MATEMÁTICA BÁSICA II

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

Matemática Básica II

Jânio Kléo de Sousa Castro

Fortaleza, CE
2008

CRÉDITOS

Presidente
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário da SEED
Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância
Celso Costa

Reitor do IFCE
Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino
Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE
Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB
Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria
José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Zelalber Gondim Guimarães

Elaboração do conteúdo
Jânio Kléo de Sousa Castro

Colaboradora
Lívia Maria de Lima Santiago

Equipe Pedagógica e Design Instrucional
Ana Claúdia Uchôa Araújo
Andréa Maria Rocha Rodrigues
Cristiane Borges Braga
Eliana Moreira de Oliveira
Gina Maria Porto de Aguiar Vieira
Iraci Moraes Schmidlin
Jane Fontes Guedes
Jivago Silva Araújo
Karine Nascimento Portela
Lívia Maria de Lima Santiago
Luciana Andrade Rodrigues
Maria Irene Silva de Moura
Maria Vanda Silvino da Silva
Marília Maia Moreira
Regina Santos Young

Equipe Arte, Criação e Produção Visual
Ábner Di Cavalcanti Medeiros
Benghson da Silveira Dantas
Davi Jucimon Monteiro
Diemano Bruno Lima Nóbrega
Germano José Barros Pinheiro
Gilvandenys Leite Sales Júnior
Hommel Almeida de Barros Lima
José Albério Beserra
José Stelio Sampaio Bastos Neto
Larissa Miranda Cunha
Marco Augusto M. Oliveira Júnior
Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento
Roland Gabriel Nogueira Molina

Equipe Web
Aline Mariana Bispo de Lima
Benghson da Silveira Dantas
Fabrice Marc Joye
Igor Flávio Simões de Sousa
Luiz Bezerra de Andrade FIlho
Lucas do Amaral Saboya
Marcos do Nascimento Portela
Ricardo Werlang
Samantha Onofre Lóssio
Tibério Bezerra Soares
Thuan Saraiva Nabuco

Revisão Textual
Aurea Suely Zavam
Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web
Débora Liberato Arruda Hissa
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar
Virgínia Ferreira Moreira

Secretários
Breno Giovanni Silva Araújo
Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar
Bernardo Matias de Carvalho
Carla Anaíle Moreira de Oliveira
Maria Tatiana Gomes da Silva
Wagner Souto Fernandes
Zuila Sâmea Vieira de Araújo

Catalogação na Fonte: Etelvina Marques (CRB 3 – Nº 615)

C355m Castro, Jânio Kléo de Sousa

Matemática básica II / Jânio Kléo de Sousa Castro; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2008.

126p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-63953-16-2

1. ANÁLISE COMBINATÓRIA 2. NÚMEROS COMPLEXOS 3. POLINÔMIOS. 4. MATEMÁTICA I. Joye, Cassandra Ribeiro. (Coord.) II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE III. Universidade Aberta do Brasil IV. Título

CDD – 510

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a),

Estamos iniciando a disciplina de Matemática Básica II. A finalidade desta disciplina é rever alguns conceitos estudados no Ensino Médio, dando-lhes maior fundamentação. Ela vem como um complemento à disciplina de Matemática Básica I. Estudaremos, assim, análise combinatória, Probabilidade, binômio de Newton, Números Complexos e Polinômios. A disciplina divide-se em oito aulas, as quais, por sua vez, são divididas em tópicos. Em cada tópico, apresentamos definições e propriedades dos objetos estudados, e ainda exercícios resolvidos.

Vamos ao trabalho, então!

AULA 1 | Análise combinatória

Olá!

Nesta aula, você revisitará assuntos abordados no Ensino Médio, como o Princípio Multiplicativo e cálculos que envolvem fatorial. Vamos verificar de quantas maneiras diferentes pode ser realizado um procedimento constituído de várias etapas. Calcularemos, por exemplo, quantas palavras diferentes podem ser formadas com as letras do seu nome ou de quantas maneiras diferentes você e seus amigos podem sentar-se ao redor de uma mesa.

É muito importante que você atente para esta introdução de conceitos, uma vez que, a partir deles, você terá condições de resolver problemas mais elaborados de análise combinatória. Vamos começar!

Objetivos

- Conhecer variantes de problemas de contagem
- Analisar meios diretos e indiretos de realização de contagem
- Desenvolver técnicas que facilitem o processo e/ou simplifiquem a maneira de escrever as respostas

TÓPICO 1

Árvores de possibilidades

Objetivos

- Iniciar o estudo dos métodos de contagem
- Construir e analisar a árvore de possibilidades de um experimento
- Listar, de forma organizada, as diferentes maneiras de realização de um experimento

Neste tópico começaremos a estudar análise combinatória, que é a parte da Matemática que estuda métodos para contagem dos elementos de um conjunto, quando esses são agrupados de maneiras pré-estabelecidas.

SAIBA MAIS

No site https://www.infoescola.com/matematica/analise-combinatoria/, você poderá obter mais informações sobre análise combinatória.

Exemplo 1

Se A é o conjunto formado por todos os números de três algarismos distintos formados pelos dígitos 2, 5 e 7, temos que $A = \{257, 275, 527, 572, 725, 752\}$ e, assim, a quantidade de elementos de A é 6, o que será representado por $n(A) = 6$.

Exemplo 2

Se B é o conjunto de resultados possíveis nos lançamentos de duas moedas, temos $B = \{$(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)$\}$, o que nos leva a concluir que $n(B) = 4$.

À primeira vista, pode parecer estranho que um ramo da Matemática se dedique apenas a contar, que é uma atividade tão elementar, mas aqui faremos uso de técnicas que facilitam o processo, organizando-o de forma a agilizar essa contagem. O exemplo seguinte mostra que nem sempre a contagem direta dos elementos do conjunto é o melhor caminho.

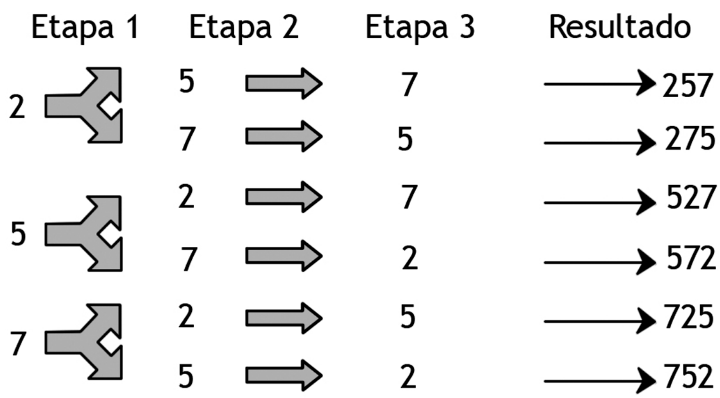
Exemplo 3

Considere C como o conjunto de todas as sequências de três letras que podem ser formadas usando apenas as vogais do nosso alfabeto. Não é complicado fazer uma lista de todos os elementos de C, o que, em ordem alfabética, começaria com AAA, seguido por AAE, AAI... e terminaria por UUO, UUU. Contar esses elementos, depois de listados, seria, então, uma saída para determinar a quantidade de elementos de C. Entretanto isso gastaria muito tempo. Guarde esse exemplo para ver que o número procurado poderá ser encontrado de maneira bem simples, antes que cheguemos ao fim desta aula.

Comecemos, então, com uma maneira simples de organizar os *procedimentos* estudados que são chamados de *Árvore de Possibilidades*. Esse método consiste, basicamente, em dividir cada procedimento em etapas e analisar as possibilidades de cada etapa em relação à etapa anterior, de forma a não "esquecer" nenhum, nem repetir elementos, como mostram o nosso Exemplo 1. Vamos voltar a ele.

Um número de três algarismos pode ser escolhido encontrando um algarismo para cada posição e essa seria cada etapa. Assim, para a primeira etapa, temos 2, 5 e 7 como possibilidades. Para cada uma dessas escolhas, temos escolhas diferentes para a segunda.

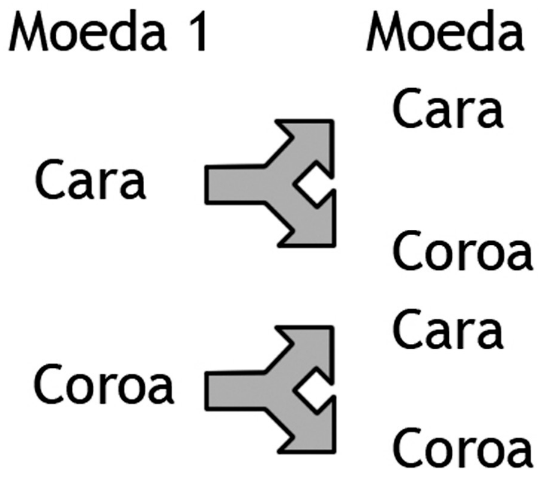
Figura 1 − Árvore de possibilidades do Exemplo 1



Cada elemento do conjunto *A* é, assim, determinado por um dos ramos da "árvore" da Figura 1. Dessa forma, contar os elementos de *A* equivalente a contar os ramos finais da árvore, pois cada um deles fornece um resultado.

Observe o que acontece com o exemplo 2, das duas moedas, quando esquematizado pela árvore de possibilidades:

Figura 2 – Árvore de possibilidades do Exemplo 2

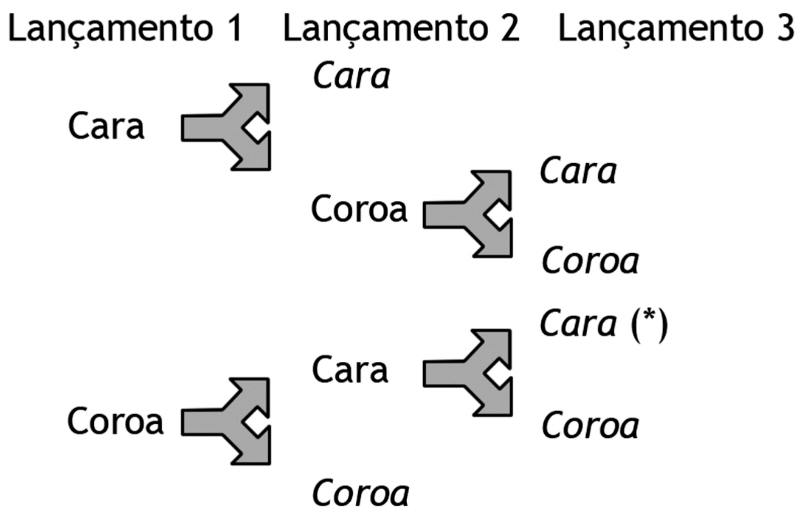


Assim, contamos os ramos da árvore da figura 2 e obtemos $n(B) = 4$.

Exemplo 4

Uma moeda é lançada tantas vezes quantas forem necessárias até que se obtenham duas caras ou duas coroas, não necessariamente consecutivas. A quantidade de maneiras segundo as quais isso pode acontecer pode ser fornecida pela árvore de possibilidades do problema, em que cada etapa significa um lançamento da moeda. Note que a quantidade de lançamentos em cada ramo é variável.

Figura 3 – Árvore de possibilidades do Exemplo 4



Os ramos em destaque na Figura 3 já alcançaram o objetivo, sendo, cada um deles, um resultado possível; há, portanto, 6 maneiras de realizar o procedimento. O ramo sinalizado com (*) significa coroa no primeiro lançamento e cara nos dois seguintes.

A árvore de possibilidades é, então, uma maneira de organizar o processo para uma contagem mais direta, e ainda fornece todos os resultados possíveis. É importante ressaltar que a árvore pode ser desenhada mesmo que a quantidade de etapas não seja a mesma em qualquer situação. E esse vai ser o caso em que ela será de mais utilidade. Como veremos adiante, os exemplos 1 e 2 podem ser resolvidos de maneira ainda mais rápida.

Chegamos ao final do primeiro tópico e sabemos construir a árvore de possibilidades de um experimento realizado em várias etapas, o que possibilita a contagem de todos os elementos de um conjunto, de forma precisa, sem que esqueçamos nenhum deles ou que contemos algum deles repetidamente.

TÓPICO 2

Princípio fundamental da contagem

Objetivos

- Fundamentar as bases para uma regra mais geral de contagem
- Compreender o funcionamento do Princípio Multiplicativo
- Aplicar os conceitos e resolver problemas de contagem de maneira rápida

SAIBA MAIS

Acesse o site: http://www.infoescola.com/matematica/principio-fundamental-da-contagem/ e veja alguns exemplos que utilizam o PFC.

Como você estudou no tópico 1, a Árvore de Possibilidades ajuda bastante no processo de contagem, mas, quando a quantidade de etapas for fixa e soubermos de quantas maneiras diferentes cada etapa pode ser realizada, poderemos usar uma técnica, conhecida como *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), ou *Princípio multiplicativo*.

Em linhas gerais, se tivermos um procedimento realizado em n etapas consecutivas e independentes e soubermos de quantas maneiras cada uma delas pode ser realizada, a quantidade de maneiras de realizar o procedimento como um todo se dará pelo produto dessas quantidades.

Inicialmente, vejamos como o PFC age para um procedimento realizado em duas etapas consecutivas e independentes.

Exemplo 1

Em uma turma de 12 moças e 9 rapazes, quantos casais diferentes podem ser formados?

Solução: Observe que a escolha de um casal (procedimento) é realizada em duas etapas: a escolha do homem, que pode ser feita de 9 maneiras diferentes, e a escolha da mulher, que pode ser feita de 12 maneiras diferentes. Assim, o total de casais diferentes que podem ser formados é $9.12 = 108$.

Exemplo 2

Voltemos ao caso das sequências de três vogais (Exemplo 3, tópico 1), no qual queremos saber quantas são as sequências de três letras que podem ser formadas usando apenas as vogais no nosso alfabeto. Vemos que o procedimento completo se realiza em três etapas, cada uma das quais consiste na escolha de uma vogal, que pode ser realizada de 5 maneiras diferentes. Dessa forma, o total de possibilidades é $5.5.5 = 125$, o que é um número já bem grande para se fazer a lista completa.

Exemplo 3a

Dispondo apenas dos algarismos 3, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de três algarismos podemos formar?

Solução: Nesse caso, temos as três etapas de escolha dos algarismos (centenas, dezenas e unidades). Cada uma das etapas pode ser realizada de 6 maneiras diferentes. Assim, o total de possibilidades será: $6.6.6 = 216$.

Exemplo 3b

Dispondo apenas dos algarismos 3, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de três algarismos **distintos** podemos formar?

Solução: Continuamos com a escolha em três etapas, mas quando escolhemos um algarismo para a posição das centenas, ele não poderá ser utilizado na posição das dezenas, pois queremos algarismos distintos (o número 553 não vale, por exemplo). Assim, continuamos tendo 6 possibilidades para a primeira etapa, mas apenas 5 para a segunda etapa e, pelo mesmo motivo, apenas 4 para a terceira etapa. Dessa forma, o total de números formados é $6.5.4 = 120$.

Exemplo 4

De quantas maneiras diferentes podemos posicionar quatro pessoas em uma fila?

Solução: Temos aqui o procedimento realizado em quatro etapas: a escolha da primeira pessoa da fila, a escolha da segunda, e assim por diante. Um dado relevante é que a pessoa que for escolhida para a primeira posição não poderá ocupar nenhuma outra. Assim, há 4 maneiras de escolher a primeira pessoa, 3 para escolher a segunda, 2 para escolher a terceira e 1 para escolher a quarta. O total de possibilidades é, portanto, $4.3.2.1 = 24$

Exemplo 5

No lançamento de cinco moedas, há dois resultados possíveis para cada moeda, fazendo com que o número total de possibilidades de resultado para as cinco moedas seja de $2.2.2.2.2 = 2^5 = 32$.

Exemplo 6

Quantos divisores inteiros positivos tem o número 72?

Solução: Fazendo a fatoração em números primos, temos $72 = 2^3.3^2$. Assim, um divisor de 72 consiste em um número da forma 2^m3^n, em que m pode assumir os valores 0, 1, 2 ou 3 e n pode assumir os valores 0, 1 ou 2. Dessa forma, a escolha de um divisor de 72 consiste na escolha de um expoente para o 2 (quatro possibilidades) e um expoente para o 3 (três possibilidades). Temos, então, que o total de divisores positivos de 72 é $4.3 = 12$.

Ao final de mais um tópico, vemos o quanto a análise cuidadosa dos dados, aliada a um pouco de criatividade, faz com que desenvolvamos métodos mais rápidos para resolução de certos problemas. O princípio estudado aqui é essencial para uma boa compreensão dos tópicos que seguem.

TÓPICO 3

Fatorial de um número natural

Objetivos

- Desenvolver e calcular expressões numéricas que envolvem fatorial
- Relacionar o fatorial com problemas de contagem e o PFC

De acordo com o que você aprendeu no tópico 2, nos problemas que envolvem o PFC e os elementos que não podem ser repetidos, a quantidade de escolhas possíveis para uma etapa será sempre uma a menos que a da etapa anterior. Um cálculo comum que aparece é $n.(n-1).(n-2)\ldots$ com a quantidade de fatores dependendo da quantidade de etapas do processo. Para facilitar ainda mais essas contas, introduzimos um conceito simples. Para cada número natural n, o fatorial de n (ou "n fatorial") é denotado por $n!$ e é calculado multiplicando-se n por todos os números naturais menores que ele, inclusive 1.

DEFINIÇÃO 1

Para o número inteiro positivo n, temos $n! = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .\ 3.\ 2.1$.

Para alguns problemas, é conveniente também definir o fatorial do número 0.

Por convenção, então, definamos $0! = 1$.

Exemplo 1

Calcule o valor de 4!, 5!, 7! e 10!

Solução: Pela definição 1, temos:

$4! = 4.3.2.1 = 24$

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$

$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800$

À medida que o número n aumenta, o cálculo direto de n! torna-se muito trabalhoso, por isso, em muitos casos, usaremos a simplificação n! = n.(n − 1)! para encontrar, com menos trabalho, o valor de certas expressões que envolvem o fatorial de números.

Exemplo 2

Calcule o valor de

(a) $\dfrac{11!}{10!}$.

Solução: Usando o fato de que 11! = 11.10!, temos: $\dfrac{11!}{10!} = \dfrac{11.10!}{10!} = 11$.

(b) $\dfrac{9!}{7!}$.

Solução: Aqui, podemos fazer 9! = 9.8.7! e teremos: $\dfrac{9!}{7!} = \dfrac{9.8.7!}{7!} = 72$.

(c) $\dfrac{13!}{10!3!}$.

Solução: Temos: $\dfrac{13!}{10!.3!} = \dfrac{13.12.11.10!}{10!.3!} = \dfrac{13.12.11}{3.2.1} = 286$.

(d) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$, para qualquer n natural positivo.

Solução: Fazendo $(n + 1)! = (n + 1).n.(n - 1)!$, temos:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,n(\,n-1)!}{(n-1)!} = n^2 + n.$$

Com essa notação, podemos, então, simplificar as respostas de certos processos resolvidos pelo PFC. Veja a seguir.

Exemplo 3

De quantas maneiras diferentes podemos colocar dez livros lado a lado em uma estante?

Solução: Há dez maneiras de colocar o primeiro livro, nove de colocar o segundo, oito para o terceiro, e assim sucessivamente. Dessa forma, o total de possibilidades é 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 10!.

Exemplo 4

De um grupo de doze pessoas, de quantas maneiras podemos escolher uma comissão formada por um presidente, um secretário e um tesoureiro?

Solução: Sabendo que a mesma pessoa não pode ocupar duas funções ao mesmo tempo, há doze maneiras de escolher o presidente, onze de escolher o secretário e dez para escolher o tesoureiro. Assim, o total de possibilidades é 12.11.10. Uma maneira alternativa de escrever esse número é $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \frac{9!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = \frac{12!}{9!}$.

Com o que foi exposto neste nosso tópico 3, você já é capaz de calcular o valor de expressões que envolvam o fatorial de números naturais e escrever de forma sucinta e usando do símbolo apropriado o resultado de certos problemas de contagem. Como sugestão de atividade de recapitulação, identifique quais dos exemplos apresentados no tópico 2 podem ter a solução expressa com o auxílio do símbolo de fatorial.

TÓPICO 4

Permutações

Objetivos

- Associar diretamente problemas de contagem com números fatoriais
- Identificar tipos específicos de agrupamentos

Nos tópicos iniciais desta aula, você aprendeu a identificar processos de contagem e a resolver alguns problemas de maneira organizada e rápida, além de apresentar a resposta de forma simplificada, por meio do fatorial. Neste tópico, iremos estudar as maneiras segundo as quais todos os elementos de um conjunto podem ser ordenados. Comecemos, então, com uma definição simples, mas que pode gerar vários problemas interessantes.

DEFINIÇÃO 2

Dado o conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, uma permutação dos elementos de A é qualquer sequência de n termos formada por todos os elementos de A

Podemos interpretar uma permutação como um ordenamento qualquer dos elementos do conjunto. É importante destacar que a definição 2 exige que todos os elementos do conjunto apareçam na sequência. Uma vez que se deve ter uma quantidade de termos igual à quantidade de elementos do conjunto, nenhum elemento pode ser repetido.

Exemplo 1

Listar todas as permutações dos elementos do conjunto $B = \{1, 2, 3\}$.

Solução: Temos que escrever as triplas ordenadas de números distintos que podem ser formadas com todos os elementos de B. A lista contém (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) e (3, 2, 1).

Fazendo a associação com o que discutimos nos tópicos anteriores, podemos listar as permutações possíveis em um conjunto através da árvore de possibilidades e determinar quantas são através do Princípio Fundamental da Contagem.

Considere, então, um conjunto com n elementos. A quantidade de maneiras segundo as quais podemos escolher o primeiro elemento da permutação é n. Como não podemos repetir elementos, o segundo elemento pode ser escolhido apenas entre os n – 1 restantes, o elemento seguinte, entre os n – 2 restantes e assim por diante até que o último elemento só possa ser escolhido de uma única forma. Então, a quantidade de permutações de um conjunto de n elementos será n.(n – 1).(n – 2). ... .2.1 = n!. A quantidade de permutações de um conjunto de n elementos será representada por Pn. Assim, temos:

$$P_n = n!$$

Dessa forma, poderíamos prever a quantidade de permutações possíveis do conjunto {1, 2, 3}, fazendo P3 = 3! = 6.

Um caso interessante de aplicação da fórmula para o número de permutações é o anagrama. Um anagrama é uma nova palavra formada com todas as letras da palavra original quando elas são dispostas em qualquer ordem, mesmo que o resultado não tenha significado. Por exemplo, MIRA, MIAR e IAMR são alguns dos anagramas da palavra RIMA.

Exemplo 2

Quantos anagramas tem a palavra SOLIDEZ?

Solução: Os anagramas de SOLIDEZ podem ser vistos como as permutações dos elementos do conjunto {S, O, L, I, D, E, Z}. A resposta é, portanto, $P_7 = 7! = 5040$.

Há casos, porém, em que alguns dos elementos do conjunto que queremos permutar são indistinguíveis, como no caso de anagramas de palavras com letras repetidas. Por exemplo, se na palavra GEOMETRIA trocarmos as posições das duas letras E, não obteremos um novo anagrama. Assim, o total de anagramas é o número de permutações das letras, dividido pelo número de possibilidades que as letras repetidas têm de trocarem de posição.

Exemplo 3

Quantos anagramas tem a palavra ELEFANTE?

Solução: A palavra ELEFANTE tem 8 letras. Então a ideia inicial era de que houvesse 8! anagramas, mas há três letras E, que podem trocar de posição de 3! maneiras diferentes. Assim, o total procurado é $\frac{8!}{3!}$.

O exemplo 3 motiva a definição de uma fórmula para o número de permutações quando há elementos repetidos. Quando houver *n* elementos, dos quais *a* são indistinguíveis, o total de permutações será dado por: $P_n^a = \frac{n!}{a!}$

Exemplo 4

Calcule a quantidade de anagramas da palavra ARARA.

Solução: A palavra ARARA possui cinco letras, sendo três letras A e duas letras R. Assim, devemos compensar 5!, dividindo pelas maneiras segundo as quais as letras A podem trocar de posição sem gerar um novo anagrama, que são 3! e o mesmo ocorrendo para as letras R. Assim, o total de anagramas é $\frac{5!}{3!2!} = 10$.

Com o que vimos no tópico 3 da nossa aula, o cálculo de permutações pode ser feito de maneira bem direta com o auxílio do fatorial. Você já deve, a essa altura, ter calculado quantos anagramas tem o seu nome.

AULA 2 | Arranjos e combinações

Olá!

Começaremos agora a nossa segunda aula de matemática básica 2, que dará continuidade ao que estudamos na aula 1, apresentando casos específicos de agrupamento e técnicas de contagem que utilizam os conceitos que aprendemos na aula passada. Uma leitura rápida nas principais definições da aula passada ajudará a manter bem sedimentadas as noções de que vamos precisar para dar prosseguimento ao assunto. Continuemos, então.

Objetivos

- Apresentar variantes de agrupamento
- Diferenciar arranjos de combinações e decidir qual fórmula usar em cada caso
- Combinar as técnicas que facilitam o processo e/ou simplificam a maneira de escrever matematicamente as respostas com novas técnicas para a solução de problemas mais elaborados

TÓPICO 1

Arranjos

Objetivos

- Distinguir um tipo especial de agrupamento
- Analisar e aplicar os elementos da fórmula de arranjos
- Identificar os casos nos quais a fórmula de arranjos pode ser usada

Como você viu na aula 1, sempre que tivermos uma quantidade n de objetos distintos a serem ordenados, teremos $P_n = n!$ maneiras diferentes. Além disso, se algum desses objetos for repetido, devemos fazer "compensações", como foi exposto do no final da aula 1.

Neste tópico, continuaremos a analisar a quantidade de maneiras segundo as quais alguns objetos podem ser ordenados, mas com algumas restrições. Observe o exemplo:

Exemplo 1

Usando apenas algarismos ímpares, quantos números de três algarismos podem ser formados?

Solução: Aqui os algarismos disponíveis são 5, a saber, os do conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Assim, há igualmente 5 possibilidades para a escolha de cada um dos algarismos, de onde concluímos que o total é $5.5.5 = 5^3$.

De modo geral, se tivermos n objetos para ordenar em p posições e pudermos repetir os objetos, há n^p maneiras diferentes, pois em cada uma das posições termos n maneiras diferentes de escolha.

DEFINIÇÃO 3

Arranjo com repetição é dado pela seguinte expressão n^p , onde n é o total de objetos à disposição e p é a quantidade de posições a serem preenchidas (a ordem importa e os objetos podem ser repetidos).

Exemplo 2

Quantos são os resultados possíveis de serem obtidos com o lançamento de sete moedas?

Solução: Nesse caso, podemos interpretar que temos dois resultados possíveis em cada uma das sete moedas. Daí a quantidade total de resultados é $2^7 = 128$.

Exemplo 3

No lançamento de dois dados, o total de resultados possíveis é $6^2 = 36$.

Agora consideremos o caso em que não podemos repetir os objetos envolvidos. Devemos lembrar que, sem poder repetir, para cada etapa teremos uma possibilidade a menos que na etapa anterior e a notação de fatorial nos ajudará a escrever as soluções.

Exemplo 4

Usando apenas algarismos ímpares, quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?

Solução: Note que, nesse caso, há cinco possibilidades para a escolha do primeiro algarismo, quatro para o segundo e três para o terceiro. Assim, o total de possibilidades é 5.4.3. Esse número é o começo do fatorial de 5 (faltando apenas 2!). Completando, temos $5.4.3 = 5.4.3.\frac{2!}{2!} = \frac{5!}{2!}$. Assim, podemos usar a notação de fatorial para simplificar a resposta.

Mais geralmente, se tivermos n objetos, mas apenas p posições para ordená-los, sem repetição, temos n possibilidades para a primeira posição, $n - 1$ para a segunda, $n - 2$ para a terceira e assim por diante, de modo que na última posição, termos $n - (p - 1)$. Desse modo, usando o PFC, o total de possibilidades é $n.(n - 1).(n - 2). \ldots .(n - p + 1)$. Multiplicando esse resultado por $(n - p)!$, completaremos $n!$.

Assim, $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$, a que chamaremos de fórmula de arranjos simples, e usaremos quando os objetos não puderem ser repetidos e a ordem dos objetos importarem no resultado final. Portanto

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (*)$$

Só poderemos usar a fórmula (*) se $p \leq n$.

Exemplo 5

Quantos anagramas de quatro letras podem ser formados com as letras da palavra PERNAMBUCO?

Solução: Temos dez letras distintas para ordenar em quatro posições. Devemos, então, calcular o valor de $A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5.040$.

Exemplo 6

Uma turma de dez alunos tem aula em uma sala com quinze cadeiras. De quantos modos distintos as cadeiras podem ser ocupadas pelos alunos?

Solução: Aqui podemos pensar que há algo errado se usarmos diretamente a fórmula para $n = 10$ e $p = 15$, pois $10 - 15 = -5$ e não definimos fatorial de número negativo. Para resolver esse problema, basta que invertamos um pouco o que é objeto e o que é posição. O primeiro aluno pode escolher uma dentre as 15 cadeiras disponíveis, enquanto o segundo aluno só tem as 14 restantes, e assim por diante. Com essas considerações, vamos usar a fórmula de arranjos simples, mas com $n = 15$ e $p = 10$. Temos, então: $A_{15,10} = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{15!}{5!}$. Para efeitos de simplificação, a resposta pode (e deve) ficar dessa forma.

Depois do que vimos neste tópico, podemos destacar que um arranjo é uma maneira de ordenar elementos de um conjunto, ou seja, de formar sequências com alguns deles. A fórmula para arranjos com repetição será usada quando os elementos não forem necessariamente distintos, e a fórmula para arranjos simples será usada quando não houver possibilidade de repetição.

TÓPICO 2

Combinações

Objetivos

- Apresentar formas de contagem quando a ordem não importa no resultado final
- Comparar combinações com arranjos

No tópico anterior, você aprendeu como obter a quantidade de possibilidades segundo as quais alguns objetos podem ser **ordenados** em algumas posições. Ou seja, contamos quantas sequências podem ser feitas com os elementos de um determinado conjunto.

Há situações, porém, nas quais a ordem dos elementos envolvidos não altera o resultado final, como, por exemplo, quando escolhemos as frutas de uma salada ou formamos comissões sem funções pré-estabelecidas. Nesses casos, o resultado final é apenas um conjunto, e não uma sequência. Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 1

Determine quantos subconjuntos com exatamente 3 elementos possui o conjunto $W = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Solução: À primeira vista, poderíamos pensar em usar simplesmente a fórmula de arranjos simples e fazer $A_{7,3} = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 210$, mas esse procedimento nos forneceria a quantidade de sequências de três letras distintas formadas pelos elementos de *W*, o que não é o que se quer, pois, apesar de as sequências *(a, b, c)* e *(b, c, a)* serem diferentes, os conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{b, c, a\}$ não o são. Assim, o resultado final deve ser compensado, da mesma forma que nas permutações com elementos repetidos, pelas maneiras segundo as quais estes três elementos têm de mudar de posição entre si, que sabemos serem P_3. Assim, o número total procurado é $\dfrac{A_{7,3}}{P_3}=\dfrac{210}{3!}=\dfrac{210}{6}=35$.

Tendo como base o exemplo 1, e relembrando o que deduzimos a respeito de arranjos, podemos concluir que, se tivermos um conjunto com n elementos, podemos formar $A_{n,p}$ sequências de p números distintos. Mas se quisermos encontrar a quantidade de conjuntos com exatamente p elementos, devemos compensar o resultado, dividindo-o por P_p. Assim, a quantidade de subconjuntos de p elementos que podem ser formados com os n elementos de um conjunto é $\dfrac{A_{n,p}}{P_p}$. A cada um desses subconjuntos, daremos o nome de **combinação simples** dos elementos e ao total de combinações possíveis estabelecemos a notação $C_{n,p}$. Assim, podemos colocar: $C_{n,p}=\dfrac{A_{n,p}}{P_p}$.

Exemplo 2

Há 20 times participando de um campeonato de futebol, no qual cada time deve enfrentar todos os outros apenas uma vez. Quantos são os jogos desse campeonato?

Solução: Cada jogo desse campeonato é determinado pela escolha de dois times dentre os 20 possíveis. Como a ordem dos times não importa, pois os jogos "time A x time B" e "time B x time A" não são contados duas vezes, devemos encontrar o valor de $C_{20,2}$. Antes disso, calculamos $A_{20,2}=\dfrac{20!}{18!}=\dfrac{10!}{6!}=\dfrac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!}=380$. Chegamos, então, a $C_{20,2}=\dfrac{C_{20,2}}{P_2}=\dfrac{380}{2}=190$.

Como sabemos calcular $A_{n,p}$ e P_p, podemos encontrar uma maneira direta de calcular Cn,p. Façamos: $C_{n,p}=\dfrac{A_{n,p}}{P_p}=A_{n,p}\cdot\dfrac{1}{P_p}=\dfrac{n!}{(n-p)!}\cdot\dfrac{1}{P_p}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Assim, a quantidade de combinações possíveis de n objetos distintos em p posições será dada por:

$$C_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!\;p!}$$

SAIBA MAIS

Acesse o site: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/geometria-plana.htm e revise alguns tópicos da geometria plana.

Exemplo 3

Determine a quantidade de diagonais de um polígono convexo de n vértices.

Solução: Uma diagonal fica bem determinada se escolhermos dois dos vértices do polígono, e como o segmento de reta $\overline{AB}$ não é diferente do segmento $\overline{BA}$, devemos, então, combinar os n vértices dois a dois e do resultado tirar os n lados do polígono. Assim, se d é a quantidade de diagonais, temos $d = C_{n,2} - n = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = \dfrac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{2n}{2} = \dfrac{n(n-1-2)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Daí a conhecida fórmula para a quantidade de diagonais de um polígono convexo.

GUARDE BEM ISSO

Uma vez que nos arranjos a ordem importa, é natural que a quantidade de combinações nunca ultrapasse a quantidade de arranjos. Ou seja, em linhas gerais, podemos dizer que $C_{np} \leq A_{np}$.

Vale ressaltar que, embora as situações de uso sejam parecidas, combinações e arranjos são diferentes no sentido de que nos arranjos a ordem importa e nas combinações a ordem não importa.

Nos exercícios desta aula, você terá a oportunidade de treinar situações em que essa diferença é percebida. Mas, antes disso, acompanhe os exemplos do tópico seguinte, que reforçam a distinção entre arranjos e combinações.

TÓPICO 3

Problemas diversos

Objetivos

- Resolver problemas de contagem que envolvam diversas técnicas
- Simplificar algumas expressões com arranjos e combinações

Nesta aula, já aprendemos fórmulas para calcular o número de arranjos e de combinações. Depois de rever os exemplos do tópico anterior, a diferença entre arranjos e combinações deve estar bem clara para você. Neste tópico, veremos uma série de exemplos nos quais podemos usar as fórmulas para $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$. Vamos lá!

Exemplo 1

Calcule $C_{5,p}$ para todos os valores possíveis de p.

Solução: Observe que, para que o cálculo de $C_{5,\mathrm{p}}$ seja possível, é necessário que p seja um inteiro com $0 \leq p \leq 5$. Não podemos calcular $C_{5,6}$, por exemplo, pois isso significaria formar grupos de 6 objetos tendo apenas cinco objetos à disposição. Usando a fórmula obtida no tópico anterior, podemos, fazer:

$$C_{5,0} = \frac{5!}{(5-0)!0!} = \frac{5!}{5!.1} = 1 \qquad C_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)!1!} = \frac{5.4!}{4!.1} = 5$$

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10 \qquad C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5.4.3!}{2!3!} = 10$$

$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = \frac{5.4!}{1!4!} = 5 \qquad C_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!5!} = \frac{5!}{0!5!} = 1$$

Neste exemplo, há algumas "coincidências". Por exemplo, os números $C_{5,2}$ e $C_{5,3}$ são iguais, o mesmo acontecendo com $C_{5,1}$ e $C_{5,4}$. Esse fato pode ser explicado da seguinte forma: quando, de um grupo de 5 objetos, escolhemos 3, automaticamente deixamos 2 de fora. Assim, escolher os 3 da combinação é equivalente a escolher dois para não fazer parte dela. Podemos provar de forma mais geral o seguinte fato:

PROPOSIÇÃO

Se os números C_{np} e C_{nq} podem ser calculados e, além disso, $p+q=n$, então $C_{np}=C_{nq}$.

Demonstração: Se $p+q=n$, temos, claramente, que n – p = q e n – q = p. Assim:

$C_{n,p}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}=\dfrac{n!}{q!\,p!}$, mas $C_{n,q}=\dfrac{n!}{(n-q)!\,q!}=\dfrac{n!}{q!\,p!}$, logo $C_{np}=C_{nq}$.

A partir daqui, veremos alguns exemplos de como as combinações e os arranjos podem ser usados em problemas de contagem e como optar corretamente pelo uso de uma ou de outra fórmula.

Exemplo 2

Em uma circunferência são destacados oito pontos distintos. Quantos triângulos podem ser formados cujos vértices sejam três dos pontos dados?

Solução: Para que formemos um triângulo, são necessários três pontos, então devemos ver de quantas maneiras podemos escolher três dos oito pontos dados. Aqui surge um questionamento: vamos usar $A_{8,3}$ ou $C_{8,3}$? A principal diferença entre os dois é que para arranjos a ordem importa e para combinações, não. Como o triângulo ABC não é diferente do triângulo BCA, a ordem com que escolhemos os três pontos não é relevante. Assim, calculamos $C_{8,3}=\dfrac{8!}{(8-3)!3!}=\dfrac{8.7.6.5!}{5!.6}=56$.

Exemplo 3

Em uma prova de natação com oito atletas, quantas são as possibilidades de formação de pódio com distribuição de medalha de ouro, de prata e de bronze?

Solução: Aqui temos oito atletas para dispor nas três posições do pódio e surge a mesma pergunta: arranjos ou combinações? Como há uma ordem em cada pódio, devemos usar a fórmula para arranjos. Assim, temos $A_{8,3}=\dfrac{8!}{(8-3)!}=\dfrac{8.7.6.5!}{5!}=330$

Exem plo 4

Para que valor natural de m vale a igualdade $A_{m,5} = 180.C_{m,3}$?

Solução: A equação dada é equivalente a $\frac{m!}{(m-5)!} = 180.\frac{m!}{(m-3)!3!}$. Dividindo ambos os membros da igualdade por $m!$ e calculando 3!, temos $\frac{1}{(m-5)!} = \frac{180}{(m-3)!.6}$, que é equivalente a $6.(m - 3)! = 180.(m - 5)!$. Dividindo ambos os membros da igualdade por 6 e usando o fato de que $(m - 3)! = (m - 3).(m - 4).(m - 5)!$, obtemos

$(m - 3).(m - 4).(m - 5)! = 30.(m - 5)!$

$(m - 3).(m - 4) = 30$

$m^2 - 7m + 12 = 30$

$m^2 - 7m - 18 = 0$, que é uma equação do segundo grau com raízes 9 e -2, mas como $C_{m,5}$ só faz sentido quando m é natural maior ou igual a 5, a única solução válida é $m = 9$.

No próximo exemplo, veremos que, em um mesmo problema de contagem, podemos usar mais de uma fórmula para obter o resultado desejado.

Exemplo 5

De um grupo de 13 homens e 9 mulheres, quantas comissões de cinco pessoas podem ser formadas, com, necessariamente, três homens e duas mulheres?

Solução: Aqui, o problema pode ser dividido em duas etapas: a escolha dos homens e a escolha das mulheres da comissão. Se soubermos de quantas maneiras cada um desses dois procedimentos pode ser feito, basta que multipliquemos os resultados. Como há 13 homens, há $C_{13,3}$ maneiras de escolher os homens da comissão. Como há 9 mulheres, há $C_{9,2}$ maneiras de escolher as mulheres. Dessa forma, o total de comissões possíveis é $C_{13,3}.C_{9,2} = 10296$ (confira).

Como último exemplo desta aula, vejamos um caso no qual devemos analisar e separar os elementos que temos à disposição antes de aplicar alguma fórmula.

Exemplo 6

Os funcionários de uma microempresa, entre os quais Júlia e Augusto, devem fazer uma viagem para representá-la, mas só há vagas para quatro pessoas. De todas as possibilidades de escolha dos que vão viajar, há 28 maneiras para que Júlia e Augusto viajem juntos. Quantos são os funcionários da empresa?

Solução: Veja aqui que, se chamarmos de n a quantidade de funcionários da empresa, inicialmente há $C_{n,4}$ possibilidades de escolha para os quatro representantes. Entretanto, sabemos que, em um grupo no qual Júlia e Augusto viajam juntos, só há vagas para mais dois funcionários, que devem ser escolhidos entre os restantes, que são $n-2$. Assim, temos a equação $C_{n-2,2} = 28$. Resolvendo-a, obtemos

$$C_{n-2,2} = \frac{(n-2)!}{((n-2)-2)!2!} = 28$$

$$\frac{(n-2).(n-3).(n-4)!}{(n-4)!.2} = 28$$

$(n-2).(n-3) = 56$, daí $n^2 - 5n + 6 = 56$, o que resulta em $n^2 - 5n - 50 = 0$, que tem raízes $n = 10$ e $n = -5$. Esta última possibilidade deve ser descartada, pois n deve ser um número natural. Daí, concluímos que a empresa possui 10 funcionários.

Agora que você já conhece arranjos e combinações, procure identificar situações do cotidiano em que as fórmulas para $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$ podem ser usadas. Uma breve recapitulação desses conceitos é sugerida. Você verá que já temos muitas ferramentas interessantes para resolver problemas de contagem. Ao trabalho, então!

AULA 3

Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

Olá aluno (a),

Nesta aula, veremos a análise combinatória de um ponto de vista mais técnico, fornecendo os elementos necessários para a construção, com o rigor matemático adequado, de relações entre os números de arranjos e de combinações. Veremos também como esses números podem ser usados em situações específicas da Álgebra, como no desenvolvimento de expressões do tipo $(x+y)^n$, para n natural.

Objetivos

- Definir os números binomiais e estabelecer relações entre eles
- Determinar os números binomiais de maneira direta através apenas de somas
- Construir uma tabela de números binomiais
- Desenvolver a fórmula para o termo geral do desenvolvimento de um binômio de Newton

TÓPICO 1

Números Binômiais

OBJETIVOS

- Definir números binomiais
- Observar relações importantes entre os números binomiais
- Resolver equações que envolvam números binomiais

Nas últimas aulas, vimos como verificar a quantidade de elementos de determinados conjuntos de maneira indireta, porém de forma bem mais objetiva do que a contagem elemento a elemento. Vimos também que, em casos específicos, podemos escrever as respostas de maneira simplificada usando a notação de fatorial.

A partir daqui, utilizaremos o que foi aprendido nas aulas anteriores, investigando mais a fundo as propriedades entre a quantidade de combinações, para a qual daremos o nome especial de *número binomial*, bem como uma notação especial.

SAIBA MAIS

Faça uma revisão dos conceitos básicos de fatorial acessando ao site: http://www.matematicadidatica.com.br/Fatorial.aspx

Dados os números naturais n e p, com $p \leq n$, o **número binomial** $\binom{n}{p}$ é definido simplesmente como o número de combinações de n objetos em p posições, ou seja, por $C_{n,p}$.

DEFINIÇÃO 1

$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$, para $p \leq n$. O número n é chamado de numerador e o número p é o denominador do número binomial.

ATENÇÃO!

Vale ressaltar que, embora os termos "numerador" e "denominador" sejam usados, não se deve confundir um número binomial com uma fração. Por isso não se pode simplificar diretamente "dividindo" os termos pelo menos número.

Acompanhe o seguinte exemplo, em que foi utilizado aplicação direta da definição.

Exemplo 1

Calcule o valor de $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}$.

Solução: Usando a definição 1, temos $\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2!}=15$

e $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 6!}=20$.

Assim, $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=15+20=35$.

Como vimos na aula passada, sempre que $p + q = n$, então $C_{n,p} = C_{n,q}$. Dessa forma, podemos escrever esta regra como primeira propriedade para os números binomiais.

PROPOSIÇÃO 1

Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são iguais se, e somente se, $p=q$ ou $p+q=n$.

Dizemos, nesse caso, que os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são *complementares*.

A demonstração para a proposição é imediata a partir do que já foi feito na aula passada, portanto será omitida. Com essa propriedade, quando quisermos calcular todos os números binomiais de um determinado numerador, na verdade, só precisaremos fazer as contas para metade dos números. Por exemplo, temos que $\binom{3}{0}=\binom{3}{3}$ e $\binom{3}{1}=\binom{3}{2}$.

Exemplo 2

Para a equação $\binom{15}{x}=\binom{15}{9}$, há a solução imediata $x = 9$, mas também devemos considerar o caso de números complementares, ou seja, $x + 9 = 15$, que resulta em $x = 6$, que é a outra solução. Assim, a solução do problema é o conjunto $\{6, 9\}$.

Há várias outras propriedades interessantes a respeito de números binomiais. A seguir, listaremos dois números vbinomiais específicos.

PROPOSIÇÃO 2

Para qualquer número natural n $\geq$ 1, vale $\binom{n}{0}=1$ e $\binom{n}{1}=n$.

Demonstração: Pela definição, temos: $\binom{n}{0}=\frac{n!}{(n-0)!.0!}=\frac{n!}{n!.1}=1$ e $\binom{n}{1}=\frac{n!}{(n-1)!.1!}=\frac{n.(n-1)!}{(n-1)!.1}=n$. Uma maneira equivalente de verificar esse fato é perceber que, de n objetos, podemos formar exatamente um conjunto com nenhum objeto (o conjunto vazio), e n conjuntos com 1 objeto.

Uma vez que $n + 0 = n$, podemos, usando as propriedades 1 e 2, concluir que também vale $\binom{n}{n}=1$, para qualquer número natural n. Assim, se listarmos todos os números binomiais de um mesmo numerador em ordem crescente de denominador, o primeiro e o último elementos sempre serão iguais a 1. Você poderá calcular, por exemplo, todos os números binomiais com numerador 6 para verificar este fato e treinar as propriedades. A seguir, destacamos outra propriedade relevante a respeito dos números binomiais, a qual também poderá ser chamada de *Relação de Stifel*.

SAIBA MAIS

Conheça um pouco da história do matemático alemão Michael Stifel acessando ao site: https://www.somatematica.com.br/biograf/stifel.php.

PROPOSIÇÃO 3

Para quaisquer números naturais n e p, com p < n, vale $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$. Os números binomiais do primeiro membro são chamados de consecutivos.

Demonstração: Pela definição, o primeiro membro da igualdade vale:

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}+\frac{n!}{(n-(p+1))!(p+1)!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-p)(n-p-1)!\,p!}+\frac{n!}{(n-p-1)!(p+1).p!}=$$

$$=\frac{n!.(p+1)+n!.(n-p)}{(n-p).(n-p-1)!(p+1).p!}=\frac{n!.(p+1+n-p)}{(n-p)!(p+1)!}=$$

$$=\frac{n!.(n+1)}{((n+1)-(p+1))!(p+1)!}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-(p+1))!(p+1)!}=\binom{n+1}{p+1}$$

Essa demonstração é bem técnica, porém, uma vez completada, podemos fazer-lhe uso para simplificar alguns cálculos. Acompanhe os seguintes exemplos:

Exemplo 3

Se quisermos encontrar todos os valores de k para os quais $\binom{12}{\mathrm{k}}=\binom{11}{4}+\binom{11}{5}$, podemos simplificar o segundo membro usando a Relação de Stifel para $n = 11$ e $p = 4$. Assim a igualdade se torna $\binom{12}{\mathrm{k}}=\binom{12}{5}$, que sabemos ser verdade para $k = 5$ e para $k + 5 = 12$, logo $k = 7$.

Exemplo 4

Calcule o valor de $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}$.

Solução: Podemos usar a proposição 3 e perceber que $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$. Basta fazer $n = 5$ e $p = 3$.

Assim, $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}=\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}$. Usando novamente a propriedade 3 para as duas primeiras parcelas, temos $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}$. E novamente:

$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$. Ainda mais uma vez e tudo que precisamos calcular é o valor de $\binom{9}{6}=$ $\frac{9!}{3!6!}=\frac{9.8.7.6!}{6.6!}=\frac{504}{6}=84$.

No próximo tópico, juntaremos todas as informações vistas até esse momento em uma tabela que facilitará, e muito, o processo de encontrar números binomiais, além de deixar ainda mais evidentes certas relações entre eles. Reveja os exemplos para que essa nova forma de representar a quantidade de combinações lhe seja mais familiar.

TÓPICO 2

O Triângulo de Pascal

Objetivos

- Observar relações entre números binomiais
- Analisar as propriedades do triângulo de Pascal

Aqui organizaremos os números binomiais, fazendo uso das propriedades apresentadas no tópico anterior. A "tabela" resultante dessa organização é conhecida como Triângulo de Pascal e é muito útil na determinação direta quando quisermos vários números binomiais.

Inicialmente, vamos dispor os números binomiais com o mesmo numerador em uma linha em ordem crescente de denominador. Como o número binomial $\binom{n}{p}$ só faz sentido se $0 \leq p \leq n$, a linha que contém todos os números binomiais de numerador n terá $n + 1$ elementos (lembre que aqui estamos contando a partir do 0). Por exemplo, se listarmos sucessivamente para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5, temos (ver figura 1):

Figura 1 – Números binomais para $n \leq 5$

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & p=0 & p=1 & p=2 & p=3 & p=4 & p=5 \\
n=0 & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lllllll}
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Como $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$ = 0, para qualquer natural n, cada linha começará e terminará com o número 1. Para encontrar os números do "miolo" da tabela, podemos usar a relação de Stifel, a partir dos elementos da linha anterior, a partir do esquema da figura 2:

Figura 2 – Cálculo do nº linha

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n}{p} & + & \binom{n}{p+1} \\
 & & \parallel \\
 & & \binom{n+1}{p+1}
\end{array}$$

Assim, se soubermos dois elementos consecutivos de uma linha da tabela, basta que os somemos para obter o elemento imediatamente abaixo. Assim, para que encontremos todos os elementos da linha $n = 5$, basta que conheçamos todos os elementos da linha $n = 4$. O processo começa simples porque sabemos que, tanto na linha $n = 0$ como na linha $n = 1$, todos os elementos valem 1. Se quisermos, então, identificar os elementos da linha $n = 2$, temos de começar e terminar por 1 e o outro elemento será a soma dos dois elementos acima e à esquerda. O procedimento é repetido para as linhas seguintes, de forma a encontrar os números binomiais usando apenas somas. As cinco primeiras linhas se tornam como observado na figura 3:

Figura 3: Cálculo dos números binomiais das 6 primeiras linhas do Triângulo de Pascal

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Dessa forma, a construção do Triângulo de Pascal nos permite afirmar diretamente que $\binom{5}{3}=10$ e $\binom{4}{2}=6$.

Exemplo 1:

Um coquetel é formado por duas ou mais bebidas distintas. Dispondo de seis bebidas diferentes, quantos coquetéis podemos formar?

Solução: A quantidade de coquetéis que podem ser preparados com 2 bebidas é $\binom{6}{2}$, com 3 bebidas a quantidade é $\binom{6}{3}$ e assim por diante. Calculemos, então, $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$. Usando a linha $n=5$ do Triângulo de Pascal, podemos encontrar a linha $n=6$ e obter de forma mais direta os números binomiais procurados, conforme figura 4.

Figura 4 – Cálculo da 6^a linha

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1

A soma $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$ vale, dessa forma, $15+20+15++6+1=57$.

Com essa construção, se precisarmos de vários números binomiais para a resolução de um problema, uma maneira prática para obtê-los será o desenvolvimento do Triângulo de Pascal.

Para fecharmos o tópico, construa um triângulo de Pascal até a linha $n=8$ e verifique, com os exemplos da aula passada, como os números binomiais poderiam ter sido encontrados diretamente.

TÓPICO 3

Binômio de Newton

Objetivos

- Identificar expressões binomiais
- Realizar comparações entre potências de binômios e o Triângulo de Pascal
- Obter a fórmula do termo geral do desenvolvimento de expressões do tipo $(x+y)^n$

SAIBA MAIS

Para revisar tópicos dos conceitos de produtos notáveis, acesse o site https://www.infoescola.com/matematica/produtos-notaveis/.

Nos tópicos passados estudamos o número de combinações de forma abstrata, ou seja, sem fazer relação com nenhum processo real. Neste tópico, relacionaremos os números binomiais a expressões matemáticas. Aqui queremos estudar o desenvolvimento de expressões do tipo $(x + y)^n$, para qualquer n natural. Uma expressão do tipo citado é conhecida como binômio de Newton. Comecemos pelos casos conhecidos, que chamamos de *produtos notáveis*.

Exemplo 1

Obtenha o desenvolvimento de $(x + y)^n$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.

Solução: Temos: $(x + y)^0 = 1$ e $(x + y)^1 = x + y$.

$(x + y)^2 = (x + y).(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$(x + y)^3 = (x + y)^2.(x + y) = (x^2 + 2xy + y^2).(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Se listarmos esses produtos explicitando todos os coeficiente e expoentes de x e de y, teremos:

Para $n = 0$, $(x + y)^0 = \mathbf{1}x^0y^0$

Para $n = 1$, $(x + y)^1 = \mathbf{1}x^1y^0 + \mathbf{1}x^0y^1$

Para $n = 2$, $(x + y)^2 = \mathbf{1}x^2y^0 + \mathbf{2}x^1y^1 + \mathbf{1}x^0y^2$

Para $n = 3$, $(x + y)^3 = \mathbf{1}x^3y^0 + \mathbf{3}x^2y^1 + \mathbf{3}x^1y^2 + \mathbf{1}x^0y^3$ \

Observando o exemplo 1, podemos tirar algumas conclusões a respeito desses desenvolvimentos:

os coeficientes de cada linha são os mesmos da linha correspondente no Triângulo de Pascal

- o expoente da variável x começa igual a n e depois vai diminuindo uma unidade até zerar.
- o expoente da variável y começa igual a 0 e depois vai aumentando uma unidade até n.

Assim, seguindo essa tendência, podemos escrever o desenvolvimento de $(x+y)^4$, vendo que teremos cinco termos com coeficientes 1, 4, 6, 4, 1 (obtidos da linha $n = 4$ no Triângulo de Pascal). O primeiro desses termos terá x com expoente 4, diminuindo uma unidade para cada termo seguinte, e y com expoente 0, aumentando uma unidade até atingir 4. A sequência será x^4y^0, x^3y^1, x^2y^2, x^1y^3, x^0y^4. Juntando as duas informações, podemos escrever:

$(x + y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$ ou, simplesmente $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

Exemplo 2

Usando a suposição acima, escreva o desenvolvimento de $(x + y)^5$.

Solução: Os elementos da linha $n=5$ do Triângulo de Pascal são $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Para cada um deles, colocamos x com expoentes decrescentes e y com expoente crescente. Assim, podemos escrever, $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

Pelo que vimos até aqui, podemos supor que, ao desenvolver uma expressão do tipo $(x + y)^n$, os coeficientes serão os elementos da linha n do Triângulo de Pascal, a saber, os números binomiais $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ com x começando com expoente n, diminuindo uma unidade até zerar e o expoente de y começando com zero até atingir n. Assim: $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n$

Antes de provar que o desenvolvimento acima vale para qualquer n, vamos fazer um exemplo para treinar a técnica.

Exemplo 3

Usando a fórmula acima, obtenha o desenvolvimento de $(x+2)^6$.

Solução: Basta fazer $y = 2$ e usar os elementos da linha $n = 6$ do Triângulo de Pascal. Teremos:

$$(x+2)^6 = \binom{6}{0}x^6 2^0 + \binom{6}{1}x^5 2^1 + \binom{6}{2}x^4 2^2 + \binom{6}{3}x^3 2^3 + \binom{6}{4}x^2 2^4 + \binom{6}{5}x^1 2^5 + \binom{6}{6}x^0 2^6$$

Fazendo os cálculos iniciais, teremos

$$(x+2)^6 = x^6 + 6x^5.2 + 15x^4.4 + 20x^3.8 + 15x^2 16 + 6x.32 + 64$$

Por fim, $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$.

Por mais trabalhoso que possa parecer, ainda assim é mais prático do que multiplicar $(x + y)$ por ele mesmo seis vezes. Entretanto, nem sempre será necessário fazer o desenvolvimento completo (há situações em que isso é impraticável). O que é interessante é saber que a expressão acima nos fornece qualquer termo do desenvolvimento.

Antes de ver tais problemas, vamos à formalização do resultado.

TEOREMA 1

Para qualquer n natural, tem-se que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n \quad (*)$$

Demonstração: Inicialmente, sabemos que $(x+y)^n = (x+y).(x+y).....(x+y)$, com o produto feito n vezes. Usando a distributividade, sabemos que cada termo do resultado poderá usar um x ou um y de cada fator. Assim, ele será uma expressão do tipo $x^q y^p$, na qual q representa a quantidade de fatores nos quais o termo x foi escolhido e p representa a quantidade de fatores nos quais o termo y foi escolhido. Como o total de fatores é n, temos necessariamente que $p+q=n$, de onde concluímos que $q = n - p$. Além disso, essas parcelas podem ser repetidas de acordo com as maneiras segundo as quais podemos escolher em qual dos fatores selecionaremos y. A quantidade dessas parcelas é $C_{n,p}$. Desse modo, cada termo do tipo $x^{n-p}y^p$ terá como coeficiente o número binomial $\binom{n}{p}$, com $0 \le p \le n$, o que demonstra o resultado.

Na expressão do teorema, o primeiro termo ocorre para $p=0$, o segundo para $p=1$ e assim por diante. Assim, se quisermos saber o oitavo termo no desenvolvimento de um binômio de Newton, devemos fazer $p=7$. Dessa forma, podemos dizer que a expressão $\binom{n}{p}x^{n-p}y^{p}$ é o termo de ordem $p+1$ do desenvolvimento de $(x+y)^n$.

Exemplo 4

Qual o quinto termo no desenvolvimento de $(2a+3)^7$ em potências decrescentes de a?

Solução: Aqui podemos usar diretamente a expressão obtida acima para $n = 7$, $p = 4$ (pois queremos o quinto termo), $x = 2a$ e $y = 7$. Temos, então que o quinto termo (T_5) será igual a $\binom{7}{4}(2a)^3 3^4$. Usando o triângulo de Pascal ou calculando diretamente, obtemos $\binom{7}{4}=35$. Como $2^3=8$ e $3^4=81$, $T_5=35.8a^3.81=22680a^3$.

Um resultado bem interessante da fórmula (*) aparece se fizermos $x=1$ e $y=1$. Veja:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n y^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n}x^0 y^n,$$

para $x=1$ e $y=1$, fica:

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n 1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}1^1+\binom{n}{2}1^{n-2}1^2+\ldots+\binom{n}{n}1^0 1^n$$

$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$, ou seja, a soma de todos os elementos da linha n do Triângulo de Pascal é igual a 2^n. Você pode verificar isso nas primeiras linhas do triângulo construído nesta aula.

Exemplo 5

Quantos subconjuntos possui o conjunto $V = \{a, b, c, d, e\}$?

Solução:

O conjunto V possui 5 elementos. A partir dele, temos de ver quantos subconjuntos podemos formar com 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 elementos. Essas quantidades são $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ e $\binom{5}{5}$, respectivamente. Assim, temos que encontrar $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$, que é igual a 2^5.

De modo geral, podemos aqui concluir um fato simples da Teoria de Conjuntos: Se um conjunto tem n elementos, a quantidade de seus subconjuntos é 2^n.

Agora que já sabemos por que $C_{n,p}$ pode ser chamado de número binomial, podemos ir ao próximo tópico e observar outras aplicações para os resultados obtidos até aqui.

TÓPICO 4

Binômio de Newton – Aplicações

Objetivos

- Analisar problemas que envolvem binômio de Newton
- Estudar o desenvolvimento de expressões do tipo $(x + y)^n$

Pelo que vimos no tópico anterior, o termo geral no desenvolvimento de $(x + y)^n$ em potências decrescentes de x é $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$. Aqui vamos aprender como aplicar essa expressão e os demais resultados vistos na aula. Comecemos pela questão abaixo:

Exemplo 1

Encontre o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(x + 4)^5$.

Solução: Nesse caso, o termo geral será $T_{p+1} = \binom{5}{p} x^{5-p} 4^p$. Para obter o coeficiente de x^3, devemos fazer $5 - p = 3$, ou seja, $p = 2$. Assim, teremos o terceiro termo: $T_{2+1} = \binom{5}{2} x^{5-2} 4^2 = 10x^3.16$. Ou seja, o coeficiente procurado é 160.

Como visto neste exemplo, nem sempre precisamos encontrar todos os coeficientes de um desenvolvimento para obter a resposta para um problema de binômio de Newton. No mesmo exemplo dado, se quiséssemos vários coeficientes, seria interessante escrever o Triângulo de Pascal até a linha $n = 5$. Na verdade, ter o Triângulo de Pascal até a linha $n = 8$ será de muita utilidade para todos os demais exemplos deste tópico.

Exemplo 2

Encontre o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$.

Solução: O termo geral do desenvolvimento é $T_{p+1}=\dbinom{6}{p}x^{6-p}\left(\dfrac{1}{x}\right)^p = \dbinom{6}{p}x^{6-p}.\dfrac{1}{x^p} = \dbinom{6}{p}x^{6-2p}$.

O termo independente de x é aquele que possui x com expoente 0. Logo, fazemos $6 - 2p = 0$ para encontrar o p desejado. Temos $p = 3$ e, assim, determinamos o quarto termo: $T_4 = \dbinom{6}{3}x^{6-(2.3)} = 20$.

No desenvolvimento de expressões do tipo $(x-y)^n$, podemos fazer $x-y = x + (-y)$ e aplicar os procedimentos do que já determinamos anteriormente. Siga o exemplo:

Exemplo 3

Encontre o sexto termo do desenvolvimento de $(3x - 2)^7$.

Solução: Fazendo $3x - 2 = 3x + (-2)$, o termo geral fica $T_{p+1}=\dbinom{7}{p}(3x)^{7-p}(-2)^p$, no qual devemos fazer $p = 5$ para obter o sexto termo. Assim: $T_{5+1}=\dbinom{7}{5}(3x)^{7-5}(-2)^5$, ou seja $T_6 = 21.(3x)^2(-2)^5 = 21.9x^2.(-32) = -6048x^2$.

Exemplo 4

No desenvolvimento de $(a - 3b)^n$, há nove termos. Encontre o terceiro deles.

Solução: Neste problema, não temos diretamente o valor do expoente, mas sabemos que, no desenvolvimento de um binômio com expoente n, há $n + 1$ termos assim, podemos concluir, pelo exposto no enunciado, que $n + 1 = 9$, de onde tiramos $n = 8$. O termo geral fica $T_{p+1}=\dbinom{8}{p}a^{8-p}(-3b)^p$, no qual devemos usar $p = 2$ para ober o terceiro termo $T_{2+1}=\dbinom{8}{2}a^{8-2}(-3b)^2$. Assim, obtemos $T_3 = 28.a^6.9b^2 = 252a^6b^2$.

Até aqui, já temos bastante material para resolver diversos problemas de análise combinatória e binômio de Newton. Sugerimos que você faça uma breve recapitulada nos temas desta aula. Agora, partamos para os exercícios.

AULA 4

Números complexos I

Olá aluno (a),

Nesta aula, começaremos a abordar o conjunto dos números complexos, que servirá como um complemento para o estudo sobre Conjuntos Numéricos feito na disciplina de matemática básica I. Aqui introduziremos o conceito de unidade imaginária, estendendo o conjunto dos números reais, e analisaremos as principais propriedades, verificando como se processam as operações aritméticas elementares nesse novo conjunto. Para tanto, sempre que for necessário, faça uma revisão na aula que trata sobre os números reais daquela disciplina.

Objetivos

- Estabelecer a construção do conjunto dos números complexos a partir dos números reais
- Realizar operações com números que envolvam a unidade imaginária
- Apresentar conceitos pertinentes, como módulo e conjugado de um número complexo

TÓPICO 1

Definições

Objetivos

- Identificar problemas algébricos sem solução no conjunto dos números reais
- Apresentar a unidade imaginária
- Definir o conjunto dos números complexos

No conjunto dos números naturais, não se pode fazer a operação $5-8$, uma vez que isso representaria tirar oito elementos de um conjunto que possui cinco elementos. Além disso, se $5-8=n$, teríamos $5=8+n$, mas, como 8 é maior que 5, tal natural *N* não existe. Entretanto, como já foi estudado, podemos associar a ideia de número negativo, dando ao símbolo "-3" o significado do número que precisamos somar ao número 8 para obter o número 5. Com essa técnica, criamos o conjunto dos números inteiros, no qual todo número possui inverso aditivo e a subtração $m-n$ é sempre possível, para quaisquer inteiros m e n.

No conjunto dos números inteiros, não se pode fazer a operação $\frac{12}{5}$, uma vez que isso representaria encontrar um número n tal que $\frac{12}{5}=n$, o que equivale a $5n=12$, mas sabemos que 12 não é múltiplo inteiro de 5, logo tal inteiro n não existe. Entretanto, como já foi estudado, podemos associar a ideia de número não-inteiro, dando ao símbolo "$\frac{12}{5}$" o significado do número que precisamos multiplicar por 5 para obter 12. Com essa técnica, criamos o conjunto dos números racionais, no qual todo número diferente de zero possui inverso multiplicativo e a divisão $\frac{a}{b}$ é sempre possível para quaisquer racionais *a* e *b*, com $b \neq 0$.

No conjunto dos números racionais, há alguns problemas que não podem ser resolvidos, como encontrar um número x tal que $x^2=2$ (sabemos que $\sqrt{2}$ não é um número racional) ou encontrar um número y tal que $2^y = 3$ (sabemos que $\log_2 3$ não é um número racional). Para resolver tais problemas, estudamos os números reais, pois, através deles, podemos calcular, por exemplo, a raiz quadrada de qualquer número não negativo.

Até aqui, então, o conjunto dos números reais é o maior campo de atuação e é nele que procuramos as soluções para os nossos problemas. Há, porém, algumas equações que envolvem operações conhecidas para as quais não há solução real. Um exemplo para isso surge naturalmente quando se pergunta pela raiz quadrada de números negativos.

Exemplo 1

Encontre a solução para a equação $x^2 + x + 1 = 0$.

Solução: Usando a fórmula de Bhaskara , calculamos $\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3$ e, uma vez que encontramos o discriminante negativo, encerramos o processo e a solução é vazia no conjunto dos números reais. O motivo para tal é que, logo em seguida, iríamos procurar a raiz quadrada de -3, que não pode ser encontrada no conjunto dos números reais.

Para justificar o final da solução do exemplo anterior, pense que exista um número real z tal que $z^2 = -3$, equivalentemente a $z \cdot z = -3$. No conjunto dos números reais, há uma ordenação total, também chamada *lei da tricotomia*: qualquer número real é positivo, negativo ou zero. Entretanto

- se z é positivo, $z \cdot z$ também é positivo, não podendo ser igual a -3;
- se z é negativo, $z \cdot z$ é positivo, não podendo ser igual a -3;
- se z é zero, por motivo ainda mais direto não pode $z \cdot z$ ser igual a -3.

Todas as possibilidades se esgotam e, com isso, percebemos de maneira bem simples por que equações como $x^2 + x + 1 = 0$ e $z^2 = -3$ não possuem raízes reais.

Assim como o que foi feito para "aumentar" o conjunto dos números naturais, a fim de que a operação de subtração pudesse ser realizada, ou o conjunto dos números inteiros, para que se possa efetuar a divisão, vamos *estender* o conjunto dos números reais, mantendo as operações existentes, com a finalidade de, no novo conjunto, obter soluções para as equações acima.

Uma vez que os números negativos podem ser obtidos a partir dos positivos pela multiplicação por -1 (por exemplo $-12 = 12.(-1)$ e $-25 = 25.(-1)$), um caso básico que devemos definir é um número que, elevado ao quadrado, resulte em -1. Esse número, pelo que foi exposto, não pertence ao conjunto dos números reais e, apenas por causa disso, vamos chamá-lo de *unidade imaginária*. Para ele, vamos atribuir o símbolo *i*. Ou seja: $i^2 = -1$

De maneira semelhante ao que fazemos com os números reais *e*, π e $\sqrt{2}$, a multiplicação de *i* por um número real não será simplificada além da justaposição dos símbolos. Por exemplo, temos 4*e*, $3\sqrt{2}$, 10π, etc. Igualmente será feito para 5*i*, 2*i*, $\sqrt{3}\,i$. Com isso, resolvemos, de uma vez só, o problema de encontrar números cujos quadrados são números negativos. Acompanhe:

$(5i)^2 = 25i^2 = 25.(-1) = -25$, ou seja, 5*i* é uma solução para $x^2 = -25$;

$(2i)^2 = 4i^2 = 4.(-1) = -4$, ou seja, 2*i* é uma solução para $x^2 = -4$;

$(\sqrt{3}i)^2 = 3i^2 = 3.(-1) = -3$, ou seja $\sqrt{3}\,i$ é uma solução para $x^2 = -3$.

SAIBA MAIS

Muitas curiosidades surgem quando nos deparamos com os números complexos. Acesse o site http://www.matematica.br/historia/complexos.html e descubra mais sobre esses elementos

De maneira análoga, também não simplificaremos expressões do tipo 4 + *i*, 3 + *i*, –3 + 2*i*, no intuito de manter as operações existentes no conjunto dos números reais. O que vamos fazer com esse novo símbolo é operar como se ele fosse uma incógnita, mantendo todas as propriedades da soma e da multiplicação, mas sempre tendo em mente que seu quadrado vale –1.

Assim, basta que acrescentemos *i* ao conjunto dos números reais para ganhar um novo conjunto, no qual poderemos encontrar raiz quadrada mesmo de números negativos.

Definiremos o *conjunto dos números complexos* e representaremos pela letra C o conjunto de todas as expressões do tipo $z = a + b.i$, onde *a* e *b* são números reais.

$$C = \{a + bi, a \in R, b \in R \text{ e } i^2 = -1\}$$

Uma vez que, para qualquer número real *x* vale $x = x + 0.i$, temos que o conjunto dos números reais está contido nesse novo conjunto. Podemos, então, completar a cadeia:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Para o número complexo $z = a + bi$, se $b = 0$, tem-se que *z* é um número real. Além disso, se $a = 0$ e $b \neq 0$, dizemos que *z* é *imaginário puro*. Por exemplo, 4*i* é um número imaginário puro.

Exemplo 2

Determine o valor real de k para que $z = 9 - k^2 + 2i$ seja imaginário puro.

Solução: Para que z seja imaginário puro, devemos ter $9 - k^2 = 0$, o que resulta em $k = 3$ ou $k = -3$.

Para o número complexo $z = a + bi$, chamamos o número real a de *parte real* de z e denotamos por Re(z), enquanto o número real b é a *parte imaginária* de z e o denotamos por Im(z). Como ilustração, se $w = 4 + 3i$, tem-se Re(w) = 4 e Im(w) = 3.

Exemplo 3

Determine a parte real e a parte imaginária do número complexo $z = (4 + i)^2$.

Solução: Só podemos encontrar a parte real e imaginária de um número complexo quando ele estiver na forma $a + bi$. Para tanto, desenvolveremos o quadrado e simplificaremos o que for possível. Temos $(4 + i)^2 = 4^2 + 2.4.i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i$. Temos: Re($z$) = 15 e Im($z$) = 8.

Dois números complexos somente serão iguais se tiverem mesma parte real e mesma parte imaginária. Ou seja:

$$z = w \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ e } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

Observe que a parte imaginária de um número complexo é um número **real**, portanto é incorreto dizer que $\mathrm{Im}\ (6 + i) = 2i$.

Como todo número real é complexo, faz sentido falar de Re(9) ou Im(12), sendo esses valores iguais a 9 e 0, respectivamente.

Embora a unidade i seja chamada de imaginária, e o conjunto C contenha os números complexos, esses nomes não devem assustar. Assim como nos habituamos a trabalhar com números negativos, "quebrados" ou irracionais, esses novos números também nos serão familiares.

TÓPICO 2

Potências da unidade imaginária

Objetivos

- Observar padrões de repetição para i^n
- Encontrar i^n para qualquer natural n

SAIBA MAIS

Conheça um pouco da história e das descobertas desse fabuloso matemático italiano Gerolamo Cardano no site https://clube.spm.pt/news/5395.

Ao incluirmos a possibilidade de um número ter o quadrado igual a -1, estendemos o conjuntos dos números reais e obtemos um conjunto que mantém as mesmas propriedades em relação às operações básicas e ainda ganhamos a solução de vários problemas. Este tópico é devotado somente ao número *i*. Aqui veremos que, embora ele tenha sido definido apenas tendo em vista o seu quadrado, suas potências com outros expoentes seguem padrões interessantes, de modo que o conjunto dos números complexos serve para resolver problemas mesmo de grau maior que 2. Na verdade, os números complexos começaram a ganhar importância na Matemática no século XVI, quando o matemático italiano Gerolamo Cardano desenvolveu uma fórmula para resolver equações de terceiro grau e foi percebido que mesmo ali se tinha a necessidade de um número cujo quadrado fosse negativo.

Comecemos percebendo o seguinte:

$\mathrm{i}^0 = 1$, vamos manter a propriedade dos reais, segundo a qual qualquer número, diferente de zero, elevado a 0 vale 1.

$\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, como não poderia deixar de ser, qualquer número elevado a 1 é igual a ele próprio.

$i^2 = -1$, pela definição inicial da unidade imaginária.

O que acontece com i^n, para *n* natural maior que 2 pode ser observado se levarmos em conta que as propriedades de potenciação são mantidas. Vejamos.

$i^3 = i^2.i^1 = (-1).i = -i$, ou seja, mesmo se elevarmos a unidade imaginária ao cubo, ainda obteremos um número complexo, com parte real 0 e parte imaginária -1.

$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$, ou seja, podemos dizer que $z = i$ é uma solução para o problema $z^4 = 1$. Além disso, é importante notar que i^4 é o elemento neutro para o produto. Continuemos:

$i^5 = i^4.i^1 = 1.i = i$ $i^6 = i^4.i^2 = 1.(-1) = -1$ dar um espaço separando $i^7 = i^4.i^3 = 1.(-i) = -i$

Como se percebe, teremos repetição da sequência *i*, –1, –*i*, 1, *i*, –1, ... Observe como obter outras potências.

Exemplo 1

Qual a parte imaginária de $5 + 2i + i^{79}$?

Solução: Como sabemos que $i^4 = 1$, podemos fazer a divisão de 79 por 4 e obter 79 = 4.19 + 3. Logo $i^{79} = i^{4.19+3} = i^4.i^4....i^4.i^3 = 1.1...1.i^3 = i^3 = -i$. Logo, $5 + 2i + i^{79} = 5 + 2i + (-i) = 5 + i$, que tem parte imaginária igual a 1.

Geralmente, para qualquer *n* natural, podemos usar o algoritmo da divisão por 4 e sabemos que existem números naturais *q* e *r*, com $0 \leq r < 4$ tais que $n = 4q + r$.

$i^n = i^{4+qr} = (i^4)^q i^r = 1^q.i^r = i^r$. Uma vez que os restos possíveis na divisão por 4 são apenas 0, 1, 2 e 3, para identificar qual o valor de i^n, basta saber qual o resto da divisão de *n* por 4 e lembrar:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

Exemplo 2

Se desenvolvermos $(1+i)^7$, pelo binômio de Newton, qual será o sexto termo?

Solução: O termo geral do desenvolvimento de $(1+i)^7$ é $T_{p+1} = \binom{7}{p} 1^{7-p}.i^p$. Se quisermos o sexto termo, devemos fazer $p = 5$. Assim, $T_{5+1} = \binom{7}{5} 1^{7-5}.i^5$, de onde tiramos $T_6 = 21i^5$, e como 5 deixa resto 1 na divisão por 4, temos $i^5 = i$ e o sexto termo vale $T_6 = 21i$.

Exemplo 3

Determine o valor da soma $S = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{500}$.

Solução: As parcelas formam uma progressão geométrica de razão i, com primeiro termo igual a 1. É simples verificar que a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ vale mesmo para os números complexos. Assim, aplicando $a_1 = 1$, $q = i$ e $n = 501$, temos $S = \dfrac{1(i^{501} - 1)}{i-1}$ e como 501 deixa resto 1 na divisão por 4, $i^{501} = i$ e $S = \dfrac{i-1}{i-1} = 1$.

TÓPICO 3

Operações elementares

Objetivos

- Simplificar expressões numéricas envolvendo números complexos
- Observar as propriedades das operações aritméticas entre complexos

No tópico anterior, começamos a trabalhar com o número i, que não é um número real. A principal propriedade desse número é que seu quadrado vale –1. Os números complexos foram definidos como as expressões do tipo $z = a + bi$, em que a e b são números reais, chamadas parte real e imaginária de z, respectivamente. Essa maneira de escrever um número complexo é chamada de *forma algébrica*, pois, como se verá adiante, ela é bem fácil de ser trabalhada quando quisermos realizar operações de soma ou multiplicação entre números complexos. Comecemos pela adição. Considere os números reais a, b, c e d:

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di \Rightarrow z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i$$

Ou seja, a parte real da soma de dois números complexos é a soma das partes reais das parcelas, e a parte imaginária da soma é a soma das partes imaginárias.

Usando a distributividade da multiplicação em relação à adição bem como o fato de $i^2 = -1$, podemos fazer:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i\ .$$

Na prática, o resultado acima não precisa ser memorizado. É mais razoável que, ao operar com números complexos, o produto seja feito usando a propriedade distributiva.

Exemplo 1

Para os números complexos $z = 3 + 4i$ e $w = 2 - 5i$, temos

$$a)\ z + w = 3 + 4i + 2 - 5i = 5 - i$$
$$b)\ z.w = (3+4i)(2-5i) = 6 - 15i + 8i - 20i^2 = 6 - 7i + 20 = 26 - 7i$$
$$c)\ z^2 = (3+4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$$

Com essas definições, é possível verificar que a soma de números complexos é comutativa, associativa, possui elemento neutro (o mesmo dos números reais) e todo elemento possui inverso aditivo. Do mesmo modo, a multiplicação é comutativa, associativa, possui elemento neutro (o mesmo dos números reais) e é distributiva em relação à soma.

Quanto ao elemento inverso para a multiplicação, vejamos o seguinte:

Exemplo 2

Dado o número complexo $z = 3 + 4i$, encontre um número complexo v tal que $z \cdot v = 1$.

Solução: Fazendo $v = c + di$, para os reais c e d, devemos ter $(3+4i)(c+di) = 1$, o que resulta em

$$3c + 3di + 4ci + 4di^2 = 1$$
$$3c + (3d + 4c)i - 4d = 1$$
$$3c - 4d + (3d + 4c)i = 1$$

Como dois números complexos são iguais apenas quando suas partes reais são iguais, devemos ter $3c - 4d = 1$. Analogamente, temos $3d + 4c = 0$. O sistema $\begin{cases} 3c - 4d = 1 \\ 3d + 4c = 0 \end{cases}$ possui solução $c = \frac{3}{35}$ e $d = \frac{-4}{25}$. Assim, o número procurado é $v = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. Como $zv = 1$, podemos dizer que $v = \frac{1}{z}$, ou seja, o inverso multiplicativo do número $3 + 4i$ é o número $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

Geralmente, dado o número complexo $z = a + bi$, o inverso multiplicativo de z, denotado por z^{-1}, caso exista, é tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. Fazendo $z^{-1} = c + di$, devemos ter:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = 1$$
$$ac - bd + (ad + bc)i = 1$$

o que nos leva ao sistema $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$, nas incógnitas c e d. Resolvendo-o, obtemos $c = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $d = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$. Este método para determinar o inverso de um número complexo vale sempre que $a^2 + b^2 \neq 0$, mas será $a^2 + b^2 = 0$ apenas quando $a = b = 0$, ou seja, nos números complexos, todo o número diferente de zero possui inverso multiplicativo. Podemos concluir que:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

A expressão $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$, que é um número real não negativo, é chamada de *norma* do número complexo z e será revisitada em breve.

Vistas todas as propriedades citadas neste tópico, podemos dizer que, assim como o conjunto dos números reais, o conjunto dos números complexos é um *corpo*, pois com as operações de soma e de produto valem:

1) $\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w \in \mathbb{C}$ (fechamento em relação à soma)
2) $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z$ (elemento neutro para a soma)
3) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists\, w \in \mathbb{C}; z + w = 0$ (inverso aditivo)
4) $\forall z, w \in \mathbb{C}, z \cdot w \in \mathbb{C}$ (fechamento em relação ao produto)
5) $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = z$ (elemento neutro para o produto)
6) $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists\, w \in \mathbb{C}; z \cdot w = 1$ (inverso multiplicativo)

Além das operações serem comutativas e associativas, há a distributividade do produto em relação à soma.

Para fixação da técnica, acompanhe o último exemplo do tópico.

Exemplo 3

Para os números complexos $z = 2 - i$ e $w = 3 + 2i$, encontre $\mathrm{Re}\left(z + \dfrac{1}{w}\right)$.

Solução: Uma vez que $\mathrm{Re}\left(z + \dfrac{1}{w}\right) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{w}\right)$, podemos encontrar diretamente $\mathrm{Re}(z) = 2$ e $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{w}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}(w)}{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2} = \dfrac{3}{3^2 + 2^2} = \dfrac{3}{13}$. Logo, $\mathrm{Re}\left(z + \dfrac{1}{w}\right) = 2 + \dfrac{3}{13} = \dfrac{29}{13}$.

TÓPICO 4

Conjugado e divisão

Objetivos

- Apresentar a noção de conjugado de um número complexo
- Obter a forma algébrica da divisão de números complexos

Quando, no tópico anterior, obtivermos o inverso de um número complexo não nulo, teremos: $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$ e $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$.

Ou seja, se $z = a + bi$, em que a e b são números reais, vale que $\frac{1}{z}=\frac{a-b}{a^2+b^2}$. O denominador dessa expressão foi definido como a norma do número z e representaremos por $\mathrm{N}(z)$. O numerador difere do número z apenas pelo sinal da parte imaginária. Trocar o sinal da parte imaginária de z gera um novo número complexo, a que chamamos de conjugado de z e representamos por "z barra". Ou seja, definimos

$$\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi} \Rightarrow \overline{\mathrm{z}} = \mathrm{a} - \mathrm{bi}$$

Exemplo 1:

Os conjugados dos números complexos $3 + 4i$, $7 - 2i$ e $9i$ são $3 - 4i$, $7 + 2i$ e $-9i$, respectivamente.

A respeito dos números complexos, temos as seguintes propriedades, cujas demonstrações são diretas e servirão como exercício.

1) $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})$ e $\mathrm{Im}(z)=-\mathrm{Im}(\overline{z})$

2) $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}(z)$ e $z-\overline{z}=2\cdot\mathrm{Im}(z)\cdot i$

3) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ e $\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$

4) $z\cdot\overline{z}=\mathrm{N}(z)$, que é um número real não negativo, de onde temos também

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{\mathrm{N}(z)}.$$

Da última propriedade, vemos que, se multiplicarmos um número complexo pelo seu conjugado, obteremos um número real. Este processo será útil se quisermos obter a divisão de números complexos

Dados dois números complexos w e z, com $z\neq 0$, para obtermos a forma algébrica da fração $\frac{w}{z}$, multiplicaremos numerador e denominador pelo conjugado do denominador, ficando, assim, apenas o numerador com a unidade imaginária. Acompanhe: $\frac{w}{z}=\frac{w.\overline{z}}{z.\overline{z}}$

Exemplo 2

Encontrar a parte real de $\frac{2+3i}{1+4i}$.

Solução: Usando o artifício acima, podemos fazer $\frac{2+3i}{1+4i}.\frac{1-4i}{1-4i}=\frac{2-8i+3i-12i^2}{1^2+4^2}$ $=\frac{14-5i}{17}$. Observe que, no denominador, usamos diretamente a propriedade 4. O resultado final nos permite afirmar, então, que $\mathrm{Re}\left(\frac{2+3i}{1+4i}\right)=\frac{14}{17}$, e ainda que $\mathrm{Im}\left(\frac{2+3i}{1+4i}\right)=-\frac{5}{17}$.

A norma de um número complexo foi definida como a soma dos quadrados de suas partes real e imaginária. Ou seja, dado o número complexo $z = a + bi$, em que a e b são números reais, a norma de z vale $\mathrm{N}(z)=a^2+b^2$, que não apenas é um número real (o que nos ajudou a encontrar a forma algébrica da divisão de dois números complexos) como também não é negativo. A norma de um número complexo satisfaz as seguintes propriedades:

1) $\mathrm{N}(z)=\mathrm{N}(\overline{z})$
2) $\mathrm{N}(z.w)=\mathrm{N}(z).\mathrm{N}(w)$
3) $\mathrm{N}(z)=0$ se, e somente se, $z = 0$.
4) $\mathrm{N}(z)=z.\overline{z}$

Exemplo 3

Determine a norma dos números complexos $u = 3 + 4i$, $v = 2 - 7i$, $w = 7i$ e $z = 8$.

Solução: Temos

$$N(u) = 3^3 + 4^2 = 25,\ N(v) = 2^2 + (-7)^2 = 53,\ N(w)=7^2 = 49 \text{ e } N(z)=8^2 = 64$$

Por último, mas não menos importante, temos a definição de *módulo* de um número complexo, que corresponde à raiz quadrada da norma. Dado um número complexo $z = a + bi$, em que a e b são números reais, definimos:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que é equivalente a $|z|^2 = N(z)$.

O módulo de um número complexo também é um número real não negativo e satisfaz as seguintes propriedades:

1) $|z| = |\overline{z}|$
2) $|z|^2 = z.\overline{z}$
3) $|z.w| = |z|.|w|$
4) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, com $w \neq 0$
5) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Vale ressaltar que, quando z é um número real, a definição acima coincide com a definição de módulo de um número real.

Exemplo 4

Determine o módulo dos números complexos $u = 3 + 4i$, $v = 2 - 7i$, $w = 7i$ e $z = 8$.

Solução: Como já calculamos a norma no exemplo anterior, basta que calculemos as suas respectivas raízes quadradas. Assim $|u| = 5,\ |v| = \sqrt{53},\ |w| = 7$ e $|z| = 8$

Exemplo 5

Encontre um número complexo que tenha parte real igual a 4 e módulo igual a 5.

Solução: Devemos encontrar z tal que $Re(z) = 4$ e $|z|=5$ e $|z|=5$. Da primeira igualdade, podemos escrever $z = 4 + bi$, para algum número real b. Da segunda igualdade, temos $\sqrt{4^2 + b^2} = 5$, o que resulta em $16 + b^2 = 25$ e concluímos que b vale 3 ou –3. Assim os números procurados são $4 + 3i$ e $4 - 3i$.

AULA 5 | Números complexos II

Olá!

Como você já observou na aula passada, pela simples inserção de um número cujo quadrado seja -1, mantendo as operações previamente definidas, conseguimos um conjunto com uma grande riqueza de propriedades. Nesta aula, continuaremos a falar sobre os números complexos, revisaremos algumas definições e veremos como os números complexos e a geometria estão relacionados.

Aqui precisaremos conhecer algumas noções elementares de trigonometria e de geometria analítica. Vamos ao trabalho, então.

Objetivos

- Apresentar outras definições que envolvem números complexos
- Relacionar números complexos à geometria analítica
- Simplificar, através da forma trigonométrica, problemas de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$

TÓPICO 1

Pares ordenados e vetores

Objetivos

- Apresentar uma nova forma de escrever números complexos
- Comparar a reta real com o plano complexo
- Fornecer uma interpretação geométrica para o módulo de um número complexo

Na aula 4, definimos a unidade imaginária i e os números complexos como sendo as expressões do tipo em que a e b são números reais, chamados, respectivamente, de parte real e parte imaginária de z. Desta forma, um número complexo fica bem caracterizado quando dele sabemos as partes reais e imaginárias. Por exemplo, o número complexo que tem parte real 8 e parte imaginária –4 é o número $8 - 4i$.

Isso quer dizer que cada número complexo fica bem determinado a partir de dois números reais. Considere a função $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $\varphi(a + bi) = (a, b)$. Podemos relacionar números complexos com pares **ordenados** de números reais, sendo que a primeira coordenada é a parte real e a segunda coordenada é a parte imaginária. Usando a imagem de cada número complexo pela função φ, ganhamos uma nova forma de representá-lo.

SAIBA MAIS

Relembre o assunto de função sobrejetiva e injetiva acessando o site http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-ajuda-funcoes-injetividade-sobrejetividade-e-bijetividade/

Exemplo 1

Os números complexos $2 + 3i$, $4 - 5i$, $8i$ e 10 têm imagens (2, 3), (4, –5), (0, 8) e (10, 0) pela função φ.

Uma vez que a função φ é sobrejetiva e injetiva, essa associação é biunívoca, isto quer dizer que cada número real corresponde a um, e somente um, par ordenado de números reais. Dessa forma, podemos trabalhar tanto com a expressão $a + bi$ quanto com o par ordenado (*a*, *b*) quando quisermos operar com um número complexo. A alternância entre as duas formas fica a cargo da função φ e de sua inversa $\varphi^{-1}(a,b) = a + bi$. Por simplicidade, então, o número $z = a + bi$ e o par $\varphi(z) = (a, b)$ serão considerados iguais.

Com isso, além da forma algébrica, há a forma de par ordenado para representar um número complexo.

Exemplo 2

Dados os números complexos $z = (3, 2)$ e $w = (4, -1)$, calcule $z.w$.

Solução: Os pares ordenados (3, 2) e (4, –1) são equivalentes, na forma algébrica, a $3 + 2i$ e $4 - i$, respectivamente.

Dessa maneira, $z.w = (3 + 2i).(4 - i) = 12 - 3i + 8i - 2i^2 = 14 + 5i$, que é a forma algébrica do par ordenado (14, 5). Podemos escrever (3, 2).(4, –1) = (14, 5).

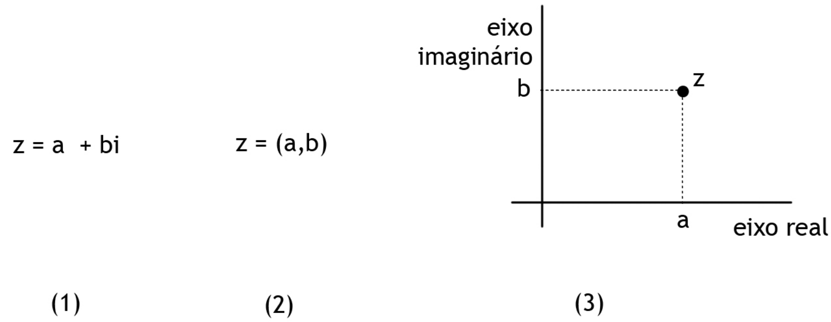
Observe que o produto de pares ordenados, quando representam números complexos, não é feito "termo a termo", ou seja, **não vale** $(a, b).(c, d) = (ac, bd)$. O correto é

$$\begin{aligned}(a,b).(c,d) &= (a+bi).(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i = (ac - bd, bc + ad)\end{aligned}$$

Como a cada par ordenado corresponde um ponto do plano cartesiano, podemos também dizer que a cada número complexo corresponde um ponto do plano cartesiano, e vice-versa. Já que ficou estabelecido que a primeira coordenada é a parte real do número, o eixo das abscissas será o *eixo real*. Analogamente, o eixo das ordenadas será o *eixo imaginário*. Assim, o número complexo $z = a + bi$ pode ser representados pelo par ordenado (*a*, *b*) e pelo ponto correspondente no plano cartesiano, conforme a figura 1.

O ponto marcado no plano cartesiano, que corresponde à representação geométrica do par equivalente, é chamado de *afixo* $z = a + bi$ do número complexo. Os números reais têm parte imaginária nula, ficando seus afixos sobre o eixo horizontal. Equivalentemente, os números imaginários puros têm a parte real nula, ficando seus afixos sobre o eixo vertical. Outra maneira de representar um número complexo *z* é através de um vetor, com início na origem do plano e fim no afixo de *z*.

Figura 1 – Forma algébrica(1), de par ordenado(2) e representação geométrica (3) de um número complexo z

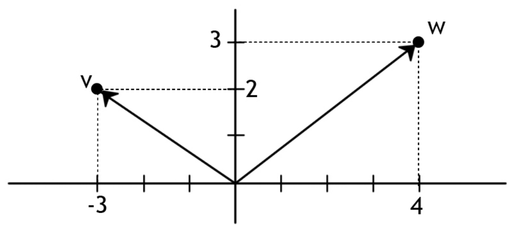


Exemplo 3

Represente geometricamente os números complexos $w = 4 + 3i$ e $v = -3 + 2i$.

Solução: Devemos marcar os pontos $w = (4, 3)$ e $v = (-3, 2)$ e, em seguida, traçar vetores começando na origem do plano e terminando nos pontos dados. Veja a figura abaixo.

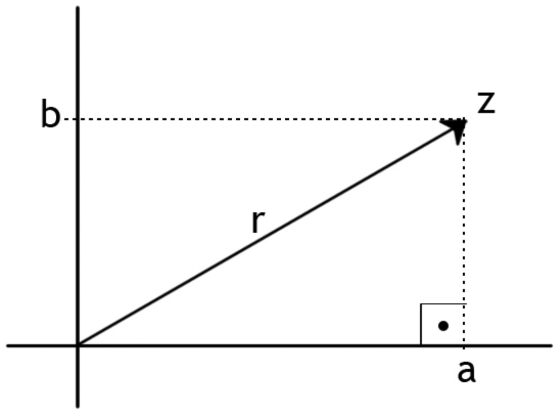
Figura 2 – Afixo e vetor correspondentes aos números 4 + 3i e -3 + 2i.



Usando a fórmula para a distância entre dois pontos do plano cartesiano, ou mesmo utilizando diretamente o Teorema de Pitágoras, podemos calcular o comprimento do vetor correspondente ao número $z = a + bi$. Chamando tal comprimento de *r*, veja a figura 3.

Pela relação do Teorema de Pitágoras, vale $r^2 = a^2 + b^2$, de onde concluímos que $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, ou seja, o módulo de um número complexo representa o comprimento do vetor correspondente.

Figura 3 – Comprimento



O plano cartesiano, quando interpretado como representação de números complexos, é também chamado de *plano complexo* (pela correspondência entre pontos do plano e elementos de $\mathbb{C}$), ou ainda de *plano de Argand-Gauss*, em homenagem a dois matemáticos, o francês Jean Robert Argand (1768 - 1822) e o alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), pioneiros na representação e na análise geométrica dos números complexos.

SAIBA MAIS

Jean Robert Argand matemático amador e contador suíço nascido em Genebra, que estudou a representação gráfica dos números complexos dando origem ao diagrama elaborado depois por Cauchy que o denominou de diagrama Wesswl-Argant-Gauss.

https://www.13snhct.sbhc.org.br/resources/anais/10/1349713128_ARQUIVO_Argand-GertSchubring.pdf

VOCÊ SABIA?

Carl Friedrich Gauss é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Gauss teve a estatura de Arquimedes e de Newton, e seus campos de interesse excederam os de ambos. Gauss contribuiu para todos os ramos da Matemática e para a Teoria dos Números.

TÓPICO 2

Argumento e forma trigonométrica

Objetivos

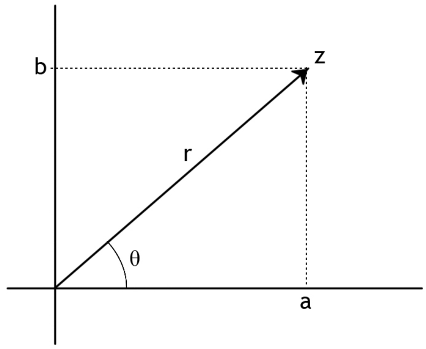
- Definir argumento de um número complexo
- Relacionar argumento e módulo com a forma algébrica
- Apresentar a forma trigonométrica de um número complexo

No tópico anterior, vimos que o módulo de um número complexo é a distância do seu afixo à origem do plano de Argand-Gauss, o que equivale ao comprimento do vetor correspondente. Porém o fato de sabermos o módulo de um número não é o suficiente para caracterizá-lo, a menos em caso direto de módulo igual a zero, pois sabemos que o único número complexo de módulo 0 é o próprio número 0.

Dado um número real $r > 0$, o conjunto de números complexos que satisfazem a relação $|z| = r$ contém todos aqueles cujos afixos distam *r* unidades da origem, ou seja, formam uma circunferência com centro na origem e raio *r*, sendo, portanto, infinitos.

O módulo fornece apenas a distância do afixo até a origem, ou o comprimento do vetor equivalente, mas sabemos que, para que um vetor fique bem determinado, além de seu comprimento, precisamos indicar-lhe uma direção e um sentido. Dentre as várias maneiras de indicar uma direção, uma interessante e que iremos adotar, por padronização, é medir o ângulo que o vetor faz com o eixo real positivo, contado no sentido anti-horário. Tal ângulo será chamado de *argumento* do número complexo. Na figura 4, o argumento do número $z = a + bi$ está sendo representado pela letra grega θ.

Figura 4 – Argumento de um número complexo



Exemplo 1

Os argumentos dos números complexos $v = -2 + 3i$ e $w = 2 - i$ estão assinalados na figura 5 pelas letras α e β, respectivamente.

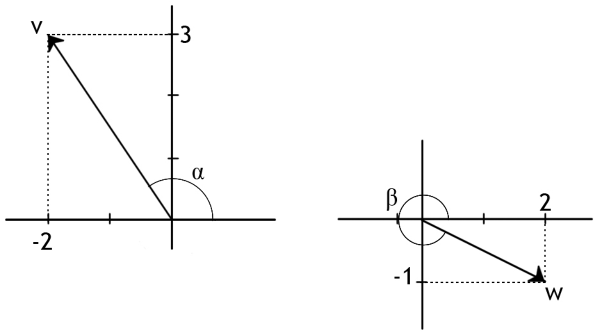


Figura 5 – Argumento dos números complexos v e w.

Dessa feita, podemos localizar o afixo de um número complexo sabendo qual o seu módulo e qual o seu argumento.

Exemplo 2:

Determine a forma algébrica de um número complexo de módulo 2 e argumento $\frac{\pi}{3}$.

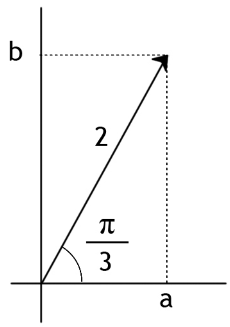
Solução:

Devemos encontrar números reais a e b de acordo com o esquema da figura 6. No triângulo retângulo com catetos de medidas a e b, conhecemos a medida da hipotenusa (módulo do número) e um ângulo interno (argumento), assim podemos estabelecer as relações

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}$, logo $\frac{1}{2} = \frac{a}{2}$ e obtemos $a = 1$;

$\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{b}{2}$, logo $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{b}{2}$ e obtemos $b=\sqrt{3}$. Portanto, o número complexo procurado tem a forma algébrica $z=1+\sqrt{3}i$.

Figura 6 – Esquema de triângulo retângulo



De modo geral, dado um número complexo $z=a+bi$, com *a* e *b* reais, se a representação geométrica de *z* tiver argumento θ e módulo $r>0$, podemos, a partir da figura 4, obter as seguintes relações:

$$\cos\theta=\frac{a}{r}\ \text{ e } \text{sen}\theta=\frac{b}{r}$$

As fórmulas acima nos permitem fazer uma relação entre a forma algébrica de um número complexo e o módulo e o argumento de sua representação geométrica. Equivalentemente temos $a = r.\cos\ \theta$ e $b = r.\text{sen}\ \theta$

A partir da forma algébrica $z = a + bi$ e pela substituição acima, chegamos a $z = r.\cos\ \theta$ + $r.\text{sen}\ \theta.i$. Assim, obtemos ainda a *forma trigonométrica* de um número complexo $z = r.(\cos\ \theta + i.\text{sen}\ \theta)$

Exemplo 3

Encontre o módulo e o argumento do número complexo $z = 2 + 2i$.

Solução: O módulo pode ser encontrado diretamente por $r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Além disso, para o argumento θ, vale $\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\ \theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de onde temos $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Podemos, então, colocar o número *z* na forma trigonométrica $z=2\sqrt{2}.(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\text{sen}\dfrac{\pi}{4})$.

A forma trigonométrica, embora seja mais extensa, será útil especialmente no produto, e consequentemente na potenciação e na radiciação de números complexos.

Já sabemos que o módulo é "compatível" com o produto, ou seja, se os números complexos z e w tiverem módulos r e s, respectivamente, o módulo de $z.w$ será $r.s$.

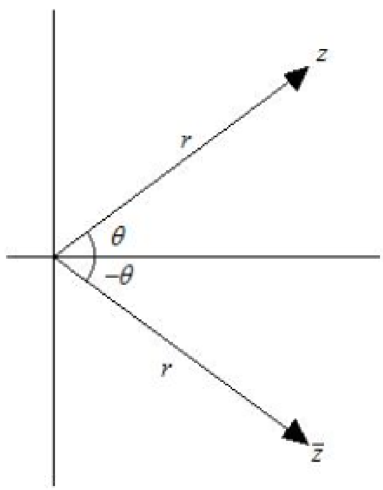
Além disso, suponhamos que z e w tenham argumentos α e β, respectivamente. Suas formas trigonométricas serão $z = r.(\cos\ \theta + i.\text{sen}\ \theta)$ e $w = s.(\cos\ \theta + i.\text{sen}\ \theta)$. Façamos o produto $z.w$:

$$z.w = [r(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)].[s.(\cos\beta + i\text{sen}\ \beta)]$$
$$z.w = r.s.(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha).(\cos\beta + i\text{sen}\ \beta)$$
$$z.w = r.s.(\cos\alpha.\cos\beta + i\cos\alpha.\text{sen}\beta + i\text{sen}\ \alpha.\cos\beta + i^2\text{sen}\ \alpha.\text{sen}\beta)$$
$$z.w = r.s(\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta + i(\cos\alpha.\text{sen}\beta + \text{sen}\alpha.\cos\beta))$$
$$z.w = r.s(\cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}(\alpha+\beta))$$

Isso reforça o fato de que o módulo de $z.w$ vale $r.s$ e fornece uma nova informação: para obter o argumento do produto de dois números complexos, basta somar os argumentos dos fatores.

Fazendo $z = r.(\cos\theta + i\text{sen}\ \theta)$, temos $\overline{z} = r.(\cos\theta - i\text{sen}\ \theta)$ mas como o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, podemos reescrever $\overline{z} = r.(\cos(-\theta) + i.\text{sen}(-\theta))$. Como já sabíamos, um número complexo e seu conjugado têm o mesmo módulo. Agora concluímos que os argumentos são simétricos, como poderá ser visto na figura 7.

Figura 7 – Interpretação geomátrica do conjugado



Na aula passada, vimos que o inverso de um número complexo pode ser obtido por $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2}.\overline{z}$. Usando a forma trigonométrica, podemos colocar

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r^2}.r(\cos\theta - i\text{sen }\theta) = \frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\text{sen}(-\theta))$$

Desse modo, o inverso de um número complexo não nulo z tem módulo igual ao inverso do módulo de z e argumento $-\theta$. Com base nisso, podemos ver como funciona a divisão.

Suponha que o número complexo z tenha módulo r e argumento α, e o número complexo w tenha módulo s e argumento β:

$$\frac{z}{w}=z.\frac{1}{w}=r(\cos\alpha+i\text{sen }\alpha).\frac{1}{s}(\cos(-\beta)+i\text{sen}(-\beta)) =$$

$$\frac{z}{w}=\frac{r}{s}(\cos(\alpha-\beta)+i\text{sen }(\alpha-\beta)).$$

EXEMPLO 4

O argumento do número complexo $\frac{3-3i}{\sqrt{3}+i}$ pode ser encontrado sem que a divisão seja efetuada. Para $z = 3 - 3i$, o argumento vale $\frac{7\pi}{4}$ enquanto que para $w = \sqrt{3}+i$ o argumento é $\frac{\pi}{6}$. Pelo que vimos acima, o argumento de $\frac{z}{w}$ vale $\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$.

ATENÇÃO!

Uma vez que ângulos que diferem de múltiplos inteiros de 2π geram o mesmo valor de seno e de cosseno, um número complexo pode ter vários argumentos θ, $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, etc. Durante o tópico, calculamos o argumento principal, que está entre 0 e 2π.

Resumindo, a multiplicação de números complexos é convertida em soma quando avaliamos os argumentos e a divisão é transformada em subtração dos argumentos. Se denotarmos por arg(z) o argumento do número complexo z, é verdade que arg(z.w) = arg(z) + arg(w) e arg(z/w) = arg(z) – arg(w).

GUARDE BEM ISSO!

O argumento principal é unicamente definido para um número complexo não nulo, pois, caso contrário, o argumento pode ser qualquer número real, uma vez que o módulo já traria a informação da nulidade, independente do que aparecer nas funções seno e cosseno.

TÓPICO 3 Potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$

Objetivos

- Obter uma fórmula para z^n, com n natural, usando a forma trigonométrica
- Encontrar raízes n-ésimas de um número complexo

Vimos que a forma trigonométrica de um número complexo simplifica certos cálculos, em especial em relação ao produto e ao quociente. Usaremos essa "facilidade" para encontrar potências de números complexos, uma vez que a forma algébrica, neste caso, não se mostra tão eficiente.

Como consequência das propriedades sobre módulo e argumento, podemos facilmente concluir que se o módulo de *z* vale *r*, então o módulo de z^n vale r^n, para qualquer *n* natural. Além disso, como o argumento de um produto é a soma dos argumentos dos fatores, podemos observar que

$$\arg(z^n) = \arg(z.z...z) = \arg(z) + \arg(z) + ... + \arg(z) = n\arg(z)$$

Isso quer dizer que se o argumento de *z* é θ, então o argumento de z^n é $n\theta$. Juntando essa informação àquela sobre o módulo, concluímos que se

$$z = r.(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \Rightarrow z^n = r^n.(\cos n\theta + i\text{sen } n\theta)$$

Exemplo 1

Calcule o valor de $(1+i)^4$, inicialmente usando o binômio de Newton e, em seguida, usando a fórmula acima.

Solução: Pela fórmula do binômio de Newton, temos

$$(1+i)^4 = 1^4 + 4.1^3.i + 6.1^2.i^2 + 4.1.i^2 + 4.1.i^3 + 4.i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$$

Para usar a fórmula acima, precisamos encontrar o módulo $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, além do $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo o argumento vale $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Dessa forma:

$$(1+i)^4=(\sqrt{2})^4.(\cos 4.\frac{\pi}{4}+i.sen4.\frac{\pi}{4})=4(\cos\pi+i.sen\pi)=4.(-1+i.0)=-4$$

Pelo exemplo 1, podemos achar que o método de Newton é mais rápido, mas a aparente vantagem do desenvolvimento se deve ao fato de que começamos com o número na forma algébrica e tivemos o trabalho de encontrar seu argumento e seu módulo. Se já tivéssemos a forma trigonométrica, isso não precisaria ser feito. Além disso, mesmo este trabalho seria compensado se o expoente fosse muito grande. Se a mesma questão fosse feita para n = 10, o processo com a forma trigonométrica seria o mesmo, enquanto o desenvolvimento com o binômio de Newton teria onze parcelas.

Exemplo 2

Se z tem módulo 1 e argumento $\dfrac{\pi}{12}$, resulta que z^{18} tem módulo $1^{18}=1$ e argumento $18.\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{3\pi}{2}$. Assim, $z^{18}=1.(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i.sen\dfrac{3\pi}{2})=1.(0-i)=-i$

Exemplo 3

Mostre que o número $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$ é real.

Solução: Usar o binômio de Newton aqui não é muito direto . Calculando antes o módulo de $z=\sqrt{3}-i$, obtemos r = 2. Para o argumento, valem $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\theta=-\dfrac{1}{2}$, ou seja, $\theta=\dfrac{11\pi}{6}$. Assim, z^6 tem módulo 2^6 e argumento $6.\dfrac{11\pi}{6}=11\pi$, de onde tiramos que o argumento **principal** de $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$ é π, o seu vetor correspondente é horizontal e podemos dizer que é um número real. Se formos com a conta "até o fim", obteremos $\left(\sqrt{3}-i\right)^6=2^6.(\cos\pi+i.sen\pi)=64.(-1+i.0)=-64$, ou seja, um número real negativo.

A fórmula $z^n=r^n(\cos n\theta+i.sen\, n\theta)$ é também conhecida como *primeira fórmula de De Moivre*, em homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1667 - 1754) e vale para qualquer n inteiro.

Agora que já sabemos como encontrar potências de números complexos, podemos pensar no problema de encontrar raízes para eles.

Exemplo 4

Encontre todos os números complexos z tais que $z^3 = 1$.

Solução: Como vimos anteriormente, a forma trigonométrica nos permite trabalhar mais diretamente com potências e, por isso, faremos uso dela para resolver este problema. Se $z = r(\cos\theta + i.\text{sen }\theta)$, temos $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i.\text{sen }3\theta)$. Dessa forma, temos a equação $r^3(\cos 3\theta + i.\text{sen }3\theta) = 1$. De onde tiramos que o módulo de z deve ser 1. Quanto ao argumento, devemos ter $\cos 3\theta = 1$ e $\text{sen }3\theta = 0$, o que equivale a $3\theta = 2k\pi$, para qualquer número inteiro k. Fazendo $k = 0$, temos $\theta = 0$ e $z = 1.(\cos 0 + i.\text{sen } 0) = 1$, a raiz real do problema. Com $k = 1$, temos $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e $z = 1.(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen }\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Aplicando $k = 2$, temos $\theta = \frac{4\pi}{3}$ e $z = 1.(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\text{sen }\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Fazendo $k = 3$, temos $\theta = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ e voltamos ao primeiro valor encontrado. Com $k = 5$, voltamos ao segundo valor encontrado e assim sucessivamente, de modo que, tendo como universo o conjunto dos números complexos, a equação $z^3 = 1$ solução

$$\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

VOCÊ SABIA?

Moivre abriu caminho para o desenvolvimento da Geometria Analítica e a Teoria de Probabilidade. Ele publicou A Doutrina de Chance em 1718. A definição de independência estatística aparece neste livro junto com muitos problemas com dados e outros jogos. Ele também investigou estatísticas de mortalidade e a fundação da teoria de anuidades. Para saber mais sobre este matamático francês, acesse o site http://www.somatematica.com.br/biograf/moivre.php

O procedimento realizado no exemplo 4 pode ser generalizado mesmo que o resultado da potência não seja um número real. O que devemos fazer é apenas obter a forma trigonométrica, comparar os módulos e encontrar os argumentos convenientes, a partir de uma equação com as funções seno e cosseno. Consideremos o seguinte:

Problema Geral

Dado número complexo w e o número natural n, encontre todos os números complexos z tais que $z^n = w$.

O caso $w = 0$ é imediato, pois $z^n = 0$ se, e somente se, $z = 0$. Consideraremos a partir daqui $w \neq 0$ em sua forma trigonométrica $w = r.(\cos\theta + i.\text{sen } \theta)$. Se $z = s.(\cos\alpha + i.\text{sen } \alpha)$, tem-se $z^n = s^n.(\cos n\alpha + i.\text{sen } n\alpha)$. Para os números reais positivos r e s, obtemos a equação real $s^n = r$, de onde $s = \sqrt[n]{r}$ a raiz n-ésima real positiva do número r. Em relação a $n\alpha$ e θ, sabemos que eles devem ter mesmo seno e mesmo cosseno, diferindo, portanto, de múltiplos inteiros de 2π, ou seja, $n\alpha = \theta + 2k\pi$, de onde concluímos $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, em que k varia nos números inteiros, o que nos levaria a pensar que a solução para o problema tem infinitos elementos. Porém sempre que dois inteiros diferirem por um múltiplo de n, os argumentos $\alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ divergirão por múltiplos inteiros de 2π, não resultando em números complexos diferentes. Assim, vamos considerar apenas os valores $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, resultando nas n soluções para o problema. Resumindo: se $w = r.(\cos\ \theta + i.\ \text{sen}\ \theta)$, há n números complexos z tais que $z^n = w$. São eles

$$z_k = \sqrt[n]{r}.(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i.\text{sen}(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}))\ \text{,para } k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

A expressão acima é conhecida como *segunda fórmula de De Moivre*.

Exemplo 5

Determine todos os números complexos z tais que $z^6 = 8$.

Solução: Veja que 8 tem módulo 8 e argumento 0, assim suas "raízes sextas" serão do tipo $z_k = \sqrt[6]{8}.(\cos(\frac{0}{6} + \frac{2k\pi}{6}) + i.sen\ (\frac{0}{6} + \frac{2k\pi}{6}))$,para $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Simplificando um pouco mais antes usar os valores de k, temos $z_k = \sqrt{2}.(\cos\frac{k\pi}{3} + i.sen\ \frac{k\pi}{3})$. Acompanhe:

Para $k = 0$, temos $z_0 = \sqrt{2}.(\cos 0 + i\text{sen}0) = \sqrt{2}$.

Para $k = 1$, temos $z_1 = \sqrt{2}.(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$.

Para $k = 2$, temos $z_2 = \sqrt{2}.(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

Para $k = 3$, temos $z_3 = \sqrt{2}.(\cos\frac{3\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{3\pi}{3}) = \sqrt{2}(-1 + i.0) = -\sqrt{2}$

Para $k = 4$, temos $z_4 = \sqrt{2}.(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{2}(-\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{6}}{2}$

Para $k = 5$, temos $z_5 = \sqrt{2}.(\cos\frac{5\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{3}) = \sqrt{2}(\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Como todas as soluções de $z^n = w$ possuem o mesmo módulo, seus afixos estão à mesma distância da origem, contidos em uma circunferência de raio r. Além disso, os argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$. Isso quer dizer que eles estão igualmente espaçados nessa circunferência sendo, portanto, os vértices de um polígono **regular** de n lados inscrito na circunferência de centro na origem e raio r (para $n > 2$). Por exemplo, as soluções de $z^5 = 1$ possuem todas módulo 1 e argumentos distantes $\frac{2\pi}{5}$, o que caracteriza um pentágono regular.

Uma vez que a solução da equação $z^n = w$ possui n elementos, o símbolo $\sqrt[n]{w}$, para w complexo, denota um conjunto e não apenas um número. De forma que, por exemplo, no conjunto dos números complexos, $\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. Nesse sentido, há de se tomar cuidado com o símbolo de raiz, pois ele não funciona da mesma forma que nos números reais. Do contrário, poderíamos obter resultados bem estranhos, como $-1 = i^2 = i.i = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(.-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1$. O erro aqui foi afirmar que $i = \sqrt{-1}$, enquanto o primeiro é um número e o segundo é um conjunto. Assim, mesmo que definíssemos $i = \sqrt{-1}$, essa convenção não estaria de acordo com as propriedades com radicais, como se vê na expressão acima.

AULA 6 | Polinômios I

Olá!

Vamos continuar o nosso estudo, agora abordando um assunto novo, mas que está fortemente ligado aos números complexos: os polinômios. Em linhas gerais, uma função é dita polinomial quando o resultado for obtido a partir da variável através de uma sequência finita de operações algébricas (multiplicações e somas). Já conhecemos os casos mais simples, que são as “funções de primeiro e segundo graus” e aqui generalizaremos o caso para qualquer expoente natural e para coeficientes complexos.

Objetivos

- Fornecer os fundamentos básicos para o estudo de polinômios
- Obter as propriedades sobre as operações elementares

TÓPICO 1

Definições Iniciais

Objetivos

- Definir função polinomial
- Observar critérios de identidade de polinômios e independência da variável
- Obter a soma dos coeficientes

Dizemos que um *monômio* na variável x é uma expressão do tipo $M(x) = ax^n$, em que o número complexo a é chamado de *coeficiente numérico* ou simplesmente *coeficiente* do monômio e n é um número natural. O *grau* do monômio é definido como n, se $a \neq 0$ e não é definido, caso contrário.

Exemplo 1

$A(y) = 4y^5$, é um monômio de grau 5 na variável y

$B(x) = 10x^{n-3}$ é um monômio na variável x se $n \geq 3$

$C(z) = (b-2)z^3$ é um monômio de grau 3 na variável z, para qualquer valor de $b \neq 2$

$D(w) = 2i$ é um monômio de grau 0 na variável w

$E(t) = 0t^3$ é um monômio na variável t, sem grau definido.

Um monômio pode ter mais de uma variável e, caso o seu coeficiente seja não nulo, o grau é definido como a soma dos coeficientes das variáveis, de modo que $4x^2y^3z$ é um monômio de grau 6. Igualmente poderemos considerar casos nos quais os coeficientes são números de um conjunto específico, com estruturas algébricas particulares. Nosso estudo, entretanto, se restringirá aos termos com apenas uma variável e com coeficientes complexos (lembre-se bem de que os números reais são complexos). Funções com mais de uma variável ou com coeficientes não complexos serão assunto de disciplinas posteriores.

Um *polinômio* na variável x é uma soma de uma quantidade finita de monômios em x, ou seja, uma função $p\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita *polinomial* quando é do tipo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, em que os coeficientes $a_n, \ldots, a_1, a_0$ são números complexos. Além disso, para o valor específico *k*, o *valor numérico de p em k* é simplesmente *f*(*k*).

Exemplo 2a

A função $g(x) = x^2 - 3x + 2$ é um polinômio com $a_3 = 1$, $a_1 = -3$ e $a_0 = 2$. Uma vez que $g(2) = 2^3 - 3.2 + 2 = 4$, podemos dizer que o valor numérico de $g(x)$ no 2 é 4. Analogamente, podemos dizer que $g(0) = 2$ e $g(1) = 0$.

Exemplo 2b

A função $h(x) = x^2 + 4$ é um polinômio com $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$. Para este polinômio, vale $h(3) = 13$, $h(i) = 3$ e $h(1 + i) = 4 + 2i$.

Exemplo 2c

A função $q(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \cos x$ não é um polinômio.

Dizemos que o número *a* é uma *raiz* do polinômio *p*(*x*), ou simplesmente de *p*, quando seu valor numérico correspondente é 0, ou seja, $p(a) = 0$. Para o exemplo 2a, o número 1 é uma raiz de $g(x)$ e é imediato verificar que $2i$ é uma raiz de $h(x)$. Encontrar raízes para polinômios foi um dos motivos para a extensão que começou nos números naturais e levou aos complexos, como vimos nas aulas anteriores.

Os valores numéricos para $x = 0$ e para $x = 1$ são notáveis, pois

$p(0) = a_0$, o termo constantes (ou independente) do polinômio.

$p(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots. + a_1 + a_0$, a soma dos coeficientes.

Um polinômio é dito *identicamente nulo* (representamos por $p \equiv 0$) quando todos os números complexos forem suas raízes, ou seja $p(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{C}$. Veremos mais tarde que, se um dos coeficientes de um polinômio for diferente de zero, então a quantidade de raízes é finita. Assim, podemos concluir que, para que um polinômio seja identicamente nulo, necessariamente todos os seus coeficientes devem ser iguais a 0.

Exemplo 3

Determine os valores reais de *a*, *b* e *c* para que o polinômio $p(x) = ax^2 + 3x - bx + 4c + 2$ seja identicamente nulo.

Solução: Podemos reescrever $p(x) = ax^2 + (3-b)x + 4c + 2$, mas, para que ele seja identicamente nulo, devemos ter $a = 0$, $b = 3$ e $c = -2$.

Analogamente, dizemos que dois polinômios são *idênticos* (ou iguais) quando eles assumirem valores numéricos iguais para o mesmo valor da variável. Isso somente é possível quando os coeficientes correspondentes são iguais.

Exemplo 4

Para que os polinômios $x^3 - 2x + c$ e $ax^3 + bx^2 + dx + 3$ sejam idênticos, devemos ter $a = 1$, $b = 0$, $c = 3$ e $d = -2$.

O *grau* de um polinômio não identicamente nulo é definido como o maior grau das suas parcelas. Equivalentemente, o grau é o maior expoente da variável que possui coeficiente diferente de zero. Denotamos o grau do polinômio $p(x)$ por $\mathrm{gr}(p)$ ou ∂p.

$$\partial p = n \Leftrightarrow a_n \neq 0 \ e \ a_k = 0 \ se \ k > n$$

Exemplo 5

O polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ tem grau 2 e o polinômio $g(x) = 3x^2 - x^3$ tem grau 3, enquanto o polinômio $h(x) = 4$ tem grau 0.

Observações

1. Não é definido grau para o polinômio identicamente nulo.

2. Se $\partial p = 0$ ou $p \equiv 0$, dizemos que o polinômio é *constante* ou *independente de x*.

3. O coeficiente do termo de maior grau é chamado de *coeficiente líder* e, no caso em que ele for igual a 1, dizemos que o polinômio é *mônico*.

4. Um polinômio de grau n tem no máximo $n + 1$ monômios não nulos.

O conjunto de todos os polinômios na variável x e com coeficientes complexos pode ser representado por $\mathbb{C}[x]$. Se quisermos restringir-nos a polinômios com coeficientes reais, podemos falar de $\mathbb{R}[x]$ e assim analogamente com qualquer conjunto numérico.

Interpretando os números complexos como polinômios constantes, podemos dizer que $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x]$. Com essas noções iniciais, podemos passar para o estudo das operações entre polinômios, no qual veremos que $\mathbb{C}[x]$ tem uma estrutura semelhante a Z no que diz respeito ao fechamento da soma e da multiplicação e do processo de divisão.

TÓPICO 2

Operações entre polinômios

OBJETIVOS

- Verificar como as operações elementares se processam entre polinômios
- Analisar o grau dos resultados
- Verificar o fechamento de $\mathbb{C}[x]$ em relação à soma e ao produto

Definimos C[x] como o conjunto de polinômios na variável x e com coeficientes complexos. Ou seja, se $p \in$ C[x], existem números complexos (coeficientes) a_n, ..., a_1, a_0, tais que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + \mathrm{a}_0$. Neste tópico, veremos como realizar operações entre polinômios. De maneira bem simplista, vamos usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e o que conhecemos sobre potências.

Inicialmente, temos que a soma de dois polinômios é feita termo a termo, apenas com o agrupamento de termos de mesmo grau. Com esta definição, o resultado da soma de dois polinômios é um polinômio. A soma é uma operação comutativa, associativa e com existência de elemento neutro, o polinômio identicamente nulo, e de elemento inverso para qualquer polinômio, o que caracteriza $\mathbb{C}[x]$ como um *grupo aditivo*.

EXEMPLO 1

Dados os polinômios $p(x) = 3x^2 - 7$, q(x)=x+3 e r(x)=2x-3x^2, determine p + q, q + r e p + r.

Solução:

$$p + q = 3x^2 - 7 + (x+3) = 3x^2 + x - 4$$
$$q + r = \mathrm{x+3} + (\mathrm{2x\text{-}3x^2}) = -3x^2 + 3x + 3$$
$$p + r = 3x^2 - 7 + (\mathrm{2x\text{-}3x^2}) = 2x + 7$$

Como pode ser percebido no exemplo acima, podemos ter dois polinômios de grau 2, cuja soma tem grau 1, bastando para isso que os coeficientes líderes dos dois polinômios sejam simétricos. Pode acontecer que a soma de dois polinômios não nulos gere o polinômio identicamente nulo. O que nunca pode acontecer é que o resultado da soma de polinômios tenha grau maior do que o máximo do grau das parcelas. Resumindo:

$$\partial(p+q) \leq \max\{\partial p + \partial q\}$$

A multiplicação de polinômios será feita de modo a manter a distributividade do produto em relação à soma e o fato base $(ax^m).(bx^n) = abx^{m+n}$.

Exemplo 2

Desenvolva $(3x^2 - 2x + 1).(4x - 8)$.

Solução: $(3x^2 - 2x + 1).(4x - 8) = 12x^3 - 24x^2 - 8x^2 + 16x + 4x - 8$

$= 12x^4 - 32x^3 + 20x^2 + 16x - 8$

Com a multiplicação definida dessa forma, $\mathbb{C}[x]$ é fechado em relação ao produto, a multiplicação de polinômios é comutativa, associativa e possui elemento neutro, o polinômio $p(x) = 1$. Dizemos, por isso e pelo visto em relação à adição, que $\mathbb{C}[x]$ é uma estrutura algébrica chamada *anel comutativo com unidade*.

No exemplo acima, o grau do resultado foi igual à soma dos graus dos fatores. Caso um dos fatores fosse o polinômio identicamente nulo, o resultado seria, também, identicamente nulo, caso em que não fazemos estudo do grau. Se os graus de p e q estiverem definidos, o grau de $p.q$ seria igual à soma dos graus de p e q. Ou seja:

$$\partial(p.q) = \partial p + \partial q$$

Exemplo 3

O polinômio $p(x) = (3x^3 + 5).(2x - 4).(x^4 + x + 2)$ tem grau 3 + 1 + 4 = 8. Além disso, não precisamos fazer o desenvolvimento para saber o termo constante e a soma dos coeficientes, pois eles valem $p(0)$ e $p(1)$, respectivamente. Temos $p(0) = (3.0^3 + 5)(2.0 - 4)(0^4 + 0 + 2) = 5.(-4).2 = -40$ e $p(1) = (3.1^3 + 5)(2.1 - 4)(1^4 + 1 + 2) = 8.(-2).4 = -64$.

Exemplo 4

Dados $p(x^3 + 3x - 4)$, encontre um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = q(x).(x - 1)$.

Solução: Inicialmente, devemos ter $\partial p = \partial q + \partial(x - 1) \Rightarrow 3 = \partial q + 1$, de onde concluímos que o grau de q é 2 e podemos escrever $q(x) = ax^2 + bx + c$, com coeficientes a, b e c a determinar. Façamos:

$$\begin{aligned}
&x^3 + 3x - 4 = q(x).(x-1) = (ax^2 + bx + c).(x-1) \\
&ax^3 + ax^2 + bx^2 - bx + cx - c = \\
&ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c
\end{aligned}$$

Para que os polinômios sejam idênticos, devemos ter $a = 1$, $-a + b = 0$ (de onde tiramos $b = 1$), $-b + c = 3$ (de onde tiramos $c = 4$) e, por último, $-c = -4$, que corrobora com o determinado. Assim, obtemos $q(x) = x^2 + x + 4$. Desse modo, podemos dizer que $\dfrac{x^3 + 3x - 4}{x - 1} = x^2 + x + 4$.

O exemplo acima sugere um modo de fazer a divisão entre dois polinômios, mas nem sempre ela é possível. Um caso bem simples que ilustra esse fato é a busca por inverso multiplicativo.

Exemplo 5

Encontre o inverso multiplicativo do polinômio $p(x) = x^2$.

Solução: Devemos encontrar um polinômio $q(x)$ tal que $p(x).q(x) = 1$. Os polinômios constantes têm grau 0, logo $\partial p + \partial q = 0 \Rightarrow 2 + \partial q = 0$, mas como o grau de um polinômio é um número natural, sabemos que tal $q(x)$ não existe.

Exemplo 6:

Dados $p(x) = x^2 + 2x + 4$, encontre um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = q(x).(x + 1)$.

Solução: Primeiro, uma investigação a respeito do grau de q nos leva a $\partial p = \partial q + \partial (x + 1) \Rightarrow 2 = \partial q + 1$, logo q deve ter grau 1, sendo da forma $q(x) = ax + b$. Comparemos $p(x) = x^2 + 2x + 4 = (ax + b).(x + 1) = ax^2 + ax + bx + b$, que resultaria nas equação $a = 1$, $a + b = 2$ e $b = 4$, que não podem ser satisfeitas simultaneamente, impossibilitando, assim, a existência de um $q(x)$ com a propriedade procurada.

Assim, em $\mathbb{C}[x]$ nem sempre a divisão é possível, mas podemos pensar em algo semelhante ao que acontece com números inteiros, o que será feito no tópico seguinte.

TÓPICO 3 Divisão e o teorema do resto

Objetivos

- Estabelecer relações entre a divisão de polinômios e a divisão de inteiros
- Verificar critérios de divisibilidade
- Analisar as consequências do Teorema do Resto

Já sabemos o que é um polinômio e como as operações de soma e produto se processam em C[x]. Também vimos que nem sempre a divisão é possível, ou seja, dados os polinômios $A(x)$ e $B(x)$, nem sempre é possível encontrar um polinômio $q \in$ C[x] tal que $A(x) = B(x).q(x)$. Por isso o conjunto dos polinômios e o conjunto dos números inteiros são parecidos. Por causa disso, podemos proceder como na divisão de números inteiros, ou seja, dividir $A(x)$, chamado de *dividendo*, por $B(x)$, o *divisor*, é determinar polinômios $q(x)$ e $r(x)$, chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão, tais que

$$A(x) = B(x).q(x) + r(x)$$

Com o intuito de que o quociente e o resto sejam unicamente determinados nos números inteiros, exigimos que o resto seja menor que o módulo do divisor, uma maneira de "comparar" polinômios é através do grau, isto é, queremos $\partial r < \partial B$ ou $r=0$. Aqui podemos usar a mesma terminologia da divisão de inteiros (divisão exata, divisível por, divisor, múltiplo).

Vale notar que, se o dividendo for identicamente nulo ou tiver grau menor que o divisor, a divisão é feita de maneira imediata, sendo o quociente identicamente nulo e o resto igual ao próprio divisor. Assim nos ateremos aos casos em que o grau do dividendo é maior ou igual ao do divisor. Considerando, então, $\partial A \geq \partial B$ e $\partial r < \partial B$ ou $r=0$, para que a igualdade $A(x) = B(x).q(x) + r(x)$ ocorra, devemos ter $\partial A = \partial(B.q+r) = \partial(B.q) = \partial B + \partial q$, ou seja, a relação entre os graus dos fatores nos leva a dizer que o grau do quociente é igual ao grau do dividendo menos o grau do divisor. Vejamos uma maneira de proceder.

Exemplo 1

Encontre o quociente e o resto da divisão de $f(x) = x^2 - 4x + 2$ por $g(x) = x + 1$.

Solução: Devemos encontrar polinômios q e r tais que $f = g.q + r$. Como $\partial f = 3$ e $\partial g = 1$, é necessário ter $\partial q = \partial f - \partial g = 2$, ou seja, $q(x) = ax^2 + bx + c$, e $\partial r < 1$, sendo, portanto, constante, façamos $r(x) = d$. Nosso trabalho, agora, é encontrar os números a, b e c na igualdade de polinômios:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x).q(x) + r(x) \\ &= (x+1).(ax^2 + bx + c) + d \\ &= \mathrm{a}x^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c + d \\ x^3 - 4x + 2 &= \mathrm{a}x^3 + (b+c)x^2 + (b+c)x + c + d \end{aligned}$$

A igualdade se verifica quando os coeficientes correspondentes são iguais, ou seja:

$a = 1$

$b + a = 0$, de onde podemos concluir que $b = -1$

$c + b = -4$, de onde podemos concluir que $c = -3$

$c + d = 2$, de onde podemos concluir que $d = 5$.

O quociente é, desse modo, $q(x) = x^2 - x - 3$ e o resto é $r(x) = 5$. Podemos, então, escrever $x^3 - 4x + 2 = (x+1).(x^2 - x - 3) + 5$.

O método empregado no exemplo 1 é chamado de *método de Descartes* ou *método dos coeficientes a determinar*. Vamos usá-lo mais uma vez no exemplo abaixo:

SAIBA MAIS

No site:https://educacao.uol.com.br/biografias/rene-descartes.htm você encontrará mais informações sobre a vida e obra do matemático René Descartes.

Exemplo 2

Determine o valor real de k para que o polinômio $A(x) = x^2 - 6x + k$ seja divisível por $B(x) = x - 1$.

Solução: Para que A seja divisível por B, o resto deve ser identicamente nulo, ou seja, deve existir um polinômio q tal que $A = B.q$. Um estudo sobre o grau nos fornece $\partial q = \partial A - \partial B = 3 - 1 = 2$. Devem existir números a, b e c para que $q(x) = ax^2 + bx + c$ satisfaça a relação

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + k = (x-1).(ax^2 + bx + c) \\
&= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\
&= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c
\end{aligned}
$$

Se compararmos os coeficientes correspondentes, teremos

$a = 1$

$b - a = 0$, de onde tiramos $b = 1$

$c - b = -6$, de onde tiramos $c = -5$ e por último, é necessário que $k = -c$, ou seja, $k = 5$.

Outro método para determinar o quociente e o resto na divisão de polinômios é o *método de chaves*, semelhante ao método empregado na divisão de números inteiros com muitos algarismos, começando por dividir apenas os termos de maior grau e diminuindo o grau do dividendo. Acompanhe:

Exemplo 3

Dividir, usando o método de chaves, o polinômio $3x^3 - 2x^2 + x + 1$ por $x^2 - x + 3$.

Solução: Primeiro posicionamos o dividendo e o divisor como se fossem números inteiros de acordo com o esquema:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 - 2x^2 + x + 1 & x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Como o grau do quociente deve ser 1, o seu primeiro termo é da forma ax. Para determinar o valor de a, dividimos os coeficientes líderes $3/1 = 1$. Assim devemos colocar $3x$ no espaço reservado ao quociente, fazer o produto pelo divisor $(3x.(x^2 - x + 3) = 3x^3 - 3x^2 + 9x)$ e colocar o resultado logo abaixo do dividendo, diminuindo-o. Veja:

$$
\begin{array}{c|l}
3x^3 - 2x^2 + x + 1 & x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2}
-(3x^3 - 3x^2 + 9x) & 3x \\ \cline{1-1}
x^2 - 8x + 1 &
\end{array}
$$

Aqui obtemos $x^2 - 8x + 1$, que é chamado *resto parcial*. Como o grau do resto parcial não é menor que o grau do divisor, o processo deve ser repetido. O próximo termo do quociente deve ser 1. Repetindo o processo, obtemos:

$$
\begin{array}{c|l}
3x^3-2x^2+x+1 & x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
-(3x^3-3x^2+9x) & 3x+1 \\ \cline{1-1}
x^2-8x+1 & \\
-\left(x-x+3\right) & \\ \cline{1-1}
-7x-2 &
\end{array}
$$

Como o resto parcial obtido tem grau menor que o do divisor, a divisão é encerrada e obtemos $q(x) = 3x + 1$ e $r(x) = -7x - 2$.

Exemplo 4

Veja como fica, pelo método de chaves, a divisão do exemplo 1:

$$
\begin{array}{c|c}
x^3-4x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\left(x^3+x^2\right) & x^2-x-3 \\ \cline{1-1}
-x^2-4x+2 & \\
-(-x^2-x) & \\ \cline{1-1}
-3x+2 & \\
-\left(-3x+2\right) & \\ \cline{1-1}
5 &
\end{array}
$$

Naturalmente, obtivemos o mesmo resto e o mesmo quociente.

A partir de agora, vamos trabalhar com o caso no qual o divisor é da forma $x-a$, ou seja, um polinômio mônico de primeiro grau. Se o polinômio $p(x)$, de grau $n \geq 1$, for dividido por $x - a$, sabemos que o quociente tem grau $n - 1$ e o resto tem grau 0 ou é identicamente nulo, ou seja, o resto é constante. Por exemplo, se dividirmos $p(x) = x^3 + 2$ por $x - 1$, o quociente é $x^2 + x + 1$ e o resto é 3, que é o mesmo valor de $p(1)$. Essa aparente coincidência é explicada pelo Teorema do Resto, que segue:

Teorema do Resto: Na divisão do polinômio $p(x)$ por $x-a$, o resto vale $p(a)$.

Demonstração: O quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $p(x)$ por $x-a$ satisfazem a igualdade $p(x)=q(x).(x-a)+r(x)$. O valor numérico de $p(x)$ para a vale $p(a)=q(a)\cdot(a-a)+r(a)=r(a)$, mas, como o resto deve ser constante e $r(a)=p(a)$, tem-se $r(x)=p(a)$ para qualquer número complexo a.

Como pode ser verificado no exemplo 4, quando dividimos o polinômio p $p(x)=x^2-4x+2$ por $x+1$, obtivemos resto igual a $5=p(-1)$, já que $x+1=x-(-1)$.

Exemplo 5

Determine a soma dos coeficientes do quociente da divisão de x^5+32 por $x-2$.

Solução: O valor numérico de x^5+32 para $x=2$ vale 64 e, de acordo com o teorema, esse é o valor do resto. Assim, podemos escrever

$$x^5+32=q(x)(x-2)+64$$

Fazendo $x=1$ na expressão acima, obtemos $1^5+32=q(1)(1-2)+64$, de onde obtemos $q(1)=31$, que é a soma dos coeficientes, conforme visto no tópico 1. O fato pode ser confirmado pela divisão direta, mas fazer a divisão pelo método das chaves ou pelo método de Descartes com um dividendo de grau 5 é bem trabalhoso.

VOCÊ SABIA?

Jean Le Rond D'Alembert nasceu no dia 17 de novembro em Paris. Ainda pequeno, foi abandonado na igreja de St. Jean Baptiste le Rond localizada perto de Notre Dame. Recebeu o mesmo nome do local onde foi encontrado - Le Rond - e D'Alembert, seu sobrenome, foi acrescentado mais tarde quando iniciou seus estudos. Mais informações no site: http://ecalculo.if.usp.br/historia/dalembert.htm

Como consequência direta do Teorema do Resto, há um resultado conhecido como *Teorema de D'Alembert*. Assim, "um polinômio $p(x)$ é divisível por $x-a$ se, e somente se, $p(a)=0$". Isso é válido porque, se a divisão é exata, o resto vale 0 e, dessa forma, a é raiz de p. Reciprocamente, se a é raiz do polinômio, o resto é 0 e a divisão é exata.

Exemplo 6

Determine os valores reais de a e b para que o polinômio $p(x) = x^5 - 3x^2 + ax + b$ seja divisível por $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Solução: Como $q(x)$ é um polinômio mônico do segundo grau, podemos encontrar suas raízes facilmente. São elas 1 e 2, e ele pode ser escrito como $q(x) = (x - 1)(x - 2)$. Assim, ser divisível por $q(x)$ é ser divisível simultaneamente por $x - 1$ e por $x - 2$. Pelo teorema de D'Alembert, devemos ter $p(1) = p(2) = 0$, mas:

$$p(1) = 0 \Rightarrow 1^5 - 3.1^2 + a.1 + b = a + b - 2 = 0 \Rightarrow a + b = 2$$

$$p(2) = 0 \Rightarrow 2^5 - 3.2^2 + a.2 + b = a + b + 20 = 0 \Rightarrow 2a + b = -20$$

Para que as duas equações acima sejam satisfeitas, é necessário que $a = -22$ e $b = 24$.

Exemplo 7:

Obtenha um polinômio mônico de segundo grau que seja divisível por $x - 3$ e cujos restos nas divisões por $x - 2$ e $x + 3$ são iguais.

Solução:

Um polinômio mônico de segundo grau é da forma $p(x) = x^2 + bx + c$, com b e c números complexos. O resto da divisão de p por $x - 2$ é $p(2) = 4 + 2b + c$ e o resto da divisão de p por $x + 3$ é $p(-3) = 9 - 3b + c$. Assim, temos a igualdade $4 + 2b + c = 9 - 3b + c$, de onde concluímos que b vale 1. Para que p seja divisível por $x - 3$, devemos ter $p(3) = 0$, ou seja, $9 + 3b + c = 0$, mas como $b = 1$, chegamos ao resultado $c = -12$.

O teorema de D'Alembert pode ser usado para se verificar que a quantidade de raízes de um polinômio não identicamente nulo é finita, não superando o grau do polinômio.

Proposição: Um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas.

Demonstração: Suponha que o polinômio p seja tal que $\partial p = n$ e que ele possua m raízes distintas. Se $x_1, x_2, ..., x_m$ são essas raízes, pelo teorema de D'Alembert, p é divisível por $x - x_1, x - x_2, ..., x - x_m$, podendo, assim, ser rescrito como $p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_m) \cdot q(x)$. Pela relação entre os graus, temos

$$\partial p = \partial\left((x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_m) \cdot qx\right) =$$
$$= \partial(x - x_1) + \partial(x - x_2) + ... + \partial(x - x_m) + \partial q = 1 + 1 + ... + 1 + \partial q = m + \partial q$$

e, como o grau é um número natural e temos $\partial p = m + \partial q$, vale $n \geq m$, ou seja, a quantidade de raízes nunca supera o grau. Com isso, podemos concluir que a quantidade de raízes de um polinômio não identicamente nulo é finita.

Como vimos, nem sempre é necessário fazer a divisão para se obter informações relevantes a respeito do quociente e do resto, mas, quando for necessário obter todos os seus coeficientes, há de se utilizar um dos métodos descritos nesta aula. No caso específico de o divisor ser da forma $x - a$, já podemos começar sabendo qual vai ser o resto. Além disso, há um método simples e direto de encontrar os coeficientes do quociente, chamado de *Dispositivo de Briot-Ruffini*, que será explicado apenas na próxima aula.

SAIBA MAIS

Obtenha mais informações sobre Funções polinomiais acessando o ste: http://www.matematica.pucminas.br/oficinas/cap03.pdf

AULA 7 | Polinômios II

Olá!

Nesta aula e pelo resto do nosso curso, vamos continuar dando atenção às funções polinomiais, analisando relações entre seus coeficientes e suas raízes, dependendo do conjunto numérico em que eles estejam. Estudaremos casos específicos em $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$, conheceremos a ligação mais forte que há entre os polinômios e os números complexos, além de descrever um método prático para se realizar a divisão quando o divisor for de grau 1. Já são muitas as definições com as quais vamos trabalhar, portanto é importante que se tenha em mente todos os termos com os quais trabalhamos na aula passada, especialmente grau e raízes.

Objetivos

- Relacionar as raízes e os coeficientes de um polinômio
- Estabelecer critérios sobre as raízes em cada conjunto numérico

TÓPICO 1

Dispositivo Prático

Objetivo

- Realizar de maneira prática a divisão por polinômios de primeiro grau

Como visto na aula passada, realizar a divisão entre os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ consiste em determinar um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$ de tal forma que $A(x) = B(x).q(x) + r(x)$, com a restrição $\partial r < \partial B$ ou $r = 0$. Quando o resto é identicamente nulo, a divisão é dita *exata* e, neste caso, as raízes de $B(x)$ também são raízes de $A(x)$.

Quando o divisor tem grau 1, o resto necessariamente é constante, pois deve ser identicamente nulo ou ter grau 0. Vamos continuar estudando o caso da divisão por polinômios mônicos de primeiro grau, notadamente os da forma $x - a$, de onde tiramos a (única) raiz diretamente.

Exemplo 1a

O número 5 é raiz do polinômio $f(x) = x - 5$ e o número –3 é raiz do polinômio $g(x) = x + 3$, podemos até escrever $g(x) = x - (-3)$.

SAIBA MAIS

Obtenha mais informações sobre o Teorema de D'Alembert, acessando o site http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/teorema-dalembert.htm

Exemplo 1b

Para o polinômio $s(x) = x^5 - 32$ vale $s(2) = 0$, logo, pelo Teorema do Resto, $s(x)$ deixa resto 0 na divisão por $x - 2$. Podemos, usando o método de Descartes, obter o quociente $q(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$.

Este estudo é importante, pois, se soubermos que o número a é raiz do polinômio $p(x)$, temos, pelo teorema de D'Alembert, que $p(x)$ é divisível por $x - a$, podendo ser escrito como $p(x) = (x-a).q(x)$, sendo $\partial q = \partial p - 1$, ou seja, o grau de q é menor que o de p e o problema de encontrar as raízes vai diminuindo de complexidade.

Exemplo 2

Sabendo que o número 3 é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + k$, em que k é um número real, encontre todas as outras raízes.

Solução: Como 3 é raiz, vale $p(3) = 0$, ou seja, $3^3 - 7.3^2 + 7.3 + k = 0$, de onde tiramos $k = 15$. Assim temos todos os coeficientes de p e sabemos que ele é divisível por $x - 3$. Fazendo a divisão por algum dos métodos já vistos, encontramos quociente $x^2 - 4x - 5$ e resto identicamente nulo (naturalmente). Desse modo, podemos escrever $p(x) = (x-3).(x^2 - 4x - 5)$ e encontrar as raízes de p equivale a resolver a equação $(x-3).(x^2-4x-5) = 0$, mas, para que o produto seja zero, um dos fatores deve ser igual a zero, de onde tiramos:

$x - 3 = 0$, que conduz à raiz que já sabíamos, ou

$x^2 - 4x - 5 = 0$, que leva a $x = 5$ ou $x = -1$. A partir daí, temos as raízes 3, 5 e -1. Como $\partial p = 3$, pelo que foi discutido no final da aula passada (a quantidade máxima de raízes de um polinômio é o seu grau), não há outra raiz a ser encontrada.

O método do exemplo anterior é interessante, mas exige que saibamos uma raiz de antemão, algo que podemos determinar através de testes, caso haja raízes inteiras e de módulo pequeno. Antes de analisarmos métodos mais eficazes para testar raízes de um polinômio, vejamos como fazer a divisão por $x - a$ de modo prático.

Comecemos, então, dividindo o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ por $x - a$, usando o método dos coeficientes a determinar. Uma vez que o quociente terá grau $n - 1$, podemos escrevê-lo $q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0$ e forçar a igualdade $p(x) = q(x).(x-a) + r(x)$, lembrando que o resto é constante. Temos

$$q(x).(x-a) + r(x) = (q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \dots + q_1 x + q_0)(x-a) + r(x)$$

$$= q_{n-1}x^n - aq_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-1} - aq_{n-2}x^{n-2} + \dots + q_0 x - aq_0 + r(x)$$

$$= a_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1}).x^{n-1} + (q_{n-3} - aq_{n-2})x^{n-2} + \dots + (q_0 - aq_1)x + r(x) - aq_0$$

Agora, se compararmos os coeficientes com os de $p(x)$, encontraremos

$a_{n-1} = a_n$,

ou seja, o primeiro coeficiente do quociente é igual ao do dividendo.

$q_{n-2} - aq_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = aq_{n-1} + a_{n-1}$

Assim, o segundo coeficiente do quociente será obtido a partir do primeiro, multiplicando-o por a e somando-o com o próximo coeficiente de $p(x)$.

$q_{n-3} - aq_{n-2} = a_{n-2} \Rightarrow q_{n-3} = aq_{n-2} + a_{n-1}$

Da mesma forma, o terceiro coeficiente do quociente será obtido a partir do segundo, multiplicando-o por a e somando-o com o próximo coeficiente de $p(x)$.

Daí em diante, o mesmo acontece com todos os coeficientes, de modo que, por fim, teremos

$q_0 - aq_1 = a_1 \Rightarrow q_0 = aq_1 + a_1$; e

$r(x) - aq_0 = a_0 \Rightarrow r(x) = aq_0 + a_0$.

Podemos registrar essas informações na seguinte tabela, que é conhecida como o *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, em homenagem ao matemático francês Charles Briot (1817-1882) e ao italiano Paolo Ruffini (1765-1822). Colocaremos apenas os coeficientes, por simplicidade.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
	$\underbrace{a_n}_{q_{n-1}}$	$\underbrace{a.q_{n-1} + a_{n-1}}_{q_{n-2}}$	$\underbrace{a.q_{n-2} + a_{n-2}}_{q_{n-3}}$		$\underbrace{a.q_1 + a_1}_{q_0}$	$\underbrace{a.q_0 + a_0}_{\gamma}$

Figura 1: Paolo Ruffini

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/

Exemplo 3

Dividir o polinômio $x^3 - 6x^2 + 7x + 9$ por $x - 4$.

Solução:

Sabemos que o quociente encontrado será do segundo grau e o resto constante. Nesse caso, temos 4 como raiz do divisor e os coeficientes do dividendo são 1, –6, 7 e 9. Dispondo esses números no dispositivo prático, encontramos

4	1	–6	7	9

Inicialmente, repetimos o primeiro coeficiente.

4	1	–6	7	9
	1			

Em seguida, multiplicamos esse primeiro coeficiente por 4 e somamos com o próximo coeficiente do dividendo, fazendo 1.4 + (–6) = –2, e anotamos o resultado abaixo do –6.

4	1	–6	7	9
	1	–2		

O próximo passo é fazer $(-2).4 + 7 = -1$ e anotar esse número logo abaixo do 7.

4	1	–6	7	9
	1	–2	-1	

Por fim, $(-1).4 + 9 = 5$, que é o resto da divisão

4	1	–6	7	9
	1	–2	-1	5

Além disso, temos os coeficientes 1, -2 e -1, que geram o quociente $q(x) = x^2 - 2x - 1$.

É importante observar que, no dispositivo, devemos colocar todos os coeficientes do dividendo, mesmo que alguns deles sejam iguais a 0. Assim, por exemplo, os coeficientes de $x^3 - 3$ são 1, 0, 0 e 3.

Exemplo 4

Dividir $x^5 - 4x + 3$ por $x - 2$

Solução: Como o dividendo tem grau 5, o quociente terá grau 4. A raiz do divisor é 2 e os coeficientes do dividendo são 1, 0, 0, 0, –4 e 3. Assim, dispomos esses números no esquema abaixo:

2	1	0	0	0	–4	3

Realizando os passos indicados acima, obtemos como resultado final

2	1	0	0	0	–4	3
	1	2	4	8	12	21

Assim, o quociente é o polinômio $q(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 12$ e o resto vale 21.

Mesmo que o divisor não seja mônico, o método pode ser empregado depois de um pequeno ajuste. Considere, então, a divisão do polinômio $p(x)$ por $ax + b$, com $a \neq 0$, com quociente $q(x)$ e resto $r(x)$. Temos $(ax+b).q(x) + r(x) = p(x)$. Uma vez que $ax + b = a.(x + \frac{b}{a})$, podemos reescrever a igualdade como $(x + \frac{b}{a}).aq(x) + r(x) = p(x)$ e realizar o processo de divisão por $x + \frac{b}{a}$. Com isso, obteremos o quociente auxiliar $Q(x) = aq(x)$ e o mesmo resto. Depois de terminado o processo, então, bastará que o quociente auxiliar seja dividido por a para que obtenhamos o quociente original. Acompanhe um exemplo deste método.

Exemplo 5

Determine o quociente e o resto da divisão de $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$ por $g(x) = x - 5$.

Solução: Comecemos por colocar 2 em evidência em $g(x) = 2.(x - \frac{5}{2})$. Assim, utilizamos o dispositivo de Briot-Ruffini para $x - \frac{5}{2}$ e para dividir o quociente encontrado por 2.

5/2	2	–7	9	0	5
	2	–2	4	10	30

Desse modo, o resto da divisão será 30 e o quociente auxiliar $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x + 10$. Dividindo-o por 2, obteremos $q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 5$.

TÓPICO 2

Multiplicidade

Objetivos

- Verificar raízes repetidas
- Enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra

No final da aula 1, observamos que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes. Ou seja, se $\partial p = n$, então o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; p(z) = 0\}$ possui no máximo n elementos. Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 3$ tem grau 2 e apenas uma raiz, enquanto o polinômio $q(x) = (x-2)^2.(x-4)$ tem grau 3 e apenas duas raízes. Um fato importante é enunciado a seguir e será admitido sem demonstração.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

O conjunto dos números complexos é algebricamente fechado, o que quer dizer que todo polinômio com coeficientes complexos e não constante tem pelo menos uma raiz em C. Em notação, equivale a "$\forall p \in \mathbb{C}\,[x]\ (\partial p \geq 1 \Rightarrow \exists\ z \in \mathbb{C};\ p(z) = 0)$".

Considerando $\partial p = n$ da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, o TFA afirma que existe z_1 que é raiz de $p(x)$, logo $p(x)$ é divisível por $x - z_1$, ou seja, $p(x) = (x - z_1).p_1(x)$, com $\partial p_1 = n - 1$ e mesmo coeficiente líder de p.

Uma vez que p_1 é um polinômio, podemos aplicar de novo o TFA e concluímos que ele possui uma raiz z_2, sendo, portanto, divisível por $x - z_2$, de onde podemos escrever $p_1(x) = (x - z_2).p_2(x)$. Assim, $p(x) = (x - z_1).(x - z_2).p_2(x)$

O processo pode ser repetido n vezes até que obtenhamos p_n constante (igual ao termo líder de p) e o TFA não mais pode ser usado.

Assim, qualquer polinômio de grau n pode ser escrito como

$p(x) = a_n.(x - z_1).(x - z_2)(x - z_3).....(x - z_n)$,

em que cada um dos z_k é raiz de $p(x)$, ou seja, um polinômio de grau n tem exatamente n raízes, mas não necessariamente distintas.

Exemplo 1

Uma vez que $(x - 3)^2.(x + 4) = (x - 3).(x - 3).(x + 4)$, podemos dizer que $p(x) = (x - 3)^2.(x + 4)$ possui três raízes, sendo duas iguais a 3 e uma igual a –4. O número 3 é chamado de raiz *dupla* e o –4 de raiz *simples* de p.

DEFINIÇÃO

O número a é raiz de multiplicidade m do polinômio $p(x)$ se $p(a) = 0$ e, além disso, $p(x) = (x - a)^m .q(x)$, com $q(a) \neq 0$.

Para determinar a multiplicidade do número a como raiz de um polinômio, devemos realizar divisões sucessivas por $x - a$, nas quais o quociente de uma divisão vira dividendo da próxima, e contar quantas vezes o resto dará 0.

Exemplo 2

Encontre a multiplicidade do número 2 como raiz de $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$.

Solução: Para verificar se 2 é raiz de p, usamos o dispositivo de Briot-Ruffini:

2	1	–3	1	0	4
	1	–1	–1	–2	0

Como o resto encontrado foi 0, o número 2 é raiz de $p(x)$. Dividindo agora o quociente encontrado por $x - 2$, obtemos:

2	1	–1	-1	-2
	1	1	1	0

O novo resto encontrado foi 0, significando que a multiplicidade de 2 como raiz é pelo menos dois. Repetindo o processo, temos:

2	1	1	1
	1	3	7

Como o resto não foi 0, o número 2 não tem multiplicidade três como raiz de $p(x)$.

Exemplo 3

Determine os valores reais de a e b para que o número 3 seja uma raiz multiplicidade dois do polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$

Solução: Devemos realizar a divisão de $p(x)$ por $x - 3$ duas vezes e exigir que os restos sejam iguais a 0. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

3	1	-2	a	b
113 + a9 + 3a + b (1º resto)				
15 + a = 0 (2º resto)				

Fazendo $15 + a = 0$, obtemos $a = -15$ e fazendo $9 + 3a + b = 0$, devemos ter b = 36. Podemos escrever $p(x) = x^2 - 2x^2 - 15x + 36 = (x-3)^2.(x+4)$

Exemplo 4:

Encontre um polinômio cujas raízes são 5 e −1, com multiplicidades 2 e 3, respectivamente.

Solução: O polinômio procurado é da forma:

$$p(x) = a.(x-5)^2.(x+1)^3 .$$

Desenvolvendo-o, temos :

$$p(x) = a.(x^2 - 10x + 25).(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = a.(x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 46x^2 + 85x + 25) ,$$

para qualquer $a \neq 0$.

TÓPICO 3

Relações entre coeficientes e raízes

Objetivo

- Determinar relações entre as raízes de um polinômio e seus coeficientes

No tópico anterior, vimos, a partir do Teorema Fundamental da Álgebra, que todo polinômio pode ser escrito da forma $p(x) = a.(x - z_1).(x - z_2)....(x - z_n)$, em que os números complexos z_k são as raízes de $p(x)$. A multiplicidade de uma raiz é a quantidade de vezes em que o seu fator correspondente aparece na fatoração. Desse modo, podemos ter raízes simples (multiplicidade um), raízes duplas, triplas, etc. Uma vez que cada polinômio tem uma fatoração dessa forma, é natural que os seus coeficientes estejam relacionados de maneira direta com as raízes.

Exemplo 1:

Encontre o polinômio mônico de terceiro grau cujas raízes são 1, 2 e 3.

Solução:

Os coeficientes do polinômio podem ser encontrados se desenvolvermos $p(x) = (x-1).(x-2).(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

No estudo de funções polinomiais do segundo grau, vimos que a soma e o produto das raízes podem ser obtidos por uma razão simples entre os coeficientes da função. Relembrando: dado o polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com \;\; a \neq 0$. Se suas raízes são z_1 e z_2, podemos escrevê-lo como

$$f(x) = a.(x - z_1).(x - z_2) = a.(x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2) = ax^2 - a.(z_1 + z_2)x + az_1 z_2$$

. Comparando os coeficientes, devemos ter $-a(z_1 + z_2) = b$ e $az_1 z_2 = c$, ou seja,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Assim, para obter a soma das raízes, dividimos o segundo coeficiente pelo primeiro e acrescentamos o sinal de menos. Para o produto, dividimos o terceiro coeficiente pelo primeiro.

Procedendo de maneira análoga para o polinômio de terceiro grau $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e com raízes z_1, z_2 e z_3, teremos a fatoração $a.(x - z_1).(x - z_2).(x - z_3)$ que leva às relações:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a},\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{c}{a} \text{ e } z_1z_2z_3 = -\frac{d}{a}$$

Se tomarmos as raízes uma por uma e as somarmos, encontraremos o segundo coeficiente dividido pelo termo líder, com o sinal de menos. Se tomarmos os produtos das raízes de duas em duas, obteremos o terceiro coeficiente dividido pelo termo líder, e se tomarmos o produto das três raízes, teremos o quarto coeficiente dividido pelo termo líder, com o sinal de menos.

Exemplo 2

Se *r*, *s* e *t* são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 7$, podemos dizer que $r + s + t = -4$, rs+rt+st=-3 e rst=7 .

Exemplo 3

Calcule a soma dos inversos das raízes da função $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$.

Solução: Como $\partial f = 3$, considere as raízes z_1, z_2 e z_3. O objetivo, então, é calcular

$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$. Podemos fazer $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2}{z_1z_2z_3} = \frac{-4/2}{-5/2} = \frac{4}{5}$.

As relações acima são chamadas de *Relações de Girard*, em homenagem ao matemático francês Albert Girard (1595-1632). Elas podem ser estendidas para um polinômio de qualquer grau, de acordo com o que segue.

Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ com raízes $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ou seja, ele pode ser fatorado como $p(x) = a_n.(x - z_1).(x - z_2)\ldots(x - z_n)$. Se chamarmos de S_k a soma dos produtos das raízes de *p*, tomadas de *k* em *k*, obteremos

$$p(x) = a_nx^n - a_nS_1x^{n-1} + a_nS_2x^{n-2} - a_nS_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^k a_nS_kx^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_nS_n$$

SAIBA MAIS

Conheça um pouco mais sobre o matemático Albert Girard acessando o site http://www.somatematica.com.br/biograf/girard.php

Fazendo a comparação com os coeficientes de $p(x)$, encontraremos

$$S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

ATENÇÃO!

Observação: Já que a soma Sk consiste dos produtos das n raízes, tomadas em grupos de k, podemos concluir, através de nossos conhecimentos de análise combinatória, que Sk tem $C_{n,k}$ parcelas.

Exemplo 4

Se r, s, t e u são as raízes do polinômio $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 7$, encontre $rst + rsu + rut + sut$.

Solução: Devemos encontrar a soma dos produtos das raízes, tomadas três a três, ou seja, S_3.

Temos $S_3 = (-1)^3 \frac{a_{4-3}}{a_4} = (-1).\frac{a_1}{a_4} = -\frac{1}{2}$.

TÓPICO 4

Raízes complexas e raízes reais

Objetivos

- Obter critérios para a existência de raízes em conjuntos numéricos específicos
- Relacionar raízes complexas com seus conjugados

Sabemos, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que um polinômio de grau n tem n raízes, distintas ou não. Neste tópico, vamos analisar como o grau de um polinômio e seus coeficientes estão relacionados com a quantidade de raízes que ele possua em um conjunto numérico particular. Iniciaremos com uma relação bastante simples, porém de consequências muito interessantes.

Proposição: Se o polinômio $p(x)$ tem apenas coeficientes reais, então $p(\overline{z}) = \overline{p(z)},\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ com todos os coeficientes a_k reais. A respeito de números complexos e seus conjugados, lembremos que $\left(\overline{z}\right)^n = \overline{z^n}$ e que se a é real, então $a = \overline{a}$. Além disso, $\overline{a} \cdot \overline{z} = \overline{az}$. A partir daí, teremos

$$
\begin{aligned}
p\left(\overline{z}\right) &= a_n\left(\overline{z}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{z}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\overline{z}\right) + a_0 = \\
&= \overline{a_n}\left(\overline{z}\right)^n + \overline{a_{n-1}}\left(\overline{z}\right)^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\left(\overline{z}\right) + \overline{a_0} = \\
&= \overline{a_n}.\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}.\overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}.\overline{z} + \overline{a_0} = \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_1 z + a_0} = \overline{p\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

ATENÇÃO!

O resultado ao lado só é válido para polinômios com todos os coeficientes reais. O caso simples $p(x) = x - i$ tem i como raiz, porém seu conjugado –i não é raiz.

A proposição acima afirma que a operação de conjugação comuta com a de obter o valor numérico por uma função polinomial de coeficientes reais. Ou seja, podemos calcular o conjugado de um número e depois obter o seu valor numérico, ou obter o valor numérico e depois obter o conjugado, e teremos o mesmo resultado.

Exemplo 1

Se os números reais a, b, c e d são tais que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $f(2 + i) = 4 - 2i$, obtemos, pela proposição acima, que $f(2 - i) = 4 + 2i$.

Como consequência direta da proposição acima, veremos que, se um número complexo é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então o seu conjugado também é raiz, pois, se $p(z) = 0$, então $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$. Além disso, as suas multiplicidades são iguais. Dessa forma, as raízes complexas não reais de um polinômio com coeficientes reais sempre vêm aos pares.

ATENÇÃO!

Observação 1: O resultado acima só é válido para polinômios com todos os coeficientes reais. O caso simples tem i como raiz, porém seu conjugado –i não é raiz.

Observação 2: Como as raízes não reais de um polinômio com coeficientes reais vêm sempre aos pares, se o grau desse polinômio for ímpar, ele terá pelo menos uma raiz real. Assim, podemos garantir que o polinômio tem pelo menos uma raiz real ou, contando as multiplicidades, sempre uma quantidade ímpar de raízes reais.

Observação 3: Relembrando nossa notação, um polinômio p(x) que tem apenas coeficientes reais é, em símbolos, equivalente a .

Exemplo 2

Qual o grau mínimo de um polinômio com coeficientes reais que tenha –2, 3, $4 + i$ e $3 - 2i$ como raízes?

Solução: Se não houvesse restrição em relação aos coeficientes, a resposta seria 4, pois temos aí quatro números complexos. Entretanto, se $p \in \mathbb{R}[x]$ dmite $4 + i$ como raiz, admitirá também $4 - i$. De maneira análoga, $3 + 2i$ deve, também, ser raiz do polinômio.

Assim, temos a obrigação de construir um polinômio com seis raízes, ou seja, o grau mínimo é 6.

Por fim, enunciaremos um resultado conhecido como *Teorema de Bolzano*, em homenagem ao matemático tcheco Bernardus Bolzano (1781-1848), que trata de raízes reais em um intervalo fixado. A demonstração desse resultado será omitida.

GUARDE BEM ISSO

Como as raízes não reais de um polinômio com coeficientes reais vêm sempre aos pares, se o grau desse polinômio for ímpar, ele terá pelo menos uma raiz real. Assim, podemos garantir que o polinômio $x^5 - 4x^2 + x + 3$ tem pelo menos uma raiz real ou, contando as multiplicidades, sempre uma quantidade ímpar de raízes reais.

TEOREMA DE BOLZANO

Seja $p(x)$ um polinômio que tem coeficientes reais e (a, b) um intervalo real aberto. Se $p(a)$ e $p(b)$ tiverem o mesmo sinal, então a quantidade de raízes de $p(x)$ em (a, b) é par e, se $p(a)$ e $p(b)$ tiverem sinais contrários, a quantidade de raízes de $p(x)$ é ímpar.

Em outras palavras, podemos dizer que, se um polinômio tiver coeficientes reais e mudar de sinal em um intervalo, ele terá pelo menos uma raiz nesse intervalo.

Figura 2 – Bernardus Bolzano

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/

EXEMPLO 3

Para o polinômio $g(x) = x^3 - x - 4$, temos $g(0) = -4$, $g(1) = -4$ e $g(2) = 2$. Assim podemos garantir que $g(x)$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $(1, 2)$.

AULA 8

Polinômios III

Caro (a) aluno (a),

Chegamos à nossa última aula do curso, também sobre polinômios. Aqui continuaremos estudando propriedades a respeito das raízes, além de identificar maneiras diretas de encontrar as raízes de alguns tipos particulares de polinômios. Já conhecemos várias propriedades interessantes a respeito de polinômios, assim, sempre que elas forem necessárias, vale a pena fazer uma revisão nas definições equivalentes. Esperamos que o caminho tenha sido satisfatório e que tenha trazido informações relevantes sob um ponto de vista que desperte a curiosidade para aprender mais. Nessa tentativa de continuar com dados úteis para sua formação, vamos ao material de encerramento.

Objetivos

- Identificar mais critérios segundo os quais polinômios tenham raízes racionais
- Analisar tipos específicos de polinômios
- Estudar transformações de polinômios que facilitem a determinação de suas raízes

TÓPICO 1

Raízes racionais

Objetivo

- Enunciar um teste sobre raízes de um polinômio

Lembramos que um polinômio é uma expressão do tipo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, em que os coeficientes a_k são números complexos. Quando $a_n \neq 0$, dizemos que o grau do polinômio vale n e escrevemos $\partial p = n$. Caso todos os coeficientes sejam iguais a zero, o polinômio é dito identicamente nulo, caso em que o grau não é definido.

Um número z é chamado de raiz do polinômio se $p(z) = 0$.

> **ATENÇÃO!**
>
> **Observação 1**: Todo número é raiz do polinômio identicamente nulo.
>
> **Observação 2**: Os polinômios de grau 0 não tem raízes, pois são da forma $p(x) = a_o$, com $a_0 \neq 0$.

Analisados os dois casos acima, vemos que o estudo a respeito de raízes só se torna não trivial caso o polinômio não seja constante. De acordo com o que obtemos a partir do Teorema Fundamental da Álgebra, todo polinômio de grau n tem n raízes em $\mathbb{C}$, distintas ou não. A quantidade de vezes que uma raiz aparece na fatoração do polinômio é chamada de multiplicidade dessa raiz em relação ao polinômio.

Exemplo 1

O número 2 é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, pois $p(2) = 2^3 - 6.2^2 + 3.2 + 10 = 0$. Assim, $p(x)$ é divisível por x – 2. Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, podemos encontrar o quociente e escrever $p(x) = (x-2).(x^2 - 4x - 5)$. As raízes de $q(x) = x^2 - 4x - 5$ também são raízes de

$p(x)$. Daí, pela fórmula de Bhaskara, obtemos ainda -1 e 5 como raízes, todas elas simples (multiplicidade 1). Por fim, podemos escrever $p(x)$ como produto de fatores de grau 1: $p(x) = (x-2).(x+1).(x-5)$.

O número 2, fornecido no começo do exemplo, permitiu que encontrássemos as outras raízes, pois o grau foi reduzido. Para realizar o mesmo procedimento em outros casos, poderíamos testar alguns números inteiros de módulo pequeno (0, ±1, ±2, ±3, ...) até obter uma raiz. O problema é que o polinômio pode nem ter raízes inteiras. A próxima proposição fornece um método de reduzir os testes a um grupo pequeno de números, fora do qual não há raízes racionais.

Proposição:
Se todos os coeficientes do polinômio $f(x)$ forem inteiros e o número racional $\frac{p}{q}$ for raiz de $p(x)$, com p e q inteiros primos entre si, então p é um divisor do termo constante, e q é um divisor do termo líder de $p(x)$.

Demonstração: Considere o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, em que os coeficientes a_k são números inteiros. Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $f(x)$, vale $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, ou seja:

$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$, multiplicando a igualdade por q^n, obterermos
$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$ (igualdade I)

Se isolarmos $a_n p^n$ na igualdade I, encontraremos
$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$. Uma vez que todos os coeficientes são inteiros, $a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}$ é um número inteiro e, assim, q é um divisor de $a_n p^n$, mas, como q e p são primos entre si, concluímos que q é um divisor de a_n.

Analogamente, se na igualdade I isolarmos $a_0 q^n$, obteremos:
$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n-1})$. Uma vez que todos os coeficientes são inteiros, $a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n-1}$ é um número inteiro e, assim, p é um divisor de $a_0 q^n$, mas, como p e q são primos entre si, concluímos que p é um divisor de a_0, como queríamos demonstrar.

A proposição que acabamos de provar afirma que, se um polinômio de coeficientes inteiros tiver raízes racionais, elas terão numerador e denominador apenas no conjunto dos divisores inteiros dos termos líder e constante, respectivamente.

Exemplo 2

Encontrar todas as raízes de $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

Solução: Como $\partial p = 3$, devemos encontrar três raízes. Se soubéssemos uma delas, poderíamos fatorar, encontrando facilmente as outras. Podemos fazer um teste para verificar se $p(x)$ possui alguma raiz racional. Caso afirmativo, ela será do tipo $\frac{p}{q}$, em que p é um divisor de 3, logo pode ser ±1 ou ±3, e q é um divisor de 1, logo pode ser ±1. Por simplicidade, podemos pegar todos os possíveis valores de p e apenas os positivos para q. Testando, encontraremos então:

$$x = 1 \Rightarrow p(x) = 1^3 - 4.1^2 + 2.1 + 3 = 2$$
$$x = -1 \Rightarrow p(x) = (-1)^3 - 4.(-1)^2 + 2.(-1) + 3 = -4$$
$$x = 3 \Rightarrow p(x) = 3^3 - 4.3^2 + 2.3 + 3 = 0$$

ATENÇÃO!

Observação 3: O teste desenvolvido no exemplo 2 é válido apenas quando $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ou seja, quando todos os coeficientes forem inteiros, não apenas o constante e o líder.

logo temos o número 3 como raiz. Se completarmos o teste, verificaremos que $p(-3) \neq 0$, logo 3 é a única raiz racional do polinômio dado. Realizando, então, a divisão de $p(x)$ por $x - 3$, obteremos $p(x) = (x-3).(x^2 - x - 1)$. Encontrando as raízes de $x^2 - x - 1$, completamos o conjunto de raízes

$$R = \left\{3, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Exemplo 3

Resolver a equação $\frac{A_{x+2,4}}{A_{x-1,2}} = 70$.

Solução: Lembrando que, para os números naturais n e p, $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, devemos procurar os números inteiros positivos x tais que $A_{x+2,4} = 70.A_{x-1,2}$, ou seja:

$$\frac{(x+2)!}{(x+2-4)!} = 70.\frac{(x-1)!}{(x-1-2)!} \Leftrightarrow \frac{(x+2)!}{(x-2)!} = 70.\frac{(x-1)!}{(x-3)!} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+2).(x+1).x.(x-1)!}{(x-2).(x-3)!} = 70.\frac{(x-1)!}{(x-3)!} \Leftrightarrow \frac{(x+2).(x+1).x}{(x-2)} = 70,$$ que equivale a $x(x+1)(x+2) = 70(x-2)$.

Temos, então, $x^3+3x^2+2x+70x-140 \Leftrightarrow x^3+3x^2-68x+140=0$. Devemos encontrar uma raiz natural para o polinômio $f(x)=x^3+3x^2-68x+140=0$. Os testes devem ser feitos apenas entre os divisores positivos de 140, a saber, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 35, 70 e 140. A raiz procurada é $x = 5$.

Com o que foi visto, podemos reduzir os testes feitos para se encontrar raízes inteiras de um polinômio, fatorando-o de modo a simplificar a procura por suas raízes.

TÓPICO 2

Derivada de um polinômio

Objetivos

- Apresentar a derivada de uma função polinomial
- Estabelecer as principais propriedades do processo de derivação

Neste tópico, vamos associar cada polinômio a outro, de grau menor, a partir de certas regras que gerarão propriedades interessantes.

DEFINIÇÃO

Dado o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, a derivada de p é o polinômio $p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$.

SAIBA MAIS

Acesse o site: https://www.somatematica.com.br/historia/derivadas.php e conheça um pouco mais sobre derivada de uma função

Decorre da definição que a derivada de qualquer polinômio constante é o polinômio identicamente nulo e que se $\partial p = n > 1$, então $\partial p' = n - 1$.

Exemplo 1:

Calcule a derivada dos polinômios $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ e $g(x) = 5x^4 + 3x + 2$.

Solução:

Obtemos diretamente que $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ e $g'(x) = 20x^3 + 3$.

Analisando termo a termo, vemos que o processo de derivação transforma o monômio ax^n no monômio nax^{n-1}. O processo é feito aditivamente, de forma que a derivada da soma de monômios é a soma das derivadas de cada um deles, fato que podemos generalizar na seguinte propriedade:

Propriedade 1:

Para quaisquer polinômios f e g, vale $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

Na verdade, a propriedade anterior vale para uma soma com qualquer quantidade finita de parcelas. A seguir, veremos como a derivada funciona para o produto de polinômios.

Proposição 1:

Pb f%&b g%&pl j l k˜j fl p) bkq l $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) +$

Demonstração:

Considerando $f(x)=ax^m$ e $g(x)=bx^n$, temos $f'(x)=\max^{m-1}$ e $g'(x)=nx^{n-1}$. Em relação ao produto, temos

$$(f(x).g(x))' = (abx^{m+n})' = (m+n)abx^{m+n-1} = mabx^{m+n-1} + nabx^{m+n-1} =$$
$$= \max^{m-1}.bx^n + ax^m.nbx^{n-1} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 2:

Se $f(x)$ é um monômio e $g(x)$ é a soma de dois monômios, então $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

Demonstração:

Considere o polinômio $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Fazendo $g_k(x)$ = $a_n x^n$, ele pode ser escrito como soma dos monômios $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$, ou seja, $g(x) = g_n(x) + g_{n-1}(x) + \ldots + g_1(x) + g_0(x)$. Calculemos

$$\begin{aligned} f(x).g(x) &= f(x).(g_n(x) + g_{n-1}(x) + \ldots + g_1(x) + g_0(x)) \\ &= f(x).g_n(x) + f(x).g_{n-1}(x) + \ldots + f(x).g_1(x) + f(x).g_0(x) \end{aligned}$$

Aqui temos a soma de monômios e, para derivá-la, usamos a propriedade 1. Então, temos

$$\begin{aligned} (f(x).g(x))' &= (f(x)g_n(x) + f(x)\cdot g_{n-1}(x) + \ldots + f(x).g_1(x) + f(x)\cdot g_0(x))' = \\ &= (f(x)\cdot g_n(x))' + (f(x)\cdot g_{n-1}(x))' + \ldots + (f(x)\cdot g_1(x))' + (f(x)\cdot g_0(x))' = \\ &= f'(x)\cdot g_n(x) + f'(x)\cdot g_{n-1}(x) + \ldots + f'(x)\cdot g_1(x) + f'(x)\cdot g_0(x) + \\ &+ f(x)\cdot g_n'(x) + f(x)\cdot g_{n-1}'(x) + \ldots + f(x)\cdot g_1'(x) + f(x)\cdot g_0'(x) = \\ &= f'(x)\cdot(g_n(x) + g_{n-1}(x) + \ldots + g_1(x) + g_0(x)) + f(x)\cdot(g_n'(x) + \\ &+ g_{n-1}'(x) + \ldots + g_1'(x) + g_0'(x)) = \\ &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Calcule a derivada do polinômios $p(x) = x^4.(2x^5 - 3x^2 + x)$.

Solução: Temos

$$p'(x) = (x^4.(2x^5 - 3x^2 + x))' = (x^4)'.(2x^5 - 3x^2 + x) + x^4.(2x^5 - 3x^2 + x)' =$$
$$p'(x) = 4x^3.(2x^5 - 3x^2 + x) + x^4(10x^4 - 6x + 1)$$

Teorema: Para quaisquer polinômios $f(x)$ e $g(x)$, vale $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

Demonstração: Procedendo de maneira análoga ao que foi feito nas proposições anteriores, mas fazendo uso delas, podemos escrever $f(x) = f_n(x) + f_{n-1}(x) + \ldots + f_1(x) + f_0(x)$, em que cada um dos $f_k(x)$ é um monômio. Assim teremos

$$\begin{aligned}(f(x).g(x))' &= (f_n(x) + f_{n-1}(x) + \ldots + f_1(x) + f_0(x).g(x))' \\ &= (f_n(x).g(x))' + (f_{n-1}(x).g(x))' + \ldots + (f_1(x).g(x))' + (f_0(x).g(x))' \\ &= f_n'(x).g(x) + f_n(x).g'(x) + f_{n-1}'(x).g(x) + f_{n-1}(x).g'(x) + \ldots + \\ &\quad f_1'(x).g(x) + f_1(x).g'(x) + f_0'(x).g(x) + f_0(x).g'(x) \\ &= (f_n'(x) + \ldots + f_1'(x).g(x) + f_0'(x)).g(x) + (f_n(x) + f_{n-1}(x) + \ldots + \\ &\quad f_1(x) + f_0(x)).g'(x) \\ (f(x).g(x))' &= f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\end{aligned}$$

Exemplo 3

A derivada do polinômio $p(x) = (x^7 - 12x^2).(3x^4 + 5x - 2)$ pode ser encontrada por

$$p'(x) = (x^7 - 12x^2)'.(3x^4 + 5x - 2) + (x^7 - 12x^2).(3x^4 + 5x - 2)'$$
$$p'(x) = (7x^6 - 24x).(3x^4 + 5x - 2) + (x^7 - 12x^2).(12x^3 + 5)$$

Outra propriedade que nos será útil diz respeito à derivada da potência de um polinômio.

Proposição 3: Se os polinômios $f(x)$, $g(x)$ e o número natural n são tais que $f(x) = [g(x)]^n$, então derivamos $f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$.

Demonstração:

Usaremos indução sobre n. O caso $n = 1$ é imediato. Suponha, então, que a propriedade seja válida para $n = k$, ou seja, $([g(x)]^k)' = k.[g(x)]^{k-1}.g'(x)$. Calculemos a derivada de $[g(x)]^{k+1}$. Siga:

$$([g(x)]^k)' = k.[g(x)]^{k-1} \cdot g'(x)$$
$$([g(x)]^{k+1})' = (g(x) \cdot [g(x)]^k)' = g'(x) \cdot [g(x)^k] + g(x) \cdot ([g(x)]^k)' =$$
$$([g(x)]^{k+1})' = g'(x) \cdot [g(x)]^k + g(x) \cdot k[g(x)]^{k-1} \cdot g'(x) =$$
$$([g(x)]^{k+1})' = g'(x) \cdot [g(x)]^k + k \cdot [g(x)]^k \cdot g'(x) =$$
$$([g(x)]^{k+1})' = (1 + k) \cdot g'(x) \cdot [g(x)]^k = (k+1) \cdot [g(x)]^{(k+1)-1} \cdot g(x)$$

o que completa a prova.

Exemplo 4

Determine a derivada da função $(2x+3)^5$.

Solução:

Temos que $((2x+3)^5)' = 5.(2x+3)^4.(2x+3)' = 10.(2x+3)^4$.

Antes de voltar a falar sobre as raízes de um polinômio, observe que, uma vez que a derivada de um polinômio é outro polinômio, podemos derivá-lo novamente e quantas vezes quisermos. Assim, podemos ter a derivada *primeira*, a *derivada segunda*, a *derivada terceira,* etc.

Denotamos por $f^{(n)}(x)$ a derivada de ordem n da função f. Assim, vale $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Exemplo 5

Encontre a derivada de quarta ordem do polinômio

$p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 2x - 4$.

Solução:

Derivando sucessivamente, obteremos:

$$p'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$$
$$p^{(2)}(x) = 20x^3 + 12x^2 - 24x \ + 2$$
$$p^{(3)}(x) = 60x^2 + 36x - 24$$
$$p^{(4)}(x) = 120x + 36$$

Nos cursos de Cálculo Diferencial, a derivada desempenha papel importante, pela sua interpretação geométrica. Na teoria de Polinômios, ela é usada, dentre outras funções, para estabelecer a multiplicidade de uma raiz, sem apelar para o dispositivo de Briot-Ruffini. Uma vez que sabemos calcular a derivada de qualquer polinômio, mesmo quando ele está fatorado, podemos ir para o próximo tópico.

TÓPICO 3

Raízes múltiplas

Objetivo

- Relacionar derivação com multiplicidade de raízes

Na aula passada, vimos que o número z é raiz de multiplicidade m do polinômio $p(x)$ se for possível a fatoração $p(x) = (x-z)^m .q(x)$, com $q(x) \neq 0$. Para determinar essa multiplicidade, dividimos sucessivamente o polinômio por $x - z$, usando o método mais adequado, e vemos quantas vezes o resto é nulo.

Podemos usar a derivada do polinômio para determinar a multiplicidade de uma de suas raízes, ganhando, assim, mais uma ferramenta no nosso estudo.

Proposição 1: Se z é raiz de multiplicidade m do polinômio $p(x)$, então z é raiz de multiplicidade $m - 1$ de $p'(x)$, a derivada de p.

Demonstração:

Pela definição de multiplicidade, podemos escrever $p(x) = (x-z)^m .q(x)$, com $q(x) \neq 0$. A partir daí, calculamos a derivada de p por essa expressão. Veja:

$$p'(x) = ((x-z)^m \cdot q(x)') = [(x-z)^m]' \cdot q(x) + (x-z)^m \cdot q'(x)$$

$$p'(x) = m \cdot (x-z)^{m-1} \cdot (x-z)' \cdot q(x) + (x-z)^m \cdot q'(x) = m \cdot (x-z)^{m-1} \cdot q(x) + (x-z)^m \cdot q'(x)$$

Fazendo $Q(x) = q(x) + (x-z) \cdot q'(x)$, temos $Q(z) = q(z) \neq 0$ e $p'(x) = m \cdot (x-z)^{m-1} \cdot Q(x)$, de onde concluímos que z é raiz de multiplicidade $m - 1$ de $p'(x)$.

Se aplicarmos a proposição acima para $p'(x)$, temos que z é raiz de multiplicidade $m-2$ de $p^{(2)}(x)$, sendo, portanto, raiz de multiplicidade 3 de $p^{(3)}(x)$

, ou seja, uma raiz de multiplicidade m do polinômio $p(x)$ é raiz de multiplicidade $m-k$ do polinômio $p^{(k)}(x)$, de modo que não é raiz de $p^{(m)}(x)$.

Um teste para determinar a multiplicidade do número z como raiz de um polinômio consiste em achar os valores numéricos $p(z), p'(z), p^{(2)}(z), p^{(3)}(z), \ldots.$ até obter $p^{(m)}(z) \neq 0$ pela primeira vez, caso em que a multiplicidade será m.

Exemplo 1

Encontrar todas as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$ e determinar suas multiplicidades.

Solução: Inicialmente, usaremos o teste do começo da nossa aula, ou seja, devemos procurar as raízes inteiras entre os divisores de -8. Fazendo, então, os testes com ± 1, ± 2, ± 4 e ± 8, verificamos que apenas 2 e -1 são raízes de $p(x)$. Poderíamos dividir $p(x)$ por $x - 2$ pelo dispositivo prático, mas vamos treinar o processo de derivação. Calculando as derivadas, teremos

$$p'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 \Rightarrow p'(2) = 0 \text{ e } p'(-1) = -27$$

Como o valor numérico da primeira derivada para $x = -1$ deu diferente de zero, a multiplicidade de -1 como raiz de $p(x)$ vale um. Continuando o processo para determinar a multiplicidade de $x = 2$, encontraremos

$$p^{(2)}(x) = 12x^2 - 30x + 12 \Rightarrow p^{(2)}(2) = 0$$
$$p^{(3)}(x) = 24x - 30 \Rightarrow p^{(3)}(2) = 18$$

Aqui concluímos que 2 tem multiplicidade 3 como raiz de $p(x)$. Somadas as multiplicidades de 2 e -1, obtemos o grau de $p(x)$, indicando que não outras raízes e, assim, podemos escrever $p(x) = (x-2)^3 \cdot (x+1)$.

Exemplo 2

Determinar os valores de a e b para que o polinômio $f(x) = x^4 - 6x^2 + ax + b$ tenha uma raiz de multiplicidade três.

Solução: Calculando as derivadas de ordem 1, 2 e 3 do polinômio, teremos:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + a$$
$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 12$$
$$f^{(3)}(x) = 24x$$

Devemos garantir a existência de um número complexo z tal que $f(z)=f'(z)=f^{(2)}(z)=0\neq f^{(3)}(z)$. Esta última comparação equivale a $24z\neq 0$, o que acontece para qualquer $z\neq 0$. As outras condições são

$$\text{(I) } z^4-6z^2+ax+b=0$$
$$\text{(II) } 4z^3-12z+a=0$$
$$\text{(III) } 12z^2-12=0$$

Da equação (III), obtemos $z=\pm 1$. Para $z=-1$, substituindo em (II), concluímos $a=-8$ e, com esses dois valores em (I), vale $b=-3$. Já se $z=1$, temos $a=8$ e $b=-3$.

Agora que vimos como a multiplicidade de uma raiz de $p(x)$ é afetada pelas derivadas de p, podemos determinar o grau de fatores do tipo $x-a$ na decomposição de polinômios.

TÓPICO 4

Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de polinômios

Objetivos

- Obter critérios para a existência de raízes em conjuntos numéricos específicos
- Relacionar raízes complexas com seus conjugados

Quando a divisão do polinômio $f(x)$ pelo polinômio $g(x)$ apresenta resto identicamente nulo, isto é, a divisão é exata, podemos usar a mesma terminologia que usamos em relação aos inteiros. Assim, dizemos que $f(x)$ é um *múltiplo* de $g(x)$ e que $g(x)$ é um *divisor* de $f(x)$.

Analogamente, podemos considerar o caso de buscar divisores comuns a dois polinômios e determinar dentre eles o de maior grau. Para que tenhamos um máximo divisor comum unicamente determinado, vamos exigir também que ele seja mônico. Pois bem, sabemos que, se $g(x)$ é um divisor de $f(x)$, então $k.g(x)$ também é divisor de $f(x)$, para qualquer número complexo k. Assim o *máximo divisor comum* dos polinômios $f(x)$ e $g(x)$ é um polinômio mônico de grau máximo, de forma que seja divisor de $f(x)$ e $g(x)$ ao mesmo tempo. Formalmente:

DEFINIÇÃO 1

Dados $f(x)$ e $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, dizemos que h(x) = m.d.c.(f, g) se:

(1) h(x) é mônico;

(2) h(x) é divisor de f(x) e de g(x);

(3) se h0(x) é divisor de f(x) e de g(x), então h0(x) é divisor de h(x).

A condição (2) garante que $h(x)$ é um divisor comum a $f(x)$ e $g(x)$; a condição (3) que ele é maximal; e a condição (1) é imposta apenas para que ele seja único, mas não oferece nenhuma resistência, pois, se a_n é o termo líder de $h(x)$, então $\frac{1}{a_n}.h(x)$

é mônico. Portanto, a partir de agora, não nos preocuparemos com essa condição, pois, se obtivermos um polinômio qualquer que satisfaça as condições (2) e (3), saberemos transformá-lo em um polinômio mônico.

Mais ainda, como o polinômio $p(x) = 1$ é divisor de qualquer polinômio, o conjunto dos divisores comuns a dois polinômios nunca é vazio. Outro fato é que a condição (2) implica $\partial h \leq \partial f$ e $\partial h \leq \partial g$, de onde podemos concluir que, efetivamente, o conjunto dos divisores comuns aos dois polinômios tem um grau máximo.

Exemplo 1a

O máximo divisor comum dos polinômios $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$ é o polinômio $h(x) = x - 1$, pois satisfaz as três condições.

Exemplo 1b

Para os polinômios $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ e $g(x) = x^4$, tem-se $h(x) = 1$ é o m.d.c.(f, g). Nesse caso, dizemos que $f(x)$ e $g(x)$ são *primos entre si*.

Para determinar o máximo divisor comum entre dois polinômios, observe que, se $g(x)$ for divisor de $f(x)$, então m.d.c.(f, g) = g (lembrando que se g não for mônico, basta transformá-lo de acordo com o exposto acima).

Caso isso não aconteça, considere $\partial f \geq \partial g$ e divida f por g, obtendo um resto r.

Proposição 1

Se $r(x)$ é o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, então m.d.c.(f, g) = m.d.c.(g, r)

Demonstração:

Fazendo h = m.d.c.(f, g), temos que h é divisor de f e de g, logo podemos escrever $f = h.q_1$ e $g = h.q_2$. Como r é o resto da divisão de f por g, podemos escrever $f = g.q + r$, *ou* seja, $r = f - g.q = h.q_1 + h.q_2.q = h.(q_1 + q_2.q)$. Desse modo, temos que h é um divisor de r.

Agora considere h_0 = m.d.c.(g, r). Como h é divisor de g e de r, temos que h é divisor de h_0. Se mostrarmos que h_0 é divisor de h, teremos a igualdade que completa a prova.

Como h_0 é divisor de g e de r, podemos escrever $g = h_0.q_3$ e $r = h_0.q_4$ e, substituindo acima, temos $f = g.q + r = h_0.q_3.q + h_0.q_4 = h_0.(q_3.q + q_4)$. Assim, h_0 é divisor de f e como já era divisor de g, então é divisor de h. Como h é divisor de h_0, e h_0 é divisor de h, temos $h = h_0$ e, assim, m.d.c.(f, g) = m.d.c.(g, r).

A proposição anterior apenas transfere o problema de determinar o m.d.c. entreos polinômios f e g para encontrar o m.d.c. entre g e o resto da divisão de f por g, mas com a vantagem de que os graus envolvidos são menores. Repetindo esse processo e se r_2 for o resto da divisão de g por r, temos m.d.c.(g, r) = m.d.c.(g, r_2), e assim sucessivamente até que encontremos uma divisão exata, caso em que o divisor será o m.d.c. dos dois polinômios iniciais.

Exemplo 2

Dados $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ e $g(x)=x^4-4x+4$, encontre m.d.c.(f, g).

Solução:

Comecemos por dividir $f(x)$ por $g(x)$, obtendo quociente $q_1(x)=x$ e resto $r_1(x)=-3x+6$. Como a divisão não foi exata, o processo continua e temos m.d.c.(f, g) = m.d.c.(g, r_1). Dividindo $g(x)$ por $r_1(x)$, temos quociente $q_2(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ e resto identicamente nulo, caso em que o processo se encerra e temos r_1 como m.d.c. procurado. Como r_1 não é mônico, devemos dividi-lo por -3 para que isso aconteça, obtendo, assim, m.d.c.(f, g) = $x - 2$.

Da mesma forma que definimos o máximo divisor comum, podemos pensar também em *mínimo múltiplo comum*, que será um múltiplo simultâneo dos polinômios envolvidos, com o menor grau possível.

DEFINIÇÃO 2

Dados $f(x)$ e $g(x)\in\mathbb{C}[x]$, dizemos que $h(x)$ = m.m.c.(f, g) se:

(1) $h(x)$ é mônico.

(2) $h(x)$ é múltiplo de $f(x)$ e de $g(x)$.

(3) se $h_0(x)$ é múltiplo de $f(x)$ e de $g(x)$, então $h_0(x)$ é múltiplo de $h(x)$.

A condição (2) garante que $h(x)$ é um múltiplo comum a $f(x)$ e $g(x)$; a condição (3) que ele é minimal; e a condição (1) é imposta apenas para que ele seja único, mas não oferece nenhuma resistência, pois, se a_n é o termo líder de $h(x)$, então $\frac{1}{a_n}.h(x)$ é mônico. Portanto, a partir de agora, não nos preocuparemos com essa condição, pois, se obtivermos um polinômio qualquer que satisfaça as condições (2) e (3), saberemos transformá-lo em um polinômio mônico.

Mais ainda, como o polinômio $p(x) = f(x).g(x)$ é múltiplo de f e de g, o conjunto dos múltiplos comuns a dois polinômios nunca é vazio. Outro fato é que a condição

(2) implica $\partial h \leq \partial f$ e $\partial h \leq \partial g$, de onde podemos concluir que, efetivamente, o conjunto dos divisores comuns aos dois polinômios tem um grau mínimo, maior ou igual ao grau de qualquer um dos polinômios envolvidos.

Exemplo 3a

O mínimo múltiplo comum dos polinômios $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ é o polinômio $h(x) = x^4 - 1$, pois satisfaz as três condições.

Exemplo 3b

Para $f(x) = x^3$ e $g(x) = x - 1$, tem-se $m.m.c(f, g) = x^4 - x^3$.

Se soubermos todas as raízes de $f(x)$ e de $g(x)$ com suas multiplicidades, poderemos encontrar $h(x)$ = m.m.c.(f, g) diretamente, pois, como $f(x)$ é divisor de $h(x)$, todas as raízes de f devem ser raízes de h e com multiplicidade no mínimo igual à multiplicidade enquanto raiz de f. Se f e g tiverem raízes repetidas, elas não serão contadas repetidamente, com o intuito de minimizar o grau.

Exemplo 4

Dados os polinômios

$f(x) = 6.(x-2)^3.(x+1)^4.(x-1)$ e $g(x) = 2.(x-2)^2.(x+1)^6.(x-3)$,

determine m.m.c.(f, g).

Solução:

Fazendo $h(x)$ = m.m.c.(f, g), temos que h é um múltiplo de f, sendo, portanto, da forma $h(x) = f(x).q(x) = 6.(x-2)^3.(x+1)^4.(x-1).q(x)$. O polinômio $q(x)$ deve ser construído de modo a que o resultado final seja divisível por $g(x)$ e com grau mínimo. Para que $h(x)$ seja divisível por $g(x)$, deve conter $(x-2)^2.(x+1)^6.(x-3)$ na sua fatoração. Devemos então apenas completar os expoentes de modo que isso seja possível e acrescentar os fatores necessários. Assim, não é necessário que $q(x)$ apresente $(x-2)^2$ em sua fatoração, pois este termo já aparece em f. Como em f, o termo x + 1 aparece com expoente 4, basta que apareça $(x+2)^2$ em $q(x)$. Como x − 3 não aparece na fatoração de f, deve aparecer em q. Assim, temos $q(x) = (x+1)^2.(x-3)$ e $h(x) = 6.(x-2)^3.(x+1)^6.(x-1).(x-3)$. De modo a tornar mônico, dividimos por 6 (ou simplesmente omitimos o 6 no começo) e concluímos $m.m.c(f, g) = (x-2)^3.(x+1)^6.(x-1).(x-3)$.

Pelo que foi visto no exemplo 4, para que determinemos o m.m.c. dos polinômios f e g, devemos decompô-los em fatores da forma $(x-z)^m$, tomando todos os fatores presentes (comuns ou não) com o maior expoente possível.

A fatoração também serve para que determinemos o m.d.c. dos polinômios f e g, caso em que tomaremos apenas os fatores comuns e com o menor expoente.

Exemplo 5

Para $f(x)=(x-4)^3.(x+2)^3.(x-3)$ e $g(x)=(x-4)^2.(x+2)^5.(x+1)$, temos $m.d.c(f,g)=(x-4)^2.(x+2)^3$ e $m.m.c(f,g)=(x-4)^3.(x+2)^5.(x-3).(x+1)$.

REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3. ed. Rio de Janeiro: Atual, 1977. 5 v.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977. 6 v.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do Ensino Médio**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000. 2 v.

CURRÍCULO

Jânio Kléo de Sousa Castro

Jânio Kléo começou seus estudos de Matemática em 2000, quando ingressou no bacharelado da Universidade Federal do Ceará, colando grau em julho de 2004. A partir de 2001 e por três anos, foi monitor de Cálculo Diferencial e Integral na UFC, desempenhando atividade de acompanhamento e tira-dúvidas para alunos de graduação.

Durante os anos de 2006, 2007 e 2008, foi professor da UFC, com turmas de diversos cursos, ministrando aulas de Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Variáveis Complexas e Geometria Hiperbólica, entre outras.

Desde o começo de 2009 é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, atuando nos campus de Fortaleza e Maracanaú, nos cursos presenciais e semipresenciais.