua neutralidade face às questões sociais; finalmente, o sociopolítico assume uma postura crítica em relação aos dois anteriores, por acentuar a relevância dos determinantes sociais na educação e, assim, as finalidades sociopolíticas da escola.

O posicionamento de Libâneo é interessante na medida em que caracteriza, delineia e aponta as consequências das tendências pedagógicas que, podem manter uma possível relação com o saber matemático, embora, em certos casos, seja tênue, ou mesmo inexistente e superficial.

É importante que saibamos, antes de nos aprofundarmos nas aulas seguintes, que a tendência tradicional e a tendência renovado-tecnicista não explicam, não caracterizam, não anteveem de modo específico as relações estabelecidas no ensino de Matemática.

Nesta aula, demarcaremos as bases epistemológicas e os principais pressupostos epistêmicos assumidos na Didática da Matemática. Para tanto, vamos confrontar as palavras de Libâneo (1995) reproduzidas acima com as do matemático Brousseau (1996), que caracteriza a Didática da Matemática como sendo atividades didáticas, ou seja, atividades que têm como objeto o ensino.

Já o pesquisador italiano D´Amore (2007) descreve a Didática da Matemática como uma disciplina científica cujo objetivo do campo de pesquisa é saber identificar, compreender e caracterizar fenômenos que condicionam a aprendizagem e o ensino da matemática.

SAIBA MAIS!

Para maior aprofundamento sobre as tendências pedagógicas, veja o quadro síntese disponível no site http://pedagogia.tripod.com/quadro_tendencias.htm

Brousseau, ao fazer referência às relações estabelecidas entre aluno-professor-saber matemático, destaca o caráter situado do conhecimento em questão o qual, na maioria dos casos, se restringe à sala de aula.

Outro fator relevante apontado por Brousseau se relaciona aos comportamentos cognitivos dos aprendizes. De fato, quando se estuda Didática Geral, fala-se demasiadamente das ações, pensamentos e reflexões necessárias para o professor, entretanto para um professor qualquer, uma escola aleatória e alunos reunidos em torno da aquisição de um saber hipotético.

Não rejeitamos ou desvalorizamos tal perspectiva. Salientamos, porém, que, em uma aula de Matemática, no que diz respeito ao professor e seus alunos, alguns destes pressupostos generalistas podem mostrar-se inócuos, e mesmo improfícuos.

SAIBA MAIS!

Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, no Marrocos, filho de um soldado francês. Em 1953, começou a dar aulas no Ensino Fundamental numa aldeia da região de Lot et Garonne. Fonte: http://antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0219/aberto/pai-didatica-matematica-414955.shtml

Mas afinal, qual é o objeto de estudo da *Didática da Matemática?* Recorremos mais uma vez a Brousseau (1996, p. 46):

> O saber constituído se apresenta sobre formas diversas, por exemplo, sob forma de questão e respostas. A apresentação axiomática é uma apresentação clássica da matemática. E, além disso, em virtude do cientificismo que conhecemos, ela se mostra maravilhosamente adaptada ao ensino. Ela permite a cada momento de definirmos os objetos

que estudamos com auxílio de noções precedentes e introduzidas e, assim, de organizar a aquisição de novos saberes com o auxílio de aquisições anteriores. Ela proporciona então ao estudante e ao seu professor um meio de ordenar suas atividades e de acumular em um mínimo de tempo possível o máximo de saber próximo do savoir savante.

A forma de organização do saber transmitido no ensino é, reconhecidamente, uma preocupação da Didática; no caso específico desta disciplina, a Didática da Matemática, a forma de organização do saber matemático. Brousseau denuncia acima alguns dos malefícios da apresentação axiomática dos conteúdos, tão peculiar na atividade do professor de Matemática.

A apresentação axiomática é reconhecida com maior imediatez quando falamos de Geometria Plana. A axiomatização e sistematização das ideias e argumentações construídas há séculos pelos gregos ainda servem de modelo, paradigma e verdade para muitos professores de Matemática, ainda que possa não assegurar uma aprendizagem satisfatória.

Outro fator discutido por Brousseau diz respeito ao princípio de economia e linearidade da reprodução do saber matemático em sala de aula. Neste sentido, quando diz que a Matemática permite a cada momento definirmos os objetos que estudamos com auxílio de noções precedentes e introduzidas e, assim, de organizar a aquisição de novos saberes, Brousseau caracteriza uma prática comum e equivocada desenvolvida em sala de aula, uma vez que a aprendizagem do estudante não ocorre de modo linear e preciso.

Podemos até afirmar que o raciocínio do professor que reproduz aquele conhecimento, muitas vezes secular, é um raciocínio linear, rigoroso e preciso, na medida em que é familiar e suficientemente conhecido e repetido dezenas de vezes. Neste sentido, Brousseau (1996, p. 46) esclarece que "este tipo de apresentação disfarça completamente a história dos saberes, isto é, as sucessões de dificuldades e de questões que provocaram a aparição de conceitos fundamentais, seu uso para propor novos problemas".

Assim, percebemos que linearidade da reprodução do saber matemático em sala de aula não transparece ou caracteriza o modo real e a maneira pela qual os matemáticos profissionais enfrentaram os problemas. Dizendo de outro modo, na descoberta ou criação de determinado conceito, seja ele da Geometria Plana, Trigonometria, Matrizes, Determinantes, etc., não houve uma trajetória linear e formal, como muitos preferem ou acreditam. Não se pode dessa forma, esperar que o aluno aprenda, num primeiro momento, tudo apresentado pelo professor.

Brousseau se preocupa de modo especial com as modificações que se fazem necessárias ao conhecimento matemático desde o seu nascedouro até a sua forma atual, organizada nos livros escolares. A tais modificações/adaptações realizadas pelo professor para efetivar o seu ensino Brousseau chama de transposição didática. O pesquisador espanhol Juan D. Gondino (2004, p. 42), a esse respeito, esclarece:

> Quando queremos ensinar um certo conteúdo, tal como os números racionais, devemos adaptá-lo ao estado do conhecimentos dos alunos, com qual deve-se simplificá-lo e buscar exemplos específicos acessíveis aos alunos, restringir algumas propriedades, usar uma linguagem e símbolos mais simples do que os habitualmente empregados pelo matemático profissional (tradução nossa.)

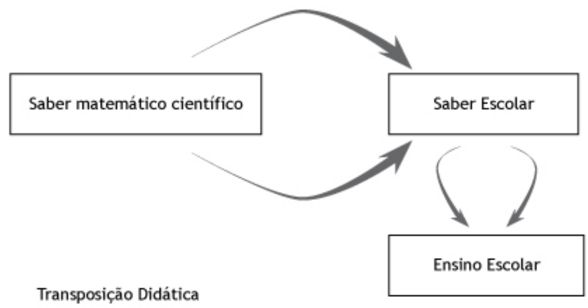


Figura 1: Transposição didática formulada por Brousseau

No ambiente escolar, deparamos com um saber matemático que sofreu várias adaptações, aperfeiçoamentos e improvisações necessárias ao entendimento do estudante. Falar sobre aprendizagem em matemática pressupõe, naturalmente, uma teoria de base cognitivista compatível com as relações experienciadas dentro de uma aula de Matemática.

Anthony Orton (2004) sublinha o caráter de especificidade necessária para que vários fenômenos relacionados ao binômio ensino-aprendizagem possam ser compreendidos, sobretudo os de natureza cognitiva. Assim, quando discutimos a noção de transposição

SAIBA MAIS!

A expressão transposição didática faz referência às modificações sofridas pelo conhecimento matemático com vistas ao ensino. Como consequência se produz diferenças de significado dos objetos matemáticos entre a instituição matemática e as instituições escolares. (GONDINO, 2004, p. 42).

didática (Figura 1), necessitamos adotar teorias elaboradas de modo específico para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Em grande parte, para que possamos compreender os elementos que explicam a realidade cristalizada preocupante sobre o ensino de Matemática, necessitamos focar nosso olhar na figura do professor. Brousseau (1996, p. 47) reforça esta perspectiva ao comparar o trabalha do matemático profissional com o trabalho do professor:

> Antes de comunicar o que pensa haver achado, um pesquisador deve inicialmente determiná-lo: não é fácil distinguir, num labirinto de reflexões, as que são suscetíveis de tornar-se um novo saber e interessante para os demais; as demonstrações obtidas são raramente as que foram visadas pelas conjecturas; todo o rearranjo de conhecimentos semelhantes, anteriores e novos devem ser acumulados (tradução nossa.)

Neste movimento característico do matemático profissional, as reflexões inúteis são suprimidas e descartadas. Os traços dos encaminhamentos errôneos são descartados. ‘‘É necessário encontrar uma teoria mais geral na qual os resultados obtidos mostrem-se válidos’’ (BROUSSEAU, 1996, p. 47). Deste modo, temos um processo de *despersonalização*, *descontextualização* do saber matemático.

ATENÇÃO!

De acordo com Brousseau ‘‘uma boa reprodução por parte do aluno da atividade científica exige que este aja, formule e que prove e construa modelos, de linguagem, de conceitos e de teorias’’ (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

No que diz respeito à atividade docentes, o professor deveria, em tese, realizar um movimento contrário, em determinados aspectos, ao do trabalho do matemático profissional. De fato, ao trabalhar com um livro didático, o professor de Matemática deve preparar a sua aula e, naturalmente, salientar o que perceber de mais relevante. D´Amore (2007, p. 227), ao descrever a ação docente, sublinha que:

> Uma vez realizada a introdução da noção, no âmbito do funcionamento didático, deve ativar-se um mecanismo com base no qual nos apropriamos de tal noção para fazer algo. Eis então que ocorre a recontextualização da noção, todavia não mais no interior do saber matemático, mas no interior de tal imersão no saber ensinado.

O conhecimento oferecido aos alunos pelo professor será impregnado pelo seu ponto de vista e guiado pelas suas crenças e convicções próprias. A fazer isso, o professor realiza uma ação de "repersonalização" do conhecimento. De fato, Brousseau explica que "o trabalho do professor é numa certa medida inversa a do pesquisador, ele deve produzir uma recontextualização e repersonalização" (1996, p. 49).

Ao declarar isto, Brousseau está esclarecendo que a contextualização do saber matemático, os limites de sua validade, o porquê do seu surgimento e as funções sociais é uma ação intrínseca ao trabalho do professor.

Na Figura 2 o estudante, alvo principal de nossas preocupações didáticas, adquire uma importância vital quando falamos sobre o ensino escolar, distanciado da academia e da pesquisa do matemático profissional.

Mais adiante, Brousseau adverte, ainda no âmbito da atividade do aluno que encontrar boas questões é tão importante quanto encontrar boas soluções. É comum o professor de Matemática se deter de modo mais demorado na identificação da solução correta e destinar um tempo irrisório ao estudo das estratégias de resolução incompatíveis e errôneas, o que, na maioria das vezes, conduz os estudantes ao erro.

Desse modo, "uma boa reprodução por parte do aluno da atividade científica exige que este aja, formule e que prove e construa modelos, de linguagem, de conceitos e de teorias" (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Entretanto, para não reduzir o seu ensino à mera exposição e reprodução das estratégias previamente apontadas como desejáveis, o professor necessita assumir uma posição criativa e ativa, isto é, "imaginar e propor aos estudantes situações que eles possam vivenciar e nas quais os conhecimentos aparecerão como uma solução optimal e descoberta nos problemas propostas" (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Fonte: latinstock.com.br

Figura 2 : Estratégias Didáticas

Os conhecimentos devem ser os meios de comunicar boas questões e para travar alguns debates em sala de aula. Todavia, na prática, a tarefa de estimular um debate científico com os estudantes e não executar a mera reprodução do conteúdo organizado de modo "bonitinho" no livro didático apresenta alguns entraves.

A respeito desses problemas, Brousseau (1996) levanta alguns pontos:

- a ênfase dada às atividades sociais e culturais condiciona a criação e o exercício de comunicação do saber e dos conhecimentos;
- a abordagem clássica considera como central a *atividade cognitiva do sujeito* deve ser inicialmente descrita e compreendida de modo relativamente independente;
- os conhecimentos sobre o conhecimento necessário ao ensino devem se estabelecer inicialmente de modo independente e segura;

Brousseau também descreve duas hipóteses fundamentais para se trabalhar a Didática da Matemática:

- A primeira consiste em afirmar que somente o *estudo global das situações que presidem a manifestação do conhecimento* permite escolher e articular os conhecimentos de origem diferentes, necessários para compreender as atividades cognitivas do sujeito, assim como o conhecimento que utiliza e o modo pelo qual ele o modifica;
- A segunda hipótese, mais forte, consiste em dizer que o estudo inicial das *situações* (*didáticas*) deve permitir derivar e modificar as concepções necessárias atualmente importadas de outros campos científicos.

Trabalhar a atividade cognitiva do sujeito é essencial assim como elaborar um saber matemático situacional e localizado para efetivar um ensino e uma aprendizagem significativa, e não a mera replicação das técnicas explicadas e determinadas pelo professor.

Quanto Brousseau se refere ao estudo global das situações que presidem a manifestação do conhecimento, ele passa a considerar o meio um elemento explicativo e condicionante para as relações pedagógicas ali desenvolvidas.

Por fim, a modelização desenvolvida por Brousseau, no que diz respeito à sistematização das situações didáticas, que envolvem de modo específico o saber matemático, é ímpar, quando analisamos outras produções científicas da área. Sua descrição mais detalhada acontecerá nas próximas aulas. Para concluir esta seção, destacamos que muitas obras na área de Didática da Matemática esquematizam uma situação qualquer de ensino pelo triângulo que representamos na figura a seguir.

Figura 3: Relações didáticas descritas por Brousseau

A ação do professor de matemática compreende um forte componente para a aquisição de conhecimento para os alunos. As ligações que deverão ser estabelecidas entre aluno e saber matemático, inclusive as crenças e/ou concepções construídas, são, em grande parte, promovidas pelo professor.

Fonte: latinstock.com.br

Figura 4: A importância do professor em sala de aula

Desse modo, qualquer ação didática do professor cria uma determinada *transposição didática*. Podemos evidenciar nos estudantes o surgimento de conhecimentos previstos e desejados, como também o delineamento de conhecimentos matemáticos imprevistos, indesejados e/ou mal adaptados.

Para encerrar esta parte inicial, recordamos que discutimos alguns elementos característicos iniciais da *Didática da Matemática*. No próximo tópico, detalharemos algumas características da noção de *transposição didática* comentada por D´Amore.

TÓPICO 2

Características gerais da transposição didática

Objetivo

- Diferenciar a transposição didática da transposição científica

Podemos, de modo particular, descrever um trabalho de transposição que conduz o saber científico (*savoir savante*) ao saber a ensinar, caracterizado sob a forma de capítulos de manuais escolares por exemplo. Mas o trabalho de transposição não se restringe à classe, já que o saber científico marca todos os atos do ensino (JOHSUA, S. & DUPIN, 1989, p. 193).

Assim, a atenção do professor de Matemática não pode se limitar ao interior da sala de aula, e sim às consequências do ensino daquele conteúdo matemático, os momentos que antecedem uma sessão de ensino e os resultados alcançados, as formas de acomodação cognitiva apropriadas para um novo saber.

De modo esquemático, Joshua & Dupin (1989) fornecem a seguinte fluxograma para a caracterização do movimento dos saberes ao longo da *transposição didática*. Na Figura 5, destacaremos a *transposição científica,* a qual envolve o saber matemático acadêmico, e a *transposição didática,* visando ao saber matemático escolar (nos deteremos à análise pormenorizada da transposição didática).

A *transposição científica,* que caracteriza as modificações que o *saber matemático* sofre desde o momento de sua elaboração e descoberta até o da divulgação e sistematização entre a comunidade acadêmica, será discutidas em aulas posteriores.

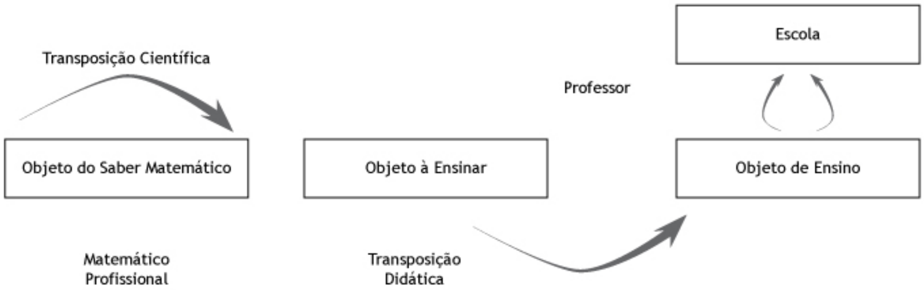


Figura 5: Transposição científica e transposição didática.

O *objeto do saber* (matemático) é definido no domínio do saber científico, isto é, aquele reconhecido pela comunidade científica. Todavia, nem sempre este objeto apresenta uma forma que propicie o seu ensino direto no ambiente escolar. Assim, "alguns mecanismos precisos devem assegurar sua extração do domínio do saber acadêmico e sua inserção em um discurso didático" (JOHSUA, S. & DUPIN, 1989, p. 194). Uma vez que isso se realiza – o que na maioria das vezes não se constitui como uma simples tarefa – o saber didático passa a ser de modo intrínseco diferente do saber matemático da academia.

Na sequência do fluxograma adaptado por nós, descrito na Figura anterior, os didatas franceses explicam ainda que "frequentemente identificamos duas posições opostas: a transposição não seria uma transformação, ela é uma degradação. Sua artificialidade mesmo lhe deixaria uma suspeita com respeito à riqueza do processo real de elaboração dos saberes científicos" (JOHSUA & DUPIN, 1989, p. 196).

Assim, o professor de matemática deve sempre ficar atento com respeito à criação do clima experimental em sala de aula que recria o ambiente de investigação do matemático profissional.

Como todo processo, a *transposição* pode atuar de modo positivo no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, entretanto, como bem destacamos acima, podem ocorrer erros e distorções no referido processo de transposição. Nos textos escolares, frequentemente encontramos tais distorções. A esse respeito, Joshua & Dupin (1996) sublinham que o texto segue a ordem lógica que possui às vezes pouca ligação com os reais problemas do pesquisador matemático.

Deste modo, a apresentação do *saber matemático,* por meio de uma exposição racional, a qual esconde os reais obstáculos superados até o alcance relativamente final, não apresenta o caráter de desenvolvimento progressivo, cumulativo e irreversível do *saber matemático*.

No ensino da Matemática, o teorema de Pitágoras e o teorema de Talles sempre representarão elementos de verdade, aceitos desde os séculos III antes de Cristo. Assim, quando os degraus em matemática são estabelecidos, não se descarta determinado saber constituído no passado. O *saber matemático* se acumula desde o início dos tempos. Por outro lado, observamos que:

> É necessário observar que no processo de aprendizagem, os conhecimentos não se empilham uns sobre os outros, os novos se juntam aos antigos. As reorganizações regulares vêem ao contrário forçar novas aquisições. A aprendizagem se faz em particular a partir destas integrações sucessivas (JOHSUA, S. & DUPIN, 1989, p. 197, tradução nossa.)

Joshua & Dupin (1989) citam Yves Chevalard, outro investigador francês que diferencia o *tempo didático* do *tempo de aprendizagem* em matemática. Com referência a tais noções, o sistema didático visa então à fixação da correspondência entre estes dois tempos; mas se trata de uma relação necessária se desejamos conceber uma didática. Entretanto, como já discutimos anteriormente, o professor de Matemática não pode se apoiar em expectativas que os alunos aprendem, porque cada aluno precisa enfrentar dificuldades e inseguranças até que ocorra, por parte do aluno, a compreensão de um novo conteúdo.

Em determinadas situações, o professor de Matemática se enfrenta um enorme dilema. Por um lado, a pressão para o cumprimento do currículo e do programa escolar age coercitivamente no sentido de utilizar aquele determinado tempo didático para o desenvolvimento daquele **conteúdo**. Por outro lado, o cumprimento daquele tempo estabelecido nem sempre mantém sintonia com o tempo de aprendizagem. Se temos mais conteúdos, o **tempo de aprendizagem** para raciocinar, refletir e sistematizar as ideias será incompatível com a quantidade de conteúdo, consequentemente, na maioria dos casos, o professor de Matemática não consegue um bom aprofundamento.

O di ... io entre *aprofunda* ... da eixo dependem

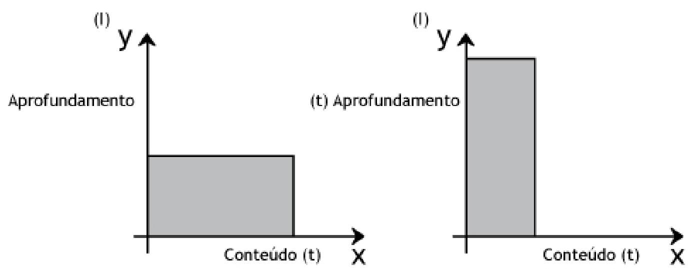


Figura 6: Produto cartesiano aprofundamento X conteúdo

O *tempo didático* depende, por sua vez, do tipo e da natureza do conteúdo que temos a intenção de realizar uma determinada *transposição didática*. De fato, quando nossa intenção é ministrar determinado conteúdo matemático, devemos ter em mente de forma clara que trabalharemos com a construção progressiva de um conjunto de conceitos e noções intrínsecos a tal conteúdo.

Assim, tanto no ensino escolar, apesar de lidarmos com vários *tipos de demonstração,* quanto no ambiente acadêmico, temos um conjunto de modos de demonstração ainda maior e a própria noção de demonstração não é objeto de ensino nem para os estudantes, nem mesmo para os professores em formação. Aliás, em poucas licenciaturas no estado do Ceará, encontramos como componente de estudo e de formação do futuro professor de matemática a noção de *demonstração* e *prova matemática*.

Outra *noção paramatemática* apontada por Joshua & Dupin é a noção de distância que existe no sistema escolar com uma significação bem particular. Ela é uma noção *paramatemática* porque nós a encontramos no ambiente de trabalho do matemático profissional de modo generalizado e possui um papel essencial, ‘‘mas no senso comum a noção de distância é sem dúvida uma das primeiras noções’’ (1989, p. 226). Ela entra como noção *paramatemática* de base na elaboração da Geometria Elementar. Todavia, devido a um movimento reformista e interior à própria Matemática chamado de Movimento da *Matemática Moderna,* a noção de distância foi transformada em um objeto do ensino escolar. Nas próximas aulas, mencionaremos novamente este movimento.

Ainda com relação à *transposição didática*, Brousseau oferece uma interessante perspectiva e possibilidades de eventos no decorrer de situações de ensino. Um elemento sublinhado por este autor, presente nas transposições didáticas, diz respeito ao *uso abusivo de analogias*.

Analogia é um excelente meio heurístico, mas sua utilização na relação didática de modo excessivo por ser danosa. De fato, a analogia é um recurso para a compreensão, uma espécie de muletas que oferecemos aos estudantes para a obtenção de uma compreensão imediata. Porém elas não podem substituir as próprias pernas dos estudantes.

Deste modo, um ensino heurístico de Matemática com o emprego de analogias é necessário, mas não suficiente para garantir a generalização de determinadas ideias gerais. Outra situação didática comum diz respeito ao *envelhecimento das situações de ensino*. De fato, o professor encontra dificuldades na reprodução da mesma lição para turmas diferentes.

Além disso, a reprodução exata de uma lição ou de uma aula para diferentes alunos é quase impossível. Assim, o professor de Matemática se vê diante da necessidade de realizar adaptações de sua exposição com relação à clientela a qual busca atender. Em um sentido oposto, se falamos de um professor de Matemática à moda antiga, que carrega as mesmas notas de aula por anos, diante do espírito de modernidade que respiramos (internet e tecnologia), este professor pode transformar seu ensino em um objeto cristalizado no tempo.

Com respeito à necessidade de atualização do ensino de matemática, Lima (2001, p. 160) diz que:

SAIBA MAIS!

Na década de 60, o movimento chamado de Movimento da Matemática Moderna foi motivado e justificado pelo desejo de adaptar o ensino de Matemática aos padrões utilizados pelos matemáticos do século 20 (ou pelo menos um grande número deles). Nesta época, foi proposta uma reformulação radical dos currículos, com ênfase nos métodos abstratos e gerais (LIMA, 2001, p. 161).

> A análise conjuntural com vistas a adequar o ensino da matemática ao momento presente nos leva inevitavelmente a considerar os anseios dos grupos a quem tal ensino é dirigido, as aspirações da sociedade onde o processo educativo tem lugar, bem como as restrições e obstáculos para a execução de projetos teoricamente ideais. Entre essas restrições encontram-se naturalmente as de ordem econômica, mas há outras, de natureza bem diversa, como a lentidão inevitável dos programas de treinamento de professores, além do natural apego a certas tradições, mesmo de natureza intelectual.

O matemático Elon Lages Lima identifica o condicionamento dos fatores sociais que promovem obstáculos à melhoria da qualidade da formação do professor. Assim, professor mal formado e desatualizado não apresenta condições de realizar um bom ensino, e provavelmente irá repetir de forma sistemática o roteiro do livro didático, o qual possui qualidade duvidosa. Lima (2001, p. 161) declara ainda que:

> Os professores do ensino básico, quer por formação quer por hábito, acham-se envolvidos numa rotina de trabalho onde os assuntos abordados são aqueles em que se sentem seguros de tratar e os exercícios propostos são quase sempre aqueles mesmos que já sabem resolver, mesmo porque a necessidade de complementar os seus parcos salários com o trabalho adicional não lhes permite muito tempo para estudar.

Lima desenvolve um raciocínio semelhante ao de Brousseau quando fala de *envelhecimento das situações de ensino*. Isso ocorre, como vimos acima, por causa de inúmeros fatores, inclusive devido ao meio ambiente institucional/escolar.

Diferentemente das *Didáticas Gerais* que consideram as relações entre um ensino de um conteúdo genérico e as relações ali estabelecidas, sejam relacionadas a qualquer disciplina, a *Didática da Matemática* se ocupa destes fenômenos, mas sem perder de vista as ligações com o saber matemático.

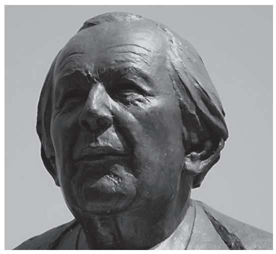
O professor Bruno D´Amore (2007) pesquisador da Universidade Italiana da Bolonha, afirma que devemos adotar uma perspectiva piagetiana para entendermos que conhecimento se constroi através da interação constante entre o sujeito e o objeto.

Os pressupostos piagetianos destacados por D'Amore merecem alguns comentários, apesar de que, nas próximas aulas, discutiremos as contribuições de Jean Piaget (1896-1980).

É comum os alunos de graduação estudarem teorias cognitivistas generalistas. Tais teorias não foram concebidas com uma preocupação referente à aprendizagem em Matemática. O diferencial da epistemologia genética de Piaget é que ele desenvolveu um pensamento analógico/descritivo para diversos fenômenos de natureza cognitiva.

VOCÊ SABIA?

Piaget foi contemporâneo de muitas figuras emblemáticas na Matemática Pura e da própria matemática extraiu inúmeros modelos e indícios para interpretar a cognição da criança. Retornaremos mais adiante a tal discussão.



Fonte: pt.wikipedia.org

Figura 7: Jean Piaget

Para concluir, sublinhamos que "o principal assunto estudado pela Didática da Matemática encontra-se constituído pelos diferentes tipos de sistemas didáticos (professor, estudante e saber)" (D´AMORE, 2007, p. 84). Seu diferencial, em relação a teorias generalistas, assenta na preocupação específica com o saber matemático, as relações entre professor de matemática e alunos diante de um currículo de Matemática.

No próximo tópico, discutiremos alguns aspectos preocupantes relacionados ao ensino da Matemática e começaremos a desenhar uma argumentação indicando de que modo a *Didática da Matemática* pode se apresentar como um instrumento poderoso para o futuro professor.

Para encerrar este tópico referente à noção de *Transposição*, vamos apresentar dois exemplos que você poderá pensar e trabalhar nas atividades do Fórum. O primeiro envolve a noção de proporcionalidade que é descrita por Lima (2001(a), p. 93) como *uma função* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *tal que, para todos reais* $c,x\in\mathbb{R}$*, temos* $f(c\cdot x)=c\cdot f(x)$ *(proporcionalidade direta) ou* $f(c\cdot x)=\dfrac{f(x)}{c}$ *(proporcionalidade inversa)*. Lima acrescenta que, "na prática, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade) tal que y=a.x".

Podemos lembrar o seguinte exemplo sugerido por Lima: se um quilo de açúcar custa a reais, então x quilos custam y=a.x, a função que modeliza esta situação. Na próxima aula, continuaremos nossa discussão sobre o ensino de Matemática.

TÓPICO 3

Sobre o ensino da matemática

Objetivo

- Relacionar o ensino da Matemática com a prática pedagógica

Reconhecidamente a *Didática da Matemática* e outros campos de pesquisa originados, na maioria dos casos, na Europa, se consolidaram com um objetivo maior de melhoria do ensino/aprendizagem desta disciplina. Afinal, antes de serem pesquisadores, todos os nomes até o momento citados neste texto são professores de Matemática em seus respectivos países.

No caso brasileiro, temos o orgulho de destacar a figura emblemática do professor e pesquisador Elon Lages Lima. Matemático profissional do Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Rio de Janeiro, Lima apresenta, em sua vasta produção acadêmica, uma extensa produção voltada à Matemática do ensino superior, assim como alguns livros de cunho eminentemente voltados à formação do futuro professor.

Em um de seus livros, Lima (2001, p. 161) discute o Movimento da Matemática Moderna da década de 60 e nos mostra que "as consequências deste movimento em nosso país foram desastrosas, em que pese o fato de que algumas das práticas propostas eram realmente aconselháveis".

> Acontece que, tradicionalmente, desde os nossos dias de colônia, estamos acostumados a seguir a moda que nos ditam os países mais desenvolvidos. E, em geral, imitamos o que é fácil, superficial e frívolo. Nossa imitação da Matemática Moderna resultou no abandono da Geometria e dos cálculos numéricos, substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudo-formalismo vazio e desligado da realidade (LIMA, 2001, p. 161).

De fato, estuda-se mais Cálculo Diferencial e Integral em um curso de licenciatura do que Geometria Plana. Para completar o cenário, ainda na perspectiva de Lima, nas escolas, Euclides é colocado em segundo plano.

Em países desenvolvidos também podem ocorrer quadros graves relacionados ao ensino de Matemática como o relatado por Lima, como o Japão, que, segundo Lima (2001, p. 162):

> É um dos países do mundo onde o número de computadores por habitante é o mais alto. Entretanto, apesar dos esforços das autoridades, a utilização de computadores no ensino da Matemática nas escolas japonesas teve de enfrentar a resistência e demora pois a maioria dos professores não estava preparada e relutava em preparar-se para mudar seus métodos tradicionais.

SAIBA MAIS!

Euclides de Alexandria (360 a.C. — 295 a.C.) fofoi um professor, matemático platónico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".Euclides também escreveu obras sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/biografia.htm

Lima acredita que "esta demora resultou benéfica, pois hoje os japoneses parecem convencidos de que o uso dos computadores no ensino da Matemática e de suas aplicações é muito mais eficiente para os alunos a partir de 15 ou 16 anos, em cujos currículos tal uso se realmente justifica" (LIMA, 2001, p. 162).

O exemplo asiático apresenta algumas semelhanças, respeitado os condicionantes culturais, com o sistema brasileiro de ensino. Aqui, a incorporação tímida por parte dos professores da escola, em muitos estados, é devida à sua frágil formação acadêmica com respeito à instrumentalização e aplicação da tecnologia para o ensino/aprendizagem.

Certamente que, no caso de nossa região Nordeste, quando a comparamos com a região Sul, evidenciamos o quanto ainda precisamos evoluir. De qualquer modo, estando o computador à disposição para uma aula de Geometria em um laboratório ou não, o exame de qualidade para a formação docente chamado Enade exige dos estudantes uma perspectiva diferenciada, no que diz respeito a uma Didática do ensino de Geometria e Geometria Dinâmica. Na Figura a seguir, apresentaremos a referida situação-problema.

Questão 34

Observe a seguinte atividade de construções geométricas.

- Construir um triângulo $\widehat{ABC}$ qualquer.
- Traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ e, em seguida, a bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$.
- Marcar o ponto de encontro dessas duas bissetrizes.
- Traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$.
  O que você observa?

Será que, se você recomeçar a construção a partir de outro triângulo, chegará à mesma observação?

O uso de um software de geometria dinâmica na execução dessa atividade e de outras similares

A) pode mostrar que o estudo das construções com régua e compasso é desnecessário.

B) dispensa a demonstração dos resultados encontrados pelos alunos.

C) prejudica o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

D) dificulta o desenvolvimento do pensamento geométrico.

E) pode contribuir para a elaboração de conjecturas pelos alunos.

Figura 8: Questão do Enade que exige uma perspectiva na Didática do ensino da Geometria Dinâmica

Um último exemplo destacado por Lima (2001, p. 163) refere-se ao ensino Soviético:

> De 1893 até o final da década de 60, o ensino da Geometria na Rússia, depois União Soviética, foi decisivamente influenciado pelo livro "Geometria Elementar" de A. P. Kiselev (1852-1940), que em mais de 50 edições sofreu melhoramentos e adaptações visando aperfeiçoar suas qualidades didáticas e sólida concepção, nas quais se baseou a formação de muitas gerações de cientistas, tecnólogos e matemáticos daquele país.

O autor ainda menciona que o desenvolvimento da ciência e tecnologia impulsionou na União Soviética uma reforma no ensino da Matemática no sentido "de atualizar material obsoleto e introduzir novos conhecimentos compatíveis com as exigências da época" (LIMA, 2001, p. 163).

Lima (2001, p. 163) relata a existência de duas abordagens didáticas distintas. Explica que uma delas foi liderada pelo extraordinário matemático A. N. Kolmogorov, o qual, segundo o autor:

> Comandou uma equipe para redigir os textos de Geometria baseados nos grupos

> de transformações geométricas. A outra tendência foi a do eminente geômetra A. V. Pogorelov, que adotou os princípios metodológicos de Kiselev, dando-lhes melhor consistência lógica, simplificando a apresentação, provendo-a de mais objetividade, modernizando o estilo e tirando proveito de progressos matemáticos obtidos em épocas recentes.

A reforma descrita por Lima apresenta uma preocupação interna com a organização da própria teoria matemática. Isso é um exemplo da transposição científica realizada pelos matemáticos com vistas ao ensino acadêmico, entretanto sabemos que o nível cognitivo dos estudantes pré-adolescentes é diferente de um estudante de nível universitário. Assim, na próxima etapa, precisamos pensar na *transposição didática* que tornará adequado este conteúdo ao professor da escola.

Acreditamos que seja relevante refletir por que a aprendizagem de Geometria por algumas crianças não é satisfatória. Embora esta resposta possa ser inferida a partir das colocações de Lima, assumimos a posição de que o ensino vai mal, em parte, porque os professores saem das universidades (de modo particular no Ceará) tanto com uma frágil formação em Geometria, como com uma fragilizada formação didática, a qual poderia potencializar transposições adequadas do referido conteúdo.

Para concluir este tópico, destacamos algumas considerações de Lima acerca do ensino de Matemática com referência à realidade dos países mencionados há pouco e alguns ensinamentos no que diz respeito à realidade brasileira.

O primeiro deles nos faz lembrar que:

> A Matemática é muito mais do que um encadeamento lógico de proposições referentes a conceitos abstratos, a partir das quais se pode chegar a conclusões de rara beleza e vasto alcance. Não apenas por isso que ela é universalmente ensinada. Nem tampouco é verdade que a aprendizagem se faz sob forma de silogismos, do geral para o particular. O lado prático, algorítmico e utilitário de certos tópicos da Matemática Elementar não pode ser menosprezado (LIMA, 2001, p. 164).

O segundo diz respeito ao fato de não podermos ignorar a presença dos computadores na vida diária das pessoas e a necessidade de acompanhar a evolução tecnológica. Assim, o ensino bem como as sequências didáticas do professor devem evoluir e manterem-se atualizados. A discutida formação tecnológica poderia ocorrer de modo sistêmico nas universidades.

É interessante observar que o futuro professor de Matemática, embora curse disciplinas de computação, cálculo numérico e outros objetos relacionados a linguagens computacionais, no momento de trabalhar com um *software* para o ensino de Álgebra, se vê bastante perdido. Por outro lado, o emprego computacional pode explicitar as limitações dos modelos matemáticos e enfraquecer o caráter de infalibilidade do *saber matemático*. Isso faz parte de uma *transposição didática* do docente, na medida em que busca estimular nos seus alunos um pensamento autônomo, de forma a não se restringir à repetição das regras estabelecidas na aula de Matemática.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Apresentamos as definições formais e mais gerais possíveis sobre a função logaritmo e a função exponencial. Responda:

a) Tais definições constituem saberes científicos?

b) Tais formulações necessitam sofrer alguma transposição didática com vistas à adaptação ao contexto escolar? Quais?

c) Indique as dificuldades de explorarmos as propriedades geométricas dos gráficos destas funções, sem o auxílio computacional.

d) Que adaptações você executaria sobre tais definições tornando-as mais acessíveis ao entendimento do estudante? Você discutiria a noção de continuidade?

e) Pelos gráficos destas funções que exibimos na figura 1, é possível conduzir e estimular o raciocínio do estudante sobre a propriedade que diz serem uma a inversa da outra?

2. (I) A função $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

b) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$, para qualquer r e qualquer $x > 0$;

c) $\log_a(a^x) = x$, para todo x, e $a^{\log_a x} = a$, para todo $x > 0$;

d) $\log_a$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$;

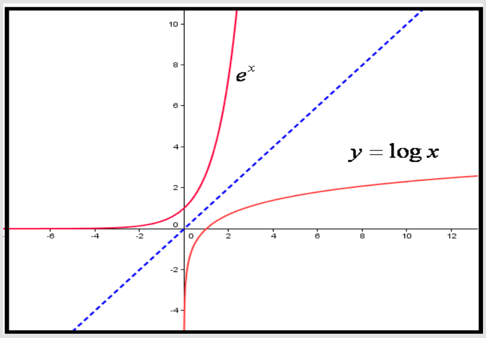
e) se $a > 1$, $Lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ e $Lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty$;

se $0 < a < 1$, $Lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ e $Lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty$;

f) $\log_a$ é sobrejetora.

(II) Definimos a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ como sendo a inversa da função logaritmo. Assim, por definição, $\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$. Em particular, $\exp(\log(y)) = y$ e $\log(\exp(x)) = x$.

3) No contexto da Análise Real, dizemos que $f : X \to Y$ é um homemorfismo entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, quando temos que f é contínua e bijetiva, e sua inversa f^{-1} é contínua. Assim, pode-se verificar que $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. Isto constitui um saber escolar ou um saber científico? O professor precisa conhecer esta propriedade para garantir que na figura abaixo temos de fato um homeomorfismo?



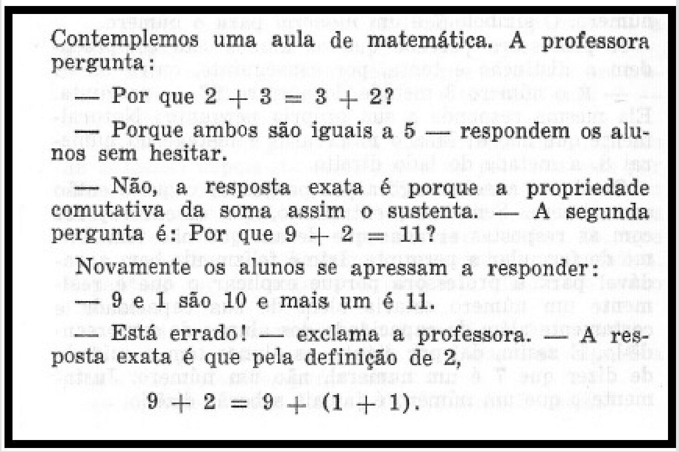
Relações entre as funções exponencial e logaritma

4) Enunciamos um teorema que diz respeito ao saber científico.

Teorema: a função exponencial é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. Ela é infinitamente diferenciável, com $(\exp)'(x) = \exp(x)$. Além disso, para $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$. E para todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se que $\exp(r) = e^r$. Discuta a transposição didática necessária que torne tal saber científico discutível no contexto escolar.

5) No trecho abaixo destacamos um momento de discussão entre aluno e professor. Indique os momentos em que a professora não executa de modo

eficiente a transposição didática adequada para sua turma de alunos. Indicar que propriedades axiomáticas formais a mesma faz referência.



Contemplemos uma aula de matemática. A professora pergunta:

— Por que $2 + 3 = 3 + 2$?

— Porque ambos são iguais a 5 — respondem os alunos sem hesitar.

— Não, a resposta exata é porque a propriedade comutativa da soma assim o sustenta. — A segunda pergunta é: Por que $9 + 2 = 11$?

Novamente os alunos se apressam a responder:

— 9 e 1 são 10 e mais um é 11.

— Está errado! — exclama a professora. — A resposta exata é que pela definição de 2,

$$9 + 2 = 9 + (1 + 1).$$

Trecho do livro de Kline (1971, p. 15)

AULA 2 | Didática da Matemática

Caro(a) aluno(a),

Nesta aula continuaremos apresentando a didática da matemática e a contribuição desta para a atuação do professor em formação.

Objetivo

- Apresentar algumas concepções do erro em Matemática e suas relações com o contrato didático

TÓPICO 1

O Contrato Didático segundo a escola francesa

OBJETIVO

- Descrever os principais elementos do Contrato Didático

A partir dos anos 70 surgiu no mundo da pesquisa em Didática da Matemática a ideia de contrato didático, lançada por Guy Brousseau (IREM Bordeaux, 1978). "A ideia nasceu para estudar as causas do fracasso eletivo em Matemática, isto é, daquele fracasso típico, reservado apenas ao domínio da Matemática, por parte dos estudantes que, por outro lado, parecem mais ou menos arranjarem-se na outras matérias (D´AMORE, 2007, p. 99).

D´amore (2007, p. 100) descreve que esta noção foi sistematizada e aplicada de modo empírico num dos estudos de Brousseau na França. Ele relata o caso do aluno Gael do seguinte modo:

Gaël é um menino que frequenta a segunda série do ensino fundamental mesmo tendo mais de 8 anos; a condição na qual os pesquisadores encontraram Gaël é descrita a seguir:

- *ao invés de exprimir conscientemente o próprio conhecimento, Gaël o exprime sempre e somente em termos que envolvem o professor;*
- *as suas competências nunca são próprias competências, mas aquilo que a professora lhe ensinou;*
- *as suas capacidades estratégicas nunca são próprias capacidades, mas o que (e como) a professora disse que deve ser feito.*

É interessante como encontramos crianças e adolescentes com os mesmos problemas e limitações no que diz respeito ao raciocínio matemático. O diferencial da equipe de pesquisadores que trabalharam com Brousseau é a sistematização de identificação de especificidades intrínsecas às barreiras enfrentadas pelos estudantes no momento da aprendizagem.

Neste sentido, Brousseau destaca que, em muitos casos, o professor, após o seu ensino, espera a repetição, em linhas gerais, de fragmentos daquele conteúdo. Todavia, o mestre não pode esquecer que, na maioria das vezes, o que representa um problema para si pode não fazer sentido ou representar um problema interessante para o iniciante.

Neste âmbito, o autor faz referência à atividade de *solução problemas* que se apresenta como umas das principais no seu estudo sobre *Didática da Matemática*. O autor ainda sublinha a possibilidade que o professor deve construir para que o estudante "entre no jogo"; para que a situação que lhe é apresentada seja interessante.

De fato, no âmbito da resolução de problemas, o aluno precisa ser motivado a encarar situações que envolvem raciocínios nem sempre imediatos. É nítida a dificuldade e, por que não dizer comodidade do professor em estimular apenas a aplicação de uma fórmula para a obtenção daquele gabarito, não importando o que ela significa ou não.

Neste sentido, Brousseau (1996, p. 66) continua salientando que:

- Mas se o aluno recusa ou evita o problema, ou não o resolve? O professor possui então a obrigação social de ajudar e mesmo as vezes de se justificar de ter colocado uma questão difícil.
- Então se firma uma relação que determina – explicitamente para uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, o que cada participante, o docente e o aprendiz, possui como responsabilidade de gerenciar e de uma maneira ou outra, um será responsável perante o outro.

Na sequência, Brousseau caracteriza a noção de *contrato didático* como sendo um sistema de obrigações recíprocas que se assemelham a um contrato. E o que lhe interessa concernente ao contrato diz respeito aos conteúdos matemáticos visados. Ele apresenta ainda as seguintes características desta relação:

- O professor é supostamente capaz de criar condições suficientes para a apropriação dos conhecimentos, e deve reconhecer tal apropriação quando a mesma se opera;
- O aluno é supostamente capaz de satisfazer tais condições;
- A relação didática deve continuar a "todo custo";
- O professor assegura então as condições de aquisição anteriores e as condições novas fornecem ao estudante a possibilidade da aquisição desejada.

Assim, o professor de matemática dependerá do maior ou menor interesse de sua classe, sem mencionar o fato de que, culturalmente falando, os alunos já manifestam sinais de temor ou apreensão quando sabem que a próxima aula é de Matemática.

Neste sentido, todos os tipos de relações que mencionamos fazem parte de uma cultura didática que envolve o saber matemático. Neste sentido, Brousseau & Gibel (2005, p. 22) explicam que:

> No caso o raciocínio formulado pelo professor é tanto: um objeto explicito do ensino na fase de institucionalização, porém, correlacionado com a situação objetivamente definida ou um suporte de aprendizagem e recordação de uma sentença ensinada; ou um argumento teórico usado como meio didático para auxiliar os estudantes na compreensão do enunciado.

Na Figura 1 vemos parte das relações estabelecidas de modo explícito ou implícito em sala de aula.

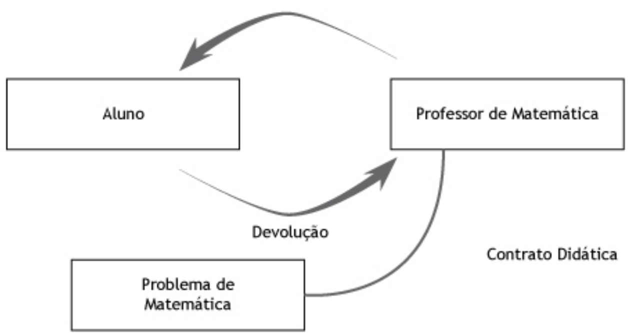


Figura 1: Diagrama que explica a situação de devolução

No que diz respeito ao contrato didático, D´Amore (2007, p. 102) esclarece que:

> O estudante considera que em Matemática devem ser feitos cálculos; por isso, mesmo que a resposta à questão colocada em um problema pudesse ser dada apenas com palavras, o aluno sente-se incomodado e tende a usar os dados numéricos presentes no texto do problema, para dar, de qualquer maneira, uma resposta formal, usando alguma operação, ainda que escolhida ao acaso. Foram amplamente documentados casos de alunos que, a fim de produzir cálculos, escrevem operações sem sentido, desvinculadas do que é pedido no problema, mas que têm como operadores os dados numéricos presentes no texto.

O que relata D´Amore pode ser vivenciado em sala de aula por você, basta chegar em sala de aula, em qualquer nível escolar, e colocar o seguinte problema:

num curral encontramos 16 bodes e 12 cabras. Qual é a idade do dono do curral? Percebe-se que aqui adaptamos a realidade nordestina, uma vez que o problema original, foi colocado na quarta série do ensino fundamental (estudantes de 9-10 anos) o seguinte problema "Um pastor tem 12 ovelhas e 6 cabras. Quantos anos têm o pastor?".

É interessante o relato destacado por D´Amore quando menciona que todas as crianças submetidas ao experimento e tal questionamento matematicamente ilógico forneceram respostas. Além disso, o autor salienta a aflição da professora diante de um problema colocado que não apresentava resposta, tendo em vista que ela sempre colocava problemas com solução para suas crianças.

Figura 2: Representa contrato didático entre professor e aluno.

Evidenciamos assim o *contrato didático* estabelecido por esta professora e seus alunos que, implicava, pelo menos implicitamente, que todas as situações-problema deveriam ter resposta e certamente um roteiro/receita para os alunos seguir. Neste caso, a clausula do contrato diz que "se a professora dá um problema, este certamente deve ser resolvido" (D´AMORE, 2007, p. 104).

Com respeito aos fenômenos identificados diante da colocação de problemas por parte do professor de matemática, Brousseau (1996) idêntica algumas situações que ele chama de paradoxais relacionadas às situações de devolução. Neste sentido, ele diz que:

> O docente deve conseguir que o aluno resolva os problemas que o mesmo propõe a fim de constatar e poder fazer constatar que o estudante cumpriu sua própria tarefa. Mas se o aluno produziu sua resposta sem o mesmo ter feito as escolhas que caracterizam o saber convencional e que diferencie o saber dos conhecimentos insuficientes, indica-se possivelmente um erro (BROUSSEAU, 1996, p. 85).

Bem, antes de discutirmos as últimas colocações, devemos esclarecer o significado do termo *situação de devolução*. É comum numa aula de Matemática o professor iniciar com um problema interessante de Matemática. Diante da situação desafiadora, pelo menos na perspectiva do professor, os estudantes podem encarar a situação-problema como uma real barreira que deve ser superada, um grande desafio, ou apenas um meio para consumir o tempo daquela aula chata.

Outras situações podem ocorrer. Por exemplo, o professor apresenta uma *ideia-chave* do conteúdo matemático a ser explicado e o aluno não compreende a referida ideia, isso poderá refletir negativamente nas etapas subsequentes e, em certos casos, com referência a determinados conceitos, o aluno pode carregar consigo uma falsa ideia ou uma concepção equivocada ao longo de toda a sua vida estudantil.

Podemos rapidamente exemplificar com referências aos conceitos de: *parâmetro*, *variável*, *valor determinado*, *valor indeterminado*. O professor poderia apresentar aos estudantes a seguinte lista de itens que exibimos abaixo. Em cada item identificar os elementos *parâmetro*, *variável*, *valor determinado*, *valor indeterminado*, *constante* e *função*. Explicar ainda por que de cada escolha.

i) $A = b \cdot h$ (área do retângulo)

ii) $x = x \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$

iii) $x = 2 \in \mathbb{R}$

iv) $x^2 - 5x + 6 = 0$

v) $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

vi) $sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

vii) $sen(2\theta) = 0$

viii) $ax^2 + bx + c = y$

ix) $Sen(x) = y$

x) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Percebe-se que nos itens acima evidenciamos conceitos estudados desde as séries iniciais, entretanto, em consequência do ensino o qual fomos submetidos, estamos acostumados a calcular e/ou resolver e não dizer/explicar a natureza do objeto com que lidamos.

Notamos ainda nas colocações anteriormente devidas a Brousseau que o mesmo destaca a ocorrência de *o aluno produziu sua resposta sem o mesmo ter feito as escolhas que* *caracterizam o saber convencional*. Com isto ele acentua que o professor de matemática, diante de uma situação-problema, sabe, ou pelo menos deveria saber de onde o aluno deve partir e aonde ele deve chegar e inclusive antever os problemas que enfrentará.

Ainda com respeito à resposta do aluno ser convencional ou não, resta ainda observar se a resposta do estudante será ou não considerada, por parte do professor, como uma *demonstração* ou *prova* do que de fato foi demandado na questão. A importância desta noção é descrita por Arsac (1987, p. 269) quando explica que:

> A demonstração ocupa em matemática um lugar central desde que é o método de prova o qual empregamos de modo sistemático que caracteriza esta disciplina entre as outras ciências. Compreendemos desde cedo que ele possui um papel importante nos cursos escolares. Ela constitui então um objeto de estudos a priori privilegiado pelos didatas da matemática e isto porque sua introdução é fonte de dificuldades para muitas crianças.

Apesar do fato que Gilbert Arsac relata as dificuldades com respeito às relações estabelecidas entre os alunos franceses diante da tarefa de efetuar uma demonstração, nossa realidade é bastante semelhante. Pior do que isso, em vários casos, a atividade demonstrativa foi abolida da sala de aula e substituída pelo emprego automático de algorítmicos.

Possivelmente este quadro lamentável explica a condição de que muitas pessoas com base pouco sólida e/ou inicial em matemática considerem-na como a ciência dos números.

Para exemplificar a respeito da noção de *demonstração,* observemos o seguinte enunciado: Mostre que $b^2+b+1=a^2$ não possui soluções inteiras positivas.

Demonstração: Assim, desejamos mostrar que a igualdade $b^2+b+1=a^2$ não pode ser verdadeira para $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Podemos até prever o comportamento de alguns casos particulares como $a=1$ e b=2 $\therefore 2^2+2+1=1^2$ ou $a=2$ e b=1 $\therefore 1^2+1+1=2^2$. Isto nos deixa desconfiar da propriedade que possivelmente pode ser verdadeira. Procedemos tradicionalmente do seguinte modo. Primeiro assumimos que o resultado seja verdadeiro, ou seja, assumimos exatamente o oposto do que tencionamos verificar. Assim, suponha que $b^2+b+1=a^2$ possua tal propriedade. Mas notamos da igualdade que $b^2<b^2+[b+1]=a^2$, pois $b+1>0$. Assim, temos:

$b^2<b^2+[b+1]=a^2\to b^2<a^2$. Extraindo a raiz quadrada, obtemos a relação $b^2<a^2\to b=\sqrt{b^2}<\sqrt{a^2}=a$, pois $a,b\in\mathbb{R}^+$. Portanto, concluímos até o momento que $b<a$. Retornando a expressão

$b^2+b+1=a^2 \leftrightarrow a^2-b^2=b+1 \leftrightarrow (a+b)(a-b)=b+1\,(^*)$.

Agora vamos comparar os números $(a+b)(a-b)$ e $b+1$. Pelo lado esquerdo, temos que $a>b\geq 1$, assim, $a\geq b+1 \leftrightarrow (a-b)\geq 1$, pois $a>b$. Além disso, temos $a-b\geq 1 \leftrightarrow a-b+2b\geq 1+2b \therefore a+b\geq 1+b+b=(1+b)+b$. Concluímos que o lado esquerdo $(a+b)(a-b)$ é maior do que $(a+b)(a-b)\geq(1+b+b)\cdot 1>1+b$ o que contraria a igualdade. Portanto, chegamos a uma contradição diante do fato que havíamos suposto, ou seja, a possibilidade de existirem inteiros positivos que satisfazem $(a+b)(a-b)=b+1$ o que equivale a igualdade desejada.

Se você se sente completamente perdido com esta demonstração, fique tranquilo, você não é o único. Seus alunos, numa situação hipotética como esta, devem se encontrar da mesma forma. É sempre bom, mas difícil, buscar analisar aos olhos do sujeito que se depara com uma argumentação como esta pela primeira vez.

De fato, aos olhos do estudante, o professor de matemática deseja verificar uma propriedade que ele, de antemão já sabe que não é verdadeira; ou seja, que não existem inteiros satisfazendo a igualdade $b^2+b+1=a^2$, então por que insistir nisso, além dos fatos evidenciados inicialmente que verificam que $a=1$ e b=2 $\therefore 2^2+2+1\neq 1^2$.

Outro aspecto que se relaciona ao contrato didático diz respeito ao tempo de atenção. Neste caso, diante do comprimento das argumentações, os alunos não se lembram mais o que devem mesmo provar. Isto pode gerar desinteresse e a *devolução* poderá ficar comprometida.

"Podem ocorrer casos extremos em que o professor se refugia na segurança dos algorítmicos prontos, fraciona a atividade matemática em etapas pelas quais passa mecanicamente, esvaziando o seu significado" (SILVA, 2002, p. 46). Deste modo, o contrato didático se resume na mera execução das atividades arbitrariamente definidas pelo professor, quer se tenha ou não aprendizagem.

Percebe-se que diante das dificuldades impostas por um problema de resolução não imediata, o professor de matemática se vê diante do que Brousseau (1996, p. 86) chama de injunção paradoxal que ocorre quando:

> Tudo o que o professor coloca buscando produzir nos estudantes os comportamentos que o mesmo espera, tende a privar estes últimos de condições necessárias à compreensão e à aprendizagem visada. [...] O estudante aceita, segundo o contrato, os resultados, ele não os estabelece e, portanto, ele não aprende matemática. Ele não se apropria. Se, por outro lado, o estudante recusa tudo do mestre, a relação didática é rompida (1996, p. 86).

Para encerrar este tópico, sublinhamos que no próximo tópico relacionaremos a noção de **erro em Matemática** com a noção de **contrato didático**. Salientamos que discutiremos apenas alguns aspectos e dimensões, nomeadamente, os aspectos didáticos e lógico-matemáticos. Os aspectos psicológicos e filosóficos do **erro em Matemática** serão objeto de estudo em outra disciplina.

TÓPICO 2

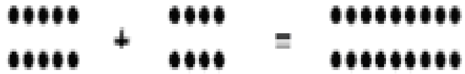
Os erros dos estudantes e os paradoxos do contrato didático

OBJETIVO

- Apresentar algumas concepções do erro em Matemática e suas relações com o contrato didático

Vamos iniciar com a observação de um experimento aplicado pelas pesquisadoras inglesas Célia Hoyles, professora da Universidade de Londres e Lulu Healy, professora da Universidade Bandeirantes em São Paulo. As estudiosas colocaram para crianças o seguinte questionamento: *quando adicionamos dois números pares quaisquer, a resposta é sempre um par*. Na sequência traduzimos para o português algumas das estratégias mais empregadas pelos estudantes que participaram da investigação.

Resposta do aluno 1: a é um inteiro qualquer b é um inteiro qualquer $2a$ e $2b$ são dois números pares Assim $2a+2b=2(a+b)$	Resposta do aluno 2: $2+2=4$ $4+2=6$ $2+4=6$ $4+4=8$ $2+6=8$ $4+6=10$
Resposta do aluno 3: Todo número par pode ser dividido por 2. Quando adicionamos outro número com este mesmo fator, a resposta sempre terá o mesmo fator em comum 2.	Resposta do aluno 4: Todo número par acaba em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando se adiciona dois números para o final continua sendo em 0, 2, 4, 6 ou 8. É correto!

Resposta do aluno 5: Dados $x = \textit{número qualquer}$ e $y = \textit{número qualquer}$. Escrevemos $x + y = z$ e assim, temos: $z - x = y$ e $z - y = x$. Segue que: $(z - x) + (z - y) = (z + z) - (x + y)$ $= x + y = 2z$ portanto segue que a soma é par.	Resposta do aluno 6: 
Resposta do aluno 7: Eu escolho um número par arbitrário, digamos 245224 e 5439876. Quando eu os adiciono então, obtenho 245224+5439876=5685100 que é par.	Resposta do aluno 8: Aqui é o que desejamos dois números pares dados 12 e 22. Como 12=6+6 e 22=11+11 portanto 12+22=(6+11)+(6+11) e eu posso fazer o mesmo com dois números pares quaisquer.
Resposta do aluno 9: Dado um número a par, assim, $a = 2k$. Dado um número b par, assim $b = 2l$. Assim, $a + b = 2(k + l)$.	Resposta do aluno 10: Dado um número z soma de dois números pares $z = 2p$, podemos escrever $z = m + n$, assim, $z = 2m + 2n$ que é soma de dois pares. Assim, z é par.

Observando as estratégias acima, que nota você daria para cada um destes alunos e por quê? Visto de fora pode parecer uma atividade avaliativa simples, entretanto, este exemplo singelo mostra como a avaliação em Matemática é um processo complexo. De fato, como identificar um raciocínio incorreto? Qual o tipo de erro matemático manifestado do aluno? O referido erro é casual ou está ligado a uma concepção apreendida de modo inadequado e que acompanha o aluno já há algum tempo?

Mas nos referimos apenas ao aluno, entretanto, o professor também pode errar. Mas um erro porventura cometido pelo professor, pode até mesmo possuir um caráter didático-pedagógico. Neste sentido, existe uma concepção cultural atribuída a quem detém o saber matemático. Quando a pessoa domina muitos conhecimentos em História ou Geografia, não observamos nenhuma distinção social, todavia, quando a pessoa, e nesse caso o professor de matemática, domina muito conteúdo matemático, é considerado pelos demais como um "gênio" ou um alienígena, um espécie de E. T.

Assim, ao professor cometer um erro, os alunos percebem que todos são passíveis de equívocos, que eles têm permissão de tentar resolver uma situação-problema e errar. Que aquilo faz parte do aprendizado e se caracteriza como uma etapa que precisa ser superar e não contornada ou evitada.

Neste sentido, Cury (1994, p. 78) nos traz interessantes colocações quando destaca "a preocupação com a eliminação dos erros cometidos pelos alunos, tão própria da concepção que vê a Matemática como o domínio do conhecimento absoluto e infalível, parte da ideia equivocada de que os textos matemáticos não têm erros".

Ela cita a obra do matemático e filósofo Philip Davis que "comenta a existência de uma obra, publicada em 1935, na qual, em mais de 130 páginas, são listadas erros cometidos por matemáticos, desde a antiguidade, arrolando, também, os autores que descobriram os erros e as discussões por eles geradas" (1994, p. 78).

Deste modo, evidenciamos que o *contrato didático* do professor necessita contemplar e prever os *erros* dos estudantes, entretanto, a forma de encará-los, por parte do mestre, dependerá em muito da vertente epistemológica (*behaviorismo* ou *construtivismo*, por exemplo) que o mesmo simpatiza. Em muitos casos a visão sobre avaliação do professor de Matemática é construída na própria academia. De fato, os primeiros exemplos e paradigmas de professores de Matemática serão seus próprios formadores.

SAIBA MAIS!

O termo Behaviorismo foi utilizado inicialmente em 1913 em um artigo denominado "Psicologia: como os behavioristas a vêem" por John B. Watson. "Behavior" significa "comportamento" e ele definiu como: "Um ramo experimental e puramente objetivo da ciência natural. A sua meta é a previsão e controle do comportamento...". Watson postulava o comportamento como objeto da Psicologia. http://www.euniverso.com.br/Psyche/Psicologia/comportamental/behaviorismo.htm

Notamos que na identificação de um erro e, consequentemente na possibilidade de superação do referido obstáculo, na medida em que o aluno compreende por que errou, ocorre um processo de adaptação do estudante diante da situação colocada pelo professor. Brousseau sublinha a importância desse processo ao dizer que:

> As situações permitem adaptação do aluno e são na maioria das vezes de natureza repetitiva: o aluno deve poder realizar várias tentativas, investir na situação com o auxílio de suas representações, extrair consequências de seus fracassos ou do seu sucesso mais ou menos fortuitos. A incerteza na qual ele é colocado é fonte ao mesmo tempo de angustia e prazer. A redução desta incerteza é o objetivo da atividade intelectual e seu motor (1996, p. 93).

Brousseau menciona aspectos delicados do ensino de Matemática. Um deles é o que chamamos de *gerenciamento da certeza matemática* dos estudantes. Por exemplo, o professor pode chegar na sala de aula e enunciar o seguinte teorema.

> *Teorema*: Dados dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ ímpares. Então o seu produto $x \cdot y$ deve ser ímpar.

Demonstração: De fato, vamos tomar dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ ímpares quaisquer, deste modo, podemos escrevê-los do seguinte modo $x = 2a+1$ e $y = 2b+1$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$. De imediato, temos que $x \cdot y = (2a+1)(2b+1) = 2(2ab+a+b)+1 = 2k+1$, onde $k = 2ab+a+b \in \mathbb{Z}$. Segue o resultado esperado.

Em outra situação, o professor poderia apresentar os exemplos abaixo que apresentamos na tabela. Notamos que temos aqui apenas alguns casos particulares. A partir desta situação, o professor pode sugerir que, possivelmente, o resultado é verdadeiro. Pode desafiar algum estudante mais interessado em trazer um resultado que invalide a afirmação do teorema. Assim, o professor evitar concluir, com a precisão e rigor da demonstração matemática, a resolução de um problema.

x	y	$x \cdot y$
1	1	1
3	1	3
3	3	9
3	7	21
5	1	5
5	7	35

Diferenciamos mesmo o tipo de discurso presente nas duas exposições. O primeiro método, que é de fato a demonstração, nos traz aquela sensação de *certeza*, de credibilidade num fato, entretanto, uma vez o resultado estabelecido, o debate em sala de aula poderá encerrar, uma vez que o problema está resolvido. Já no segundo caso em que apresentamos uma tabela, descrevemos apenas uma *argumentação matemática*. Uma *argumentação* não fornece nenhum caráter de validade ou confiança maior a respeito de determinada propriedade.

Vejamos outro exemplo observando o seguinte teorema.

Teorema: Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes.

Vamos inverter agora. Iniciando com uma *argumentação matemática* que possa convencer aos alunos sobre a possibilidade de ocorrer a propriedade desejada. Notamos que poderíamos construir um triângulo de medidas: $\overline{AB} = 3cm$; $\overline{AC} = 3cm$ e $\overline{BC} = 1,5cm$. Medindo com o transferidor os seus ângulos opostos obteríamos que $\hat{B} = 60^o$ e $\hat{C} = 60^o$. O que verifica apenas para o caso particular. Mas vejamos a demonstração propriamente dita.

Consideremos um triângulo ΔABC , e o segmento $\overline{AM}$ de modo que $\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{BC}$, com M o ponto médio deste lado. Notamos que, por hipótese, podemos escrever $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Pela propriedade reflexiva, temos $\overline{AM} = \overline{AM}$ (todo segmento é congruente a si mesmo). Mas em virtude do ponto médio temos $\overline{BM} = \overline{MC}$. Assim, os triângulos $\Delta AMB \equiv \Delta AMC$, pois possuem os três lados congruentes. Se admitirmos conhecido o fato de que *ângulos opostos a lados congruentes de triângulos congruentes são congruentes*, teremos que $\hat{B} = \hat{C}$ c. q. d.

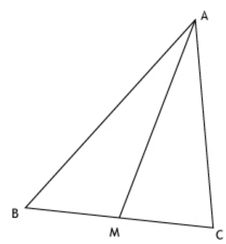


Figura 3: Triângulo

Notemos que a figura acima é empregada apenas como um auxílio ao raciocínio. Além disso, a figura representa um triângulo particular. A nossa argumentação inicial envolveu também um caso particular. Por outro lado, a demonstração, uma vez realizada e comprovada ser isenta de contrações, funcionará para qualquer triângulo com tais propriedades previstas nas hipóteses deste teorema.

E contrato didático onde fica no meio de toda essa discussão? Bem, encontramos professores de Matemática que valorizam as argumentações e os casos particulares. Vejam que com tais casos, o debate em sala de aula pode ser prolongado ao máximo. Enquanto que, quando recorremos a demonstração, o problema está resolvido, tendo em vista de termos a crença de que o mestre acabou de estabelecer uma verdade absoluta em sala de aula. Toda situação-problema, dali em diante, será solucionada com a aplicação do teorema. Nem mesmo a demonstração precisa ser recordada pelos estudantes, apenas o seu resultado.

Em relação a tal reducionismo que caracteriza a atividade matemática como uma simples aplicação e rotinas de algoritmização, os autores Hanna & Barbeau (2009, p. 90) lembram que:

> Enquanto estudantes na escola são expostos a uns poucos "teoremas", particularmente em outras áreas diferentes da Geometria, eles, entretanto devem aprender um pequeno número de fórmulas, que são essencialmente enunciados de resultados. Um exemplo disso é a fórmula de resolução da equação quadrática. As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, são dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. No mais básico nível, os estudantes podem usar esta fórmula para resolver equações quadráticas particulares. É mesmo possível para eles aplicá-la cegamente, não percebendo que eles podem checar suas soluções por substituição de volta à equação. [...] Neste ponto, os estudantes percebem que existem dois modos independentes de resolução de equações quadráticas, um fatorando, onde nem sempre obtêm sucesso, a o outro, usando a fórmula, que sempre funcionará.

Resumimos as colocações acima na figura 04 que descreve o funcionamento de uma aula de Matemática que privilegia fortemente esta perspectiva de mecanização e aplicação restrita de resultados matemáticos com uma larga margem de segurança, principalmente para o professor, que nem precisa se esforçar muito.

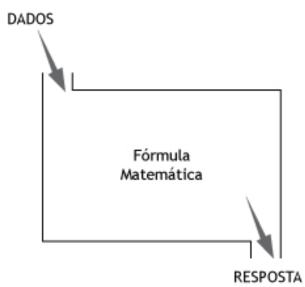


Figura 4: Contrato didático fundamentado no processo de aprendizagem algoritmizado

Percebe-se neste processo de aprendizagem baseada na algoritmização, é difícil o aluno errar, pois, basta fornecer os dados para a máquina contendo a *fórmula matemática*, garantida por um teorema, mencionado *en passant* pelo professor, que obteremos uma resposta.

De fato, neste sistema de ensino temos uma condição de extrema “comodidade” para o professor de matemática, uma vez que, embora tenha 200 provas para corrigir, em cada uma delas, ele pode avaliar apenas a resposta. Por outro lado, devemos observar também que, quando professor de Matemática quer complicar demais, tentando avaliações que fujam desse processo descrito na ilustração acima, via de regra, aparece algum estudante para reclamar na coordenação. No final, conclui-se que é bem mais fácil, para todos no processo (professor e estudante) permanecer no esquema da figura 4.

TÓPICO 3

Tipos de erros e o Contrato Didático

Objetivo

- Caracterizar alguns tipos de erro e relacioná-los com a noção de contrato didático

Vamos iniciar nossa discussão observando duas situações em que identificamos a ocorrência de erros. Notamos que se tratam de erros que envolvem o emprego inadequado de regras de inferência e/ou equivalências lógicas indevidas. Mas como diferenciar (I) e (II)?

(I)

$$\begin{aligned} x = 1 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2.1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

(II)

$$x = 2 \Leftrightarrow 2 = x \Rightarrow x = x \forall x \in \mathbb{R}$$

Figura 5: Erros envolvendo inferências e equivalências lógicas não permitidas.

Mas vejamos um erro frequente e difícil de apresentar uma causa facilmente identificável. Para você presenciar a sua manifestação em sala de aula, basta você requisitar a um aluno representar o gráfico da seguinte progressão aritmética $\{1,3,5,7,9,....\}$. Observamos que além de ser uma questão pouco colocada, uma vez que o tratamento dedicado às *progressões aritméticas* e *geométricas* é totalmente algébrico e não geométrico, o aluno esboçará algo semelhante ao que exibimos na figura 6.

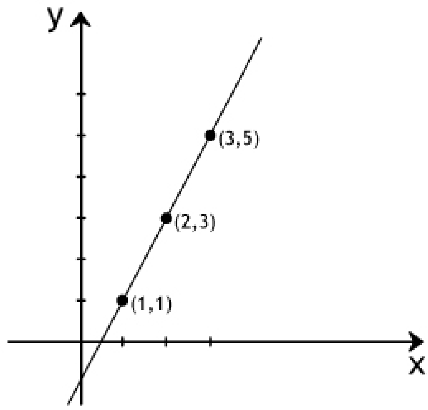


Figura 6: Descrição do gráfico de uma progressão aritmética por um aluno.

Bem, aparentemente o nosso aluno hipotético descreveu algo semelhante a uma reta do tipo $y = ax + b$. E, de algum modo ele relacionou esta representação da reta com $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, a questão não trivial agora é saber por quê? Que razões levaram o aluno a manifestar tal estratégia?

Esta estratégia se diferencia de modo substancial no que diz respeito à figura 4. De fato, nesta, nossa atenção se volta à manipulação e à aplicação de *regras de operação*. Para o professor de Matemática, estas podem ser mais fáceis de corrigir, pois são mais perceptíveis e se inserem num contexto mais simples. Por outro lado, o que foi contrariado, numa perspectiva matemática, para que o professor possa dizer que a estratégia da figura envolvendo a progressão aritmética está errada?

Se trata de uma *concepção* ou noção mal apreendida, desde quando este aluno carrega consigo tal *concepção equivocada*? Estas questões, geralmente, não possuem uma resposta imediata. Por simplicidade, o professor de Matemática da série atual coloca culpa no professor da série anterior e, assim, sucessivamente. Possivelmente, continuando com este processo, a culpa recai sobre os pais que colocaram a criança na escola.

Por vezes o professor se depara com estratégias mirabolantes, como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Mas, outro aspecto deve ser observado é que, apesar de não ser explícito no contrato didático, pode ocorrer que um aluno, após realizar um duro esforço na resolução de uma questão, de sua resposta não atender exatamente o que foi demandado pelo mestre e, mesmo assim, diante do seu empenho, o estudante cobrar do professor alguma pontuação diante do enorme esforço gasto na resolução da questão. Neste caso, sua resposta poderia estar correta em outro contexto, mas de acordo com o que é requisitado na questão, o mestre poderia considerar completamente errado.

Trata-se de uma situação delicada do contrato didático, todavia, a **nota** deve ser atribuída e este valor numérico que atribuímos ao estudante pode ser o ápice de um processo meticuloso conduzido e delineado pelo mestre. De fato, Cury (1994 p. 74) lembra:

> O momento de aplicação da prova também tem, em geral, um ritual implícito, mais ou menos aceito por todos. O professor solicita uma determinada disposição das classes, faz algumas admoestações sobre possíveis colas, marca o tempo de duração da prova e recusa-se a auxiliar os alunos. A toda essa encenação subjaz a ideia de que o conhecimento, transmitido aos alunos de uma determinada forma, deva ser assim reproduzido de única maneira considerada correta. Dessa forma, o diálogo entre o professor e aluno, que possa ter sido estimulado durante as aulas e que possa ter, efetivamente, levado o aluno a atingir uma melhor compreensão dos conteúdos, é bruscamente interrompido. A prova introduz uma quebra do contrato didático, um desequilíbrio nas relações entre professor e os alunos, em torno do saber.

Um tipo de erro encontrado em Matemática e explorado na tese de Cury (1994) é o caso da *falsa generalização*. Situações como $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ou $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ ou $(a+bi)\cdot(c+di)=(a\cdot c)+(b\cdot d)i$ caracterizam a direção natural que o ser humano apresenta em *busca de padrões*, sejam eles aritméticos, geométricos ou algébricos.

Merece comentário, por exemplo, a adição natural de números complexos e, na sequência dos conteúdos, os estudantes são apresentados às regras envolvendo multiplicação em que devem empregar a relação $i^2=-1$ que surge como um verdadeiro passe de mágica.

O erro em Matemática que é chamado por alguns autores de *falsa generalização* é estimulado, de modo completamente equivocado, segundo Lima (2001) pelos livros didáticos do ensino médio. Como por exemplo, sejam a soma de $n\in\mathbb{N}$ números em P.G descritos por $S_n=a_1+a_2+a_3+....+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+....+a_1q^{n-1}$, assim temos $S_n\cdot q=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+....+a_1q^n$, portanto:

$$S_n-S_n\cdot q=\left(a_1+a_1q+a_1q^2+....+a_1q^{n-1}\right)-\left(a_1q+a_1q^2+a_1q^3+....+a_1q^n\right)$$

$$S_n-S_n\cdot q=a_1-a_1q^n=a_1(1-q^n)\therefore S_n(1-q)=a_1(1-q^n)\leftrightarrow S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$$

, ou $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$. Na sequência conclui que tal propriedade foi demonstrada para $\forall n\in\mathbb{N}$ (natural). Assim, o livro e, consequentemente o professor inadvertido, estimulou uma prática em deduzir o geral a partir de um caso específico ($n\in\mathbb{N}$)

inicialmente fixado em (*).

Vejamos um exemplo interessante descrito da dissertação de Bondaniman (2007 p. 173). A autora apresentou a seguinte tarefa envolvendo a noção de soma. Ela verificou que a maioria os alunos não obtiveram resultados corretos para os valores numéricos, entretanto, respeitaram a hierarquia para a resolução dos mesmos. Destaca ainda a dificuldade em trabalhar com números.

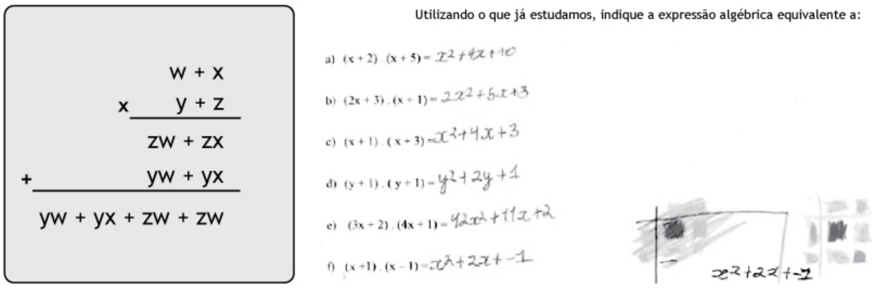


Figura 7: Tarefa sugerida por Bondaniman (2007, p. 173).

Ao lado, temos as respostas obtidas pela investigadora. Nesse estudo, após a representação das atividades na escrita algébrica, a autora requisitou a mesma representação com o uso de materiais manipuláveis ou desenhos geométricos como vemos à direita da figura 7. Em casos como este, o aluno se vê na obrigação de testar e comparar suas respostas tanto na representação ligada à Aritmética, como em Álgebra e na Geometria. Sugerimos ao professor uma perspectiva de avaliação a ser desenvolvida pelo *Contrato Didático* que possibilite e estimule ao aluno enxergar as relações que descrevemos na figura 8.

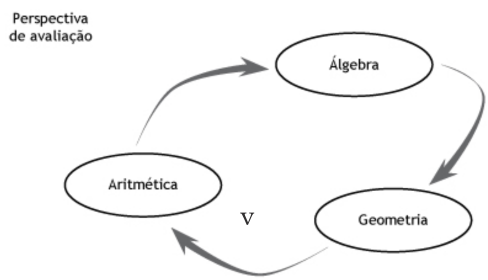


Figura 8: Relações estimuladas na avaliação do professor

Certamente tais relações não são facilmente alcançadas pelo professor de

Matemática iniciante. Nem mesmo o experiente, tendo em vista que ambos foram submetidos ao estudo de *disciplinas compartimentalizadas* ou *estanques* no *locus acadêmico*. De fato, ainda nos aprofundaremos em questões relacionadas às mínimas relações estabelecidas entre a formação pedagógica e a relação específica. Tal dicotomia prejudica a visão do futuro professor e, em última instância, estudos evidenciam que ensinamos da maneira que aprendemos. Mas isto será um assunto para outra aula.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) No que diz respeito às definições formais de função afim e função exponencial, quais das duas definições exigem um maior tempo didático? Qual transposição didática exigirá mais do professor? Qual a definição propicia maiores dificuldades ao entendimento dos aprendentes? Justificar usando as noções da Didática da Matemática.

2) Descreva formalmente as propriedades da função de proporcionalidade direta. Fornecer exemplos de questões que envolvem esta função.

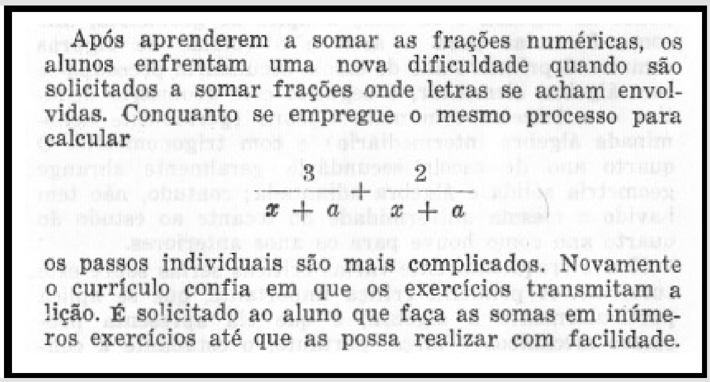
3) Os saberes científicos relacionados com a função de proporcionalidade direta devem constituir os saberes particulares do professor?

4) É peculiar o professor "menos experiente" se valer de todo o seu conhecimento recém aprendido na academia e desenvolver uma transposição didática afetada por sua formação acadêmica. Identificar este tipo de contágio no trecho da figura 3. A linguagem excessivamente formal pode gerar dificuldades aos estudantes? Como lidar com tais dificuldades?

> A professora, inteiramente convencida do decantado valor da precisão na linguagem e desejando perguntar aos alunos se certo número de pirulitos é igual a certo número de meninas, formula a questão assim:
>
> — Verifiquem se o conjunto de pirulitos está em correspondência de um para um com o conjunto de meninas.

Trecho de Kline (1971, p. 17)

5) É mais cômodo para o professor apresentar sua aula apoiada no raciocínio lógico e formal. A vantagem reside na organização, na precisão e sistematização do saber matemático. Na figura abaixo, enfatizamos uma situação didática em que o professor de Matemática se vale da condição em que os exercícios e atividades são suficientes para que os alunos, de modo automático, aprendam a lição. Indique a transposição didática inadequada neste caso.



Após aprenderem a somar as frações numéricas, os alunos enfrentam uma nova dificuldade quando são solicitados a somar frações onde letras se acham envolvidas. Conquanto se empregue o mesmo processo para calcular

$$\frac{3}{x+a}+\frac{2}{x+a}$$

os passos individuais são mais complicados. Novamente o currículo confia em que os exercícios transmitam a lição. É solicitado ao aluno que faça as somas em inúmeros exercícios até que as possa realizar com facilidade.

Trecho do livro de Kline (1971, p. 20)

AULA 3 | A noção de obstáculo epistemológico

Olá aluno (a),

Nesta aula, iremos abordar a noção de obstáculo epistemológico estudado em didática e suas implicações para o ensino, bem como descrever as noções de argumentação, prova e demonstração e as implicações didáticas destas noções. Vamos lá!

Objetivos

- Entender o obstáculo epistemológico no estudo da didática da matemática
- Compreender a argumentação, prova e demonstração matemática e suas implicações didáticas

TÓPICO 1

A noçao de obstáculo epistemológico estudado em didática da matemática

Objetivo

- Descrever a noção de obstáculo epistemológico e suas implicações para o ensino

Iniciamos esta seção com alguns questionamentos: por que é mais difícil ensinar aos estudantes a noção de função exponencial e função logarítmica do que função afim e/ou função polinomial do segundo grau? Por que os estudantes preferem Álgebra em vez de Geometria Plana?

Aos olhos do incipiente ou o pouco treinado no *saber matemático*, essas questões podem não ter muito sentido, mas para o professor de Matemática, ser consciente do valor e das possíveis respostas para tais questões é essencial para a sua atividade. A primeira observação que fazemos é a seguinte: determinadas dificuldades enfrentadas pelos estudantes dependem de modo específico do conteúdo contemplado na ação didática.

Com isto, queremos dizer que, independentemente do professor, os alunos sempre sentem mais dificuldades na aprendizagem de função logarítmica do que na aprendizagem de função afim. Os alunos sempre preferem Álgebra a Geometria. Este sentimento de aversão e insegurança pode ser gerada pelo próprio conteúdo. Foi por isso que alguns didatas da Matemática passaram a se preocupar com as dificuldades intrínsecas oferecidas pelos próprio objeto matemático.

Historicamente, os matemáticos precisaram de mais tempo para formalizar a noção de limite, comparado-a ao tempo empregado com as noções de Derivada e Integral. É como se o tempo para a apreensão e compreensão de um objeto matemático fosse mais prolongado do que o outro; e isto dependeria das características próprias de cada objeto conceitual.

Outro aspecto interessante é que isto foi objeto de reflexão para muitos epistemólogos, que de modo particular estudaram a expansão e evolução do conhecimento matemático. Joshua e Dupin (1989, p. 61) descrevem parte deste processo quando recordam que:

> Em particular, as matemáticas não formais, quase empíricas, não se desenvolveram por meio de uma acumulação contínua de teoremas inquestionavelmente estabelecidos, mas por meio de um aperfeiçoamento incessante de conjecturas graças à especulação crítica, graças à lógica de provas e refutações.

Na citação acima, vemos alguns vestígios apontados pelos didatas franceses ao sublinhar que a Matemática não se desenvolve por meio de um acúmulo de teoremas. De modo semelhante, o saber do aluno também não evolui à medida que passa a conhecer vinte teoremas em vez de apenas dez. Esta seria uma visão muito simplista da missão do ensino.

A partir desta visão que se preocupava em acompanhar e explicar os progressos das Ciências e da Matemática, alguns cientistas conceberam e criaram algumas noções que poderiam sistematizar e explicar, ou, pelo menos, prever surgimento de determinadas barreiras inevitáveis à evolução do saber. A noção mais celebrada nesse âmbito é chamada de *obstáculo epistemológico*.

Seu fundamental criador foi o filósofo e poeta francês Gastón Bachelard (1884-1962), que, conforme Joshua e Dupin (1989, p. 63), descreve uma lista impressionante de obstáculos que interditam o modo de pensar pré-científico. Igliori (2002, p. 91) lança alguns questionamentos interessantes ao propor: O que é o conhecimento? Como se processo o conhecimento? Qual é a natureza dos objetos que compõem uma determinada ciência? Em que sentido é a Matemática um conjunto de objetos e um conjunto de ideias?

VOCÊ SABIA?

Epistemólogos são os cientistas que se debruçam sobre a compreensão dos motivos da expansão do conhecimento científico.

VOCÊ SABIA?

D´Amore (2007, p. 211) explica que no ensino-aprendizagem, por um lado, é necessário que se formem ideias transitórias, mas, por outro lado, é preciso levar em conta que tais ideais resistirão (tentarão resistir) depois, quando da tentativa de serem superadas. [...] Pode-se dizer que um obstáculo é uma ideia que, no momento de formação de um conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-la a um novo problema. Dado o êxito obtido, tende-se a conservar a ideia já adquirida e comprovada e, apesar do fracasso, busca-se salvá-la; mas esse fato acaba sendo uma barreira para aprendizagens sucessivas.

Acrescentamos a importância de refletir sobre: O que é o conhecimento matemático? Como se processa o conhecimento matemático? Qual é a natureza dos objetos que compõem a Matemática? Sublinhamos que, dentre as tendências evidenciadas na Epistemologia, nos interessamos, de modo particular, pela epistemologia das problemáticas "que se propõe a analisar como os problemas, que têm conduzido o homem ao conhecimento científico, modelaram as teorias inventadas para resolver estes problemas" (IGLIORI, 2002, p. 92).

Como sempre, as revoluções e quebra de paradigmas ocorridos na Matemática passam a influenciar e determinar mudanças em outros campos do saber. Nesse sentido, Igliori (2002) destaca os trabalhos de Karl Popper (1902-1994), que baseou sua abordagem em parte nas investigações desenvolvidas pelo matemático e físico Imre Lakatos (1922- 1974).

Ilustramos esse fato em seguida e sublinhamos as duas possibilidades: $particular \Rightarrow geral$ e $geral \Rightarrow particular$. São impressionantes os exemplos na Ciência que mostram o modo como pensadores se apoiaram em casos particulares para compreender as revoluções em caráter geral. Diante disto, o ingênuo professor de Matemática pode concluir que a trajetória $particular \Rightarrow geral$ é mais aconselhada para o sujeito que se depara pela primeira vez com um conhecimento.

]

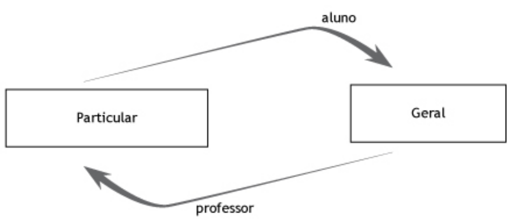


Figura 1: Caminhos da Ciência e da Matemática

Por outro lado, para quem sabe e conhece, como no caso presumimos seja o professor de Matemática, a trajetória $geral \Rightarrow particular \Rightarrow geral$ deve ser facilmente alcançada, entretanto podem ocorrer situações de quebra do contrato didático em que o mestre adota, por comodidade ou por preferência, apenas o caminho $geral \Rightarrow particular$.

Fazemos uma pequena digressão aqui para sublinhar a importância do futuro professor de Matemática adquirir e cultivar, ao longo de sua profissão, uma visão globalizante do saber matemático. Neste sentido, quando temos a missão de ensinar um conceito matemático, acreditamos ser essencial conhecer os aspectos que condicionaram sua gênese, os porquês do seu surgimento. Na Figura 2 abaixo, vemos o que chamamos de aspectos históricos (1).

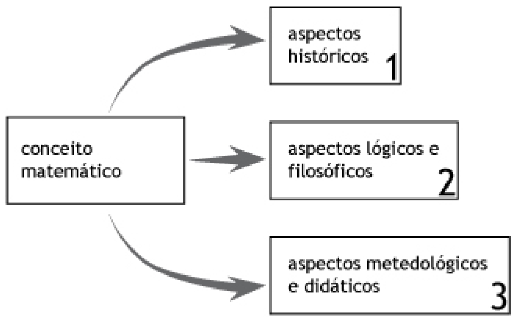


Figura 2: Preocupações do professor de Matemática

Sendo o professor de Matemática conhecedor dos embates e problemas que necessitaram ser ultrapassados pelos matemáticos profissionais do passado para a sistematização das ideias referentes ao conceito matemático, passamos a um segundo momento. Neste o professor precisar ater-se aos aspectos lógicos e filosóficos (2) que caracterizam a natureza e o papel que desempenha este conceito dentro da teoria em questão. Por fim, uma vez compreendida e construída pelo professor a visão que responde pela natureza e pelo campo de validade e aplicação deste conceito, é que o mestre passa a desenvolver uma preocupação com a *transposição didática* mais adequada para transformar o saber relacionado ao conceito em algo alcançável e compreensível pelos estudantes. Este último momento chamamos de aspectos metodológicos e didáticos (3). Assim, descrevemos a trajetória $1 \to 2 \to 3$.

Ao professor deve ficar claro que determinados saberes devem possuir um caráter provisório e que, num momento inicial, os alunos podem não possuir maturidade e/ou estruturas cognitivas que lhes possibilitem a aquisição daquele saber.

O professor sabe que *tipos de erro* os alunos devem cometer e vê tudo aquilo como uma etapa necessária para a aprendizagem. Num período ou série subsequente, o mesmo professor continua sua vigilância agora no sentido de sanar e aprimorar determinadas concepções equivocadas pelos seus estudantes.

Se houver uma troca de professor na escola durante o ano, o próximo professor dificilmente conhecerá os antigos erros e concepções errôneas dos alunos que precisam ser corrigidas. O caminho mais simples é, como alerta Brousseau (1996 p.127), colocar a culpa no professor do ano anterior. Mais adiante o mesmo autor declara:

> Os conhecimentos evoluem segundo processos complexos. Desejar explicar esta evolução unicamente por meio de interações efetivas no meio seria certamente um erro, pois, em breve, os estudantes podem interiorizar as situações que lhes interessam e operar com suas representações internas experienciais mentais importantes.

Desse modo, inevitavelmente os estudantes devem sentir mais dificuldades em uns conceitos do que em outros. A evolução dos processos cognitivos relacionados a alguns conceitos matemáticos passa por momentos de letargia, momentos de estagnação ou inércia. Momentos que alguns estudiosos da Psicologia Cognitiva chamam de acomodação.

O interessante é que, sem tais momentos de atividade, os estudantes não conseguem alcançar uma etapa subsequente. É como se fosse necessário enfrentar aquelas dificuldades, sentir aquela insegurança e incerteza.

Nesse sentido, passa a ser dever do professor possuir de modo claro a identificação *a priori* de todos os obstáculos à aprendizagem dos estudantes, o que nem sempre se constitui como uma simples tarefa. Arsac (1987, p. 307) acrescenta ainda que:

> Uma questão importante é a seguinte, do ponto de vista didático: a passagem ao estádio de demonstrações pode ter sido motivada por necessidades internas à própria Matemática, isto é, a demonstração pode ter aparecido inicialmente como um instrumento indispensável para certas ocasiões, ou é necessário se resignar a um forte apelo às informações transmitidas pelo docente e mesmo as exigências introduzidas indiretamente pelo contrato didático?

VOCÊ SABIA?

É a modificação de um esquema ou de uma estrutura em função das particularidades do objeto a ser assimilado.
http://penta.ufrgs.br/~marcia/teopiag.htm#aco

De fato, o questionamento de Arsac (1987) exige uma resposta, como dizem os matemáticos, não trivial. Reparamos como o mesmo faz menção ainda à noção de demonstração em Matemática. E esta pode agir como um obstáculo em sala de aula. Vejamos um exemplo comentado por Barbosa (2004, p. 16).

Teorema: Um segmento possui exatamente um único ponto médio. Para demonstrá-lo, Barbosa (2004) usa a seguinte proposição.

Proposição: sejam A, B, e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se, e somente se o número c está entre a e b.

Passaremos agora à demonstração propriamente dita do teorema.

Prova: (*Existência*) Sejam a e b as coordenadas das extremidades do segmento. Consideremos agora o número $c=\frac{a+b}{2}$. De acordo com um axioma III da Geometria Plana (BARBOSA, 2004, p. 14), existe C que possui como coordenada o ponto determinado pela relação $c=\frac{a+b}{2}$, determinado pelas coordenadas de extremidade do segmento. Assim, em virtude ainda do Axioma, escrevemos $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$. Vemos, então, que $\overline{AC}=|a-c|=\left|a-\frac{a+b}{2}\right|=\left|\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right|$ e $\overline{CB}=|c-b|=\left|\frac{a+b}{2}-b\right|=\left|\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right|$ e concluímos que $\overline{AC}=\overline{CB}$. Mas considerando que o número $c=\frac{a+b}{2}$ está entre os números a e b, segue-se, pela proposição, que C está entre os pontos A e B; assim C é o ponto médio de $\overline{AB}$.

(*Unicidade*) Seja C como obtido na prova da existência anterior, vamos admitir que exista um outro ponto C', outro ponto do segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC'}=\overline{BC'}$. Sejam a, b e c' as coordenadas dos pontos A, B e C' respectivamente, então teremos:

(i) $c'-a=b-c'$, no caso em que $a<c'<b$; e (ii) $a-c'=c'-b$, no caso em que $b<c'<a$. Em todos os casos concluímos que $c'=\frac{a+b}{2}=c$. E mais uma vez, por outro axioma (BARBOSA, 2004, p. 15), temos os pontos $C=C'$, como se queria demonstrar.

Sublinhamos que, de acordo com a *apresentação axiomática* da Geometria, é difícil demonstrar o resultado enunciado neste teorema sem passar por algumas ideias centrais empregadas pelo matemático e pesquisador cearense João Lucas Marques Barbosa. Outro aspecto interessante é que determinados rituais formais executados pelo professor, em certos casos, não possuem um significado constituído para os estudantes. Este teorema que discutimos é um exemplo.

Percebe-se que o autor buscou caracterizar a *existência* e a *unicidade* do objeto chamado de ponto *médio do segmento*. De fato, em Matemática, as noções de *existência* e a *unicidade* são basilares para a evolução e a sistematização das ideias desta ciência; a dificuldade é a obtenção de entendimento pelos estudantes de sua necessidade e importância.

Assim, caso esta trajetória seja a preferida pelo professor, podemos prever um obstáculo à compreensão dos alunos. Todavia, o obstáculo aqui é determinado a partir da ação didática do professor em sala de aula. Este tipo de obstáculo é chamado por alguns autores de *obstáculo de ordem metodológica*. Com respeito aos vícios e distorções introduzidas na formação do futuro professor que podem favorecer a reprodução no ambiente escolar de verdadeiros *obstáculos de ordem metodológica*, Robert e Penninckx (1999, p. 95) advertem:

> Embora tais alunos possuam o conhecimento, eles manifestam a tendência à reprodução de certos modelos. Por exemplo, eles se refugiam em quadros de predileção ou de métodos privilegiados e apresentam resistência às mudanças. Eles recorrem sistematicamente aos algoritmos, ao quadro numérico e/ou ao quadro analítico. Falamos de concepções condutoras de práticas redutoras.

Apesar das autoras Robert e Penninckx mencionarem a realidade acadêmica de formação na França, aqui no Brasil a situação não é diferente. Por exemplo, encontramos *concepções condutoras de práticas redutoras* em diversos momentos da formação do professor de Matemática. Um exemplo clássico é o ensino compartimentalizado dos conteúdos dentro da própria universidade.

De fato, que relações o licenciando é levado a descobrir entre Álgebra Linear e Geometria? Que relações o aluno começa a perceber entre a Álgebra aparentemente ingênua da escola básica e a famigerada disciplina de *Estruturas Algébricas*? Como os fundamentos da *Análise Real* auxiliam o aluno na compreensão de propriedades básicas dos números naturais, inteiros, racionais e reais?

Na prática, o currículo de Matemática é distribuído em gavetas e cabe, em muitos casos, ao estudante relacionar por conta própria a ligação dos conceitos da Matemática Avançada, que "aparentemente" não tem nenhuma aplicação escolar com a Matemática escolar. Pode parecer uma piada de mau gosto, mas nem mesmo o estudante consegue realizar a ligação conceitual entre função afim x progressões aritméticas ou função exponencial x progressões geométricas, que dirá as ligações e implicações necessárias entre a Matemática Avançada com a Matemática escolar.

Tal currículo conduz a um ensino desconexo e separado em caixinhas. E o estudante, de modo semelhante, aprenderá tudo de modo separado e sem as ligações conceituais necessárias. Ora, isto caracteriza um sério obstáculo didático que dificilmente mudará sem uma mudança radical nos pressupostos filosóficos dos cursos de graduação de professores.

Brousseau (1996) estudou uma diversidade de obstáculos que devem ser considerados no plano didático. Assim podemos ter:

- **Obstáculos epistemológicos**: os constatados por Bachelard, que se caracterizam como inerentes ao próprio conhecimento. São percebidos nas dificuldades pelas quais os matemáticos passam para superá-los ao longo da história, como atestam as pesquisas em Epistemologia e Historia da Matemática;

- **Obstáculos didáticos**:

> *são aqueles decorrentes de determinadas estratégias de ensino. São resultantes de uma transposição didática que o professor dificilmente pode negociar no contexto restrito da classe. O conhecimento de um obstáculo de tal natureza permite ao professor rever a abordagem anterior sobre o assunto para esclarecer melhor a dificuldade vivida pelo aluno* (GOUVÊA, 1998, p. 11);

- **Obstáculos psicológicos**: *são aqueles que surgem quando a aprendizagem está em contradição com as representações profundas do sujeito ou quando ela causa uma desestabilização inaceitável* (GOUVÊA, 1998, p. 11).

- **Obstáculos ontogênicos**: são aqueles que se originam de uma aprendizagem fora do desenvolvimento psíquico do sujeito e das limitações de uma maturidade conceitual.

Para concluir esta seção, vamos comentar algumas das características dos obstáculos e de que modo eles podem surgir a partir da relação entre: $aluno - saber$ matemático $- professor$. Para discutir alguns exemplos de obstáculos epistemológicos, recordamos as colocações de Kline (1976, p. 30) que explica:

> O primeiro e principal passo dado pelos gregos foi insistir em que a Matemática lidasse com conceitos abstratos. Para ver o que isto significa, recordamos que quando pensamos sobre números, inicialmente, idealizamos coleções de particulares de objetos, tais como: duas maçãs, três homens, etc. Gradualmente, e nem sempre conscientemente, pensamos sobre os números 2, 3, etc. e todos os outros sem a necessidade de os associarmos a outros objetos do mundo físico. Rapidamente, atingimos a um estágio elevado de adição, subtração e executamos outras operações com números sem mesmo possuir alguma coleção de objetos para compreender tais operações, cujos resultados se coadunam com a experiência.

Apesar de extenso, em linhas gerais, o matemático profissional Morris Kline se refere ao processo mental de abstração. De fato, observando suas explicações, notamos que inicialmente, ele faz referências a objetos percebidos empiricamente, objetos que nos circundam. No segundo momento, sua atenção recai sobre conjuntos de objetos colocados em relação a certos tipos de simbologias que culturalmente são chamadas de números. No terceiro momento, o processo abstrativo já se encontra num patamar tão elevado que não necessitamos ver os objetos para idealizar operações que os empreguem, e, neste nível, o que importa são as relações estabelecidas entre conjuntos em que, na condição em que tenhamos alguma coleção particular e material de objetos, tais relações se adéquam de modo perfeito.

Aqui evidenciamos um caráter que sempre provoca mal estar nos estudantes, o caráter abstrato dos conceitos matemáticos que requerem processos cognitivos especializados para a sua internalização. Neste contexto, alguns objetos possibilitam mais barreiras ao entendimento do que outros. Por exemplo, se um professor professa sua aula de Matemática segundo o tópico função polinomial do primeiro grau, certamente as dificuldades devem ser menores quando comparadas a sua aula relativa à função logarítmica. Assim, independentemente do professor, o segundo tópico proporciona maiores dificuldades à aprendizagem. Tais barreiras são chamadas, assim, de *obstáculos epistemológicos* porque são relacionadas ao próprio conteúdo.

Por outro lado, mesmo quando referenciamos o mesmo conteúdo, os professores devem promover distintos pontos de vista de abordar e compreender o mesmo objeto. Dessa forma, em relação ao mesmo conteúdo, sentimos mais dificuldades com um professor do que com o outro. Identificamos aqui um *obstáculo de natureza didática*.

Obstáculos psicológicos podem ocorrer na ocasião em que tencionamos ensinar um determinado conteúdo matemático, que reconhecidamente apresenta sempre algum pré-requisito e, por algum motivo, os alunos ainda não dispõem daquele modelo mental que os capacite a determinada aprendizagem. Podemos gerar obstáculos de natureza cognitiva se tentarmos ensinar a operação de divisão sem os alunos estarem familiarizados suficientemente com a operação de multiplicação.

Por fim, não se consegue ensinar a noção de limite, derivada ou integral para uma criança de 10 anos, uma vez que, do ponto de vista maturacional, ainda se apresenta incapacitada para tal aprendizado. Tal situação envolve um obstáculo de natureza *ontogenética*.

Este assunto é inesgotável e apresenta um enorme campo de aplicações. Na próxima aula, ainda discutiremos outros aspectos relacionados à noção de obstáculos epistemológicos.

TÓPICO 2

Argumentação, prova e demonstração em matemática

Objetivo

- Descrever as noções de argumentação, prova e demonstração e as implicações didáticas destas noções

Uma das teses mais citadas em trabalhos acadêmicos interessados em investigação sobre o ensino/aprendizagem em Matemática é a do pesquisador francês Nicolas Balacheff. É interessante observarmos como as dificuldades diante de situações-probema que requerem o uso de demonstrações agem de modo aterrorizador nos estudantes. Numa perspectiva de caracterização da noção *demonstração* e seus efeitos em sala de aula, Balacheff (1988, p. 19) diz que:

> De modo implícito as situações de ensino em Matemática delegam aos alunos a responsabilidade da verdade. Isto é particularmente identificado quando colocamos problemas do tipo: "Mostrar que...". Em tal formulação do enunciado em questão já se tem a afirmação verdade, o que resta é descobrir a demonstração. Além disso, o critério de recebimento desta demonstração não se estabelece apenas diante da validade do enunciado em questão, mais ainda que ela satisfaça o professor. [...] Os critérios destes julgamentos não são suscetíveis de serem totalmente explícitos. Neste contexto, a demonstração aparece como uma retórica específica na classe de Matemática.

Notamos como Balacheff indica o poder relativo ao professor no momento de aplicar situações que requerem algum processo de *demonstração*. Sublinhamos ainda o caso de uma determinada propriedade poder apresentar inúmeras *demonstrações*; assim necessitamos saber qual delas pode satisfazer o mestre. Citamos o caso da propriedade entre os catetos e a hipotenusa relacionados por $a^2 = b^2 + c^2$.

Outra questão interessante e delicada diz respeito à colocação do enunciado das situações-problema. Por exemplo, encontramos em Lima (2001, p. 37) os seguintes enunciados: Prove as igualdades (i) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ e $X \cup (Y \cap Z)^C = X \cup Y^C \cup Z^C$. Ou ainda, usando *indução matemática*, mostre que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Isto é justamente o que é denunciado por Balacheff (1988) e se torna mais nocivo no ensino escolar. A priori, os alunos já sentem que estão lidando com uma *verdade matemática*, o problema é recordar a demonstração feita pelo professor para se repetir exatamente a mesma coisa durante a avaliação.

Mas antes de nos aprofundarmos nestas questões de âmbito didático-metodológico, apresentamos a caracterização assumida por Nicolas Balacheff. O autor inicia dizendo que *os verbos explicar, provar e demonstrar são usados frequentemente como sinônimos na prática do ensino de Matemática* (1988, p. 27).

Assim, ele propõe uma maior precisão do vocabulário para desenvolver o sistema de ensino envolvendo estas noções na escola. Ao citar Piaget, recorda que *explicar, sobre o terreno das ciências dedutivas, significa obter razões para responder a questão do por quê*. Mas, do ponto de vista da Matemática, fornecer as razões de um teorema significa explicar, ~~e~~ demonstrar e evidenciar exigências distintas.

Balacheff (1988) refere-se ao que os matemáticos nomeiam de fazer apelo à intuição; ele destaca as significações, isto é, a compreensão da validade de uma asserção, não no sentido lógico, mas no sentido das relações com os corpos de conhecimentos matemáticos.

Mais adiante o mesmo autor explica que, segundo a tradição dos linguistas, situamos uma **explicação** no nível do sujeito locutor e acrescenta que

> É inicialmente para ele que a argumentação estabelece e garante a validade de uma proposição, ele toma raízes nos conhecimentos e no que constitui a sua racionalidade, isto é, suas próprias regras de decisão da verdade. Desde que se exprime em um discurso, a explicação visa tornar inteligível a outrem a verdade de uma proposição já aceita por um locutor. Ele não se reduz necessariamente em uma cadeia dedutiva (BALACHEFF, 1988, p. 28).

Vejamos um exemplo de *explicação* recordada por Lima (2004, p. 151). Ele lembra que um antigo professor seu costumava explicar ao jovem Elon Lages Lima e aos seus colegas as "regras do sinal" do seguinte modo:

1ª) O amigo do meu amigo é meio amigo, ou seja, $(+)(+) = (+)$;

2º) O amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, $(+)(-)=(-)$;

3º) O inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer que $(-)(+)=(-)$;

4º) O inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa $(-)(-)=(+)$.

Na sequência, o autor acrescenta *sem dúvida que a ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na quarta regra (poderíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si)* (LIMA, 2004, p. 151).

Notamos claramente os limites da *explicação* fornecida pelo antigo professor. Seu uso é metafórico e por *tempo didático* limitado, pois, mais cedo ou mais tarde, os alunos devem ser conduzidos aos limites desta explicação matemática. Se o mesmo professor, entretanto, desejasse apresentar uma *propriedade* que independesse do caráter particular daquela *situação didática*, por exemplo, $(-1)(-1)=1$, poderia simplesmente declarar que *este fato é uma consequência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição* (LIMA, 2004, p. 152).

De fato, nossa discussão tem lugar em $\mathbb{Z}$, onde cada número a *possui simétrico* (ou inverso aditivo). Assim, axiomaticamente, temos $a+(-a)=0$, para todo $a\in\mathbb{Z}$. Em particular concluímos que $a=-(-a)$, como destaca Lima. Mas precisamos de outra propriedade descrita por $a\cdot 0=0\ \forall a\in\mathbb{Z}$ (*). De fato, notamos que: $a+a\cdot 0=a\cdot 1+a\cdot 0=a(1+0)=a\cdot 1=a=a+0 \therefore a+a\cdot 0=a+0\ \forall a\in\mathbb{Z}$, isto deve implicar que $a\cdot 0=0$, o que prova a propriedade (*).

Em seguida Lima (2004, p, 153) mostra que $(-1)\cdot a=-a$ para todo $\forall a\in\mathbb{Z}$. Com efeito, notamos que $a+(-1)\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a\overset{distributividade}{=}\big(1+(-1)\big)\cdot a=0\cdot a\overset{(*)}{=}0$. A conclusão é que o elemento $(-1)\cdot a$ é o simétrico de a, ou seja, como já sabíamos que seu simétrico era $(-a)=-a$, devemos ter a unicidade $(-1)\cdot a=-a$. Em particular chegamos a : $(-1)\cdot 1=-1$ (**) para $a=1$. Finalmente provamos que $(-1)(-1)=(-1)\cdot 1\cdot(-1)=\big[(-1)\cdot 1\big]\cdot(-1)\overset{(**)}{=}-1\cdot(-1)=-(-1)=1$, pois já tínhamos $a=-(-a)$, e neste caso $a=1$, vale $1=-(-1)$, o que conclui a demonstração de simples relação $(-1)(-1)=1$.

Ainda falando sobre a noção de explicação, Balacheff (1988) diz que, quando uma *explicação* reconhecida é aceita com possibilidades reais de se atingir uma *verdade matemática*, é necessário designar e dispor termos que permitam marcar o seu grau de independência do locutor. Por exemplo, não foi Talles de Mileto (624 a. C. – 556 a. C.) que *inventou* o teorema que carrega até hoje seu nome. Ele *descobriu* em outras civilizações o esboço de ideias particulares de natureza geométrica e sistematizou-as.

Assim, ele se familiarizou com determinadas argumentações que, após a formalização e transformação no teorema, passaram a independer da figura do antigo grego. Mas vamos à explicação de Balacheff (1988, p. 30) ao destacar que:

> A passagem de uma explicação à prova faz referência a um processo social segundo o qual um discurso assegurando a validade de uma proposição muda o seu estatuto sendo aceito por uma comunidade. Tal estatuto não é definitivo, ele pode evoluir ao longo do tempo com a evolução dos saberes sobre os quais se apóia. Além disso, uma prova pode ser aceita por uma comunidade e recusada por outra.

Por outro lado, existem paradigmas em Matemática que, diferentemente de outras ciências, podem levar séculos para sofrerem alguma mudança. Já, por exemplo, ocorrem algumas teorias pedagógicas, como encontramos na História da Educação, que podem resistir a algumas poucas décadas e em seguida são substituídas por outras.

Retomando nossa discussão, encontramos um tipo de *prova* dominante em Matemática que trata de enunciados organizados seguindo regras bem formuladas e determinadas. Um enunciado, quando estabelecido como verdadeiro, deverá ser deduzido a partir de regras previamente estabelecidas. Assim, chamamos de demonstração este tipo de prova que:

> É caracterizado por demonstrações com um gênero de discurso em uma forma estritamente codificado. De fato, tal rigor formal deve ser ~~se~~ graduar ao decorrer da prática, por exemplo, certos etapas de uma demonstração podem não ser explicitadas mas deixadas ao gosto do leitor (BALACHEFF,1988, p. 30).

Balacheff sublinha uma prática comum manifestada pelo discurso do matemático. Por exemplo, evidenciamos, nos extraordinários livros produzidos por Elon Lages Lima, determinados momentos em que o autor, propositadamente, deixa de modo subliminar tarefas para o leitor quando emite aquelas frases que nós já estamos acostumados de ver: *Assim, é fácil de ver que....*ou *De imediato...teremos o resultado...*

Antes de prosseguirmos na discussão destas noções, vejamos alguns exemplos que nos ajudarão a discernir uma argumentação, um prova e uma demonstração.

Para tanto, observemos a seguinte figura abaixo. Nesta figura, Balacheff recorda que Bhascara realizou a prova do teorema de Pitágoras.

Advertimos que, na observância de determinado momento histórico, um resultado aceito como prova pode perder tal *status*. De fato, na época do auge da matemática indiana, este resultado era aceito como uma prova, entretanto, após uma reforma ocorrida no interior da Matemática no século XIX, para muitos matemáticos isto não é uma p*rova*, pois depende da representação particular do objeto em questão.

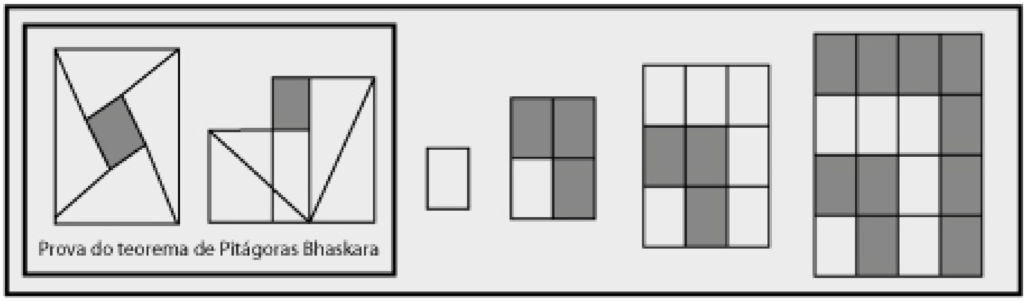


Figura 3: Resultado matemático recordado por Balacheff e diagrama

Segundo uma acepção moderna, e certamente uma corrente filosófica específica da Matemática, isto é um exemplo de *argumentação*. No lado direito da Figura 3, observamos a relação:

$1 = 1^2; 1+3 = 4 = 2^2; 1+3+5 = 9 = 3^2; 1+2+5+7 = 4^2$.

Assim, podemos inferir que $1+3+5+....+(2n-1) = n^2$? Não estamos no valendo do *modelo de prova* chamado de *Indução Matemática*, assim isto é uma *argumentação* e não uma *prova matemática*. Vejamos agora um exemplo de *prova*.

$Lema$: Se uma função é definida pela forma $y = ax^2 + bx + c$, então pode ser escrita pela forma $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstração: Notemos que $y = ax^2 + bx + c \overset{a \neq 0}{\leftrightarrow} y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \leftrightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \leftrightarrow$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leftrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leftrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Segue o resultado. Agora o professor enuncia o seguinte teorema.

> *Teorema*: Se uma função é definida pela forma $y = ax^2 + bx + c$, então o contradomínio é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a $\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$ se $a > 0$ e menores ou iguais a $\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$ se $a < 0$.

Demonstração: Recorrendo ao resultado anterior, vamos retomar a seguinte expressão $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, que se mostrou essencial no lema passado. Notamos que todo quadrado de um número real não pode ser negativo, assim temos $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. De acordo com as hipóteses do teorema, temos dois casos para considerar. No primeiro, quando $a > 0 \therefore a \times \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, mas se $a < 0 \therefore a \times \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$. Agora temos que se $a > 0 \therefore a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \geq 0 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

De modo semelhante, temos:

$$a < 0 \therefore a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \leq 0 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Por fim temos que quando $a > 0 \Rightarrow y \geq \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$ e se $a < 0 \Rightarrow y \leq \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Uma vez terminada a demonstração deste teorema, destacamos que o professor fictício prefere enunciar os resultados de acordo com o seu *status matemático* devido. Notamos que ele enunciou primeiramente um Lema e na sequencia um Teorema. Percebemos claramente que ele emprega o Lema quando escreve $y = ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Mas vamos voltar nossa atenção ao principal alvo de nossa ação didática, ou seja, o estudante. Se toda a classe entendeu e aceitou como verdadeiros ambos os resultados, na perspectiva de Balacheff (1988), ainda não podemos chamar de demonstração, apenas de *prova*, uma vez que a validade dos resultados ainda possui um *caráter particular*.

Mas se o professor em questão é aquele que dá suas aulas de modo semelhante, repetindo todas as vírgulas e, em sua percepção, o que importa é a elegância da apresentação e concisão dos resultados, então podemos chamar isto de uma *demonstração*. Balacheff (2009, p. 131) adverte que:

> A aprendizagem em Matemática inicia-se com os primeiros anos de escola, ao menos do ponto de vista institucional. Como já é bem documentado, os aprendizes neste nível elementar dependem largamente de sua experiência com o professor e com referência na distinção de suas opiniões, suas crenças e seu conhecimento atual. O critério para o acesso desta diferença permanece tanto na eficiência tangível do conhecimento validado de modo ad hoc pelo professor

Deste modo, se assumimos os resultados como verdadeiros, independentemente do convencimento que precisamos obter dos alunos e a promoção de um debate social dentro da sala de aula, podemos chamar os dois últimos resultados de *demonstração*. Percebe-se que, segundo a tradição do discurso matemático, iniciamos a redação escrevendo "Demonstração:". Se o professor assume esta cômoda posição e não se esforça para convencer os seus estudantes, a função do aluno fica relegada ao 2º plano, afinal, tudo o que foi dito na 1ª aula pode ser repetido até a última aula, e o ensino passa a ser determinado por este automatismo.

Adaptamos ao nosso estudo em *Didática da Matemática* as noções de Balacheff (2009). Na Figura 4 a seguir, vemos as relações entre explicação, prova e argumentação. Numa perspectiva didática, equivale ao professor de Matemática iniciar sua aula com uma explicação de um fato ou propriedade matemática. Em seguida, começa a identificar e separar as conjecturas com mais chances de êxito, sem esquecer e descartar de modo precipitado as conjecturas que tendem ao erro ou ao fracasso da estratégia.

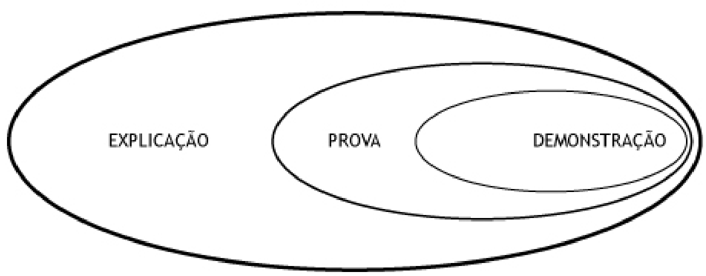


Figura 4: Ilustração comentada por Balacheff (2009, p. 130)

Realizamos, assim, a prova de uma conjectura apontada pelo grupo de alunos com mais chances de sucesso, entretanto sugerimos que o professor não se precipite, deixe que os alunos descubram o caminho que é bem diferente de ele mesmo apontar o caminho.

Retomando a questão da representação particular de propriedades matemáticas, Balacheff fornece a seguinte explicação ao comparar o modelo matemático formal com as representações particulares geradas pelo computador:

> Este caso referenda a ideia de relações complexas entre representação e objetos matemáticos – ou mais precisamente, o papel das representações como mediadores para a conceitualização dos objetos matemáticos. Isto convida a uma maior atenção em considerar a evidência numa representação não verbal. Não dizendo que representações não verbais ou expressões de um argumento não tenham valor; antes, porém, eu enfatizo que uma frequente reclamação em educação é que "Uma figura é melhor do que sem palavras" possui limites e não pode ser aceita sem um exame posterior (2009, p. 121).

Balacheff coloca em discussão a questão relacionada à aceitação de determinados raciocínios baseados em figuras ou diagramas. E na condição em que o professor junto com os estudantes não realize uma inspeção posterior das ideias principais e sua dependência ou não de uma figura particular, todo o esforço pode estar perdido. Por outro lado, o professor experiente pode, em alguns casos, baseando o seu discurso num diagrama, ludibriar os estudantes e conduzi-los ao erro, mas um erro controlado e previsto.

Gouvêa (1998) apresenta o seguinte quadro esquemático que resume as noções formuladas por Nicolas Balacheff.

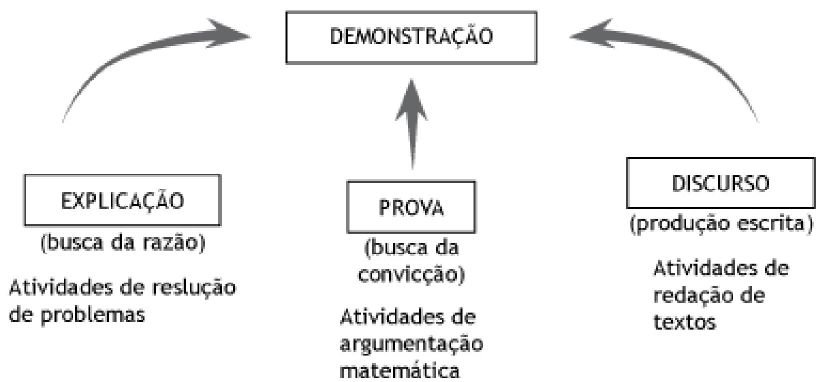


Figura 5: Esquema sugerido por Gouvêa (1998, p. 97)

Para concluir, vejamos outro exemplo de *demonstração*. O resultado é chamado por Lima (2001(b), p. 95) de *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* e é enunciado como segue.

Teorema: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes propriedades são equivalentes:

(i) $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e $x\in\mathbb{R}$

(ii) Pondo $a=f(1)$ tem-se que $f(x)=a\cdot x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

(iii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$.

Lima (2001) desenvolve um modelo típico de demonstração que, em geral, não é empregado no ensino escolar, entretanto, para o professor de Matemática, tal modelo deve ser conhecido e compreendido.

Demonstração: Provaremos as implicações $(i)\to(ii)\to(iii)\to(i)$. Inicialmente, vamos verificar que $(i)\to(ii)$. Assim, nossa hipótese será que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função crescente e vale $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e $x\in\mathbb{R}$. Vamos generalizar a propriedade para números racionais, ou seja, $f(r\cdot x)=r\cdot f(x)$ para todo $r\in\mathbb{Q}$.

De fato, dado um racional da forma $r=\dfrac{m}{n}$ onde $m,n\in\mathbb{Z}$ temos ~~que~~: $n\cdot f(r\cdot x)\overset{Hipotese}{=}f(nr\cdot x)=f((nr)\cdot x)=f(m\cdot x)\overset{Hipotese}{=}m\cdot f(x)$. Logo obtemos que $n\cdot f(r\cdot x)=m\cdot f(x)\leftrightarrow f(r\cdot x)=\dfrac{m}{n}\cdot f(x)=r\cdot f(x)\therefore f(r\cdot x)=r\cdot f(x)$ (*) para todo $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$. Note-se que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e podemos avaliar $1\in\mathbb{R}\therefore f(1)=a\in CDom(f(x))=\mathbb{R}$, considerando que $f(0)=f(0\cdot 0)\overset{Hipotese}{=}0\cdot f(0)\therefore f(0)=0$ e a função é monótona (crescente) e diante de $0<1\to 0=f(0)<f(1)\therefore a=f(1)>0$. Além disso, temos $f(r)=f(r\cdot 1)\overset{(*)}{=}r\cdot f(1)=r\cdot a\therefore f(r)=a\cdot r$ para todo $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$. Desejamos agora verificar que $f(x)=ax$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Neste momento Lima (2001(b), p. 95) emprega o método de raciocínio por absurdo. Ele supõe que exista algum número real (que deve ser irracional tendo em vista que já temos a igualdade para o caso de números racionais) tal que $f(x)\neq ax$, onde $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Vejamos que podemos ter as possibilidades: (i) $f(x)<ax$ (ii) $f(x)>ax$, mas assumindo que $f(x)<ax\leftrightarrow\dfrac{f(x)}{a}<x$. Agora, vamos empregar um argumento que deve ser conhecido pelo professor de Matemática, pelo menos em um ponto de vista intuitivo. O argumento é chamado de *densidade*, e, de modo intuitivo, podemos dizer que, dado um intervalo $[a,b]$, podemos encontrar no seu interior tanto um número racional quanto um número irracional.

Considerando o intervalo $[\frac{f(x)}{a}, x]$, por densidade, encontramos um número racional $r \in [\frac{f(x)}{a}, x] \cap \mathbb{Q}$ tal que:

$\frac{f(x)}{a} < r < x \leftrightarrow f(x) < a \cdot r < a \cdot x$, pois $a = f(1) > 0$, e a desigualdade preserva o sentido. Assim, escrevemos $f(x) < f(r) < a \cdot x$. Mas reparamos que isto é uma contradição, tendo em vista que, por hipótese, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$, entretanto vimos que $\frac{f(x)}{a} < r < x \leftrightarrow f(x) < f(r) < a \cdot x$, portanto temos uma contradição obtida a partir do fato de termos feito a suposição relativa à qual existisse um número tal que $f(x) \neq ax$, onde $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Conclusão, a igualdade $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ vale sempre, o que demonstra a tese descrita em (ii).

Na sequência, Lima (2001(b), p. 96) destaca que as implicações $(ii) \to (iii)$ e (iii) $\to (i)$ são óbvias. Você concorda? Para nos prevenir de alguma incompreensão, vamos demonstrar a primeira implicação. Neste caso, por hipótese, pondo $a = f(1)$ temos $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, dados $x, y \in \mathbb{R}$, teremos $f(x+y) \overset{Hipótese}{=} a \cdot (x+y) \overset{Distributividade}{=} a \cdot x + a \cdot y = f(x) + f(y)$, e em seguida $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Por fim, para concluir que $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, a partir de (iii) notamos que $f(x+x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$; $f(x+2x) = f(x) + f(2x) = 3 \cdot f(x)$ e, por indução matemática, assumimos que $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ e escrevemos:

$$f((n+1)x) = f(x + n \cdot x) \overset{(iii)}{=} f(x) + f(n \cdot x) \overset{Hipotese\ de\ Indução}{=} f(x) + n \cdot f(x) = (n+1)f(x)$$

Concluímos, assim, que $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para $n \in \mathbb{N}$. Mas temos:

$0 = f(0) = f(n + (-n)) \overset{Hipótese}{=} f(n) + f(-n) \leftrightarrow f(-n) = -f(n)$, quando $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, para :

$$f(-1 \cdot x) = f(x - 2x) = f(x + (-2x)) \overset{Hipotese}{=} f(x) + f(-2x) \therefore f(-2x) = f(-x) - f(x)$$

, que equivale a $f(-2x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$.

Usamos $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(-x) + f(x) \to f(-x) = -f(x)$. A partir destes casos, obteremos $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, o que evidencia a implicação (iii) $\to (i)$ não tão óbvia como comentado pelo autor. Para finalizar esta seção, advertimos: embora teoremas como este não possam ser diretamente ensinados na escola, o professor de Matemática tem a *obrigação moral* de conhecer e dominar este resultado, bem como outros teoremas e resultados formais que garantem a validade dos modelos matemáticos empregados. De modo estranho e pitoresco, encontramos em cursos de licenciatura alunos que sabem calcular um *limite* ou uma derivada, mas desconhecem resultados tais como o que acabamos de demonstrar.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Existem definições formais que são mais acessíveis à intuição do que outras? No momento inicial de uma transposição didática, é mais adequado trabalharmos o raciocínio lógico ou o intuitivo?

2) Indique, no trecho abaixo devido a Kline (1971), as dificuldades de se explorar a dimensão intuitiva dos números irracionais.

> É também relevante que números irracionais tais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e outros que tais não eram aceitos como números durante o período mais alto da cultura grega. Por que não? Porque os números inteiros e frações tinham um sentido obviamente físico enquanto os números irracionais não o tinham. O único sentido intuitivo que se podia ligar aos irracionais era o de que representavam certas dimensões geométricas, como a da diagonal de um quadrado cujos lados valem 1. Que fizeram então os gregos? Rejeitaram os irracionais como números e os consideraram como medidas. De fato, converteram tudo da álgebra em geometria a fim de trabalhar com dimensões, áreas e volumes que diferentemente teriam que ser representados numericamente por números irracionais e resolveram até mesmo as equações quadráticas geometricamente.

Trecho do livro de Kline (1971, p. 54)

3) É possível elaborar uma transposição didática que coloca ênfase nas propriedades intuitivas de um objeto matemático sem que o professor conheça de modo aprofundado suas propriedades lógicas formais?

4) A Historia da Matemática registra que na atividade dos matemáticos a intuição exerceu papel indiscutível. Analisar o trecho abaixo devido à Kline (1971). Por outro lado, você sabe o que significar "intuir" algo? Qual

a natureza da intuição matemática? É possível realizar uma transposição didática satisfatória se não sabemos sequer o que significa intuir?

> Em vista dos fundamentos vagos, imprecisos e até inexatos do cálculo poder-se-ia esperar que a matéria se extinguisse. Mas antes que a estrutura dedutiva adequada fosse criada, o cálculo não só se tinha estendido e aplicado com êxito como também as vastas matérias de equações diferenciais ordinárias e parciais, o cálculo de variações, a geometria diferencial e a teoria de funções de uma variável complexa haviam sido erigidos sobre o cálculo. Como os matemáticos conseguiram essas tremendas criações? Evidentemente pensaram intuitivamente. Argumentos físicos, quadros, generalizações baseadas em simples casos conhecidos e experiência com a matemática, tudo isso os auxiliou a tirar as conclusões exatas.

Kline (1971, p. 57) indica a importância da intuição para os matemáticos.

5) O que significa o termo "abstração", ou a expressão "abstração matemática"? As teorias matemáticas são mais "abstratas" do que as teorias pedagógicas?

6) Fornecer exemplos que colocam em evidência o caráter falível, impreciso e local do saber matemático. Isto pode ser utilizado de modo frutífero em uma transposição didática?

AULA 4

Didática da Matemática e a noção de situação Didática e a-Didática

Caro(a) aluno(a),

Nesta aula, iremos descrever as características das situações didáticas e a-didáticas, assim como o emprego da noção de resolução de problemas no âmbito da teoria das situações didáticas de Brousseau. Em seguida, apresentaremos o pensamento algorítmico.

Objetivo

- Compreender as situações didáticas que envolvem o ensino de matemática

TÓPICO 1

Situações Didáticas e a-Didáticas

Objetivo

- Descrever as características de situações didáticas e a-didáticas

Sugere a Didática da Matemática iniciarmos uma lição propondo à classe uma discussão que envolva um bom problema de Matemática. A questão é discernir quando temos um problema interessante? Interessante para quem, apenas para o professor ou para os estudantes? Como formular uma situação-problema e dela extrair o maior número de ensinamentos e ainda promover a maior diversidade de experiências possíveis?

A aprendizagem em Matemática sempre foi objeto de investigação para inúmeros estudiosos, como, por exemplo, Jean Piaget, que identificou e categorizou determinados raciocínios peculiares da Matemática.

Por outro lado, encontramos ainda visões estreitas que admitem a necessidade apenas de um bom professor com domínio de conteúdo para que tudo transcorra às mil maravilhas. Brousseau (1996 , p. 63) adverte que:

> O esquema socrático pode ser aperfeiçoado se supusermos que o estudante é capaz de extrair o saber por meio de suas próprias experiências, de suas próprias interações com o meio, mesmo que este meio não esteja organizado com fins de aprendizagem. [...] O aluno aprende se adaptando ao meio que é um fator de contradição, de dificuldades, de desequilíbrios, em parte como a sociedade humana. Este saber flui por adaptação do aluno, se manifesta por meio de respostas novas que são a prova da aprendizagem.

Destacamos esse significativo trecho de Brousseau, com profundas raízes piagetianas, principalmente porque sublinha que o aluno aprende se adaptando ao meio. Quando nos referimos ao meio, consideramos implicitamente a tríade já comentada aluno-professor-saber matemático. A diferença é que temos que considerar onde se dão estas trocas, relações assimétricas e simétricas de poder.

Mas vamos observar a perspectiva que o pai da Didática da Matemática relaciona à concepção moderna de ensino quando menciona que:

> A concepção moderna de ensino vai então demandar ao professor provocar nos alunos as adaptações desejáveis, por meio da escolha judiciosa, de problemas que ele propõe. Estes problemas, escolhidos de modo que o aluno possa aceitar devem fazê-lo reagir, falar, refletir, evoluir de seu próprio movimento. [...] O aluno sabe que o problema escolhido pelo professor visa a aquisição de um conhecimento novo, mas ele deve saber também que este conhecimento é inteiramente justificado por uma lógica interna da situação. (BROUSSEAU, 1996, p. 64).

Como já mencionamos, a dificuldade reside na escolha de bons problemas que resultem no desequilíbrio e posterior equilíbrio dos aprendentes. Percebe-se que nem sempre o aluno aceita a responsabilidade por uma situação de aprendizagem. Em geral, os alunos pensam na situação apenas na frente do professor, em sala de aula, e permanecem na expectativa de o mestre oferecer-lhes a fórmula que resulta no gabarito e aniquila o interesse naquela situação em poucos minutos.

Neste sentido nos valemos da distinção apontada por D´Amore (2007 , p. 81) quando explica:

> Dizemos que uma situação didática, sobre certo tema relativo ao saber, possui dois componentes: (i) uma situação a-didática (ii) um contrato didático. Trata-se de um modelo teórico: se em um ambiente organizado para a aprendizagem de determinado assunto falta a intenção didática explícita do professor, tem-se uma situação a-didática. [..] A situação a-didática final de referência, a que caracteriza o saber, pode ser estudada de maneira teórica, mas na situação didática, tanto para o professor como para o estudante, existe uma espécie de ideal cuja direção busca-se convergir. O professor deve, sem descanso, ajudar o aluno a eliminar, o mais possível, todos os seus artifícios didáticos, para permitir-lhe o conhecimento pessoal e objetivo.

Assim, os didatas da Matemática diferenciam situações organizadas com a intenção didática e outras situações que, mesmo sem a intenção objetiva e a presença do professor, a aprendizagem se processa. D´Amore destaca um aspecto importante, ainda que não seja fácil para o aprendiz que se vê diante de uma nova teoria: diferenciar e separar os artifícios didáticos da real situação que o aluno pressupõe que o mestre deseja que adquira.

Brousseau (1996, p. 65) acrescenta que:

> O contrato didático é regido pelo jogo e pela estratégia da situação didática. É o meio que o mestre possui de se colocar em cena. Mas a modificação da situação modifica o contrato didático que permitem então a obtenção de nova situação. De modo semelhante, os conhecimentos são expressos por regras da situação a-didática e por estratégias. A evolução destas estratégias requer a produção de conhecimentos que permitem ao seu modo a concepção de novas situações a-didáticas.

Percebemos os dois elementos principais apontados por Bruno D´Amore que constituem uma situação didática, a saber: uma situação a-didática e o contrato didático. Tais relações poderão ser mais ou menos eficientemente estabelecidas na dependência da ação didática do professor, uma vez que o significado do saber matemático escolar para o aluno é fortemente influenciado pela forma didática com que o conteúdo lhe é apresentado (FREITAS, 2002 , p. 66). Assim, se o mestre estimula em sala de aula um saber matemático sem instigar a necessidade individual de autonomia e gerenciamento da própria aprendizagem, as situações a-didáticas permanecem comprometidas.

É como se aquela situação-problema tivesse importância apenas na presença do professor. Por outro lado, diante de uma situação didática que exige a presença do professor de Matemática, notamos que a mesma é regida por um determinado tipo de contrato didático, ou seja, um conjunto de obrigações implícitas ou explícitas relativas a um saber entreposto professor e os alunos (FREITAS, 2002, p. 67).

Mais adiante acrescenta:

> Segundo essa concepção o professor deve atuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema. A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além, de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer (FREITAS, 2002, p. 68).

A noção de situação a-didática assume um importante papel na teoria desenvolvida por Brousseau, uma vez que esse tipo de situação é caracterizado pela oportunidade de sucesso do estudante, por meio de seus próprios méritos, que consegue sintetizar um conhecimento e empregá-lo de modo relativamente diferenciado da maneira pela qual foi ensinado. É bem conhecido aquele professor de Matemática que aceita somente determinada resposta que envolve a regra de Matemática ensinada dentro da sala de aula. Se um aluno manifesta outro modo de solução de uma situação-problema, o professor declara que a questão está errada. Nem mesmo compreende, em alguns casos, aquele raciocínio totalmente atípico. De fato, a estratégia fornecida pelo estudante envolve a lógica do aluno que se diferencia da lógica do professor.

Nesse caso, o professor cerceia e impede a evolução de situações de aprendizagem em que os estudantes não conseguem contar efetivamente com a presença do mestre. Para melhor compreender as correlações existentes entre situações didáticas, situações a-didáticas e a resolução de problemas, vamos nos debruçar sobre alguns problemas concretos.

Um exemplo é o que encontramos numa publicação do Institut Universitaire de Recherche et l´Enseignement des Mathematiques – IREM de Strasbourg (1973). Veja abaixo na Figura 1:

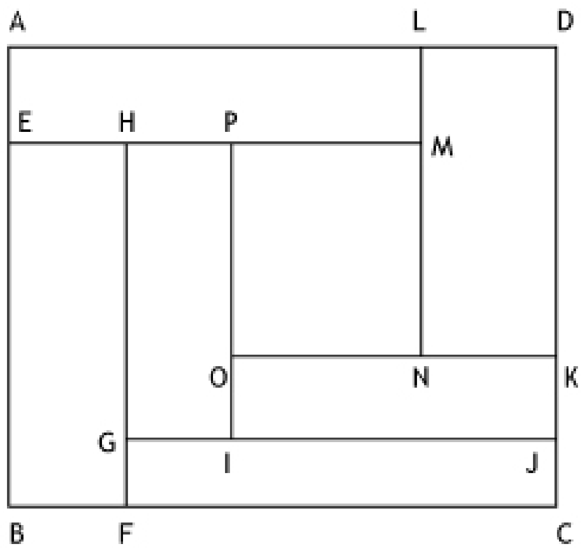


Figura 1: Situação problema proposto num manual de formação do IREM

A tarefa se distingue por relacionar de modo íntimo Geometria com Álgebra. Inicialmente o professor pode chamar o segmento $\overline{EB} = x$ sabendo por hipótese que $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Considerando que, segundo o enunciado, há sete retângulos que dividem a figura, o professor adverte que, apesar da figura poder não ser perfeita, teremos dentro do quadrado de lado $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ sete retângulos de mesma área. Assim, o professor escreve $1^2 = 1 = 7 \cdot \overline{BF} \cdot \overline{EB} = 7 \cdot \overline{BF} \cdot x \therefore \overline{BF} = \dfrac{1}{7x}$. Dessa forma, temos $\overline{BF} = \dfrac{1}{7x}$.

Na sequência o professor questiona como escrever o segmento $\overline{FC}$ em função de $\overline{EB} = x$. Um aluno se apresenta e argumenta que basta considerar que $\overline{BF}+\overline{FC}=1 \therefore \overline{FC}=1-\overline{BF}=1-\frac{1}{7x}=\frac{7x-1}{7x}$. Assim, com a sugestão do estudante, o mestre estabelece que $\overline{FC}=\frac{7x-1}{7x}$. E, de modo semelhante, podemos escrever $1^2=1=7\cdot\overline{FG}\cdot\overline{FC}$? Sim, pois temos outro retângulo que foi construído no quadrado ABCD. Dessa forma, o professor escreve $\overline{FG}=\frac{1}{7\cdot\overline{FC}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\frac{7x-1}{7x}}=\frac{x}{7x-1}$. Mais uma vez o professor pergunta se é possível obter o segmento $\overline{GH}=x$. Contando com a participação de outro aluno e contando com a aquiescência da turma, escreve: $x=\overline{GH}+\overline{FG} \therefore \overline{GH}=x-\overline{FG}=x-\frac{x}{7x-1}=\frac{x(7x-2)}{7x-1}$.

Portanto $\overline{GH}=\frac{x(7x-2)}{7x-1}$. Passados alguns instantes, os alunos, por contra própria, começam a deduzir de modo semelhante que $1^2=1=7\cdot\overline{GI}\cdot\overline{GH} \therefore \overline{GI}=\frac{1}{7\overline{GH}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\frac{x(7x-2)}{7x-1}}=\frac{7x-1}{7x(7x-2)}$.

Notamos que todas as relações algébricas são extraídas a partir da disposição geométrica da figura que foi antecipadamente observada e que apresentava imperfeições. No entanto a noção da área do quadrado é sempre empregada para a obtenção de cada relação. Mais uma vez, obtemos $1^2=1=7\cdot\overline{JK}\cdot\overline{JI}$ e $\overline{JI}+\overline{IG}=\overline{FC}$. Dessa forma, efetuando as devidas operações, chegamos a

$\overline{JI}=\overline{FC}-\overline{IG}=\frac{7x-1}{7x}-\frac{7x-1}{7x(7x-2)}=\frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)}$. Assim teremos que $1=7\cdot\overline{JK}\cdot\overline{JI} \therefore \overline{JK}=\frac{1}{7\overline{JI}}=\frac{1}{7\cdot\frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)}}=\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}$. Notamos que as relações continuam se complexificando a cada passo. É essencial o professor gerenciar a motivação da sua classe. Possivelmente algum aluno não esteja compreendendo aonde o mestre deseja chegar e é delicado lidar com este sentimento do aluno, tendo em vista que, para o professor, deve estar claro o seu objetivo de aprendizagem, todavia, para o aluno, tudo se reduz a uma simples desconfiança.

Entretanto, na condição em que consiga administrar bem a atenção da turma, o professor obterá que $1=\overline{KD}+\overline{KJ}+\overline{JC}\therefore\overline{KD}=1-\overline{KJ}-\overline{JC}=1-\dfrac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}-\overline{GF}$. Segue que

$$\overline{KD}=1-\overline{KJ}-\overline{JC}=1-\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}-\overline{GF}=1-\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}-\frac{x}{7x-1}.$$

No final da aula, o professor recomenda aos estudantes descrever os segmentos restantes $\overline{AE};\overline{AL};\overline{LD};\ \overline{KD}$, e assim por diante. O interessante é o professor saber que valores numéricos existem por trás desta situação. Na ocorrência de algum avanço das aprendizagens na sua ausência, possivelmente os alunos devem encontrar um valor determinado para o segmento $\overline{KD}$, pois note-se que $\overline{KD}=\dfrac{1-x}{6-7x}$. Portanto, devem obter que $x=\dfrac{1}{14}(7+\sqrt{19})$.

Assim, de acordo com o envolvimento da turma, devem ocorrer situações a-didáticas na busca destes valores. Neste momento, no ensino-aprendizagem deve haver condições para que o aluno realize ele mesmo suas aproximações, mobilize seus conhecimentos e seja capaz de explicitar seus procedimentos e raciocínios utilizados (FREITAS, 2002, p. 73).

Se, no decorrer do *contrato didático*, o professor trabalhou com situações-problema relativamente simples, com respostas suficientes para que a investigação possa se extinguir dentro da sala de aula, sentirá rejeições dos estudantes diante da tarefa investigativa que apresentamos.

Neste caso, de acordo com a evolução de situações *a-didáticas*, no momento de *devolução*, que se caracteriza como *um ato de ensino que produz a aceitação do estudante a responsabilidade de uma situação de aprendizagem* (BROUSSEAU, 1996), o professor cria uma expectativa de retorno das atividades propostas.

Transcrevemos, a título de ilustração, uma situação típica em sala de aula que caracteriza impossibilidade de situações *a-didáticas*. O trecho é destacado por Domingues (1995 , p. 15). O autor descreve o seguinte:

> Certa ocasião, no início de um ano letivo, ouvi casualmente uma conversa entre duas jovens estudantes. A mais velha havia passado para a 6 ª série e a mais nova para a 5ª série. Falavam sobre suas impressões a respeito das colegas, das aulas, das matérias e dos professores. A aluna da 6ª série ficara surpresa com as aulas de Geometria: "Imagine", dizia ela, "que a professora chega, desenha dois triângulos iguais no quadro e depois passa o resto da aula procurando provar que eles são de fato iguais. Não entendo. Por que é preciso isso?". "E nas provas, como você vais

se arranjar?", perguntou-lhe a mais nova. "Estudarei pelo livro...mas é tão difícil lembrar onde se devem pôr as letras...." Neste mesmo dia, à tarde, ouvi como essa jovem, sentada junto a uma janela, estudava geometria: "Para fazer a demonstração devemos superpor o triângulo ΔABC ao triângulo $\Delta A'B'C'$, repetia várias vezes. Sinto não ter ficado sabendo os resultados obtidos pela jovem em Geometria, mas certamente ele deve ter achado essa matéria difícil.

Aparentemente a situação pitoresca e anedótica descrita por Domingues não é rara. Casos semelhantes ocorrem em todos os níveis, com destaque para a Geometria Plana, e continuam no ambiente acadêmico. Um aspecto delicado aqui é que o professor não pode esperar que o aluno declare com naturalidade que não sabe ou enfrenta muita insegurança diante das tarefas, talvez por medo ou devido ao constrangimento social do grupo ao qual pertence.

A partir do interessante diálogo entre as estudantes, vemos que muita coisa é simplesmente aceita pelo estudante, sem nenhuma atitude crítica. Neste sentido, D´Amore (2007, p. 105) acrescenta:

Diante dos enunciados de problemas, os alunos se [...] acostumaram a não colocar em discussão a legitimidade e a pertinência das perguntas do professor, e isso lhes

Questão 33

A professora Clara propôs a seus alunos que encontrassem a solução da seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$$

Pedro e João resolveram o exercício da seguinte maneira.

Resolução de Pedro:
$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$
$x^2 - 1 = 2x^2 + x - 3$
$2 - x = x^2$
Como 1 é a solução dessa equação, então S = {1}

Resolução de João:
$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$
$(x - 1)(x + 1) = (2x + 3)(x - 1)$
$x + 1 = 2x + 3$
$x = -2$
Portanto, S = {-2}

Pedro e João perguntaram à professora por que encontraram soluções diferentes. A professora observou que os outros alunos haviam apresentado soluções parecidas com as deles.

Entre as estratégias apresentadas nas opções a seguir, escolha a mais adequada a ser adotada por Clara visando a aprendizagem significativa por tarde dos alunos.

Figura 2: Exemplo de situação didática explorada pelo Enade/2008

A Indicar individualmente, para cada aluno que apresentou uma resolução incorreta, onde está o erro e como corrig-lo, a partir da estratégia inicial escolhida pelo aluno.

B Resolver individualmente o exercício para cada aluno, usando a fórmula da resolução da equação do 2º grau, mostrando que esse é o método que fornece a resposta correta.

C Pedir a Pedro e João que apresentem à classe suas soluções para discussão e estimular os alunos a tentarem compreender onde está a falha nas soluções apresentadas e como devem fazer para corrigi-las.

D Escrever a solução do exercício no quadro, usando a fórmula da resolução da equação do 2º grau, para que os alunos percebam que esse é o método que fornece a resposta correta.

E Pedir para que cada um deles comunique à classe como resolveu o exercício e, em seguida, explicar no quadro para a turma onde está a falha na resolução de cada um e como eles devem fazer para corrigi-la.

Figura 3: Possibilidades de resposta da questão.

A partir dessa questão proposta pelo Enade, sentimos que é impossível discutir as noções de situações didáticas de modo isolado, sem considerar a noção de situações de resolução de problemas de Matemática, entretanto nos deteremos em uma análise didático-metológica, tendo em vista que, em outra disciplina, voltaremos a abordar a noção de resolução de problemas e então evidenciaremos os esquemas cognitivos mobilizados ante cada tipo de tarefa.

TÓPICO 2

Situações didáticas a noção de resolução de problemas

Objetivo

- Descrever o emprego da noção de resolução de problemas no âmbito da teoria das situações didáticas de Brousseau

Como elaborar *situações-problema* que estimulem a habilidade do aluno de *generalizar conteúdos matemáticos*? Como instigar o exercício da *flexibilidade do processo mental* ante uma situação-problema? Como instrumentalizar o aluno com uma percepção adequada para perceber a possibilidade da *redução de passos de raciocínio*? Como estimular sempre o aprendiz para encontrar *o modo mais fácil, claro e econômico* para resolver problemas?

A trivialidade da resposta dessas questões é completamente descartada por psicólogos que trabalham analisando os fenômenos cognitivos que se manifestam diante da resolução de um problema matemático. Como nossa cultura valoriza o *ensino* em detrimento da *aprendizagem*, de modo geral, nós, professores, desconhecemos muitos destes fatores cognitivos que interferem de modo decisivo.

VOCÊ SABIA?

Os autores Sternberg & Been-Zeev (1996, p. 31) explicam que existem três elementos para a descrição de um problema: a condição dada, o objetivo da condição, e operações exequíveis. Solução de problemas ocorre quando um solucionador encara um dado problema. Um problema vai ser caracterizado como problema matemático quando algum procedimento eminentemente matemático é exigido. Por fim, resolução de problemas de matemática ocorre quando um solucionador de problemas matemáticos reconhece uma situação encarada como desafio busca resolver.

O desafio urge que equalizemos possíveis saídas e possibilidades vantajosas para os estudantes, no que diz respeito à aprendizagem. Como já discutimos no tópico anterior, do professor de Matemática é exigida a concepção de situações, com ou sem a sua presença, que possibilitem, por exemplo, a evolução de habilidades cognitivas tais como as que mencionamos no início desta secção.

É de suma importância a noção de situações *a-didáticas* uma vez que:

Uma situação assim é definida como a-didática quando estão em jogo os estudantes e o objeto do conhecimento, mas não o professor (nessa ocasião particular). A situação sugere exigências e os alunos respondem a elas. Não existem obrigações didáticas e, portanto, aquilo que se faz não está ligado a estímulos por parte do professor. O estudante faz tentativas (sozinho ou em grupo), verifica que elas não funcionam ou são ineficazes; que a prova deve ser refeita várias vezes.[...] A demanda de efetuar aquela atividade matemática não foi proposta pelo professor, não seria necessária do ponto de vista escolar. Ao contrário é uma necessidade motivada pela atividade (D´AMORE, 2007, p. 234).

Mas como conceber situações-problema interessantes que despertem o interesse do estudante tanto em sala de aula com o grupo quanto em casa de modo individual? Que estratégia desenvolver para que o professor possa prever o direcionamento das aprendizagens ocorridas ao longo das interações por ele previstas, sob o seu controle, e as interações que ocorrem naturalmente com o grupo de estudantes que se relacionam com determinado conteúdo?

Cabe ao professor a formulação destas estratégias que, aos olhos dos estudantes, não se assemelhem a simples tarefas solitárias gabaritadas, e sim, a um jogo (espécie de aplicação) que requer o seu envolvimento e o envolvimento do grupo diante do desafio que se estabelece.

Muitos defensores se apresentam quando falamos de aplicação de jogos em sala de aula. Quando falamos então da dimensão lúdica da Matemática, ficam embriagados pelo termo "lúdico", quase em transe hipnótico. De fato, alguns desses incipientes do saber matemático possuem a crença ingênua de que a dimensão lúdica e o prazer eventual de situações que envolvem a referida dimensão é a salvação das almas aflitas no estudo da Matemática.

SAIBA MAIS!

Os jogos matemáticos não são as únicas formas lúdicas de trabalhar um conteúdo ou de evoluir o currículo, mas é uma das mais bem aceitas pelos alunos. A escolha de um jogo não deve ser aleatória, é necessário selecionar um conteúdo, relacionar conceitos, pensar em matérias, estudar contextos, observar os alunos e refletir sobre a eficácia do que é proposto. Com certeza, aplicar um jogo matemático que tenha relação direta com um conteúdo é muito trabalhoso, mas a resposta dos alunos é mais satisfatória do que a tradicional aula quadro e giz.

No entanto, questionamos se, no final do jogo, ocorre, por parte do professor, um balanço final da evolução das aprendizagens? Que habilidades foram impulsionadas, como, por exemplo, as que mencionamos no início desta seção?

Encontramos também outros dados interessantes que podem instigar nossa discussão sobre o uso do jogo na aula e de modo não planejado. Nesse sentido, Wiellewski (2005 , p. 72) menciona que o russo Vadim Andreevich Krutetskii (1917-1989) identificou em seus estudos três categorias básicas de constituição matemática da mente, que foram descritas da seguinte maneira:

VOCÊ SABIA?

Atividade lúdica é todo e qualquer movimento que tem como objetivo produzir prazer quando de sua execução, ou seja, divertir o praticante. A atividade lúdica também é conhecida como brincadeira.

- **Estilo analítico**: o pensamento é caracterizado pela predominância de um bem desenvolvido componente verbal-lógico em contraposição com um fraco desenvolvimento do componente visual-pictórico;

- **Estilo geométrico**: o pensamento é caracterizado pela predominância de um bem desenvolvido componente visual-pictórico em contraposição com um bem desenvolvido verbal-lógico;

- **Estilo harmônico**: é caracterizado por um equilíbrio relativo dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico, ambos bem desenvolvidos.

Reflita: Diante de uma situação prática, que jogo o professor poderia propor no sentido de instigar de modo prioritário nos estudantes o estilo geométrico? Ou o estilo analítico?

Como você pode perceber, avaliar e identificar com que tipo de estudante o professor conta em sala de aula é uma tarefa difícil.

No âmbito da solução de problemas, Wiellewski (2005, p.85) relata que foi fornecida aos estudantes a seguinte expressão: $(C+D+E)\cdot(E+C+D)$. Alguns identificaram o seguinte padrão $(C+D+E)\cdot(E+C+D)=(C+D+E)\cdot(C+D+E)=(C+D+E)^2$, que se relacionava com a fórmula do quadrado de um binômio. Outro estudante compôs um algoritmo para resolver todos os problemas dessa categoria.

Em outra situação, foi dado o seguinte problema: *Prove que o quadrado da primeira fração mais a segunda é igual ao quadrado da segunda fração mais a primeira*. Um dos estudantes que participaram do estudo argumentou que as frações podem ser descritas por $\frac{x}{y}$ e $1-\frac{x}{y}$ de modo que sua soma é $\frac{x}{y}+1-\frac{x}{y}=1$ como requer o problema. Além disso, ele escreveu $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(1-\frac{x}{y}\right)=\left(1-\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}$ (*). Com isto, você acha que ele resolveu o problema? A identidade em (*) é verdadeira sempre?

É comum no dia-a-dia dos estudantes, encontrarmos respostas numéricas. Por exemplo, nesse último problema, nenhum número é mencionado e a solução anterior é a mais geral possível, mas pode acontecer de alunos preferirem verificar o que se pede para casos particulares que não propiciam a generalização do modelo envolvido.

Em outra parte do estudo, Wiellewski (2005, p. 114) destaca os problemas de natureza geométrica explorados por Krutetskii. Segundo a autora, foi apresentada a seguinte situação: *Cada lado de um quadrado foi aumentado em 3cm e, consequentemente, sua área foi aumentada em 39* cm^2 *. Encontre o lado do quadrado resultante*. Krutetskii evidenciou que os estudantes da 6ª série resolvem em poucos segundos por meio de $(x+3)^2-x^2=39$ (Figura 4-I). Ele salientou ainda que quase todos os estudantes pesquisados que pertencem ao estilo geométrico o resolveram de uma maneira mais complicada. Primeiro fizeram o desenho.

Outro problema apresentado ao grupo foi o seguinte: *Agora, eu sou duas vezes tão velho quanto meu irmão era quando eu era tão velho quanto ele é agora. Nós dois juntos somamos 63. Quantos anos cada um de nós tem?* Esse problema geralmente é resolvido por sistemas de equações, no entanto um estudante apresentou uma resolução geométrica descrita na Figura 4.

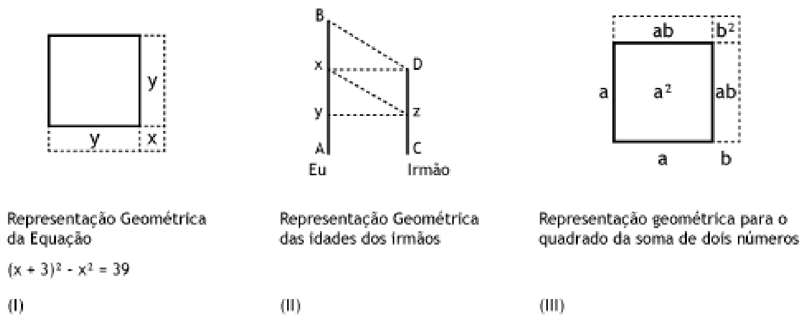


Figura 4: Situações-problema desenvolvidas pelos estudantes

Em seguida, argumentou: Bx é a diferença entre nossa idade. Quando eu tinha Ax, ele tinha Cz; ou seja, $Cz = \frac{AB}{2}$ (pela condição) e $Ay = \frac{AB}{2}$. Mas como $Bx = Dz$, isto significa que $By = 2 \cdot Bx$; $AB = 4 \cdot B$ e $CD = 3 \times B$. Assim, concluímos que podemos ter 36 e 27 anos.

Krutetskii, conforme Wiellewski (2005, p. 116), destacou a atividade de uma aluna da 6ª série que interpretou geometricamente o quadrado da soma de dois números (Figura 4-III). Depois que conseguiu interpretar a fórmula, a criança declarou que só naquele momento realmente entendia aquela propriedade. *Após esse momento, a mesma estudante interpretou todas as outras fórmulas geometricamente*.

Mais adiante a autora destaca:

> Krutetskii constatou que o estudante de estilo geométrico sentia uma necessidade de interpretar um problema em um plano geral, contudo esse plano geral continuava sendo apoiado por imagens. Nem todos os esquemas visuais pictóricos utilizados por eles eram relativamente generalizados, muitos eram imagens visuais particulares e concretas (WIELLEWSKI, 2005, p. 117).

Na parte exploratória da pesquisa, Wiellewski apresentou o seguinte problema: *De todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual o que tem maior área*? Wiellewski explica que o aluno participante do estudo sabia, de modo intuitivo, que se tratava do quadrado, porém sentia que precisava demonstrar. Desenhou, então, na sua resolução, um retângulo que vemos na Figura 5.

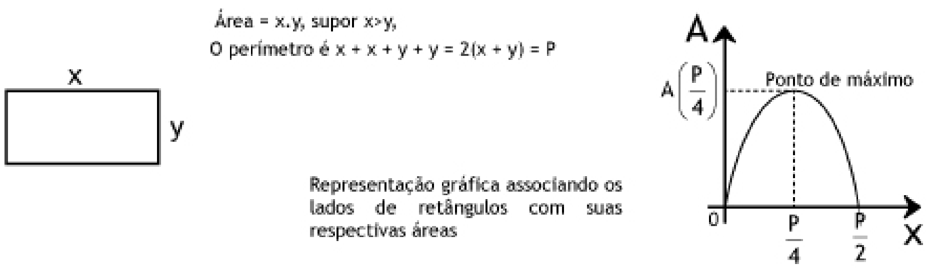


Figura 5: Argumentação desenvolvida pelo aluno (WIELLEWSKI, 2005, p. 136).

Entretanto tentou resolver o problema de forma abstrata. Pensou na variação dos lados do retângulo. Para manter o mesmo perímetro, ele disse: "se aumenta 1 em y, diminui 1 em x". Em seguida, escreveu: "Se aproximar x de y, em 1 unidade temos: $(x-1)$ e $(y+1)$. $Área = (x-1)(y+1) = xy + x - (y+1)$. Se, após aumentar y para y+1 e diminuir x para x-1, estes valores forem iguais, então teremos a área $Área = (x-1)(y+1) = xy + x - (y+1) = xy + 1$. A área aumenta de uma unidade.

Wiellewski (2005, p. 137) continua descrevendo que o aluno não conseguiu obter uma prova matemática. Após outras tentativas de resolução sem sucesso, ele procedeu da seguinte forma:

$$Área = x \cdot \left(\frac{P}{2} - x \right) = x \cdot \left(\frac{2(x+y)}{2} - x \right) = -x^2 + \frac{Px}{2}$$, e quando

$A = 0$ quando x=0 ou quando $-x + \frac{P}{2} = 0 \leftrightarrow x = \frac{P}{2} \therefore P = 4x$. Como se trata de um retângulo, os lados são todos iguais quando se tem maior área. Durante a resolução, *ele mencionava que o problema poderia ser resolvido pelo conceito de função, no entanto ele não se recordava do procedimento. Por isso tentou outros processos de resolução antes de resgatar esse por meio de função na qual recorreu à representação gráfica* (WIELLEWSKI, 2005, p. 137).

A partir das considerações da autora e de algumas das demonstrações discutidas anteriormente, observamos claramente que, quando limitamos nosso ensino ao emprego de fórmulas e estimulamos apenas o *raciocínio algorítmico*, o esforço do professor de Matemática diminui de modo considerável. Como em ocasiões, por exemplo, em que o professor trabalha com seus alunos o cálculo da inversa de funções do tipo $y = \frac{1}{2}x + 3$, que pode conter 30 questões com o uso do mesmo procedimento e, mesmo assim, o estudante não sabe dizer o que é uma função inversa.

Entretanto, quando buscamos uma abordagem de resolução de problemas mais interessante, inúmeras exigências surgem no horizonte de preocupação. Como vimos, as características idiossincráticas de cada estudante não podem ser ignoradas. Uma outra dificuldade é a formulação de problemas realmente interessantes, tanto para o professor como para os aprendizes.

Nesse sentido, Milauskas (1994 , p. 90) aconselha:

> Quando você se dispõe a criar bons problemas para seus alunos de geometria, é preciso ter certas coisas em mente. Tente encontrar problemas de enunciado simples, mas que tenham algo diferente ou uma solução nova. Problemas reais talvez sejam motivadores, mas outros totalmente irreais, inusitados ou incomuns também poderão sê-lo. Esses problemas espicaçam a curiosidade e convidam à resolução. Bons problemas às vezes contêm informações estranhas ou insuficientes. Às vezes o mais importante não é o problema em si, mas sim o raciocínio, a análise e as técnicas necessárias para a sua solução. Também é preciso considerar a maneira como o problema é colocado.

Notamos uma forte preocupação com o ensino de Geometria. E de fato não é uma mera coincidência ou simples preferência da autora. Em países como Espanha, Portugal, França, Inglaterra, por exemplo, já encontramos um *currículo de formação de professores de Matemática* com a presença de Didática do ensino de Geometria ou Didática do ensino de Álgebra, diferentemente de nossa realidade curricular nordestina, que promove uma formação compulsória de *Psicologia da Aprendizagem* e *Psicologia do Desenvolvimento*. O aluno egresso de um curso de licenciatura não conhece as características de um *esquema cognitivo* mobilizado para resolver uma operação específica com frações.

Questões problemáticas sobre a formação serão retomadas ainda neste curso. Por ora, vamos nos deter em um ponto delicado comentado por Milaukas (1994). De fato, não é muito simples arranjar aplicação para todo conteúdo colocado em sala de aula. Isso exigiria um tempo dobrado do professor de Matemática para a elaboração de sua aula, a qual não pode ser uma mera repetição do livro, o que na maioria das vezes acaba acontecendo.

Mais adiante, Milauskas (1994, p. 91) aconselha que:

> O professor deve exercer um controle sobre onde e como um problema é utilizado. Talvez haja a necessidade de pistas e atividades preliminares. Talvez seja conveniente permitir que os alunos trabalhem em grupo. Um determinado problema pode ser mais adequado a uma discussão em classe do que a ser feito como tarefa de casa.

Milauskas seleciona alguns problemas interessantes e sugere “pistas” ou “sugestões”. Exibimos alguns deles a seguir. Observe cada um para responder aos questionamentos que levantamos:

i) No que diz respeito ao exercício (I), o que você definiria para discutir com o estudante em caráter de sugestão ou pista? Que raciocínio você valorizaria de modo prioritário – *analítico-verbal* ou *geométrico-pictórico* – no momento de atribuir uma nota?

ii) Em (II), a autora apresenta as argumentações fornecidas pelos estudantes que tentaram resolver o problema. Existe outra solução para a mesma situação? Você é o tipo do professor que valoriza o esboço do desenho dos objetos da Geometria Espacial que estão essencialmente no espaço tridimensional?

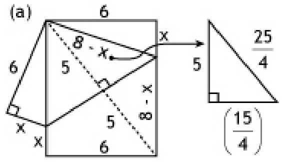
iii) Por fim, na questão (III), em sua opinião, o esboço do desenho do cubo está claro para o estudante ou é apenas um detalhe sem importância?

a) Uma folha de papel retangular de 6 polegadas por 8 polegadas é dobrada de maneira que os vértices opostos se toquem. Ache o comprimento da dobra.

b) Uma folha de papel de 8 polegadas por 12 polegadas é dobrada de maneira que um vértice toque o ponto médio do lado não adjacente maior. Ache o comprimento da dobra.

Solução ou pista comentada pela autora

Note que a dobra é a mediatriz do segmento da reta unindo os vértices. Tente geometria analítica para uma variação, ou use triângulos semelhantes.

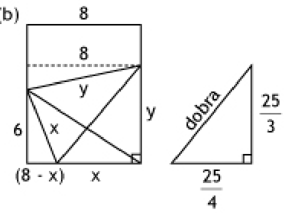


(i)

$x^2 + 6^2 = (8 - x)^2$

Logo, $x = \frac{7}{4}$

$8 - x = \frac{25}{4}$



$6^2 + (8 - x)^2 = x^2 \quad x = \frac{25}{4}$

$(y - 6)^2 + 8^2 = y^2 \quad y = \frac{25}{3}$

Respostas: a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{125}{12}$

Figura 6: Exercício I proposto por Milauskas (1994, p. 91)

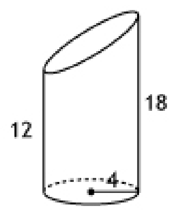
(II)

Um cilindro é seccionado obliquamente, como mostra a figura. A altura vai de 12cm a 18 cm e o raio mede 4cm

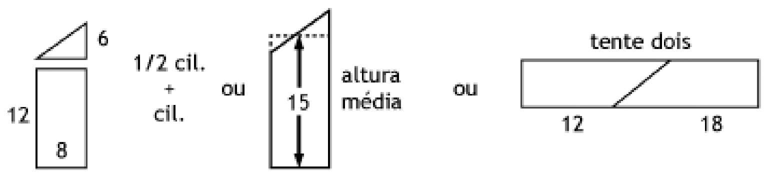
a) Ache o volume.

a) Ache a área lateral.

a) Ache a área total. (Nota: a área de uma elipse é πRr.)



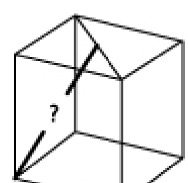
Aqui estão algumas das soluções propostas pelos alunos:



Resposta: $V = 240\pi$ $AL = 120\pi$ $AL = 156\pi$

Figura 7: Exercício II proposto por Milauskas (1994, p. 91)

Cada aresta do cubo da ilustração mede 6cm. Ache a distância do ponto médio de uma das diagonais das faces ao vértice mais distante do cubo.



Sugestão da autora

Trace mais duas diagonais das faces, de modo a formar um triângulo equilátero de lado $6\sqrt{2}$. Assim, a distância pedida é $3\sqrt{6}$.

Figura 8: Exercício III proposto por Milauskas (1994, p. 92)

Nenhuma das perguntas feitas anteriormente pode ser descartada. Nelas o amparo ao raciocínio fornecido pela figura é essencial. Recordamos aquele tipo de professor que, quando ensina Geometria Espacial, nunca perde tempo desenhando figuras na lousa.

A faculdade intuitiva daquele estudante está sendo exigida no momento em que ele busca estabelecer relações entre o enunciado e o objeto que busca desenhar na folha de papel. A mesma figura poderá servir para explicar o seu raciocínio para os colegas, no momento do debate em sala de aula.

TÓPICO 3

O pensamento algorítmico e a resolução de problemas

OBJETIVO

- Descrever o pensamento algorítmico

Veja o comentário de Elon Lages Lima abaixo. O autor se refere a determinados livros didáticos do Ensino Médio.

> O viés pelo adestramento, com desprezo de várias outras habilidades cognitivas deveriam ser desenvolvidas – capacidade de induzir leis gerais (teoremas) a partir de alguns exemplos; capacidades de síntese e de análise; capacidade para formular e testar conjecturas; capacidade para avaliar resultados de problemas e exercícios; capacidade para verificar a plausabilidade de resultados, usando inclusive o cálculo mental – verifica-se exemplarmente na seção sobre "triângulos quaisquer". Neste campo, em que seria fácil dar exemplos simples, contextualizados e interessantes de cartografia, não se encontra nenhum exercício contextualizado. Isso reforça a crença, já incutida no aluno por toda a apresentação até este ponto, de que a trigonometria – e por extensão a Matemática – não tem nenhuma aplicação a não ser resolver problemas de vestibular (LIMA, 2001, p. 147).

O autor evidencia e coloca em discussão a antiga tônica de que a atividade matemática promovida pelo livro é incentivar o estudante a "fazer contas". E o referido hábito é motivado desde as séries iniciais. De fato, logo no contato com a Aritmética, observamos situações didáticas em que, na possibilidade de transição, o professor emprega estratégias algébricas, em vez de estratégias aritméticas que, na maioria dos casos, demandam mais tempo e esforço.

Nesse sentido, Sadovsky & Sessa (2005, p. 89) advertem que "numerosas pesquisas no mundo inteiro têm se ocupado do estudo dos obstáculos epistemológicos e as rupturas didáticas envolvidas na transição da Aritmética para a Álgebra, tanto na perspectiva do professor quanto na do aluno". Assim, a referida transição apresenta problemas específicos que necessitam serem compreendidos se desejamos realizar uma ação didática com a intenção real de obter uma compreensão autônoma do sujeito.

Tall (1992 , p. 8) comenta que:

> Quando a criança se encontra com a Álgebra pela primeira vez frequentemente enfrenta inúmeros problemas para compreender o significado das notações. Eles podem escrever "x" e depois "y" próximos um do outro como $x\ y$, mas eles estão dizendo que xy é "x vezes y". Eles se confundem com o símbolo $2+3x$. Se isto significa adicionar 2 a 3 vezes x, então existe um problema que não pode ser calculado até que x seja conhecido. [...] A expressão $2+3x$ pode significar diferentes coisas. Pode ser o processo de adicionar 2 e 3 vezes x, como o produto do processo.

No trecho acima, o matemático inglês David Tall comenta que a criança pode enxergar a expressão $2+3x$ em termos do *processo* que possibilita com a realização de um produto por três e depois uma soma. Ou apenas com o resultado do processo, sem atentar o suficiente para o modo de constituição da expressão.

Por exemplo, se a expressão $2+3x$ é apenas um procedimento para obter determinados valores como $x=2 \rightarrow 2+3\cdot 2=8$, a criança sentirá dificuldades de compreender a manipulação seguinte: $3(2+3x)+2x(2+3x)=(3+2x)(3+2x)$. Neste caso a expressão age como um objeto e não estamos interessados em fazer contas.

Percebe-se que, quando falamos sobre Álgebra, devemos considerar uma *sintaxe* e *regras operatórias* bem específicas cujo resultado, na maioria dos casos, o estudante não compreende. Sublinhamos que, para o professor, pensar de modo flexível na expressão $2+3x$ tanto como *objeto mental* e como *processo matemático* é algo bastante razoável, entretanto para o aluno isto pode ser bastante difícil.

Crowley, Tall & Thomas (1994 , p. 3) mencionam as incompreensões ante a salada de frutas da Álgebra. O símbolo $3a+4b$ é explicado significar três maçãs e quatro bananas. Algumas crianças ficam desiludidas quando deparam com $3a+4b+2a$, que significa três maçãs, quatro bananas e duas bananas e que significa cinco maças, quatro bananas. Outras crianças interpretam esta expressão como 9 maças e bananas.

Nesse âmbito outras dificuldades e erros frequentes e resistentes no aprendizado de Álgebra podem ser identificados. Todavia tencionamos direcionar nossa atenção para um hábito adquirido nas séries iniciais que se propaga e se repete durante boa parte da vida escolar e até mesmo acadêmica do indivíduo.

O aspecto que desejamos destacar foi mencionado por Tall (1992) quando a criança é ensinada a buscar apenas o resultado da expressão $2+3x$ sem se preocupar com o objeto em si ou o processo matemático que o mesmo sintetiza.

De fato, é comum o professor de Matemática explicar a noção de função inversa, com ênfase no seguinte procedimento: "Para você calcular a função inversa de $y=2x-3$, basta trocar o que for y pela variável x e onde estiver a variável x trocar por y. No final deve isolar y". O procedimento algorítmico resta do seguinte modo como descrevemos na Figura 9.

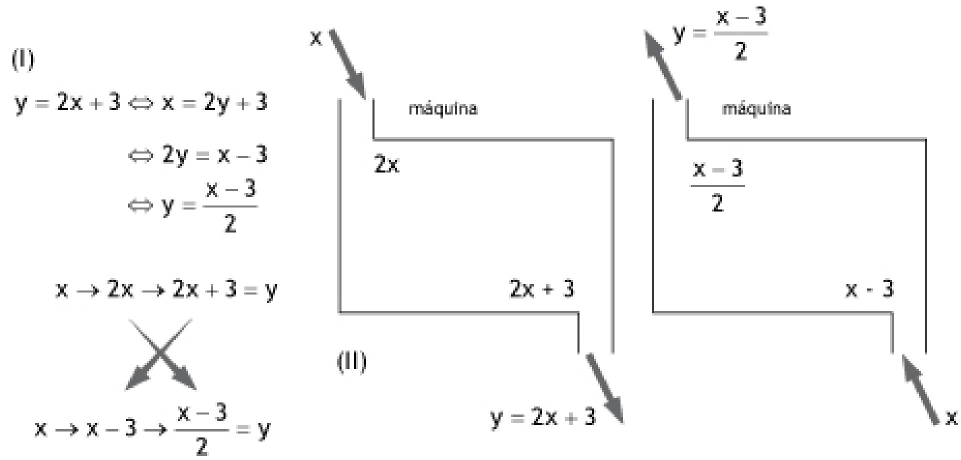


Figura 9: Metáfora da máquina

Por outro lado, alguns autores preferem empregar a utilização da função como uma máquina. Acima vemos a máquina realizando o funcionamento normal. Ela pega a variável x, multiplica por 2, e na sequência soma 3. Quando invertemos o processo da máquina, não apenas a ordem das operações, como também as próprias operações, são invertidas. De fato, a máquina multiplica e depois soma. Quando trabalha no sentido inverso, ela deverá subtrair e depois dividir. Observamos sua ação na ilustração acima.

Outra ocasião com ênfase no *raciocínio algorítmico* clássico ocorre quando o professor demanda ao estudante exibir a inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$. Na prática, o mestre orienta que o aluno empregue a condição $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e resolva os sistemas de duas incógnitas obtidas. No final obtemos $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Pelo menos em alguns casos, o livro didático, e possivelmente o professor, enuncie o teorema.

Teorema : Se A é inversível, então existe uma única matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Demonstração: Vamos admitir que existe uma outra matriz C tal que $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Assim, temos

$$C \overset{\text{Propriedade}}{=} I_n \cdot C \overset{\text{Hipótese}}{=} (A \cdot B) \cdot C \overset{\text{Hipótese}}{=} (B \cdot A) \cdot C \overset{\text{Associatividade}}{=}$$

$$= B(A \cdot C) \overset{\text{Hipótese}}{=} B \cdot I_n \overset{\text{Propriedade}}{=} B$$

Percebe-se que, para os desavisados, a demonstração acima presente em muitos livros didáticos tem uma aparência de perfeição. Entretanto Lima (2001, p. 193) adverte que determinando B tal que $B \cdot A = I_n$ e já que não foi apresentado o teorema (aliás, nesse livro seria no máximo uma observação) que garante que se A é quadrada e $A \cdot B = I_n$ então $B \cdot A = I_n$, a única conclusão que se pode tirar é que ou A não é invertível ou B é realmente a inversa de A. Os autores tinham a obrigação de verificar realmente que $B \cdot A = I_n$.

Notamos que, como Otte (1991) que adverte dizendo que *os algoritmos estão relacionados apenas funcionalmente à realidade objetiva; eles não a explicam em nada*, você pode ter um aluno que tenha conseguido fazer 30 questões sobre funções inversas pelo *método algorítmico* e outro aluno que tenha resolvido 80 questões, entretanto este último não será, necessariamente, mais esperto ou mais sábio do que o primeiro estudante.

O *conhecimento algorítmico* é referendado por regras operacionais. Aplicando-as, obteremos com certeza algum resultado, obtemos um dado; entretanto não obtemos um significado para os dados inferidos. Talvez seja essa característica que agrega a preferência dos estudantes. Ao deparar com uma questão que exige tão somente o *raciocínio algorítmico*, simplesmente o estudante emprega a fórmula, pois a certeza da validade do seu funcionamento já foi *a priori* estabelecida pelo professor. O aluno sabe, de antemão, que deverá encontrar um valor, basta identificar os dados necessários no enunciado.

Por outro lado, um conhecimento intencionalmente desejado pelo professor de Matemática é o *conhecimento conceitual*, que se caracteriza por ser rico em relações, que se restringe apenas à aplicação de fórmulas e nunca é linear, como no caso de uma demonstração formal. Nas próximas aulas retomaremos à discussão sobre o *conhecimento conceitual* em Matemática, essencial para a aprendizagem.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Forneça exemplos de situações corriqueiras em sala de aula, nas quais o contrato didático é rompido.

2) Explique e contextualize a noção de devolução em termos da Didática da Matemática.

3) Forneça um exemplo de uma explicação ou argumentação, de uma demonstração e de uma prova matemática.

4) O método formal e axiomático é colocado em evidência de acordo com as regras do contrato didático estabelecido com a turma. Identifique as consequências negativas desta atitude do professor no trecho da figura abaixo.

> O fato de que a utilidade determina a abordagem lógica e não o contrário é tão básico na matemática que esse ponto merece ênfase. Consideremos um exemplo. Para empregar a adição de frações nas situações mais reais, digamos, somar 1/2 e 1/3, mudamos ambas para sextos e somamos depois 3/6 e 2/6 para obter 5/6. Entretanto, quando multiplicamos frações multiplicamos os numeradores e o mesmo fazemos com os denominadores, de modo que $1/2 \times 1/3 = 1/6$. Poderíamos "somar" frações somando os numeradores e somando os denominadores e obter $1/2 + 1/3 = 2/5$. Por que não usamos este último método? É mais simples. Mas não se ajusta à experiência. Tendo-se adotado uma definição útil da adição, as propriedades lógicas da adição têm que seguir da definição.

Trecho do livro de Kline (1971, p. 61)

5) O professor pode se refugiar na segurança dos algoritmos prontos. Tal atitude que pode ser caracterizada como uma cláusula do contrato didático, pode encobrir suas lacunas e falhas pessoais. Analise no trecho sublinhado na figura abaixo, um elemento que pode influenciar de modo negativo o contrato didático.

> Na realidade a abordagem lógica é desnorteante. Ao estender o sistema de números partindo dos números naturais aos vários outros tipos o novo currículo insiste em que se retenham as propriedades comutativa e associativa das operações. Por que insistimos nessas propriedades? Os professores sabem que o uso dos números requer essas propriedades, mas os estudantes ficam com a impressão de que essas são as propriedades necessárias de todas as quantidades matemáticas. Por que, então, não estendemos a propriedade comutativa à multiplicação de matrizes? A resposta é que o uso que se dá às matrizes requer uma multiplicação não-comutativa. A abordagem lógica dá ao estudante uma impressão inteiramente falsa de como a matemática se desenvolve.

Trecho devido a Kline (1971, p. 63)

AULA 5

A tipologia das Situações Didáticas de Guy Brousseau

Olá, aluno (a)!

Nesta aula, iremos estudar a tipologia das situações didáticas que estão diretamente relacionadas ao ensino da matemática. É importante que você reflita sobre elas e sobre suas implicações no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Objetivo

- Conhecer as principais tipologias das situações didáticas relacionadas ao ensino e aprendizagem da matemática

TÓPICO 1

A tipologia das Situações Didáticas - TSD

Objetivo

- Descrever a tipologia das situações didáticas concebidas por Brousseau

Na citação abaixo, Brousseau faz uma clara menção a determinados subterfúgios empregados pelo professor que ocorrem, por exemplo, diante da resolução de uma situação-problema, que apresenta inúmeras estratégias admissíveis.

> Imaginemos que o professor realize uma devolução a um aluno de uma fonte de questões auto-controláveis ou de um problema. Se o estudante resolve este problema, ele pode pensar que o mesmo o fez pelo exercício normal de seus conhecimentos anteriores. O fato de ter resolvido o problema se mostrará para ele como a prova de que não existe nada de novo a ser aprendido a respeito. Mesmo se ele tem consciência de ter substituído uma estratégia antiga e culturalmente identificada por uma outra de sua ''invenção'', e será muito difícil de declarar que tal ''inovação'' se trata de um saber novo: que necessita ser identificado como um método tendo em vista que parece poder ser produzido facilmente quando necessário? (BROUSSEAU, 1996, p. 91).

Entretanto, o professor ensinou e estabeleceu aquela estratégia específica que, em certos casos, exige um maior esforço do estudante. Por outro lado, aquela outra estratégia pelo mestre de modo semelhante conhecida não foi discutida ou apresentada ao grupo.

Todavia, não podemos e nem devemos ousar controlar a inventividade e criatividade do estudante. Pode ocorrer que eles mesmos ou algum membro do grupo encontre ou identifique a referida estratégia camuflada pelo mestre. A mesma, como declara Brousseau, trata-se de uma ''inovaçao'' ou ''invenção''. Em todo caso, prevemos certo descontentamento da turma, na ocasião em que o professor admita a possibilidade da estratégia para a resolução do problema, vislumbrada pelo estudante, e não indicada pelo mestre.

Existe uma tendência natural do estudante em optar pela estratégia que exige um menor esforço mental e, em certos casos, o emprego automático sem uma devida compreensão. Desse modo, o professor, percebendo um momento como este, deve se antecipar e declarar o estatuto de pertinência e importância daquela nova estratégia para a resolução do problema. De qualquer modo, para o professor de Matemática, deve ficar claro a condição de que "o que impulsiona o processo de ensino/aprendizagem são as atividades envolvendo a resolução de problemas, o trabalho pedagógico tem início exatamente com a escolha de um bom problema que deve ser compatível com o nível de conhecimento do aluno" (FREITAS , 2002, p. 77).

Na situação que descrevemos envolvendo a possibilidade de várias estratégias de resolução do problema, o professor, de acordo com o *contrato didático*, apontará a estratégia mais eficiente, ou, em última instância, permitirá que a própria turma eleja a mais eficiente. Entretanto, uma vez o problema considerado "interessante" e "compatível" seja escolhido o mesmo, ele deverá destacar as possíveis fases pelas quais uma estratégia de resolução apresenta.

"Assim, para descrever as relações do aluno com essa diversidade de possibilidades de utilização do saber, Brousseau desenvolveu uma tipologia de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem da Matemática" (FREITAS, 2002, p. 77). De modo resumido, as categorias concebidas foram nomeadas por ele de: *situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização*.

Numa **situação de ação**, o estudante joga com novas oportunidades e desenvolve estratégias. Geralmente, "uma estratégia é adotada por intuição ou pela rejeição natural de uma estratégia anterior. Uma nova estratégia é, entretanto adotada como resultado de uma experimentação. Isto é, aceita ou rejeitada a partir da avaliação do estudante no que diz respeito à sua eficácia; tal avaliação pode ser implícita." (BROUSSEAU, 2002, p. 9).

Na figura 1, exibimos os elementos e as relações analisadas por Guy Brousseau (2002, p. 9) na ocasião em que se dá a resolução de um problema matemático. Ele explica ainda que "as sequências de situações de ação constituem o processo pelo qual o estudante forma estratégias, isto quer dizer, "ensina a si próprio" um método de resolução do seu problema."

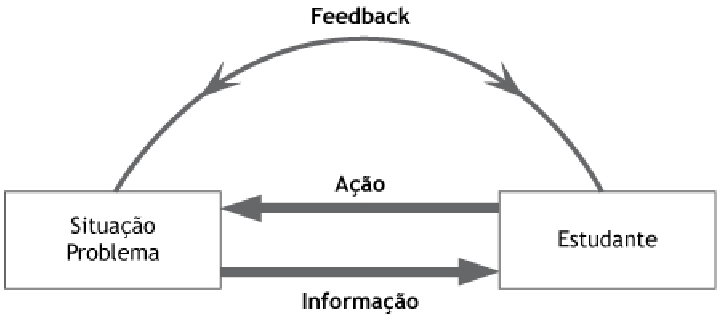


Figura 1: Esquema descrito por Brousseau (2002, p. 9).

O didata francês Brousseau analisa ainda as relações que de modo muito rigoroso se estabelecem. Na Figura 1, temos os elementos que caracterizam, segundo ele, a "*dialética da ação*". E acrescenta que:

Quando utilizamos o termo "dialética" em vez de "relação" é por que, por outro lado, o estudante é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, suas estratégias são, deste modo, proposições confirmadas ou invalidadas por meio da experimentação numa espécie de diálogo com a situação. No curso da "dialética da ação", a criança organiza suas estratégias, e constrói uma representação da situação que serve como "modelo" e guia para a mesma durante as decisões (2002, p. 9).

Brousseau explica que, neste nível, o professor deve ficar atento para se deparar com estratégias formuladas pelos estudantes originadas a partir de *modelos mentais implícitos*. Nesse sentido, ele explica que *modelos implícitos* descrevem *um conjunto de relações ou regras as quais o estudante toma a sua decisão sem necessariamente ser consciente da mesma*. Desse modo, exigir dos estudantes logo no início das tarefas as justificativas e os porquês de cada estratégia e escolha pode antecipar de modo pouco natural as etapas cognitivas pelas quais o estudante precisa enfrentar ante à situação-problema.

ATENÇÃO!

Note-se que é importante dispensar algum tempo na sua própria carteira no sentido de esboçar uma estratégia de resolução individual, o que demonstra a sua autonomia, inclusive, em relação ao professor de matemática.

Num segundo momento, Brousseau descreve a *situação de formulação*. Nessa situação, após um devido tempo para pensar nas possíveis estratégias, os estudantes começam a propor estratégias que podem depender de um *feedback* da própria turma. Por exemplo, o professor pode estimular alguns membros do grupo a descrever na lousa as possíveis escolhas.

Na figura 2, apresentamos uma parte desta dinâmica da sala de aula.

Figura 2: Esquema descrito por Brousseau (2002, p. 10).

Brousseau sugere que, na situação de formulação, o estudante, ao expor e tentar convencer à respeito das possibilidades de acertos, mas também de erros, necessita estabelecer uma linguagem uniformizada, no sentido de que todos os membros do grupo compreendam. Além disso, menciona que:

> Em cada momento, a construção da linguagem deve ser testada do ponto de vista da inteligibilidade.[...] A construção de certa linguagem ou código (repertório, vocabulário, sintaxe) num linguagem ordinária ou linguagem formalizada torna possível uma explicação das ações e modelos de ação (2002, p. 12).

Já o momento de *validação* envolve o estabelecimento de teoremas. Para tanto, o professor deve antever as conjeturas que podem conduzir aos erros e identificar as que propiciam a um possível sucesso. Não aconselhamos expressões do tipo: "*Basta fazer isto que o problema está encerrado!*", ou ainda "*Se você usar este argumento, acabou a questão*!". Num outro extremo, são desaconselháveis expressões do tipo: "*Esta conjectura está errada*!", ou ainda, "*Se você continuar com este raciocínio, você vai errar*!".

Brousseau diz que *fazer matemática não consiste somente de receber, aprender e enviar mensagens matemáticas corretas* (2002, p. 15).

SAIBA MAIS!

O discurso do professor deve apoiar uma atitude e/ou uma escolha própria do estudante, pois se na ocasião em que o aluno conseguir resolver o problema, o mesmo sentirá uma realização maior na medida em que atingiu o alvo sem necessitar da indicação do mestre. No outro caso, com a indicação do professor, o aluno sente uma realização compartilhada, uma vez que desconfia que, sem o auxílio providencial do professor, o mesmo não teria conseguido.

Desse modo, as situações de erro devem ser exploradas, não podem ser descartadas e devem ser recordadas, uma vez que, determinada estratégia de solução de uma questão pode ser ineficaz em uma situação, mas pode ser a opção correta em outra.

Para concluir este tópico, apresentamos a opinião de Borasi a respeito da noção de erro quando comenta a perspectiva piagetiana para a interpretação do erro. Nesse sentido, uma visão possível dos erros como catálise de uma aprendizagem. De fato, "psicólogos cognitivistas sustentam a ideia de que o conflito ou a dissonância cognitiva são catálises que provocam a aprendizagem e o desenvolvimento. Deste modo, erros são naturalmente criados em tais situações conflituais e, assim, pode fazer os estudantes tornarem-se conscientes da necessidade de criticar seus próprios procedimentos e adquirir mais informação " (BORASI, 1996, p. 31).

Borasi (1996, p. 32) acrescenta na sequência que:

> Ademais, o erro pode desempenhar um papel positivo nas atividades matemáticas do estudante é indiretamente mostrado em inúmeras pesquisas na aprendizagem de matemática e na resolução de problemas, informados pelos construtivistas e perspectiva nas ciências cognitivas.

No tópico seguinte, trazemos aplicações particulares das TSD no ensino médio.

TÓPICO 2

Exemplo e aplicações da Tipologia das Situações Didáticas - TSD no Ensino Médio: o caso do ensino de sequências numéricas

Objetivo

- Aplicar os princípios das tipologias ao ensino de sequências numéricas

Iniciamos este tópico com o seguinte exemplo adotado por Brodie (2010, p, 93):

> O raciocínio adaptativo refere-se a capacidade mental de pensar logicamente e inclui o conhecimento de como justificar conclusões. É importante o aprendiz conhecer e compreender que as respostas estão certas por que fazem sentido e são oriundas a partir de um raciocínio válido, em vez do que aceitar meramente o que o professor e o livro didáticos dizem.

Brodie discute a seguinte situação-problema: a seguinte função $f(n)=n^2-n+11$, onde $n\in\mathbb{N}$ sempre produz números primos? Responda ainda os itens:

(a) Determinar $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \ldots\ldots$

(b) Prove e justifique a afirmação.

(c) Descreva geometricamente no plano alguns dos seus pontos.

Em todo caso, esta situação-problema é típica de uma experimentação que o aluno precisa desenvolver em Aritmética, inicialmente. Paulatinamente, o aprendiz é estimulado a descobrir os valores para $f(1)=1^2-1+11=11$ que é primo. Ainda que $f(2)=2^2-2+11=13$ que é primo. Pode observar também que $f(3)=3^2-3+11=17$ mais um número primo. Sucessivamente, temos $f(4)=23$; f(5)=31… .

Este momento de debruçamento inicial sobre o problema, para a identificação de alguma estratégia possível, caracteriza o primeiro momento das Tipologias das

Situações Didáticas (TSD). Aqui, a ação dos sujeitos se desenvolve na testagem da validade de afirmação da propriedade acerca dos números primos. *Esta situação é caracterizada pela necessidade de um contraexemplo*, como sublinha Brodie (2010, p. 93). Entretanto, tal fato não necessita ser explicitado pelo professor.

Por parte dos alunos é esperado desenvolver um raciocínio e uma argumentação que dê conta se a propriedade é verdadeira ou por que possui falha. Alguns erros iniciais podem e devem ocorrer como consequências da evolução do raciocínio adaptativo dos estudantes. Nesse sentido, Brodie esclarece:

> O fato de que existem as incompreensões mostra que os aprendizes constroem seu próprio conhecimento. Erros e incompreensões são sinais de que os aprendizes estão envolvidos na sua aprendizagem e seus processos de pensamentos se encontram engajados. A aceitação de erros e incompreensões como parte normal do processo de ensino e da aprendizagem significa que explicações posteriores dos estudantes podem ser encorajadas com a intenção de compreender o porquê do surgimento dos erros e incompreensões (2010, p. 75).

Prevemos que os erros nas etapas iniciais devem possuir uma origem operatória de Aritmética. Por outro lado, na situação prevista por Brousseau, chamada de *formulação*, o professor pode chamar a atenção, dentre todas as estratégias discutidas com a turma, a que possivelmente terá mais êxito e, sugerir/ discutir a estratégia que poderia conduzir ao fracasso.

Assim, na situação de formulação, o estudante começa a desenvolver argumentações e inferências típicas de um *modelo matemático* subjacente à situação-problema. O referido *modelo matemático* deve ser compreendido e dominado com habilidade e eficiência pelo mestre. Nesse caso, fazemos uso da noção chamada de *sequência*, costumeiramente encontrada nos livros do Ensino Médio.

O motivo da adoção deste primeiro exemplo é justificado nas palavras de Lima (2001, p. 22) quando adverte:

> O capítulo começa com a definição de sequência como um conjunto ordenado. Além de apelar para uma noção que não foi e nem será explicada pelo livro (a de conjunto ordenado), esta definição é incorreta, pois um conjunto (ordenado ou não) não tem elementos repetidos. Além disso, o conjunto dos números reais é ordenado, mas não é uma sequência. Na verdade, uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais (sequencia infinita) ou o conjunto dos n primeiros números naturais (sequência finita, com n elementos). [...] As sequências são definidas em crescentes, decrescentes ou estacionárias, deixando a impressão de que não existem sequências de outro tipo.

Nas colocações de Lima, evidenciamos inúmeros aspectos que podem gerar incompreensões e imprecisões no manuseio destes objetos. O primeiro que chamamos atenção é que a sequência $f(n) = n^2 - n + 11$ não apresenta nenhuma razão. Por outro lado, na situação de formulação, é peculiar a adoção de uma notação ou simbologia. A mesma deve ser operacionalizável no sentido de pode conduzir os estudantes a algum resultado conclusivo.

Assim, o objeto matemático descrito por $f(n) = n^2 - n + 11$ precisa ser identificado como uma sequência, tal qual descrita por Lima na citação anterior. Desse modo, o aluno identifica $a_n \ .\equiv.\ f(n) = n^2 - n + 11$. Assim, o sujeito descobre que $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5),.....$ podem ser substituídos por $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,.....$

Incluímos também o item (c) com a intenção de explorar uma perspectiva pouco encontrada nos livros didáticos escolares, ou seja, a interpretação geométrica da sequência. Mas para tanto, o aluno necessita compreender o sentido da notação $(1, f(1))\ .\equiv.\ (1,a_1)$; $(2, f(2))\ .\equiv.\ (2,a_2)$; $(3, f(3))\ .\equiv.\ (3,a_3)$.

O professor pode requerer dos estudantes um esboço do gráfico a partir das identificações estabelecidas anteriormente. São previstas imperfeições e ajustes no gráfico. Na figura 3, exibimos uma aproximação para o mesmo.

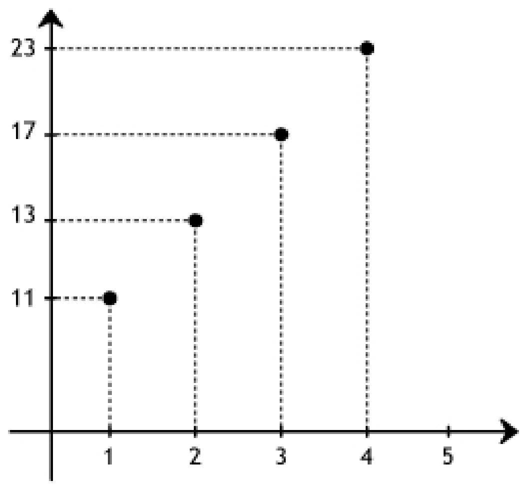


Figura 3: Interpretação da sequência no plano

No próximo tópico, discutiremos um campo de aplicação das sequências numéricas.

TÓPICO 3

Exemplo e aplicações da Tipologia das Situações Didáticas - TSD no Ensino Médio: o caso das progressões aritméticas – P. A.

Objetivo

- Aplicar os princípios das tipologias ao ensino de progressão aritmética

Lima (2001a) desenvolve críticas consideráveis ao tratamento dispensado pelos autores de livros às noções de *progressões aritméticas* – P. A. e *progressões geométricas* – P. G. Daqui em diante, passaremos a descrever a utilização da metodologia de ensino formulada por Brousseau com a intenção de evitar alguns equívocos e a evolução de hábitos indesejados nos estudantes. Utilizaremos o conceito de *progressões aritméticas* – (PA) para uma discussão em caráter teórico de aplicação da *Sequência*.

Para o início de nossa aplicação em caráter teórico, apresentamos a descrição da primeira etapa da Sequência.

Nível 1 Situação de ação – apresentação do problema ou de um teorema. Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema, descrita na Figura 4, para o grupo de alunos, que devem possuir meios de atacar o problema envolvido mediante a aplicação do conhecimento a ser ensinado.

Comentários: No nível 1, a lição que podemos extrair indica que não há necessidade de o professor explicitar ou apresentar aos alunos um problema. Este deve ser descoberto pelos próprios alunos; todavia, eles já devem saber o que é uma progressão. Além disso, a atividade

ATENÇÃO!

Duval (1995, p. 232) explica que a atividade de argumentação tem por objetivo modificar a natureza ou o grau de convicção atribuído por um interlocutor a uma proposição, de modo a fazê-la aceitar ou rejeitá-la. Assim, torna-se essencial neste nível a identificação das conjecturas que possuem mais chance de êxito, bem como as que irremediavelmente conduzem ao fracasso.

argumentativa dos alunos deve ser fortemente estimulada no momento inicial. Note-se que na condição de uma análise a *priori* do público-alvo, os estudantes podem ser apresentados à situação que discutiremos sem necessariamente já serem conscientes do que se trata formalmente uma P. A. Iniciamos com uma exploração das propriedades geométricas as quais são negligenciadas pelos livros didáticos.

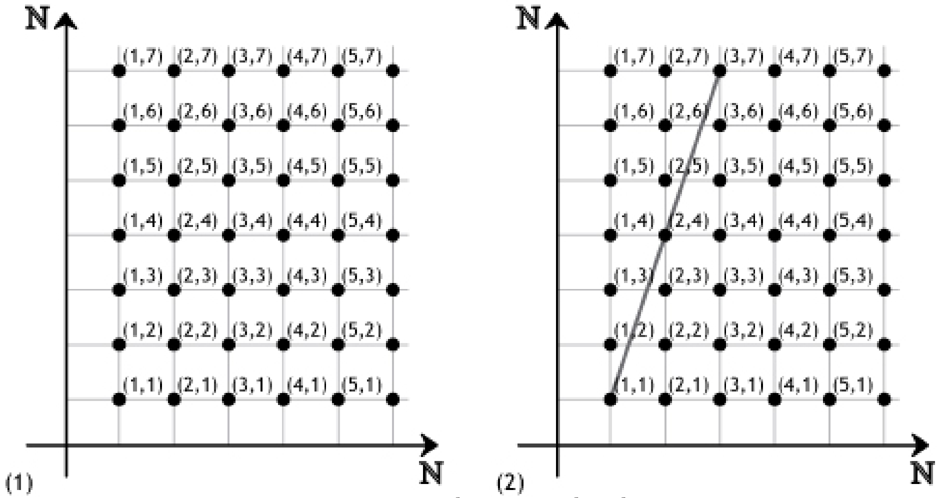


Figura 4: Disposição dos pares ordenados.

Na Figura 4, o aluno deverá ser estimulado a encontrar uma *progressão aritmética* – P.A. em meio às combinações aritméticas e geométricas de pares ordenados ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) no plano. Nesta situação, podemos questionar que espécie de propriedade percebemos na disposição exibida acima, embora não esteja explícito que a mesma diz respeito à P.A.

Assumiremos de modo hipotético que o aluno relaciona os pares ordenados da figura 4. Portanto, ele relaciona os seguintes pares: $(1,1)\to(2,4)\to(3,7)\to\ldots\to$. Observe que tal trajetória se propaga indefinidamente a partir destes casos particulares. O símbolo $"\to"$ indica o movimento perceptivo que o aluno descreve ao direcionar sua atenção ao desenho ilustrativo da situação.

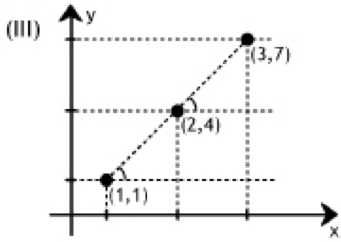


Figura 5: Apresentação inicial do problema.

Diante desta escolha (Figura 5-II), prevenimos que não há a necessidade de explicitar a natureza do problema; o professor deve conduzir o processo, permitindo que os próprios alunos percebam que o quadro (I) figura 5 envolve um problema; mas de quê? De que forma? Que objeto matemático se relaciona com a representação da Figura 3?

GUARDE BEM ISSO!

Vale lembrar que a possibilidade de esboçar um desenho, viabiliza ao aluno explicitar suas percepções e crenças a respeito de cada representação e cada objeto.

ATENÇÃO!

Mayer, Lewis & Hegarty (1992, apud, CAMPBELL, 1992, p. 138) explicam que erros matemáticos ocorrem no raciocínio qualitativo quando um solucionador de problemas entra em conflito com uma informação presente nas afirmações do problema.

Em parte, estas questões podem ser resolvidas paulatinamente, na medida em que estimulamos o uso constante de determinadas imagens mentais. Advertimos para o argumento de que "muitos erros típicos dos alunos têm sua origem justamente neste momento de formação de determinadas imagens primárias." (SAFUANOV , 2003, p. 89)

Observe-se que, mentalmente, por meio da *intuição geométrica*, o aluno será estimulado a imaginar a situação descrita na figura 5-II e a produzir argumentações relacionadas à situação. Observamos que a noção de infinito pode ser trabalhada quando imaginamos a propagação da relação descrita em figura 5-I até o infinito.

Como uma tendência natural dos seus hábitos adquiridos, após imaginar a situação ao lado, o aluno em geral tenta ligar os pontos e visualizar um objeto familiar, que neste caso é uma reta (Figura 5-II).

Concordamos com Russell (1921, p. 112) quando defende que *nossas percepções são constituídas de sensações, imagens e crenças*. Dessa forma, devido o modelo familiar da Geometria Plana, o aluno tenta ligar os pontos na figura 6. Ao realizar isso, que caracteriza um *erro qualitativo de raciocínio*, podemos perquirir sobre o seu conhecimento a respeito da noção de *domínio* de uma *sequência* $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, do tipo $a_n = 3n-1$.

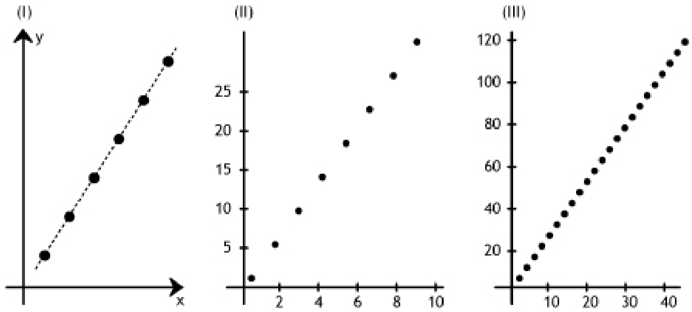


Figura 6: Concepção equivocada dos alunos a respeito do gráfico da PA e representação no computador (elaboração própria).

Observamos que este exemplo e outros frequentes que explicitam *concepções* e *conceitos* construídos sobre raciocínios inconsistentes e, em flagrante contradição com o modelo matemático formal, podem ser paulatinamente modificados com o auxílio de um recurso informático (Figura 6-(II e III)).

Nível 2 Formulação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. (Destinado à discussão e debate envolvendo os elementos: professor-alunos-saber).

Comentários. Desde que esclarecemos psicologicamente o significado do termo "abstração", supomos que a atenção do aluno se voltará para a relação unívoca entre os pares $(1,1);(2,4);(3,7)$ mostrados em (figura 6-III). Tal representação sugere implicitamente uma lei de formação de uma função?

O aluno poderá conjecturar a *existência* de função do tipo:

$f(1)=1; f(2)=4; f(3)=7$; mas que tipo de função? *Exponencial, logarítmica, polinomial*? De que grau? Estas questões podem servir de fio condutor para uma investigação mais aprofundada ao final da *Sequência Fedathi*.

Por outro lado, prolongando-se o gráfico e analisando-se a Figura 6-III, os comprimentos das projeções, o aluno deve concluir que o ângulo formado no eixo Ox é sempre constante. Assim, deve-se identificar o gráfico como de uma reta; entretanto o professor há de formular com os alunos questões relacionadas ao domínio desta função que, no caso, está em $\mathbb{N}$ e possui *contradomínio* em $\mathbb{R}$; por quê?

Além disso, após vários questionamentos, o aluno pode escolher a seguinte representação $f(x)=ax+b$ e não outras possibilidades tais como: $g(x)=e^x$;

$h(x) = ax^2 + bx + c$; $p(x) = \log_{10}(x)$. Notamos que, em raras exceções, o aluno saberá as condições de *existência* de uma *função afim* nas condições fornecidas pelo problema. As noções de *existência* e *unicidade* poderão ser desenvolvidas no final da aplicação.

Alguns *ideais particulares* que envolvem este momento relacionam-se ao seguinte modelo: $f(n) = a \cdot n + b$ onde $n \in \mathbb{N}$. Por sugestão do professor, os estudantes passam a adotá-lo baseados nessa representação, podendo relacionar os conceitos de *função* e *progressão aritmética* (PA).

Vale evidenciar que a habilidade de relacionar tais conceitos caracteriza algo fundamental a ser perseguido pelo professor, no que diz respeito ao conhecimento conceitual. A importância deste conhecimento característico de um estágio cognitivo do sujeito é sublinhada por Sierpinska (1994, p. 106) ao explicar *que o foco recai sobre a relação entre objetos particulares*.

Por outro lado, todos os que usam a linguagem dos gráficos podem ser auxiliados por um ponto de vista intuitivo do fenômeno e, nem sempre, o aluno consegue perceber as relações viabilizadas pelos gráficos. Além disso, *o auxílio de propriedades intrínsecas de um gráfico pode representar uma fonte de incompreensões pois o gráfico constitui um sistema figurativo auto suficiente que não faz apelo ao significado extrínseco*. (FISCHBEIN , 1987, p. 162)

Nível 3 Validação – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema. Aqui, os alunos organizados em grupos ou de modo individual devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas argumentações outros grupos.

Comentário. Introduzimos a notação conveniente, destacando que a sequência $x_n = f(n) = a \cdot n + b$ pode ser descrita por $\{a_1; a_2; \ldots a_n; \ldots\}$ ou $\{\mathrm{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Prevenimos que a precipitação em se adotar uma poderosa notação pode transformar o problema numa rotina algorítmica semanticamente pobre. Por outro lado, neste momento, a *ausência de linguagens operatórias podem constituir um obstáculo à aprendizagem dos alunos* (BALACHEFF , 1988, p. 149).

Convém observar, ainda, que notações aparentemente semelhantes podem inspirar intuições distintas; por exemplo, a situação em que $\{a_1; a_2; a_3; \ldots a_n; \ldots\}$ sugere a continuidade ininterrupta dos termos; mas, no caso da notação $\{\mathrm{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$,corremos o risco de estimular uma concepção estática do conceito de sequências de números reais.

Outro elemento que pode ser identificado, após se obter o *termo geral*

$a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$, é a interpretação geométrica do *coeficiente angular* e do *coeficiente linear,* algo pouco explorado pelos livros didáticos. Por este modo, enfraquecemos a prática algorítmica usual de tratamento *do termo geral*. Nesse sentido, Fischbein (1999, p. 52) *lembra que um algoritmo pode ser aprendido por repetição, pela prática*; contudo, o *algoritmo* envolve elementos mais complexos do que aparenta, destacadamente os de natureza intuitiva. São justamente estes elementos que exploramos na figura 7.

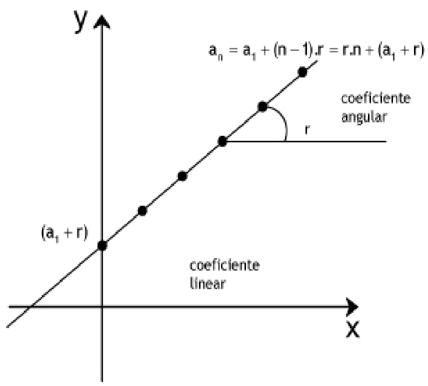


Figura 7: Interpretação geométrica do termo geral (elaboração própria).

Quando exploramos a interpretação geométrica do termo geral, podemos desenvolver a ideia de "*interpolação geométrica* dos seus termos". Por exemplo, se tomarmos a Figura 7, e tivermos que $\{a_1\ ;\ a_2\ ;a_3\ ;\ a_4\} = \{\ 1\ ,?\ \ ,?\ \ ,10\} \therefore 10 = 1 + (4-1)r \leftrightarrow r = 3$, poderemos encontrar a razão.

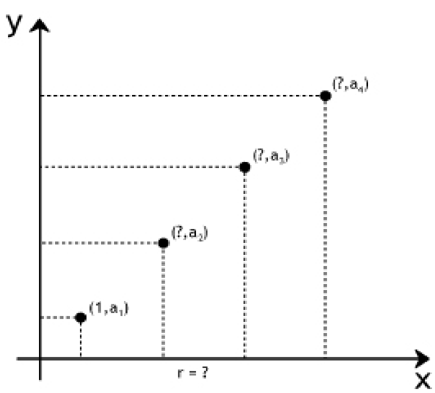


Figura 8: A noção de Interpolação geométrica dos termos de uma PA (elaboração própria).

Nesse caso, mudamos a forma tradicional, encontrada nos livros didáticos, para a representação de um problema de interpolação que, frequentemente, sugere o seguinte: $(a_1\ ; \_\_\_\ ; \_\_\ ; a_4)$ o que não possibilita uma interpretação geométrica e dinâmica desta nova noção.

Nível 4 Prova/validação – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo saber. Além disso, todas as argumentações devem ser revistas e testadas, como também identificados os elementos que podem causar maior incompreensão.

Comentário. Com uma formação sólida, para o professor de Matemática, a atividade de prova e, subsequente demonstração, assumem espaço privilegiado neste nível se nos restringirmos a uma aula tradicional; convém lembrar, entretanto, a diferença entre os termos prova e demonstração que, aparentemente, para muitos, são a mesma coisa.

Na tese de Pedemonte (2002, p. 15) encontramos a classificação dos esquemas de *prova matemática*. Conforme a autora, os níveis caracterizados por alguns autores discutidos em seu trabalho podem ser descritos como: *esquemas de provas externas de convencimento; esquemas de provas empíricas; esquemas de provas analíticas*. A hipótese levantada é que para produzir uma *demonstração axiomática*, o aluno deve passar gradualmente por estes tipos de *prova*.

Além disso, quando se estabelece o momento de maior rigor e formalismo (nível 4, assumiremos a ideia de que o conhecimento matemático produzido deverá constituir uma teoria de fato e ser reconhecida como tal, isto é, aceita numa comunidade científica que desconsidera a necessidade de buscar a origem dos argumentos que utiliza; portanto, este momento é o da apresentação da *demonstração matemática que se apóia sobre um corpo de conhecimentos fortemente institucionalizados... os quais possuem a validade socialmente partilhada*. (BALACHEFF, 1984, apud, JOSHUA & DUPIN 1993, p. 291).

Nesse contexto, Douady (1984, p. 17) explica que *o saber se difunde de modo diverso entre os alunos. Oficializar certos conhecimentos, atribuindo-lhes um estatuto de objeto matemático, é condição de homogeneização na classe*.

Ainda no nível 4, o professor poderá estimular, passo a passo, a descoberta dos teoremas (e contra exemplos) que enunciamos em seguida. Lembramos que podem ser inventadas diversas *demonstrações* para os teoremas que enunciamos na figura 9; contudo, destacamos a magnífica abordagem encontrada na obra de Lages (2004).

Teorema$_1$ **:** O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical e, reciprocamente, dada uma reta vertical ao eixo 0x, obtemos uma única função afim, cujo gráfico coincide com a tal reta.

Teorema$_2$: Uma função afim leva uma PA numa PA e, reciprocamente, se temos uma função f(x) = y que leva PA, esta deve ser afim.

Teorema$_3$: A função inversa de uma função do tipo f(x) = ax + b é afim.

Figura 9: Teoremas que permitem um aprofundamento a posteriori.

Neste último nível, o professor pode conduzir seu ensino segundo as orientações de Lakatos (1978, p. 74), que classifica as provas matemáticas em pré-formais, formais e pós-formais.

Trabalhamos neste nível, predominantemente, os aspectos *formais* e *pós-formais* envolvidos em cada *situação didática*. Os teoremas da figura 10 podem compor os conhecimentos relacionados ao que ele chama de *pós-formais*. Em relação a este tipo de conhecimento, Lakatos (1978, p. 79) explica que *frequentemente os estudantes de lógica deparam com provas que verificam às vezes mais do que se espera demonstrar*.

Ele exemplifica o caso dos axiomas de Peano que satisfazem não apenas à família dos números naturais, mas também a outras estruturas esquisitas. Finaliza afirmando que este último tipo de prova se relaciona com algum tipo de incerteza por conta das possibilidades até então não pensadas (LAKATOS, 1979, p. 69).

SAIBA MAIS!

Obtenha mais informações sobre o matemático italiano Giuseppe Peano, acessando o site http://www.somatematica.com.br/biograf/peano.php

Dessa maneira, deparamos um momento didático em que o mestre tem a oportunidade de generalizar as ideias abordadas e relacionar determinadas ligações conceituais necessárias para a caracterização de um novo conhecimento conceitual, possibilitando nova sequência de aprendizagem.

Para esclarecer melhor esta possibilidade e influenciando-nos nas considerações de Lakatos (1976, p. 142), quando aconselhava *a fuga do estilo dedutivista de raízes euclidianas*, orientamos no sentido de que, no final da *sequência de ensino* anterior, o professor pode trabalhar propriedades e relações, até o momento não identificadas, nos quatro níveis anteriores.

Nossa argumentação adquire sentido ante às seguintes indagações: podemos afirmar, com arrimo do gráfico mostrado na Figura 10, que temos uma função definida do eixo Ox para o eixo Oy, que leva uma PA numa PA?

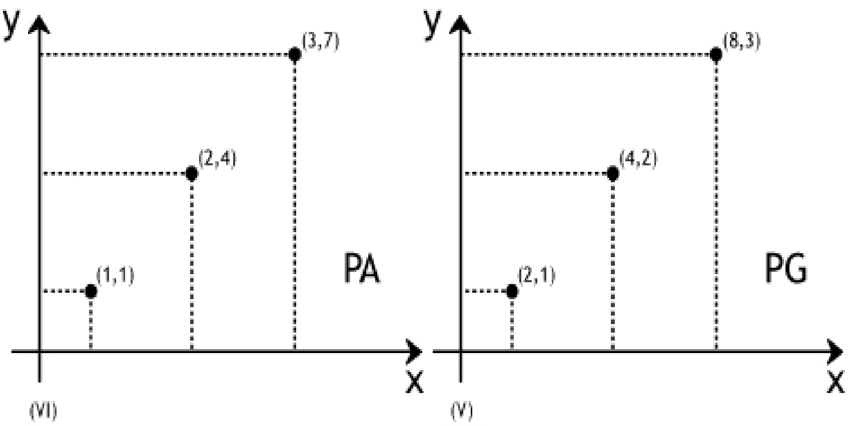


Figura 10: Relações entre PA e PG (elaboração própria).

Com o amparo do gráfico, podemos assinalar, ainda, que temos uma função definida do eixo Oy para o eixo Ox. Que tipo de função leva uma PA numa PA? Que tipo de função leva uma PA numa PG? E no caso de uma progressão geométrica?

Por outro lado, podemos generalizar o processo de obter a razão da sequência, com base nas representações geométricas. No processo de obtenção, empregamos o modelo de *Indução Matemática*.

De fato, observando as figuras 11 e 12, temos que:

INDUÇÃO

$$r = \frac{a_2 - a_1}{2-1} = \frac{a_3 - a_2}{3-2} = \ldots \quad = \quad \ldots \frac{a_n - a_{n-1}}{(n)-(n-1)}$$

Figura 11: Obtenção generalizada da fórmula da razão.

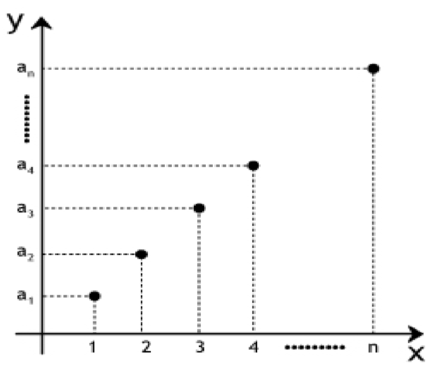


Figura 12: Generalização do método geométrico de obter da razão (elaboração própria).

Finalmente, quando consideramos o $Teorema_3$ da Figura 10, podemos passar a considerar a sequência $\{b_1, b_2, b_3, ...\} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que descreve a relação do gráfico acima do eixo Oy para o eixo Ox (Figura 13). Introduzindo esta nova notação, temos então que $b_1 = 1;\ b_4 = 2;\ b_7 = 3$. Podemos observar que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também deverá ser uma PA, em virtude deste teorema, de razão $r = 1/3$.

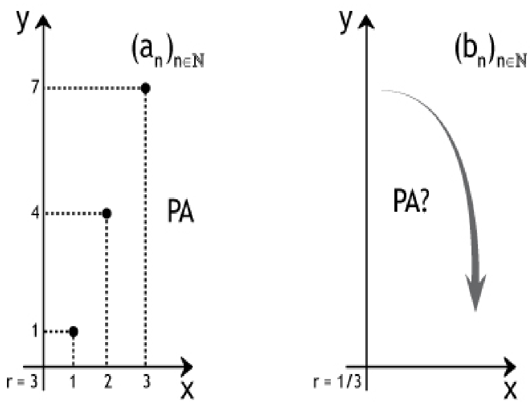


Figura 13: Relações entre a inversa de uma P. A.

No próximo tópico, apresentamos outra aplicação da Tipologia das Situações Didáticas formuladas por Brousseau ao conceito de Progressões Geométricas – P. G.

TÓPICO 4

Exemplo e aplicações da Tipologia das Situações Didáticas - TSD no Ensino Médio: o caso das progressões geométricas – P. G.

Objetivo

- Descrever a aplicação da TSD ao conceito de P. G

A escolha do assunto relacionado a progressões geométricas se deve às colocações preocupantes de Lima (2001, 464), ao mencionar que *não é feita a conexão entre P.G. e função exponencial, nem são oferecidos problemas não-artificiais que exibam situações de fato onde se poderiam usar P.G.´s ou funções exponenciais*.

O aspecto apontado por Lima diz respeito ao aprendizado de conceitos desconectados, sem uma aparente relação. No ambiente de formação de professores, suas consequências são mais nítidas, uma vez que, ao ser submetido a um ensino estanque e compartimentalizado por parte dos seus formadores, de modo semelhante o futuro professor reproduzirá sua ação docente.

Ao analisar a obra de Bonjorno & Giovanni, Lima (2001, p. 177) menciona que:

> Tal como acontecia nas progressões aritméticas, a classificação das progressões geométricas é extravagante: uma progressão não é crescente por ser uma sequência crescente; é crescente, por definição, por ter $q>1$ e $a_1>0$ (ou $0<q$ e $a_1<0$), e não se faz nenhuma ligação com as noções de função crescente e decrescente, já vistas no mesmo volume. [..] O termo geral é apenas conjecturado a partir de exemplos, e indevidamente generalizado.

Vejamos a organização dos níveis de ensino

Nível 1 Situação de ação – apresentação do problema ou de um teorema. Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema para o aluno ou um grupo de alunos, que devem possuir meios de atacá-lo mesmo mediante a aplicação do conhecimento a ser ensinado.

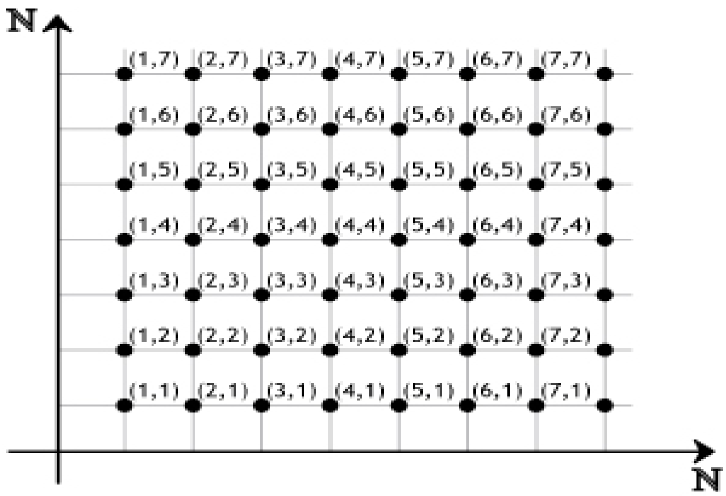


Figura 14: Situação geométrica relacionada ao problema de P. G (Elaboração própria)

Vamos assumir hipoteticamente a ideia de que o aluno escolhe e liga os pontos (Figura 14): $(1,2)$; $(2,4)$; $(3,8)$; $(4,16)$; $(5,32)$; .... Podemos, no entanto, propor aos estudantes conjecturar o valor de $(7,?)$ ou $(12,?)$, ou ainda $(50,?)$. Em operações deste tipo, podemos recorrer ao *software Maple 10*, e fornecer uma grande listagem dos elementos da P.G. acima, descrita por $a_n = 2^n$, para $n \geq 0$.

Nível 2 <u>Situação de Formulação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema</u>. (Destinado à discussão e debate, envolvendo os elementos: *professor-alunos-saber*).

Comentário. Neste nível, a formulação e a adoção da simbologia conveniente podem ser estimuladas; lembrando que, segundo o modelo *standard* dos livros didáticos, designamos uma sequência por $(a_1;a_2;a_3;.....;a_n;....)$. Em nosso caso, conduzimos, por meio do diagrama da Figura (1), o aluno a realizar a ligação entre $a_n = f(n)\ .\equiv.\ (\mathrm{n,f(n)}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Neste nível, permanecemos explorando a "*intuition of*", entretanto, a atenção recai paulatinamente sobre uma simbologia que remete ao conceito, ao objeto. Aqui fazemos uso do processo mental chamado de *comparação seletiva*.

Nível 3 <u>Validação/solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema</u>. Aqui os alunos, organizados em grupos de cinco, devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas *argumentações* outros grupos (exploração da *combinação seletiva*).

Comentário. Neste nível, estabelecemos uma notação. Vale esclarecer que, apesar da notação $(n, f(n))$ ser pouco operacional, ela explicita a relação funcional onde a *progressão* está definida, como uma função do tipo $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, o que estimula a *combinação seletiva*. Por outro lado, Gondino (2004, p. 20) lembra que *uma das concepções comuns em muitos matemáticos, se caracteriza em considerar que o aluno deve adquirir primeiro as estruturas matemáticas fundamentais de forma axiomática. Supõe-se que, uma vez adquirida esta base, será fácil que o aluno por si só possa resolver aplicações e resolver exercícios*.

Neste nível, o licenciando e futuro professor de Matemática deveria saber que a única função que pode apresentar a propriedade do conjunto $(1,2)$; $(2,4)$; $(3,8)$; $(4,16)$; $(5,32)$; .... inicial escolhido é uma *função exponencial*. Uma *função afim* ou uma *função polinomial do 2º grau* não satisfazem esta propriedade.

Nível 4 Prova/demonstração – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo *saber*. Além disso, todas as argumentações devem ser revistas e testadas e identificados os elementos que podem causar maior incompreensão.

Comentário. Neste nível, discutiremos de modo particular as afirmações e detalharemos as argumentações fornecidas por Lima (2004, p. 183). A ideia, comumente usada em Matemática, é preencher as lacunas. Nossa intenção é fornecer indicações do modo pelo qual o licenciando deve aprender a estudar Matemática pois, se ele não consegue completar as lacunas de uma obra didática que, em geral, são muitas, em virtude da economia e otimização do custo, ele não aprende. Consequentemente, ensinará de um modo restrito e deficitário. Apresentamos, então, o primeiro teorema.

> $Teorema_1$ Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ uma função monótona e injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes: (1) $f(n\cdot x)=\left(f(x)\right)^n$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e todo $x\in\mathbb{R}$; (2) $f(x)=a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, onde $a=f(1)$; (3) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$.

Enunciamos um exemplo de teorema com o qual o aluno de graduação sente dificuldades para compreender. A ideia é realizar o ciclo de equivalências $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$. Muitos teoremas da Matemática escolar podem ser considerados dentro deste tipo de raciocínio. Curiosamente, esta formulação é banida nos livros-textos. Um exemplo disso, para ilustrar, é o caso de *definições formais* equivalentes do mesmo objeto matemático, que nomeamos como função injetora.

O $Teorema_1$, porém, requer a utilização do seguinte lema.

Lema: fixando o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$, existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: de acordo com o enunciado, vamos tomar um intervalo qualquer $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$, onde assumimos que $0 < \alpha < \beta$. A ideia deste teorema é provar a existência de um certo $a^r \in [\alpha, \beta]$.

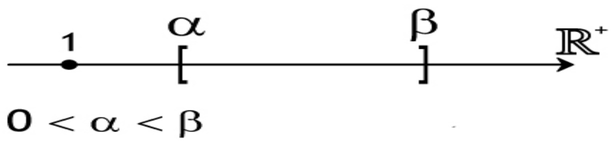


Figura 15: Disposição na reta

O primeiro caso, analisado por Lima (2004, p. 177), diz respeito à situação $a, \alpha > 1$. Assim, sabemos que o comportamento das potências de expoentes naturais maiores do que 1 crescem de modo ilimitado. Assim, desde o inicio fornecemos um $1 < a$; mas temos três possibilidades: (i) $1 < a < \alpha < \beta$; (ii) $1 < \alpha < a < \beta$ ou (iii) $1 < \alpha < \beta < a$. Representamos a situação abaixo.

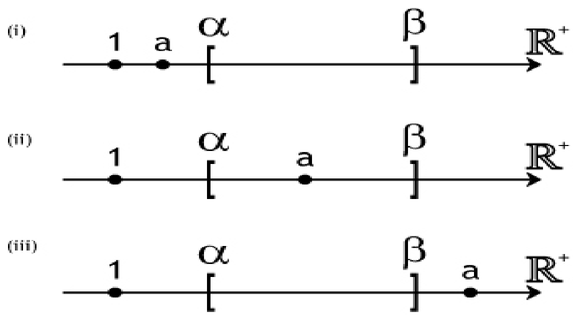


Figura 16: Casos possíveis.

Em qualquer situação, no entanto, sabemos por indução matemática, que:

$1 < a < a^2 < a^3 < ...... < a^n < a^{n+1} < .....$ é uma sequência de números *reais ilimitada superiormente*. De fato, intuitivamente, vemos na Figura 3, no tópico inicial, o comportamento de $g(n) = 3 \cdot 2^n$, onde $a = 2$. Contudo, se consideramos por exemplo a função $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ses (i), (ii) ou (iii), existirá um $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1 < \alpha < \beta < a^{M_0}$. Por outro lado, vejamos que, desde o início, consideramos $\alpha < \beta \leftrightarrow 0 < \beta - \alpha$. Por conseguinte, consideramos a seguinte fração $\frac{\beta-\alpha}{a^{M_0}}$. Podemos inferir rapidamente que:

$0<\frac{\beta-\alpha}{a^{M_0}}$, uma vez que tanto o numerador como o denominador são maiores do que 0; mas, se argumento que usamos há pouco aplicado para potências de $1<\left(\frac{\beta-\alpha}{a^{M_0}}+1\right)$, pode-se encontrar uma potência $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $1<a<\left(\frac{\beta-\alpha}{a^{M_0}}+1\right)^{n_0}$. Assim, extraindo a raiz, segue que $0<1<a^{1/n_0}<\left(\frac{\beta-\alpha}{a^{M_0}}+1\right)\leftrightarrow 0<a^{M_0}\cdot a^{1/n_0}<\beta-\alpha+a^{M_0}$.

Ou ainda:

$0<a^{M_0}\cdot(a^{1/n_0}-1)<\beta-\alpha\leftrightarrow 0<(a^{M_0/n_0}-1)<\beta-\alpha$. Observamos agora o comportamento da expressão a^{M_0/n_0}. Com respeito ao seu expoente, Lima (2004, p. 178) impõe a seguinte condição $\frac{m}{n_0}\leq M_0\Rightarrow 1<a^{m/n_0}\leq a^{M_0}$. Portanto, temos

$0<a^{m/n}\cdot(a^{1/n}-1)\leq a^{M_0}\cdot(a^{1/n}-1)<\beta-\alpha$, assim, fazendo as contas, escrevemos $0<a^{\frac{m+1}{n}}-a^{\frac{m}{n}}<\beta-\alpha$; note-se, porém, que $\beta-\alpha$ é a amplitude do intervalo inicial $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}^+$. E fazendo variar as frações, com a condição $\frac{m}{n_0}\leq M_0$, poderemos obter os expoentes $\{0,\frac{1}{n_0},\frac{2}{n_0},\frac{3}{n_0},....,\frac{m}{n_0},M_0\}$ dos números $\{1=a^{0/n_0},a^{1/n_0},a^{2/n_0},a^{3/n_0},....a^{m/n_0},a^{M_0}\}$. Estes números são os extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que a amplitude $\beta-\alpha$ (Figura 17).

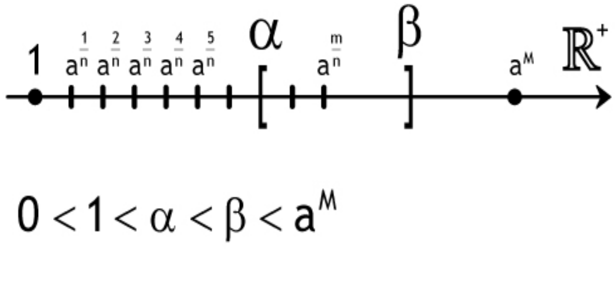


Figura 17: Situação geométrica (elaboração própria)

Lembrando da condição inicial $0<1<\alpha<\beta<a^{M_0}$, segue que algum destes

números, digamos $a^{m/n_0} \in [\alpha, \beta]$. Para um leitor curioso, sugerimos a comparação entre o texto da demonstração deste lema, que ocupa menos de 15 linhas; sem mencionar que Lima (2004, p. 178) deixa os casos: (a) $a, \alpha < 1$; (b) $\alpha < 1 < a$ e (c) $a < 1 < \alpha$ a cargo do leitor.

Uma tarefa desta natureza, para um licenciando em Matemática, é mais importante do que calcular $Lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3 y}{x^2 + y^2}$. Afinal, tal tarefa envolve um saber que será ministrado efetivamente na escola; mas, vejamos o próximo teorema.

Na sequência, Lima demonstra a implicação mais difícil $(1) \to (2)$, usando este lema. De fato, admitindo (1), ou seja, $f(n \cdot x) = \left(f(x)\right)^n$, tomamos $r = \dfrac{m}{n} (m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}) \therefore n \cdot r = m$. Assim, temos $\left(f(r \cdot x)\right)^n \overset{(1)}{=} f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) \overset{(1)}{=} f(x)^m$.

Obtemos então:

$\left(f(r \cdot x)\right)^n = f(x)^m \leftrightarrow f(r \cdot x) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$. Lima na sequência comenta que, quando colocamos $f(1) = a$, escrevemos: $f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, o que verifica a propriedade desejada em $\mathbb{Q}$.

Para completar a demonstração de que $(1) \to (2)$*, suponhamos, a fim de fixar as ideias, que f seja crescente, logo* $1 = f(0) < f(1) = a$*. Admitamos, por absurdo, que exista um* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \neq a^x$*. Digamos, por exemplo, que seja* $f(x) < a^x$ (LIMA, 2001, p. 184).

Assim, considerando o intervalo $[f(x), a^x]$ e empregando o mesmo raciocínio que o lema anterior, encontramos $r \in \mathbb{Q}$ tal que:

$a^r \in [f(x), a^x] \leftrightarrow f(x) < a^r < a^x$. Mas desde que a função é crescente, e tendo que $f(x) < a^r = f(r) \leftrightarrow x < r$. Por outro lado, desde que $a^r < a^x$ e lembrando que $1 < a$, devemos ter que $r < x$. Esta contradição prova que $(1) \to (2)$. Ele finaliza dizendo que as implicações $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ são óbvias.

De fato, , admitindo a condição $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (2), de imediato, teremos $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, o que demonstra a condição (3).

Passamos a apresentar o segundo teorema.

Teorema$_2$: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona e injetiva tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0) \in \mathbb{R}^+$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Após apresentar e demonstrar o teorema 2, Lima (2004, p. 185) considera um P.A. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de razão h, ou seja, $x_{n+1} - x_n = h$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, os valores $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, segundo Lima, formam uma P.G.

De fato, observamos que:

$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{f(x_3)}{f(x_2)} = ... = \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = ... =$ ou ainda, $\frac{b\cdot a^{x_2}}{b\cdot a^{x_1}} = \frac{b\cdot a^{x_3}}{b\cdot a^{x_2}} = ... = \frac{b\cdot a^{x_{n+1}}}{b\cdot a^{x_n}} = ... =$, que equivale a (com $b \neq 0$),

$a^h = a^{x_2 - x_1} = a^{x_3 - x_2} = ... = a^{x_{n+1} - x_n} = ...$. Portanto, de razão $q = a^h$, lembrando que h é a razão da P.A.

> Teorema$_3$: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numa progressão geométrica $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $y_i = f(x_i)$ para $i \in \mathbb{N}$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, teremos que $f(x) = b\cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Após descrever brevemente suas hipóteses, Lima (2004, p. 186) toma $x \in \mathbb{R}$ um elemento fixo, mas arbitrário e admite que os termos $(x, 0, -x)$ formam uma P.A. Por definição, porém, temos: $0 - x = -x - (0) = -x = (raz^a o)$. Assim, tal P.A. é levada por hipótese em uma P. G. Assim, temos a P. G. $(g(x), g(0), g(-x))$.

Se esta última sequência, no entanto, é uma P.G., devemos ter a condição $\frac{g(0)}{g(x)} = \frac{g(-x)}{g(0)} = q\ (cte)$, mas isto equivale a $\frac{g(-x)}{g(0)} = \frac{g(0)}{g(x)}$, onde g é uma função definida inicialmente por $g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}$. Assim, $g(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1 \therefore$ $g(-x) = \frac{1}{g(x)} = (g(x))^{-1}$.

Na sequência, Lima considera a sequência $(0, x, 2x, 3x, 4x, ..., nx, ...)$ uma P.A. Assim, por hipótese, teremos a P.G. descrita por $(g(0), g(x), g(2x), g(3x), g(4x), ..., g(nx), ...)$ *é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é* $g(x)$ (LIMA, 2004, p. 186). O sentimento de *evidência matemática* para o matemático é bem diferente do sentimento de evidência de um licenciando. Assim, verificamos que $g(x)=\frac{g(x)}{g(0)}=\frac{g(2x)}{g(x)}=\frac{g(3x)}{g(2x)}=.....=\frac{g((n+1)x)}{g(nx)}=....$; visto que $g(0)=1$.

Mais adiante, ele afirma que $g(n\cdot x)=\left(g(x)\right)^n$ para $n\in\mathbb{N}$; mas o licenciando precisa verificar esta propriedade por indução. De fato, temos que $g(x)=\frac{g(x)}{g(0)}\rightarrow g(x)=g(0)\cdot g(x)=1\cdot g(x)=g(x)^1$ Escrevemos em seguida que $\frac{g(x)}{g(0)}=\frac{g(2x)}{g(x)}\rightarrow g(2x)=\left(g(x)\right)^2$. Assim, continuamos nossa argumentação, usando a igualdade $\frac{g(2x)}{g(x)}=\frac{g(3x)}{g(2x)}\rightarrow g(3x)=\frac{g(2x)\cdot g(2x)}{g(x)}=\frac{\left(g(x)\right)^2\cdot\left(g(x)\right)^2}{g(x)}$, segue que $g(3x)=\left(g(x)\right)^3$. Assumindo a hipótese de indução, temos: $g(n\cdot x)=\left(g(x)\right)^n$, entretanto, para verificar o próximo passo, observamos que $g(x)=\frac{g((n+1)x)}{g(nx)}$.

Segue que: $g(nx)\cdot g(x)=\left(\left(g(x)\right)^n\right)\cdot g(x)=\left(g(x)\right)^{n+1}$. Na sequência, Lima (2004, p. 186), usando a igualdade $g(-x)=\left(g(x)\right)^{-1}$ verifica a propriedade para valores em $n\in\mathbb{Z}$ e $x\in\mathbb{R}$. O teorema 3 é essencial para o conhecimento do futuro professor. Ele nos diz que a única função que leva uma P.A. numa P.G. é uma função exponencial do tipo $f(x)=b\cdot a^x$; como também vale lembrar que a única função que leva uma P.A. numa P. A. é do tipo $f(x)=ax+b$. Esse conhecimento conceitual que relaciona modelos e objetos da Matemática deveria ser natural na formação de um professor. Por outro lado, se ele adquire um conhecimento fragmentado e sem conexão, o mesmo ocorrerá na sala de aula durante a sua regência.

Por fim, salientamos que, embora o último nível previsto na sequência de ensino proposta por Brousseau referencie um saber nem sempre discutido no ambiente escolar, todavia, o professor deve conhecê-lo a ponto de modificá-lo a adaptá-lo ao nível de sua clientela.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Descreva uma situação de ação, formulação, validação e institucionalização para o conceito de função e para o conceito de função injetora.

2) Descreva uma situação de ação, formulação, validação e institucionalização para o conceito de função logaritma e para o conceito de função exponencial.

3) Analise os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização discutidos no livro de Didática da Matemática e execute o mesmo procedimento com respeito ao conceito de Matrizes e suas propriedades.

4) Analise os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização discutidos na apostila de Didática da Matemática e execute o mesmo procedimento com respeito ao conceito de Determinantes e suas propriedades.

5) Analise os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização discutidos na apostila de Didática da Matemática e execute o mesmo procedimento com respeito ao conceito de Números complexos e suas propriedades.

AULA 6

Tipologia das Situações Didáticas no ensino de Matemática

Olá, aluno (a)!

Nesta aula, iremos estudar algumas situações didáticas que estão diretamente relacionadas ao ensino da matemática. Você deve refletir sobre elas e quais suas implicações dentro do processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Objetivo

- Conhecer as técnicas, visões e situações didáticas relacionadas ao ensino e aprendizagem da matemática

TÓPICO 1

Que metodologia de ensino empregar

Objetivo

- Descrever perspectivas diferenciadas para o ensino de Matemática

Nas aulas anteriores, discutimos as noções mais importantes formuladas por Guy Brousseau e as aplicamos a determinados conteúdos específicos. Nesse momento, algumas questões são sempre abordadas e relacionadas de modo íntimo a tal discussão. Uma delas nos parece recorrente e, geralmente, merece atenção das pessoas, mesmo aquelas que não são especialistas na área de ensino/aprendizagem em Matemática, é a que se refere à metodologia do ensino.

Segundo Polya (1973, p. 1), o professor deve

> Auxiliar o estudante. Essa é uma das maiores tarefas do professor. Esta tarefa não é uma das mais fáceis, pois demanda tempo, prática, devoção e princípios definidos. O estudante deve adquirir experiência e trabalho independente tanto quanto possível. Todavia, se o mesmo for deixado sozinho com seu problema, sem auxílio ou apoio insuficiente, ele poderá não manifestar progresso algum. Mas se o professor auxiliar demais, nada restará para o estudante.

SAIBA MAIS!

No campo das matemáticas - assim entendidos os vários saberes que a disciplina engloba -, esse trabalho vem avançando e o francês Guy Brousseau é um dos responsáveis por isso. Mais informações no site http://educarparacrescer.abril.com.br/aprendizagem/guy-brousseau-473927.shtml

No caso da Matemática, encontramos com facilidade concepções fundamentadas no senso comum, dando conta da possibilidade da existência de uma metodologia do ensino que funciona ou é aplicável a todos os conteúdos. Para o professor de Matemática em formação, deve ficar claro que: **não existe uma proposta metodológica que viabilize qualquer conteúdo de Matemática a todos!**

Destacamos que a concepção de Brousseau apresenta um avanço sem precedentes, uma vez que ela foi gerada a partir da sistematização de atividades em campo. A testagem operacional e dos dados obtidos diretamente no ensino do professor francês Brousseau, todavia, apresenta a mesma proposta de outros ensinos e se manifesta em um campo de aplicação eminentemente que contempla o ensino fundamental.

Por outro lado, no que diz respeito à desinformação de algumas pessoas quanto a possibilidade da existência de uma metodologia única para o ensino, isso pode se agravar de modo considerável quando compreendemos as colocações de Lima (2001, p. 462), esse caracteriza o hábito do professor, ao declarar que:

O livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor para realizar o seu trabalho. Dele são tiradas as listas de exercícios, é nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com a classe.

GUARDE BEM ISSO!

Não podemos esperar que a mesma estratégia que funciona para aprendizagem da multiplicação sirva de modo perfeito para a aprendizagem em Geometria Analítica, ou a mesma estratégia de ensino para frações seja perfeita para o ensino de funções logarítmicas.

A referência destacada pelo autor diz respeito à lacuna acadêmica no ambiente de formação do futuro professor de Matemática, no que se refere às concepções de ensino de sua matéria. Concepções a respeito de um saber que não conseguimos discernir com clareza se distanciados da prática e de situações vivenciadas com o outro em torno do *saber matemático*.

Retomando as colocações de Lima (2001), extraímos uma preocupante consequência: na ocasião em que o futuro professor, egresso em uma IES, não manifeste em sua formação, de modo substancial, noções e teorias acerca de 'propostas metodológicas' de ensino em Matemática, sua principal proposta a ser adotada se constitui a partir do livro didático.

Como consequência disso, concluímos que sua metodologia será a do próprio livro didático. Mas essa estratégia metodológica envolve vários riscos. A primeira é que, geralmente, o modo de apresentação dos livros didáticos gira em torno da seguinte estrutura: *definição* matemática $\Rightarrow$ teoremas $\Rightarrow$ exercicios de aplicação $\Rightarrow$ definição.... A ideia, pelo menos no ambiente acadêmico de formação, é que, uma vez submetido a este tratamento, o aluno sem dúvida aprenderá o conteúdo.

Mas antes de discutirmos de modo pormenorizado as limitações desse modo 'linear de aprendizagem', salientamos outro entrave, observado ainda no âmbito da formação de professores. Para exemplificar, sugerimos retomar a figura insigne de nosso jovem professor fictício que nominamos de Pierre Laurisse. No decorrer de sua formação, o mesmo aprendeu tudo sobre trigonometria, entretanto, sua aprendizagem se restringiu ao aspecto lógico-formal da teoria. Entretanto, numa ocasião qualquer, Pierre Laurisse recebeu uma oferta irrecusável de lecionar em uma enorme escola e que, pelos comentários, remunerava muito bem os profissionais. Mas o coordenador de área, responsável pela sua inserção em sala de aula, destacou que Pierre contava apenas com uma semana até o início de suas aulas. Para o professor, aquela notícia foi um verdadeiro choque, além de não dispor de muito tempo para preparar suas aulas de trigonometria, sentiu pela primeira vez a pressão de desenvolver uma argumentação que possibilitasse a compreensão do outro, do estudante. Sem mencionar que, em determinadas ocasiões, no âmbito psicológico pessoal, ele próprio ainda não se via como professor, e sim como um aluno. Na fase final do episódio delicado vivenciado de modo fictício também por nosso personagem, ele se depara com outro problema.

De fato, Pierre sente que domina todo aquele conteúdo, entretanto, como mediar o saber relativo em sala de aula? Como adotar um tempo didático que proporcione o tempo de aprendizagem para todos? Como desenvolver mecanismos que despertem o interesse e atenção constante dos seus futuros alunos? Adotar para cada turma uma metodologia diferente ou repetir a mesma coisa em todas as turmas?

Reconhecidamente, esses últimos questionamentos podem ser respondidos de modo simplista apenas na opinião de quem carrega consigo uma bagagem muito limitada de Matemática ou para aqueles que nunca vivenciaram uma situação como esta corriqueira para o professor em formação. De modo sistemático, apresentamos uma figura abaixo que delineia bem os momentos e fases enfrentadas por Pierre Laurisse.

Figura 1: Fases da evolução de um domínio de conteúdo

Note que destacamos uma interrogação no estágio final do processo. Ademais, tais fases não se sucedem de modo suficientemente próximos no ambiente de formação. Nesse sentido, encontramos cursos de formação em que o aluno estuda um conteúdo de Matemática do ensino escolar, depois de vários semestres, discute algo relacionado a uma metodologia, de modo geral, não particular e que considere a especificidade de cada conteúdo escolar e, quase no final do curso, se familiariza com a realidade escolar, mas desconsiderando as influências da aprendizagem daquele mesmo conteúdo.

Nesse momento, gostaríamos de destacar o nosso desconhecimento relativo ao qual pessoas acreditam que alunos em formação conseguem se apropriar de teorias generalistas que envolvem ideias distanciadas da realidade, relacionadas à Ciência, e que estes mesmos estudantes, algum dia, efetivarão a operacionalização, ao longo de sua evolução profissional, destas ideias e teorias em sala de aula. Na Figura 1, já se pode prever algumas dificuldades na efetivação de uma <u>teoria metodológica</u> cunhada especificamente para o ensino de Matemática, o que dizer sobre 'teorias metodológicas generalistas' concebidas em outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, os autores Furkotter & Morelatti (2007 p. 230) salientam sua importância quando se reportam ao período do estágio supervisionado e sublinham:

> Dessa forma, está vinculado a um projeto, avaliado conjuntamente pela escola de formação inicial e as escolas campo de estágio, com objetivos e tarefas claras e com as duas instituições assumindo responsabilidades e se auxiliando mutuamente. As atividades envolvem construção de proposta metodológica para conteúdos temáticos escolhidos pelos licenciandos, aplicação, avaliação e retomada dos mesmos, levando em conta as características dos alunos do ensino fundamental e médio, as necessidades da sociedade atual e os princípios e objetivos do projeto político pedagógico da escola.

A discussão que trazemos nesta aula é antiga, entretanto, nos dias atuais, ainda nos deparamos com problemas que se inserem justamente no mesmo assunto. Para tanto, na Figura 2, trazemos uma questão exigida no ENADE/2008. Seu conteúdo explora um objeto matemático que vai se tornando, ou pelo menos deveria se tornar, familiar ao professor de Matemática, a partir de inúmeros pontos de vista.

Questão 34

Observe a seguinte atividade de construções geométricas.

- Construir um triângulo $\widehat{ABC}$ qualquer.
- Traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ e, em seguida, a bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$.
- Marcar o ponto de encontro dessas duas bissetrizes.
- Traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$.
  O que você observa?

Será que, se você recomeçar a construção a partir de outro triângulo, chegará à mesma observação?

O uso de um software de geometria dinâmica na execução dessa atividade e de outras similares

(A) pode mostrar que o estudo das construções com régua e compasso é desnecessário.

(B) dispensa a demonstração dos resultados encontrados pelos alunos.

(C) prejudica o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

(D) dificulta o desenvolvimento do pensamento geométrico.

(E) pode contribuir para a elaboração de conjecturas pelos alunos.

Figura 2: Questão proposta pelo ENADE/2008.

Desde que o foco principal é a Geometria Plana, questionamos se, no decorrer do período de formação, o licenciando adquire conhecimento, em uma única disciplina, para formular estratégias de solução para o problema proposto? Nossa posição é de total descrédito, ou seja, dificilmente um licenciando adquire perspectivas diferenciadas em relação ao mesmo conteúdo no sentido de lhe fornecer subsídios para lidar com situações concretas em sala de aula.

Nosso ponto de vista, inicialmente, observa que o professor estuda Geometria Plana e, numa parte do estudo, familiariza-se com 'construções geométricas'. Já vimos que, no momento inicial, sua preocupação é o '*saber para si*'. Num segundo momento, após um período de amadurecimento daquele conteúdo, ao longo da formação acadêmica, podemos 'prevê uma preparação que deverá instigar neste sujeito o '*saber para explicar/convencer*'.

Infelizmente, a história não termina nesta fase, visto que, numa determinada altura de desenvolvimento do curso, o acadêmico deve ter contato com algum *software* matemático, afinal falamos de um ensino de Matemática que tenha de fato ultrapassado a fase do Paleolítico. E existem vários *softwares* que possibilitam a exploração de 'construções geométricas'. Assim, num terceiro momento, o estudante deverá familiarizar-se com a sintaxe do *software*, suas potencialidades e aplicações, só então é que se pode falar na compreensão e limitação deste próprio *software* como instrumento tecnológico, para a explicação de uma teoria dentro da Geometria Plana. Na última fase é que o professor terá condições de explorar, de modo concomitante em sua aula, o aparato axiomático formal das construções geométricas com o recurso tecnológico, comparando-os e identificando possibilidades e limitações.

De modo resumido, apresentamos as fases simplificadas na sequência que caracterizam, no decorrer do período de formação, as mudanças sofridas na perspectiva de um professor, com respeito ao mesmo conteúdo matemático, até a etapa final que se consubstancia de fato com o ensino.

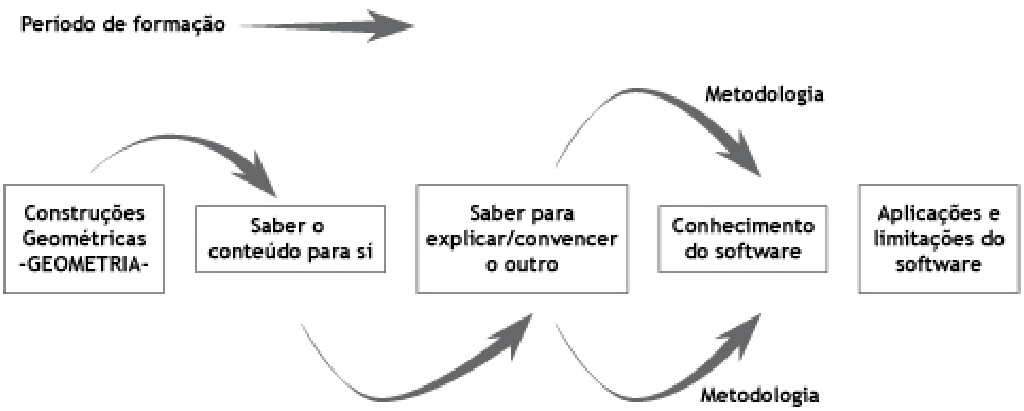


Figura 3: Fases e mudanças que ocorrem durante a formação do professor.

Conforme já anteriormente citado, a transição individual que deve sofrer o futuro professor de Matemática, no que diz respeito ao domínio de um 'conhecimento para si', seguindo na direção de um 'conhecimento para explicar/convencer', o aprendiz pode exigir um longo período de tempo. Aos olhos de um leigo, que nunca necessitou aprender um conteúdo como Números Complexos ou Geometria Espacial com vistas ao ensino, tudo pode parecer fácil e rapidamente operacionalizado num único momento, ou melhor, dizendo, numa única disciplina.

O tipo acima de questão presente no ENADE/2008 não é único. Neste exame e em outros (ENADE/2005), identificamos outras situações-problema, contextualizadas e que exigem um conhecimento situacional, tácito do professor, relacionado ao saber mobilizado pelo trinômio $aluno - saber\ matemático - professor$. O que se constata, na maioria dos casos relativos aos quadros de formação de professores, é a preparação propedêutica e generalista relativa a conteúdos que envolvem teorias gerais e que no final das contas, tudo ficará a cargo do futuro professor, equacionar, relacionar, interligar e sistematizar aquelas ideias que poderiam lhe auxiliar em sala de aula.

Nesse sentido, são ilustrativas as colocações de Blanco (2003, p. 66) quando alerta que:

> Da mesma forma, o fato de conceituar o conhecimento do professor de Matemática como situado leva-nos a considerar o conhecimento que existe na mente dos professores e as situações nas quais ele é adquirido e usado, assumindo, assim, que o conhecimento é inseparável dos contextos e das atividades nos quais se desenvolve. Isso nos permite afirmar que o contexto em que uma atividade realiza-se é uma parte integral da atividade e esta é, também, parte integral da aprendizagem que acontece no contexto. A ideia que consideramos chave e que pode ser deduzida de tudo o que foi dito acima é que o conhecimento deveria ser aprendido em contextos que sejam significativos.

No excerto acima, a professora da Universidade de Sevililha, Maria Mercedes Garcia Blanco, destaca com veemência o caráter 'situacional do conhecimento do professor de Matemática'. Esse conhecimento possibilitará a efetivação de uma ação didático-metodológica mais ou menos eficiente em sala de aula.

Aqui fazemos questão de destacar com ênfase 'a sala de aula', pois será nesse contexto que o futuro professor necessitará mobilizar seus conhecimentos, sejam eles *pedagógicos*, sejam os *conhecimentos específicos*. É relevante pontuar, ainda, que é nesse ambiente que presenciaremos a testagem de sua metodologia e que não pode ser única e ditada pelos livros didáticos.

TÓPICO 2

As incongruências na área do ensino de Matemática

OBJETIVO

- Evidenciar aspectos limitados e contraditórios em determinadas visões de ensino de Matemática

Neste tópico, continuaremos a discutir algumas questões relacionadas ao ensino de Matemática. Mas antes de apresentarmos de fato nossa argumentação com a intenção precípua de evidenciar aspectos limitados e contraditórios em determinadas visões de ensino de Matemática, acreditamos na conveniência de abordar algumas ideias comungadas por Machado (2002, p. 33). Esse autor, no início do seu livro, chama a atenção com relação ao fato de que o tratamento matemático de um tema não se limita apenas à reapresentação do mesmo em linguagem matemática, nem transforma automaticamente este tema em Matemática.

Em seguida, com a intenção de ilustrar esse ponto de vista, o professor da Universidade de São Paulo, Nilson José Machado, discute a *Teoria Axiomática dos Fantasmas*. Ele recorda que, originalmente, a mencionada teoria é discutida pelo filósofo argentino Mário Bunge. De qualquer forma, para iniciar de modo sistemático a nossa teoria, vamos admitir como usualmente o fazemos em Geometria Plana, por exemplo, a adoção de algumas *noções primeiras* ou *noções primitivas*. Assim, consideramos:

$$U := \{\textit{conjunto} \text{ de fantasmas}\}\,;\; E := \{\textit{energia} \text{ fantasmal ou fantasmag rica}\}$$

$$d := \{\textit{densidade} \text{ ectoplasmática}\}\,; \qquad t := \{\textit{idade} \text{ do fantasma}\}\,;$$

$$N := \{O \text{ número de perversidades realizadas pelo fantasma até o tempo t}\}.$$

Conforme acima, quando escrevemos a simbologia $:=$, significa que estamos definindo algo no sentido matemático. Agora, após definirmos formalmente tais noções primitivas, enunciaremos alguns *axiomas* ou *postulados*. Seguem que:

> $Axioma_1$: Para todo fantasma $x \in U$, a energia deste fantasma x é diretamente proporcional à densidade do ectoplasma de $x \in U$ e inversamente proporcional à sua idade.
>
> Simbolicamente, temos: $E_{fantasma} = k_1 \cdot \dfrac{d}{t}$, onde $(t > 0 \text{ e } k_1 = cte)$.

> $Axioma_2$: Para todo fantasma $x \in U$, a energia deste fantasma x , a densidade do ectoplasma de x é uma função polinomial do 1º grau do número de perversidades que o fantasma já realizou. Simbolicamente, escrevemos: $d_{densidade} = k_2 \cdot N_{perversidades} + d_0$.

Note que já estamos admitindo que o 'fantasma' já possui uma densidade ectoplasmática inicial d_0 , relativo ao número de perversidades, com $k_2 = cte$.

> $Axioma_3$: Para todo fantasma $x \in U$, o número médio de perversidades realizadas até o tempo 't' é constante. Simbolicamente escrevemos $N_{Médio} = k_3$, onde $k_3 = cte$. Assim, para um tempo qualquer, o número de perversidades realizadas dependerá de $k_3 = cte$, escrevemos $N = k_3 \cdot t$.

Na sequência, Machado (2002, p. 35) extrai os seguintes teoremas, fazendo algumas modificações.

Demonstração: A partir dos axiomas $Axioma_1$ e $Axioma_2$, escrevemos:

$$E_{fantasma} = k_1 \cdot \frac{(d_{densidade})}{t} \overset{Axioma_2}{=} k_1 \cdot \frac{(k_2 \cdot N_{perversidades} + d_0)}{t} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot (N)}{t} + \frac{k_1 \cdot d_0}{t} =$$

$$= \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot (k_3 \cdot t)}{t} + \frac{k_1 \cdot d_0}{t} \overset{t>0}{=} \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot (k_3 \cdot 1)}{1} + \frac{k_1 \cdot d_0}{t} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 + \frac{k_1 \cdot d_0}{t} .$$

Portanto, temos que $E_{fantasma} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot \dfrac{d_0}{t}$.

Demonstração: Dado um fantasma $x \in U$, pelo teorema anterior, sua energia fantasmal é descrita por $E_{fantasma} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot \dfrac{d_0}{t}$, mas se tencionarmos saber como será sua existência num tempo bem mais no futuro, fazemos como no Cálculo $t \to +\infty$, assim temos $\lim_{t\to+\infty}(E_{fantasma}(t)) = \lim_{t\to+\infty}[k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot \frac{d_0}{t}] = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 + 0 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = cte$

Assim, o fantasma sempre permanecerá nas sombras, aprontando suas perversidades até o dia do julgamento final. Observe que , nesse caso, desconsideramos o "Gasparzinho", personagem de desenhos animados que é um fantasma camarada e por isso não faz perversidades $N := 0$. Na sequência, Machado (2002, p. 35) questiona o leitor:

> A partir de uma teoria assim apresentada, rapidamente muitos problemas podem ser formulados, ora sendo dados os valores de t, d e N e pedido o valor de N. Pode-se pedir, ainda, a partir de condições iniciais bem definidas, o valor da energia fantasmal do infinito, bem como o gráfico de E em função do tempo t, e outras tecnicidades mais.

As considerações de Machado (2002) servem de argumentação que contraria aquele professor que tem profunda certeza de que, lendo todos aqueles teoremas, ocorrerá aprendizagem, ou conhecendo bem todo o formalismo, a compreensão estará garantida. Como já mencionamos nas aulas passadas, os fenômenos relacionados à aprendizagem pertencem a um universo bem mais amplo do que o da própria Matemática.

Entretanto, Machado provoca reflexões interessantes, no que concerne à preocupação didático-metodológica do professor. Interpretamos sua contribuição essencial no sentido de se compreender algumas incongruências no ensino de Matemática. Uma delas diz respeito à crença que atribuímos ao *modelo matemático formal*.

De acordo com o já citado antes, um *modelo matemático formal*, por si só, não consegue produzir uma aprendizagem. O progresso do conhecimento do aprendiz ocorrerá na medida em que o professor opte por uma metodologia adequada. E para piorar a situação de modo considerável, recordamos que não existe uma única metodologia para o ensino de Matemática, pois, cada conteúdo matemático determina uma especificidade e, assim, nem sempre podemos empregar o mesmo princípio metodológico para todos os tópicos. Mas vejamos alguns exemplos:

$\mathrm{Pr}\,oblema_1$: Vamos supor que

$4^{x_1} = 5$; $5^{x_2} = 6$; $6^{x_3} = 7$; $7^{x_2} = 8$; .... ; $127^{x_{124}} = 128$. Quanto vale $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ......x_{123} \cdot x_{124} = ?$

$\mathrm{Pr}\,oblema_2$: Um círculo de centro $(0,k)$, com $k > 0$, é tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ e $y = 6$. Encontrar o raio do círculo.

$\mathrm{Pr}\,oblema_3$: O que é descrito no plano pela seguinte equação $(x+y)^2 = x^2 + y^2$?

$\mathrm{Pr}\,oblema_4$: A função polinomial $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, com coeficientes reais $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tais que $f(2i) = 0$ e f(2+i)=0. Estimar o valor de $a+b+c+d = ?$

Solução: $(\Pr oblema_1 :)$ Temos por hipótese que $4^{x_1}=5\ ;\ 5^{x_2}=6\ ;\ 6^{x_3}=7\ ;\ 7^{x_2}=8\ ;\ ....\ ;\ 127^{x_{124}}=128$. Mas observamos que podemos decompor $128=2^7=\sqrt{(4)^7}=4^{7/2}$, como uma simples propriedade com potências racionais. Por outro lado, observamos que $128=127^{x_{124}}=(127)^{x_{124}}=\left(126^{x_{123}}\right)^{x_{124}}=126^{x_{123}\cdot x_{124}}$. De modo semelhante, obtemos: $128=(126)^{x_{123}\cdot x_{124}}=\left(125^{x_{122}}\right)^{x_{123}\cdot x_{124}}=(125)^{x_{122}\cdot x_{123}\cdot x_{124}}$. Sucessivamente, concluímos:

$4^{7/2}=128=127^{x_{124}}=126^{x_{123}\cdot x_{124}}=....=4^{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot......x_{123}\cdot x_{124}}$. Assim, temos o seguinte valor $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot......x_{123}\cdot x_{124}=\frac{7}{2}$.

Notamos que podemos identificar outro padrão algébrico no $\Pr oblema_1$, basta notar que a partir da expressão desejada, temos: $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot......x_{123}\cdot x_{124}=(\log_4 5)\cdot(\log_5 6)\cdot(\log_6 7)\cdots\cdot(\log_{126}127)\cdot(\log_{127}128)$. E usando outras propriedades da função logarítmica, inferimos:

$$(\log_4 5)\cdot(\log_5 6)\cdot(\log_6 7)\cdots\cdot(\log_{126}127)\cdot(\log_{127}128)=$$

$$=\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\frac{\log 6}{\log 5}\cdot\frac{\log 7}{\log 6}\cdot....\cdot\frac{\log 127}{\log 126}\cdot\frac{\log 128}{\log 127}=\frac{\log_{10}128}{\log_{10}4}=\frac{\log 2^7}{\log 2^2}=\frac{7\cdot\log 2}{2\cdot\log 2}=\frac{7}{2}$$

Solução: $(\Pr oblema_2 :)$ Nesse problema, o desenho ou figura, elaborado pelo estudante com o auxílio comedido do professor, é essencial como guia para o raciocínio. Nesse caso, denotamos por 'O' o centro do plano cartesiano e designamos por P o centro da circunferência investigada. O raio do centro a um ponto qualquer de tangência com a reta $y=x$ forma um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OP}$. Esse triângulo, entretanto, após instigar alguma conjetura nos alunos, o professor deverá conduzir seus estudantes a perceberem que o referido triângulo será isósceles, e assim possui um ângulo de 45^o graus com o eixo Oy. Assim, escrevemos:

$sen(45'')=\frac{cateto\ oposto}{\text{hipotenusa}}=\frac{r}{r+6}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\leftrightarrow r\sqrt{2}=r+6$. Portanto, teremos que $r\sqrt{2}-r=6\leftrightarrow r=\frac{6}{\sqrt{2}-1}=6\sqrt{2}+6$.

Por outro lado, ao observar a interpretação do problema segundo a Figura 4-II, notamos que a reta $y=-x$ intersecta o círculo na reta $y=6$, nos pontos M e K, respectivamente a reta $y=x$ intersecta o círculo e a reta $y=6$ nos pontos N e L. Assim, segundo observamos na figura , consideramos que o quadrilátero PMON possui quatro ângulos retos e que $\overline{MP}=\overline{PN}$, portanto, PMON é um quadrado. Além disso, concluímos que $\overline{MK}=\overline{KJ}=6$ e, assim, temos $\overline{KO}=6\sqrt{2}$. Segue que

$r = \overline{MO} = \overline{MK} + \overline{KO} = 6 + 6\sqrt{2}$.

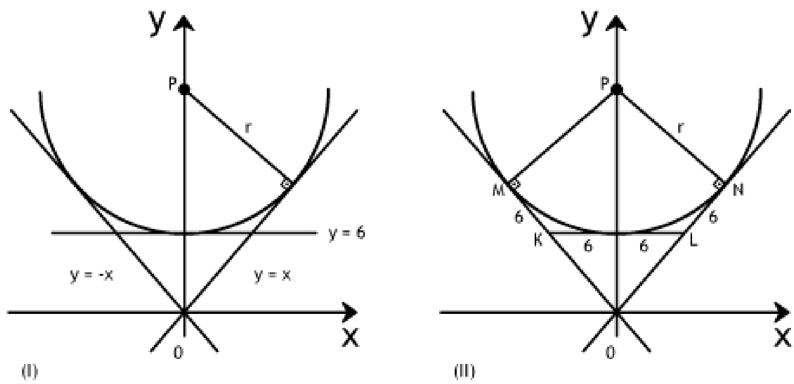


Figura 4: Possíveis formas de interpretar o problema.

No que diz respeito ao $\Pr oblema_3$, notamos que dispomos da seguinte identidade $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. O aluno, ao comparar a mesma com a identidade, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ poderá conjecturar que não pode existir resposta alguma, devido a uma flagrante contradição para a formulação do desenvolvimento do termo $(x+y)^2$. Entretanto, podemos observar que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow 2xy = 0 \leftrightarrow x \cdot y = 0$. Para divisar o comportamento desta relação, notamos que para $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$ temos o eixo das ordenadas, e para $y = 0$ e $x \in \mathbb{R}$ temos o eixo das abcissas.

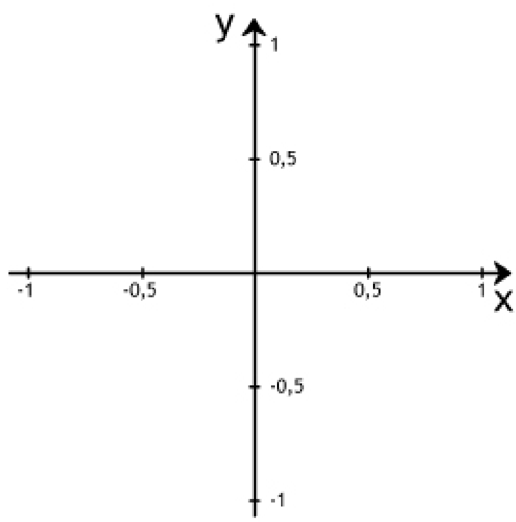


Figura 5: Lugar geométrico de x.y

Por fim, no $\Pr oblema_4$, a estratégia a ser empregada necessita do conhecimento de algum teorema sobre funções polinomiais. Nesse caso, como sabemos que $f(2i) = 0$ e $f(2+i)=0$, por teorema, seus conjugados

$f(-2i)=0$ e $f(2-i)=0$ possuem a mesma propriedade. Assim, escrevemos $f(x)=(x-2i)(x+2i)(x-(2i))(x+((2-i))=(x^2+4)(x^2-4x+5)=$

$=x^4-4x^3+9x^2-16x+20=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. A partir de uma propriedade das funções polinomiais, por consequência: $a+b+c+d=-4+9-16+20=9$.

Por outro lado, podemos escrever $f(x)=(x-2i)(x+2i)(x-(2i))(x+((2-i))$ em virtude de um teorema, para $\forall x\in\mathbb{R}$. Notamos agora que, em particular, para $x=1\to f(1)=1^4+a(1)^3+b(1)^2+c(1)+d\leftrightarrow f(1)-1=a+b+c+d$. De outra forma, obtemos então que: $a+b+c+d=f(1)-1=(1-2i)(1+2i)(1-(2i))(1+((2-i))-1=9$

Para concluir este tópico, vamos fazer alguns comentários de ordem metodológica. Notamos que o problema 1 se apresenta num quadro eminentemente aritmético-algébrico. Em geral, os alunos preferem esse tipo de representação e manifestam maior insegurança em situações-problema que exigem que o estudante construa o desenho explicativo da situação. Desse modo, bem como discutimos no problema 2, é aconselhável que o professor deixe a cargo inicial a construção de figuras e desenhos que poderão auxiliar no futuro raciocínio e resolução efetiva das questões.

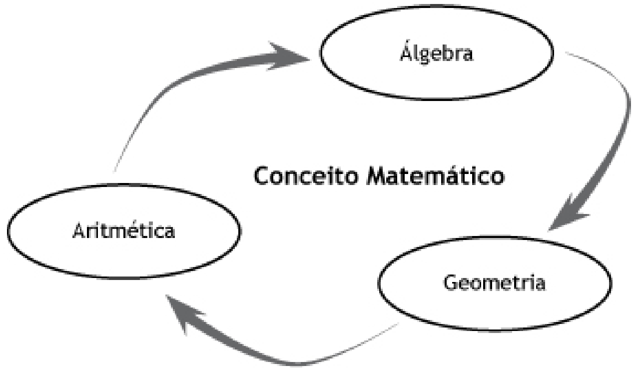


Figura 6: Quadros de mudança e representação de um conceito matemático.

Outra característica importante que sintetizamos no quadro acima (Figura 6), refere-se à mudança e exploração de várias representações para o mesmo conceito matemático. Assim, o professor deve empregar as representações algébricas, faz algumas contas na aritmética e pode utilizar também a Geometria.

Outro fator que merece nossa atenção é que, em geral, os alunos produzem inferências e desenvolvem suas conclusões sem recordar de modo preciso de definições formais e teoremas, muito menos de sua demonstração. Isso pode ter como consequência que, em certas ocasiões, os alunos simplesmente repetem o que lhes foi dito algum tempo antes da avaliação.

Em outras situações, na ocasião em que o professor vai elaborar listas de exercícios, de princípio, *'exercícios'* devem ser explorados, todavia, em relação às questões mais avançadas, prefira *'problemas'*. Em outra disciplina, envolvendo os aspectos psicológicos da resolução de problemas, retomaremos esta diferença entre $exercício \neq problema$, mas de modo simplório, o exercício é identificado na medida em que o aluno não gasta muito tempo até encontrar o instrumento principal que resolve a situação. Vejamos dois exemplos.

ATENÇÃO!

Sublinhamos que a maioria dos problemas apresentados admite mais de uma solução. Pode ser fortuito, também, apresentar situações-problema que não admitem soluções, o professor mesmo pode apresentar uma estratégia errada, de modo proposital, para testar o nível crítico e a autonomia de raciocínio dos escolares.

$\mathrm{Pr}\,oblema_5$: Numa progressão aritmética de razão $r = 3$ e $a_1 = 2$, calcular o termo de ordem $a_{2010} = ?$.

Solução: $a_{2010} = 2 + 3(2010 - 1) = 2 + 3 \cdot 2009 = 6020$.

No problema acima, basta o aluno recordar o termo geral da P. A. $a_n = a_1 + (n-1)r$. O aluno pode resolver 40 questões desse tipo e, semelhante ao que discutimos acima, com a teoria axiomática dos fantasmas, o seu conhecimento sobre progressões não avança em nada. O conhecimento aqui é algorítmico, operacional e não conceitual. Uma vez dispondo de todos os dados, simplesmente o aluno obterá uma resposta, sem uma reflexão maior, visto que a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ sempre funcionará. Temos aqui um exemplo de 'exercício de Matemática'.

Na Figura 7, trazemos alguns elementos que devem ser observados no momento da elaboração de atividades para os estudantes. Certamente que elas não contemplam todos os elementos, todavia, acreditamos que são as principais, a partir de um ponto de vista didático-metodológico apenas.

Exercício	Problema
Única forma de resolução.	Apresentar várias formas de resolução.
Com o emprego de uma fórmula obtermos respostas definitivas.	Exige o emprego de formas e outros argumentos. As respostas podem não ser definitivas.
Exploram poucos quadros de representação.	Exploram representações na Aritmética, Álgebra e Geometria.
Não deixam margens para dúvida e o progresso do raciocínio. Uma vez resolvida a situação, cessa a investigação.	Em geral possibilitam desdobramentos, generalização de ideias e o progresso do raciocínio do estudante.
Soluções curtas.	

Figura 7: Dessemelhanças entre exercícios e problemas.

Em alguns problemas, o professor pode estimular um "pontapé" inicial no estudante ao fornecer algumas 'sugestões'. Observemos os próximos problemas.

$\mathrm{Pr}\,oblema_6$: Dada uma função f com as seguintes propriedades

(i) $f(1)=1$

(ii) $f(2\cdot n)=n\cdot f(n)$ para $n\in\mathbb{N}$. Encontrar o valor de $f(2^{100})=?$

Sugestão: Recursivamente e indutivamente, avaliar $f(2^1)$; $f(2^2)$; $f(2^3)$; $f(2^4)$; ......$f(2^n)$.

$\mathrm{Pr}\,oblema_7$: Analisando o gráfico, responda:

(i) Quantas soluções teremos para $f(f(x))=6$?

(ii) Em que trechos o gráfico é crescente?

(iii) Em que trechos o gráfico é decrescente?

(iv) Em que trechos o gráfico não é decrescente e nem decrescente?

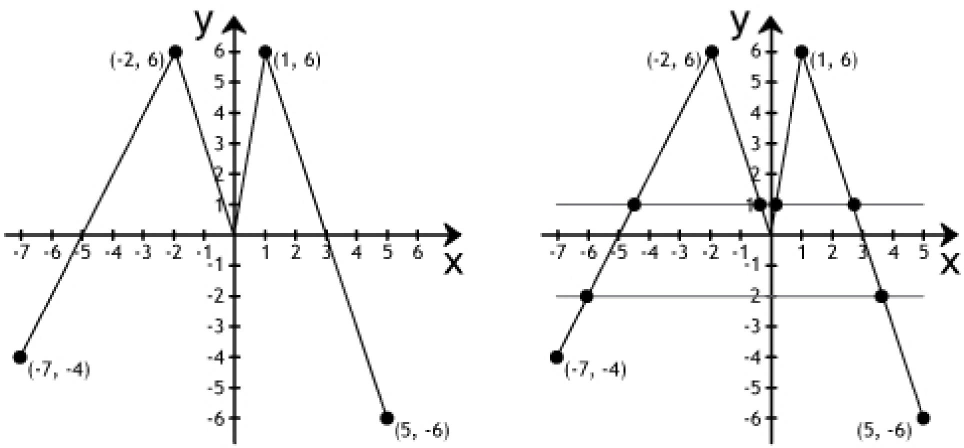


Figura 8: Interpretação geométrica do problema

Notamos que $f(f(x))=6 \leftrightarrow f(-2)=6$ e $f(1)=6$. Mas, nesses dois casos, contamos com outra condição $f(x)=-2$ e $f(x)=1$. Mas o aluno poderia apenas marcar no gráfico, com recurso de uma reta horizontal para $y=-2$ e y=1 e verificar que, na primeira, ocorrem duas interseções, enquanto que na segunda, divisamos quatro intersecções, num total de 6 soluções.

Destacamos que esta questão não requer o conhecimento de nenhuma fórmula. Exige apenas o conhecimento conceitual da noção de função. É frequente o aluno conhecer que, se $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ caracteriza uma função crescente e, se $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ uma função decrescente, todavia, dificilmente ele saberá formular a definição de uma função que não seja nem crescente e nem decrescente, como a questão demanda.

Por fim, depois de toda esta discussão, evidenciamos outra incongruência no ensino de Matemática, que diz respeito ao sentimento que os alunos constroem ao pensarem que a Matemática se resume em fazer contas. Tal visão estreita deste saber é consequência de um ensino que se detém na exploração de exercícios e não na exploração de 'problemas', consequentemente de ideias e raciocínios mais aprofundados.

Desse modo, ao efetivar seu ensino, evite transformar sua aula numa sequência de rotinas repetitivas e enfadonhas. Nessas rotinas, os alunos simplesmente repetem e reproduzem um raciocínio que não lhes pertence de fato. Eles reproduzem nas avaliações as mesmas orientações do professor e, no final, após aquela avaliação quantitativa, tudo dará certo ao observamos que alunos obtêm nota máxima, sem que, no entanto, manifestem uma mínima compreensão conceitual mais elaborada.

TÓPICO 3

Outras técnicas metodológicas para o ensino de Matemática

Objetivo

- Apresentar outras perspectivas relacionadas ao ensino

Alguns autores chamam a atenção para certos detalhes específicos que poderiam passar despercebidos aos olhos de uma pessoa desatenta. O primeiro diz respeito ao emprego de símbolos específicos na Matemática e suas consequências à aprendizagem. O emprego de um sistema particular de simbologia é cada vez mais incessante em Matemática.

De fato, desde os primeiros anos de escolaridade, nos deparamos com coisas do tipo: $\frac{1}{4}$; $1:4$; $0{,}25$; $1/4$. Apesar de simplória, nela observamos o mesmo processo matemático (divisão) simbolizado em inúmeras formas diferentes. Note que, ao longo do processo de familiarização com tais simbologias, o aluno deverá paulatinamente perceber que se trata da mesma operação, e isto nem sempre ocorre de imediato.

Na tabela abaixo, trazemos alguns símbolos básicos que denotam um *conceito matemático* que se relaciona com um *processo matemático*. Destacamos a diferença entre *conceito* matemático ≠ processo matemático. Qualquer metodologia que vise de fato uma aprendizagem significativa, se não diferenciar estes dois termos, possui sérias chances à obtenção de um insucesso.

SIMBOLOGIA	CONCEITO MATEMÁTICO	PROCESSO MATEMÁTICO
$2+3$	Adição de números naturais	Adicionar, juntar, unir, agrupar, etc.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	Adição de números racionais	Adicionar/dividir, separar, etc.
2^3	Potenciação de números naturais	Multiplicar repetidas vezes a mesma parcela.
$3-2$	Subtração de números naturais em $\mathbb{N}$	Subtrair, retirar, repartir, etc.
$2-3$	Subtração de números naturais em $\mathbb{Z}$	Subtrair, retirar.

Quadro 1: Relação simbologia, conceito e processo matemático

Destacamos, neste primeiro momento, uma simbologia relacionada às séries iniciais. Na coluna do meio, descrevemos o *conceito matemático*, isto é, o que a simbologia designa em Matemática. Entretanto, na última coluna, descrevemos a ação que precisamos executar para efetivar/realizar o *processo matemático* designado pela simbologia. Observamos que a simbologia determina quase tudo, ou seja, a simbologia determina o tipo de procedimento que devemos desenvolver e o modo de compreender/interpretar o conceito.

Por exemplo, na simbologia $2+3$ e $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, encontramos o mesmo símbolo da adição, todavia, a adição no conjunto dos naturais é completamente diferente da adição no campo dos números racionais, basta observar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$. Isso pode proporcionar muitas dificuldades para quem está aprendendo, uma vez que temos o mesmo símbolo que designa operações matemáticas completamente distintas.

Tall *et all* (2001) diferencia os símbolos com os quais fazemos Matemática e os símbolos com os quais 'refletimos sobre'. Ele observa que determinadas ações do indivíduo dependem claramente a partir do que é percebido pelo mesmo. A partir desta percepção, suas estratégias podem ser elaboradas na dependência das teorias que o sujeito conhece.

Tall *et all* (2001) analisa o aspecto dual da simbologia em Matemática, que tanto se relaciona ao *conceito matemático*, como também se relaciona ao *processo matemático*. Assim, qualquer metodologia que desconsidere tal dimensão dual pode permanecer seriamente comprometida.

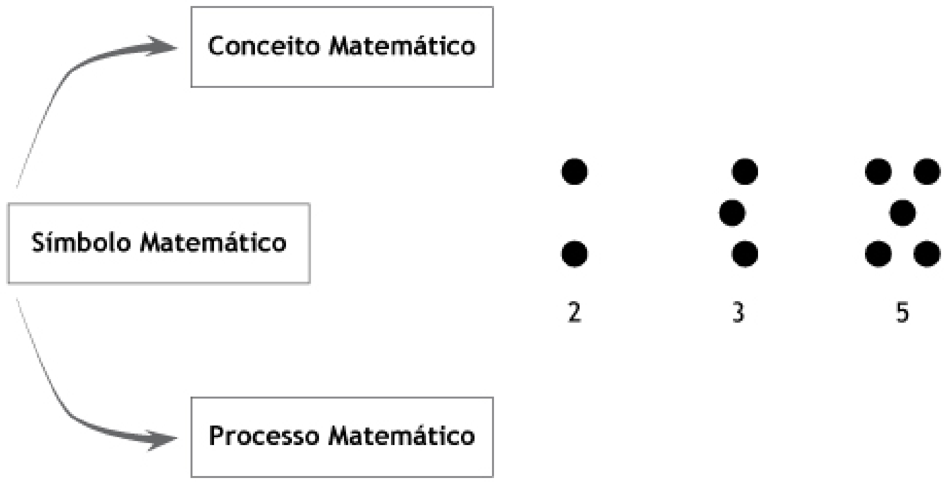


Figura 9: Caráter dual dos símbolos matemáticos descrito por Tall et all.

Na Figura 9, do lado direito, Tall fornece um exemplo que ocorre de modo frequente com as crianças ao longo da aprendizagem do 'processo de adição'. Em geral, o professor proporciona ou apresenta uma série de situações relacionadas ao mesmo 'processo matemático'. Paulatinamente, na medida em que as crianças executam operações materiais com as bolinhas indicadas acima, compreendem e internalizam outras propriedades.

Assim, o significado do 'conceito de adição' vai sendo paulatinamente construído na medida em que o sujeito age e interage em situações específicas relacionadas aquele '*conceito matemático*'. As ações efetuadas pela criança são condicionadas pelas características intrínsecas do 'processo de adição'. Ao longo da aprendizagem, a criança deverá adquirir uma familiaridade suficiente ao ponto de substituir todos aqueles objetos pela compacta simbologia $2+3=5$.

SAIBA MAIS!

Obtenha mais informações sobre o que são obstáculos epistemológicos e seu principal pesquisador no site http://www.nucleosephora.com/impressao/pdf/disc21_obstaculoepstemolo.pdf

Vale notar que este processo de aquisição de estruturas cognitivas, a partir da interação e ação executada sobre os objetos, é condição de aprendizagem em qualquer nível de ensino. De fato, quando o aluno do *locus* acadêmico se depara com a simbologia $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$, um sentimento de estranheza e incompreensão se apodera do mesmo.

Parte desta incompreensão inicial é devida às características intrínsecas ao próprio conceito, é o que chamamos nas aulas passadas de obstáculos epistemológicos. Mas quando comparamos a aprendizagem da noção de limite, identificamos alguns traços comuns relativos ao entendimento da operação $2+3=5$.

Inicialmente, ambos os símbolos apresentam uma estrutura dual, que tanto se referem ao 'conceito matemático', como se relacionam a um 'processo matemático'. Alguém poderia afirmar, por exemplo, que o símbolo $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$ é mais abstrato do que $2+3=5$, todavia, ambas as simbologias encerram um determinado grau de abstração.

De fato, $2+3=5$ se relacionava a uma tarefa concreta proposta pelo professor para as crianças que podiam manipular e ver os objetos materiais relacionados a tarefa, entretanto, no decorrer do ciclo de aprendizagem, as crianças começam a substituir as bolinhas por símbolos matemáticos que se relacionam de algum modo com a mesma tarefa.

Assim, temos aqui um processo progressivo de abstração e generalização do pensamento. De fato, os símbolos $2+3=5$ podem se relacionar e explicar completamente a tarefa (Figura 9), mas podem também fornecer conclusões para outras situações. Por outro lado, o símbolo $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$, também se relaciona a um processo matemático. Do mesmo modo que não encontramos no corredor da escola um número 'cinco', também não encontramos o valor $\frac{1}{2}$.

Todavia, ao passo que o processo matemático proporcionado pela simbologia $2+3=5$ descreve um modelo finito, no caso de $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$, estamos lidando com um *processo infinito de aproximação*. Vale destacar que o processo matemático de limite foi extraído e formulado no pensamento grego por meio de observações do mundo que o cercava. As ideias originais estavam colocadas no mundo material, e a capacidade humana de abstração proporcionou sua evolução e apresentação até nossos dias em que, frequentemente, deparamos com alunos reclamando da noção de limite.

Para finalizar este tópico, lembramos que qualquer abordagem metodológica necessita levar em consideração as especificidades das representações e simbologias utilizadas em Matemática. A natureza destas representações pode dificultar, pode condicionar e até mesmo impedir a evolução de determinadas ideias fundamentais relacionadas a um determinado conceito. Em aulas futuras, retomaremos algumas destas temáticas aqui discutidas.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) Indique as incongruências no ensino de Matemática.

2) O que é Metodologia do ensino de Matemática para você?

3) Descreva a metodologia de ensino geralmente explorada no contexto das Olimpíadas de Matemática? Indique alguns dos seus pressupostos.

4) Que abordagem metodológica Kline (1971) critica no trecho abaixo?

> Além disso, ao adotar axiomas livremente inúmeros compêndios empregam tanto quanto setenta ou oitenta axiomas. Como se exige que o estudante faça provas citando axiomas, onde estes são as justificativas para os passos, o estudante é obrigado a lembrar-se de setenta ou oitenta axiomas. É uma carga intolerável, uma carga impossível para o estudante carregar. Entretanto, tais compêndios afirmam evitar memorização e ensinar pensar e a compreender. O professor de matemática não mais pode ser pródigo, tampouco parcimonioso com axiomas.

Kline (1971, p. 67) critica abordagens de ensino.

5) Pesquise sobre a proposta metodológica sugerida por George Polya.

AULA 7

Metodologia do Ensino de Matemática

Olá aluno(a),

Nessa aula, iremos dar continuidade aos estudos das situações didáticas desta vez abordando as metodologias utilizadas no ensino da Matemática. Refletiremos sobre elas e sobre as implicações existentes a partir de situações didáticas dentro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Objetivo

- Conhecer os aspectos teóricos que envolvem os estudos sobre as metodologias do ensino da Matemática

TÓPICO 1

Um ensino de Matemática baseado na “crença” ou na “certeza”?

OBJETIVO

- Descrever perspectivas diferenciadas para o ensino de Matemática

Os aspectos filosóficos do conhecimento matemático devem ser explorados na disciplina de Filosofia da Matemática. Para tanto, cabem aqui alguns pontos de vista do filósofo da Matemática Paul Ernest quando observa que:

> A visão absolutista da Matemática consiste em uma base de verdades imutáveis. De acordo com esta perspectiva, o conhecimento matemático é constituído a partir de verdades absolutas, e isto representa o seu único objetivo, a partir de declarações lógicas verdadeiras em virtude do significado dos seus termos. [...] O método dedutivo fornece a garantia de certeza das afirmações sobre o conhecimento matemático (ERNEST, 1991, p. 8).

A respeito do que afirma Paul Ernest, quando consideramos um contexto de ensino/aprendizagem, devemos fazer as seguintes indagações: uma vez estabelecidos os resultados pelo professor, podemos de fato acreditar em tudo que foi explicado? Todas aquelas formulações constituem uma verdade para os alunos e para o professor?

A realidade de ensino é cruel, uma vez que o professor, em geral, dispõe de pouco tempo para lecionar todo o seu conteúdo, assim é bem mais fácil estabelecer tudo como verdadeiro, descrever o modo de operar com aqueles conceitos e obter respostas das questões. Dessa forma, seu trabalho pode ser simplificado de modo mágico.

O título do tópico dessa aula instiga uma discussão acerca da ação do professor.

Sua condução mediadora pode ser assentada na *crença* ou na *certeza* matemática. Tal afirmação merece maiores explicações. De fato, todo o campo de crenças e o modo de agir e professar o saber matemático depende, em última instância, da visão que o docente possui acerca do saber matemático.

Se o docente possui a convicção a respeito da verdade matemática daquele conhecimento, de que não existe contradição no que ele afirmou, automaticamente ele deve transmitir esse sentimento ao estudante, o qual não possui o mesmo amadurecimento teórico e, principalmente, o mesmo treinamento que o professor já teve.

Observamos então dois pontos de reflexão para o estudante:

- O primeiro diz respeito à ação de aceitar tudo aquilo que é comunicado pelo professor , pensando-se na prova final.
- O segundo é observar de modo cauteloso o que está sendo trabalhado em sala e não aceitar tudo que é declarado como uma verdade matemática inquestionável.

O segundo ponto de análise é hegemônico em nosso ensino, pois basta observar a sua forma de manifestação mais radicalizada no ambiente acadêmico. Esta categoria de ensino que caracterizamos como um **ensino baseado na certeza** é, na maioria dos casos, fortalecido por um instrumento imprescindível na atividade matemática. Tal instrumento é chamado de '*prova*' ou '*demonstração*', que já mencionamos nas aulas anteriores. Vamos observar agora a perspectiva de outro pesquisador francês. No início do seu artigo, Duval (1991, p.233) realça que:

> As dificuldades apontam que a maior parte dos estudantes experimentam que compreender uma demonstração constitui um dos obstáculos mais resistentes ao qual se rende o ensino de Matemática. Ou quando observam que a atividade demonstrativa nos problemas de Geometria constitui uma tarefa decisiva.

Neste artigo, Raymond Duval investiga algumas dificuldades na aprendizagem da noção de demonstração em Geometria Plana, para crianças em uma faixa etária de 13-14 anos, segundo o sistema de ensino francês. Uma questão discutida por ele diz respeito às diferenças entre a atividade argumentativa e uma atividade demonstrativa. As consequências são imediatas para o professor de Matemática que, não diferenciando uma argumentação de uma demonstração, não logrará êxito na criação de um terreno fértil para aprendizagens diferenciadas.

Vejamos algumas questões iniciais colocadas pelo didata francês. Logo no início, Duval adverte que, no funcionamento do raciocínio, é importante distinguir dois tipos de passagem: *um corresponde a um passo de raciocínio, e outra consiste na* *transição de um passo de raciocínio para outro. O primeiro tipo constitui uma inferência, o segundo um 'encadeamento'* (1991, p. 235).

O primeiro tipo de passagem ao qual Duval faz referência é conhecido como 'inferência'. Por exemplo, quando temos um triângulo retângulo ΔABC, de catetos $\overline{AB} = b$ e $\overline{AC} = c$ e hipotenusa $\overline{BC} = c$, então, por meio de uma 'inferência', concluímos que $c^2 = a^2 + b^2$. De modo semelhante, se sabemos que, em um triângulo qualquer ΔABC, temos a seguinte relação entre os catetos e a hipotenusa, $c^2 = a^2 + b^2$, então, necessariamente, o mesmo deve ser retângulo com relação a algum dos seus vértices.

SAIBA MAIS!

Saiba mais sobre o trabalho do pesquisador francês Raymond Duval acessando o site http://www.diadematematica.com/Ubiratan_Arrais/ARTIGO_REGISTROS_DE_REPRESENTACAO_SEMIOTICA.htm

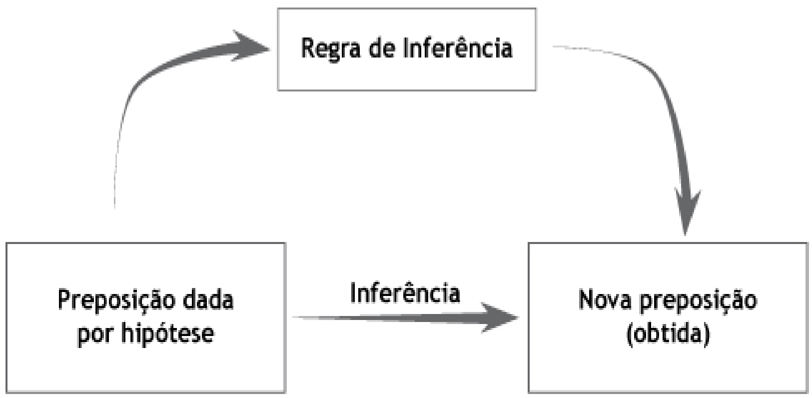


Figura 1: Diagrama explicativo proposto por Duval (1991, p. 235).

Note-se que acabamos de descrever o teorema de Pitágoras e sua pouco divulgada e/ou conhecida recíproca. Duval explica que este tipo de 'inferência' ou passagem se faz por meio de uma regra explícita, relevante a uma teoria, assim *o passo de raciocínio possui uma organização ternária* (1991, p. 235). Tal observação introduzida por Duval proporciona uma primeira distinção entre o *raciocínio dedutivo* e o *raciocínio argumentativo*. Além da dependência das representações dos interlocutores, é justamente o recurso e emprego de "regras" nem sempre explícitas que revelam a própria estrutura da língua, um caráter marcante do *raciocínio argumentativo*.

Por outro lado, notamos que, no caso particular do teorema de Pitágoras, apenas o *estatuto operatório* é levado em consideração, ou seja, a possibilidade concreta de verificar a tese, referendando-se nas premissas mencionadas há pouco. Em relação a este fato, Duval esclarece:

> Dizendo de outro modo, em um passo de dedução, as proposições não são relacionadas em função de suas relações semânticas entre seus conteúdos respectivos (oposição, sinonímia, particularização, etc.), mas unicamente em virtude de seu estatuto previamente fixado (hipóteses de partida ou conclusões já obtidas e regras de inferência) (1991, p. 236, tradução nossa)

As palavras de Raymond Duval são esclarecedoras e nos conduzem a conceber a seguinte caracterização: *o ensino baseado na certeza se fundamenta no valor lógico das proposições e obedece às regras de inferência, independentemente do conteúdo semântico*.

Na perspectiva de Duval, encontramos a caracterização do que ele chama de "atitudes proposicionais". Tal noção é caracterizada como *as expressões chamadas 'atitudes proposicionais' que podem igualmente preencher um papel: "sabemos que... (proposição de entrada), estou certo de que...(conclusão), graças ao teorema..."*.

Mais adiante, Duval (1991) acrescenta:

> Nos prendemos a uma proposição, em geral, ao seu valor lógico: ela é verdadeira ou falsa. Mas independentemente de seu valor, ou em relação a tal, uma proposição pode possuir outros valores: ela pode parecer evidente e incontestável, incerta, conjeturável, absurda, indecidível, possível, etc. [...] O valor epistêmico é grau de certeza ou de convicção atribuída a uma proposição. Toda proposição, assim, possui um valor epistêmico pelo simples fato que seu conteúdo é considerado como relevante ou de uma opinião, ou de uma crença, de uma suposição, ou de uma evidência comum, ou de um fato estabelecido, ou de uma convenção, etc. (p. 254-255, tradução nossa)

O longo excerto de Duval merece vários comentários e esclarecimentos. Salientamos o primeiro aspecto mencionado que se refere ao '*valor lógico*' de uma proposição, transforma-se em uma exigência constante no ensino/aprendizagem de Matemática. Tão intensa é tal exigência que, praticamente, todo o ensino gira em torno disto.

Vale recordar que, quando um professor contempla e busca verificar determinada *inferência*, ela, para o experiente, já possui um *valor lógico* verdadeiro, uma vez que ele conhece, detém aquele conhecimento que diz respeito à determinada propriedade formal enunciada. Porém para o aluno, toda a sua idiossincrasia repousa no campo da '*crença*', na compreensão de um conteúdo; uma vez que, na maioria das ocasiões, o aluno não sabe com exatidão aonde o professor tenciona chegar.

Para exemplificar o que foi dito, vamos observar a questão proposta na prova do Enade/2005. O seu enunciado já denuncia a existência apenas de uma proposição verdadeira quando destaca ‘assinale a opção correta’ e, consequentemente, todos os outros itens devem ser falsos. Aqui, o objetivo é avaliar o valor lógico das proposições, com referência ao enunciado. Depreende-se também que o enunciado do problema tem solução e é única.

A respeito da força e condicionamento exercido pelo modelo de ‘prova’ em Matemática, Brousseau & Gibel (2005) alertam:

> Em Matemática, o ensino do raciocínio era usado para conceber um modelo de apresentação de provas, o qual deve ser fielmente reproduzido pelo estudante. Porém, os professores atualmente, assim como psicologistas, tomam o raciocínio como uma atividade mental e não uma simples recitação de uma prova memorizada. Desde que é necessária a ideia de confrontar o estudante com ‘problemas’, onde seria natural para eles engajá-los num raciocínio. Porém, sempre existe o risco de reduzir a solução de problemas a uma aplicação de receitas e algoritmos, o que elimina a possibilidade de um raciocínio verdadeiro (p. 14, tradução nossa.)

Leia o texto a seguir para responder às questões 20 e 21.

Desenha-se no plano complexo o triângulo T com vértices nos pontos correspondentes aos números complexos z_1, z_2 e z_3, que são raízes cúbicas da unidade. Desenha-se também o triângulo S, com vértices nos pontos correspondentes aos números complexos w_1, w_2, w_3, que são raízes complexas de 8.

Questão 20

Com base no texto acima, assinale a opção correta.

A) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ é um vértice do triângulo T.

B) $w = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ é um dos vértices do triângulo S.

C) w_1z_1 é raiz da equação $x^6 - 1 = 0$.

D) Se $w_1 = 2$, então $w_2^2 = w_3$.

E) Se $z_1 = 1$, então z_2 é o conjunto complexo de z_3.

Figura 2: Exemplo de situação-problema no Enade/2005.

Observamos que Brousseau & Gibel chamam a atenção para o tipo de ensino que privilegia o *raciocínio algorítmico*. Esta forma de raciocínio, apesar de cômodo para o professor, não proporciona a evolução de uma compreensão individual do estudante, e sim, como já mencionamos, a simples reprodução dos modelos de provas e demonstrações estabelecidos pelo professor, reforçando, assim, um ensino baseado na certeza matemática.

Neste sentido, Brousseau & Gibel mencionam um exemplo relativo ao modelo 'Se A... então B', como no caso do teorema de Talles. Tal teorema é estabelecido e escrito no quadro. O professor aceita o raciocínio estabelecido pelo estudante do tipo 'Se A... então B', sem nenhuma justificativa maior. Por exemplo, estudante nenhum desconfia da validade da afirmação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Vejamos alguns problemas a fim de de contextualizar algumas de nossas afirmações anteriores.

$\mathrm{Pr}\,oblema_1$: Consideremos o gráfico abaixo da função polinomial $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Encontre o valor de $b = ?$

$\mathrm{Pr}\,oblema_2$: Na figura 3-II abaixo, exibimos o gráfico abaixo da função polinomial $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. É possível identificar o valor de $b = ?$.

$\mathrm{Pr}\,oblema_3$: Na figura 3-I abaixo, exibimos o gráfico abaixo da função polinomial $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Identifique o item correto relacionado ao valor de $b = ?$.

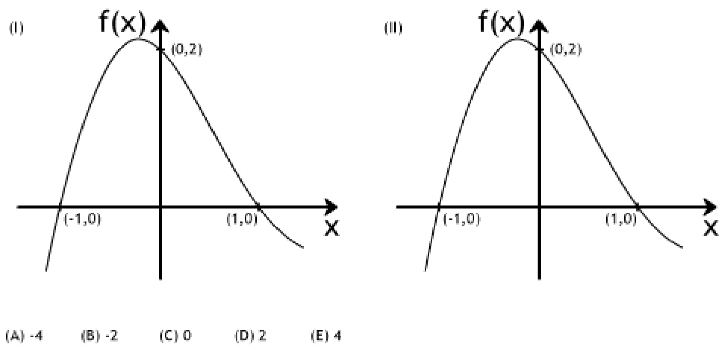


Figura 3: Situação-problema envolvendo a interpretação geométrica

Nos problemas anteriores, apesar de envolverem o mesmo objetivo, suas formas de instigar e conduzir a atividade dos estudantes são distintas. No primeiro problema, de antemão, o aluno já sabe que existe uma única resposta, todavia os valores devem ser extraídos a partir de uma análise do gráfico. Já no segundo problema, não fornecemos a certeza de que é possível encontrar uma resposta. No último caso, já é fornecido os itens e valores possíveis para $b = ?$. Neste último caso, os alunos já possuem os valores iniciais que pode tentar encontrar.

Observamos que o segundo problema é baseado em um ensino que tomo como parâmetro a certeza matemática. Ele condiciona a ação do sujeito. Sua influência é suavizada, pelo menos em parte, por intermédio do uso do gráfico no plano $\mathbb{R}^2$, de uma função polinomial. Vejamos outros exemplos:

$\mathrm{Pr}\,oblema_4$: Determinar os valores de x e y de modo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ comutem.

$\mathrm{Pr}\,oblema_5$: Existem matrizes que comutam com a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$?

$\mathrm{Pr}\,oblema_6$: Consideremos o seguinte sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$. Analisando a posição geométrica dos planos determinados por cada equação, podemos afirmar que existe solução para ele?

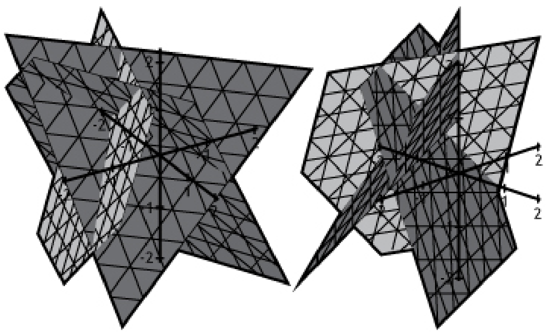


Figura 4: Posição geométrica dos planos.

Observamos no problema 4 a imposição de uma condição $A \cdot B = B \cdot A$ e a antecipação de que existem soluções para o problema. Já no problema 5, apesar de existirem várias soluções, não se afirma de modo contundente a condição de que existe de fato alguma solução. Já no último problema, proporcionamos, antes de qualquer atividade ou emprego de fórmulas, a inspeção da figura. Por fim, apresentamos mais um problema.

$\mathrm{Pr}\,oblema_7$: Sejam $a \geq b > 1$, identificar o maior valor assumido por $\log_a\left(\frac{a}{b}\right) + \log_b\left(\frac{b}{a}\right) = ?$

Solução: Seja $c = \log_a b > 0$, desde que temos a condição inicial $a \geq b > 1$, teremos então que

$$\log_a\left(\frac{a}{b}\right) + \log_b\left(\frac{b}{a}\right) = \log_a(a) - \log_a(b) + \log_b(b) - \log_b(a) =$$
$$= 1 - \log_a(b) + 1 - \log_b(a) = 2 - c - \frac{1}{c}$$

Segue que $\log_a\left(\frac{a}{b}\right) + \log_b\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{c^2 - 2c + 1}{-c} = \frac{(c-1)^2}{-c} \leq 0$. Notamos que a fração $\frac{(c-1)^2}{-c} \leq 0$ assume seu maior valor quando $\frac{(c-1)^2}{-c} = 0 \leftrightarrow c = 1$. Neste caso, temos, como consequência, $1 = \log_a b \leftrightarrow a = b$.

Decididamente, esta situação-problema não é típica de ocorrer nos livros didáticos, entretanto o conhecimento do professor deve ultrapassar aquele conhecimento exibido nestes, a ponto de criticá-lo, identificar falhas, inconsistências e, principalmente, limitações. Além disso, após toda esta discussão, aconselhamos ao futuro professor desenvolver um ensino baseado na crença e não na certeza. Mas, na prática, como isso pode funcionar?

O docente pode evitar utilizar em seu discurso, sobretudo em sala de aula, expressões do tipo *neste exercício, basta fazer isto....*; *é só empregar esta fórmula que está concluído....*; *aplicando este resultado, de imediato, obtemos que....*; *desde que tal propriedade é sempre verdadeira....teremos que.....*

Estas são expressões que reforçam/ratificam o caráter universal e inquestionável do conhecimento matemático. Todavia, para efetivar uma ação didático-metodológica baseada na crença, o professor nunca pode, de modo precipitado, fornecer todas as condições 'suficientes' aos alunos, apenas explorar argumentações 'necessárias'. Atitudes proposicionais do tipo: *por este caminho aqui, possivelmente obteremos que...*; *aparentemente a resposta pode ser esta....*; *talvez empregando este argumento consigamos algum resultado....*; *tenho a impressão de que este modo pode auxiliar na tarefa...*; *possivelmente isto pode ser usado para uma conclusão...*; *acredito que sim...*;

Tais colocações podem suavizar o caráter *absolutista* do conhecimento matemático evidenciando que um conhecimento, mesmo aquele que possui paradigmas tão rígidos e formais como os da Matemática, produzido por um ser mundano, passível de limitações e contradições, não pode ser imune a elas.

Neste sentido, após realizar um estudo com professores de Matemática que atuam no ensino publico em São Paulo, Silva (2009, p. 155) destaca:

> A nosso ver, esse objetivo primeiro traçado pelos professores, parece reproduzir a ideia de que a Matemática é uma ciência imutável e firmada na lógica aristotélica, na qual toda pergunta poderia ser respondida por apenas de duas formas: sim ou não. Como vimos, essa meta parece transparecer uma característica formalista marcante, que pode ser interpretada pelos alunos como verdades que caem do céu e na qual as justificativas ou provas devem ser aceitas ou são muito difíceis de serem compreendidas pela maioria.

No próximo tópico, discutiremos alguns elementos pertinentes à formação de professores e conheceremos ainda vários elementos condicionantes nesta formação vinculados ao caráter absolutista da Matemática.

TÓPICO 2

A formação inicial de professores de Matemática

Objetivo

- Discutir alguns dilemas da profissão e da formação inicial

Em um de seus artigos, o pesquisador português João Pedro da Ponte (2002, p. 3) denuncia:

> A formação inicial de professores recebe com frequência comentários muito críticos de diversos sectores. Os professores universitários das áreas de especialidade consideram que os jovens professores não saem devidamente preparados nas matérias que irão ensinar. Os professores da área de educação lamentam que tudo o que ensinam acaba por ser "varrido" pelo conservadorismo da prática de ensino. Os novos professores lamentam que nada do que aprendem na formação inicial lhes serviu para alguma coisa e que só na prática profissional aprenderam o que é importante. Os professores já em serviço também acham, muitas vezes, que os jovens professores não vêm devidamente preparados no que seria mais necessário. Na sociedade, em geral, parece existir uma grande desconfiança em relação à qualidade da formação inicial de professores. Não há dúvida que existe um mal estar em relação a esta questão, como acontece, aliás, em relação a (quase) tudo o que se passa na educação em geral.

No trecho acima, o autor aponta entraves específicos da formação de professores de Matemática que não se apresentam como um privilégio apenas do caso português.

De fato, os mesmos problemas atingem de modo substancial o modelo de formação inicial do professor de Matemática aqui no Brasil. Note-se que o autor faz referência a dois grupos de formadores de professores: o primeiro refere-se aos formadores da área específica; enquanto o segundo grupo trata dos profissionais da área da Educação. Vamos destacar o seguinte trecho: *os professores já em serviço também acham, muitas vezes, que os jovens professores não vêm devidamente preparados no que seria mais necessário*.

Da declaração sustentada por João Pedro da Ponte podemos concluir várias coisas pertinentes à formação, todavia a que achamos mais importante é a preparação e instrumentalização do futuro docente em teorias que não explicam e/ou são utilizadas diretamente em seu ofício diário. Certamente que não tencionamos assumir aqui uma posição reducionista que prioriza o estudo apenas daquilo que é efetivamente utilizado em sala de aula pelo professor na escola. Se assim tivesse sido nossa opção, a primeira medida seria eliminar todas as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Variável Complexa, Estruturas Algébricas, etc.

VOCÊ SABIA?

João Pedro da Ponte é reconhecido na comunidade internacional e mantém, juntamente com seus colaboradores, um grupo de pesquisas específicas sobre a formação de professores de Matemática. Diferentemente do Brasil, Portugal apresenta uma história de investigações nesta área desde o início dos anos 80.

Por outro lado, se existe um Currículo de Matemática, existem também grupos específicos especialistas da área da Matemática Pura que determinam, por influência dos paradigmas internacionais, o que deve ser estudado em um curso de graduação em Matemática. Schubring (2003, p. 12) nos fornece uma perspectiva histórica interessante ao lembrar que:

> Embora mudanças estruturais nos sistemas educacionais de alguns estados europeus já tivessem em endamento, as reformas curriculares, por volta de 1900, estavam muito atrasadas. A instrução matemática era particularmente afetada pelas tensões estruturais agora visíveis nos sistemas educacionais, tensões essas induzidas pelas profundas transformações na sociedade em geral; dentro das estruturas tradicionais, a matemática costumava servir como um paradigma para o pensamento lógico, de modo que os conteúdos eram usualmente bastante elementares e os métodos de ensino enfatizavam aspectos formais; a matemática escolar tinha um caráter estático e desligado das aplicações práticas.Por outro lado, a industria e o comercio demandavam não apenas uma instrução matemática mais ampla, mas também conhecimentos mais modernos e avançados que servissem de base para aplicações tecnicas.

Por enquanto não pretendemos discutir estas e outras questões relacionadas ao currículo de Matemática. Sendo assim, destacamos outros elementos que merecem atenção no ambiente de formação e que são destacados por Lapert & Ball (1998, *apud* VISEU, 2008, p. 62) quando indicam que:

> As práticas de ensino predominantes na formação inicial de professores assentam no pressuposto de que a teoria transmitida aos candidatos lhes será útil um dia, em

contextos que irão encontrar na sua prática de ensino, não os preparando para a compreensão dos problemas profissionais e para a tomada de decisões em situações particulares da sala de aula.

Para estas autoras, há outras razões além das apontadas acima que fazem com que os programas de formação tenham pouco impacto na preparação dos futuros professores para ensinar Matemática, tais como *(i) não atender às crenças, concepções e conhecimentos que os futuros professores possuem; (ii) transmitir a percepção de que para ensinar não é necessário um conhecimento profissional específico, sendo pouco mais preciso do que senso comum; (iii) não evidenciar a importância do conhecimento didático; (iv) não estabelecer a ligação entre a teoria e a prática; e (v) dar pouca atenção à prática profissional*.

O desenho esquemático da figura 5 nos proporciona a uma das razões apontadas por Lapert & Ball, quando salientam a ligação entre teoria e prática.

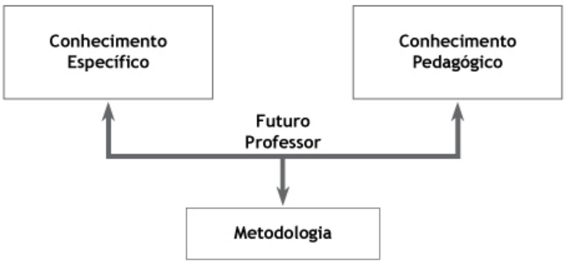


Figura 5: Relação teoria prática

Observando o diagrama, prevemos algumas dificudaldes, uma vez que os conteúdos matemáticos no Brasil não são fornecidos ao licenciando com uma grande ênfase ou preocupação com ensino. Já comentamos na aulas passadas, por exemplo, o caso dos conteúdos de Geometria Plana que são bastante extensos, entretanto, na graduação, aparentemente, tudo parece ser visto em um semestre. Assim, o aluno precisa percorrer sozinho a seguinte trajetória:

$$\textit{Aprender Geometria para si} \Rightarrow \textit{Aprender para explicar / convencer o outro} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \textit{Aprender como ensinar / operacionalizar o conteúdo em sala de aula}$$

O percurso acima está longe de ser atingido, pelo menos em grande parte, em um curso de licenciatura, o que se caracteriza um sério problema que deve ser pensado por formadores e formandos. Na figura 6, ilustramos a concepção de curso de formação de professores de Matemática em Portugal.

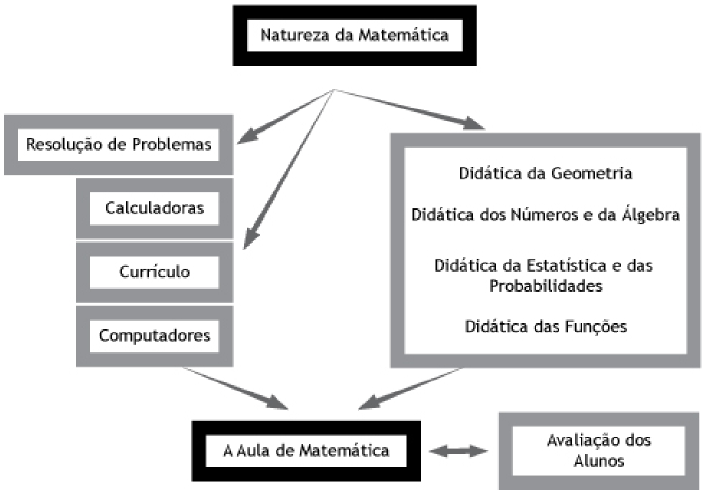


Figura 6: Concepção de Currículo de formação de professores em Portugal.

Reparamos uma presença marcante de uma Didática direcionada ao ensino de conteúdos específicos de Matemática integrando os currículos de formação na Europa. Sua necessidade pode ser evidenciada pelo fato de mobilizarmos '*modelos mentais*' distintos quando raciocinamos em termos de Aritmética, Álgebra e Geometria.

Num largo sentido, as formas específicas de raciocínios nestes ramos da Matemática apresentam carcterísticas em comum. Neste sentido, Brousseau & Gibel (2005, p. 17) definem um *raciocínio* como uma relação R entre dois elementos A e B tal que:

- A denota a condição ou um fato observado, que poderia ser contigente em circunstâncias particulares;
- B é uma consequência, uma decisão ou fato previsto;
- R é uma relação, uma regra, ou, geralmente, algo aceito como conhecido. A relação R conduz a ação do pensamento segundo em que a condição A seja satisfeita ou o fato representado por A assuma posição, para se poder predizer B, prever B ou estabelecer que B é verdade.

Além disso, um raciocínio contém:

- Um agente E (aluno ou professor) que usa a relação R;
- Um projeto, deteminado pela situação S que requer o uso desta relação.

Além de ilustrar e identificar os elementos essenciais em uma forma de raciocínio em Matemática, Brousseau & Gibel diferenciam níveis diversificados de manifestação das relações entre A, B, R, E e S. De fato, Brousseau & Gibel (2005, p. 18) identificam três níveis ou categorias de raciocínios, a saber:

NÍVEL 1 (N_1): É definido como um *raciocínio* que é não formulado de modo explícito, porém pode ser pode ser tomado como um assunto ou alvo de suas ações e constrói um modelo de ação para o sujeito;

NÍVEL 2 (N_2): É definido como um *raciocínio* ainda incompleto, do ponto de vista formal, porém com lacunas que podem ser consideradas preenchidas de modo implícito por meio de ações do sujeito numa situação em que uma formulação completa não parece ser justificada.

NÍVEL 3 (N_3): É definido como um *raciocínio* completamente formal baseado em uma sequência correta de inferências, com referência explícita aos elementos pertinentes da situação ou um conhecimento partilhado por uma classe.

Vamos abordar alguns exemplos para ilustrar as colocações dos nossos ilustres autores. Por exemplo, dados $a,b \in \mathbb{R}_*^+$, sabemos que

$(a-b)^2 \geq 0 \therefore a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Ou ainda, obtemos que $a^2 + b^2 \geq 2ab \leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Neste caso, podemos tomar:

- A: $(a-b)^2 \geq 0$
- B: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Observamos que, para realizar a inferência explorada neste raciocínio matemático $A \overset{R}{\Rightarrow} B$, empregamos uma relação ou regra R_1 . Neste caso, exploramos a relação $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$. Além disso, necessitamos também da regra $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ existem, pois $a,b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. Por outro lado, usando a relação $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, e substituindo $x := \frac{a}{b} \to x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Notamos ainda que

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab \leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \therefore \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{(a^2 + b^2)}{2}$$

Segue que $\frac{(a+b)}{2} \leq \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{2}} \leq Max\{a,b\}$. De fato, sem perda de generalidade, podemos considerar $a \leq b \therefore Max\{a,b\} = b$. Assim, temos $\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{2}} \leq \sqrt{\frac{(b^2 + b^2)}{2}} \leq \sqrt{\frac{(2b^2)}{2}} = b = Max\{a,b\}$. Por outro lado, observamos ainda que a seguinte relação $a^2 + b^2 \geq 2ab$ foi verificada para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, deste modo, substituímos $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ por $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}_+^*$ para obter a relação $a + b \geq 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \therefore \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Logo temos $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leftrightarrow \frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{ab} \leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

Vejamos o seguinte exemplo: sejam os números $a,b,c \in \mathbb{R}$ em progressão aritmética. Prove que os números $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ também formam um P. A.

Aqui identificamos A como a condição de uma progressão aritmética e, neste caso, escrevemos $b-a=c-b=d(razão)$ e $c-a=2\cdot d$ para (a,b,c) em P. A. Podemos dizer que B se refere à propriedade que desejamos inferir para os números $\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$. Para tanto, vamos tomar $A_1=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ e $A_2=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$. Se conseguirmos verificar que $A_1=A_2$, alcançaremos o objetivo desejado. Assim, precisamos analisar dois casos (i) se $d=0 \therefore b-a=c-b=0$, e se $A_1=A_2=0$. Porém, se (ii) $d\neq 0$, podemos realizar algumas racionalizações. Por exemplo, a regra R_1 que garante:

$$R_1 : A_1=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=$$

$$=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{d}$$

Aplicando a mesma regra, inferimos:

$$A_2=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}-\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}$$

Mas reparamos:

$$A_1=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{d}=\frac{2\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{c}}{2d}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}-\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}=A_2.$$

De modo sistemático, empregamos o raciocínio $A\overset{R_1}{\Rightarrow}B$. Notamos, contudo, que as regras aqui foram aplicadas de modo explícito, entretanto, na maioria dos casos, os estudantes não se lembram de tais regras ou recorrem a elas de modo automático. A dificuldade agora é elaborar uma série de atividades que envolvam a referida propriedade.

Discutimos aqui com brevidade alguns argumentos usuais da Álgebra. No caso da Aritmética e da Geometria, deparamos também como raciocínios específicos. Isso no leva a afirmar que ramos específicos da Matemática necessitam e condicionam abordagens particulares ou, melhor dizendo, existem metodologias específicas para abordagens de conteúdos específicos de Matemática.

Tal argumentação reforça de modo inquestionável a necessidade de conhecimento de metodologias específicas para o ensino de conteúdos particulares da Matemática. No próximo tópico, retomaremos outros elementos relacionados à formação do professor que podem proporcionar sérios entraves à implementação de concepções como a que discutimos na Figura 6.

TÓPICO 3

Ainda sobre a formação inicial de professores de Matemática

Objetivo

- Compreender aspectos relacionados à formação docente

João Pedro da Ponte aponta algumas de suas colocações que considera preocupantes e merecem atenção. Veja na citação abaixo:

> Falar de formação é um terrível desafio. Em primeiro lugar, porque a formação é um mundo onde se inclui a formação inicial, contínua e especializada, onde é preciso considerar os modelos, teorias, e investigação empírica sobre a formação, analisar a legislação e a regulamentação e, o que não é de menor importância, estudar as práticas reais dos atores e das instituições no terreno e as suas experiências inovadoras. Em segundo lugar, porque a formação é um campo de luta ideológica e política. Não há grupo com interesses na educação que não tenha as suas posições a defender, e fá-lo com todo o à-vontade e, às vezes, com grande agressividade. E, em terceiro lugar, porque a formação é um daqueles domínios em que todos se sentem à vontade para emitir opiniões, de onde resulta a estranha impressão que nunca se avança (PONTE, 1998, p.9).

De fato, inicialmente, identificamos a preocupação do autor com respeito a alguma homogeneização referente aos programas e concepções de formação, sejam elas as iniciais ou as formações continuadas propostas pelas Instituições de Ensino Superior em Portugal. Outra preocupação relevante diz respeito à crença de que a formação está muito associada à ideia de "frequentar" cursos, enquanto que o desenvolvimento profissional ocorre através de múltiplas formas, que incluem cursos, mas também atividades como projetos, troca de experiências, leituras, reflexões, etc.

Assim, os formadores criam falsas expectativas que, uma vez conhecedores daquelas teorias generalistas, consequentemente, sua aplicação e operacionalização estará garantida. Por fim, os estudantes acabam sendo compulsoriamente apresentados a teorias pertencentes a outros campos do saber que não fornecem explicação/predição/interpretação dos fenômenos relacionados ao saber matemático, prevalecendo um 'vício' denunciado por muitos investigadores reconhecidos no cenário internacional da tendência em "encher linguiça" no ambiente acadêmico.

Em **segundo lugar**, na formação, o movimento é essencialmente de fora para dentro, cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos. Já no desenvolvimento profissional, temos um movimento de dentro para fora, cabendo ao professor às decisões fundamentais relativamente às questões que se quer considerar, aos projetos que se quer empreender e ao modo como se quer executar. Em **terceiro lugar**, na formação, atende-se principalmente àquilo em que o professor é carente; enquanto que no desenvolvimento profissional se dá especial atenção às suas potencialidades.

Em quarto lugar, a formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional implica o professor como um todo nos seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais. Finalmente, a formação parte invariavelmente da teoria e frequentemente não chega a sair da teoria, ao passo que o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de uma forma interligada.

No desenvolvimento profissional, dá-se grande importância à combinação de processos formais e informais. O professor deixa de ser objeto para passar a ser sujeito da formação. Não se procura a "normalização", mas a promoção da individualidade de cada professor. Tem-se atenção não só aos conhecimentos e aos aspectos cognitivos, como também se valorizam os aspectos afetivos e relacionais do professor.

Além disso, a formação pode ser encarada de modo mais amplo do que é habitual, não necessariamente subordinada a uma lógica de transmissão de um conjunto de conhecimentos. Na realidade, não há qualquer incompatibilidade entre as ideias de formação e de desenvolvimento profissional. A formação pode ser perspectivada de modo a favorecer o desenvolvimento profissional do professor, do mesmo modo que pode, através do seu "currículo escondido", contribuir para lhe reduzir a criatividade, a autoconfiança, a autonomia e o sentido de responsabilidade profissional. O professor que quer se desenvolver plenamente tem toda a vantagem em tirar partido das oportunidades de formação que correspondam às suas necessidades e objetivos.

Todavia, a realidade vai no caminho contrário a toda uma retórica que encontramos na academia. Neste sentido, Roma (2010, p. 67) explica que:

> Embora os estudos recentes sobre o aluno que frequenta os cursos de formação de professores sejam reduzidos, a problemática mais ampla tomada a partir dos estudos sobre os cursos de licenciatura já é objeto de preocupação dos pesquisadores há bastante tempo [...] Ao se tomar contato com o artigo de parte da análise de documento resultante de um debate sobre o Bacharelado e a Licenciatura ocorrido na década de 80, na Faculdade de Ciências e Letras da UNESP de Araraquara, pode-se verificar que os desafios destacados naquele momento permanecem presentes nas discussões sobre as fragilidades enfrentadas pelos cursos de formação de professores. Os velhos desafios incluem a falta de clareza sobre o perfil profissional desejado, a desintegração entre os eixos de formação (bacharelado e licenciatura), o isolamento e desprestígio das práticas pedagógicas e a dicotomia teoria e prática. Um dos estudos daquela época já apontava a desmotivação dos graduandos para a profissão do magistério [...].

No excerto, identificamos determinados entraves constituintes dos cursos de formação de professores desde a sua criação no Brasil. Apesar de podermos observar seus traços atuais ainda presentes e agirmos de forma nociva à referida formação, ter consciência deles constitui um passo inicial para a sua superação, sem o que não se pode esperar que o ensino da Matemática progrida para índices positivos razoáveis, o que de certo modo se tornar cada vez mais uma exigência dos órgãos educacionais, como o Ministério da Educação, como identificamos na figura 7.

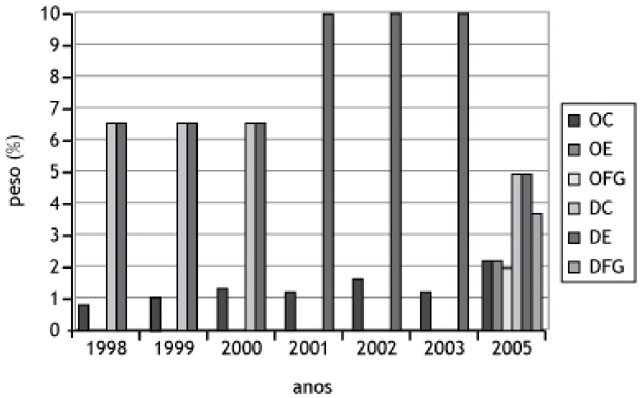


Figura 7: Discute o peso maior concedido para as questões de caráter discursivo no Enade (2005).

Observamos que esta mudança, no que se refere às exigências do vem a ser um bom domínio da Matemática por parte do professor, apresenta sempre um fator social condicionado pela superação e estabelecimento de novos paradigmas no ambiente acadêmico. De fato, com respeito à reforma promovida pelo alemão Felix Klein, Schuring (2003, p. 20) explica:

> O ponto chave para entender as novas características é que a dinâmica desses processos não se desenvolveu dentro do subsistema das escolas secundárias. Foram antes problemas de transição desses subsistemas para a educação superior que induziram essa onde de reforma. Foi esse complexo problema de transição que levou Klein a se tornar ativo e desenvolver agenda de reforma. Mesmo no nível internacional, parece que os movimentos de reforma mais importantes e efetivos de transição da educação secundária para a superior eram mais agudos – e aí que os matemáticos estavam ativamente envolvidos.

Para concluir, vale destacar a título de informação do leitor, sobre o documento que caracteriza os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Licenciatura. Este documento fornece uma orientação e estabelece alguns paradigmas para a formação de futuros professores:

> O **Licenciado em Matemática** é o professor que planeja, organiza e desenvolve atividades e materiais relativos à Educação Matemática. Sua atribuição central é a docência na Educação Básica, que requer sólidos conhecimentos sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar. Além de trabalhar diretamente na sala de aula, o licenciado elabora e analisa materiais didáticos, como livros, textos, vídeos, programas computacionais, ambientes virtuais de aprendizagem, entre outros. Realiza ainda pesquisas em Educação Matemática, coordena e supervisiona equipes de trabalho. Em sua atuação, prima pelo desenvolvimento do educando, incluindo sua formação ética, a construção de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico (p. 79).

SAIBA MAIS!

Mais informações sobre os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Licenciatura no site http://www.dca.ufrn.br/~adelardo/PAP/ReferenciaisGraduacao.pdf

Notamos de início a importância apontada pelo documento relacionada com a formação do futuro professor relacionado com os conteúdos de Educação Matemática (Didática da Matemática, Psicologia da Aprendizagem em Matemática, Filosofia da Educação Matemática e da Matemática, História da Matemática, Sociologia da Educação Matemática, Novas tecnologias no Ensino de Matemática, Etnomatemática).

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1) É possível explorar uma situação de analogia entre às definições formais de função afim e função exponencial? Que tipo de raciocínio heurístico podemos enfatizar em sala de aula?

2) É possível confiarmos plenamente nos livros didáticos que discutem os conceitos de função afim e função exponencial? Se sim, a transposição didática está automaticamente garantida, basta executar a apresentação do autor do livro?

3) Assista a vídeo aula, disponível no link http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010, do professor e pesquisador do IMPA Elon Lages Lima. Em seguida analise e descreva sua transposição didática, sua metodologia de ensino e suas concepções relativas ao ensino das funções função afim, quadrática e exponencial.

4) Assista a vídeo aula, disponível no link http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2011, do professor e pesquisador do IMPA, Paulo Cezar. Em seguida analise e descreva sua transposição didática, sua metodologia de ensino e suas concepções relativas ao ensino de Sistemas Lineares.

AULA 8

Metodologia do Ensino em Matemática

Olá, aluno (a)!

Em nossa última aula, abordaremos algumas temáticas delicadas. A primeira diz respeito à abordagem de ensino de Matemática por meio da 'Resolução de Problemas', mas, quando podemos afirmar que temos um problema interessante? Esse questionamento mostrou-se delicado e extremamente imponderável para matemáticos de reconhecido talento. Por fim, abordaremos, com brevidade, em virtude dos limites de síntese desta aula, a Teoria dos Campos Conceituais, concebida pelo psicólogo de raízes piagetianas Gerard Vergnaud. O diferencial dessa teoria, diferentemente de muitas teorias cognitivistas estudadas em disciplinas passadas, todavia, sem aplicação, é que a Teoria dos Campos Conceituais tem proporcionado a obtenção de dados e resultados empíricos, sobretudo em sala de aula, quando efetivamente explorada no ambiente de ensino/aprendizagem em Matemática.

Objetivo

- Discutir a natureza de um problema em Matemática

TÓPICO 1

Como caracterizar um bom problema de Matemática

Objetivo

- Discutir problemas de aplicação e barreiras metodológicas

Indiscutivelmente, um sentimento que adquirimos apenas na prática, no convívio direto com os estudantes, é a necessidade de identificação de um bom problema de Matemática, afinal, como já mencionamos em aulas passadas, uma boa aula dessa disciplina se inicia por meio de um bom problema, entretanto, como fazê-lo?

Vamos, por exemplo, analisar o seguinte problema: sejam os números $a,b,c \in \mathbb{R}$ em progressão aritmética. Prove que os números $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ também formam um P.A. Vamos admitir que este modelo seja conhecido apenas pelo professor. Sublinhamos, então, que podemos apresentar os seguintes problemas aos estudantes:

$Problema_1$: Considerando que $(2,5,8)$ estão em P.A. o que se pode afirmar à respeito de $\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}} , \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)$?

Solução - Num primeiro momento, os alunos podem achar estranha a notação e o professor pode estimular os alunos a fazerem contas. Como por exemplo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}} , \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{1}{2,23606\ldots+2,8284\ldots} , \right.$$

$$\left.\frac{1}{2,8284..+1,4142..} , \frac{1}{1,4142..+2,2360\ldots}\right)$$

Mas essa estratégia vai se mostrar muito cansativa. O professor pode, também, tentar algumas representações geométricas., Veja, se tivéssemos a sequência $(2,5,8,11,14,17,20)$, quem seriam os termos correspondentes na P.A.?

Usando um raciocínio analógico, os alunos devem chegar às listagens:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{17}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{11}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{14}},\ ?\right)$$

que podem ser representados no plano por: $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)=$

$$\left((1,\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}})\ ,\ (2,\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}})\ ,\ (3,\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}),(4,\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{17}})\ ,\ (5,\frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{11}})\ ,\ (6,\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{14}}),\ ?\right)$$

Já vimos, nas aulas passadas, que o gráfico de uma P.A. (figura 1-II) se constitui a partir de pontos que não podem ser ligados no plano $\mathbb{R}^2$, mas quando realizamos a ligação entre os mesmos, percebemos que os três primeiros estão alinhados na mesma reta, enquanto os três últimos também. Pelo gráfico, os alunos devem ser estimulados a fazer conjecturas baseadas num raciocínio intuitivo.

Nele vemos que temos possivelmente duas P.A.´s: (a_1,a_2,a_3) e (b_1,b_2,b_3)

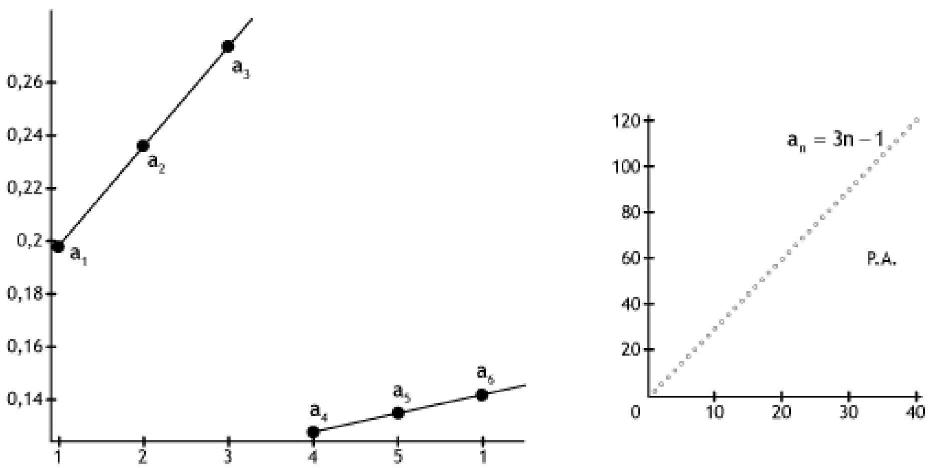


Figura 1: Interpretação geométrica da P.A.

Na sequência, o professor pode sugerir alguns artifícios algébricos, como: $a_2-a_1=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}$ e $a_3-a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}$ e verificar suas relações. De fato, $a_2-a_1=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{8-2}-$$

$$-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{8-5}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}-2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{6}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6}$$

. De modo

análogo, inferimos $\left(a_3 - a_2\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} -$$

$$- \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{8-2} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6} = \left(a_2 - a_1\right)$$

Assim, observamos de fato que (a_1, a_2, a_3) estão em P.A., pois $\left(a_3 - a_2\right) = \left(a_2 - a_1\right) = cte$, entretanto, $(b_1, b_2, b_3) = (4, \dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{17}})$, $(5, \dfrac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{11}})$, $(6, \dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{14}})$ estão em P.A., mas não fazem parte da primeira lista de números. Então, exigimos que $(b_1, b_2, b_3) = (1, \dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{17}})$, $(2, \dfrac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{11}})$, $(3, \dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{14}})$. Assim, o professor, a partir do modelo geral que deduzimos na aula passada, pode elaborar atividades particulares, sem necessariamente explicitar o modelo geral formal.

Outro elemento de difícil análise aqui diz respeito aos **limites de validade** da situação problema que deve ser conhecida pelo professor. Por exemplo, neste caso o professor não poderia enunciar: sejam os números $(a, b, c, ..., ...)$ em progressão aritmética. Prove que os números $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,... também formam uma P.A. De fato, a propriedade que analisamos aqui, o modelo matemático demonstrado prevê o comportamento apenas de três números em P.A. basta observar a figura 1.

Vejamos outro modelo geral que possibilita a replicação de várias situações problemas particulares.

$Problema_2$: Os números $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ formam uma P.A. Encontre tal progressão, sabendo que $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) = a$ e $({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + ... + {x_n}^2) = b^2$.

Solução - Vamos admitir nossa razão d, assim, temos:

$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) = a \leftrightarrow$

$(x_1 + x_1 + d + x_1 + 2d + ... + x_1 + (n-1)d) = a$ e

$({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + ... + {x_n}^2) = b^2$. No primeiro caso temos:

$$(x_1 + x_1 + d + x_1 + 2d + ... + x_1 + (n-1)d) = a \leftrightarrow (n \cdot x_1 + d + 2d + ... + (n-1)d) = a \leftrightarrow$$

$$(n \cdot x_1 + (d + 2d + ... + (n-1)d)) = a \leftrightarrow (n \cdot x_1 + \left((\frac{d + (n-1)d}{2})n \right)) = a \leftrightarrow (n \cdot x_1 + \left((\frac{nd}{2})n \right)) = a$$

$(n\cdot x_1+\left(\frac{n^2d}{2}\right))=a$.

Por outro lado, observamos que $(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+......+x_n{}^2)=b^2\leftrightarrow$ $(x_1{}^2+(x_1+d)^2+(x_1+2d)^2+......+(x_1+(n-1)d)^2)=b^2$. Fazendo as contas, desenvolvendo os termos ao quadrado e colocando fatores convenientes em evidência, encontramos a expressão:

$$nx_1^2+2x_1d\left(1+2+....(n-1)\right)+d^2\left(1^2+2^2+....(n-1)^2\right)=nx_1^2+n(n-1)x_1d+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2$$

Portanto: $b^2=nx_1^2+n(n-1)x_1d+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2$ e lembrando que $(n\cdot x_1+\left(\frac{n^2d}{2}\right))=a\leftrightarrow x_1=\frac{a-\frac{n^2d}{2}}{n}$, substituindo, teremos:

$$b^2=n\left(\frac{a-\frac{n^2d}{2}}{n}\right)^2+n(n-1)\left(\frac{a-\frac{n^2d}{2}}{n}\right)d+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow b^2=n\left(\frac{a-\frac{n^2d}{2}}{n}\right)^2+(n-1)\left(a-\frac{n^2d}{2}\right)d+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2$$

Assim, obtemos $d^2\frac{n(n^2-1)}{12}=b^2-\frac{a^2}{n}\therefore d=\pm\sqrt{\frac{12(nb^2-a^2)}{n^2(n^2-1)}}$

e $x_1=\frac{1}{n}\left[a-\frac{n(n-1)}{2}d\right]$. Nesse caso, a progressão desejada (condição de validade) que $12(nb^2-a^2)\neq 0$. Note-se que nessas condições e a partir desse modelo geral proposto pela questão, podemos gerar várias situações-problemas diferentes.

Para concluir essa discussão, recordamos o questionamento inicial que trazemos nesta seção descrita por **quando temos um bom problema de Matemática?** Até aqui diferenciamos o termo 'exercício' do termo 'problema', assim, decididamente a resposta para essa questão não se relaciona a um exercício que, na maioria dos casos, envolve um emprego de uma fórmula que irremediavelmente conduz a uma resposta de modo quase instantâneo, dispensando uma reflexão mais aprofundada por parte do solucionador. Um bom problema pode apresentar um enunciado de fácil caracterização, por exemplo: é possível que os números 2, 3 e 5 estejam em P.G.?

Observamos que não perguntamos de modo usual encontrado nos livros didáticos se os termos $(2,3,5,\ldots)$ formam uma P.G. e sim $(\ldots,2,\ldots,3,\ldots,5,\ldots)$ podem pertencer a uma P.G. Digamos que sua razão seja q , assim, podemos escrever $3=2\cdot q^n$ e $5=3\cdot q^m$, para alguns n e $m\in\mathbb{N}$. Desse modo $q^n=\dfrac{3}{2}$ e $q^m=\dfrac{5}{3}$, portanto, $\dfrac{3^m}{2^m}=\dfrac{5^n}{3^n}\leftrightarrow 3^{m+n}=2^m\cdot 5^n$. Agora concordamos que 3^{m+n} é sempre ímpar, enquanto que para $2^m\cdot 5^n$ termos um número impar, teremos que $m=0 \therefore 5=3\cdot q^0=3$ que é uma contradição. Assim, se $m\neq 0$ temos $\underbrace{3^{m+n}}_{\text{ímpar}}=\underbrace{2^m\cdot 5^n}_{par}$ um absurdo.

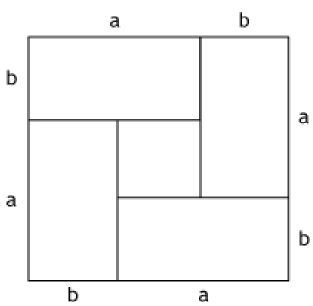
Salientamos que um problema como esse não é muito corriqueiro no ensino escolar, apesar de que o professor deveria conhecer com profundidade. Em outras situações, um bom problema envolve uma manipulação inesperada, como no caso de simplificar a expressão $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

De fato, observamos

$3+2\sqrt{2}=1+2\cdot\sqrt{2}+2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \therefore 3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, assim, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$. E podemos formular alguns problemas mais interessantes descritos por: (i) a seguinte expressão $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ pode ser simplificada? ; (ii) simplificar a expressão $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Já comentamos aqui que a primeira formulação é bem mais interessante para o aprendiz. Nesse sentido, temos:

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}$ que, no entanto, está errada, uma vez que $1-\sqrt{2}<0$. A resposta certa será $\sqrt{2}-1$. Em vários casos pode ocorrer que o estudante forneça soluções diferenciadas para um problema que naturalmente permite uma diversidade de estratégias de resoluções, por exemplo, a prova da inequação $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$. De fato, seu estudante poderia argumentar que a soma das áreas dos quatro retângulos de lados a e b é menor do que a área do quadrado de lado $(a+b)$, você aceitaria tal resposta intuitiva como válida?



$$\sqrt{ab\leq\frac{a+b}{2}}$$

Figura 2: Prova geométrica da propriedade

Para concluir com a discussão referente à caracterização de um bom problema de matemática, apresentamos a seguinte formulação: se $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ e vale $a^2 = b^2 + c^2$, então será o triângulo de lado a, b e c retângulo?

Para verificar esta propriedade pouco explorada nos livros didáticos, tomamos no ΔABC os segmentos $\overline{AB} = c$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{BC} = a$. De um ponto de vista didático-metodológico, separamos em dois casos: (i) se $\hat{A} < 90^o$ e (ii) se $\hat{A} > 90^o$.

Nesse caso, exploramos os seguintes diagramas como guia para o raciocínio do estudante.

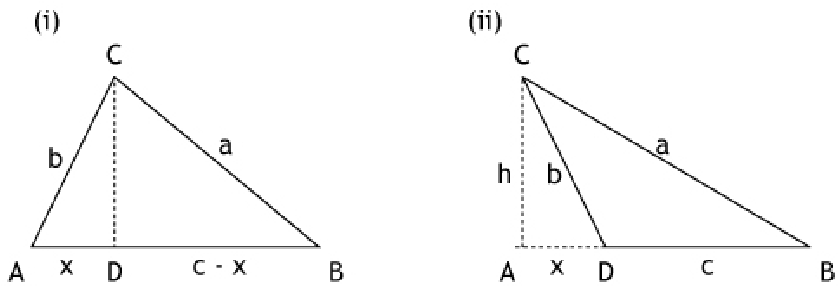


Figura 3: Diversos casos possíveis de triângulos

No caso (i) temos $\hat{A} < 90^o$ e vamos admitir que $b \leq c$ baseando-se no desenho. Assim, tomamos o ponto D como projeção do vértice C sobre o segmento $\overline{AB} = c$. Sejam assim $\overline{AD} = x$, $\overline{DB} = c - x$ e $\overline{CD} = h$. Desde que o triângulo ΔBDC é retângulo em $\hat{D}$ e com a mesma razão ΔADC , pela inferência conhecida do teorema sabemos que $a^2 = h^2 + (c - x)^2 \leftrightarrow$

$$a^2 = h^2 + (c^2 - 2cx + x^2) \leftrightarrow a^2 = (b^2 - x^2) + (c^2 - 2cx + x^2) \leftrightarrow a^2 = (b^2) + (c^2 - 2cx) \leftrightarrow$$

$a^2 = (b^2 + c^2 - 2cx)$, todavia, veja que $(-2cx) < 0 \therefore$ $a^2 = (b^2 + c^2 - 2cx) < b^2 + c^2 = a^2$ o que é uma contradição.

No caso (ii) temos $\hat{A} > 90^o$. Assim, vamos tomar agora os triângulos ΔDAC e ΔDBC , escrevemos:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 \leftrightarrow a^2 = h^2 + (c^2 + 2cx + x^2) \leftrightarrow a^2 = b^2 - x^2 + (c^2 + 2cx + x^2) \leftrightarrow$$

$a^2 = b^2 + (c^2 + 2cx) > b^2 + c^2 = a^2$,ou seja, outra contradição. Com isso, acabamos de demonstrar que: (iii) se $\hat{A} < 90^{o}$, então $a^2 < b^2 + c^2$ e (iv) se $\hat{A} > 90^{o}$ obtemos $a^2 > b^2 + c^2$. Já podemos concluir o que buscamos demonstrar de fato?

Vários estudos indicam a importância de conduzirmos o estudante à produção de conjecturas sobre determinados fatos e propriedades matemáticas, evitando apenas o emprego de rotinas algorítmicas. Ademais, é essencial, como já sublinhamos nos parágrafos anteriores, o professor de Matemática antever os problemas, limitações, inconsistências e barreiras relacionadas a determinados problemas que tenciona explorar com seus pupilos. Vejamos por exemplo: (i) encontrar todas as soluções de $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4\left(1+xy\right)$; (ii) é possível encontrar as soluções de $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4\left(1+xy\right)$?

Observamos, na figura 4, o modelo geométrico que antecipa a informação para o professor que é consciente de que a situação-problema admite soluções do tipo (x, y). Mas vejamos alguns malabarismos algébricos que antecedem a resposta.

Inicialmente temos $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4\left(1+xy\right) \leftrightarrow$

$$x^2y^2-2xy+1+x^2+y^2-2xy+2(x-y)(1-xy)=4 \leftrightarrow \left(xy-1-(x-y)\right)^2=4 \leftrightarrow$$

Assim, encontramos:

$$\left(xy-1-(x-y)\right)^2=4 \therefore (x+1)\left(y-1\right)=\pm 2 \leftrightarrow \begin{cases}(x+1)\left(y-1\right)=2\\(x+1)\left(y-1\right)=-2\end{cases}$$ e ao

impor essas condições, encontramos quatro sistemas que exibimos na figura abaixo, do lado direito. Quando resolvemos tais sistemas, devemos encontrar os pares ordenados $(1,2)$; $(-3,0)$; $(0,3)$; $(-2,-1)$; $(1,0)$; $(-3,2)$; $(0,-1)$; $(-2,3)$.

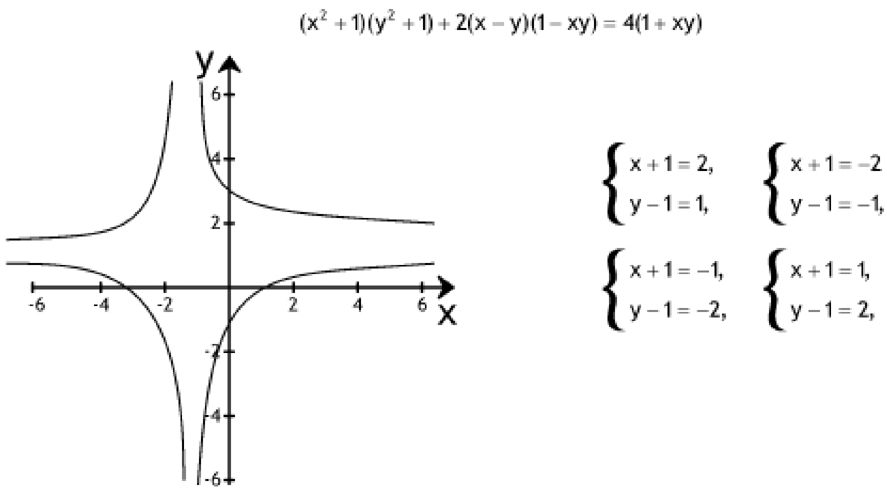


Figura 4: Argumentação geométrica e algébrica da solução

Acrescentamos que encontrar, formular, conceber e caracterizar um bom problema de Matemática não é uma questão imediata e simples, na própria História da Matemática, encontramos exemplos de situações em que mesmo matemáticos profissionais possuíam em suas mãos problemas que exigiram séculos para a sua resolução, todavia, não percebiam como um problema propriamente dito ou algo que os conduzisse a algum resultado mais interessante, do ponto de vista matemático. Como exemplo, temos o caso da *conjectura* de Christian Goldbach que propunha que qualquer número maior que dois é soma de dois primos. Por exemplo: $4 = 2 + 2;\ 6=3+3;\ 8=3+5;\ 12=5+7$. Usando um computador, encontramos cerca de um bilhão de exemplos, contudo, podemos acreditar que tal conjectura é sempre verdadeira? Ainda não temos até agora uma resposta (DEVLIN, 1998, p. 39).

SAIBA MAIS!

Christian Goldbach, matemático prussiano-russo, amigo de Euler a quem este confiou a descoberta de que uma potência imaginária de um número imaginário pode ser um número real. Mais informações no site http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/ChrstiaG.html

Advertimos as condições que caracterizam um pseudo-problema de Matemática que acontece quando aparentemente o professor transmite a ideia de que se trata de um problema, que exige uma maior reflexão, todavia, não passa de um enunciado que pode ser desvelado por meio da aplicação de uma fórmula. Vejamos dois enunciados de pseudo-problemas:

As idades de duas irmãs correspondem às raízes da equação $x^2 - 10x + 21 = 0$. Quantos anos possui cada uma delas?

A idade de Alfreda dividida pela idade de sua irmã gera a seguinte dízima $0{,}7272...$. Qual a idade de cada uma?

Determinar todos inteiros positivos x e $y \in \mathbb{N}$, tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}$.

Determinar todos inteiros x e y , tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}$.

Determinar todos os números $x \in \mathbb{Q}$ ou $y \in \mathbb{Q}$, tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}$.

Solução:

Na primeira situação, a contextualização foi completamente infeliz, aliás, o estudante poderia resolver a equação $x^2 - 10x + 21 = 0$ sem nem mesmo ler o enunciado.

No segundo caso, identificamos a falta de precisão na formulação da questão e dos dados procurados. De fato, nesse caso, o solucionador poderia escrever $0{,}7272... = \frac{}{99}$.

Dificilmente o aluno consegue evitar as seguintes manipulações:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{19}\leftrightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{19}\leftrightarrow 19x+19y+xy\leftrightarrow xy-19x=19y\leftrightarrow x=\frac{19y}{y-19}.$$

Nesse ponto, o solucionador deve empregar suas hipóteses $(x \text{ e } y\in\mathbb{N})$ e, assim, impõe a condição $x=\dfrac{19y}{y-19}\in\mathbb{N}$. Assim, podemos ter a possibilidade de que $y-19=1\leftrightarrow y=20\therefore x=\dfrac{19\cdot 20}{1}=380$. Pode ocorrer também a possibilidade de que $y-19$ divide 19 ou $y-19$ divide y. Mas como 19 é primo, tem-se que $y-19=19\leftrightarrow y=38$, e neste caso, $x=\dfrac{19\cdot 38}{19}\in\mathbb{N}$.

No caso em que $y-19$ divide $y\leftrightarrow y=t\cdot(19-y)$. Por outro lado, sabemos que $\sqrt{xy}\leq\dfrac{x+y}{2}$, daí, observamos que $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{19}\leftrightarrow\dfrac{x+y/2}{xy}=\dfrac{1/2}{19}\leftrightarrow\dfrac{x+y}{2}\cdot 19=\dfrac{xy}{2}$.

Sublinhamos que uma pequena modificação poderá alterar e expandir a quantidade de possibilidades para o mesmo problema.

De fato, agora podemos ter a condição descrita em que temos $x=\dfrac{19y}{y-19}\in\mathbb{Z}$, assim, $\dfrac{19y}{y-19}=-1\leftrightarrow 19y=19-y\leftrightarrow 20y=19\leftrightarrow y=\dfrac{19}{20}\notin\mathbb{Z}$. Portanto, o enunciado neste item não apresenta soluções em $\mathbb{Z}$, quando tivermos a possibilidade de que $x=\dfrac{19y}{y-19}=-1$. Entretanto, o solucionador desse problema precisaria ficar atento à possibilidade $y-19=-19\leftrightarrow y=0$ e $x=0$, mas nunca poderia ocorrer esta possibilidade.

Deixaremos a cargo do leitor!

A moral da história é que, diferentemente de um 'exercício' de Matemática, um verdadeiro problema apresenta a 'flexibilidade', dispõe de um repertório maior de distintas e diferenciadas estratégias e possibilidades de solução. Nesse caso, fornecemos com uma ligeira modificação enunciados distintos nos itens c), d) e e (deixaremos a cargo do aluno)).

Em qualquer caso, na análise *a priori* da escolha de uma situação-problema, o professor deve estar cônscio de que toda situação problema apresenta um conceito matemático principal que se quer aferir um conhecimento por parte do aprendiz. Ademais, todo *conceito matemático* se relaciona e é condicionado por uma *definição* *formal* matemática, apesar de que, na maioria dos casos, os estudantes resolvem problemas por intuição e sem se recordar com precisão e consciência das *definições matemáticas formais* exigidas por vezes de modo implícito.

Realmente, não é concebível uma aula desenvolvida pelo professor que nem mesmo ele possui de forma clara e precisa o motivo pelo qual a aprendizagem de um conceito matemático pode ou não ocorrer, que fatores cognitivos podem acelerar ou causar lentidão no processo paulatino de sua internalização, e mesmo que fatores podem atuar de forma efetiva impedindo que a aprendizagem evolua a uma falsa/equivocada concepção.

Para esclarecer um pouco mais essas possibilidades que apresentamos agora, de modo pormenorizado, abordaremos uma teoria de base cognitivista, de raízes piagetianas que consegue explicar, ou pelo menos esclarecer, alguns pontos relacionados ao multifacetado processo de aprendizagem em Matemática.

TÓPICO 2

Definição matemática e conceito matemático

Objetivo

- Diferenciar conceito e definição matemática

No campo do ensino da Matemática, poucos nomes são tão respeitados quanto o de Gérard Vergnaud.

Formado em Psicologia, fez a própria tese de doutoramento com ninguém menos que Jean Piaget. "O título era A *Resposta Instrumental como Resolução de Problemas*. Pura teoria".

A Teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud (1996, p. 197):

> É uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas.

Vergnaud acrescenta que uma de suas principais finalidades *é fornecer um quadro que permita compreender as relações e rupturas entre os conhecimentos das crianças e adolescentes* (1996, p. 197). Apesar de não ser específica da Matemática, seu campo de aplicação nesta ciência tem se revelado promissor em inúmeros estudos realizados.

SAIBA MAIS!

Gérard Vergnaud, aos 75 anos de idade e depois de orientar mais de 80 teses de mestrado e doutorado, continua trabalhando como diretor emérito de estudos do Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS, na sigla em francês), em Paris. Mais informações http://homolog.novaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/todos-perdem-quando-nao-usamos-pesquisa-pratica-427238.shtml

Um dos elementos essenciais em sua teoria é a noção de esquema cognitivo. Acrescenta que um conceito não pode se reduzido a sua própria definição, a não ser que estejamos interessados em seu ensino e na sua aprendizagem (Idem, 1996, p. 198). Outros autores, assim como Vernaud, com notáveis influências piagetinanas, explicam que:

> Um esquema é sempre um sistema organizado de interpretações sequenciais e juntamente procedurais para um certo nível de maturação e um suficiente volume de experiência. Um esquema é tanto estável como flexível. Ele expressa um caminho de pensamento, interpretação e solução. De fato, o conceito formal de prova matemática é um esquema mental, por que é expresso pelo princípio de que em matemática a verdade de um enunciado não é estabelecida pela confrontação com a realidade, porém dedutivamente em conformidade das regras lógicas. Uma criança de 8 anos de idade não possui esquemas para compreender a necessidade de verificação de um enunciado aparentemente evidente (FISCHBEIN & MARIOTTI, 1997, p. 30).

Vernaud diferencia de modo enfático:

- As *classes de situações* nas quais o sujeito dispõe, em seu repertório, de um dado de seu desenvolvimento e sobre circunstâncias, as competências necessárias ao tratamento relativamente imediato para determinada situação;
- As *classes de situações* pelas quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, de hesitações, e de tentativas abortadas, e que podem conduzir eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Vernaud diferencia o papel do esquema cognitivo nesses dois casos distintos. No primeiro, observamos que as condutas do sujeito são largamente automatizadas, organizadas por um esquema único; e no segundo caso, observamos a adaptação sucessiva de vários esquemas, *que podem entrar em competição e que podem também comprometer a solução desejada, devem ser combinados e recombinados e tal processo de acomodação envolve necessariamente um processo de descoberta* (VERGNAUD, 1996, p. 199).

Vergnaud designa por *esquema cognitivo a organização invariante da conduta de um sujeito por meio de uma classe de situações dadas. São os esquemas que devemos procurar nos conhecimentos mobilizados pelo sujeito, isto é, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória* (VERGNAUD, 1996, p. 199).

Por exemplo, Vergnaud explica que alunos entre 5 e 7 anos descobrem que não é necessário recompor todo o conjunto $A \cup B$, se já conhecemos e contamos a quantidade de elementos que possui o conjunto A e a quantidade de elementos em

B. Mesmo desconhecendo o resultado formal, os alunos exprimem o que Vergnaud chama de *teorema-em-ato,* descrito nesse caso por $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$, na condição em que $A \cap B = \varnothing$. Abreviamos aqui $Card = cardinalidade$.

Vergnaud discute algumas propriedades operadas pelos alunos sobre conjuntos que dizem respeito a *teoremas-em-ato* do tipo: se $A \subset B \rightarrow Card(A) \leq Card(B)$; $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Ele explica que alguns alunos conseguem e extraem de situações-problema essas e outras propriedades de modo intuitivo, sem o conhecimento a *priori* das propriedades formais que exigem um conhecimento acadêmico de Matemática.

Outro *teorema-em-ato* destacado por Vergnaud é empregado quando demandamos a crianças de 8 a 10 anos completar as listagens: $\begin{matrix} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} \\ \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\} \end{matrix}$. Nesse caso, o *teorema-em-ato* pode ser descrito por $f(x) = 2 \cdot f(x)\ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$, mesmo desconhecendo este modelo formal.

Vergnaud adverte que *os conceitos são raramente explicitados pelos alunos ao passo que são construídos na ação, são conceitos em ato, ou categorias em ato* (1996, p. 208). Por exemplo, quando o aluno declara: quando temos um triângulo de lados a, b e c, com um ângulo de 90º, temos que $a^2 = b^2 + c^2$ que é uma sentença proposicional a respeito de uma propriedade geométrica.

Em geometria, essa *sentença proposicional* pode ser considerada como (V) verdadeira ou (F) falsa. Além disso, o aluno pode acreditar nela sem mesmo conhecer sua demonstração, o que, às vezes, ocorre até no caso do professor. Em algumas situações, o aluno apenas emprega uma estratégia já familiar, apresentada em certos casos pelo professor na resolução de um problema que o mesmo sente ser relacionado com o teorema de Pitágoras. Se o aluno observa que seu emprego teve êxito, o mesmo tende a preservá-lo, modificá-lo e empregá-lo em novas situações relacionadas.

Nesse sentido, Vergnaud (1996) explica:

> Assim quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para uma situação, a experiência o conduz a modificar por outro esquema, ou mesmo modificar o próprio esquema. De modo semelhante à Piaget, podemos dizer que são os esquemas que estão no centro do processo de adaptação de estruturas cognitivas, assimilação e acomodação (p. 202).

Vergnaud designa os *conceitos-em-ato* e os *teoremas-em-ato* como os conhecimentos contidos nos esquemas cognitivos. As terminologias acrescentadas por Vergnaud 'em ato' sublinha o caráter situacional e diz respeito a um conhecimento mobilizado por um sujeito naquele momento, diante da tentativa de resolução de um problema. Na figura 5, observamos os elementos discutidos em sua teoria.

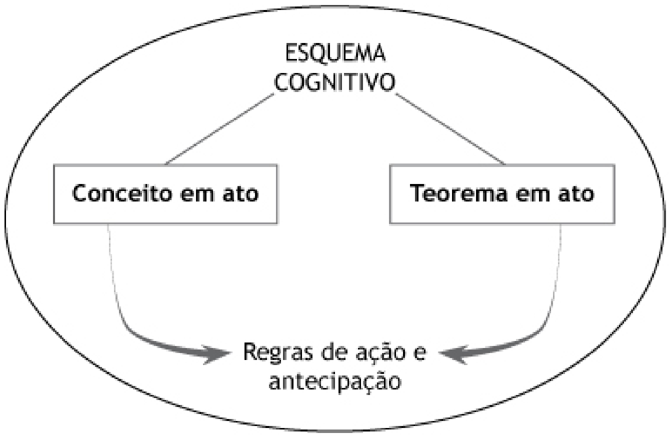


Figura 5: Os elementos constituintes de um esquema cognitivo

Observamos que a ideia de Gerard Vergnaud se relaciona de modo intrínseco com um ensino baseado por meio de uma aquisição conceitual dos saberes. Toda a aprendizagem gira em torno de uma aquisição, compreensão, modificação e sistematização de um repertório cognitivo de conceitos e, em nosso caso, conceitos matemáticos. De um modo metafórico, podemos imaginar o conceito de 'função afim' como o alvo principal a ser ensinado pelo professor.

Por outro lado, na medida em que conhecemos bem outros conhecimentos e conceitos relacionados com este, teremos melhores condições de compreensão e internalização do conceito de função afim. Sua ideia vai num sentido contrário à crença de uma **aprendizagem linear** (lado direito) de conceitos, pois caminha antes para uma aprendizagem em forma de 'teia', como sugere um campo conceitual.

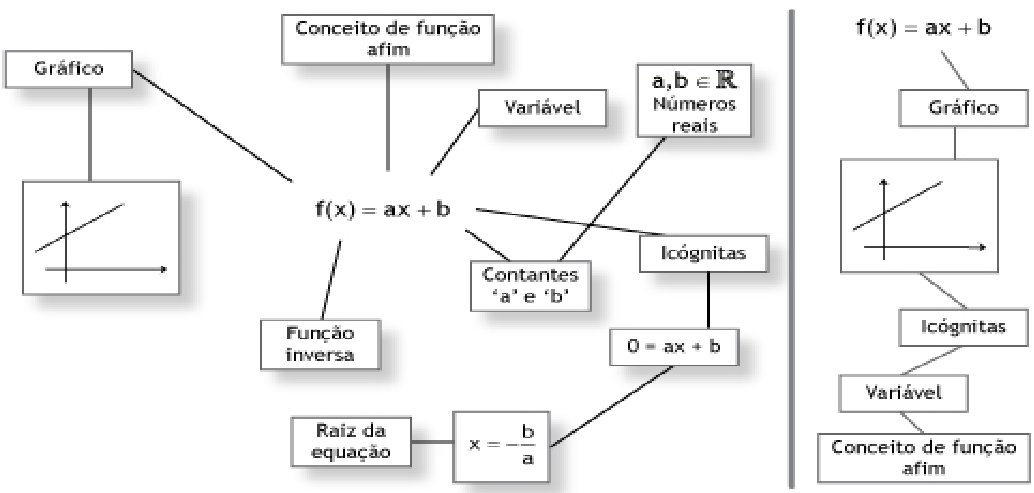


Figura 6: Conceitos relacionados com o conceito de função

Na figura 7, vemos um exemplo de outro *campo conceitual* em torno da noção de número complexo. Observamos que qualquer pessoa, mesmo sendo aluno ou professor, descreveria o mesmo campo conceitual de modos, ligações e relações distintas, e quanto mais o sujeito sabe sobre determinado conceito, mais elaborado e/ou complexo poderá ser seu campo conceitual.

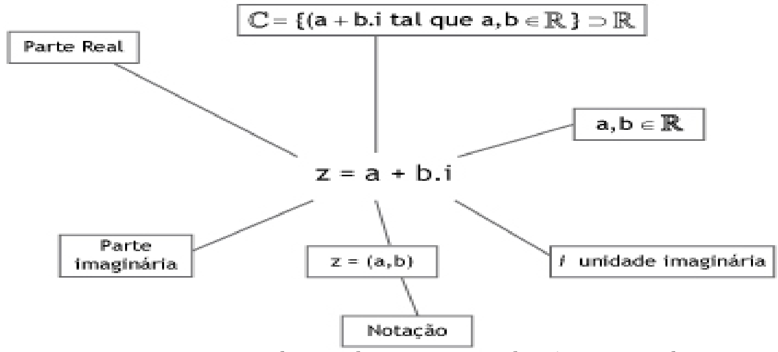


Figura 7: Conceitos relacionados ao conceito de número complexo

Neste ponto da discussão, percebemos que a aprendizagem se dá pela internalização progressiva e a incorporação ao 'arquivo cognitivo' do aprendiz, mas o que é mesmo um conceito? Como relacionar uma definição matemática formal e um conceito matemático?

Essas questões estão longe de admitirem respostas definitivas e triviais. A preocupação maior é encontrarmos um professor de Matemática em sala de aula acreditando que, ao conhecer as *definições formais* em Matemática, necessariamente o estudante aprende, ou ainda, aquela apresentação linear de conceitos, definições e teoremas garantem a internalização dos mesmos. Vejamos a teorização concebida por Vergnaud. A partir das considerações anteriores, Vergnaud considera um *conceito matemático* como constituído de três conjuntos:

S : conjunto de situações em que o sentido do conceito é constituído (referência);

i : conjunto de *invariantes operatórios*, *conceitos-em-ato* e *teoremas-em-ato* que intervém nos esquemas de tratamento dessas situações (o significado);

L : conjunto de representações linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações nas quais ele se aplica e os procedimentos de tratamento que dele se nutrem (o significante).

Assim, podemos caracterizar um conceito matemático pelo conjunto $C_{conceito} = (S,i,L)$. Vejamos o exemplo de funções polinomiais do tipo $f(x) = ax + b$. Note-se que esta representação analítica já faz parte do conjunto L . Tal objeto pode ser representado também por $y = ax + b$, ou ainda, por uma condição particular $0 = ax + b$. Em cada caso, ao se deparar com uma representação particular, o sujeito necessita acionar um *esquema cognitivo* específico responsável por determinada operação. Vergnaud diz que *a automatização é evidentemente uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da conduta* (1996, p. 201). Nos casos anteriores, o aluno pode tratar a representação $y = ax + b$ restrita ao contexto da Geometria Analítica, enquanto que $f(x) = ax + b$ pode ser considerada apenas como um polinômio. Assim, as operações e/ou regras empregadas em cada caso são específicas e diferenciadas. Observamos abaixo algumas ações que constituem os *invariantes operatórios operacionais* de cada conceito

$y = ax + b$, onde $a \neq 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$	Dividir $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9$ por $x^2 + x - 1$	$x^2 + 1 = 0$
$c = ax + b \leftrightarrow$ $c - b = ax \leftrightarrow$ $x = \frac{c-b}{a} \in \mathbb{R}$	$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \therefore$ $x_{raizes} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$	$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9 =$ $(x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 2) +$ $+(x + 11)$	$x^2 + 1 = 0 \leftrightarrow$ $x^2 - i^2 = 0 \leftrightarrow$ $(x - i)(x + i) = 0$ *Raízes* x=$-i \in \mathbb{C}$ e x=$i \in \mathbb{C}$

Tabela 1: Invariantes operatórios operacionais

Vergnaud (1996, p. 205-206) nos fornece um comentário interessante quando destaca que:

> Existem numerosos exemplos de esquemas de adaptação em Matemática. Cada esquema é relativo a uma classe de situações as quais as características são bem definidas. Todavia, podem ser aplicados por um sujeito individual a uma classe reduzida de situações que são as que podem ser aplicadas com eficacidade. Se coloca então o problema da extensão do esquema a uma classe mais extensa [...] O reconhecimento dos invariantes são os pontos chave da generalização do esquema. [...] Mas um esquema pode também ser aplicado por um sujeito individual a uma classe mais larga [...].

Suas palavras merecem um comentário extra. O primeiro diz respeito ao caráter adaptativo dos esquemas privativos de cada sujeito, com referência a cada situação referente. Vergnaud observa acima que um esquema cognitivo é um elemento gerador de ações que podem ser aplicadas em uma série de classe e situações diferentes, principalmente, em momentos diferentes da vida do sujeito. Por exemplo, quandocriança, aprendemos a noção e o conceito de fração $\frac{a}{b}$.

Durante vários anos de escolaridade, em inúmeras ocasiões em nossa vida, escutamos algo, nos deparamos no dia-a-dia com coisas que nos remetem ao conceito apresentado formalmente na escola. No caso do professor de Matemática, que estuda formalmente o conceito mais abstrato de fração $\left[\frac{a}{b}\right]$, como uma classe de equivalência, quando na vida prática, o símbolo $\frac{1}{2}$ representa bem mais do que a metade de uma pizza, e sim é um representante e gerador da classe $\left[\frac{1}{2}\right]=\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{4}{8},......\}$. Todavia, esse formalismo é incongruente com o saber escolar, apesar de que o professor deveria dominá-lo com profundidade.

Mais adiante ainda, o mesmo professor deverá ensinar aos seus próprios filhos o conceito de fração, assim, diante de cada situação, no decorrer do tempo, o sentido/significado do conceito de fração evolui, modifica-se, sistematiza-se e relaciona-se de modo conceitual com outros conceitos pertencentes ao repertório particular deste professor.

Neste ponto é que se tornam importantes o caráter da extensão, adaptação, generalização e automatização dos esquemas de ação e antecipação de um sujeito que aprende determinado conceito, como bem coloca Vergnaud.

Além disso, quanto mais o aluno vivencia situações diferenciadas, inéditas e, no caso do licenciando em Matemática, ensina para outras pessoas, de modo concomitante, precisa e/ou se conscientiza de formas diferencias de resolução, estratégias que ainda não tinham sido percebidas e empregadas, com isso adquire outros pontos de vista, enfim, amadurece cada vez mais em relação a determinado assunto, adquire o que não se ensina na academia: 'experiência'.

Por outro lado, a partir das considerações de Vergnaud, depreendemos que a noção de *conceito matemático* é mais ampla e globalizante do que a noção de *definição matemática*. Se fôssemos representar como um conjunto, poderíamos descrever que $C_{definições\ \text{formais}} \subset C_{conceitos\ \text{matemáticos}}$ (conjunto das definições está contido no conjunto dos conceitos formais) e de modo esquemático, propomos a figura 5. O que deveria ficar bem claro ao futuro professor é que conhecer a *definição formal* de um conceito não implica ou conduz de modo imediato na compreensão desse conceito. Assim, é importante para o sujeito conhecer e vivenciar situações-problema relacionadas com determinado conceito para que o mesmo adquira significado, de modo paulatino e gradual, para o sujeito.

Note-se que nosso comentário, numa perspectiva cognitiva, contraria mesmo a famosa propriedade conjuntista descrita há pouco por $C_{definições\ \text{formais}} \subset C_{conceitos\ \text{matemáticos}}$ assim, podemos caracterizar que $\exists\ x_{sujeito} \in C_{definições\ \text{formais}} - C_{conceitos\ \text{matemáticos}}$, ou seja, pode existir um sujeito $\exists\ x_{sujeito}$ que conhece uma *definição formal* matemática, todavia, não possui/apresenta nenhuma significação para a mesma. E de modo interessante pode existir $\exists\, x_{sujeito} \in C_{conceitos\ \text{matemáticos}} - C_{definições\ \text{formais}}$ como na situação em que frequentemente o sujeito resolve um problema desconhecendo ou não se recordando com detalhes da definição formal requerida.

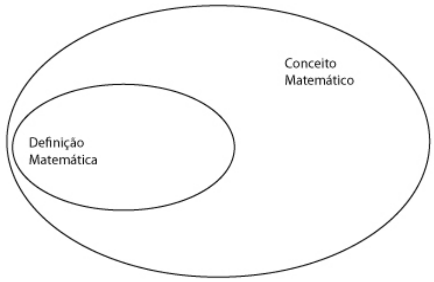


Figura 8: Diferenças entre conceito matemático e definição matemática

Observamos que:

> Quando definimos axiomaticamente um objeto matemático ou realizamos formalmente a sua construção, adquirimos a possibilidade de distinguir este objeto definido dos demais. Adquirimos a possibilidade de raciocinar e conjecturar sobre tal objeto, que agora, passa a ser um objeto de nosso pensamento, de nossa reflexão (ALVES, 2010, p. 128).

Buffet (2003) esclarece que etimologicamente, ''definir'' significa: delimitar o que é do que não é. Este aspecto é frequentemente encontrado em enciclopédias e dicionários (p. 17, tradução nossa).

Com respeito à importância das definições, Henri Poincaré destaca ''as definições em Matemática são enunciadas como convenções, contudo, a maior parte dos espíritos se revoltará se quisermos impor por meio de convenções arbitrárias'' (POINCARÉ, 1904, p. 268, tradução nossa).

Assim, uma definição matemática formal permite as operações que podemos efetuar sobre os objetos matemáticos, tanto operações físicas como operações estritamente mentais e mais sofisticadas.

Vejamos um exemplo interessante que constou na avaliação do Enade (2005). Não precisamos muito tempo de reflexão para concluir que a situação-problema se refere ao conceito matemático de posição relativa entre duas circunferências. Nesse enunciado, as representações são descritas em língua materna e registros analíticos, desse modo, a ação particular de cada sujeito no sentido de esboçar desenhos/figuras que possam guiar/orientar as decisões que devem ser tomadas apresentam um caráter particular da aprendizagem do indivíduo.

Note-se que um solucionador qualquer de problemas não poderia resolver de modo semelhante o problema abaixo, como também um problema relacionado, por exemplo, com números complexos, o que coloca em evidência os *invariantes operatórios* peculiares a cada conceito.

Questão 18

As equações $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ representam, no plano cartesiano xOy, as circunferências C_1 e C_2, respectivamente. Nesse caso,

A) as duas circunferências tem exatamente 2 pontos em comum.

B) a equação da reta que passa pelos centros de C_1 e C_2 é expressa por $y = -x + 1$.

C) os eixos coordenados são tangentes comuns às duas circunferências.

D) o raio da circunferência C_1 é o triplo do raio da circunferência C_2.

E) as duas circunferências estão contidas no primeiro quadrante do plano cartesiano xOy.

Figura 9: Questão do Enade (2005) discutido por Lara (2007, p. 183).

Nesse caso, podemos caracterizar o conjunto $C_{conceito} = (S, i, L)$ como:

S: Cada posição possível entre as circunferências C_1 e C_2 caracteriza e condiciona um sentido/significado diferente. O contexto em que elas são colocadas e discutidas caracteriza a referência da situação apresentada;

i: Os *invariantes operatórios* dizem respeito ao modo de agir e elaborar conjecturas, realizar e empregar regras intrínsecas aos conceitos de circunferência.

L: As equações $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ (circunferência) e $y = -x + 1$ (reta) são representações particulares de objetos específicos. Cada representação condiciona ações e estratégias específicas.

Observamos que, no citado caso, existe um modelo matemático mais geral que caracteriza a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ou de equação geral dada por $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ obtida a partir da primeira. Notamos, ainda, que cada sentença acima pode proporcionar um significado distinto ao leitor. O leitor-estudante pode, por exemplo, extrair um significado geométrico distinto. De fato, no item (A), o sujeito pode atribuir os seguintes sentidos (referências). Por outro lado, do ponto de vista algébrico, as seguintes estratégias deverão estar presentes nas resoluções dos estudantes:

$$x^2+y^2+4x-4y+4=0 \leftrightarrow$$
$$x^2+2\cdot 2x+y^2-2\cdot 2y=-4 \leftrightarrow$$
$$x^2+2\cdot 2x+2^2+y^2-2\cdot 2y+2^2=-4+2^2+2^2 \leftrightarrow$$
$$[x^2+2\cdot 2x+2^2]+[y^2-2\cdot 2y+2^2]=-4+4+4=4 \leftrightarrow$$
$$[x+2]^2+[y-2]^2=4 \therefore \textit{Raio}\ \text{r=2 centro}\ (-2{,}2)$$

De maneira análoga, um tratamento similar deverá ser dado à equação $x^2+y^2-2x+2y+1=0$. Nas ilustrações abaixo, descrevemos algumas possibilidades de representação e interpretação geométrica das tarefas.

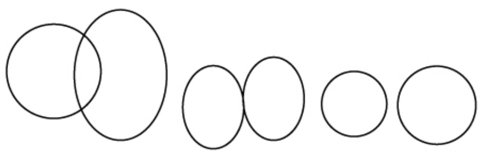


Figura 10: Interpretação geométrica do item (a)

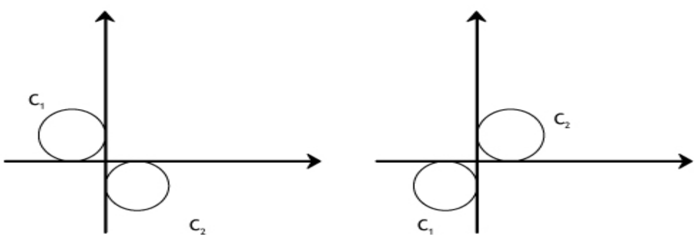


Figura 11: Interpretação geométrica do item (c).

Certamente que de acordo com a interpretação geométrica de cada sujeito podemos esperar estratégias, escolhas, declarações e aplicações de regras de ação e antecipação distintas (*invariantes operatórios*).

Domingos (2003) discute em sua tese uma teoria de base cognitivista que caracteriza as possíveis estratégias de solução de um problema. Não é muito simples para um professor de Matemática iniciante identificar nos protocolos produzidos pelos estudantes tal sistematização relacionada à estratégias de solução de problemas. Por outro lado, estas estratégias são completamente condicionadas pelo conhecimento conceitual do solucionador de problemas. Por exemplo, quando o professor apresenta um problema a um estudante, como já explicamos, a situação-problema sempre possui um conceito principal que é o alvo principal do professor a ser ensinado. E quando temos um *conceito matemático formal*, de modo automático, necessitamos de uma *definição matemática* correspondente.

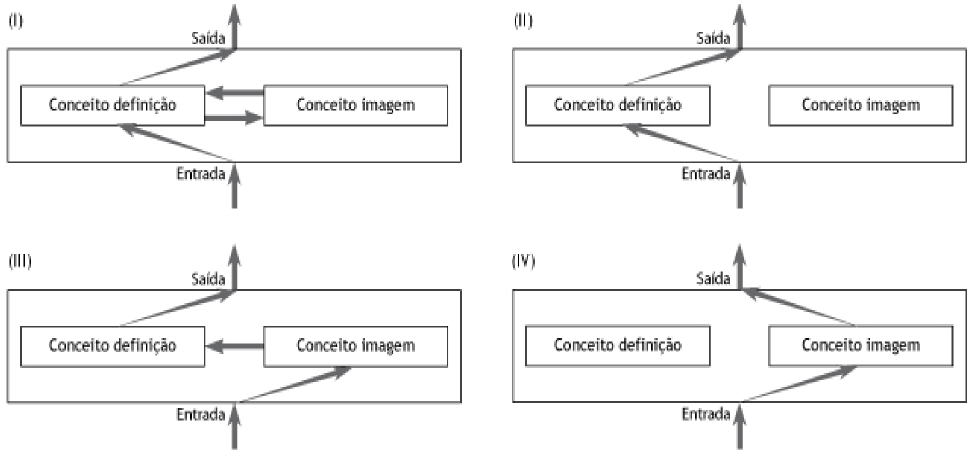


Figura 12: Domingos (2003) Esquemas de resolução de problemas em Matemática

As possibilidades de estratégias apresentadas na figura 12 deveriam ser de conhecimento para qualquer professor de Matemática, no sentido de analisar, avaliar, acompanhar os raciocínios qualitativos empregados pelos estudantes, todavia, sabemos que na prática é bem mais fácil avaliarmos quantitativamente suas estratégias (diagrama (II)). Acrescentamos que a noção de conceito imagem diz respeito ao significado atribuído pelo indivíduo a determinado conceito.

Veja que conhecer sua *definição formal* não implica que o indivíduo compreenda, entenda o significado ou sentido de um conceito/objeto matemático. Observamos que a estratégia (IV) refere-se a uma ação baseada completamente em um raciocínio intuitivo do sujeito com referência a uma *definição formal* que o mesmo não conhece.

Por exemplo, um aluno pode resolver uma questão envolvendo a noção de P.G. conhecendo apenas a definição formal de P.A. Um estudante pode resolver de modo intuitivo um problema de multiplicação conhecendo apenas a noção de adição/subtração de números reais. Um estudante pode resolver, também, de modo intuitivo, questões de Geometria Analítica conhecendo apenas a teoria que chamamos de Geometria Plana.

Na disciplina de Resolução de Problemas, voltaremos a discutir tais estratégias de resolução, com ênfase no lado psicológico do solucionador de um problema de Matemática. Podemos finalizar nossos comentários destacando que a estratégia mais significativa e que diz respeito a um domínio de conhecimento mais esperado diz está relacionada com a de Carneiro (2003).

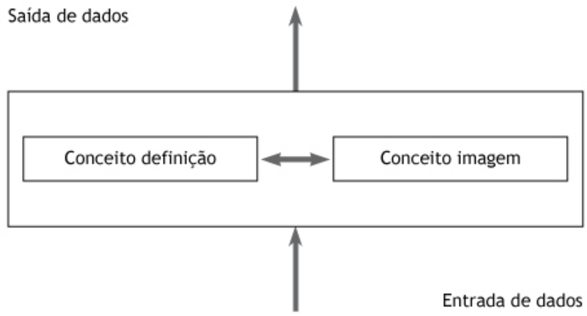


Figura 13: Carneiro (2003, p. 29).

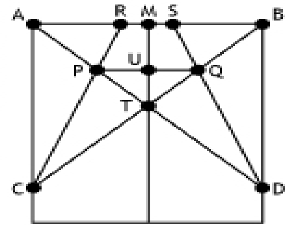
Na figura 13, distinguimos uma estratégia na qual o indivíduo possui uma interpretação intuitiva/significativa da *definição formal* de um objeto matemático particular. Essa é a relação conceitual esperada, por exemplo, para o caso do professor de Matemática, entretanto, nem sempre isso ocorre. Merece comentário que para se atingir, dominar e dispor de um esquema de raciocínio mental com as características acima, o aluno deverá experimentar um período de esforço, empenho, concentração com respeito a determinado conteúdo específico.

Certamente que avaliar estratégias, como nos casos figura 13(I), figura 13 (III) e figura 13(IV), é razoavelmente mais complexo e laborioso, entretanto, tarefas do tipo figura 13(II) são as que promovem/fornecem uma maior comodidade ao professor, é o que se chama de *avaliação quantitativa*. Nesta, as estratégias giram em torno da aplicação de uma única regra, como é corriqueiro nas questões de vestibulares que envolvem a escolha de intens.

Esse tipo de avaliação, conforme já mencionamos, é um condicionamento epistemológico do saber matemático, que finda por influência as práticas sociais que se desenvolvem em torno deste saber; o processo de observação e análise do mestre se restringe na observância e na constatação se o aluno conhece ou não a regra escolhida, se o aluno sabe ou não o teorema que funciona de modo mágico na resolução esperada. Todavia, dependendo da formulação apresentada, o professor poderá avaliar o aluno por meio de um viés mais qualitativo, como vemos na figura 14.

QUESTÃO 15

Uma professora do ensino fundamental resolveu utilizar, em suas aulas, a construção de um avião de papel para explorar alguns conceitos e propriedades da geometria plana. Utilizando uma folha de papel retangular, os estudantes deveriam começar fazendo as dobras na folha ao longo dos segmentos de reta indicados na figura ao lado.



As seguintes condições, segundo instruções da professora, devem ser satisfeitas:

- a reta determinada por M e U é a mediatriz do segmento AB;
- AC, BD e AB são segmentos congruentes;
- PT, BD e AB são segmentos congruentes;
- PD e BD são segmentos congruentes.

A partir da análise da figura, um estudante afirmou o seguinte:

O triângulo PQD é obtusângulo

porque

o triângulo PQT é equilátero.

Com relação ao que foi afirmado pelo estudante, assinale a opção correta.

A As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primera.

B As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

C A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa.

D A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira.

E Ambas as asserções são proposições falsas.

Figura 14: Fonte (ENADE/2008, p. 8)

Vamos agora analisar o enunciado da figura 14, presente na avaliação do ENADE/2008, na perspectiva da teoria dos campos conceituais. Observamos logo nas terceira e quarta linhas as expressões 'conceitos' e 'propriedades' da Geometria Plana. Sob a perspectiva de Gerard Vergnaud, as 'propriedades' condicionam um *modus operandi* peculiar no momento de resolução dos problemas, que diferem dos métodos de resolução dos campos da Aritmética e da Álgebra.

Notamos, também, que o conjunto das situações-problema discutidas com os estudantes emprega a noção de manipulação e dobraduras de papel. Observamos que a professora poderia ter restringindo toda sua aula ao ambiente da sala de aula, na lousa ou quadro negro, todavia, inseriu um material que proporciona a manipulação, a percepção e extração de propriedades a partir do contato físico e visual com objetos concretos.

Identificamos os *conceitos-em-ato* de mediatriz, segmentos congruentes, triângulo obtusângulo que devem condicionar/orientar as escolhas e estratégias do estudante. Por outro lado, identificamos, nas possibilidades de respostas, informações que conduzem às respostas do tipo verdadeiro/falso, entretanto, no caso dos candidatos que prestam esse tipo de exame, espera-se que apresentem uma maior experiência e conhecimento conceitual aprofundado, Desse modo, reforçamos o caráter algorítmico do saber matemático que se baseia na crença que todo problema de Matemática deve apresentar uma única resposta.

Por outro lado, considerando as estratégias anteriores, o professor poderá antecipar e prevê regras de ação, escolha e, possivelmente, os erros dos estudantes. Nessa esfera , Vergnaud (1996, p. 207) acrescenta:

> Se reconhecermos que um esquema é composto de regras de ação e antecipação uma vez que gera uma sequência de ações tendo em vista um objetivo a alcançar, não reconhecemos sempre que de modo semelhante o mesmo é composto de invariantes operatórios (conceitos-em-ato e conhecimentos-em-ato) e de inferências. As inferências são indispensáveis à colocação em prática do esquema em cada situação particular.

Uma contribuição importante de Vergnaud é a percepção de que toda aprendizagem gira em torno de conceitos matemáticos. Nesse sentido, *a Teoria dos Campos Conceituais privilegiam modelos que fornecem um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos* (1996, p. 213). Além disso, as situações fornecem o sentido aos conceitos matemáticos. Em cada situação específica, seja descrita em língua materna, escrita algébrica, numérica ou gráfica, o sujeito consegue manifestar alguma decisão na condição em que a situação-problema forneça algum sentido para o mesmo. Vergnaud (1996, p. 228) esclarece que:

> O sentido é uma relação do sujeito com o conjunto de situações e significantes. Mais precisamente, são os esquemas evocados pelo sujeito por meio de uma situação ou por um significante que constituem o sentido de uma situação ou dos significados destes significantes para o indivíduo.

Mas vejamos os exemplos descritos na tabela abaixo.

Problema sem sentido/significado para um estudante de 7ª série	Problema sem sentido/significado para um estudante do 1º ano do 2º grau	Problema sem sentido/significado para um estudante de graduação em Matemática
Dividir o polinômio $P(x)$ por $Q(x)$ e encontrar o quociente e o respectivo resto da divisão.	Encontrar o valor de $(2+i)^{2010}$, onde $z=1+i\in\mathbb{C}$.	Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^∞, com $f(x,0)=f(0,y)=0$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$. Mostre que existe $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de mesma classe tal que $f(x,y)=g(x,y)\cdot xy$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (LIMA, 1981, p. 184).

Tabela 2: Situações problemas

Nas situações-problema acima, uma vez apresentadas para um solucionador de problemas imbuído em termos psicológicos da tarefa de resolver cada uma, se o mesmo não consegue manifestar nenhuma estratégia, escrever ou rabiscar nenhuma linha, apresentar simbologia ou equação que proporcione antever alguma escolha, isso significa que o problema não apresentou ou forneceu um *significado/sentido* para o sujeito.

Vergnaud adverte, ainda, que *uma situação dada ou um simbolismo particular não evoca no sujeito todos os esquemas disponíveis* (p. 228), e a razão disso possui uma base e explicação neurológica. De fato, nas próximas disciplinas, detalharemos algo mais a respeito das noções de *memória de curto prazo* e *memória de longo prazo*. No caso do professor, pelo fato de cotidianamente falar, pensar e discutir situações específicas sobre determinado assunto ou problema, o mesmo possui um grande repertório de informações sobre isso. Assim, diante de um problema, o mesmo dispõe de uma grande e diversificada variação de esquemas cognitivos que lhe permitem, na prática, agir e tomar decisões com vistas a determinada solução.

Por outro lado, no caso do estudante, temos um conjunto limitado, incipiente, não necessariamente sistematizado e pronto para fornecer e proporcionar ações diante de uma situação-problema específica. Desse modo, nem sempre, em virtude de possuir na maioria dos casos uma *memória a curto prazo*, seus esquemas cognitivos disponíveis são imediatamente acionados, podendo até mesmo não possuí-los.

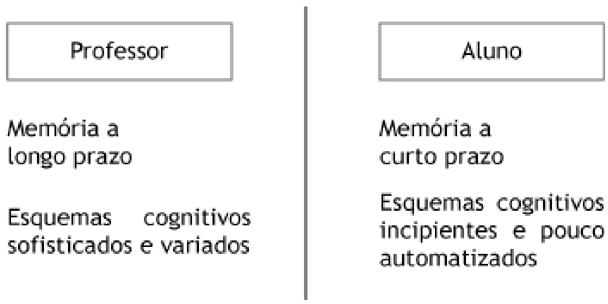


Figura 15: Relações entre memórias a curto e a longo prazo

Para concluir esta aula, sublinhamos mais uma vez as explicações de Vergnaud no que diz respeito aos Campos Conceituais ao colocar que:

A teoria dos campos conceituais repousa sobre um princípio de elaboração pragmática de conhecimento. Não se pode teorizar sobre a aprendizagem de matemática nem somente a partir de símbolos, nem somente a partir de situações somente. É necessário considerar o sentido e os símbolos. A chave é considerar a ação do sujeito em situação, a organização de sua conduta. De onde vem a importância atribuída ao conceito (p. 240).

Assim, seguindo as orientações de Gerard Vergnaud, que possui sua teorização empregada em vários trabalhos empíricos relacionados de modo direto com o ensino/aprendizagem em Matemática, torna-se essencial para o professor dessa disciplina observar, analisar e prever todos os comportamentos dos estudantes, seu discurso, a simbologia empregada, os erros recorrentes que constituem todas as ações do sujeito diante de um problema, como observamos na figura abaixo.

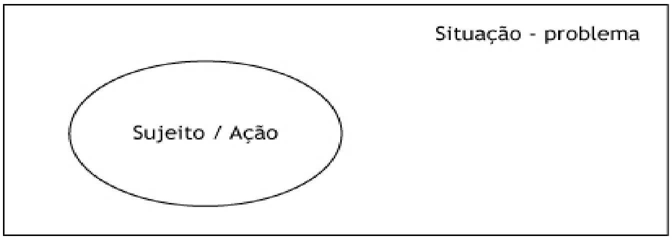


Figura 16: O aprendizado do sujeito ganha significado com a ação

Entretanto, o funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende *do estado atual de seus conhecimentos, implícitos ou explícitos. É necessário manter grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, seus constituintes, suas rupturas, suas passagens obrigatórias* (VERGNAUD, 1996, p. 240). Assim, cabe ao professor permanecer vigilante com respeito à evolução do aprendizado dos estudantes, imbuí-los em situações de investigação em sala de aula de modo a que evitemos a concepção da Matemática como 'a ciência dos números', ou 'a Matemática é exata', ou ainda, 'a Matemática é abstrata'.

São concepções superficiais, inconsistentes, limitadas e altamente contestadas ao longo dos séculos. Machado (1993, p. 32) nos fornece uma interessante explicação quando salienta que:

> De fato, aos olhos de um leigo, nenhum conhecimento pode ser considerado tão assentado em suas bases quanto o matemático. Algumas expressões consagradas pelo uso são sintomaticamente reveladoras de tal tendência, como por exemplo, a máxima da aritmética: 'tão certo como dois mais dois são quatro', ou sua corruptela lógica, de natureza poética, mas de idêntico sentido: 'tudo certo como dois e dois são cinco'. Ou ainda a homóloga algébrica, de sentido menos evidente, embora não menos utilizada: 'vou provar por a+b'.

No excerto acima, Machado coloca em evidência o lado pitoresco, anedótico da Matemática, um lado não reconhecido pela academia. Entretanto, na academia, deparamos com problemas, um deles é indicado por Alves (2010b, p. 6) ao comentar que:

> A resposta para esta pergunta é óbvia, uma vez que, o ensino investigativo de

Matemática requer tempo, paciência e dedicação. E estes elementos e hábitos nem sempre são construídos no ambiente de formação de professores.

Levando-se em consideração os dois ambientes, observamos de que modo as concepções e crenças do futuro professor são alteradas e condicionadas ao enfrentar as dificuldades do ambiente acadêmico. Mas vejamos mais uma colocação formulada por Machado (1993, p. 36):

> Naturalmente, não é essa a concepção de Matemática em que se funda o senso comum. Neste terreno, a Matemática parece possuir um conteúdo próprio, e é mais frequente a expectativa da subsunção da Lógica pela Matemática do que a inversa, como pretenderam os logicistas. Entretanto, resquícios de tal pretensão podem ser detectados mesmo no senso comum, quando são associados acriticamente o ensino da Matemática com o desenvolvimento do raciocínio lógico [...].

Com relação à outra característica frequentemente atribuída à Matemática, Machado acrescenta:

> De um modo geral, aos olhos do homem comum, poucas classificações dicotômicas parecem tão naturais quanto a que distingue o abstrato do concreto, da qual nem os substantivos lograram escapar. De fato, parece muito simples caracterizar o concreto, o real, o palpável, em contrapartida ao abstrato, ao imaginário, ao concebido. Nesta trilha, os objetos matemáticos, desde os mais simples até as estruturas mais complexas, admitidas ou não as raízes empíricas, são peremptoriamente classificados como abstrações (MACHADO, 1993, p. 45).

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. & BORGES NETO, H. A intuição na Sequência Fedathi: uma aplicação no ensino médio. *In*: **Conexões, Ciência e Tecnologia**, Nº 2, 2010.

______. **Aplicação da Sequência Fedathi na promoção das noções de formação, tratamento e coordenação através do ensino intuitivo do Cálculo a várias variáveis** (tese). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2010(a).

______. Uma aplicação da Sequência Fedathi no ensino de Progressões Geométricas e a formação do professor no IFCE. *In*: **Conexões, Ciência e Tecnologia**. V. 4, p. 1-16, 2010 (b).

ARSAC, G. L´origine de démonstration: Essai d´épistémologie didactiques. *In*: **Recherche em Didactiques de Mathematiques**, Paris: La Pensée Sauvage, Nº 8, 1987, p. 268-311.

ÁVILA. G. **Várias faces da Matemática**: tópicos para a licenciatura e leitura em geral. São Paulo: Editora Blucher, 2007.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en Mathématiques chez des élèves de College** (thése), Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

______. Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A didactical perspective. *In*: Hanna, G. et al. **Explanation and Proof in Mathematics**: philosophical and Educational Perspectives. New York: Springer, 2009, p. 115-136.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares da segunda série do ensino médio**: um olhar sobre os livros didáticos (dissertação de mestrado profissionalizante). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2008.

BONDANIMAN, A. **Álgebra no ensino fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas (dissertação de mestrado). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2007.

BORASI, R. **Reconceiving Mathematical Instruction**: a focus on errors. New Jersey: Ablex Publishing Company, 1996.

BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. Didactical handling of student´s reasoning process in problem solving situations. *In:* **Educational Studies in Mathematics**, vol. 59, 2005, p. 13-58.

______. Fondements et méthodes de la Didactiques de Mathematiques. *In*: BRUN, J. **Didactiques de Mathematiques**, Paris: Délachaux Niéstle, 1996, p. 44-111.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: didactiques des mathématiques, 1970-1990. New York: Klumer Academic Publishers, 2002.

CARUSO. Paulo. D. **Professor de Matemática**: transmissão de conhecimento ou construção de significados? (tese). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

CROWLEY, L., THOMAS, M. & TALL, D. Algebra, Symbols, and Translation of Meaning. *In*: **Proceedings of PME18**, Lisboa, II, 1994, p. 240-247.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos.** (tese de doutorado), Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

D´AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DEVLIN, K. **The Language of Mathematics**: making the invisible visible. New York: Freeeman and Company, 1998.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da Licenciatura em Matemática**: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. (tese) São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2009.

DOMINGOS, A. M. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados**: a matemática no início do superior. Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia de Lisboa, 2003.

DOMINGUES, H. H. **A demonstração em Geometria**. São Paulo: Atual, 1995.

FISCHBEIN, E. & MARIOTTI, M. A. **Defining in Classroom Activities**. *In:* Educational Studies in Mathematics. V. 34, p. 219-248, 1997.

FREITAS, J. L. M. Situações Didáticas. *In*: FRANCHI, A. et al. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p. 65-89.

GONDINO, J. D. **Didáctica de las Matemáticas para maestros**. Granada, Espanha: Editora Universitária, 2004.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando Geometria com a demonstração**: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino Fundamental. (dissertação). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1998.

HANNA, G. & BARBEAU, E. Proofs as Beares of Mathematical Knowledge. *In*: Hanna, G. et al. **Explanation and Proof in Mathematics**: philosophical and Educational Perspectives. New York: Springer, 2009, p. 85-100.

IGLIORI, S. B. C. A noção de obstáculo epistemológico e a Educação Matemática. *In*: FRANCHI, A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p. 89-115.

JOHSUA, S; DUPIN, J. J. **Introduction à la didactiques des sciences et des Mathématiques**. Paris: Presses Universitaires, 1989.

KLINE, F. **O fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LARA, I. C. **Exames nacionais e as "verdades" sobre a produção do professor de Matemática** (tese). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

Le livre Du probleme: fascicule 1. Strasbourg: Institut de Recherche et l´enseignement de Mathématiques, 1973.

LIBÂNEO, J. C. **Democratização da Escola Pública**: a pedagogia crítico social dos conteúdos. 13ª edição. São Paulo: Editora Loyola, 1995.

LIMA, E. L. **Exame de textos**: análise de livros de Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: IMPA, 2001(a).

______. **Matemática e Ensino**. Volume 1, Rio de Janeiro: IMPA, 2001(b).

______. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

LUME. http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/1/filter-search?title=&submit=go&ANY=&tdautor=&page=1&keyword=EDUCA%C3%87%C3%83O+MATEMATICA&tdorientador=&date=

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação**: alegorias, tecnologias e temas afins. 4ª ed. São Paulo: Cortez, 2002.

______. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: CORTEZ, 1993.

MARGOLINAS, C. **De l´importance du Vrai et du Faux**: dans la classe de Mathématiques. Paris: La Pensée Sauvege, 1993.

MILAUSKAS, G. A. Problemas de Geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos. *In*: LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. 1994, p. 86-106.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

ORTON, A. **Learning Mathematics**: issues, theory and classroom practice. 3rd edition, London: Continuum Publishers, 2004.

POLYA, G. **A new aspect of Mathematical Method**. New Jersey: Princeton University Press, 1973.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *In*: **Revista da Educação**, 11(2), 2002, p. 145-163. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-JP-HO(Rev.Educacao).doc>

ROBERT, A.; LATTUATI, M. & PENNICKX, J. **L´enseignement des Mathématiques au Lycée**. Paris: Ellipses, 1999.

ROMA, J. E. (2010). **As representações sociais dos alunos da Licenciatura em Matemática sobre a profissão Docente** (tese). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SADOVSKY, P. & SESSA, C. The adidactic interaction with the procedures os peers in thev transition from Arithmetic to Algebra: a milieu for the emergence of new question. *In*: LABORDE, C., PERRIN-GLORIAN, M. J. & SIERPINSKA, A. **Beyond the Apparent banality of the Mathematics Classroom**. New York: Springer, 2005, p. 87-112.

SCHUBRING, G. (2003). O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha. *In*: VALENTE Vagner. R. Euclides Roxo. A modernização do ensino da Matemática. pp. 11-46.

SERRALHEIRO, T. D. **Formação de professores:** conhecimentos, discursos, e mudança na prática das demonstrações. (dissertação). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2007.

SILVA, B. A. Contrato Didático. *In*: FRANCHI, A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p. 43-65.

SOUSA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica.** (tese), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2008.

STERNBERG, R. J. & BEEN-ZEEV, T. **The nature of Mathematical Thinking.** New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

TALL, D. Success and failure in arithmetic and algebra. *In*: **Mathematics Teaching** 1991, Edinburgh University, September, 1991, p. 1-15.

TIROSH, D. & EVEN, R. To define or not define: the case of. *In*: **Educational Studies in Mathematics**, vol. 33, 1997, p. 321-330.

WAGNER, E. Professor Morgado. *In*: **Revista do Professor de Matemática**. nº 62, 2007, p. 58-59.

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii**. (tese). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2005.

CURRÍCULO

Francisco Régis Vieira Alves

Atua há dez anos no ensino superior de Matemática e possui experiência de ensino no ambiente escolar durante alguns anos. Foi professor da Universidade Regional do Cariri – URCA, onde promoveu a modificação e reorganização de um currículo para o professor de matemática em consonância com paradigmas atuais e internacionais. Foi coordenador de cursos de especialização nesta instituição voltados ao ensino da matemática. Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, no qual, possui atividades direcionadas ao curso de licenciatura. No que diz respeito á sua formação acadêmica, é licenciado e bacharel em Matemática – UFC; é mestre em Matemática Pura - UFC e mestre em Educação pela mesma universidade, com ênfase no ensino de matemática. Encontra-se em fase de conclusão do doutorado em Educação com ênfase no ensino de Matemática em nível superior.