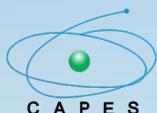


Licenciatura em Matemática

GEOMETRIA PLANA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática
GEOMETRIA PLANA E
CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Angelo Papa Neto

Fortaleza | CE
2017

Presidente

Michel Miguel Elias Temer Lulia

Ministro da Educação

José Mendonça Bezerra Filho

Presidente da CAPES

Abilio Afonso Baeta Neves

Diretor de EaD – CAPES

Carlos Cezar Modernel Lenuzza

Reitor do IFCE

Virgílio Augusto Sales Araripe

Pró-Reitor de Ensino

Reuber Saraiva de Santiago

Diretor de EAD/IFCE

Márcio Daniel Santos Damasceno

Coordenador UAB

Natal Lânia Roque Fernandes

Coordenador Adjunto UAB

Gláudia Mota Portela Mapurunga

*Coordenadora do Curso
de Licenciatura em Matemática*

Cristina Alves Bezerra

Elaboração do conteúdo

Angelo Papa Neto

Colaboradora

Kiara Lima Costa

Equipe Pedagógica e Design Educacional

Daniele Luciano Marques

Iraci de Oliveira Moraes Schmidlin

Isabel Cristina Pereira da Costa

Karine Nascimento Portela

Kiara Lima Costa

Lívia Maria de Lima Santiago

Luciana Andrade Rodrigues

Maria das Dôres dos Santos Moreira

Márcia Roxana da Silva Régis Arruda

Maria do Socorro Nogueira de Paula

Equipe Arte, Criação e Produção Visual

Camila Ferreira Mendes

Francisco César de Araújo Filho

Suzan Pagani Maranhão

Tamar Couto Parentes Fortes

Equipe Web

Corneli Gomes Furtado Júnior

Emanuel Lucas de Sousa e Silva

Fabrice Marc Joye

Herculano Gonçalves Santos

Ícaro Magalhães Holanda Barroso

Morgana Gomes da Silva

Revisão

Antônio Carlos Marques Júnior

Débora Liberato Arruda

Saulo Garcia

Logística

Francisco Roberto Dias de Aguiar

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Sistema de Bibliotecas - SIBI | Campus Fortaleza

Bibliotecária responsável: Erika Cristiny Brandão F. Barbosa CRB N° 3/1099

P213g Papa Neto, Angelo.
Geometria plana e construções geométricas / Angelo Papa Neto. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

226 p.

ISBN 978-85-475-0059-7

1. Geometria Euclidiana Plana. 2. Construções Geométricas. 3. Método Axiomático. I. Título.

CDD 516.22

O IFCE empenhou-se em identificar todos os responsáveis pelos direitos autorais das imagens e dos textos reproduzidos neste livro. Se porventura for constatada omissão na identificação de algum material, dispomo-nos a efetuar, futuramente, os possíveis acertos.

Sumário

| | |
|---|-----|
| Apresentação | 6 |
| Aula 1 – Axiomas na geometria euclidiana | 8 |
| Tópico 1 – O método lógico-dedutivo e a noção de axioma na geometria plana | 9 |
| Tópico 2 – Axiomas de incidência e de ordem | 13 |
| Aula 2 – Construções com régua e compasso e os axiomas de congruência de segmentos | 21 |
| Tópico 1 – Construções geométricas nos <i>Elementos</i> de Euclides | 22 |
| Tópico 2 – Congruência e medida de segmentos | 34 |
| Aula 3 – Congruência de ângulos e de triângulos e algumas de suas aplicações | 42 |
| Tópico 1 – Congruência de ângulos e de triângulos | 43 |
| Tópico 2 – Transporte e medição de ângulos | 58 |
| Aula 4 – O Teorema do Ângulo Externo e Paralelismo | 70 |
| Tópico 1 – O Teorema do Ângulo Externo | 71 |
| Tópico 2 – Paralelismo | 84 |
| Aula 5 – Quadriláteros notáveis e construção de polígonos regulares | 96 |
| Tópico 1 – Quadriláteros notáveis | 97 |
| Tópico 2 – Construção de polígonos regulares com régua e compasso | 118 |

| | |
|--|-----|
| Aula 6 – Lugares geométricos planos | 127 |
| Tópico 1 – Lugares geométricos planos básicos | 128 |
| Tópico 2 – Tangência e ângulos no círculo | 138 |
| Aula 7 – Semelhança de triângulos: conceitos e aplicações | 153 |
| Tópico 1 – Semelhança de triângulos | 154 |
| Tópico 2 – Aplicações da semelhança de triângulos | 169 |
| Aula 8 – Área de figuras planas | 188 |
| Tópico 1 – Noção de área | 189 |
| Tópico 2 – Mais algumas fórmulas para o cálculo de áreas | 203 |
| Referências | 224 |
| Sobre o autor | 226 |

Apresentação

Prezado(a) aluno(a),

Este texto foi escrito com o objetivo de apresentar a você os fundamentos da Geometria Euclidiana Plana. Aqui, você irá encontrar muitos resultados que provavelmente já estudou em sua formação básica e outros que talvez que você ainda não conheça. Entretanto, mais do que o conteúdo, a *forma* com que os resultados serão apresentados é de grande importância. Você perceberá que os resultados seguem uma ordem lógica, sendo que cada afirmação é demonstrada, usando-se as afirmações precedentes.

É claro que este ordenamento nos obriga a adotar um ponto de partida, ou seja, devemos começar com alguns resultados admitidos como verdadeiros sem demonstração. Esses resultados são chamados de *axiomas* e, por isso, esse tipo de abordagem da Geometria é chamada de *método axiomático*. O método axiomático é uma contribuição original e peculiar da cultura grega para a civilização ocidental. Seu principal expoente é o tratado escrito por Euclides de Alexandria no século IV a.C., chamado *Os Elementos*. Acredito ser de extrema importância que o professor de Matemática tenha em sua formação contato com este clássico, mesmo que de modo parcial e indireto. É o que faremos aqui, pois estudaremos praticamente todos os resultados do Livro I dos *Elementos*. Longe de ser um anacronismo, tal estudo revela a importância do texto de Euclides e a perenidade dos resultados em Matemática. Dificilmente você terá a oportunidade de estudar outro assunto em que a elegância e o frescor sejam mantidos, mesmo com a veneranda idade de mais de vinte e três séculos!

Outra característica marcante dos *Elementos* é a presença de problemas de construção com régua e compasso. Você irá aprender a realizar muitas dessas construções e a justificar a sua validade, usando argumentos geométricos. Por outro lado, na Aula 5 você verá um resultado obtido por K.F.Gauss em 1796, baseado no qual podemos afirmar que certas figuras, como o polígono regular de sete lados, *não* podem ser construídas usando-se apenas régua e compasso.

Ao final destas aulas, espero que você esteja convencido da importância da Geometria Euclidiana Plana e perceba que, além de ser uma ferramenta com um grande espectro de aplicações, tem uma importância intrínseca que não deve ser menosprezada.

Quero terminar esta apresentação agradecendo à Professora Kiara Lima Costa pelo trabalho cuidadoso de revisão que muito ajudou a melhorar este texto.

Angelo Papa Neto
Fortaleza, junho de 2017.

7

Axiomas na geometria euclidiana

Caro(a) aluno(a),

Iniciaremos nosso estudo de geometria plana e das construções geométricas. Para começar, esboçaremos uma ideia do que é geometria. Se olharmos em volta, iremos perceber que muitos dos objetos que nos rodeiam têm formas simples e bem definidas: uma porta, uma mesa, a tela de um computador e um livro têm um formato retangular. Uma moeda, alguns mostradores de relógios e as rodas de um carro têm um formato circular. Uma fatia de pizza, algumas placas de trânsito, uma colher de pedreiro e um cabide, têm formatos aproximadamente triangulares. Entre os instrumentos musicais, pode-se citar o próprio triângulo.

A observação desses vários objetos nos leva a conceber a ideia de forma geométrica. Retângulos, círculos e triângulos são exemplos de formas geométricas. No entanto, devemos ter em mente que uma forma geométrica é um objeto abstrato, uma ideia que emana dos objetos reais. A geometria se ocupa do estudo das propriedades das formas geométricas. Como essas formas são abstratas, não podemos encontrar as suas propriedades, baseados apenas em figuras. Necessitamos de definições precisas do que são as formas geométricas. As suas propriedades serão deduzidas usando-se lógica, a partir de afirmações aceitas como verdadeiras, que chamaremos de axiomas.

Nessa primeira aula, apresentaremos a noção de axioma, estudaremos o papel dos axiomas na construção da geometria como um organismo coeso e logicamente coerente, e também apresentaremos os dois grupos iniciais de axiomas: os de incidência e os de ordem.

Objetivos

- Compreender a noção de axioma e sua importância para a geometria
- Estudar os axiomas de incidência e de ordem da geometria plana

O método lógico-dedutivo e a noção de axioma na geometria plana

OBJETIVOS

- Reconhecer o método lógico-dedutivo como um modo de pensar sobre fatos matemáticos
- Conhecer a noção de axioma e seu papel na geometria plana

Neste primeiro tópico da aula 1, conheceremos uma abordagem da geometria chamada método lógico-dedutivo. Também apresentaremos a noção de axioma e avaliaremos sua importância para o estudo da geometria.

Vamos supor que desejamos convencer alguém de que um determinado fato seja verdadeiro. Você provavelmente sabe o que é um triângulo retângulo: se encostarmos uma escada em uma parede, a escada junto com uma parte da parede e uma parte do chão, formarão um triângulo retângulo, veja figura 1.

Figura 1 – Triângulo retângulo



Fonte: DEaD | IFCE

A afirmação: *em um triângulo retângulo, o quadrado do lado maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados*, é um resultado antigo e famoso, que nós conhecemos como Teorema de Pitágoras. Por que esse resultado é verdadeiro?

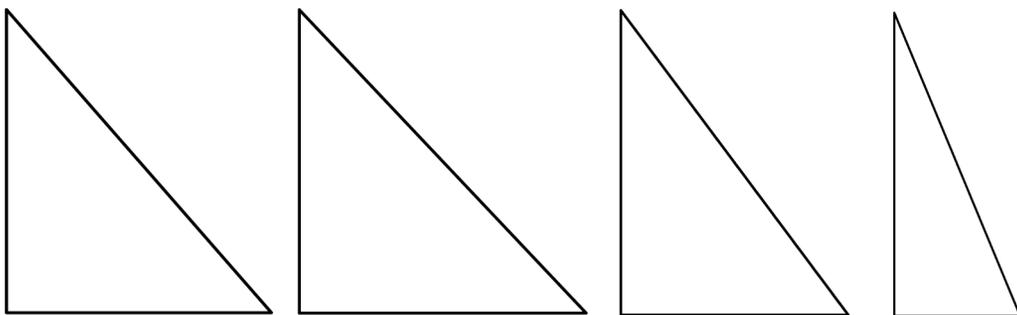
Ao longo da história, as pessoas têm convencido outras de que certas afirmações são verdadeiras. Para isso elas tem utilizado diversos métodos. Um deles é baseado na noção de autoridade. Ele consiste em considerar verdade aquilo que um chefe, ou líder, ou um grupo de pessoas dominantes ou influentes afirmam ser verdadeiro. Neste caso, não se exige uma justificativa mais detalhada além da autoridade de quem afirma. Por exemplo, você pode acreditar que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro porque confia na autoridade de quem afirma, seja ele um professor ou o autor de um livro. É claro que você também pode questionar essa autoridade e não se convencer apenas com uma afirmação sem justificativas.

Uma discussão sobre outros métodos de convencimento e sobre o método lógico-dedutivo pode ser encontrada no texto do professor Milton dos Santos Brait, disponível em http://mtm.ufsc.br/~msbrait/capitulo_II.pdf



Um segundo método, bem mais evoluído, está na base do pensamento científico moderno. Ele consiste em verificar que um determinado resultado é válido para uma quantidade muito grande de exemplos. São feitos experimentos que confirmam uma determinada previsão e, baseando-se nisso, acredita-se que essa previsão é verdadeira, pelo menos até que surja algum experimento que a desminta. No nosso exemplo, podemos considerar uma quantidade grande de triângulos retângulos de várias formas e tamanhos. Para cada um desses triângulos, podemos medir seus lados e verificar que o resultado é válido. Tente com os triângulos abaixo. Usando uma régua, meça o tamanho dos lados de cada triângulo retângulo. Depois eleve ao quadrado cada um dos lados. Some os resultados obtidos e compare com o quadrado da medida do lado maior.

Figura 2 – Triângulos retângulos



Os resultados dessas várias medições nos levam a formular o resultado geral

$$a^2 = b^2 + c^2$$

em que a é a medida do lado maior, chamado *hipotenusa*, e b e c são as medidas dos outros dois lados, chamados *catetos*. No entanto, esse método não é suficientemente preciso para garantir que essa relação valha sempre. Seria possível, por exemplo, que a relação entre os lados de um triângulo retângulo fosse, na verdade, $a^2 = b^2 + c^2 + d$, em que d é uma quantidade pequena demais para ser detectada por nossas medições.

Como garantir, então, que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro? O método que usaremos aqui parece ter sido uma criação original dos antigos gregos. Costumamos chamá-lo de *método lógico-dedutivo*. Ele consiste basicamente no seguinte: se queremos mostrar que uma afirmação A é verdadeira, devemos

1. Supor que uma afirmação B é verdadeira e
2. Mostrar que a afirmação A segue logicamente de B

Ou seja, devemos mostrar que *se vale B , então vale A* . Dessa forma sabemos que, uma vez aceita a validade da afirmação B , a afirmação A também deverá ser aceita como válida. Assim, transferimos o problema de A para B , ou seja, a pergunta “ A é verdadeira?” poderá ser substituída pela pergunta “ B é verdadeira?” Isso só será vantajoso se a afirmação B for mais simples do que a afirmação A . Chamamos a afirmação B de premissa, ou hipótese, e a afirmação A , de conclusão, ou tese.

O método lógico-dedutivo foi aplicado pelo matemático grego Euclides de Alexandria em sua monumental obra, *Os Elementos*, escrita há cerca de 2200 anos. A ideia de noção primitiva, no entanto, é bem mais recente, tendo surgido na segunda metade do século XIX.



Se pudermos mostrar que a afirmação B segue logicamente de uma afirmação C mais simples ainda, e se pudermos repetir esse processo para a afirmação C e para todas as afirmações mais simples das quais C é consequência, chegaremos eventualmente a uma ou mais afirmações suficientemente simples para serem consideradas verdadeiras sem a necessidade de uma justificativa além de sua aceitação como evidentes. Essas afirmações são chamadas *axiomas*.

Uma vez selecionado um grupo de axiomas, podemos *deduzir*, usando regras da lógica, afirmações que chamamos de *teoremas*. A essa dedução, damos o nome de *demonstração*. Se um teorema for demonstrado, ele poderá ser usado como premissa na demonstração de outros teoremas. Dentre os teoremas a serem deduzidos estarão as afirmações A , B e C , com as quais começamos, mas podem ser demonstradas outras afirmações. O conjunto de teoremas que podem ser deduzidos a partir de um conjunto inicial de axiomas é chamado de *teoria*.



O tratamento axiomático dado à geometria se assemelha a um jogo, sendo que os axiomas são as regras do jogo. Leia mais sobre dois jogos antigos e famosos: o xadrez (veja http://www.ligabrasileiradexadrez.com.br/Livros/Leis%20do%20Xadrez%20Comentadas%202016_1.pdf) e o go (veja <http://go.alamino.net/aprendajogargo/>).

Além dos axiomas, devemos tomar como ponto de partida as definições de alguns objetos. Em Matemática, definir um objeto significa dar um nome a ele, de modo a caracterizá-lo dentro um conjunto mais amplo de objetos. Por exemplo, vimos que no Teorema de Pitágoras aparece a expressão triângulo retângulo. Embora já tenhamos uma ideia do que venha a ser um triângulo retângulo é necessário dizer exatamente o que ele é. Precisamos então dar uma definição de triângulo como sendo a união de três segmentos de reta e, dentre os triângulos, precisamos identificar aqueles que são retângulos. Estes são os que têm um ângulo interno reto. Observe que, para definir triângulo retângulo, fizemos uso de outros termos que precisam ser definidos: segmento, lado, ângulo, ângulo interno, ângulo reto. Dessa forma, as definições obedecem a um encadeamento similar ao dos teoremas. Cada definição faz uso de palavras que podem ter o significado usual da língua ou um significado específico, dado por outra definição anterior.

Assim como a sequência dos teoremas começa com resultados que são assumidos sem demonstração, os axiomas, a sequência das definições deve começar com termos que não são definidos, chamados *noções primitivas*. O que caracteriza uma noção primitiva são as suas propriedades enunciadas nos axiomas.

Por exemplo, em geometria as noções de *ponto* e *reta* são primitivas. Não precisamos exibir uma definição de ponto nem uma definição de reta. Esses dois objetos são caracterizados pelos axiomas que citam as palavras ponto e reta. Um exemplo de axioma desse tipo é

Por dois pontos distintos passa uma única reta.

Esse e os outros axiomas da geometria plana serão apresentados ao longo do texto. Nesse ponto, você deve estar curioso a respeito da demonstração do Teorema de Pitágoras. Não a faremos agora, pois alguma teoria ainda deve ser desenvolvida até que possamos elaborar uma demonstração desse teorema. Nos *Elementos* de Euclides, o Teorema de Pitágoras aparece no final do livro I, como a Proposição 47.

Agora que temos uma ideia do que é noção primitiva, do que é axioma e de como uma teoria pode ser construída a partir de axiomas, vamos iniciar, no tópico seguinte, a efetiva construção de nossa teoria geométrica a partir dos axiomas de incidência e de ordem.

Axiomas de incidência e de ordem

OBJETIVOS

- Estudar os axiomas de incidência e algumas de suas consequências
- Estudar os axiomas de ordem e algumas de suas consequências

No tópico anterior conhecemos os conceitos de noção primitiva, axioma, teorema e esboçamos a estrutura da geometria euclidiana. Neste tópico iniciaremos o estudo da geometria euclidiana plana com os axiomas mais básicos e suas consequências imediatas.

Veremos o plano como um conjunto cujos elementos são chamados de **pontos**, que iremos denotar com letras latinas maiúsculas: A, B, C , etc. Um subconjunto qualquer do plano é chamado de **figura plana**. Assumiremos a existência de figuras especiais, chamadas **retas**, que denotaremos com letras latinas minúsculas: r, s, t , etc. Entre ponto e reta existe uma relação de incidência: se A é um ponto e r é uma reta, dizemos que A *pertence* a r , ou que a reta r *passa* por A , se o ponto A for um elemento de r , o que indicamos com a notação $A \in r$. Dois ou mais pontos que pertencem a uma mesma reta são denominados **colineares**. Se o ponto A não for um elemento da reta r , dizemos que A *está fora* de r , ou que r *não passa* por A , e indicamos esse fato com a notação $A \notin r$.

Estabelecida essa nomenclatura, podemos enunciar os **axiomas de incidência** da seguinte forma:

- I1 Por dois pontos distintos passa uma única reta.
- I2 Toda reta passa por pelo menos dois pontos distintos.
- I3 Existem três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

Um conjunto de pontos que satisfaz as três condições acima é chamado *geometria de incidência*. Como ainda estamos exigindo muito pouco, não devemos esperar muitos resultados, mas já podemos demonstrar nosso primeiro teorema.

Teorema 1.1 Duas retas distintas têm no máximo um ponto em comum.

Precisamos justificar a validade da afirmação acima baseados apenas nos três axiomas de incidência. Mesmo que tenhamos uma noção intuitiva do que é reta e aceitemos, baseados nessa noção, que esse resultado é plausível, devemos procurar uma demonstração. Isso se dá porque queremos desenvolver uma geometria que seja baseada exclusivamente nos axiomas e cujos resultados sejam deduzidos a partir desses axiomas usando-se lógica. O fato de os resultados serem compatíveis com aquilo que se espera nos diz que os axiomas foram escolhidos de modo adequado.

Demonstração do Teorema 1.1: O teorema afirma que, se r e s são duas retas e $r \neq s$, então essas retas não podem ter mais do que um ponto em comum. De fato, se r e s contivessem ambas os pontos distintos A e B , pelo axioma I1, teríamos $r = s$. Como as retas são distintas, elas podem ter, no máximo, um ponto em comum. ■

Evidentemente, ao pensarmos nos axiomas de incidência, temos em mente o modelo de geometria de incidência dado por um plano usual, por exemplo, uma folha de papel onde se desenham pontos e retas. No entanto, existem exemplos de geometrias de incidência bem diferentes do que imaginamos ser um plano, como veremos a seguir.

Na demonstração do Teorema 1.1, usamos a unicidade garantida pelo axioma I1, ou seja, usamos a parte do axioma que garante que a reta que passa por dois pontos distintos é **única**.



Exemplo 1 Consideremos o conjunto $P = \{A, B, C\}$ formado por três pontos. Chamando de retas os subconjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, vemos, por inspeção direta, que os axiomas I1, I2 e I3 são satisfeitos pelo conjunto P . Logo esse conjunto é uma geometria de incidência com três pontos. Em um conjunto de quatro pessoas, cada uma conhece as outras três. Chamemos de ponto cada pessoa do conjunto, e de reta, cada par de pessoas que se conhecem. Com essa nomenclatura, esse conjunto é uma geometria de incidência.

Exemplo 2 (O plano cartesiano real) Considere o conjunto dos pares ordenados de números reais: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Chamando os pares ordenados (x, y) de pontos, e chamando de retas os conjuntos de pares ordenados que satisfazem equações do tipo $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, vamos verificar que o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma geometria de incidência. Primeiramente, para mostrar que vale o axioma I1, consideremos dois pontos distintos (a_1, a_2) e (b_1, b_2) . A reta formada pelos pares ordenados que satisfazem a equação $y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (x - a_1)$ passa pelos pontos (a_1, a_2) e (b_1, b_2) . Para verificar isso, basta substituímos $x = a_1$ na equação, para encontrarmos $y = a_2$ e substituímos $x = b_1$ para encontrarmos $y = b_2$.

Para mostrarmos que vale I2, tomemos uma equação que determina uma reta e suponhamos inicialmente que a coordenada y aparece na equação, ou seja, que $b \neq 0$. Neste caso, podemos considerar dois valores diferentes para x e determinamos os valores correspondentes para y resolvendo a equação. Por exemplo, fazendo $x = 0$, obtemos $a \cdot 0 + by + c = 0$, logo $y = -\frac{c}{b}$ (lembre-se que estamos supondo $b \neq 0$). Fazendo $x = 1$, obtemos $a \cdot 1 + by + c = 0$, logo $y = -\frac{a+c}{b}$. Assim, os pontos distintos $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ e $\left(1, -\frac{a+c}{b}\right)$ estão sobre a reta que tem equação $ax + by + c = 0$. Isso mostra que toda reta passa por pelo menos dois pontos distintos. Se a coordenada y não aparece na equação da reta, isto é, se $b = 0$, basta considerar os pontos distintos $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ e $\left(-\frac{c}{a}, 1\right)$ (como $a^2 + b^2 \neq 0$, os coeficientes a e b não podem ser ambos nulos. Logo, $b = 0$ implica que $a \neq 0$). Finalmente, para verificar a validade de I3, tomemos os pontos $(0,0), (0,1)$ e $(1,0)$. Se existisse uma reta de equação $ax + by + c = 0$ passando por esses três pontos, então teríamos $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$, donde teríamos $c = 0$, $a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0$, donde teríamos $b + c = 0$ e, como $c = 0$, seria também $b = 0$. Teríamos ainda $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0$, donde $a + c = 0$ e, como $c = 0$, $a = 0$. Mas isso é uma contradição, pois a e b não podem ser simultaneamente iguais a zero. Assim, não existe uma reta que passa pelos três pontos $(0,0), (0,1)$ e $(1,0)$.

Vamos, agora, estudar os **axiomas de ordem**. O objetivo de introduzir esses axiomas é tornar precisas as noções de “estar entre”, de “estar do mesmo lado” ou “estar do outro lado”, “estar dentro” ou “estar fora” e de “ser maior que” ou “ser menor que”. Dados três pontos A, B e C , assumiremos que existe uma relação entre esses três pontos que denotaremos escrevendo $A * B * C$ e leremos “ B está entre A e C ”. Esta relação é uma noção primitiva e está sujeita aos seguintes axiomas:

- O1 Se B está entre A e C , então os pontos A , B e C são colineares e distintos.
- O2 Se $A * B * C$, então $C * B * A$.
- O3 Para quaisquer dois pontos distintos A e B , existem pontos C e D , tais que $A * B * C$ e $A * D * B$.
- O4 Dados três pontos colineares e distintos, exatamente um deles está entre os outros dois.



Usaremos a notação ΔABC para indicar o triângulo de vértices A , B e C . Quando não houver perigo de confusão, usaremos a notação ABC , sem o Δ , para indicar o triângulo.

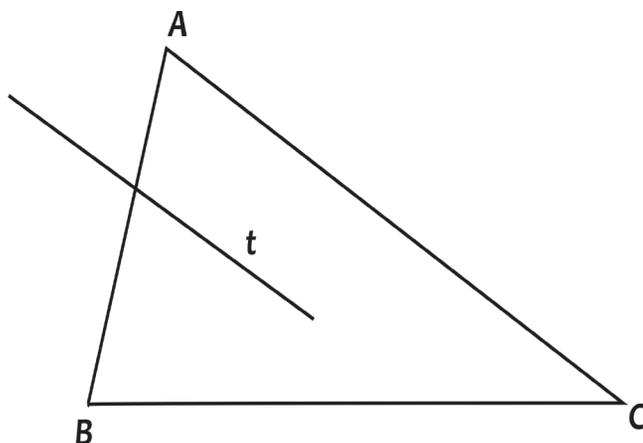
Os axiomas de ordem nos permitem definir alguns objetos importantes da geometria. Dados dois pontos distintos A e B , o **segmento de reta AB** é o conjunto formado pelos pontos A e B e por todos os pontos que estão entre A e B . Dados três pontos não colineares A , B e C , o **triângulo ΔABC** é a união dos segmentos de reta AB , AC

e BC . Os pontos A , B e C são chamados **vértices** do triângulo ΔABC e os segmentos AB , AC e BC são chamados **lados** do triângulo ΔABC .

Por outro lado, para definirmos outros objetos como semiplanos ou semirretas, precisamos de mais um axioma. O axioma a seguir recebe o nome do matemático alemão Moritz Pasch (1843 – 1930), que foi o primeiro a utilizá-lo.

(Axioma de Pasch) Dado um triângulo ΔABC , se uma reta t passa por um ponto entre A e B , então essa reta também passa por um ponto de um dos outros dois lados do triângulo.

Figura 3 – Axioma de Pasch



A figura 3 é uma ilustração do Axioma de Pasch: a reta t que entra no triângulo cortando o lado AB terá que sair cortando um dos outros dois lados.

O axioma de Pasch é equivalente ao seguinte axioma.

(Axioma de separação) Fixada uma reta t , o conjunto dos pontos do plano que não pertencem a essa reta é a união de dois conjuntos S_1 e S_2 que satisfazem as seguintes condições:

- (1) Se P e Q são dois pontos de S_1 , então o segmento PQ está totalmente contido em S_1 .
- (2) Se P e Q são dois pontos de S_2 , então o segmento PQ está totalmente contido em S_2 .
- (3) Se $P \in S_1$ e $Q \in S_2$, então o segmento PQ tem um ponto em comum com a reta t .

Os conjuntos S_1 e S_2 são chamados **semiplanos** determinados pela reta t .

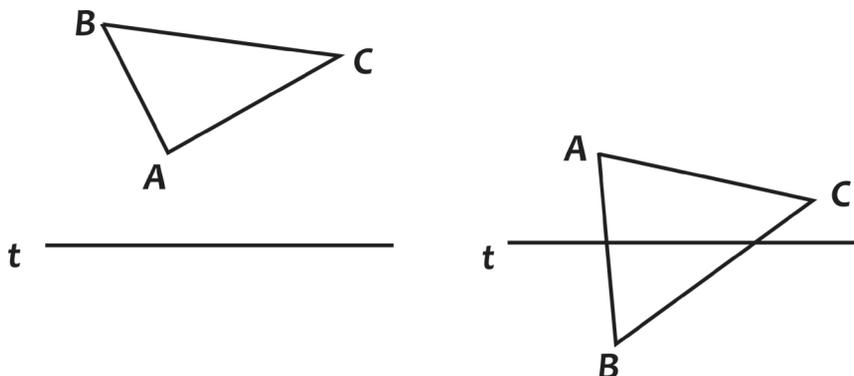
A demonstração de que os axiomas de Pasch e da separação são equivalentes não será feita aqui. Em vez disso, daremos apenas um exemplo de como a partir do axioma de Pasch podemos verificar a validade das condições do axioma de separação.

Exemplo 3 Seja t uma reta no plano. Sabemos, pelo axioma I3, que existem pontos fora da reta t . Seja A um desses pontos. Consideremos dois subconjuntos S_1 e S_2 do plano com as seguintes propriedades:

- S_1 é formado por todos os pontos $P \notin t$ do plano, tais que o segmento AP não tem pontos em comum com a reta t .
- S_2 é formado por todos os pontos $Q \notin t$ do plano, tais que o segmento AQ tem um ponto em comum com a reta t .

Esses conjuntos são exatamente os semiplanos determinados pela reta t que aparecem no axioma de separação.

Figura 4 – Duas posições relativas entre a reta t e o triângulo $\triangle ABC$



Sejam B e C pontos do plano que não pertencem à reta t e não são colineares com o ponto A . Podem ocorrer duas situações:

1. A reta t não intersecta os lados do triângulo $\triangle ABC$ (veja a figura acima à esquerda). Neste caso, tanto B quanto C pertencem ao conjunto S_1 . O segmento BC está totalmente contido em S_1 , do contrário, este segmento teria um ponto em comum com a reta t e, pelo Axioma de Pasch, a reta t teria necessariamente um ponto em comum com o segmento AB ou com o segmento AC , o que não ocorre. O caso em que B e C estão ambos em S_2 é análogo.
2. A reta t intersecta um dos lados do triângulo $\triangle ABC$ (veja a figura acima à direita). Neste caso, o Axioma de Pasch garante que a reta t também irá intersectar exatamente mais um dos lados do triângulo. Isso significa que um dos pontos B e C estará “do mesmo lado” que o ponto A , isto é, em S_1 , enquanto o outro ponto estará “do lado oposto” ao do ponto A , isto é, em S_2 .

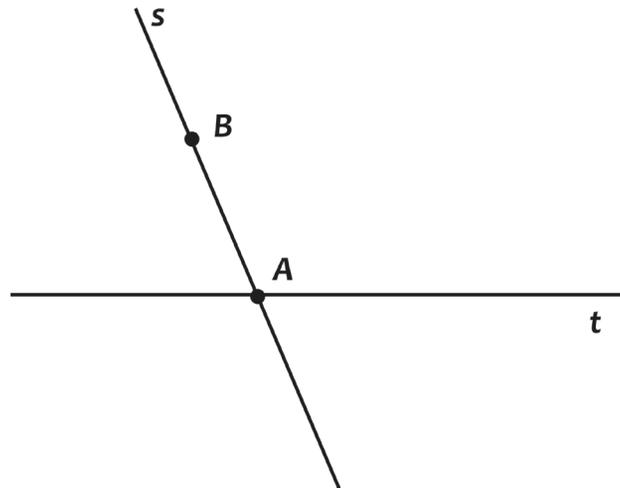
Vamos agora mostrar que um ponto sobre uma reta t divide em dois conjuntos cuja união é a reta.

Teorema 1.2 Seja A um ponto sobre uma reta t . O conjunto dos pontos da reta t diferentes de A é a união de dois subconjuntos s_1 e s_2 , os dois lados de t determinados por A , com as seguintes propriedades:

- Se P e Q são pontos pertencentes ao mesmo lado da reta t , então o ponto A não pertence ao segmento PQ .
- Se P e Q são pontos pertencentes a lados opostos da reta t , então o ponto A pertence ao segmento PQ .

Demonstração: O axioma I3 garante que existe um ponto B do plano fora da reta t (veja a figura 5). Seja s a reta que passa pelos pontos A e B , e sejam S_1 e S_2 os semiplanos determinados pela reta s .

Figura 5 – Usando o axioma de separação na demonstração do Teorema 1.2



Fonte: DEaD | IFCE

Consideremos as interseções $s_1 = S_1 \cap t$ e $s_2 = S_2 \cap t$. Vamos supor que P e Q são pontos em um mesmo lado de t , digamos $P, Q \in s_1$. Então $P, Q \in s_1 = S_1 \cap t \subset S_1$. Pelo axioma de separação, PQ não têm pontos em comum com a reta s . Como o ponto A pertence à reta s , temos que, neste caso, o ponto A não pertence ao segmento PQ .

Se P e Q são pontos em lados opostos de t , digamos $P \in s_1$ e $Q \in s_2$, então $P \in s_1 \subset S_1$ e $Q \in s_2 \subset S_2$. Novamente pelo axioma de separação, o segmento PQ tem um ponto em comum com a reta s . Esse ponto pertence a $PQ \cap s \subset t \cap s = \{A\}$. Logo, neste caso, o ponto A pertence ao segmento PQ . ■

Os subconjuntos s_1 e s_2 determinados na reta t pelo ponto A recebem o nome de **semirretas com origem em A** .

Com isso, concluímos o tópico e nossa primeira aula. Nesta aula apresentamos as ideias básicas da geometria: os conceitos de axioma, noção primitiva, teorema, demonstração e o método lógico-dedutivo, comparando-o com outros métodos usados para descrever e compreender a natureza. No segundo tópico, vimos aqui os dois primeiros grupos de axiomas, os de incidência e os de ordem. Vimos também nossos primeiros teoremas de geometria, baseados apenas nesses axiomas. Estudamos alguns exemplos de geometrias de incidência, que são objetos que satisfazem os axiomas de incidência. Usamos os axiomas de ordem para definir objetos importantes: segmentos de reta, semiplanos e semirretas. Na próxima aula, estudaremos os axiomas sobre congruência de segmentos que nos permitirão transportar e medir segmentos. Também estudaremos os primeiros exemplos de construções com régua e compasso, baseando-nos no Livro I da obra escrita pelo matemático grego Euclides de Alexandria. Tal obra, escrita originalmente em 13 livros, é conhecida como *Os Elementos*.



1. O plano de Fano contém sete pontos: $\mathbb{F} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e sete retas: $\{A, F, B\}$, $\{B, D, C\}$, $\{C, E, A\}$, $\{A, G, D\}$, $\{B, G, E\}$, $\{C, G, F\}$ e $\{D, E, F\}$. Verifique se o plano de Fano é uma geometria de incidência.
2. Estude cuidadosamente o Exemplo 1.2 (plano cartesiano real), adaptando-o para o conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ formado pelos pares ordenados de números racionais.
3. Dizemos que um conjunto \mathbb{A} de pontos do plano é **convexo** se, dados dois pontos distintos $P, Q \in \mathbb{A}$, o segmento de reta PQ está totalmente contido em \mathbb{A} . Use o axioma de separação para mostrar que um semiplano é um conjunto convexo. A interseção de conjuntos convexos também é um conjunto convexo. Verifique isso.
4. Seja \mathbb{P} um plano de incidência onde também vale o axioma O3. O conjunto \mathbb{P} pode ter um número finito de pontos? Por quê?

Construções com régua e compasso e os axiomas de congruência de segmentos

Caro(a) aluno(a),

Nesta segunda aula, estudaremos os axiomas de congruência de segmentos e veremos que a principal ferramenta para a medição de segmentos é o “transporte” de segmentos, fazendo uso da régua e do compasso como instrumentos.

Começaremos a estudar uma parte do tratado clássico de Euclides de Alexandria, *Os Elementos*, que permaneceu como livro fundamental da Geometria durante mais de dois mil anos. O próprio nome *Geometria Euclidiana* é uma referência a Euclides e a sua monumental obra. Foi apenas no século XIX, com a descoberta de geometrias “não euclidianas”, que a autoridade absoluta da obra de Euclides começou a ser questionada e revista.

No tópico 1, estudaremos com detalhe as duas primeiras proposições do Livro I dos *Elementos*, em que Euclides explica como transportar um segmento de reta para outra posição no plano usando régua e compasso. No tópico 2, estudaremos a abordagem moderna sobre os axiomas de congruência de segmentos de reta e veremos como esses axiomas podem substituir a régua e o compasso no transporte segmentos.

Objetivos

- Reconhecer a presença das construções geométricas com régua e compasso nos *Elementos* de Euclides
- Compreender e relacionar os axiomas de congruência de segmentos com os problemas de transporte e de medição de segmentos

Construções geométricas nos *Elementos* de Euclides

22

OBJETIVOS

- Conhecer a estrutura básica do texto clássico de Euclides: *Os Elementos*
- Entender algumas definições, axiomas e proposições presentes no livro I dos *Elementos* de Euclides
- Reconhecer a importância das construções geométricas no texto de Euclides

Na aula passada começamos nosso estudo sobre a geometria adotando o método lógico dedutivo. Como já dissemos antes, a referência mais antiga e respeitada a usar essa abordagem é o clássico livro *Os Elementos*, escrito por Euclides de Alexandria por volta do ano 300 a.C. Mas o que encontramos ao ler esse tão famoso livro?

O livro que conhecemos como *Os Elementos* é um tratado dividido em 13 capítulos, que Euclides chama de *livros*. A tabela a seguir exhibe o conteúdo geral de cada um dos treze livros.

Tabela 1 – Descrição do conteúdo de cada livro que compõem *Os Elementos*

| Livro | Conteúdo |
|------------|------------------------------------|
| Livro I | Fundamentos da geometria plana |
| Livro II | Geometria dos retângulos |
| Livro III | Geometria do círculo |
| Livro IV | Polígonos regulares em círculos |
| Livro V | Teoria geral das proporções. |
| Livro VI | Semelhança |
| Livro VII | Aritmética básica |
| Livro VIII | Números (inteiros) em proporção |
| Livro IX | Números pares, ímpares e perfeitos |

| | |
|------------|---------------------------------------|
| Livro X | Segmentos de reta incomensuráveis |
| Livro XI | Fundamentos da geometria espacial |
| Livro XII | Áreas, volumes e o método da exaustão |
| Livro XIII | Poliedros regulares (ou platônicos) |

Fonte: Elaboração do autor



Você pode encontrar uma versão do Livro I dos Elementos no link: <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html>.

Mais informações podem ser encontradas nos vídeos: <https://www.youtube.com/watch?v=nXAIWzCpeQk&feature=youtu.be&list=PL110A043C85E989EA> e <https://www.youtube.com/watch?v=UgqoxHNTpWM>.

Observando a tabela, vemos que os livros VII a IX são dedicados à aritmética, e que boa parte dos livros XI a XIII é dedicada à geometria espacial. Na nossa disciplina, estudaremos a geometria plana, ou seja, o equivalente à parte do conteúdo dos livros I a IV, VI, X e XII.

No início de cada livro, salvo algumas exceções, Euclides define os objetos

que serão estudados e depois apresenta uma sequência lógica de proposições com suas respectivas demonstrações. Se tomarmos como base o Livro I, observamos que inicialmente aparecem as definições de alguns objetos como ponto, reta, círculo, ângulo, triângulo, etc.

Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

(EUCLIDES, 2009, p.97)

E mais adiante

13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.

(EUCLIDES, 2009, p.97).

Logo depois:

19. Figuras retílineas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

(EUCLIDES, 2009, p.97).

Suas definições, entretanto, nem sempre são bem-sucedidas. Por exemplo, como vimos acima, a segunda definição do livro I diz: *linha reta é comprimento sem largura*. Mas, para definir comprimento e largura, é necessário o uso da noção de reta. Esse problema com as definições só foi resolvido muito tempo depois. Como já vimos na Aula 1, a abordagem moderna, que só se cristalizou no século XIX, trata ponto, reta e alguns outros objetos e relações como *noções primitivas*, que são conceitos não definidos, determinados por propriedades dadas nos axiomas.

Após listar as definições do livro I, Euclides enumera os axiomas, divididos em duas espécies: **as noções comuns** e **os postulados**.

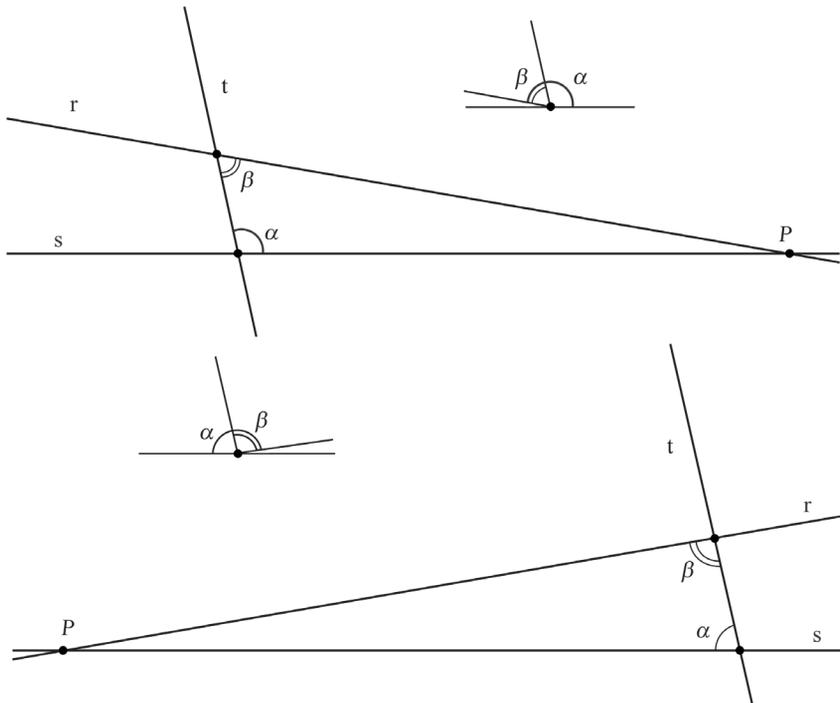
• **Noções comuns:**

- NC1 Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
- NC2 Se iguais são adicionados a iguais, então os todos são iguais.
- NC3 Se iguais são retirados de iguais, então os restos são iguais.
- NC4 Caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.
- NC5 Os dobros de uma mesma coisa são iguais entre si.
- NC6 As metades de uma mesma coisa são iguais entre si.
- NC7 Coisas que se ajustam uma a outra são iguais entre si.
- NC8 O todo é maior do que a parte.
- NC9 Duas retas não contêm uma área.

• **Postulados:**

- P1** Fiquem postulados traçar uma reta de um ponto até qualquer outro ponto.
- P2** Também prolongar uma reta finita, continuamente, sobre uma reta.
- P3** E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- P4** E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- P5** E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (figura 6).

Figura 6 – Quinto postulando de Euclides



Fonte: DEaD | IFCE

Os postulados 1 e 2 correspondem, respectivamente, aos axiomas I1, de incidência, e O3, de ordem, que já vimos na Aula 1. As noções comuns e os outros postulados, principalmente o misterioso quinto postulando (das paralelas) serão discutidos na Aula 4.

Para mais informações sobre o quinto postulando de Euclides, veja http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/postulado_paralelas.html



Depois disso, Euclides começa a enunciar e demonstrar os resultados decorrentes dos axiomas e das definições, que ele chama de *Proposições*. O livro I tem 48 proposições. Vejamos a primeira.

Problema 1 (Elementos, Livro I, Proposição 1) Sobre uma reta finita dada, construir um triângulo equilátero.

Alguns termos dessa proposição precisam ser explicados. Primeiro, para Euclides *reta finita* significa o que chamamos de segmento de reta, que definimos na Aula 1 (esse termo também aparece no segundo postulado). Outra coisa que pode causar estranheza é que essa proposição não tem o aspecto de um teorema, se parece mais com um exercício. Euclides aparentemente desafia o leitor a construir um triângulo equilátero sobre um segmento de reta dado. Embora ele não afirme explicitamente, para Euclides, *construir* significa *construir com régua e compasso*. A régua euclidiana, ou seja, o instrumento imaginado por Euclides nos *Elementos* quando ele constrói retas, não tem marcações, ou seja, não é um instrumento de medição, mas apenas um instrumento com o qual se pode traçar retas. O compasso, por sua vez, é um instrumento com o qual se pode traçar círculos. Ele é formado por duas hastes, que chamamos de pernas. Na extremidade de uma das pernas há uma ponta que não desenha, chamada **ponta cega** ou **ponta seca**, e na extremidade da outra perna há uma ponta que é capaz de traçar arcos de círculo. Para usarmos o compasso fixamos a ponta cega sobre um ponto O , que será o centro do círculo a ser traçado, e a outra ponta em um ponto $A \neq O$, por onde o círculo irá passar. Quando fazemos isso, costumamos dizer que *colocamos o compasso com centro O e abertura até A , ou abertura OA* . Fazemos, então, a ponta que desenha deslizar sobre o papel, traçando um arco de círculo ou um círculo completo.

Assim, construir com régua e compasso significa *construir usando apenas retas e círculos*. Como neste ponto Euclides já tem definido o que é reta e o que é círculo, a Proposição 1 do Livro I afirma, em linguagem moderna, o seguinte:

Problema 1 Para qualquer segmento de reta dado, existe um triângulo equilátero que tem esse segmento como lado.

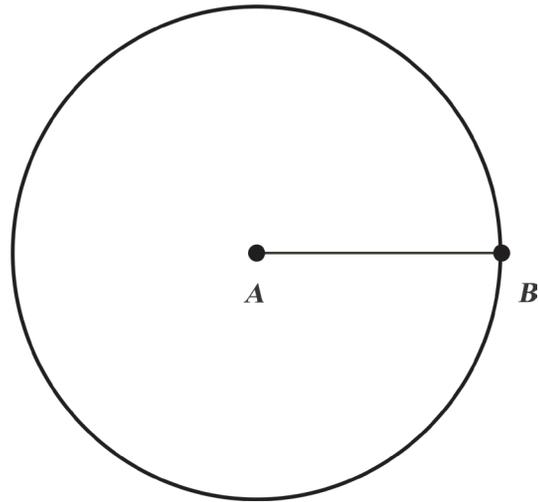
Em geral, uma proposição dos *Elementos* que fale em construção é um *teorema de existência*, isto é, afirma a existência de um determinado objeto.

Vejamos como Euclides procede na construção do triângulo equilátero.

Solução do Problema 1:

Inicialmente iremos mostrar que é possível realizar a construção desse triângulo e, depois, provaremos que se trata de um triângulo equilátero. De fato, seja AB um segmento de reta dado. Com o compasso centrado no ponto A e de abertura AB , tracemos um círculo de centro A passando pelo ponto B (figura 7).

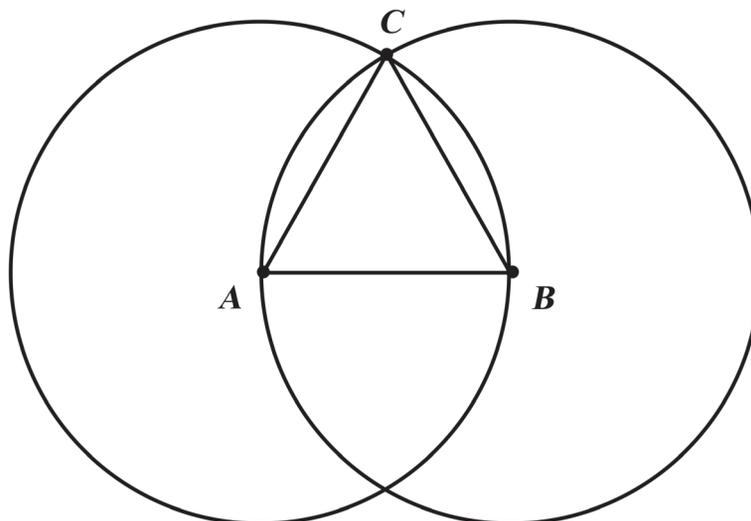
Figura 7 – Círculo de centro A passando por B



Fonte: DEaD | IFCE

Agora, com o compasso centrado em B e abertura igual a AB , tracemos outro círculo de centro B passando por A (figura 8).

Figura 8 – Os vértices do triângulo equilátero ABC



Fonte: DEaD | IFCE

Note que os círculos se intersectam em dois pontos. No nosso caso, usaremos o ponto C como indicado na figura 8. Então o triângulo ΔABC é equilátero e pode ser construído traçando-se os segmentos AC e BC com o auxílio de uma régua.

Para justificar a afirmação de que $\triangle ABC$ é equilátero, devemos observar que os dois círculos têm o mesmo raio, e que, devido ao modo como construímos esses círculos, esse raio coincide com os segmentos AB , AC e BC . Portanto os três lados do triângulo são iguais e ele é equilátero. ■

Alguns pontos precisam ser esclarecidos. Primeiro, o que garante que o ponto C realmente existe, ou seja, que os dois círculos efetivamente se intersectam? Examinando-se a figura 8, parece óbvio que isso acontece, mas devemos concluir isso a partir somente dos axiomas sem fazer uso de nossa intuição geométrica. Discutiremos esse problema em uma aula posterior, quando estudarmos o axioma de continuidade.

A questão mais importante, por enquanto, é a seguinte: o que significa dizer que os lados do triângulo $\triangle ABC$ são iguais? Novamente, isso parece ser intuitivamente óbvio, mas precisamos concluir isso dos axiomas. Assim, precisamos incluir em nossa lista de axiomas aqueles que irão nos dizer quando dois segmentos de reta são iguais. Isso será feito no próximo tópico, quando introduzirmos os axiomas de congruência de segmentos.

Como já dissemos acima, para Euclides, a questão da igualdade entre segmentos na Proposição 1 é resolvida observando-se que os segmentos AB e AC , na figura 8, são iguais porque o círculo de centro A passa por B e por C , ou seja, com o compasso centrado em A é possível traçar um círculo passando por B e por C . Do mesmo modo, com o compasso centrado em B , podemos traçar um círculo passando por A e por C . Feito isso, Euclides simplesmente afirma que os segmentos AB e CB são iguais, deixando ao leitor a tarefa de compreender o que significa essa noção de igualdade. Analisando essa construção, podemos concluir que, para Euclides, o compasso é um instrumento com o qual é possível comparar dois segmentos que têm uma extremidade em comum.

Na proposição 2, Euclides estende o uso do compasso para a comparação de segmentos que não necessariamente tenham pontos em comum.

Problema 2 (Elementos, Livro I, Proposição 2) Tendo um ponto dado A como extremidade, construir um segmento de reta igual a um segmento de reta BC dado.

Assim como na proposição 1, temos uma construção. Neste caso, é pedido que se construa um segmento igual a um segmento BC dado com extremidade em um determinado ponto A (figura 9), ou seja, que se *transporte* o segmento dado para uma nova posição.

Figura 9 – Ponto A e Segmento BC

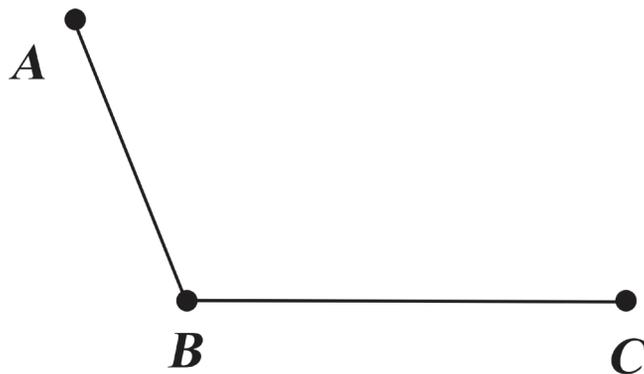


Fonte: DEaD | IFCE

Solução do Problema 2: Inicialmente construiremos o segmento pedido, e depois mostraremos que tais segmentos são iguais. Para a construção do segmento desejado, Euclides propõe os seguintes passos:

Passo 1: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento AB (figura 10).

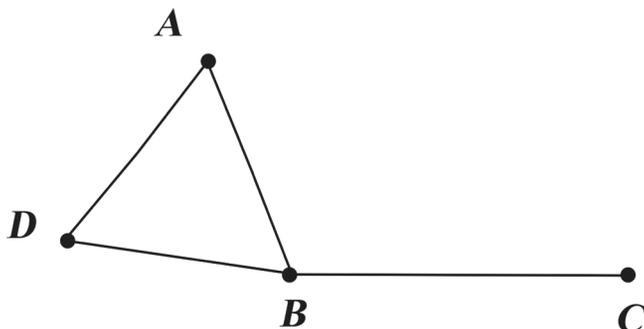
Figura 10 – Traçando o segmento AB



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 2: Construa usando régua e compasso, da mesma forma que foi feito na Proposição 1, o triângulo equilátero com lado AB (figura 11).

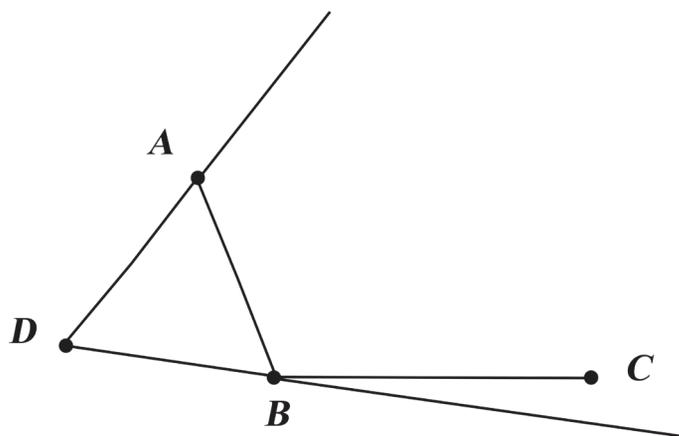
Figura 11 – Construção do triângulo equilátero ABD



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 3: Novamente com o auxílio de uma régua, trace as semirretas DA e DB (figura 12).

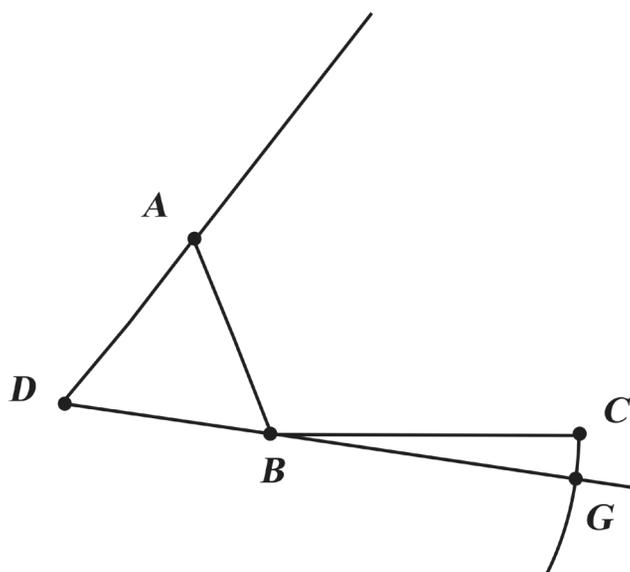
Figura 12 – Construção das semirretas DA e DB



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 4: Com o compasso centrado em B e com abertura BC , trace um arco de círculo que intersecte a semirreta DB em um ponto, que denominaremos de G (figura 13).

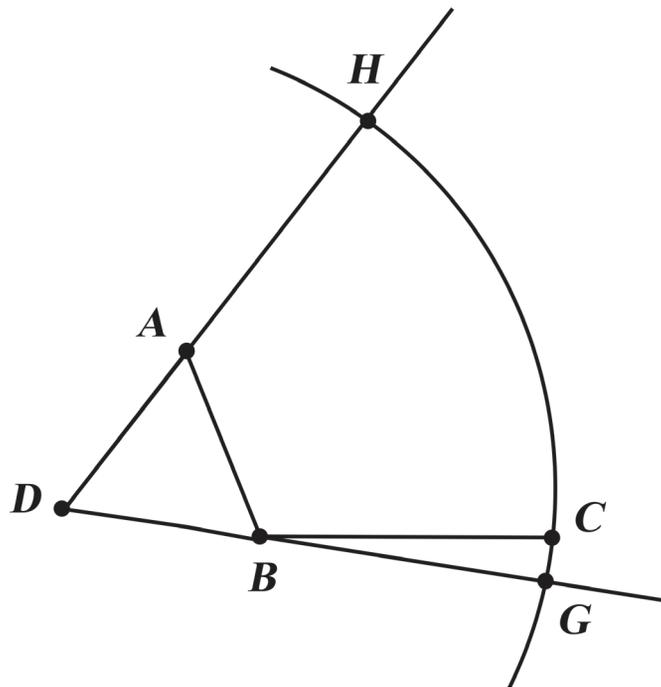
Figura 13 – Construção do arco CG



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 5: Com o compasso centrado em D e com abertura DG , trace um arco de círculo que intersecte a semirreta DA em um ponto, que denominaremos de H (figura 14).

Figura 14 – Construção do arco GH



Fonte: DEaD | IFCE

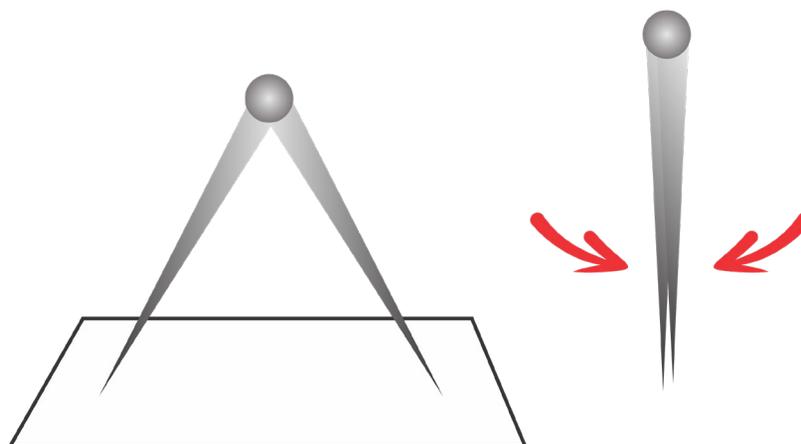
Terminamos a nossa construção com os cinco passos acima e obtemos o segmento AH , o qual foi obtido de BC partindo da extremidade A . Se conseguirmos mostrar que o segmento AH é igual ao segmento BC , logo ele será o segmento procurado, e então, a solução do nosso problema estará completa. De fato, DH e DG são iguais pois são raios de um mesmo círculo, o mesmo ocorrendo com BG e BC . Além disso, DA e DB também são iguais, pois são lados do mesmo triângulo equilátero. O segmento AH é obtido a partir de DH “retirando-se” dele o segmento DA , e o segmento BG é obtido a partir de DG “retirando-se” dele o segmento DB (neste ponto, Euclides usa a terceira noção comum). Portanto, AH é igual a BG , que por sua vez é igual a BC . Usando a primeira noção comum, Euclides conclui que AH e BC são iguais. Portanto, conseguimos fazer o transporte do segmento BC dado para uma nova posição partindo do ponto A . ■

Se você já manipulou um compasso, deve ter percebido que, em geral, as pernas de um compasso são rígidas, ou seja, ao levantarmos o compasso do papel, as pernas não se movem a menos que sejam forçadas a ocuparem outra posição.

Note que se tivéssemos usado um compasso de pernas rígidas na solução do Problema 2.2, o problema do transporte de segmentos seria de fácil solução: dados um ponto A e um segmento de reta BC , inicialmente colocaríamos cada ponta do compasso em uma extremidade de BC e fixaríamos a abertura correspondente. Traçaríamos, com a ajuda de uma régua, a reta r passando por A . Mantendo a abertura do compasso, com a ponta cega em A , marcaríamos na reta r um ponto P . O segmento AP é igual ao segmento BC .

Essa construção é muito mais simples do que a feita na Proposição 2. Por que então Euclides se dá ao trabalho de uma construção tão elaborada? A resposta é que o compasso imaginado (e provavelmente usado) por Euclides tem as “pernas moles”, ou seja, ao retirarmos o compasso do papel, ele automaticamente “fecha as pernas”, não mantendo a abertura fixada (figura 15). Chamamos um compasso desse tipo de **colapsável**.

Figura 15 – O compasso euclidiano é “colapsável”



Fonte: DEaD | IFCE

Na construção feita na Proposição 2, o compasso é usado para transportar o segmento BC para o ponto A , mas isso é feito sem que haja a necessidade de se tirar o compasso do papel para fazer esse transporte. Dessa forma, o que a Proposição 2 do Livro I afirma é que, mesmo com um compasso colapsável, é possível fazer o transporte de um segmento de reta. Portanto, podemos supor *sem perda de generalidade*, que nossos compassos não são colapsáveis, ou seja, têm pernas rígidas. Feito isso, Euclides passa a fazer o transporte de segmentos sem maiores comentários. Essa é a essência do pensamento euclidiano: uma vez demonstrada uma proposição, podemos recorrer a ela como uma ferramenta, sem a necessidade de repetir a sua demonstração.

Em Matemática, muitas frases e expressões são usadas frequentemente e têm um significado especial. A expressão “sem perda de generalidade” significa que podemos supor que algo especial acontece e mesmo assim obteremos os mesmos resultados. No caso do compasso, mesmo que ele seja colapsável, obteremos os mesmos resultados que obteríamos se ele não fosse colapsável.





David Hilbert (1862-1943) foi um dos mais notáveis matemáticos da primeira metade do século XX, tendo contribuído para várias áreas da Matemática, como Álgebra, Geometria e Teoria dos Números. No congresso internacional de Matemáticos de 1900, realizado em Paris, propôs uma lista de 23 problemas que norteariam boa parte da pesquisa em Matemática durante o século XX. Mais informações sobre Hilbert podem ser encontradas no link: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert.html>

axiomas de congruência e o seu papel no transporte de segmentos, substituindo o uso da régua e do compasso.

Concluimos assim o primeiro tópico da nossa aula. Neste tópico apresentamos a estrutura geral dos *Elementos* de Euclides e discutimos com detalhe as duas primeiras proposições do Livro I, que tratam de construções que podem ser feitas com régua e compasso. Em particular, analisamos a Proposição 2 e sua relação com o problema do transporte de segmentos. No próximo tópico, retornaremos ao ponto de vista moderno, isto é, axiomático, seguindo a abordagem do matemático alemão David Hilbert (1862-1943) que já adotamos na Aula 1. Mais precisamente, estudaremos os

Congruência e medida de segmentos

34

OBJETIVOS

- Conhecer os axiomas de congruência de segmentos
- Reconhecer a conexão desses axiomas com os problemas do transporte e da medida de segmentos

Na Aula 1 estabelecemos as noções primitivas de ponto, reta e “estar entre” e os axiomas de incidência e de ordem. A partir deste tópico, vamos considerar também a **noção primitiva de congruência de segmentos de reta**, que satisfaz os axiomas de congruência. Com isso vamos tornar precisa a noção de igualdade delineada por Euclides nos *Elementos*, conforme expusemos no tópico anterior.

Nos *Elementos*, Euclides identifica segmentos, ou figuras geométricas em geral, se eles diferem apenas por sua posição, ou seja, se um deles pode ser movido até se sobrepor ao outro. Ele chama figuras desse tipo de *iguais*. Nos textos modernos, essa noção de igualdade é substituída pela noção de *congruência*.

Vamos considerar uma relação entre segmentos de reta *não definida* (ou seja, uma noção primitiva), que chamaremos de **congruência de segmentos**. Mais precisamente, dados dois segmentos de reta, que denominaremos AB e CD , apenas uma das possibilidades pode ocorrer: ou os segmentos são congruentes (escrevemos $AB \equiv CD$ e lemos o segmento AB é congruente ao segmento CD), ou os segmentos não são congruentes (escrevemos $AB \not\equiv CD$ e lemos o segmento AB não é congruente ao segmento CD). A relação de congruência de segmentos satisfaz os seguintes axiomas (de Hilbert), chamados **axiomas de congruência de segmentos**:

- C1.** (Transporte) Dada uma semirreta r com origem no ponto A e dado um segmento BC , existe um único ponto D sobre r tal que $AD \equiv BC$.

- C2.** (Equivalência) Se $AB \equiv CD$ e $AB \equiv EF$ então $CD \equiv EF$. Todo segmento é congruente a si mesmo.
- C3.** (Adição) Dados três pontos colineares A, B, C tais que $A * B * C$ e três outros pontos colineares D, E, F tais que $D * E * F$, se $AB \equiv DE$ e $BC \equiv EF$, então $AC \equiv DF$.

O próximo resultado é um desdobramento do axioma C2. Ele nos diz que a congruência entre segmentos é um substituto eficaz para a noção de igualdade.

Teorema 2.1 A relação de congruência entre segmentos satisfaz as seguintes condições:

- (a) (Reflexividade) $AB \equiv AB$, para todo segmento AB .
- (b) (Simetria) Se $AB \equiv CD$ então $CD \equiv AB$.
- (c) (Transitividade) Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

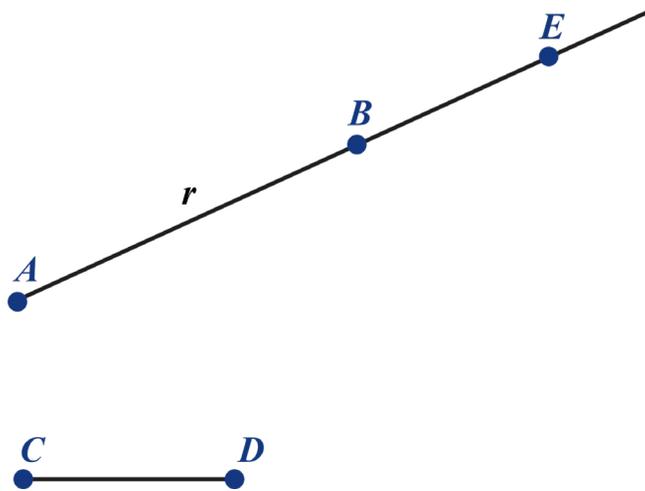
Uma relação satisfazendo as três condições acima é chamada **relação de equivalência**.

Demonstração: O item (a) segue da segunda parte do axioma C2. Para demonstrar (b) suponha que $AB \equiv CD$. Pelo item (a), temos $AB \equiv AB$. Portanto, pela primeira parte do axioma C2, conclui-se que $CD \equiv AB$. Enfim, para demonstrar o item (c), suponha que $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$. Do fato de $AB \equiv CD$ segue do item (b) que $CD \equiv AB$. Dessa forma, como $CD \equiv AB$ e $CD \equiv EF$, obtemos $AB \equiv EF$ (usamos a primeira parte do axioma C2). ■

A transitividade da congruência (item (c) do Teorema 2.1) é uma versão da primeira noção comum de Euclides para segmentos. Vamos, agora, obter uma versão para segmentos da segunda noção comum. Primeiramente precisamos definir o que é a soma de segmentos.

Sejam AB e CD dois segmentos quaisquer e r a semirreta de origem A que passa pelo ponto B (figura 16). Considere ainda a semirreta s de origem B contida na semirreta r . Pelo axioma C1, existe um único ponto E sobre a semirreta s tal que $BE \equiv CD$. O segmento AE é chamado soma dos segmentos AB e CD e é denotado por $AB + CD$.

Figura 16 – Soma de segmentos



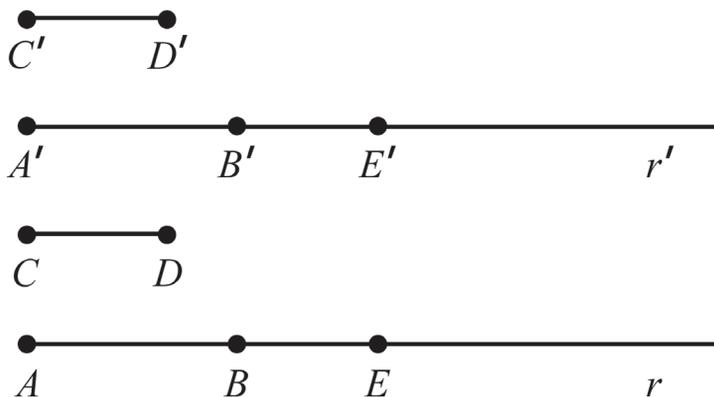
Fonte: DEaD | IFCE

Assim, a soma de dois segmentos AB e CD é obtida, justapondo-se ao segmento AB um segmento BE congruente a CD . A seguir, iremos verificar que a soma de segmentos é preservada pela relação de congruência.

A justaposição de segmentos pode ser feita usando-se régua e compasso. Para isso, deve-se aplicar a Proposição 2 do Livro I dos Elementos.



Figura 17 – Somas de segmentos congruentes são congruentes



Fonte: DEaD | IFCE

Teorema 2.2 Sejam os segmentos AB , $A'B'$, CD e $C'D'$ tais que $AB \equiv A'B'$ e $CD \equiv C'D'$. Então $AB + CD \equiv A'B' + C'D'$.

Demonstração: É uma aplicação direta do axioma C3. Sejam r a semirreta de origem A que passa pelo ponto B (figura 17) e r' a semirreta de origem A' que passa pelo ponto B' . Considere ainda os pontos E sobre r tal que $BE \equiv CD$ e E' sobre r' tal que $B'E' \equiv C'D'$ (Esses pontos existem pelo axioma C1). Como $CD \equiv C'D'$, a transitividade da congruência, aplicada duas vezes, garante que $BE \equiv B'E'$. Pelo axioma C3, temos $AE \equiv A'E'$, ou seja, $AB + CD \equiv A'B' + C'D'$. ■

É possível generalizar a noção de soma de segmentos para um número finito $n \geq 3$ de parcelas. Suponha que $A_1B_1, \dots, A_{n-1}B_{n-1}, A_nB_n$ sejam segmentos de reta. Se a soma $A_1B_1 + \dots + A_{n-1}B_{n-1}$ está definida, então a soma dos n segmentos é dada por

$$A_1B_1 + \dots + A_nB_n = (A_1B_1 + \dots + A_{n-1}B_{n-1}) + A_nB_n.$$

Os resultados acima nos permitem fazer o transporte de segmentos sem usar régua e compasso. Dessa forma, encontramos nos axiomas de congruência substitutos para os instrumentos euclidianos. Ao longo deste texto utilizaremos as duas abordagens, comparando-as sempre que possível.



Usaremos a notação AB para denotar um segmento de reta e a notação \overline{AB} para denotar sua medida.

A seguir usaremos os resultados acima para estabelecer a noção de medida de segmentos. Medir um segmento de reta significa associar a esse segmento AB um número positivo \overline{AB} que de alguma forma quantifique seu tamanho. Isso é feito

comparando o segmento com um segmento padrão, chamado *unidade de medida*. Por exemplo, você pode medir sua altura em metros ou em centímetros. Ao medir sua altura em metros provavelmente o resultado será um número entre 1 e 2. Ao medir sua altura em centímetros, o resultado será provavelmente um número entre 100 e 200. Isso se dá porque você está medindo uma mesma grandeza (sua altura) usando dois padrões diferentes, um dos quais, o metro, é igual a 100 vezes o outro, o centímetro.

Vamos fixar um segmento de reta UV que chamaremos **unidade de medida**, ou simplesmente **unidade**. Temos $\overline{UV} = 1$. Dado um segmento de reta AB , vamos compará-lo com UV . Para isso, vamos inicialmente supor que é possível colocar um número inteiro de cópias de UV dentro de AB .

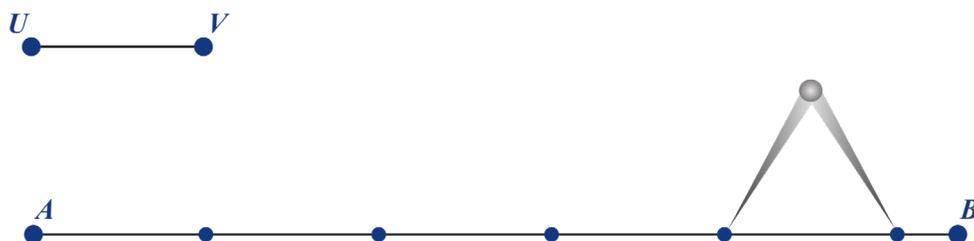
Figura 18 – Usando o compasso para medir um segmento



Fonte: DEaD | IFCE

Usaremos primeiramente o compasso. Com abertura igual ao segmento UV , (figura 18) transporte o segmento UV sobre o segmento AB , começando em uma das extremidades, digamos A e justapondo as “cópias” de UV até que não seja mais possível continuar dentro de AB (figura 19). Se o último ponto marcado for a extremidade oposta àquela em que começamos, então a medida do segmento AB em relação à unidade UV é igual ao número n de vezes que cópias de UV foram colocadas em AB . Neste caso, $\overline{AB} = n$. Porém isso nem sempre acontece. Uma situação possível é exibida na figura 19: após marcar em AB cinco segmentos que são “cópias” de UV , transportadas para o interior de AB com o compasso, ainda há uma sobra, ou resto, que precisa ser medido.

Figura 19 – Cópias do segmento UV marcadas com o compasso dentro de AB



Fonte: DEaD | IFCE

Neste caso, dizemos que o segmento AB mede mais do que cinco e menos do que seis unidades UV , em símbolos, $5 < \overline{AB} < 6$.

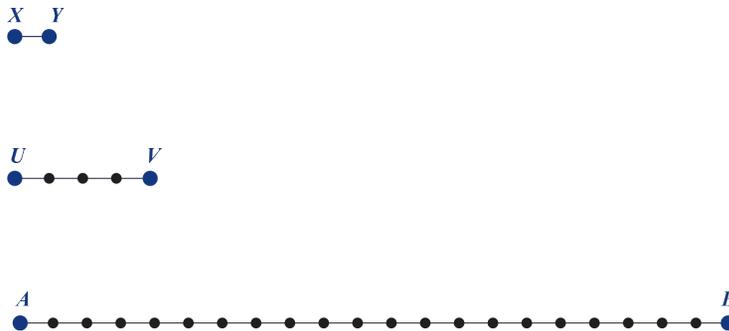
Isso também pode ser feito usando o axioma C1. Aplicando esse axioma várias vezes, obtemos alguns segmentos congruentes a UV cuja soma é menor ou igual a AB . Assim, no caso em que há exatamente n cópias de UV em AB , temos

$$\overline{AB} \equiv \overline{UV} + \overline{UV} + \dots + \overline{UV} \quad (n \text{ parcelas})$$

Logo, neste caso, $\overline{AB} = n$. No caso como o da figura 19, a conclusão é a mesma que antes: podemos apenas estimar a medida de AB com números inteiros.

No entanto, queremos obter uma medida exata do segmento AB , mesmo quando UV não cabe um número inteiro de vezes dentro de AB . Numa primeira tentativa de resolver esse problema, vamos dividir o segmento UV em n partes congruentes a um segmento XY , que chamaremos de **submúltiplo** de UV . Vamos supor que este submúltiplo XY pode ser colocado um número inteiro de vezes em UV e também um número inteiro de vezes em AB (figura 20). Seguindo a nomenclatura utilizada por Euclides, diremos que, neste caso, os segmentos UV e AB são **comensuráveis**, o que significa que ambos admitem medida inteira em relação à unidade XY .

Figura 20 – Os segmentos UV e AB são comensuráveis



Fonte: DEaD | IFCE

Mais precisamente, suponhamos que exista um segmento XY , tal que $UV \equiv XY + XY + \dots + XY$ (n parcelas) e $AB \equiv XY + XY + \dots + XY$ (m parcelas).

Então

$$1 = \overline{UV} = n \cdot \overline{XY}, \text{ isto é, } \overline{XY} = \frac{1}{n}$$

e

$$\overline{AB} = m \cdot \overline{XY}, \text{ isto é, } \overline{AB} = \frac{m}{n}$$

Assim, se o segmento AB for comensurável com a unidade de medida UV , sua medida será um número racional $\frac{m}{n}$.

Um fato de grande importância para a Matemática é que existem segmentos que não são comensuráveis, chamados segmentos **incomensuráveis**. Por exemplo, a diagonal do quadrado e seu lado são segmentos incomensuráveis (figura 21). Para mostrar esse fato, vamos usar o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ABC$ da figura 21 para escrevermos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$$

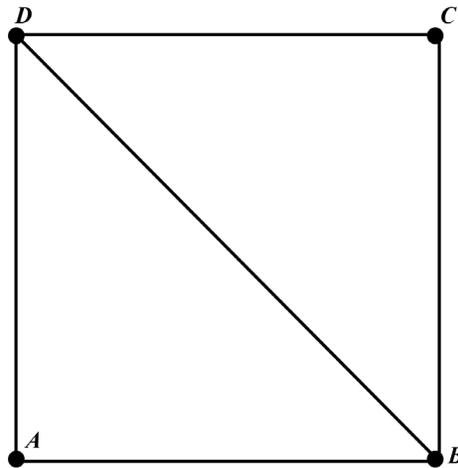
Como $\overline{AB} = \overline{AD}$, obtemos

$$2 \cdot \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 \quad (2.1)$$

Se os segmentos AB e BD fossem comensuráveis, seria possível encontrar um segmento XY , tal que $\overline{AB} = n \cdot \overline{XY}$ e $\overline{BD} = m \cdot \overline{XY}$, com m e n inteiros positivos.

Substituindo na equação (2.1) obteríamos $2n^2 = m^2$. Mostraremos que essa igualdade não pode ocorrer e logo a afirmação de que AB e BD são comensuráveis é falsa. Com efeito, para demonstrar este fato, vamos supor que, na igualdade $2n^2 = m^2$, todos os fatores comuns de m e n foram cancelados, de modo a m e n não terem fatores em comum. Notemos que o quadrado de um número par também é par, e o quadrado de um número ímpar também é ímpar. Assim, como $m^2 = 2n^2$ é par, o número m também é par (pois se fosse ímpar, m^2 também seria ímpar). Dessa forma, é possível escrever $m = 2k$, em que k é um número inteiro. Logo, $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ e isso implica que $n^2 = 2k^2$, ou seja, n também é par. Mas isso implicaria que m e n seriam ambos pares, isto é, teriam o fator comum 2, o que não ocorre. Essa contradição vem de supormos que os segmentos são comensuráveis.

Figura 21 – O lado de um quadrado e sua diagonal são incomensuráveis



Fonte: DEaD | IFCE

Isso mostra que os segmentos AB (lado do quadrado) e BD (diagonal do quadrado) são incomensuráveis, ou seja, não podem ser medidos (com medidas inteiras) simultaneamente por uma mesma unidade.

Resolver o problema da medida para segmentos incomensuráveis é uma tarefa difícil, que Euclides empreende no livro V dos Elementos, usando as ideias do astrônomo, matemático e filósofo grego Eudoxo de Cnido (408-355 aC). Faremos alguns comentários sobre o método de Eudoxo em aulas futuras.

Com isso encerramos nossa segunda aula. Tivemos nosso primeiro contato em maior detalhe com a obra de Euclides, *Os Elementos*, analisando de modo breve sua estrutura e estudando com maior detalhe as duas primeiras proposições do Livro I. Vimos que as construções geométricas representam um papel importante na geometria euclidiana. Observamos certas peculiaridades do compasso de Euclides, como o fato

desse compasso ser colapsável, e também o seu papel no transporte de segmentos. Estudamos os axiomas de congruência e sua relação com o problema do transporte e da medida de segmentos. Concluimos apresentando, em conexão com o problema da medida de segmentos, a ideia de segmentos comensuráveis e o importante exemplo da diagonal do quadrado, incomensurável com o seu lado.

Na próxima aula, continuaremos a estudar o problema da congruência, passando a estudar a congruência de ângulos e de triângulos, alternando a abordagem axiomática moderna com a euclidiana, que usa fortemente os instrumentos de construção (régua e compasso).



1. Usando um compasso, realize a construção da Proposição 3 do Livro I dos *Elementos*: dados dois segmentos AB e BC , desiguais, subtrair do maior um segmento igual (isto é, congruente) ao menor.
2. Dados dois segmentos AB e CD , dizemos que AB é menor do que CD se existe um ponto E entre C e D tal que $AB \equiv CE$. Denotamos $AB < CD$. Demonstre as seguintes afirmações:
 - (a) Dados os segmentos $AB \equiv A'B'$ e $CD \equiv C'D'$, temos $AB < CD$ se, e somente se, $A'B' < C'D'$.
 - (b) Se $AB < CD$ e $CD < EF$, então $AB < EF$.
 - (c) Dados dois segmentos AB e CD , exatamente uma das três situações ocorre: $AB < CD$, ou $AB \equiv CD$, ou $CD < AB$.
3. Usando os axiomas de congruência, demonstre a noção comum número 6 de Euclides: *metades de iguais são iguais*. Para isso, defina o ponto médio do segmento AB como sendo o ponto M tal que $A * M * B$ e $AM \equiv MB$. Demonstre, então que, se $AB \equiv CD$, M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de CD , então $AM \equiv CN$.
4. Mostre que a adição preserva desigualdades (veja o exercício 2): Se $AB < CD$ e EF é outro segmento, então $AB + EF < CD + EF$.
5. Dados dois pontos O e A defina o círculo Γ de centro O e raio OA como sendo o conjunto de todos os pontos B , tais que $OA \equiv OB$. Mostre que uma reta que passa por O intersecta o círculo Γ em exatamente dois pontos.

Congruência de ângulos e de triângulos e algumas de suas aplicações

Caro(a) aluno(a),

Chegamos à nossa Aula 3, onde continuaremos estudando a noção de congruência, dessa vez enfocando a congruência de ângulos e de triângulos. Usaremos essas noções de congruência para transportar e medir ângulos.

Como já comentamos na Aula 2, Euclides não fala sobre congruência de modo explícito nos *Elementos*. Ele se refere a figuras congruentes como “iguais”, ficando a cargo do leitor perceber que, para Euclides, figuras “iguais” são aquelas que podem ser sobrepostas, ou seja, uma delas pode ser deslocada até a mesma posição que a outra de modo que os pontos das duas figuras estejam em correspondência.

No entanto, Euclides não esclarece nos axiomas como uma figura pode ser deslocada ou como os pontos das duas figuras podem ser colocados em correspondência. Por isso, no tratamento moderno da geometria, a noção de congruência é *primitiva*, isto é, não é definida, sendo estabelecida através de suas propriedades, dadas como axiomas.

Assim como fizemos na Aula 2, iremos alternar a abordagem euclidiana, que faz uso de régua e compasso para fazer o transporte de ângulos, com a abordagem axiomática moderna, que substitui os instrumentos clássicos por axiomas.

Objetivos

- Estudar a congruência de ângulos e de triângulos
- Aplicar a congruência de ângulos e de triângulos para transportar e medir ângulos

Congruência de ângulos e de triângulos

44

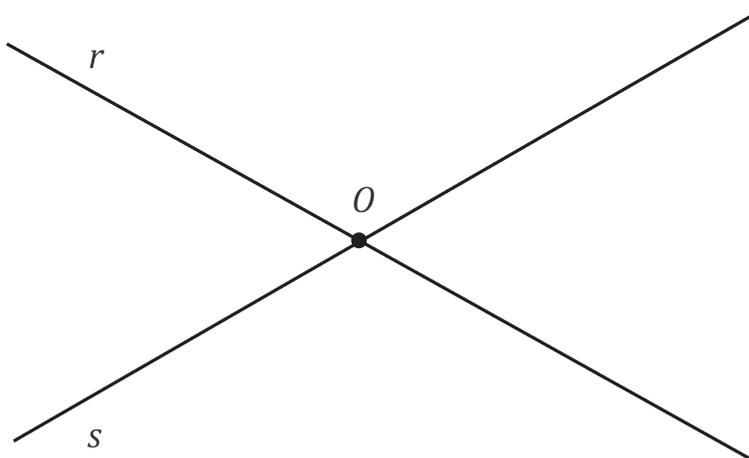
OBJETIVOS

- Reconhecer os axiomas de congruência para ângulos
- Estudar os casos de congruência de triângulos

Vamos iniciar este tópico com a definição de ângulo. Também mostraremos que três pontos não colineares determinam um ângulo de modo único.

Consideremos duas retas r e s , concorrentes no ponto O , ou seja, $r \cap s = \{O\}$ (figura 22). Como já vimos no Teorema 1.2, o ponto O determina em cada uma das retas r e s duas semirretas, que chamaremos de r_1 e r_2 , e s_1 e s_2 , respectivamente.

Figura 22 – Retas r e s , concorrentes no ponto O

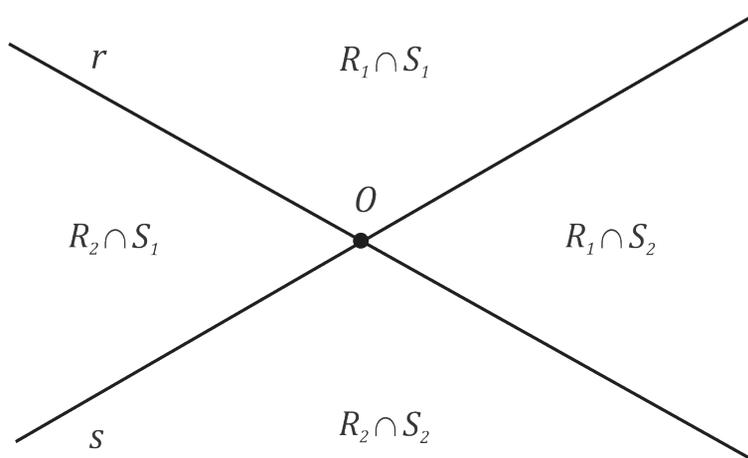


Fonte: DEaD | IFCE

O axioma de separação, visto na Aula 1, nos diz que cada uma das retas, r e s , divide o plano em dois semiplanos: a reta r determina os semiplanos R_1 e R_2 , e a reta s

determina os semiplanos S_1 e S_2 . Dessa forma, as retas r e s dividem o plano em quatro regiões: $S_1 \cap R_1$, $S_1 \cap R_2$, $S_2 \cap R_1$ e $S_2 \cap R_2$ (figura 23).

Figura 23 – As quatro regiões do plano determinadas pelas retas r e s



Fonte: DEaD | IFCE

Cada uma dessas quatro regiões é chamada ângulo determinado pelas retas r e s .

Conforme vimos no exercício 3 da Aula 1, um conjunto C contido no plano é chamado *convexo* se, dados dois pontos A e B do conjunto C , o segmento de reta AB está contido em C . Como aplicação direta do axioma de separação, também visto na Aula 1, sabemos que um semiplano é um conjunto convexo. Também no exercício 3 da Aula 1, observamos que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Isso é consequência direta da definição: se C_1 e C_2 são dois conjuntos convexos e $A, B \in C = C_1 \cap C_2$, então $A, B \in C_1$ implica que $AB \subset C_1$ e $A, B \in C_2$ implica que $AB \subset C_2$. Logo, $AB \subset C_1 \cap C_2 = C$. Isso mostra que C é convexo.

Um ângulo é a interseção de dois semiplanos, que são conjuntos convexos do plano, logo um ângulo é uma região convexa do plano delimitada por suas semirretas r_i e s_j , onde $i, j \in \{1, 2\}$, ambas com origem no ponto O .

Dessa forma as duas retas r e s , concorrentes no ponto O , determinam quatro ângulos que denotaremos por r_1Os_1 , r_1Os_2 , r_2Os_1 e r_2Os_2 . As semirretas r_i e s_j são chamadas **lados** do ângulo r_iOs_j e o ponto O é chamado **vértice** do ângulo r_iOs_j , onde $i, j \in \{1, 2\}$.

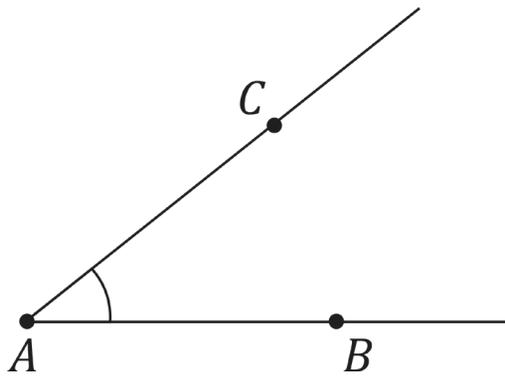
Um ângulo é um objeto geométrico, uma figura. Mais adiante, veremos como medir ângulos. Dessa forma, poderemos associar um número a um ângulo. Esse número será a sua medida.



De forma geral, podemos definir ângulo como segue:

Dados três pontos não colineares A , B e C , consideremos as semirretas AB e AC , ambas com origem no ponto A (figura 24). Essas semirretas determinam um ângulo de lados AB e AC e vértice A , que denotaremos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$. Vale ressaltar que, nesta notação, o ponto que fica no meio sempre corresponde ao vértice do ângulo.

Figura 24 – Ângulo $\angle BAC$



Fonte: DEaD | IFCE

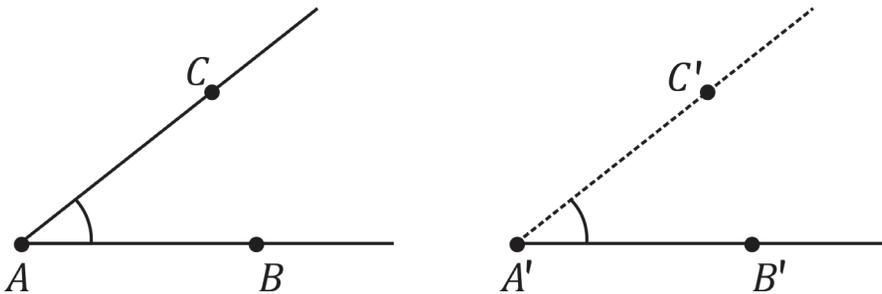
Como vimos acima, o ângulo $\angle BAC$ é a interseção de dois semiplanos, um deles determinado pela reta que passa pelos pontos A e B e o outro determinado pela reta que passa pelos pontos A e C (figura 24). Dizemos que um ponto P está no **interior** do ângulo $\angle BAC$, ou que P é um **ponto interior** do ângulo $\angle BAC$, se for um ponto situado no interior dos dois semiplanos que o determinam, isto é, se pertencer a cada um dos semiplanos mas não pertencer às retas que os determinam. Se um ponto P não estiver no interior do ângulo e também não pertencer aos lados do ângulo (as semirretas AB e AC), dizemos que P está no **exterior** do ângulo $\angle BAC$, ou que P é um **ponto exterior** do ângulo $\angle BAC$. Uma figura está no interior do ângulo $\angle BAC$ se todos os seus pontos são interiores a $\angle BAC$. Se todos os pontos de uma figura são exteriores a um ângulo, dizemos que a figura é exterior ao ângulo $\angle BAC$.

Tendo estabelecido o que é um ângulo e como denotá-lo, vamos estudar a noção de congruência entre ângulos. Invertendo a ordem adotada na anterior, vamos começar estudando os axiomas sobre congruência de ângulos para só depois estudar a abordagem euclidiana, usando régua e compasso.

Vamos considerar uma relação entre ângulos, chamada **congruência**, denotada por $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (lê-se, o ângulo BAC é congruente ao ângulo $B'A'C'$). Esta relação é uma noção primitiva (veja a Aula 1) sujeita aos seguintes axiomas, chamados **axiomas de congruência entre ângulos**:

- CA1** Dado um ângulo $\angle BAC$ e uma semirreta $A'B'$ existe uma **única** semirreta $A'C'$ contida em um semiplano determinado por $A'B'$, tal que $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (figura 25).
- CA2** Dados três ângulos $\angle ABC$, $\angle DEF$ e $\angle GHI$, se $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle ABC \equiv \angle GHI$, então $\angle DEF \equiv \angle GHI$. Todo ângulo é congruente a si mesmo.

Figura 25 – Axioma de congruência CA1



Fonte: DEaD | IFCE

No Teorema 2.1, estabelecemos que a relação de congruência entre segmentos é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, é uma relação de equivalência. A mesma demonstração que fizemos para esse teorema poderá ser repetida para o resultado a seguir e será deixada a cargo do leitor.

Teorema 3.1 A relação de congruência entre ângulos é uma relação de equivalência.

O Teorema 3.1 está em conexão com a primeira noção comum dos *Elementos* de Euclides, descrita na Aula 2, que afirma: *coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si*.

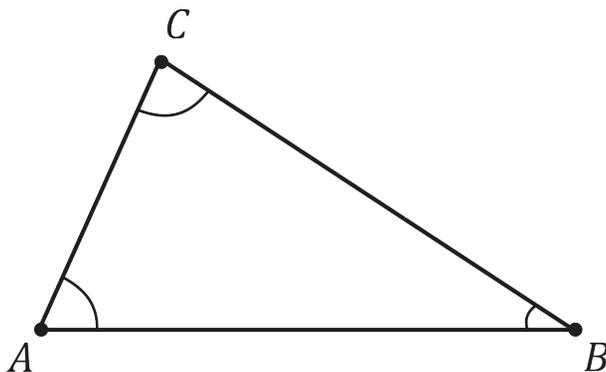
Iniciaremos agora nosso estudo sobre uma das figuras básicas da geometria plana, o triângulo. Assim como fizemos para ângulos, iremos estudar triângulos enfatizando a noção de congruência e estabelecendo critérios de congruência de triângulos.



As noções de ângulo e de triângulo **não** são primitivas, por isso precisam ser definidas.

A notação ΔABC será usada para designar o triângulo de vértices A , B e C . Os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ são chamados ângulos internos do triângulo ABC .

Figura 26 – O triângulo ABC e seus elementos

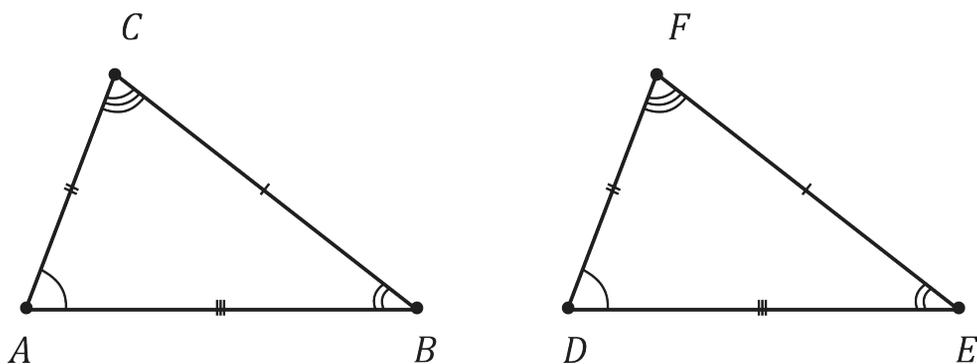


Fonte: DEaD | IFCE

A seguir, iremos estabelecer quando dois triângulos são congruentes. A ideia por trás da noção de congruência é a de que triângulos congruentes são aqueles que diferem apenas pela posição, ou seja, que podem ser movidos no plano até que um se sobreponha ao outro. Antes, daremos a definição formal de congruência entre triângulos:

Dizemos que os triângulos ABC e DEF são congruentes, escrevemos $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, se existe uma correspondência entre os seus vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$ de modo que os lados e ângulos internos associados por essa correspondência são congruentes, ou seja, $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$, $BC \equiv EF$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$, $\angle BCA \equiv \angle EFD$, $\angle CAB \equiv \angle FDE$ (figura 27).

Figura 27 – Triângulos congruentes



Fonte: DEaD | IFCE

Podemos pensar nessa correspondência como a possibilidade de uma sobreposição, ou seja, se colocarmos o vértice A sobre o D , o vértice B sobre o E , e o vértice C sobre o F , os triângulos ABC e DEF ficarão sobrepostos, isto é, um ficará exatamente sobre o outro.

Assim como as relações de congruência entre segmentos de reta e ângulos, a relação de congruência de triângulos também é uma relação de equivalência.

Teorema 3.2 A relação de congruência de triângulos é uma relação de equivalência.

Demonstração: Segue diretamente dos teoremas 2.1 e 3.1. De fato, dado um triângulo ABC , $AB \equiv AB$, $AC \equiv AC$ e $BC \equiv BC$, devido à reflexividade da relação de congruência entre segmentos de reta. Também valem $\angle ABC \equiv \angle ABC$, $\angle BCA \equiv \angle BCA$ e $\angle CAB \equiv \angle CAB$, devido à reflexividade da relação de congruência entre ângulos. Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta ABC$, ou seja, a relação de congruência entre triângulos é uma relação reflexiva.

Agora, dados os triângulos ABC e DEF se $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, então $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$, $BC \equiv EF$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$, $\angle BCA \equiv \angle EFD$, $\angle CAB \equiv \angle FDE$. Como as relações de congruência de segmentos e de ângulos são ambas simétricas, valem as congruências: $DE \equiv AB$, $DF \equiv AC$, $EF \equiv BC$, $\angle DEF \equiv \angle ABC$, $\angle EFD \equiv \angle BCA$ e $\angle FDE \equiv \angle CAB$. Isso significa que $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$, ou seja, a relação de congruência de triângulos é simétrica.

Finalmente, considerando os triângulos ABC , DEF e GHI , se $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ e $\Delta DEF \equiv \Delta GHI$, então $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$, $BC \equiv EF$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$, $\angle BCA \equiv \angle EFD$, $\angle CAB \equiv \angle FDE$, devido à congruência entre os dois primeiros triângulos, e $DE \equiv GH$, $DF \equiv GI$, $EF \equiv HI$, $\angle DEF \equiv \angle GHI$, $\angle EFD \equiv \angle HIG$,

$\angle FDE \equiv \angle IGH$, por conta da congruência entre o segundo e o terceiro triângulo. Da transitividade da congruência de segmentos e de ângulos, segue que $AB \equiv GH$, $AC \equiv GI$, $BC \equiv HI$, $\angle ABC \equiv \angle GHI$, $\angle BCA \equiv \angle HIG$, $\angle CAB \equiv \angle IGH$. Assim, a definição de congruência de triângulos garante que $\triangle ABC \equiv \triangle GHI$, ou seja, a relação de congruência de triângulos é transitiva.

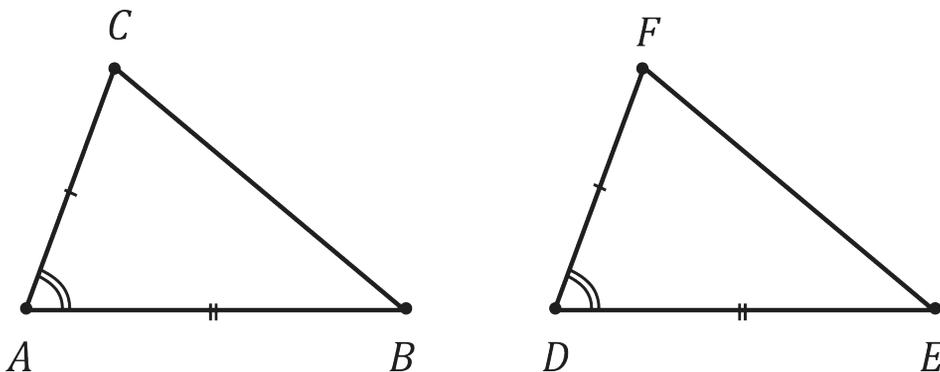
Sendo reflexiva, simétrica e transitiva, a congruência de triângulos é uma relação de equivalência. ■

Você deve então estar se perguntando: “Para verificar a congruência entre dois triângulos é necessário verificar as seis congruências acima?”. Na verdade, veremos que existem critérios, também conhecidos como casos de congruência, que nos permitirão concluir condições mínimas para que dois triângulos possam ser considerados congruentes sem que haja a necessidade de analisar a relação entre todos os seus lados e ângulos internos.

O axioma a seguir é conhecido em geometria como o **1º caso de congruência de triângulos ou critério Lado-Ângulo-Lado (LAL)** e afirma que

Axioma 3.1 (1º caso de congruência de triângulos - LAL) Dois triângulos ABC e DEF tais que $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\angle CAB \equiv \angle FDE$, são congruentes.

Figura 28 – Caso Lado-Ângulo-Lado de congruência de triângulos



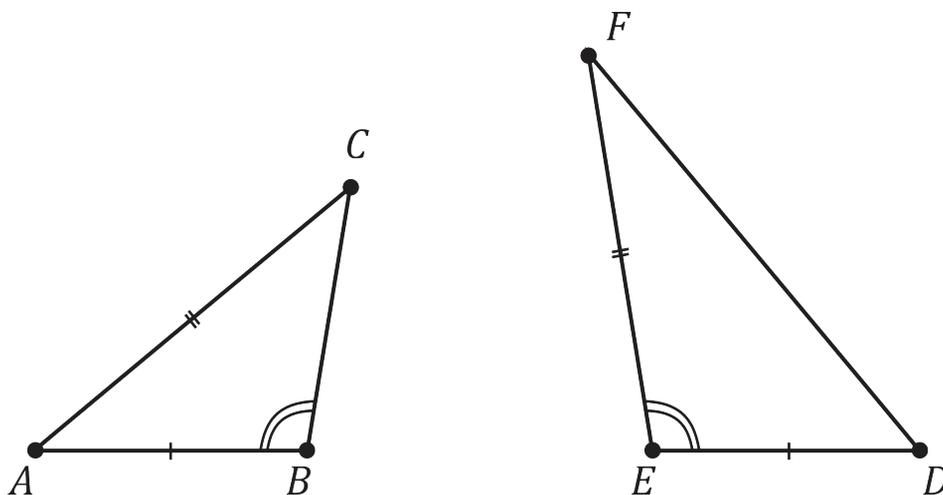
Fonte: DEaD | IFCE

Um outro modo de escrever o Axioma 3.1 é o seguinte (figura 28): se dois lados de um triângulo (AB e AC) são congruentes respectivamente a dois lados de outro triângulo (DE e DF) e o ângulo formado por esses dois lados ($\angle CAB$) é congruente ao ângulo formado pelos dois lados do outro triângulo ($\angle FDE$), então os dois triângulos são congruentes, ou seja, o terceiro lado de um triângulo é congruente ao terceiro lado do outro triângulo ($BC \equiv EF$) e os dois outros ângulos de um triângulo

são respectivamente congruentes aos dois ângulos restantes do outro triângulo ($\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BCA \equiv \angle EFD$).

No Axioma 3.1, é fundamental que os ângulos congruentes tenham como lados os lados dos triângulos que também são congruentes. Na figura 29 vemos um exemplo de dois triângulos não congruentes com dois lados e um ângulo respectivamente congruentes. Isso ocorre porque, no triângulo ABC o ângulo ABC não tem os lados AB e AC como lados, e no triângulo DEF , o ângulo DEF tem os lados $DE \equiv AB$ e $EF \equiv AC$ como lados.

Figura 29 – Triângulos não congruentes



Fonte: DEaD | IFCE

O Axioma 3.1 aparece nos *Elementos* de Euclides como a Proposição 4 do livro I. A demonstração oferecida por Euclides para esta Proposição usa a ideia de “ajuste”:

Pois o triângulo ABC , sendo ajustado sobre o triângulo DEF , e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D , e, por outro lado, a reta AB sobre DE , também o ponto B se ajustará sobre o ponto E , por ser AB igual a DE ; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE , também AC se ajustará sobre DF e, por ser o ângulo $\angle CAB$ ao ângulo $\angle FDE$; desse modo, o ponto C se ajustará sobre o ponto F , por ser AC igual a DF . (EUCLIDES, 2009, p.101)

Euclides continua seu raciocínio, utilizando a ideia de ajuste para mostrar que os triângulos são “iguais” (Euclides não utiliza a palavra “congruentes”). Implícitas neste raciocínio estão as ideias de movimento e de sobreposição, exatamente a motivação intuitiva que citamos anteriormente: dois triângulos são congruentes quando um deles pode ser movido e ajustado sobre o outro.

Como a ideia de sobreposição, no sentido explicado acima, não ocorre explicitamente nas noções comuns, nem nos postulados do Livro I dos *Elementos*, a abordagem moderna opta por incluir o caso LAL de congruência como um axioma.

A partir dos axiomas CA1, CA2 e LAL, iremos obter alguns resultados sobre ângulos. Antes, precisamos de uma definição.

Seja $\angle CAB$ um ângulo e seja D um ponto na reta que passa por A e B , escolhido de modo que $D * A * B$, isto é, A está entre D e B . Os ângulos $\angle CAB$ e $\angle CAD$ são chamados **suplementares**.

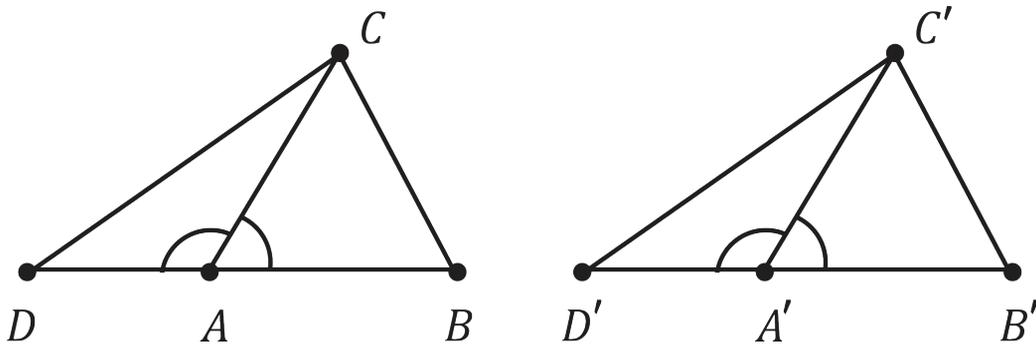
Com base no que foi definido acima, podemos demonstrar o teorema que se segue.

Teorema 3.3 Sejam $\angle CAB$ e $\angle CAD$ ângulos suplementares. Se $\angle C'A'B'$ e $\angle C'A'D'$ também são suplementares e $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, então $\angle CAD \equiv \angle C'A'D'$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $AD \equiv A'D'$ (figura 30), pois do contrário, poderíamos substituir os pontos B' , C' e D' por outros pontos correspondentes nas mesmas semirretas de maneira a preservar a congruência. Agora, traçando os segmentos BC , BD , $B'C'$ e $B'D'$, vamos analisar os triângulos ABC e $A'B'C'$.

Como $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$ e $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (axioma LAL). Da congruência, segue que $BC \equiv B'C'$ e $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$.

Figura 30 – Exemplos de ângulos suplementares



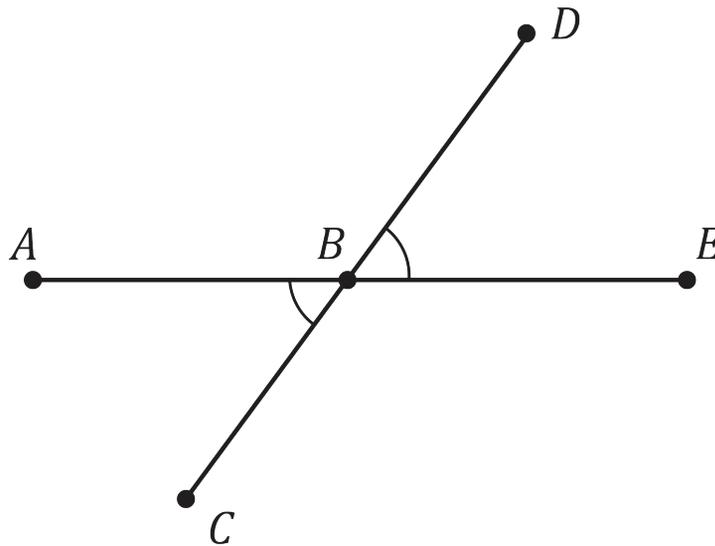
Fonte: DEaD | IFCE

Como $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$, $D * A * B$ e $D' * A' * B'$, podemos aplicar o axioma sobre adição de segmentos (axioma C3 da Aula 2) para concluirmos que $DB \equiv D'B'$. Note ainda que nos triângulos BCD e $B'C'D'$ temos que $BC \equiv B'C'$, $\angle CBD \equiv \angle C'B'D'$ e $DB \equiv D'B'$, e segue novamente, do axioma LAL, que $\triangle BCD \equiv \triangle B'C'D'$. Em particular, $DC \equiv D'C'$ e $\angle CDB \equiv \angle C'D'B'$. Por fim, se observamos os triângulos ACD e $A'C'D'$, temos que $DC \equiv D'C'$, $\angle CDA \equiv \angle C'D'A'$ e $DA \equiv D'A'$, então $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$ (pelo axioma LAL). Da congruência, segue que $\angle CAD \equiv \angle C'A'D'$, como queríamos demonstrar. ■

O resultado a seguir, segue do Teorema 3.3 e será utilizado muitas vezes no nosso texto.

Dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle DBE$ são ditos **opostos pelo vértice**, ou **verticais**, se $A * B * E$ e $C * B * D$. Devemos lembrar que, se B está entre A e E então esses três pontos são colineares, o mesmo ocorrendo para C, B e D .

Figura 31 - Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: DEaD | IFCE

Teorema 3.4 Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração: Note que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DBE$ são ambos suplementares do ângulo $\angle ABD$ (veja a figura 31). Pelo Teorema 3.3, eles são congruentes. ■

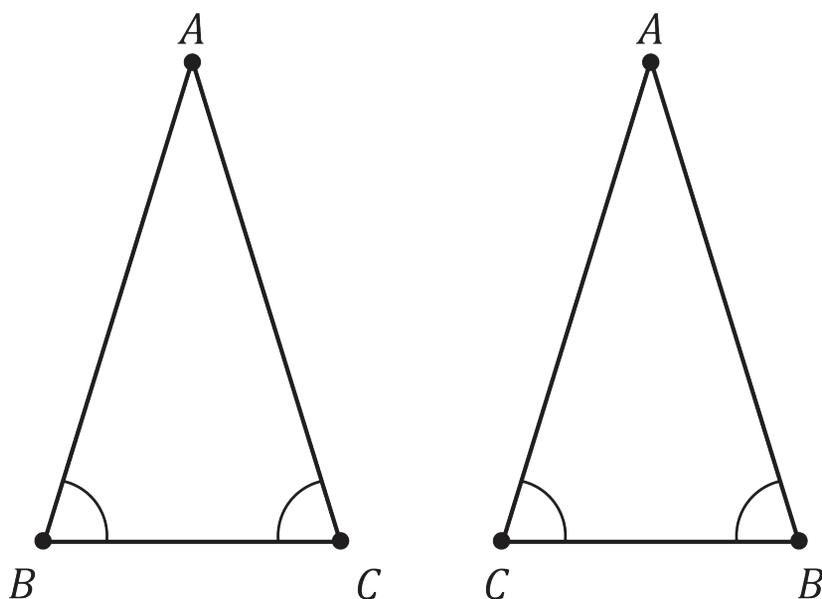
O próximo resultado trata de um tipo particularmente importante de triângulo, que definiremos a seguir.

Um triângulo ABC é dito **isósceles** se dois de seus lados forem congruentes. Se considerarmos que $AB \equiv AC$ então temos algumas denominações especiais: os lados AB e AC são chamados de **laterais**; o lado BC é denominado de **base**; os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são os **ângulos da base** e o ângulo $\angle BAC$ é o **ângulo do vértice**.

Teorema 3.5 (Elementos, Livro I, Proposição 5) Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Seja ABC um triângulo isósceles. Consideremos a correspondência entre o triângulo ABC e ele mesmo, que faz corresponder o vértice B ao vértice C e vice-versa, deixando o vértice A fixado, ou seja, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$ e $A \leftrightarrow A$.

Figura 32 – Demonstração do Teorema 3.5



Fonte: DEaD | IFCE



A demonstração que exibimos do Teorema 3.5, bem mais simples do que a dada por Euclides, nos *Elementos*, deve-se a Pappus de Alexandria, matemático egípcio helenizado (isto é, de cultura grega) que viveu no século IV d.C.

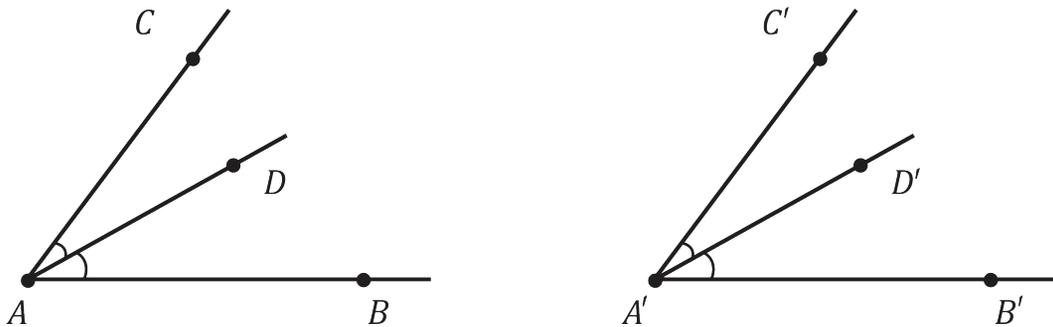
Por hipótese, o triângulo ABC é isósceles então consideraremos $AB \equiv AC$. Da mesma forma, o triângulo CBA também é isósceles e seja $AC \equiv AB$. Analisando os dois triângulos temos que $AB \equiv AC$, $\angle BAC \equiv \angle CAB$ e $AC \equiv AB$ e segue, do caso LAL, que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$. Da congruência, concluímos que $\angle ABC \equiv \angle ACB$, como queríamos demonstrar. ■

Observe que na demonstração do teorema acima, usamos a técnica de comparar um triângulo com ele mesmo, ou seja, como indicado na figura 32, desenhamos dois triângulos, ABC e ACB , de modo que ACB foi obtido de ABC trocando o vértice B pelo vértice C . Pense nessa associação imaginando um triângulo desenhado em uma janela de vidro de uma casa, e coloque dois observadores, sendo que um olha o triângulo por dentro da casa e o outro por fora da casa.

O resultado a seguir será assumido como um axioma. A “adição” de ângulos deve ser entendida geometricamente como uma justaposição de ângulos, ou seja, para somar dois ângulos devemos fazer com que um dos lados de um ângulo coincida com um dos lados do outro ângulo. A soma será o ângulo obtido eliminando-se o lado comum.

Axioma 3.2 (Adição de ângulos) Considere o ângulo $\angle CAB$ e seja AD uma semirreta no seu interior. Suponha que $\angle C'A'D' \equiv \angle CAD$, $\angle D'A'B' \equiv \angle DAB$ e as semirretas $A'C'$ e $A'B'$, que são lados do ângulo $\angle C'A'B'$, estão em lados opostos da reta $A'D'$. Então $\angle C'A'B' \equiv \angle CAB$ e a semirreta $A'D'$ está no interior do ângulo $\angle C'A'B'$.

Figura 33 – Axioma sobre adição de ângulos



Fonte: DEaD | IFCE

Dizemos que o ângulo $\angle CAB$ é a soma dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle DAB$. Com essa nomenclatura, o axioma acima diz que *somas de ângulos congruentes são congruentes*.

A seguir, exibiremos os demais casos de congruência de triângulos. Ao contrário do caso LAL, não precisamos considerar esses casos como axiomas, pois eles podem ser demonstrados.

O axioma sobre a adição de ângulos é, na verdade, um teorema. Assumimos que ele é um axioma para tornar o texto mais simples. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada, por exemplo, em HARTSHORNE, p.93, Proposição 9.4.

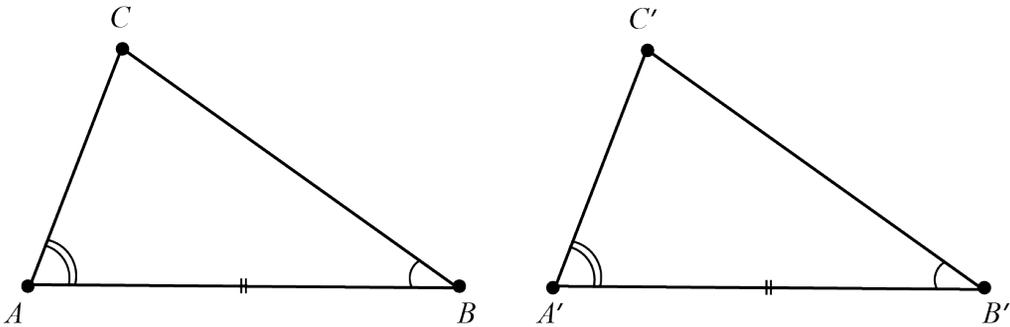


O próximo teorema é conhecido como 2º caso de congruência de triângulos ou critério Ângulo – Lado – Ângulo (ALA).

Teorema 3.6 (2º caso de congruência de triângulos - ALA)

Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $AB \equiv A'B'$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$ são congruentes.

Figura 34 – Caso ALA de congruência



Fonte: DEaD | IFCE

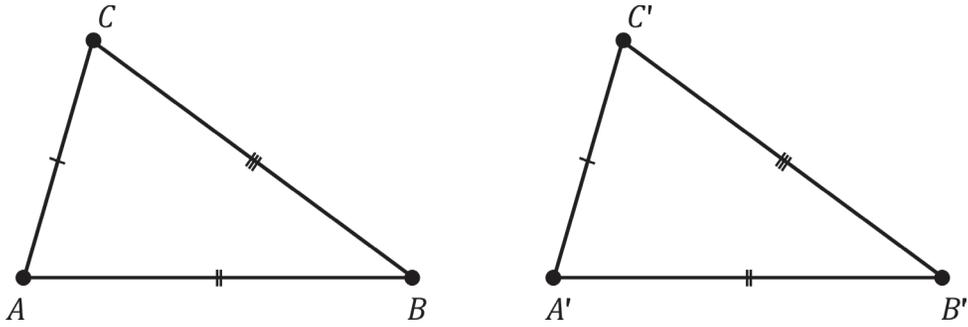
Demonstração: Pelo axioma C1 de transporte de segmentos, visto na Aula 2, existe um ponto C'' na semirreta $A'C'$ tal que $AC \equiv A'C''$. Analisando os triângulos ABC e $A'B'C''$ temos que $AC \equiv A'C''$, $\angle CAB \equiv \angle C''A'B'$ e $AB \equiv A'B'$, e portanto $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$ (pelo caso LAL). Da congruência, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C''$ e por hipótese, $\angle A'B'C' \equiv \angle ABC$ concluímos que $\angle A'B'C' \equiv \angle A'B'C''$. Pela unicidade da semirreta, garantida no axioma CA1, temos que as semirretas $B'C'$ e $B'C''$ são iguais. Dessa forma C'' coincide com C' , pois as retas $A'C'$ e $B'C' = B'C''$ se intersectam em um só ponto. Assim, o triângulo $A'B'C''$ coincide com o triângulo $A'B'C'$. Como $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$, segue que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. ■

O teorema a seguir é conhecido como 3º caso de congruência de triângulos ou critério Lado – Lado – Lado (LLL).

Teorema 3.7 (3º caso de congruência de triângulos - LLL)

Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$ são congruentes.

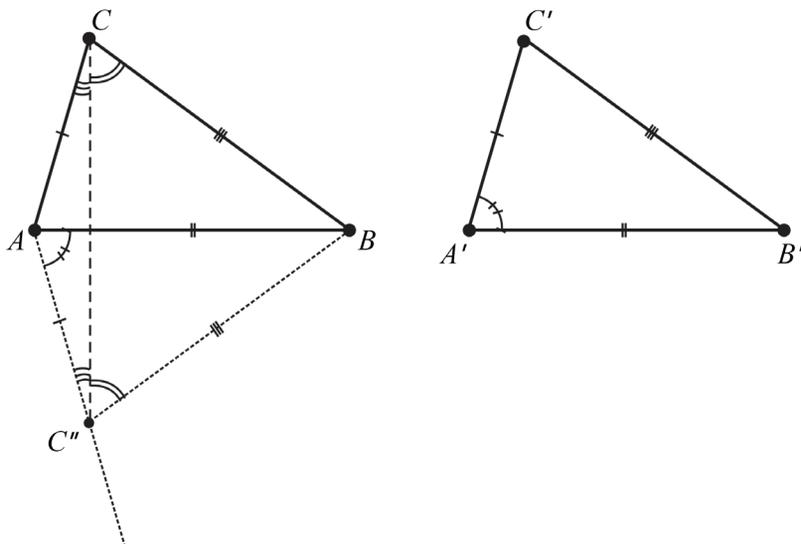
Figura 35 – Caso LLL de congruência



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Pelo axioma CA1, existe uma única semirreta AC'' , contida no semiplano determinado por AB , que não contém C , tal que $\angle BAC'' \equiv \angle B'A'C'$ (figura 36).

Figura 36 – Demonstração do caso LLL



Fonte: DEaD | IFCE

Podemos supor que o ponto C'' foi escolhido de modo que $AC'' \equiv A'C'$. Pelo axioma LAL, temos:

$$\left. \begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ \angle BAC'' \equiv \angle B'A'C' \\ AC'' \equiv A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC'' \equiv \Delta A'B'C'$$

Em particular, $BC'' \equiv B'C'$. Como, por hipótese, $A'C' \equiv AC$ e, por construção, $AC'' \equiv A'C'$ segue que $AC'' \equiv AC$. Analogamente, como, por hipótese, $B'C' \equiv BC$ e, da congruência, $BC'' \equiv B'C'$, segue que $BC'' \equiv BC$ (Em ambos os casos, fizemos

uso da transitividade da congruência de segmentos). Dessa forma, os triângulos ACC'' e BCC'' são isósceles. Logo, $\angle ACC'' \equiv \angle AC''C$ e $\angle BCC'' \equiv \angle BC''C$ (pelo Teorema 3.5). Além disso, do axioma sobre adição de ângulos, $\angle ACB \equiv \angle AC''B$. Como, por construção, $\angle AC''B \equiv \angle A'C'B'$, temos, pelo axioma CA₂ (ou o Teorema 3.1), que $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$. Portanto, do axioma LAL, temos:

$$\left. \begin{array}{l} AC \equiv A'C' \\ \angle ACB \equiv \angle A'C'B' \\ BC \equiv B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

58

como queríamos demonstrar. ■

Com isso, finalizamos nosso primeiro tópico. Vimos aqui os axiomas sobre congruência de ângulos e o axioma LAL sobre congruência de triângulos. Deduzimos outros dois casos de congruência, ALA e LLL, a partir dos axiomas sobre congruência de ângulos e do caso LAL. No tópico seguinte, iremos aplicar os resultados obtidos para transportar e medir ângulos, bem como para justificarmos a validade de certas construções básicas.

Transporte e medição de ângulos

OBJETIVOS

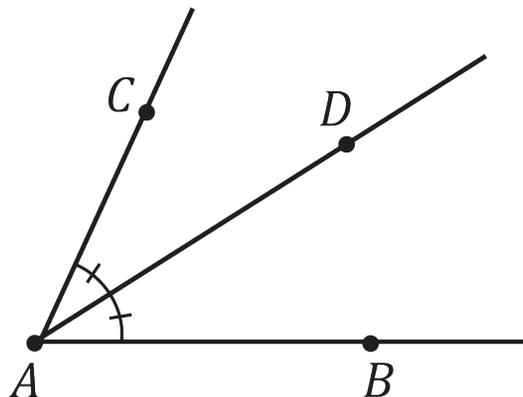
- Estudar os métodos para transporte e medição de ângulos
- Reconhecer o grau como unidade de medida de ângulos
- Conhecer mais algumas construções geométricas presentes no Livro I dos *Elementos* de Euclides

Neste segundo tópico, usaremos os resultados obtidos no tópico anterior sobre congruência de ângulos e de triângulos para obtermos novos resultados sobre construções geométricas, e também para transportar e medir ângulos.

Vamos iniciar com algumas construções básicas usando os instrumentos clássicos: a régua (sem marcas) e o compasso. A primeira construção é a que Euclides faz na Proposição 9 do Livro I dos *Elementos*. Para tanto, precisaremos do conceito de bissetriz de um ângulo.

Uma semirreta AD é chamada **bissetriz** do ângulo $\angle CAB$ se os ângulos $\angle CAD$ e $\angle DAB$ são congruentes.

Figura 37 – Bissetriz do ângulo $\angle CAB$



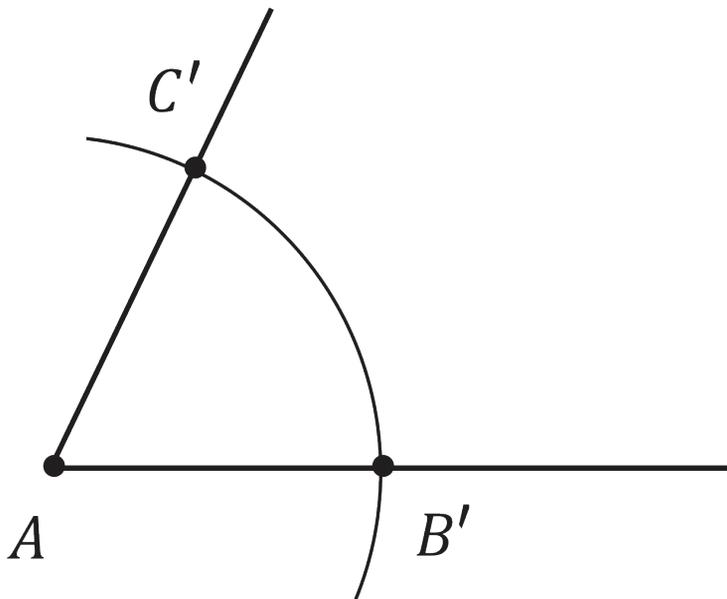
Mostraremos agora que dado qualquer ângulo, sempre é possível determinar a sua bissetriz.

Teorema 3.8 Todo ângulo possui uma bissetriz.

Demonstração: Seguindo Euclides, vamos construir a bissetriz usando régua e compasso. Inicialmente mostraremos a existência de uma semirreta contida na região interna de um ângulo qualquer e depois deduziremos que essa semirreta é a bissetriz desse ângulo. A construção seguirá os seguintes passos:

Passo 1: Considere um ângulo qualquer com vértice em A e com o compasso centrado em A e abertura qualquer, trace um arco de círculo que intersecta os lados do ângulo nos pontos B' e C' (figura 38).

Figura 38 – Determinação do ângulo $B'AC'$



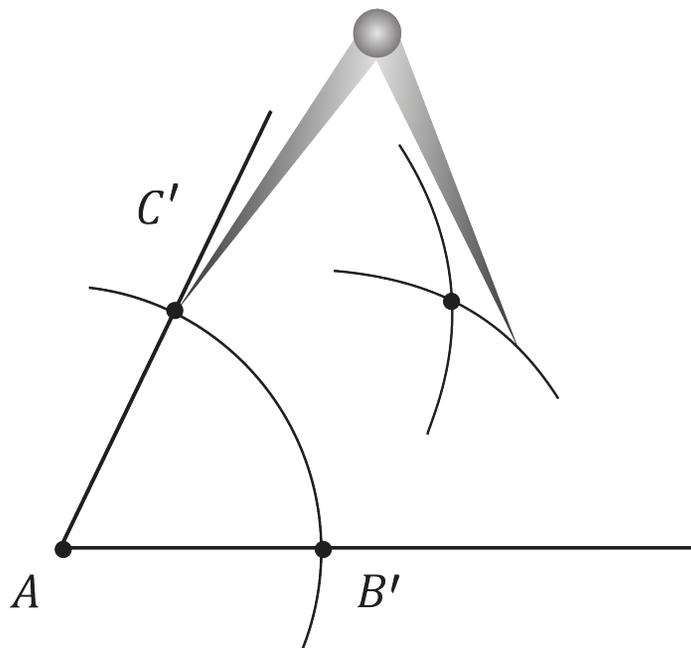
Fonte: DEaD | IFCE

Passo 2: Com o compasso centrado em B' e abertura $B'C'$, trace um arco de círculo.

Passo 3: Agora com o compasso centrado em C' e abertura $B'C'$ trace outro arco de círculo de modo a intersectar o arco construído no passo 2.

Passo 4: Determine por D o ponto de interseção desses dois arcos (figura 39).

Figura 39 – Segundo, terceiro e quarto passos da construção da bissetriz

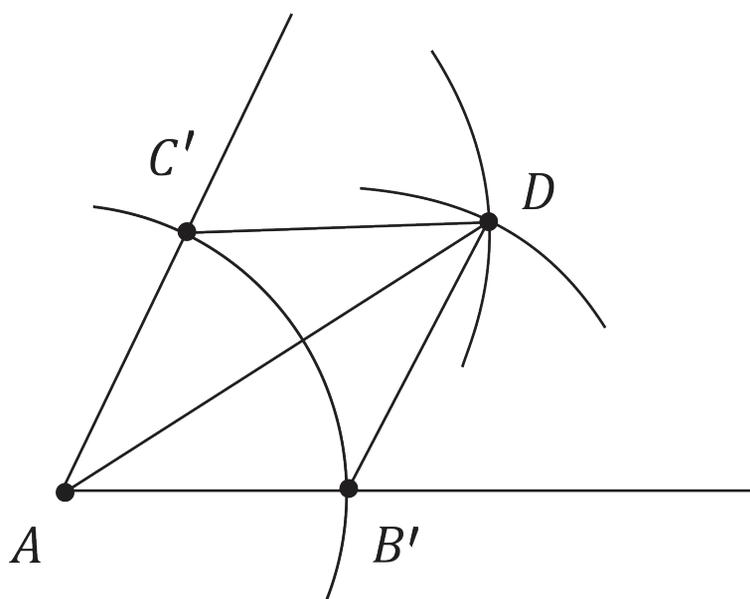


Fonte: DEaD | IFCE

Passo 5: Com o auxílio de uma régua trace a semirreta de origem no vértice A e que passe pelo ponto D , ou seja, construa a semirreta AD .

Por que essa construção funciona? Ou seja, por que a semirreta AD , construída no passo 5, é de fato a bissetriz do ângulo $\angle C'AB'$? Para responder a essa pergunta, usaremos os resultados obtidos no tópico 1.

Figura 40 – Justificativa da construção da bissetriz



Fonte: DEaD | IFCE

Com efeito, note que os triângulos $AB'D$ e $AC'D$ são congruentes pelo caso LLL (Teorema 3.7) pois: $AB' \equiv AC'$, são ambos raios de um mesmo círculo (figura 40); $B'D \equiv C'D$, já que a construção é feita de modo que a abertura do compasso seja a mesma; e o lado AD é compartilhado pelos $\triangle AB'D$ e $\triangle AC'D$. Da congruência, concluímos que $\angle B'AD \equiv \angle C'AD$, como queríamos demonstrar. ■

A seguir, daremos algumas definições que serão úteis para a demonstração do Teorema 3.9.

Um ângulo é dito **reto**, quando é congruente a seu suplementar. Duas retas concorrentes são ditas **perpendiculares**, quando os ângulos por elas determinados são retos. Lembremos que o **ponto médio** de um segmento de reta AB é um ponto M tal que $A * M * B$ e $AM \equiv MB$. Uma **mediatriz** de um segmento AB é uma reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular à reta AB .

O próximo resultado engloba a Proposição 10 do Livro I dos *Elementos*. Nessa proposição, Euclides propõe a construção do ponto médio de um segmento. No teorema a seguir, faremos mais: construiremos a mediatriz de um segmento dado e mostraremos que ela é única.

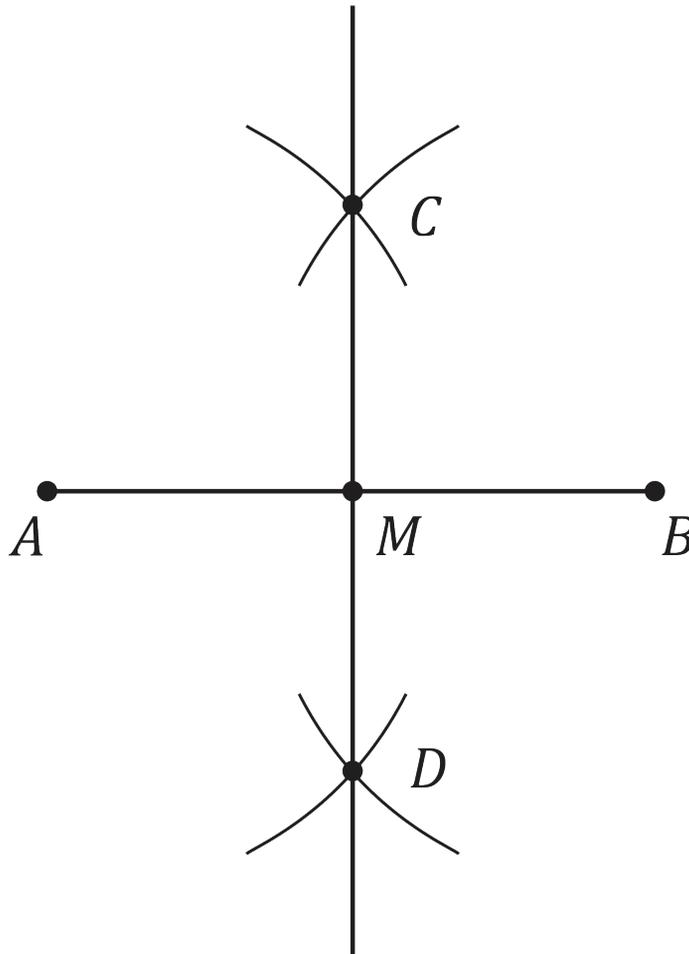
Teorema 3.9 A mediatriz de um segmento de reta AB existe e é única.

Demonstração: Inicialmente mostraremos a existência da mediatriz de um segmento. A construção se dará baseando-se nos seguintes passos:

Passo 1: Com o auxílio de uma régua construa um segmento de reta AB .

Passo 2: Usando um compasso com a abertura fixada, maior do que a metade do segmento AB e menor do que o segmento AB , trace quatro arcos que se cruzam determinando dois pontos C e D em lados opostos da reta AB (figura 41).

Figura 41 – Construção da mediatriz de um segmento



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 3: Usando uma régua, trace uma reta que passe pelos pontos C e D . Marque ainda o ponto M como sendo a interseção da reta que passa por C e D , e o segmento AB .

Para mostrar que essa construção realmente fornece a mediatriz do segmento AB , ou seja, que a reta que passa pelos pontos C e D é a mediatriz do segmento AB , devemos proceder da seguinte maneira (figura 41): por construção, temos que $AC \equiv AD$ e assim o triângulo ACD é isósceles, logo $\angle ACD \equiv \angle ADC$. Note ainda que, pelo caso LLL, os triângulos ABC e ABD são congruentes, pois $AC \equiv AD$, $CB \equiv DB$ e AB é comum a ambos os triângulos. Em particular, $\angle BAC \equiv \angle BAD$, isto é, $\angle MAC \equiv \angle MAD$. Além disso, temos que $\triangle AMC \equiv \triangle AMD$ pelo caso ALA de congruência (Teorema 3.6), pois:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACD \equiv \angle ADC \\ AC \equiv AD \text{ (por construção)} \\ \angle MAC \equiv \angle MAD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMC \equiv \triangle AMD$$

Com isso, $\angle AMC \equiv \angle AMD$. Sendo congruente a seu suplementar, o ângulo $\angle AMC$ é, por definição, reto. Os ângulos $\angle AMD$ e $\angle CMB$ são opostos pelo vértice, logo congruentes.

Mostraremos agora que M é ponto médio de AB . De fato, os triângulos isósceles ACD e BCD são congruentes pelo caso LLL:

$$\left. \begin{array}{l} AD \equiv BD \text{ (por construção)} \\ AC \equiv BC \text{ (por construção)} \\ CD \text{ é comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ACD \equiv \Delta BCD$$

Em particular, $\angle ACM \equiv \angle BCM$. Então, pelo caso LAL,

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACM \equiv \angle BCM \\ AC \equiv BC \text{ (por construção)} \\ CM \text{ é comum} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ACM \equiv \Delta BCM$$

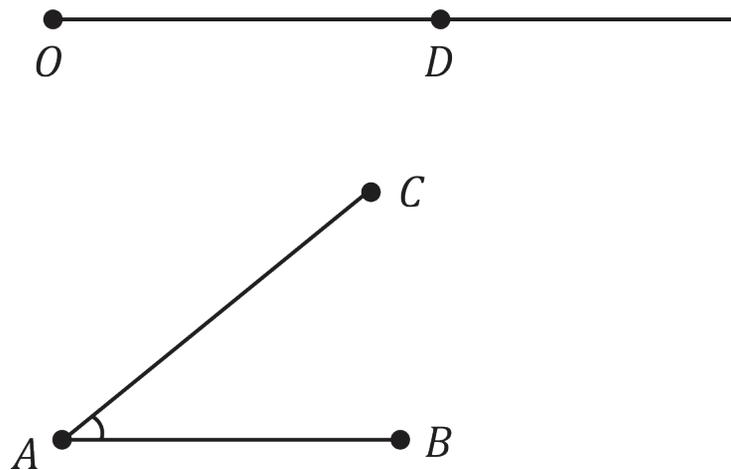
Em particular, $AM \equiv MB$, ou seja, M é ponto médio de AB .

Por fim, mostraremos a unicidade da mediatriz. Para tanto faremos uso dos axiomas C_1 e CA_1 . De fato, se M' for um ponto do segmento AB tal que $AM' \equiv M'B$, então, por C_1 , é possível transportar o segmento AM' para a semirreta de origem B contendo A , de modo a se obter um segmento $M''B \equiv AM'$. Pela transitividade da congruência de segmentos, $M'B \equiv M''B$. Pela unicidade de C_1 , $M' = M'' = M$. Assim, o ponto médio do segmento AB é único. A existência de outra reta passando por M e perpendicular a AB entraria em contradição com a unicidade da semirreta dada no axioma CA_1 . Assim, a mediatriz de um segmento de reta é única. ■

A seguir, indicaremos como é possível transportar um ângulo usando-se régua e compasso. Isso significa construir um ângulo sobre uma semirreta dada, congruente a um ângulo dado. Esse é o conteúdo da Proposição 23 do Livro I dos *Elementos*.

Teorema 3.10 Dado um ângulo $\angle CAB$ e uma semirreta OD (figura 42), é possível construir com régua e compasso um ângulo $\angle EOD$ congruente ao ângulo $\angle CAB$.

Figura 42 – Ângulo $\angle CAB$ e semirreta OD

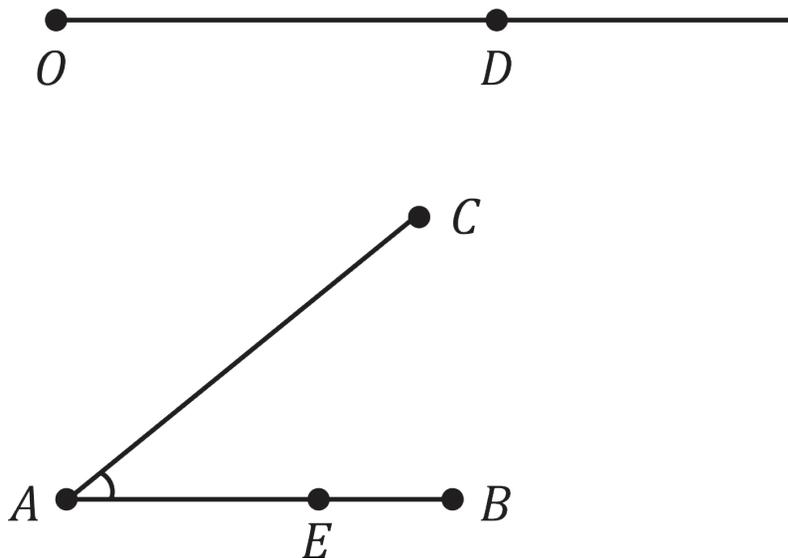


Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Vamos exibir os passos da construção, depois justificaremos sua validade.

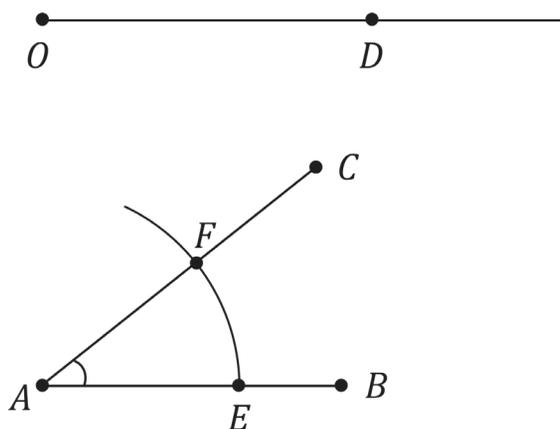
Passo 1: Marque um ponto E sobre o lado AB do ângulo $\angle CAB$.

Figura 43 – Determinação do ponto E



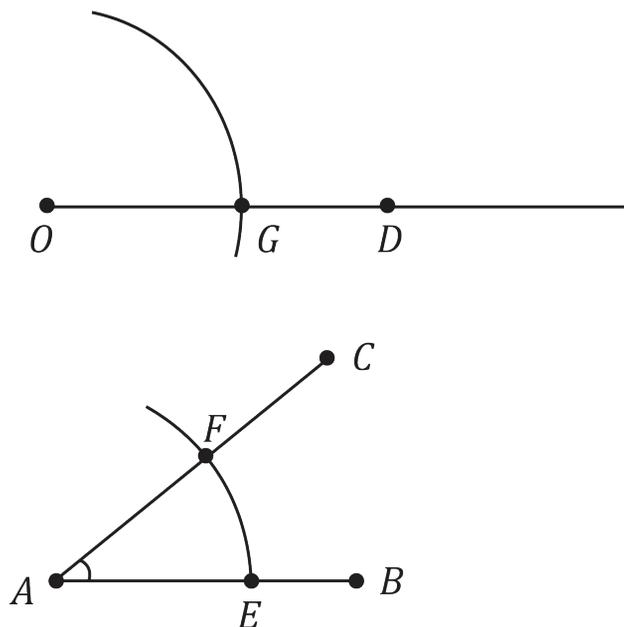
Fonte: DEaD | IFCE

Passo 2: Com o compasso centrado em A e abertura AE , trace um arco de círculo, que encontra o lado AC do ângulo $\angle CAB$ no ponto F .

Figura 44 – Determinação do ponto F 

Fonte: DEaD | IFCE

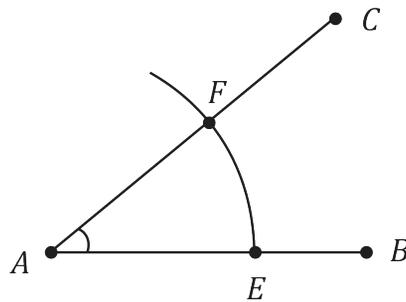
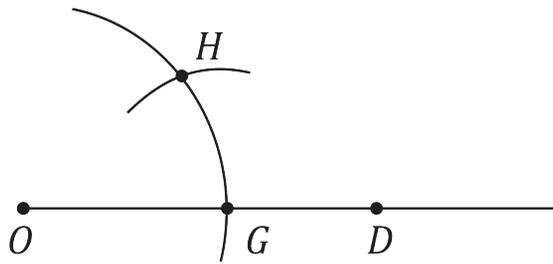
Passo 3: Com abertura igual a AE centre o compasso em O e trace um arco de círculo que corta a semirreta OD no ponto G .

Figura 45 – Determinação do ponto G 

Fonte: DEaD | IFCE

Passo 4: Com centro em G e abertura EF , trace um arco de círculo que intersecta o arco traçado no passo 3, no ponto H .

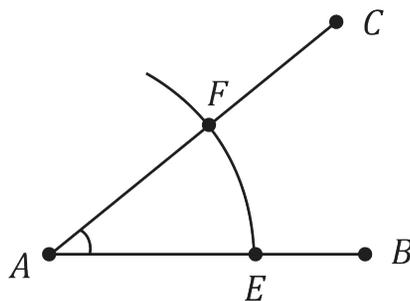
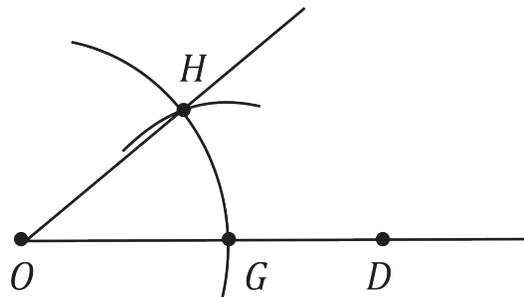
Figura 46 – Determinação do ponto H



Fonte: DEaD | IFCE

Passo 5: Trace a semirreta OH . O ângulo $\angle HOG$ é congruente ao ângulo $\angle CAB$.

Figura 47 – Determinação do ângulo $\angle HOG$



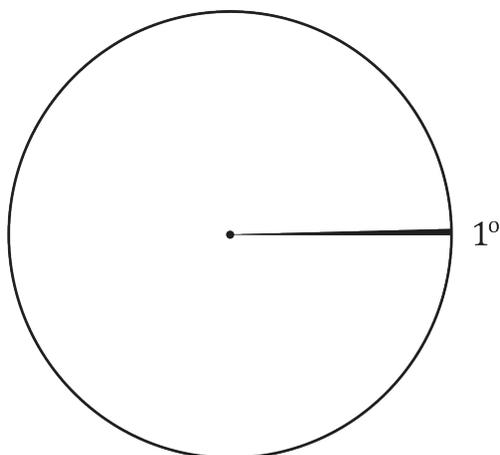
Fonte: DEaD | IFCE

Para justificar a construção acima, observemos que, por construção, $AE \equiv OG$, $AF \equiv OH$ e $EF \equiv GH$. Assim, pelo caso LLL, os triângulos AEF e OGH são congruentes. Em particular, os ângulos correspondentes $\angle CAB$ e $\angle HOG$ são congruentes. ■

Vamos finalizar a nossa terceira aula discutindo brevemente a medição de ângulos e a unidade de medida “grau”.

Assim como fizemos para medir segmentos na Aula 2, a medição de ângulos exige a escolha de uma *unidade de medida*. A unidade mais usada para a medição de ângulos é o **grau**, definido como a medida do ângulo que corresponde a $1/360$ de um círculo (figura 48).

Figura 48 – Um ângulo de medida 1°



Fonte: DEaD | IFCE

A origem dessa unidade de medida é a antiga Mesopotâmia, onde floresceu a civilização Babilônica, entre os séculos XVIII e VI a.C., na região onde hoje se situa o Iraque. Os babilônios usavam dois símbolos para representar os números, combinando-os de modo a obter os 59 primeiros números (figura 49). A partir do número 60, eles repetiam os símbolos. Por exemplo, o mesmo símbolo era usado para denotar os números 1 e 60.

Para saber mais sobre o sistema de numeração babilônico, você pode consultar o link <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm>



Figura 49 – O sistema de numeração Babilônico

| | | | | | | | | | | | |
|----|------------|----|-------------|----|--------------|----|---------------|----|----------------|----|----------------|
| 1 | ∟ | 11 | ∟∟ | 21 | ∟∟∟ | 31 | ∟∟∟∟ | 41 | ∟∟∟∟∟ | 51 | ∟∟∟∟∟∟ |
| 2 | ∟∟ | 12 | ∟∟∟ | 22 | ∟∟∟∟ | 32 | ∟∟∟∟∟ | 42 | ∟∟∟∟∟∟ | 52 | ∟∟∟∟∟∟∟ |
| 3 | ∟∟∟ | 13 | ∟∟∟∟ | 23 | ∟∟∟∟∟ | 33 | ∟∟∟∟∟∟ | 43 | ∟∟∟∟∟∟∟ | 53 | ∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 4 | ∟∟∟∟ | 14 | ∟∟∟∟∟ | 24 | ∟∟∟∟∟∟ | 34 | ∟∟∟∟∟∟∟ | 44 | ∟∟∟∟∟∟∟∟ | 54 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 5 | ∟∟∟∟∟ | 15 | ∟∟∟∟∟∟ | 25 | ∟∟∟∟∟∟∟ | 35 | ∟∟∟∟∟∟∟∟ | 45 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 55 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 6 | ∟∟∟∟∟∟ | 16 | ∟∟∟∟∟∟∟ | 26 | ∟∟∟∟∟∟∟∟ | 36 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 46 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 56 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 7 | ∟∟∟∟∟∟∟ | 17 | ∟∟∟∟∟∟∟∟ | 27 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 37 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 47 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 57 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 8 | ∟∟∟∟∟∟∟∟ | 18 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 28 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 38 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 48 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 58 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 9 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 19 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 29 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 39 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 49 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 59 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ |
| 10 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 20 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 30 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 40 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | 50 | ∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟ | | |

Fonte: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Babylonian_numerals.html

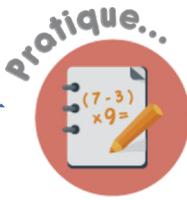
Uma das explicações que os historiadores da Matemática encontraram para a escolha da base 60 é que o sistema de numeração babilônico foi primordialmente usado no estudo da astronomia e na confecção de calendários, e que os babilônios acreditavam que o ano tinha 360 dias. Isso tornava a escolha da base 60 natural e adequada.

Como quatro ângulos retos preenchem um círculo, podemos definir a unidade de medida grau da seguinte maneira: seja θ um ângulo que, justaposto 90 vezes, produz um ângulo reto.

O Axioma sobre adição de ângulos nos permite concluir que qualquer ângulo reto mede 90° . O ângulo formado pela justaposição de dois ângulos retos é chamado **ângulo raso**. Ele mede $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Se dois ângulos são suplementares, a soma de suas medidas é igual à medida de um ângulo raso, isto é, é igual a 180° .

Concluímos, assim, nosso segundo tópico e nossa terceira aula, onde estudamos a congruência de ângulos e de triângulos no tópico 1. Vimos algumas consequências importantes dos axiomas de congruência de ângulos e triângulos no tópico 2. Em particular, apresentamos o grau como unidade de medida de ângulos e discutimos brevemente sua origem histórica.

Na próxima aula estudaremos o Teorema do Ângulo Externo e a noção de paralelismo.



1. Mostre que todo triângulo equilátero é equiangular, ou seja, se os três lados de um triângulo são congruentes, então os três ângulos internos também são congruentes. Sugestão: use o Teorema 3.4.
2. Mostre que todo triângulo equiangular é equilátero.
3. Construa, usando régua e compasso, a reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, pertencente a essa reta (Elementos, I-11).
4. Construa, usando régua e compasso, a reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, exterior a essa reta (Elementos, I-12).

O Teorema do Ângulo Externo e Paralelismo

Caro(a) aluno(a),

Nesta aula continuaremos nosso estudo dos resultados básicos da geometria, seguindo o Livro I dos *Elementos* de Euclides. A aula está dividida em duas partes. No primeiro tópico, estudaremos o Teorema do Ângulo Externo e veremos que muitas informações relevantes sobre ângulos e distâncias podem ser deduzidas a partir desse teorema. No segundo tópico retornaremos ao quinto postulado de Euclides, também conhecido como *axioma das paralelas*. Reformularemos este axioma de um modo mais simples, e estudaremos algumas de suas consequências.

O axioma das paralelas é um divisor de águas em geometria. Durante séculos, geômetras acreditaram que ele fosse, na verdade, um teorema e que, por não conseguir demonstrá-lo, Euclides o teria colocado nos *Elementos* como um postulado. Na primeira metade do século XIX, os matemáticos János Bolyai (1802-1860), húngaro, e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), russo, conceberam, de modo simultâneo, mas independente, uma geometria em que todos os axiomas da geometria euclidiana são válidos, exceto o axioma das paralelas. Isso significa que, na verdade, o quinto postulado é um axioma *independente* dos demais, que caracteriza a geometria euclidiana como uma dentre várias geometrias possíveis.

Objetivos

- Estudar o Teorema do Ângulo Externo e suas consequências
- Compreender o axioma das paralelas e suas consequências

□ Teorema do Ângulo Externo

72

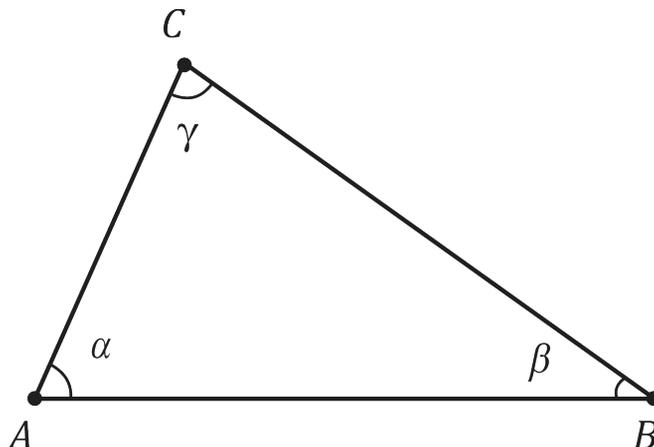
OBJETIVOS

- Entender o Teorema do Ângulo Externo e suas principais consequências
- Reconhecer a importância do Teorema do Ângulo Externo como alternativa parcial ao axioma das paralelas

O Teorema do Ângulo Externo é usado por Euclides no Livro I dos *Elementos* como uma ferramenta para adiar ao máximo a entrada em cena do quinto postulado, também conhecido como axioma das paralelas, que exibimos na Aula 2. No tópico 2 discutiremos as possíveis motivações de Euclides para esse adiamento.

Vamos começar lembrando o conceito de ângulo interno e estabelecendo a noção de ângulo externo de um triângulo. Vimos na Aula 3, que dado um triângulo ABC , os ângulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$ são chamados *ângulos internos*. Na figura abaixo designamos tais ângulos, respectivamente, por α , β e γ .

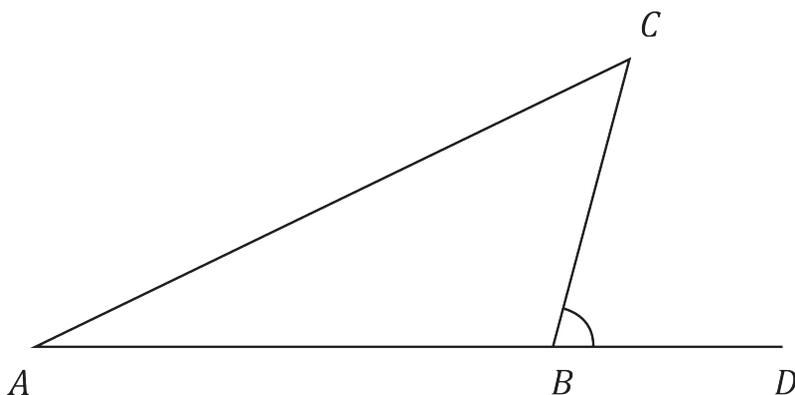
Figura 50 – O triângulo ABC e seus ângulos internos



Fonte: DEaD | IFCE

Agora, seja D um ponto sobre o prolongamento de um dos lados do triângulo ABC , digamos, $A * B * D$ (figura 51).

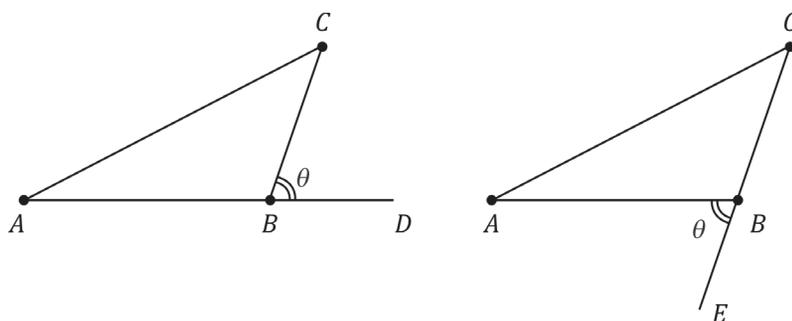
Figura 51 – Ângulo externo $\angle CBD$ do triângulo ABC



Fonte: DEaD | IFCE

O ângulo $\angle CBD$ é chamado **ângulo externo** do triângulo ABC . Note que, se em vez do lado AB prolongássemos o lado CB até um ponto E , obteríamos o ângulo $\angle ABE$ oposto pelo vértice ao ângulo $\angle CBD$ (figura 52). Isso significa que o ângulo externo depende apenas do vértice do triângulo, mas não depende do lado adjacente que é prolongado. Concluímos assim que associado ao vértice B existem dois ângulos externos $\angle CBD$ e $\angle ABE$ de modo que $\angle CBD \equiv \angle ABE$ (pois são opostos pelo vértice). Podemos fazer essa mesma análise para os vértices A e C .

Figura 52 – Ângulos externos associados ao vértice B



Fonte: DEaD | IFCE

Dessa forma, todo triângulo apresenta, em cada vértice, um par de ângulos externos congruentes e que são suplementares ao ângulo interno neste mesmo vértice.

Se um ângulo interno e um ângulo externo estão situados em um mesmo vértice, dizemos que eles são **adjacentes**. Caso contrário, dizemos que eles são **não adjacentes** (por exemplo, α e θ na figura 54). Com base no que foi exposto, podemos então dizer que

Cada ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno de um triângulo é denominado **ângulo externo** deste triângulo.

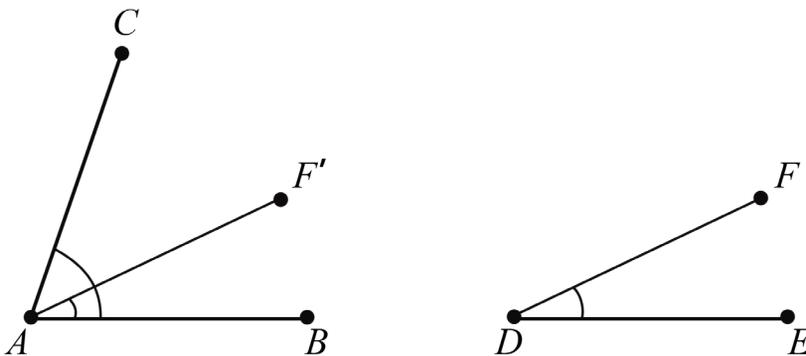
Seria possível então estabelecer uma relação entre um ângulo externo e um ângulo interno não adjacente a ele? Tal relação é apresentada no resultado a seguir e aparece no Livro I dos *Elementos*.

Teorema 4.1 (Elementos, Livro I, Proposição 16) Em um triângulo, um ângulo externo é maior do que os ângulos internos não adjacentes a ele.

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema 4.1, convém esclarecermos o que significa a expressão “um ângulo é maior do que outro”. Embora isso pareça ser intuitivamente claro, ainda não definimos uma relação de ordem entre ângulos.

Dizemos que o ângulo $\angle CAB$ é **maior** do que o ângulo $\angle FDE$ (figura 53) se existe um ponto F' , tal que a semirreta AF' está no interior do ângulo $\angle CAB$ e $\angle F'AB \equiv \angle FDE$. Usamos a notação padrão de desigualdade $\angle FDE < \angle CAB$.

Figura 53 – $\angle CAB$ é maior do que $\angle FDE$

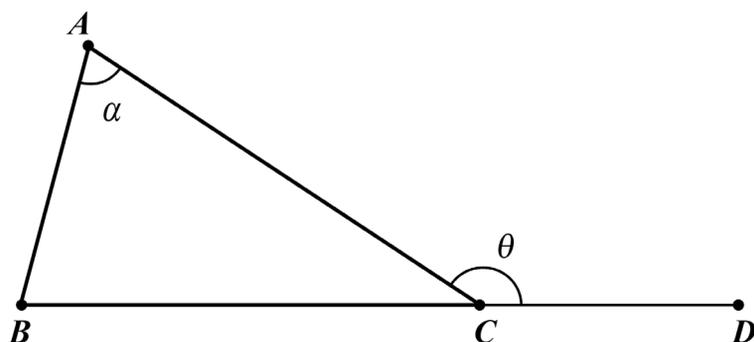


Fonte: DEaD | IFCE

Com base no que foi mencionado acima, podemos fazer agora a demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 4.1: Considere um triângulo ABC . Seja $\alpha = \angle BAC$, seu ângulo interno e $\theta = \angle ACD$, seu ângulo externo (figura 54). Afirmamos que $\alpha < \theta$.

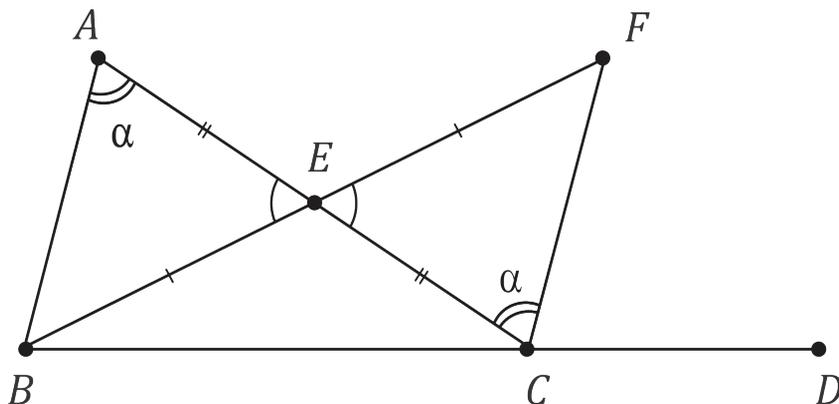
Figura 54 – Relação entre θ e α : $\alpha < \theta$



Fonte: DEaD | IFCE

Para demonstrar a afirmação, e conseqüentemente o teorema, consideremos o ponto médio E do lado AC (figura 55). Seja F um ponto sobre a semirreta BE escolhido de modo que $BE \equiv EF$.

Figura 55 – Determinação dos pontos E e F



Fonte: DEaD | IFCE

Por construção, temos $AE \equiv EC$ e $BE \equiv EF$. Como os ângulos $\angle AEB$ e $\angle FEC$ são opostos pelo vértice, são congruentes. Logo, pelo caso LAL, os triângulos AEB e CEF são congruentes. Em particular, $\alpha = \angle BAE \equiv \angle FCE$. Neste ponto, o argumento de Euclides prossegue do seguinte modo: $\angle ACF$ é uma parte de $\angle ACD = \theta$. Como o todo é maior do que a parte (quinta noção comum), segue que $\alpha < \theta$, e com isso Euclides encerra a demonstração.

No entanto, nossa definição de desigualdade entre ângulos exige uma justificativa um pouco diferente: precisamos mostrar que a semirreta CF está no interior do ângulo $\theta = \angle ACD$.

Por construção, $B * E * F$, onde o ponto E pertence à reta AC . Pelo axioma da separação, visto na Aula 1, o ponto F e o ponto B estão em semiplanos opostos,

determinados pela reta AC . Por outro lado, como $B * E * F$ e B pertence à reta CD , os pontos E e F estão no mesmo semiplano determinado pela reta AC , novamente pelo axioma da separação. Assim, o ponto F pertence aos dois semiplanos que determinam o ângulo ACD , logo está no interior deste ângulo. Portanto, a semirreta CF está no interior do ângulo ACD e isso mostra que $\alpha < \theta$. De forma análoga, se denominamos $\delta = \angle ABC$ demonstra-se que $\delta < \theta$ e será deixado a cargo do leitor. ■

Os próximos três resultados fornecem um método para a construção de retas paralelas. Antes, vejamos sua definição.

Duas retas r e s , situadas em um mesmo plano e que não têm pontos em comum, são chamadas **paralelas**. Usamos a notação $r \parallel s$ para indicar que r e s são paralelas, isto é,

$$r \parallel s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$$

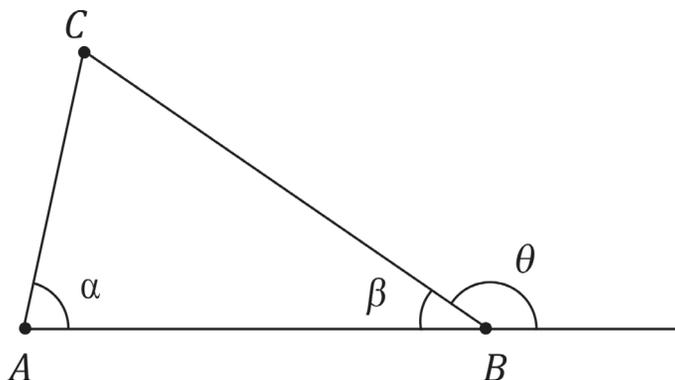
Teorema 4.2 (Elementos, Livro I, Proposição 17) A soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo qualquer é menor do que 180° .

Demonstração: Sejam $\alpha = \angle BAC$ e $\beta = \angle ABC$ dois ângulos internos de um triângulo ABC . Seja θ um ângulo externo do triângulo no vértice B (figura 56). Note que os ângulos β e θ são suplementares, ou seja, $\theta + \beta = 180^\circ$ (essa igualdade significa que a soma dos ângulos β e θ mede 180°).

Se as retas r e s não estiverem no mesmo plano, elas não têm pontos em comum e não são paralelas. Neste caso, dizemos que as retas são reversas. Retas reversas serão estudadas no curso de Geometria Espacial.



Figura 56 – Dois ângulos internos e um ângulo externo de ABC



Pelo Teorema 4.1, cada ângulo interno não adjacente a θ é menor do que θ , logo, $\alpha < \theta$. Assim, $\alpha + \beta < \theta + \beta = 180^\circ$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 4.1 Todo triângulo tem pelo menos dois ângulos internos agudos.



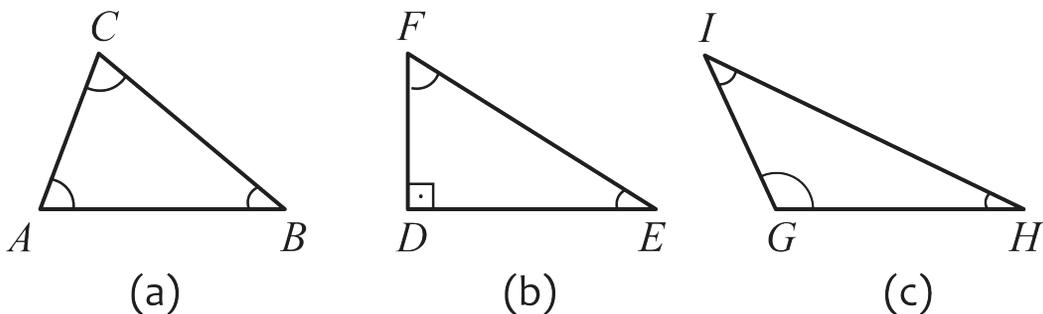
Um ângulo é chamado *agudo* se sua medida for menor do que 90° , e *obtusos* se sua medida for maior do que 90° .

Demonstração: Caso dois ângulos internos de um triângulo não fossem agudos, a soma de suas medidas seria pelo menos 180° , contrariando o Teorema 4.2. ■

O Corolário 4.1 nos diz que em um triângulo há, no máximo, um ângulo interno não agudo, isto é, reto ou obtuso. Isso nos permite classificar os triângulos de acordo com os seus ângulos internos:

- Dizemos que um triângulo é **acutângulo**, se seus três ângulos internos são agudos (figura 57, (a)).
- Dizemos que um triângulo é **retângulo**, se um de seus ângulos internos é reto (figura 57, (b)).
- Dizemos que um triângulo é **obtusângulo**, se um de seus ângulos internos é obtuso (figura 57, (c)).

Figura 57 – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

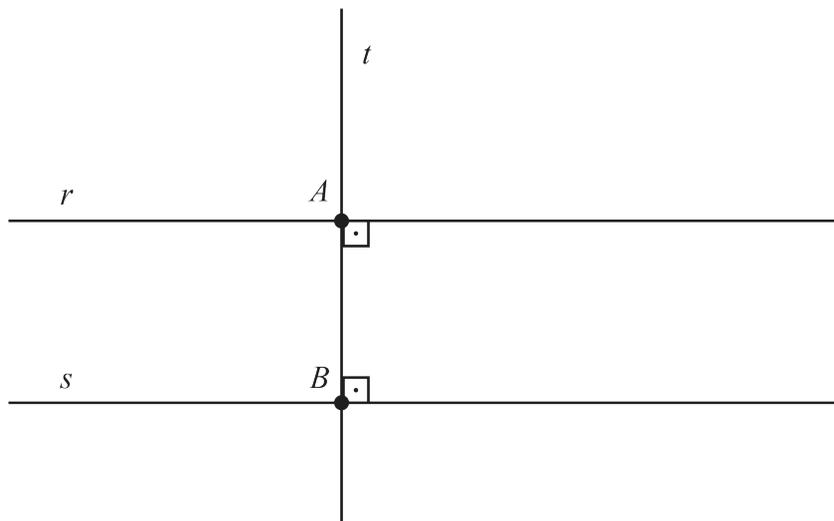


Fonte: DEaD | IFCE

O próximo corolário fornece um critério para decidirmos quando duas retas são paralelas.

Corolário 4.2 Se duas retas r e s são perpendiculares a uma mesma reta t , então r e s são paralelas.

Figura 58 – As retas paralelas r e s são perpendiculares à reta t



Fonte: DEaD | IFCE

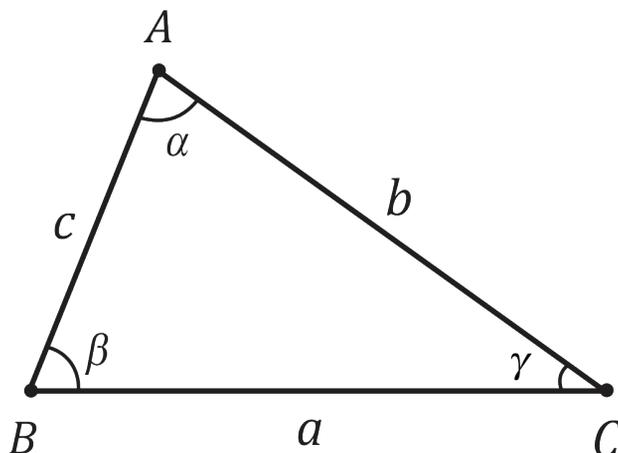
Demonstração: Se as retas r e s tivessem um ponto P em comum, elas formariam, junto com a reta t , o triângulo ABP (figura 66). Note que o triângulo ABP apresentaria dois ângulos internos retos, o que é absurdo, pois do Corolário 4.1, pelo menos dois dos três ângulos internos de um triângulo têm que ser agudos. Portanto, as retas r e s são paralelas. ■

O Corolário acima nos fornece um método para construirmos uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto dado. De fato, como sabemos construir uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, podemos, começando com a reta s e o ponto A não pertencente a s , traçar a reta t , perpendicular a s e passando por A . Podemos, então, traçar a reta r perpendicular à reta t passando por A . Pelo Corolário 4.2, a reta r é paralela à reta s e, por construção, r passa pelo ponto A .

A seguir, usaremos o Teorema 4.1 para obtermos critérios de comparação entre os lados de um triângulo. Em particular, obteremos uma desigualdade necessariamente satisfeita pelos lados de um triângulo, chamada *desigualdade triangular*.

Para facilitar a compreensão dos dois próximos resultados, vamos adotar a seguinte notação em um triângulo ABC : Denominaremos as medidas dos lados por $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$; e para os ângulos internos usaremos $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ e $\angle BCA = \gamma$ (figura 59).

Figura 59 – Lados e ângulos internos de um triângulo



Fonte: DEaD | IFCE

Note ainda que na figura 59, o lado BC , de medida a , não tem pontos em comum com o vértice A , ou seja, dos três lados do triângulo ABC , o lado BC é o único que não é um lado do ângulo $\alpha = \angle BAC$, com vértice em A . Neste caso, dizemos que BC é **oposto** ao vértice A . Também costumamos dizer que o ângulo α é oposto ao lado a (ou seja, ao lado de medida a) ou que o lado a é oposto ao ângulo α , ou ainda, que o lado a e o ângulo α são opostos. Da mesma forma, o ângulo β e o lado b são opostos, e o ângulo γ e o lado c também são opostos.

Foi do matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) a ideia de usar letras latinas maiúsculas para denotar os vértices de um triângulo, letras latinas minúsculas para as medidas dos seus lados e letras gregas para os ângulos internos.



As duas proposições abaixo do Livro I dos *Elementos* são a chave para a comparação entre os lados a partir da comparação entre ângulos internos de um triângulo. De maneira intuitiva, a Proposição 18 do Livro I diz que ao maior lado opõe-se o maior ângulo, e a Proposição 19 do Livro I afirma que ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

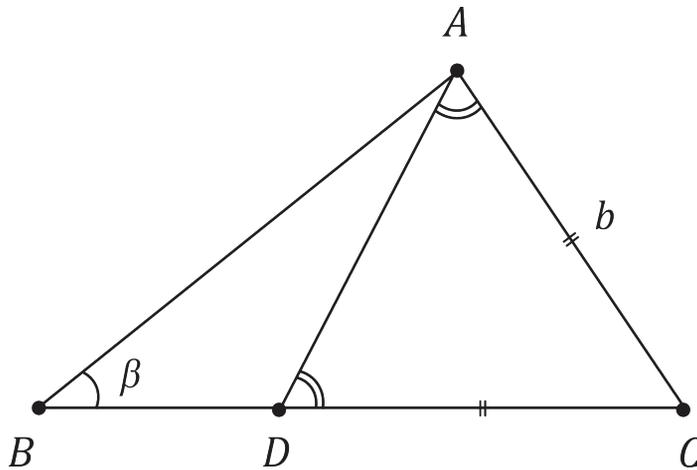
Teorema 4.3 (Elementos, Livro I, Proposição 18) Se dois lados de um triângulo ABC não são congruentes, então seus ângulos opostos não são congruentes e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Demonstração: Considere o triângulo ABC de modo que $\overline{BC} > \overline{AC}$, ou seja, $a > b$. Seja ainda α o ângulo oposto ao lado \overline{BC} e β o ângulo oposto ao lado \overline{AC} . Note que se tivéssemos $\alpha = \beta$, então o triângulo ABC seria isósceles, com $a = b$, o que não ocorre, logo $\alpha \neq \beta$. Mostramos agora que $\alpha > \beta$.

Seja D um ponto sobre o lado BC , tal que $b = \overline{AC} = \overline{CD}$. Como $\overline{BC} = a > b$, o ponto D pertence ao segmento BC . Logo, a semirreta AD está no interior do ângulo $\angle CAB$ (veja a figura 60). Consequentemente, $\alpha = \angle CAB > \angle DAC = \angle ADC$ (esta última igualdade é válida, porque, por construção, o triângulo ACD é isósceles).

Perceba que o ângulo $\angle ADC$ é externo ao triângulo ABD . Pelo Teorema 4.1, $\angle ADC > \angle ABD = \beta$. Consequentemente, $\alpha > \beta$. ■

Figura 60 – Ao maior lado opõe-se o maior ângulo



Fonte: DEaD | IFCE

O próximo resultado é uma recíproca do teorema anterior.

Teorema 4.4 (Elementos, Livro I, Proposição 19) Se dois ângulos de um triângulo ABC não são congruentes então seus lados opostos não são congruentes e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

Demonstração: Considere o triângulo ABC . Seja ainda α o ângulo oposto ao lado \overline{BC} e β o ângulo oposto ao lado \overline{AC} . Suponhamos que $\alpha > \beta$. Queremos mostrar que $\overline{BC} > \overline{AC}$, ou seja, $a > b$. Dessa forma, mostraremos que não podemos ter $a < b$ e nem que $a = b$.

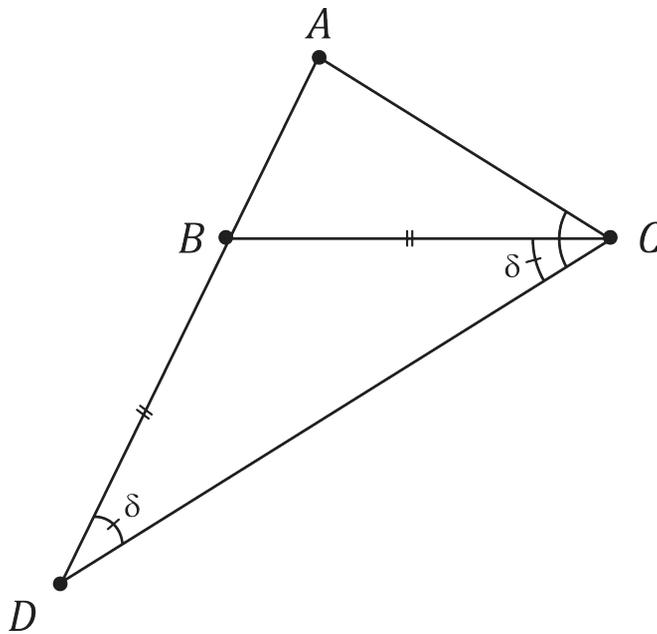
De fato, se $a < b$ então, pelo Teorema 4.3, teríamos $\alpha < \beta$ o que não ocorre. Se $a = b$, o triângulo ABC seria isósceles com $\alpha = \beta$, o que também não ocorre. Logo, a única opção que resta é a desigualdade $a > b$ e isso encerra a demonstração. ■

A seguir, iremos demonstrar a desigualdade triangular, que é consequência direta da Proposição 20 do Livro I dos *Elementos*.

Teorema 4.5 (Elementos, Livro I, Proposição 20) Em todo triângulo, o comprimento de cada lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração: Considere um triângulo ABC . Mostraremos que $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Dessa forma, na semirreta AB seja D o ponto tal que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Essa construção garante que $\overline{BD} = \overline{BC}$ e assim o triângulo BCD é isósceles. Assim, $\delta = \angle BDC = \angle BCD$ (figura 61).

Figura 61 – O triângulo isósceles BCD



Fonte: DEaD | IFCE

Como o ponto B está entre A e D , a semirreta CB está no interior do ângulo $\angle ACD$. Logo, $\delta = \angle BCD < \angle ACD = \gamma$. Pelo Teorema 4.4, aplicado ao triângulo ACD , como $\delta < \gamma$, o lado oposto a $\delta = \angle ADC$ é menor do que o lado oposto a $\gamma = \angle ACD$, ou seja, $\overline{AC} < \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. ■

Teorema 4.6 (Desigualdade Triangular) Dados três pontos distintos quaisquer A, B e C no plano, temos

$$\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, C está entre A e B .

Demonstração: Dados os pontos distintos A , B e C duas possibilidades podem ocorrer: ou eles são colineares ou não são colineares. Analisaremos o que acontecerá em cada caso. Se A , B e C não são colineares, o Teorema 4.5 garante que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$.

Se os três pontos são colineares, temos três possibilidades: $A * B * C$, $B * A * C$ ou $A * C * B$. No primeiro caso, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, logo $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{AC} + \overline{BC}$. No segundo caso, $\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$, logo $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC} + \overline{BC}$. Finalmente, se C está entre A e B , então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$, isto é, neste caso a desigualdade triangular é, de fato, uma igualdade. ■

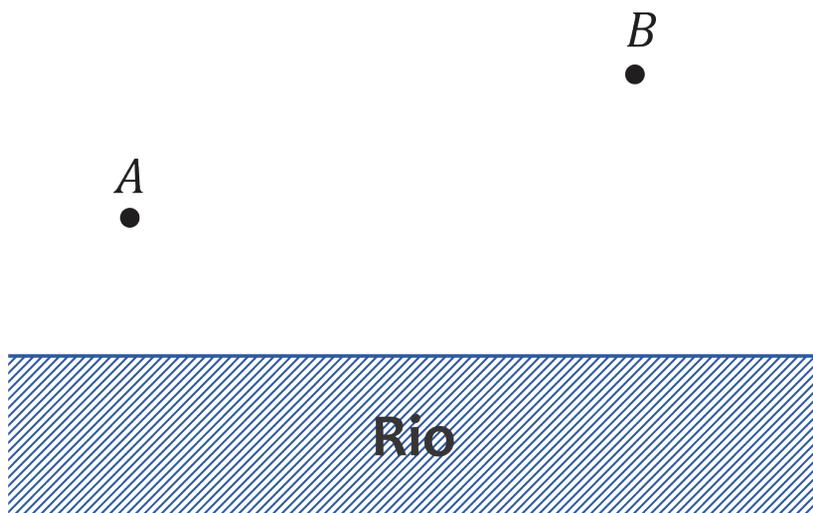
É muito importante saber em que condições a desigualdade triangular é, na verdade, uma igualdade.



A seguir, como aplicação da desigualdade triangular, exibiremos um exemplo.

Exemplo 1 Uma criança, que está situada no ponto A , deseja apanhar água em um rio e levar até sua casa, situada no ponto B (figura 62). Como ela deve fazer isso de modo que a distância percorrida seja mínima?

Figura 62 – Um problema de distância mínima



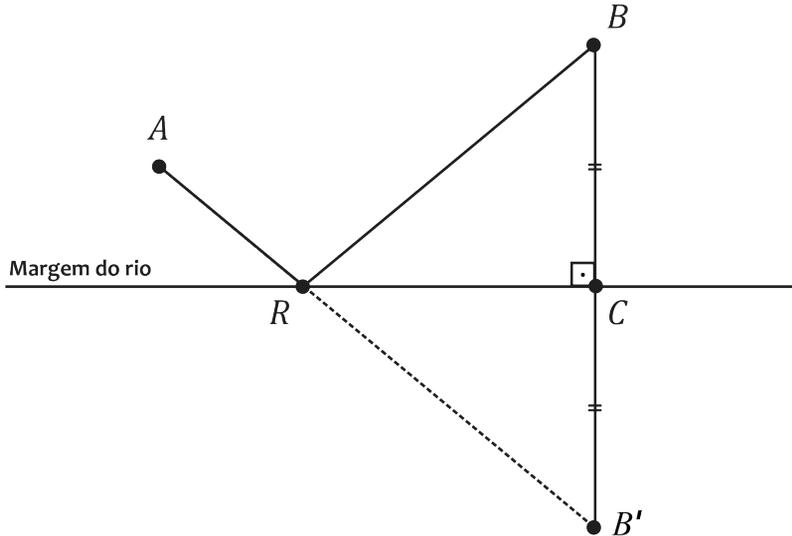
Fonte: DEaD | IFCE

Para resolver este problema, vamos supor que a margem do rio mais próxima do ponto A , onde está a criança, é uma linha reta. Assim, podemos considerar o rio como uma linha reta (figura 63) e vamos tratá-lo assim daqui por diante.

Baixe a perpendicular BC ao rio, passando pelo ponto B . Seja C o ponto de interseção dessa perpendicular com o rio. Seja B' o ponto sobre essa perpendicular tal que $B * C * B'$ e $\overline{BC} = \overline{B'C}$ (figura 63).

Seja R o ponto de interseção da reta AB' com a margem do rio. O ponto R é aquele onde a criança deve buscar a água no rio para que o seu trajeto tenha comprimento mínimo.

Figura 63 – O caminho poligonal $A \rightarrow R \rightarrow B$ tem comprimento mínimo

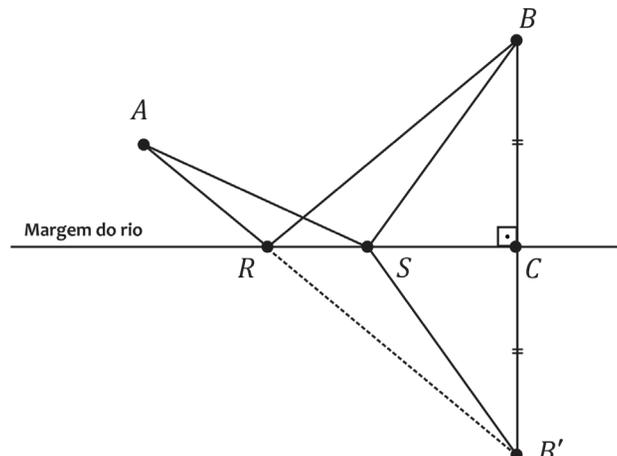


Fonte: DEaD | IFCE

Para justificar a solução acima, notemos primeiro que os triângulos BCR e $B'CR$ são congruentes, pelo caso LAL, pois $BC \equiv B'C$, por construção, RC é comum aos dois triângulos e $\angle BCR \equiv \angle B'CR$, pois ambos são ângulos retos. Da congruência $\triangle BCR \equiv \triangle B'CR$ segue que $BR = B'R$. Assim, $\overline{AR + RB} = \overline{AR + RB'} = \overline{AB'}$.

Se a criança apanhar água em outro ponto S da margem do rio (figura 64), os triângulos BCS e $B'CS$ são congruentes, assim como na congruência anterior, pelo caso LAL. Em particular, $\overline{SB} = \overline{SB'}$.

Figura 64 – Caminho de comprimento mínimo deve passar por R



Fonte: DEaD | IFCE

Assim, o caminho que passa por S tem comprimento $\overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AS} + \overline{SB'}$. Pela desigualdade triangular (Teorema 4.6), aplicada aos pontos A , S e B' , temos $\overline{AS} + \overline{SB'} \geq \overline{AB'}$ e, como já vimos antes, $\overline{AB'} = \overline{AR} + \overline{RB}$. Portanto,

$$\overline{AS} + \overline{SB} \geq \overline{AR} + \overline{RB}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $R = S$. Isso mostra que o caminho que tem comprimento mínimo é o que passa por R .

Encerramos assim o primeiro tópico da Aula 4, em que estudamos o Teorema do Ângulo Externo e algumas de suas consequências, entre elas a importante desigualdade triangular. No próximo tópico, estudaremos o axioma das paralelas e veremos como ele pode nos fornecer informações mais precisas a respeito de ângulos em um triângulo.

Paralelismo

OBJETIVOS

- Reconhecer algumas formulações equivalentes ao axioma das paralelas
- Conhecer algumas das consequências do axioma das paralelas

Neste segundo tópico, veremos algumas reformulações do axioma das paralelas e veremos como aplicar esse axioma para obtermos resultados sobre ângulos em triângulos. Este axioma tem uma história longa e rica. Por isso, faremos também alguns comentários de caráter histórico.

Lembremos do enunciado do axioma das paralelas (ou quinto postulado), conforme vimos na Aula 2:

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p.98).

Veja a figura 6, na Aula 2, para uma ilustração desse axioma.

O quinto postulado, ao contrário dos outros quatro, não é evidente nem fácil de justificar intuitivamente. Além disso, a frase “*prolongadas, as duas retas, ilimitadamente*”, gerou um desconforto entre os leitores dos *Elementos*, já que a ênfase do tratado de Euclides é a construção de figuras geométricas por processos finitos, usando-se régua e compasso.

A introdução desse axioma levou várias gerações de geômetras, ao longo dos séculos, a criticar Euclides. Vejamos o que afirma o filósofo neoplatônico grego Proclo Diádoco (410-485 d.C.):

Isso deve ser eliminado dos postulados; porque ele é um teorema (...) A sua recíproca foi de fato demonstrada pelo próprio Euclides como um teorema (...) A partir disso, é claro que devemos procurar uma demonstração desse fato, e que ele é estranho ao caráter especial dos postulados.

(PROCLO, citado de McCLEARY, 1994, p.24).



Uma biografia de Proclo Diádoco (em inglês) pode ser encontrada neste link: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Proclus.html>

A principal suspeita é de que o próprio Euclides acreditaria que esse quinto postulado seria, na verdade, um teorema, e, por não conseguir demonstrá-lo, acabou colocando-o como um axioma. Essa suspeita foi reforçada pelo fato de Euclides relutar a usar o axioma das paralelas, o que ele só faz nos *Elementos* na Proposição 29 do Livro I. Curiosamente, essa proposição é exatamente a “recíproca” citada por Proclo.

Nesse sentido, o Teorema do Ângulo Externo é um substituto “fraco” para o axioma das paralelas, pois muitos dos resultados que são consequências desse teorema, podem ser obtidos de modo mais direto usando-se o quinto postulado. Se Euclides adiou o quanto pôde o uso do quinto postulado, é de se supor que ele não depositava neste axioma tanta confiança quanto nos outros.

Isso levou muitos matemáticos a tentarem *demonstrar* o axioma das paralelas a partir dos outros axiomas. Como consequência dessas tentativas, eles obtiveram muitas afirmações equivalentes ao quinto postulado. Vejamos alguns exemplos:

1. Duas retas paralelas são equidistantes (Posidônio, século I a.C.).
2. Se uma reta intersecta uma de duas retas paralelas, ela também intersecta a outra (Proclo, 410-485 d.C.).
3. Dado um triângulo, é possível construir-se um triângulo semelhante de qualquer tamanho (Wallis, 1616-1703).
4. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (Legendre, 1752-1833).
5. Por três pontos não colineares sempre passa um círculo (Farkas Bolyai, 1775-1856).

(COXETER, 1998, p.2)

Não pretendemos demonstrar aqui que todas essas afirmações são equivalentes ao quinto postulado. Citamos esses resultados para ilustrar o interesse pelo quinto postulado e sua perenidade, atravessando vários séculos. Ainda neste tópico, estudaremos a caracterização 4 (de Legendre) que se relaciona à Proposição 32 do Livro I dos *Elementos*.

Outra caracterização do quinto postulado tornou-se tão popular que é hoje confundida com o axioma de Euclides. Esta versão do axioma das paralelas é conhecida como *Axioma de Playfair*, pois apareceu na edição inglesa dos *Elementos*, publicada pelo matemático e geólogo escocês John Playfair (1748-1819) em 1795. Tal axioma pode ser enunciado como segue.

Uma biografia de John Playfair (em inglês) pode ser encontrada neste link:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Playfair.html>



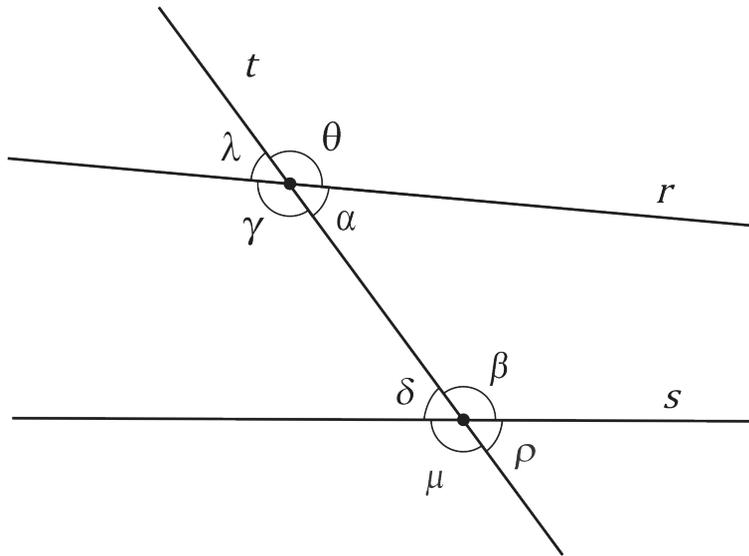
Axioma 4.1 (Axioma de Playfair) Por um ponto P , fora de uma reta r , passa uma única reta paralela a r .

Nossa próxima tarefa é demonstrar que o axioma de Playfair é equivalente ao quinto postulado de Euclides. Antes, precisamos demonstrar a Proposição 27 do Livro I dos *Elementos*, que é consequência direta do Teorema do Ângulo Externo. Essa proposição é conhecida como *teorema dos ângulos alternos internos*. Vamos começar com algumas definições.

Se uma reta t corta duas outras retas r e s , dizemos que t é **transversal** a r e s .

Iremos agora estabelecer uma nomenclatura que nos permitirá identificar os ângulos formados por uma transversal t a duas retas r e s . Essas retas, r e s , dividem o plano em três regiões, uma formada pelos pontos do plano que estão entre r e s , que chamaremos de *região interior*, e as outras duas formadas pelos pontos que não estão entre r e s , que chamaremos de *regiões exteriores*. Se um ângulo está na região interior, ele é chamado de **interno**. Se um ângulo está em uma das regiões exteriores, ele é chamado de **externo**. Por exemplo, na figura 65, os ângulos α, β, γ e δ são internos, enquanto os ângulos λ, θ, μ e ρ são externos.

Figura 65 – Os ângulos determinados por uma transversal t a duas retas r e s



Fonte: DEaD | IFCE

A reta t também divide o plano em duas regiões, que são os semiplanos determinados por t . Se dois ângulos estão em um mesmo semiplano, dos determinados por t , dizemos que eles são **colaterais**. Caso eles estejam em semiplanos distintos, dos determinados por t , dizemos que eles são **alternos**.

Combinando as duas nomenclaturas acima, dizemos que dois ângulos são:

- **Colaterais internos**, se estão em um mesmo semiplano, dos determinados por t , e se são ambos internos. Na figura 65, os pares de ângulos α e β , γ e δ são colaterais internos.
- **Colaterais externos**, se estão em um mesmo semiplano, dos determinados por t , e se são ambos externos. Na figura 65, os pares de ângulos θ e ρ , λ e μ são colaterais externos.
- **Alternos internos**, se estão em semiplanos diferentes, dos determinados por t , e se são ambos internos. Na figura 65, os pares de ângulos α e δ , β e γ são alternos internos.
- **Alternos externos**, se estão em semiplanos diferentes, dos determinados por t , e se são ambos externos. Na figura 65, os pares de ângulos λ e ρ , θ e μ são alternos externos.
- **Correspondentes**, se estão no mesmo semiplano, dos determinados por t , não têm o mesmo vértice, e se um deles é interno e o outro é externo. Na figura 65, os pares de ângulos α e ρ , β e θ , δ e λ , γ e μ são correspondentes.

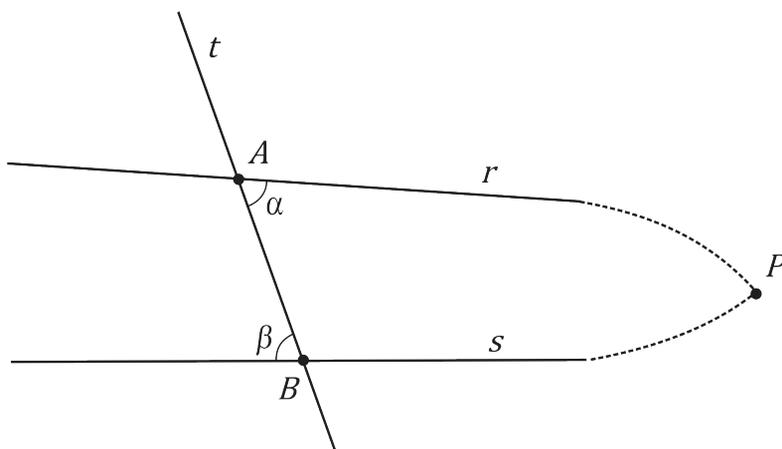
- **Colaterais adjacentes**, se estão no mesmo semiplano, dos determinados por t , têm o mesmo vértice, e se um deles é interno e o outro é externo. Na figura 65, os pares de ângulos α e θ , β e ρ , γ e λ , δ e μ são colaterais adjacentes.

Podemos agora enunciar um critério de paralelismo relacionando os ângulos alternos internos.

Teorema 4.7 (Elementos, Livro I, Proposição 27) Se duas retas r e s são cortadas por uma transversal t , formando ângulos alternos internos congruentes, então r e s são paralelas.

Demonstração: Se as retas r e s não fossem paralelas, então se encontrariam em um ponto P (figura 66), determinando o triângulo ABP .

Figura 66 – O ponto P é a interseção das retas r e s



Fonte: DEaD | IFCE

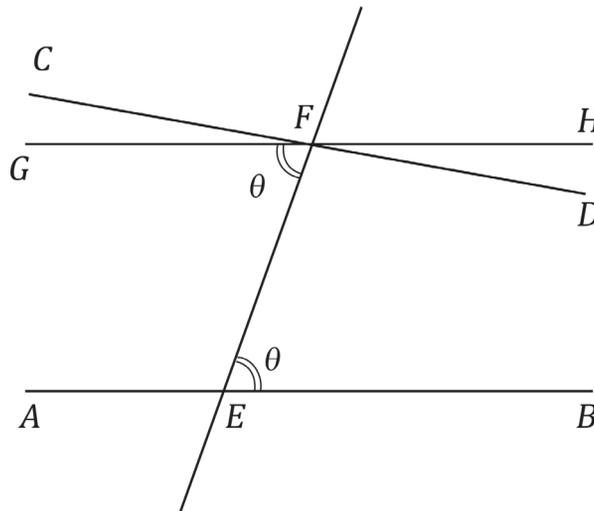
Considerando o triângulo ABP temos, pelo Teorema 4.1 (do ângulo externo), que $\beta > \alpha$ (note que α é um ângulo interno não adjacente a β) (figura 66). Mas isso contradiz a hipótese de que α e β são congruentes. Logo r e s não podem ter um ponto em comum do lado direito da figura. Se r e s tivessem um ponto em comum do lado esquerdo da figura 66, o mesmo argumento se aplicaria, dessa vez com α sendo o ângulo externo do triângulo e β o ângulo interno não adjacente a α . Portanto, as retas r e s são paralelas. ■

Teorema 4.8 O axioma de Playfair é equivalente ao quinto postulado de Euclides.

Demonstração: Primeiramente, vamos demonstrar o axioma das paralelas a partir do axioma de Playfair. Sejam AB e CD duas retas e EF uma transversal, tal que a soma dos ângulos colaterais internos em um dos lados é menor do que dois ângulos retos. Vamos construir uma reta GH concorrente à reta CD no ponto F (figura 67). A construção de GH se dá do seguinte modo:

Pelo Teorema 3.10, podemos transportar o ângulo $\angle FEB$ para a semirreta FE , de modo a obtermos a semirreta FG tal que $\angle GFE \equiv \angle FEB$. Então prolongamos a semirreta FG para obtermos a reta GH , como na figura 67. Pelo Teorema 4.7, as retas AB e GH são paralelas. A congruência de ângulos $\angle GFE \equiv \angle FEB$ implica que $\angle FEB$ e $\angle EFH$ são suplementares, pois $\angle GFE$ e $\angle EFH$ são suplementares. Pela unicidade da reta paralela, garantida pelo axioma de Playfair, a reta CD , por ser diferente de GH , não pode ser paralela à reta AB e, como $\angle EFD + \angle FEB < \angle EFH + \angle FEB$, temos que $\angle EFD < \angle EFH$. Portanto, a semirreta FD está no interior do ângulo $\angle EFH$ e intersecta a reta AB no mesmo lado que B e H .

Figura 67 – As retas AB , CD e GH cortadas pela transversal EF

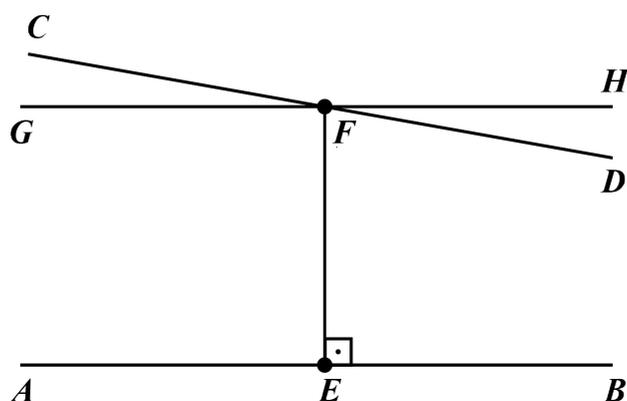


Fonte: DEaD | IFCE

Reciprocamente, vamos agora supor que vale o quinto postulado e vamos demonstrar o axioma de Playfair.

Seja F um ponto não pertencente à reta AB . Seja EF a reta perpendicular a AB passando por F e seja GH a reta perpendicular a EF por F . Pelo Corolário 4.2, as retas AB e GH são paralelas (figura 68). Isso também é consequência do Teorema 4.10, pois os ângulos alternos $\angle GFE$ e $\angle FEB$ são ambos retos.

Figura 68 – GH é a única paralela a AB , passando por F



Fonte: DEaD | IFCE

Suponha que CD é uma reta passando por F . Se $CD \neq GH$, então CD forma com EF um ângulo menor do que um ângulo reto, em um dos lados. Pelo quinto postulado, CD deve intersectar AB . Portanto, GH é a única reta paralela a AB passando por F . ■

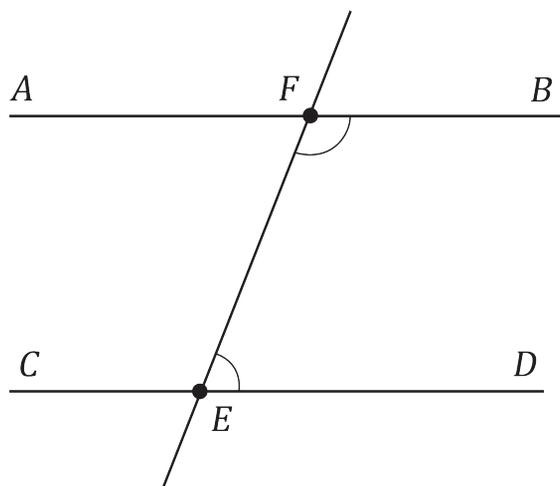
Vale notar, porém, que embora leve o nome de Playfair, o Axioma 4.1 já tinha sido enunciado séculos antes por Proclo, em um comentário sobre uma demonstração do astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.) para a Proposição 29 do Livro I dos *Elementos*. Esta proposição é uma recíproca da Proposição 27 e, como já dissemos, é o primeiro resultado demonstrado por Euclides nos *Elementos* que usa o quinto postulado.

Teorema 4.9 (Elementos, Livro I, Proposição 29) Uma reta transversal a duas retas paralelas forma com essas retas ângulos alternos internos congruentes. Além disso, os ângulos colaterais internos têm soma igual a dois ângulos retos.

Ptolomeu propôs uma demonstração da Proposição 29 “independente do quinto postulado”. Essa independência foi contestada por Proclo, como veremos a seguir.

Demonstração de 4.9 (Ptolomeu): A primeira afirmação é consequência direta da segunda. Vamos demonstrar a segunda afirmação. A soma dos ângulos colineares internos determinados pela transversal EF sobre as retas paralelas AB e CD , digamos $\angle FED + \angle EFB$, pode ser maior, igual ou menor do que dois ângulos retos (figura 69).

Figura 69 – Ângulos colaterais internos



Fonte: DEaD | IFCE

Se a soma $\angle FED + \angle EFB$ fosse maior do que dois ângulos retos, então a soma $\angle CEF + \angle AFE$ também seria maior do que dois ângulos retos, como consequência do paralelismo entre AB e CD . Mas isso não pode ocorrer, porque a soma dos quatro ângulos é igual a quatro ângulos retos, já que eles formam dois pares de ângulos suplementares, a saber, $\angle FED$ com $\angle CEF$ e $\angle EFB$ com $\angle AFE$.

O mesmo argumento serve para mostrar que a soma $\angle FED + \angle EFB$ não pode ser menor do que dois ângulos retos. Logo, essa soma só pode ser igual a dois ângulos retos. ■

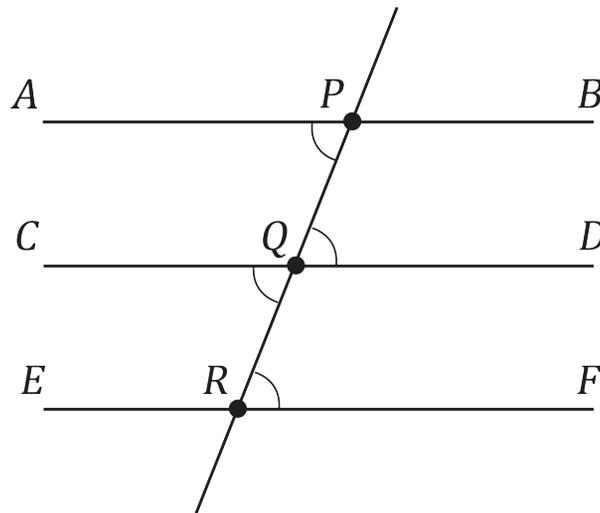
A demonstração de Ptolomeu está correta, mas a sua afirmação de que a demonstração não usa o quinto postulado está errada, pois em seu argumento, Ptolomeu usa a unicidade da paralela CD à reta AB passando por E , que é, como vimos o *axioma de Playfair*, equivalente ao quinto postulado.

A Proposição 30 do Livro I dos *Elementos* estabelece a *transitividade* do paralelismo. Tal Proposição pode ser enunciada como segue

Teorema 4.10 (Elementos, Livro I, Proposição 30) Se duas retas são paralelas a uma terceira reta, então elas são paralelas entre si.

Demonstração: Sejam AB e CD duas retas paralelas à reta EF . Pelo Teorema 4.9, os ângulos alternos determinados pela transversal PR são congruentes para cada par de retas paralelas, isto é, $\angle APQ \equiv \angle FRQ$ e $\angle CQR \equiv \angle FRQ$ (figura 70).

Figura 70 – Três retas paralelas



Fonte: DEaD | IFCE

Como a congruência de ângulos é transitiva, segue que $\angle APQ \equiv \angle CQR \equiv \angle PQR$, em que a última congruência vale porque os ângulos são opostos pelo vértice. Assim $\angle APQ \equiv \angle PQR$ e, pelo Teorema 4.7, as retas AB e CD são paralelas. ■

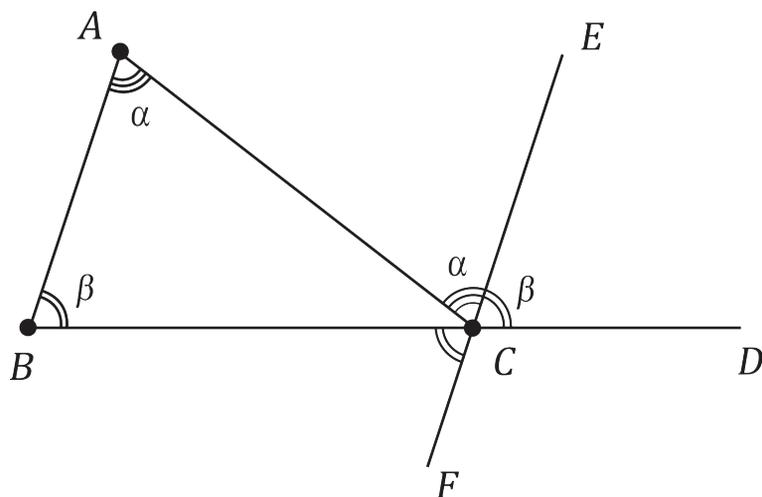
A Proposição 31 do Livro I trata da existência de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto dado. Como é comum nos *Elementos*, isso é feito como uma construção com régua e compasso. Faremos essa construção na próxima aula, quando estudarmos as propriedades de certos quadriláteros notáveis.

O último resultado da nossa Aula 4 é um refinamento do Teorema do Ângulo Externo.

Teorema 4.11 (Elementos, Livro I, Proposição 32) Em um triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes. A soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo e CD um prolongamento do lado BC (figura 71). O ângulo $\angle ACD$ é externo ao triângulo ABC no vértice C .

Figura 71 – Ângulos em um triângulo



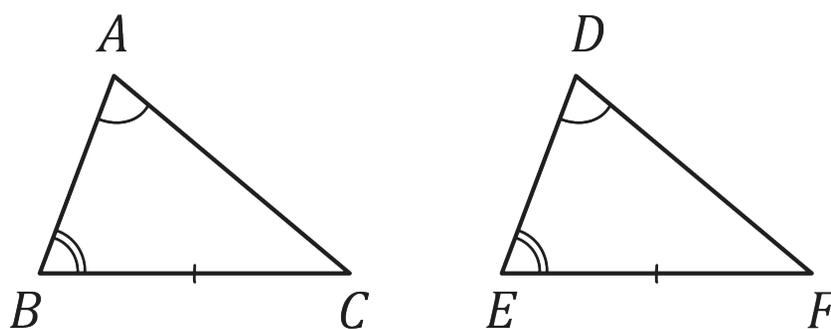
Fonte: DEaD | IFCE

Seja EF a reta passando por C e paralela à reta AB . Pelo Teorema 4.9, $\angle BAC \equiv \angle ACE$ (consideramos a reta AC como reta transversal) e $\angle ABC \equiv \angle BCF$ (consideramos a reta BD como reta transversal). Como $\angle ECD$ e $\angle BCF$ são opostos pelo vértice, temos $\angle ECD \equiv \angle BCF$. Dessa forma, como $\angle ABC \equiv \angle BCF$ e $\angle BCF \equiv \angle ECD$, temos que $\angle ABC \equiv \angle ECD$. Agora, do fato de $\angle BAC \equiv \angle ACE$ e $\angle ABC \equiv \angle ECD$, segue que $\angle ABC + \angle BAC \equiv \angle ACE + \angle ECD \equiv \angle ACD$. Portanto, mostramos a primeira parte do teorema. Para demonstrarmos a segunda parte, basta notarmos que o ângulo interno $\angle BCA$ e seu ângulo externo adjacente $\angle ACD$ são suplementares. Como $\angle ACD \equiv \angle ABC + \angle BAC$, temos que $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$ é igual a dois ângulos retos. ■

Além dos critérios de congruências estudados na Aula 3, existe o **4º caso de congruência de triângulos** ou **critério Lado – Ângulo – Ângulo Oposto (LAAo)** que segue como consequência do Teorema 4.11.

Corolário 4.3 (4º caso de congruência de triângulos - LAAo) Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $BC \equiv EF$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Figura 72 – Caso LAAo de congruência de triângulos



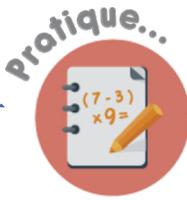
Fonte: DEaD | IFCE

Outro modo de escrever o Corolário 4.3 é o seguinte (figura 72): Se dois triângulos (ABC e DEF) tiverem ordenadamente dois lados (BC e EF) congruentes, dois ângulos adjacentes ($\angle ABC$ e $\angle DEF$) a estes lados congruentes e dois ângulos opostos ($\angle BAC$ e $\angle EDF$) a estes lados congruentes, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração: Pelo Teorema 4.11, $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$ e $\angle DEF + \angle EDF + \angle EFD$ são congruentes, pois ambos são iguais a dois ângulos retos. Como $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, temos que $\angle BCA \equiv \angle EFD$. Assim, pelo caso ALA de congruência, temos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. ■

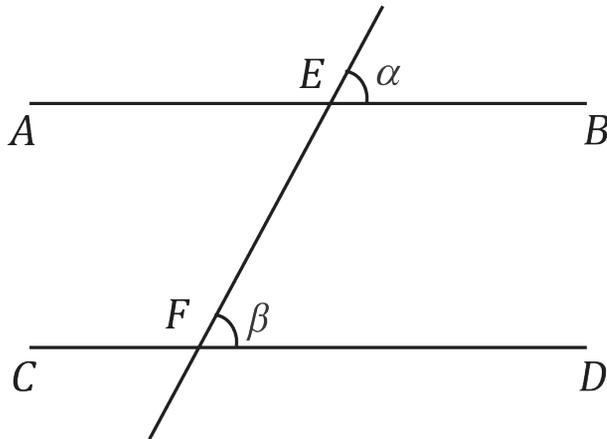
Concluimos, assim, nossa quarta aula. Tratamos aqui, de modo introdutório, daquele que é, provavelmente, o problema central da geometria euclidiana: o caráter do axioma das paralelas, a necessidade desse axioma, sua posição na geometria e suas aplicações. Esse é um assunto vasto, com uma rica história, da qual contamos aqui apenas uma pequena parte. Você poderá encontrar muito mais informações nas referências, principalmente em HARTSHORNE, 2000, McCLEARY, 1994 e COXETER, 1998.

Na próxima aula, estudaremos alguns polígonos especiais, alguns quadriláteros: paralelogramo, losango e trapézio, e alguns polígonos de cinco ou mais lados. Em particular, apresentaremos o problema da construção de polígonos regulares com régua e compasso e resolveremos esse problema em alguns casos particulares.



1. Sejam r e s duas retas paralelas. Mostre que todos os pontos de r estão à mesma distância de s .
2. Demonstre a Proposição 28 do Livro I dos *Elementos*: se duas retas AB e CD são cortadas por uma transversal EF e se ângulos correspondentes determinados por EF sobre AB e CD são congruentes, então AB e CD são paralelas.

Figura 73 – Ângulos correspondentes



Fonte: DEaD | IFCE

3. Dois ângulos são chamados complementares, se sua soma é igual a um ângulo reto. Mostre que, em um triângulo retângulo, os ângulos agudos são complementares.
4. Mostre que cada ângulo interno em um triângulo equilátero é $\frac{2}{3}$ de um ângulo reto.
5. Seja ABC um triângulo. Seja I o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$. Seja D um ponto sobre o lado AB e seja E um ponto sobre o lado AC , tais que $DE \parallel BC$. Mostre que $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$.
6. Dois dos lados de um triângulo medem 4cm e 9cm . Determine o perímetro desse triângulo.
7. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC . Mostre que $\overline{AP} + \overline{BP} < \overline{AC} + \overline{BC}$.

Quadriláteros notáveis e construção de polígonos regulares

Caro(a) aluno(a),

Nesta quinta aula, estudaremos algumas propriedades gerais de figuras planas chamadas polígonos. Os polígonos são formados por segmentos de reta que se unem pelas extremidades e satisfazem certas condições básicas.

Estudaremos, de modo mais detalhado, alguns polígonos particularmente simples, obtidos fazendo-se algumas restrições adicionais. Faremos restrições de dois tipos: no primeiro tópico estudaremos polígonos com quatro lados, que são chamados de *quadriláteros*. Nós nos concentraremos no estudo de tipos particulares de quadriláteros, que têm lados paralelos ou congruentes.

No segundo tópico, não nos restringiremos mais a quadriláteros, mas exigiremos que os polígonos sejam *regulares*, ou seja, tenham lados e ângulos internos todos congruentes. Veremos como construir, com régua e compasso, polígonos regulares de três, quatro, cinco e seis lados, e enunciaremos um resultado geral que permite decidir quando um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso.

Objetivos

- Estudar quadriláteros notáveis e suas principais propriedades
- Avaliar sob que condições um polígono regular pode ser construído com régua e compasso

Quadriláteros notáveis

98

OBJETIVOS

- Compreender as noções de poligonal, de polígono e sua classificação quanto ao número de lados
- Estudar os chamados quadriláteros notáveis

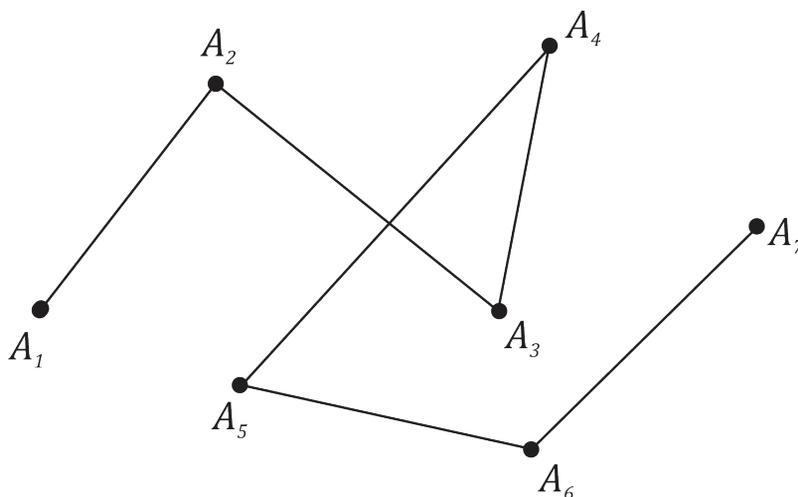
Neste tópico, estudaremos quadriláteros de tipos especiais, conhecidos como *quadriláteros notáveis*: paralelogramos, losangos, trapézios, retângulos e quadrados. Antes, porém, para que possamos definir precisamente o que é um quadrilátero, precisamos primeiramente compreender o que é um polígono. A definição de polígono também será usada no segundo tópico desta aula, em que estudaremos polígonos regulares.

Vamos inicialmente definir o que é uma poligonal e seus elementos

Consideremos um conjunto finito de segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, com $n \geq 3$, de modo que, para cada $1 \leq j \leq n-2$, o ponto extremo A_{j+1} do segmento A_jA_{j+1} coincide com o ponto extremo A_{j+1} do segmento seguinte $A_{j+1}A_{j+2}$ e esses dois segmentos consecutivos *não são colineares*. Por exemplo, A_1A_2 e A_2A_3 têm o ponto A_2 em comum e não são colineares. Dizemos que os segmentos A_jA_{j+1} e $A_{j+1}A_{j+2}$ são **adjacentes**. A união de segmentos $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n$ é chamada **poligonal** de **lados** $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ e é denotada por $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados **vértices** da poligonal.

Observe que uma poligonal pode ter autointerseções, ou seja, lados de uma poligonal podem se encontrar em pontos que não são vértices. Por exemplo, na poligonal $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ da figura 74, os lados A_2A_3 e A_4A_5 se intersectam em um ponto que não é um dos vértices da poligonal.

Figura 74 - Poligonal $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$



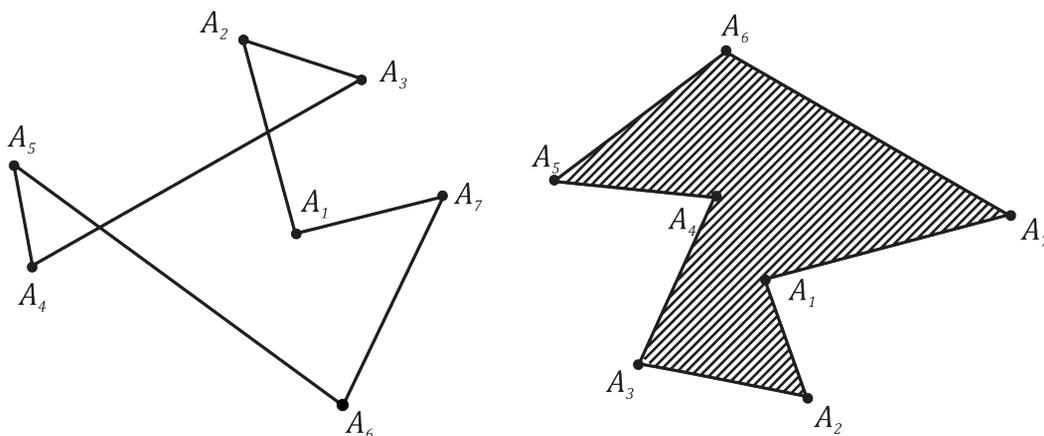
Fonte: DEaD | IFCE

Existem poligonais que recebem denominação especial, como segue

Consideremos a poligonal $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_4 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1$. Lembre-se que, de acordo com a definição de poligonal que demos logo acima, isso significa que $n \geq 3$ e cada segmento tem um extremo em comum com o segmento consecutivo e segmentos consecutivos não são colineares. Além disso, na poligonal considerada o último segmento, A_nA_1 , é adjacente ao primeiro, A_1A_2 . Uma poligonal desse tipo é chamada **poligonal fechada** (figura 75). Chamaremos uma poligonal fechada de **polígono**, se ela não tiver autointerseções (figura 75, à direita). Por não ter autointerseções, um polígono delimita uma única região do plano, chamada **interior do polígono**. Chamaremos a união do polígono com o seu interior de **região poligonal**. Quando não houver perigo de confusão, em vez de região poligonal, diremos simplesmente polígono.

Na figura 75, a região delimitada pelo polígono aparece tracejada.

Figura 75 – Uma poligonal fechada (à esquerda) e um polígono (à direita)



Fonte: DEaD | IFCE

Além de vértices e lados, outros segmentos de reta relacionados a um polígono têm uma nomenclatura específica:

Se A_i e A_j são dois vértices distintos de um polígono P e $j \in \{i-1, i+1\}$, então A_iA_j é um lado de P . No caso em que $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, o segmento A_iA_j é chamado de **diagonal** do polígono P .

Cada um dos n vértices de um polígono convexo pode ser ligado aos outros $n-1$ vértices por segmentos de reta, dos quais exatamente dois são lados do polígono, e os outros $n-3$ segmentos são diagonais. Assim, o produto $n(n-3)$ conta as diagonais do polígono, sendo que cada diagonal foi contada duas vezes, uma para cada vértice onde ela incide. Portanto, o número total de diagonais em um polígono convexo é

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

No exercício 3 da Aula 1 e também no Tópico 1 da Aula 3, definimos o que é uma *figura convexa*. Podemos agora então definir o que seria um **polígono convexo**.

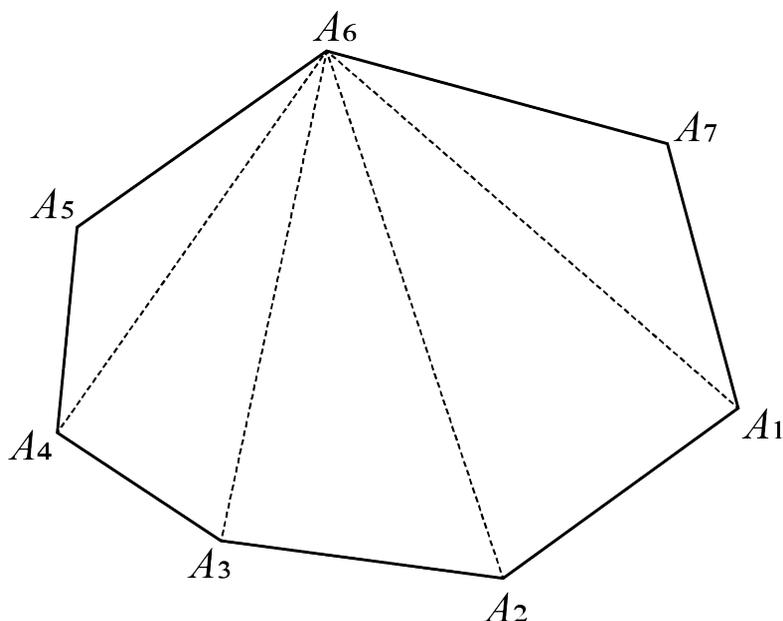
Um polígono é chamado **convexo**, se seu interior for uma região convexa do plano (figura 76).

Um polígono convexo com n lados pode ser dividido em $n-2$ triângulos, traçando-se as $n-2$ diagonais que partem de um vértice qualquer do polígono. Na

figura 76, as diagonais que partem do vértice A_6 aparecem tracejadas. De acordo com o Teorema 4.11, a soma dos ângulos internos de cada um desses $n-2$ triângulos é igual a 180° . Como a soma dos ângulos internos de todos os $n-2$ triângulos é igual à soma dos ângulos internos do polígono, temos o seguinte resultado:

Lema 5.1 A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Figura 76 – Polígono convexo



Fonte: DEaD | IFCE

Nesta disciplina estaremos interessados em estudar os polígonos convexos. Assim, salvo menção explícita em contrário, todos os polígonos que consideraremos nesta aula serão convexos e, por esta razão, chamaremos *polígonos convexos* simplesmente de *polígonos*.

Polígonos podem ser classificados pelo seu número de lados. Polígonos com três lados são chamados **triláteros** ou, como é mais comum, **triângulos** (estudamos triângulos nas aulas anteriores). Polígonos com quatro lados são chamados de **quadriláteros**, com cinco lados são chamados de **pentágonos**, com seis lados, **hexágonos**, com sete lados, **heptágonos**, e assim por diante.

Apresentamos abaixo uma tabela com os nomes de alguns polígonos de acordo com o número de lados.

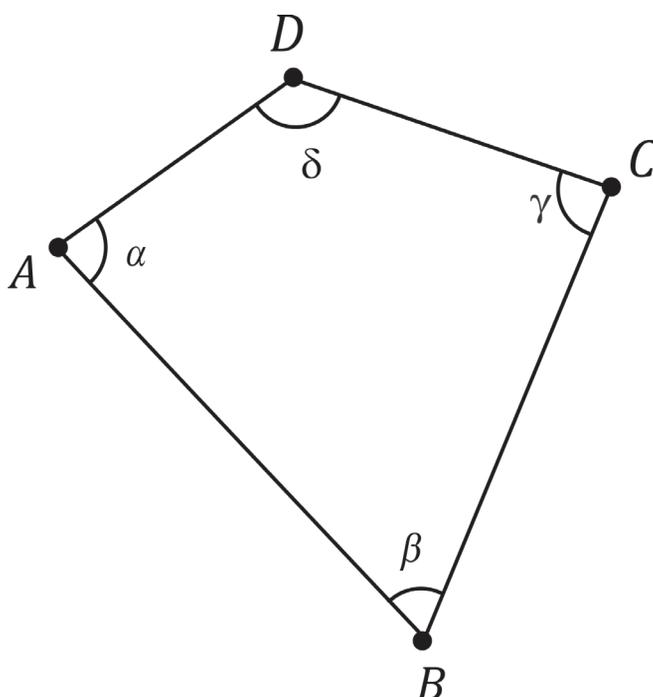
Tabela 2 – Classificação de alguns polígonos quanto aos lados

| Número de lados | Nome do polígono | Número de lados | Nome do polígono |
|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| 3 | Triângulo | 15 | Pentadecágono |
| 4 | Quadrilátero | 16 | Hexadecágono |
| 5 | Pentágono | 17 | Heptadecágono |
| 6 | Hexágono | 18 | Octadecágono |
| 7 | Heptágono | 19 | Eneadecágono |
| 8 | Octógono | 20 | Icoságono |
| 9 | Eneágono | 30 | Triacotágono |
| 10 | Decágono | 40 | Tetracontágono |
| 11 | Undecágono | 50 | Pentacontágono |
| 12 | Dodecágono | 60 | Hexacontágono |
| 13 | Tridecágono | 70 | Heptacontágono |
| 14 | Tetradecágono | 100 | Hectágono |

Fonte: DEaD | IFCE

Neste tópico nos deteremos a estudar certos quadriláteros com propriedades especiais, que chamamos de *quadriláteros notáveis*. Antes disso, faremos algumas observações sobre notação e nomenclatura em quadriláteros. Considere o quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo

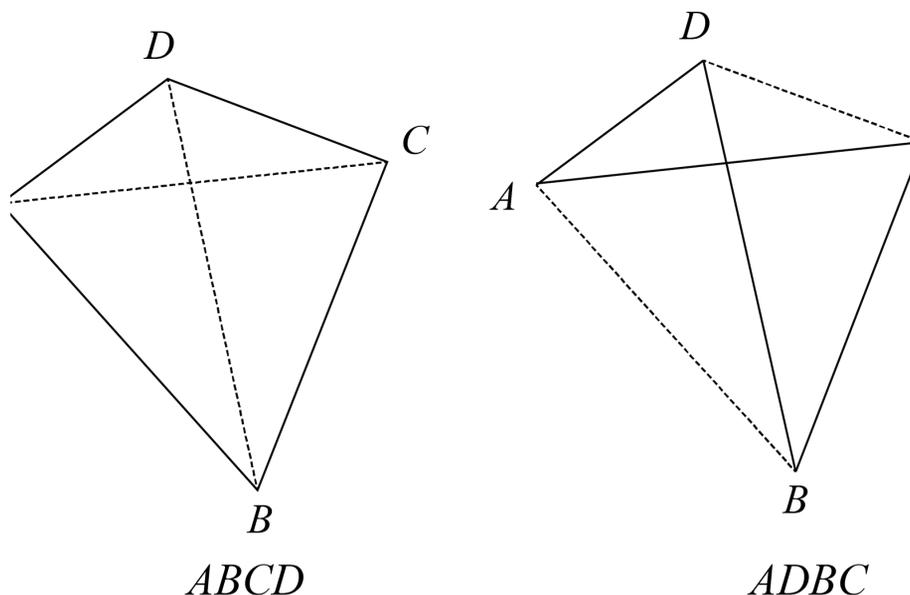
Figura 77 – Quadrilátero $ABCD$ e seus elementos



Fonte: DEaD | IFCE

Usaremos a notação $ABCD$ para designar um quadrilátero de vértices A, B, C e D e lados AB, BC, CD e DA . Convencionamos que, na notação $ABCD$, os pontos A, B, C e D aparecem, nesta ordem, em sentido anti-horário como vértices do quadrilátero (figura 77). De acordo com esta convenção, as notações $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$ e $DABC$ designam o mesmo quadrilátero, mas $ABCD$ e $ACBD$ designam poligonais diferentes (figura 78).

Figura 78 – $ABCD$ é um quadrilátero, mas $ACBD$ é apenas uma poligonal fechada



Fonte: DEaD | IFCE

Em um quadrilátero (convexo) $ABCD$, os lados que não são adjacentes, são chamados de **opostos**. De acordo com a convenção que estabelecemos acima para denotar um quadrilátero, em $ABCD$ (figura 77), os lados AB e CD são opostos, e também são opostos os lados BC e DA .

Os ângulos $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCD$ e $\delta = \angle CDA$ (figura 77) são chamados **ângulos internos** do quadrilátero. Se dois ângulos internos de um quadrilátero têm um lado em comum, eles são chamados **ângulos adjacentes**. Na figura 77, os ângulos β e δ são adjacentes a α , os ângulos α e γ são adjacentes a β , etc. Ângulos internos de um paralelogramo que não têm lados em comum são chamados **ângulos opostos**. Na figura 77, os ângulos α e γ são opostos, assim como os ângulos β e δ .

De modo análogo, chamamos dois vértices de um quadrilátero de **vértices opostos**, se não são extremos de um mesmo lado do quadrilátero, caso contrário são **vértices consecutivos**. Na figura 77, os vértices A e C são opostos, assim como os vértices B e D , já os vértices A e B , B e C , C e D , D e A , são extremos de um

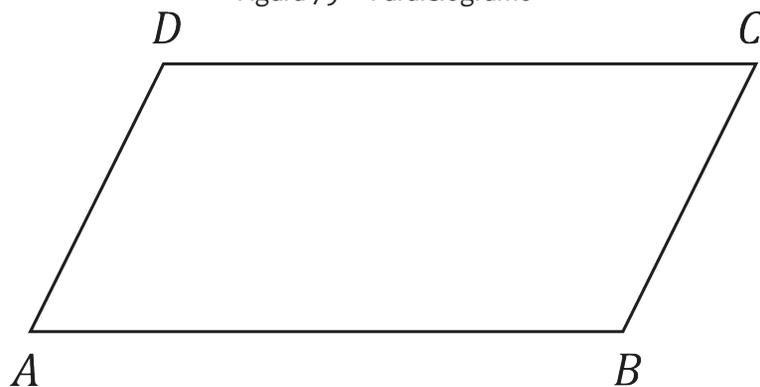
mesmo lado e assim são denominados de vértices consecutivos. Os segmentos de reta que ligam dois vértices opostos de um quadrilátero são chamados **diagonais do quadrilátero**. Na figura 78, representadas como linhas tracejadas, AC e BD são as diagonais do quadrilátero $ABCD$, e AB e CD são as diagonais do quadrilátero $ACBD$. Dizemos que um quadrilátero é convexo se ele for um polígono convexo, ou seja, se seu interior for uma região convexa do plano. As diagonais de um quadrilátero convexo estão contidas no interior do quadrilátero.

Feita as devidas considerações iniciais, começaremos agora a estudar os chamados **quadriláteros notáveis**. Inicialmente abordaremos os *paralelogramos* cuja definição é dada a seguir.

Um quadrilátero $ABCD$ é chamado **paralelogramo** se seus lados opostos são paralelos.

Na figura 79, o quadrilátero $ABCD$ apresenta seus lados opostos AB e CD e BC e DA paralelos, ou seja, $AB \parallel CD$ e $BC \parallel DA$. Portanto, o quadrilátero é um paralelogramo.

Figura 79 – Paralelogramo



Fonte: DEaD | IFCE

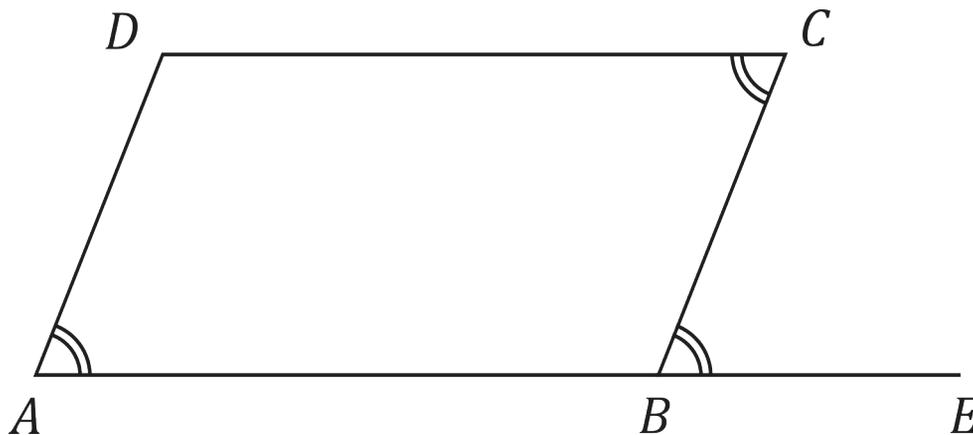
O teorema a seguir nos fornece três caracterizações de um paralelogramo.

Teorema 5.1 Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo se, e somente se, uma das condições abaixo for satisfeita:

- (1) Os ângulos opostos são congruentes.
- (2) Os lados opostos são congruentes.
- (3) As diagonais encontram-se nos seus pontos médios.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que em um paralelogramo vale (1).

Figura 80 – Ângulos congruentes em um paralelogramo



Fonte: DEaD | IFCE

Prolongando o lado AB até um ponto E tal que $A * B * E$, obtemos um ângulo externo $\angle CBE$ (figura 80). Como $AD \parallel BC$, temos que $\angle DAB \equiv \angle CBE$. Como $AB \parallel CD$, temos que $\angle CBE \equiv \angle BCD$. Assim, $\angle DAB \equiv \angle BCD$. De modo inteiramente análogo, prova-se que $\angle ABC \equiv \angle CDA$. Com isso, mostramos que, em um paralelogramo, vale (1).

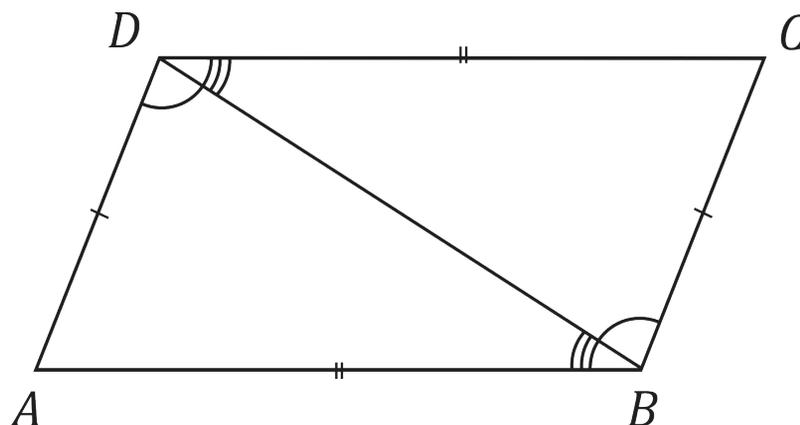
Reciprocamente, suponhamos que vale (1) em um quadrilátero $ABCD$, isto é, os ângulos opostos são congruentes: $\angle DAB \equiv \angle BCD$ e $\angle ABC \equiv \angle CDA$. Pelo Lema 5.1, a soma dos quatro ângulos internos do quadrilátero $ABCD$ é $(4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Logo,

$$2 \cdot (\angle ABC + \angle BCD) = \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^\circ$$

Isso significa que $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$, ou seja, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são suplementares. Como $\angle CBE$ também é suplementar de $\angle ABC$, temos $\angle BCD \equiv \angle CBE$. Como esses ângulos são alternos internos (figura 80), a reta AB é paralela à reta CD , pelo Teorema 4.7. Analogamente, podemos mostrar que as retas BC e DA também são paralelas, logo o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Vamos à caracterização (2). Suponha que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo. Tracemos a diagonal BD , que divide o paralelogramo $ABCD$ em dois triângulos ABD e CDB (figura 81). Esses triângulos têm o lado BD em comum. Pelo paralelismo $AB \parallel CD$, temos $\angle ABD \equiv \angle BDC$ (considerando a reta BD como transversal) e, pelo paralelismo $AD \parallel BC$, temos $\angle ADB \equiv \angle DBC$ (considerando a reta BD como transversal). Pelo caso de congruência de triângulos ALA, temos $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. Em particular, $AB \equiv CD$ e $BC \equiv DA$.

Figura 81 – Lados opostos congruentes em um paralelogramo

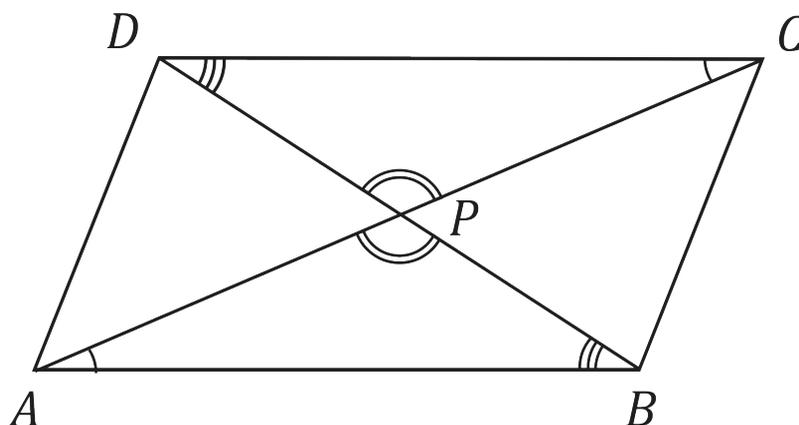


Fonte: DEaD | IFCE

Reciprocamente, se os lados opostos de um quadrilátero $ABCD$ forem congruentes, isto é, $AB \equiv CD$ e $BC \equiv DA$, então (figura 81), os triângulos ABD e CDB serão congruentes pelo caso LLL (note que BD é lado comum de ambos os triângulos). Em particular, $\angle ABD \equiv \angle CDB$ e $\angle ADB \equiv \angle CBD$. Dessa congruência de ângulos alternos internos, segue que $AB \parallel CD$ e $BC \parallel DA$. Logo, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Finalmente, mostraremos que (3) também caracteriza um paralelogramo. Primeiramente, suponhamos que $ABCD$ é um paralelogramo. Seja P o ponto de encontro das diagonais AC e BD . Já sabemos, de (2), que $AB \equiv CD$. De $AB \parallel CD$ segue que $\angle BAC \equiv \angle DCA$ e $\angle ABD \equiv \angle CDB$ (figura 82). Pelo caso ALA de congruência de triângulos, segue que $\triangle ABP \equiv \triangle CDP$. Em particular, $AP \equiv PC$ e $BP \equiv PD$. Logo, P é o ponto médio tanto da diagonal AC quanto da diagonal BD .

Figura 82 – Diagonais de um paralelogramo encontram-se em seu ponto médio



Fonte: DEaD | IFCE

Reciprocamente, suponha que as diagonais AC e BD de um quadrilátero $ABCD$ encontram-se em seu ponto médio P (figura 82). Os ângulos $\angle APB$ e $\angle CPD$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes. Como P é ponto médio das diagonais, temos $AP \equiv PC$ e $BP \equiv PD$. Pelo caso LAL, os triângulos ABP e CDP são congruentes. Em particular, $\angle BAC \equiv \angle DCA$, logo $AB \parallel CD$. De modo análogo, podemos mostrar que $\triangle BCP \equiv \triangle DAP$, logo $\angle ADB \equiv \angle CBD$, donde segue que $BC \parallel DA$. Portanto, $ABCD$ é um paralelogramo. ■

Retornando ao Livro I dos *Elementos*, vamos demonstrar a Proposição 33 que pode ser enunciada da seguinte forma:

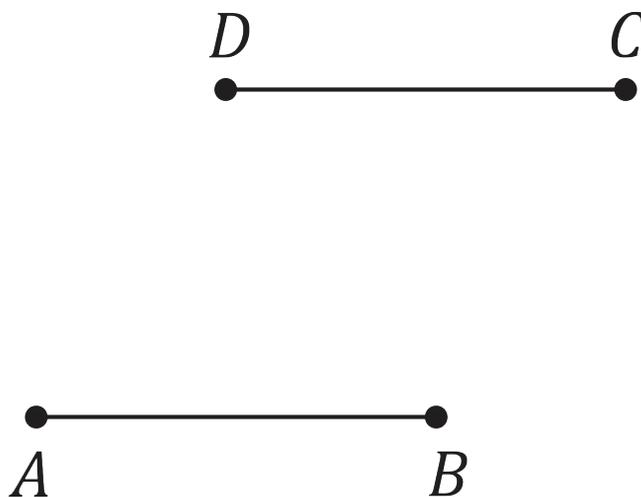
Teorema 5.2 (Elementos, Livro I, Proposição 33) Os segmentos de reta que ligam as extremidades correspondentes de dois segmentos congruentes e paralelos, também são congruentes e paralelos.

Antes de demonstrá-lo, precisamos da definição de segmentos paralelos.

Dizemos que dois segmentos são paralelos se as retas que os contém são paralelas.

Na figura 83, os segmentos AB e CD são congruentes e paralelos. O Teorema 5.2 afirma que os segmentos BC e DA também são congruentes e paralelos, isto é, $ABCD$ é um paralelogramo.

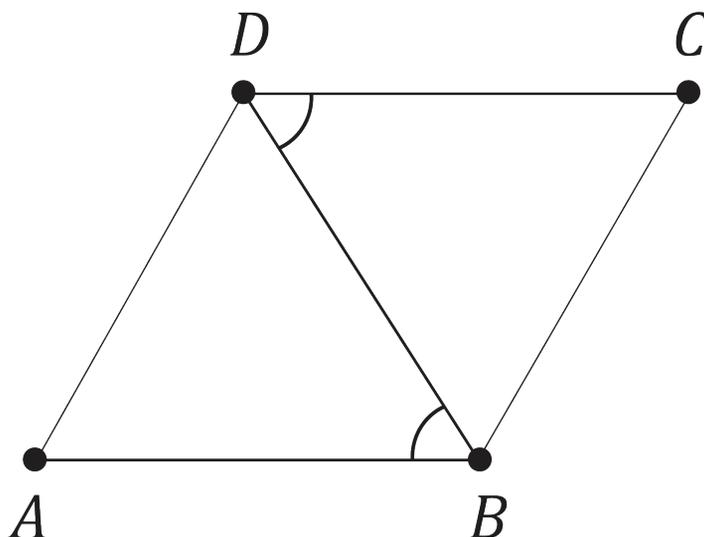
Figura 83 – Segmentos paralelos AB e CD



Feita as considerações necessárias, passemos agora para a demonstração do Teorema.

Demonstração do Teorema 5.2: Considere os segmentos congruentes e paralelos AB e CD (figura 83). Traçando os segmentos AD , BC e BD , obtemos dois triângulos: ABD e CDB (figura 84).

Figura 84 – Os triângulos congruentes ABD e CDB



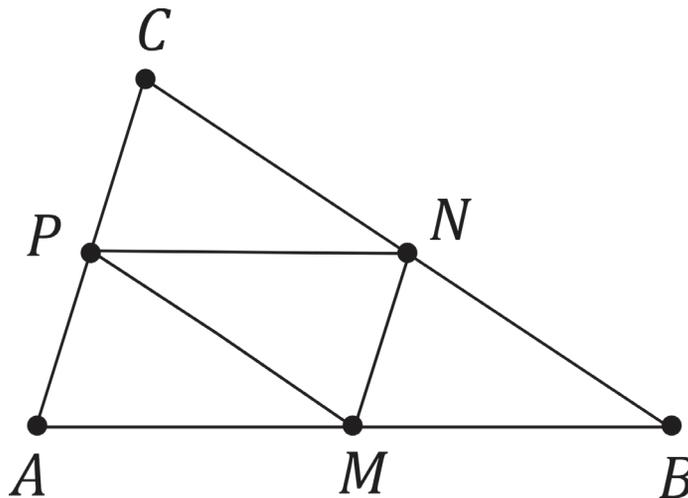
Fonte: DEaD | IFCE

Como $AB \parallel CD$, os ângulos alternos internos $\angle ABD$ e $\angle CDB$ são congruentes. Além disso, $AB \equiv CD$ e BD é comum aos dois triângulos. Pelo caso LAL, os triângulos ABD e CDB são congruentes. Em particular, $AD \equiv BC$ e $\angle ADB \equiv \angle CBD$. Dessa congruência de ângulos alternos internos segue que $AD \parallel BC$. ■

Exibiremos a seguir duas aplicações à geometria do triângulo das caracterizações exibidas nos Teoremas 5.1 e 5.2. Inicialmente vejamos a definição do que seria a base média de um triângulo.

Considere um triângulo ABC qualquer. Sejam M , N e P os pontos médios relativos aos lados AB , BC e CA , respectivamente. Os segmentos MN , NP e MP são chamadas **bases médias** do triângulo, relativas aos lados AC , AB e BC , respectivamente (figura 85). O triângulo MNP é chamado **triângulo medial** de ABC .

Figura 85 – As bases médias de um triângulo



Fonte: DEaD | IFCE

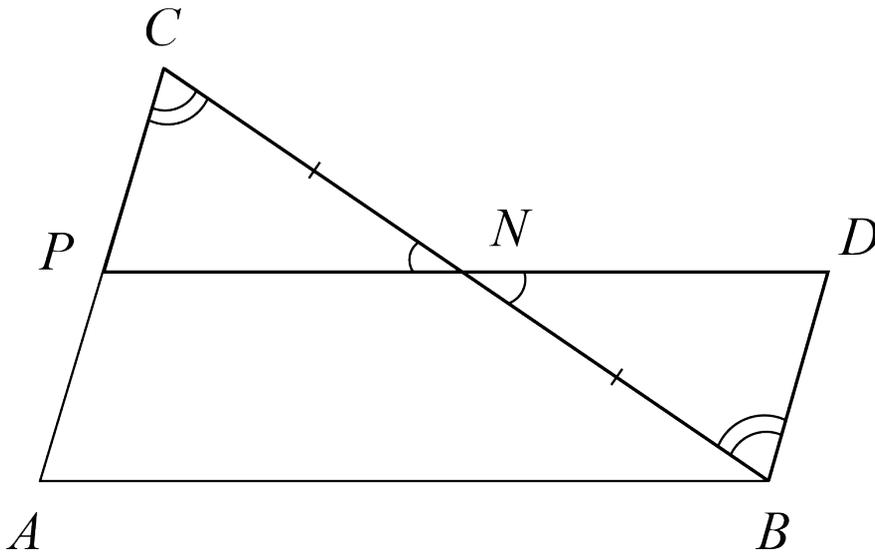
Note que, da definição acima, a base média de um triângulo é o segmento que une os pontos médios de dois de seus lados e que todo triângulo apresenta três bases médias.

O Teorema a seguir, conhecido como Teorema da Base Média, permite estabelecer algumas relações importantes sobre as bases médias de um triângulo qualquer.

Teorema 5.3 Em um triângulo o segmento que une os pontos médios de dois lados (a base média) é paralelo ao terceiro lado e mede metade desse lado.

Demonstração: Considere um triângulo ABC e sejam P e N os pontos médios dos lados AC e BC , respectivamente (figura 86). Vamos mostrar que $PN \parallel AB$ e $\overline{PN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.

Figura 86 – A base média de um triângulo é a metade do lado correspondente



Fonte: DEaD | IFCE

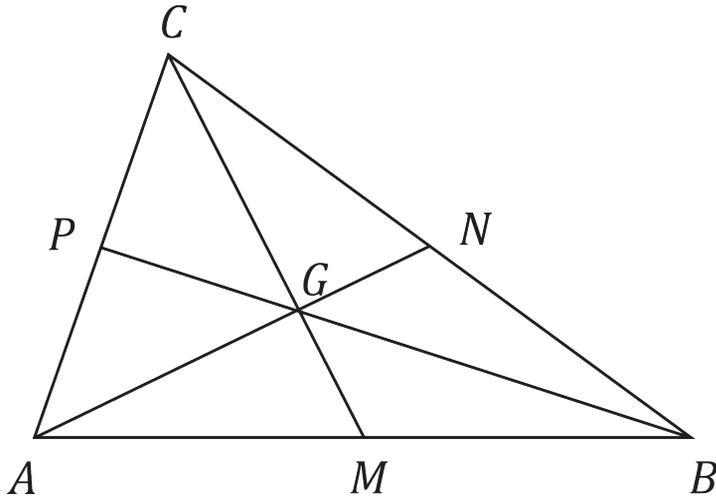
Pelo ponto B tracemos a reta BD , paralela a AC , que intersecta o prolongamento do segmento PN no ponto D (figura 86). Como $BD \parallel AC$, os ângulos alternos internos $\angle PCN$ e $\angle DBN$ são congruentes. Os ângulos $\angle CNP$ e $\angle BND$ também são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Além disso, como N é ponto médio do lado BC , $BN \equiv NC$. Assim, pelo caso ALA, os triângulos PCN e DBN são congruentes. Em particular, $PN \equiv ND$, logo, $\overline{PN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PD}$.

Como P é ponto médio de AC , temos $AP \equiv PC$ e, uma vez que $PC \equiv DB$, temos que $AP \equiv DB$. Como $AP \parallel BD$ e $AP \equiv DB$ segue, do Teorema 5.2, que $PD \parallel AB$ e $PD \equiv AB$. Portanto, do Teorema 5.1 (2), $ABDP$ é um paralelogramo. Logo, $PN \parallel AB$ e $PD \equiv AB$. Dessa forma, $\overline{PN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. ■

Segmentos que ligam um vértice de um triângulo a um ponto do lado oposto a esse vértice têm grande importância no estudo de triângulos. Esses segmentos são chamados de **cevianas**, em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734) que foi pioneiro em seu estudo. As alturas de um triângulo são exemplos de cevianas. A seguir, definiremos um outro tipo importante de ceviana.

Em um triângulo ABC , consideremos os lados AB, BC e CA e seus respectivos pontos médios M, N e P (figura 87). Chamamos os segmentos AN, BP e CM de **medianas** do triângulo ABC , relativas aos lados BC, CA e AB (figura 87).

Figura 87 – As medianas de um triângulo



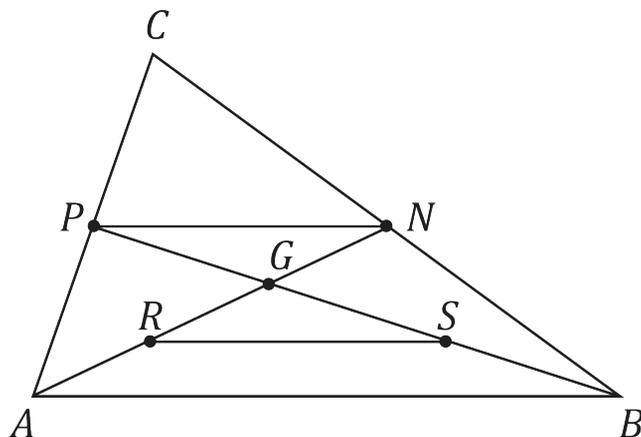
Fonte: DEaD | IFCE

Um fato notável sobre as medianas é o seguinte

Teorema 5.4 As três medianas de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto que divide cada mediana na razão de 2 : 1.

Demonstração: Mostraremos que as medianas se encontram em um mesmo ponto e esse ponto divide cada mediana na relação de 2 : 1, ou seja, se considerarmos G , o ponto de encontro das três medianas e sendo AN uma das medianas, então temos que $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GN}$. Com efeito, sejam ABC um triângulo e G o ponto de encontro das medianas AN e BP . Sejam R e S os pontos médios dos segmentos AG e BG , respectivamente (figura 88).

Figura 88 – $PRSN$ é um paralelogramo



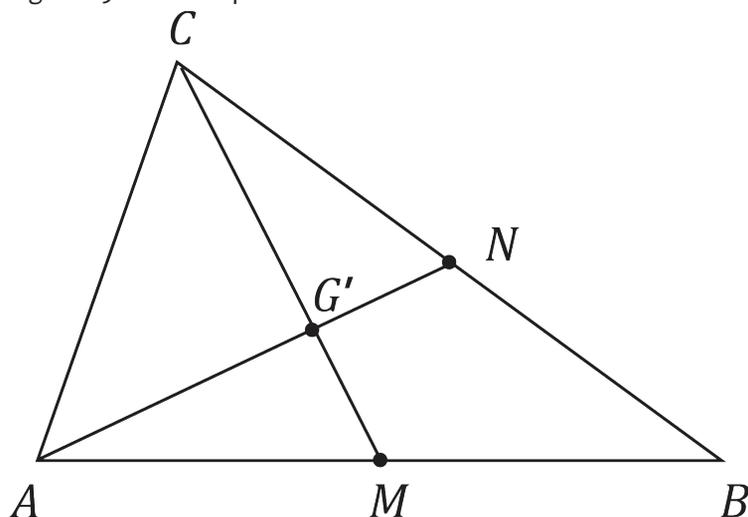
Fonte: DEaD | IFCE

O segmento RS é base média de ABG relativa a AB , logo é paralelo a AB e tem metade de seu comprimento, pelo Teorema 5.3. Como P é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC , o segmento PN é base média de ABC relativa a AB . Assim, novamente pelo Teorema 5.3, PN é paralelo a AB e tem metade de seu comprimento.

Sendo ambos paralelos a AB , os segmentos RS e PN são paralelos e, como ambos têm metade do comprimento de AB , eles têm o mesmo comprimento, portanto são congruentes.

Pelo Teorema 5.2, $PRSN$ é um paralelogramo. Agora, do Teorema 5.1, item (3), as diagonais PS e NR encontram-se em seu ponto médio, ou seja, no ponto G . Isso significa que $\overline{AR} = \overline{RG} = \overline{GN}$ e $\overline{BS} = \overline{SG} = \overline{GP}$. Portanto, $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GN}$ e $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GP}$.

Figura 89 – G' é o ponto de encontro das medianas CM e AN



Fonte: DEaD | IFCE

Seja G' o ponto de encontro das medianas AN e CM . Seguindo o mesmo raciocínio acima, podemos concluir que o ponto G' divide as duas medianas de modo que $\overline{CG'} = 2 \cdot \overline{G'M}$ e $\overline{AG'} = 2 \cdot \overline{G'N}$. Dessa forma, os pontos G e G' estão ambos entre A e N e dividem esse segmento na razão $2:1$, isto é, $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GN}$ e $\overline{AG'} = 2 \cdot \overline{G'N}$. Com isso, forçosamente, $G = G'$. Portanto, as três medianas do triângulo ABC se intersectam no ponto G e este ponto as divide na razão $2:1$. ■

Do que foi exposto no teorema acima, podemos então definir

O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é denominado de **baricentro**.



O baricentro de um triângulo é o seu centro de gravidade. Isso significa que o sistema formado por três pontos materiais com mesma massa m posicionados nos vértices do triângulo pode ser substituído por um ponto material de massa $3m$ situado no baricentro do triângulo. Essa ideia é a base para a construção das coordenadas baricêntricas. Veja, por exemplo, http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cjyyub1myigw8.pdf ou <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2008.2/esp/2008-osorio-esp-uff.pdf>

Outra aplicação importante das propriedades do paralelogramo é dada no exemplo a seguir.

Exemplo 1 Vamos traçar, usando régua e compasso, uma reta paralela a uma reta r dada, passando por um ponto P não pertencente à reta r . Para tanto, descreveremos os passos abaixo e convidamos o leitor a acompanhar a descrição de cada passo fazendo a respectiva construção com régua e compasso em uma folha a parte. Vamos lá!

Passo 1: Com o compasso centrado no ponto P , trace um arco de círculo α que intersekte a reta r em dois pontos distintos A e B .

Passo 2: Novamente com o compasso centrado em P , trace o círculo β com raio igual a AB .

Passo 3: Agora com o compasso centrado no ponto B e abertura igual a PA , trace o círculo γ .

Passo 4: Marque a interseção dos círculos β e γ , e considere o ponto C situado no mesmo semiplano determinado por r que contém o ponto P .

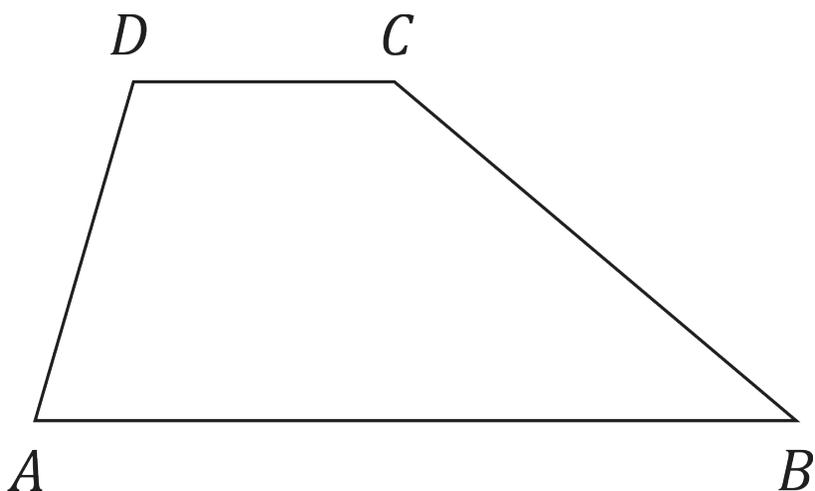
Passo 5: Usando os pontos P , A , B e C construa o quadrilátero $PABC$ com o auxílio de uma régua.

Nosso objetivo agora consiste em demonstrar que o quadrilátero $PABC$ é um paralelogramo. Para tanto basta mostrar que seus lados opostos são congruentes (Teorema 5.1, item (2)). Verifique isso! Desse modo a reta PC será paralela à reta AB e, portanto, paralela à reta r passando pelo ponto P .

Falaremos agora sobre outro tipo de quadrilátero conhecido como **trapézio**. Assim

Um quadrilátero (convexo!) que tem dois de seus lados paralelos, é chamado **trapézio** (figura 90). Se os dois lados paralelos forem congruentes, o trapézio em questão é um paralelogramo (Teorema 5.2.). Isso significa que todo paralelogramo é um tipo especial de trapézio.

Figura 90 – Trapézio $ABCD$ com bases AB e CD



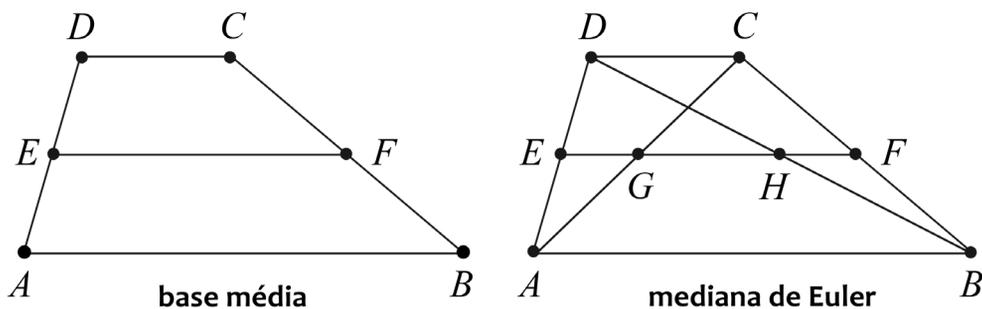
Fonte: DEaD | IFCE

Vamos estudar o caso em que os dois lados paralelos do trapézio não são congruentes, ou seja, têm tamanhos diferentes. Esses lados paralelos são chamados **bases** do trapézio. Como têm tamanhos diferentes, o maior deles é chamado **base maior** do trapézio e o outro é chamado **base menor** do trapézio.

Em um trapézio dois segmentos notáveis merecem destaque: a **base média** e a **base de Euler**. Suas definições são dadas a seguir

A **base média** de um trapézio é o segmento determinado pelos pontos médios dos lados não paralelos (figura 91, esquerda).

Figura 91 – A base média e a mediana de Euler de um trapézio



Fonte: DEaD | IFCE

Na figura 91 (à esquerda) os pontos E e F são os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC do trapézio $ABCD$. Assim o segmento EF é denominado de **base média**. Já a **mediana de Euler** pode ser definida por

A **mediana de Euler** é o segmento que liga os pontos médios das diagonais de um trapézio (figura 91, direita).

Observando agora a figura 91 à direita, temos que considerando as diagonais AC e BD do trapézio e seus respectivos pontos médios G e H , temos que o segmento GH é a **mediana de Euler**.

Sobre a base média e a mediana de Euler de um trapézio, podemos afirmar o seguinte.

Esse segmento notável do trapézio leva o nome do grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), certamente um dos maiores e mais influentes matemáticos de todos os tempos. Uma biografia de Euler pode ser encontrada, por exemplo, em <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambienteensino/modulos/history/euler/euler.html>



Teorema 5.5 A mediana de Euler GH de um trapézio $ABCD$ está contida em sua base média EF . Além disso, $\overline{EF} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ e $\overline{GH} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}$.

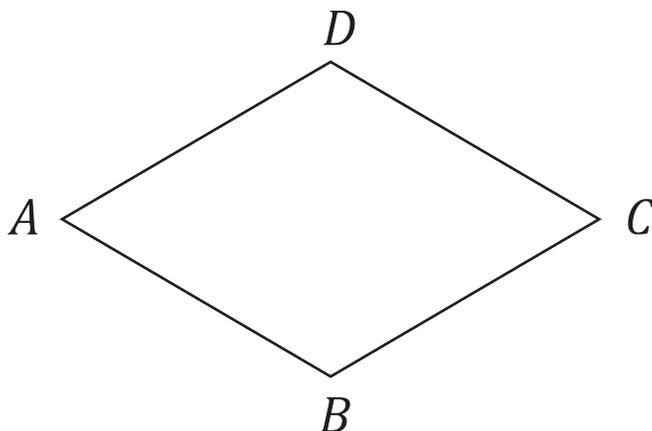
Demonstração: Considere um trapézio $ABCD$ e sejam E e G os respectivos pontos médios dos lados AD e AC (figura 91, direita). Dessa forma o segmento EG é base média do triângulo ACD , relativa ao lado CD . De modo análogo, verifica-se que GF é base média do triângulo ABC relativa ao lado AB , EH é base média do triângulo ABD , relativa ao lado AB , e HF é base média do triângulo BCD , relativa ao lado CD . Como $AB \parallel CD$, todos os segmentos EG, EH, GF e HF são paralelos. Logo, os pontos E, G, H e F são colineares e o segmento GH está contido no segmento EF .

Também por serem bases médias, os segmentos EG, EH, GF e HF medem cada um a metade do respectivo lado, ou seja, $\overline{EG} = \frac{\overline{CD}}{2}, \overline{EH} = \frac{\overline{AB}}{2}, \overline{GF} = \frac{\overline{AB}}{2}$ e $\overline{HF} = \frac{\overline{CD}}{2}$. Assim, $\overline{EF} = \overline{EH} + \overline{HF} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ e $\overline{GH} = \overline{EH} - \overline{EG} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}$. ■

Outro quadrilátero notável é o **losango**, que pode ser definido como:

Um **losango** é um quadrilátero convexo com os quatro lados congruentes (figura 92). Como os lados opostos de um losango são congruentes, pelo Teorema 5.1, item (2), todo losango é um paralelogramo.

Figura 92 – Losango $ABCD$



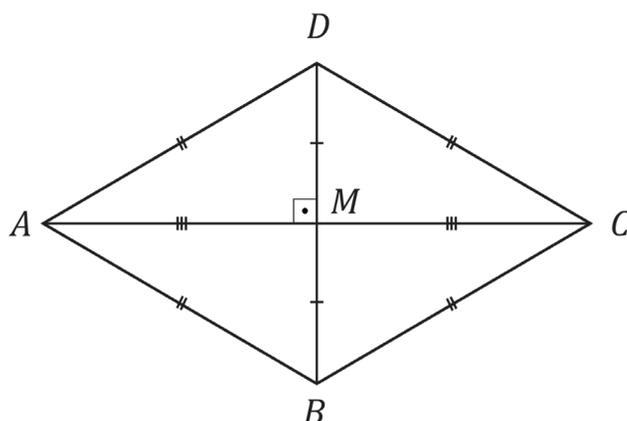
Fonte: DEaD | IFCE

O resultado a seguir caracteriza os losangos entre os paralelogramos.

Teorema 5.6 Um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.

Demonstração: Seja $ABCD$ um losango. Pelo que observamos acima, $ABCD$ é um paralelogramo. Pelo Teorema 5.1, item (3), suas diagonais encontram-se no seu ponto médio M . Em particular, $AM \equiv MC$ e $BM \equiv MD$ (figura 93).

Figura 93 – As diagonais de um losango são perpendiculares



Fonte: DEaD | IFCE

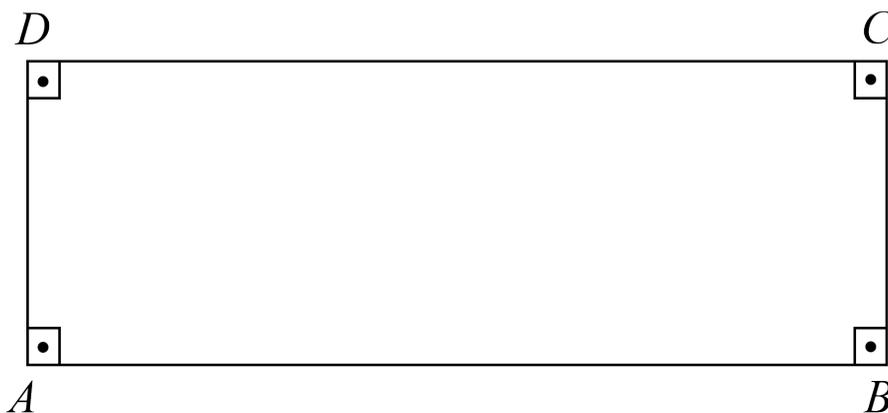
Pelo caso LLL, os triângulos AMB , CMB , CMD e AMD são congruentes. Assim, os ângulos $\angle AMB$, $\angle CMB$, $\angle CMD$ e $\angle AMD$ são todos congruentes. Como esses quatro ângulos somam 360° , cada um deles deve medir 90° , isto é, cada um deles deve ser um ângulo reto. Isso mostra que as diagonais do losango $ABCD$ são perpendiculares.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um paralelogramo cujas diagonais AC e BD são perpendiculares. Neste caso, os ângulos $\angle AMB$, $\angle CMB$, $\angle CMD$ e $\angle AMD$ são todos retos e, como as diagonais de um paralelogramo encontram-se em seus pontos médios (Teorema 5.1, (3)), os triângulos ABM , BCM , CDM e DAM são congruentes pelo caso LAL. Logo, os lados do paralelogramo $ABCD$ são todos congruentes, ou seja, $ABCD$ é um losango. ■

Outro quadrilátero que merece destaque é o **retângulo**.

Um **retângulo** é um quadrilátero convexo com os quatro ângulos internos congruentes (figura 94).

Figura 94 – Retângulo $ABCD$



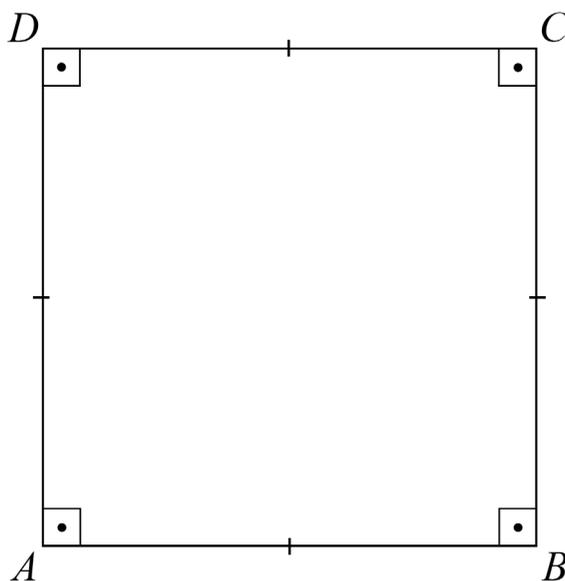
Fonte: DEaD | IFCE

Pelo Teorema 5.1, item (1), conclui-se que um retângulo é um paralelogramo. Agora, pelo Teorema 4.14 temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° . Dessa forma, traçando uma das diagonais do retângulo, por exemplo, AC , dividimos o retângulo em dois triângulos. A soma dos ângulos internos do retângulo $ABCD$ é igual à soma dos ângulos internos dos dois triângulos ABC e ACD , ou seja, é igual a $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Como os quatro ângulos internos de um retângulo são congruentes, eles têm a mesma medida, que deve ser, portanto, igual a $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Portanto, os ângulos internos de um retângulo medem 90° .

Vamos ao último quadrilátero notável que estudaremos neste tópico.

Um **quadrado** é um quadrilátero que é ao mesmo tempo losango e retângulo (figura 95).

Figura 95 – Quadrado $ABCD$



Fonte: DEaD | IFCE



O quadrado é uma das figuras básicas da geometria e guarda fortes relações com a aritmética. Quando falamos em um *número ao quadrado*, nos referimos ao quadrado cujo lado é igual a esse número. Da mesma forma, a *raiz quadrada* (do latim *radix quadratorum*) de um número é o lado de um quadrado cuja área é igual a esse número. Voltaremos a esse assunto na aula sobre áreas.

Da definição acima podemos então dizer que o quadrado é um polígono que apresenta todos os lados iguais e também todos os ângulos iguais.

Chegamos ao final do primeiro tópico de nossa aula 5. Tratamos aqui de certos polígonos com propriedades especiais, advindas da restrição ao seu número de lados: os quadriláteros. No próximo tópico, estudaremos polígonos cujas propriedades notáveis são consequências de outro tipo de restrição: lados e ângulos internos congruentes. Esses polígonos, como veremos, são chamados de *regulares*.

Construção de polígonos regulares com régua e compasso

OBJETIVOS

- Reconhecer um polígono regular
- Estudar o problema da construção de polígonos regulares usando régua e compasso

No primeiro tópico desta aula, estudamos polígonos sob uma restrição específica: forçamos o número de lados a ser igual a quatro e vimos que, dentre os quadriláteros, existem alguns com propriedades notáveis. Neste tópico, estudaremos polígonos sob outra restrição: a regularidade. Desta vez não restringiremos o número de lados, mas exigiremos que os lados e os ângulos internos do polígono sejam todos congruentes.

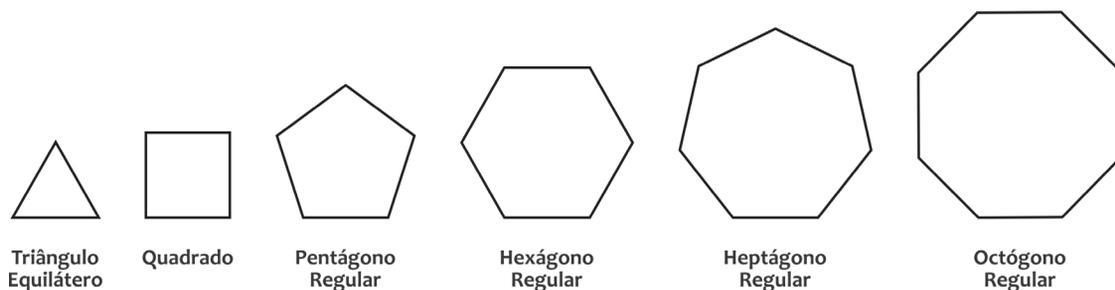
Neste tópico, explicaremos como construir com régua e compasso alguns polígonos regulares: o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o hexágono regular. Dessas construções, a mais elaborada é a do pentágono regular. Também apresentaremos um resultado devido a C.F. Gauss, que estabelece exatamente quais são os polígonos regulares que podem ser construídos com régua e compasso.

Vamos iniciar com a definição de polígono regular:

Um polígono convexo é dito **regular** se todos os seus lados e ângulos internos forem congruentes.

Exemplos de polígonos regulares são o *triângulo equilátero*, que é o polígono regular de três lados, e o quadrado, que é o *polígono regular* de quatro lados. Na figura 96, exibimos alguns exemplos de polígonos regulares com até oito lados.

Figura 96 – Exemplos de polígonos regulares



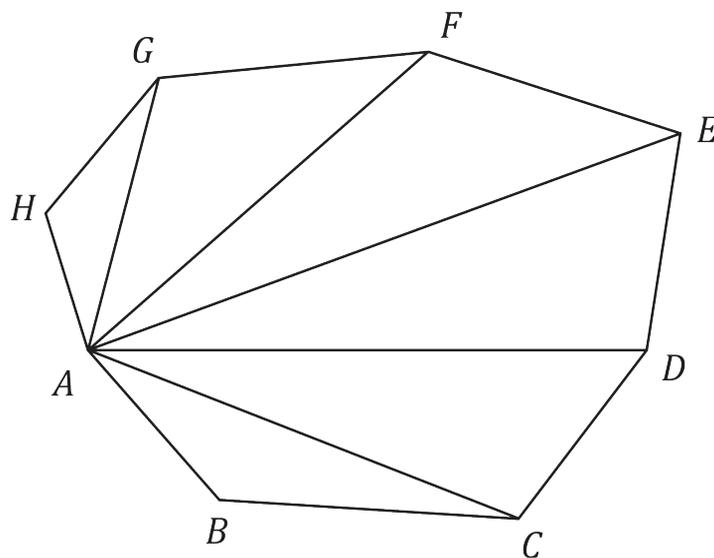
Fonte: DEaD | IFCE

Para triângulos, é suficiente exigirmos que os (três) lados sejam congruentes, ou que os (três) ângulos sejam congruentes, pois a congruência dos três lados é equivalente à congruência dos três ângulos internos.

Para polígonos de quatro ou mais lados devemos exigir a congruência de lados e de ângulos internos. Por exemplo, existem quadriláteros com os ângulos internos congruentes, mas que não têm os lados congruentes (um retângulo que não é quadrado) e existem também quadriláteros que têm os quatro lados congruentes, mas não têm os ângulos internos congruentes (um losango que não é um quadrado). Da mesma forma, podemos construir polígonos com cinco ou mais lados que tenham todos os ângulos congruentes, mas não sejam regulares, ou que tenham todos os lados congruentes, mas que não sejam regulares.

No Lema 5.1, vimos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Isso foi feito, traçando-se diagonais a partir de um vértice fixado, como na figura 97, onde um octógono é dividido em seis triângulos.

Figura 97 – Um polígono convexo de oito lados dividido em seis triângulos



Fonte: DEaD | IFCE

Em particular, se o polígono é regular, todos os n ângulos internos têm a mesma medida, logo, a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados, que representaremos por θ_n , é igual a

$$\theta_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

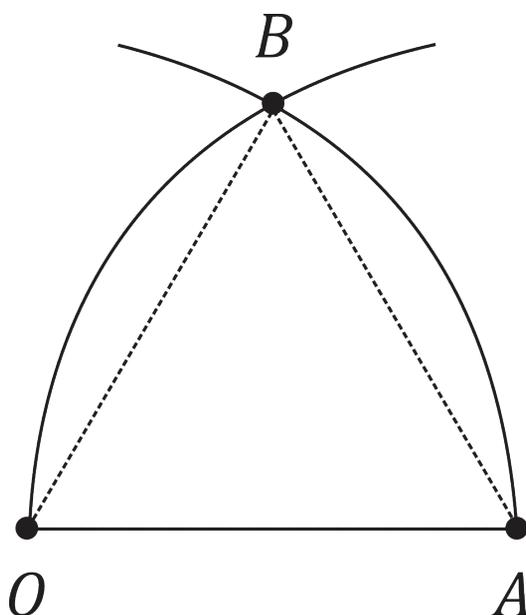
A seguir, realizaremos a construção de alguns polígonos regulares e enunciaremos um resultado geral que garante quando um polígono regular de n lados pode ser construído usando-se apenas régua e compasso.

Fixados dois pontos O e A do plano, podemos obter outros pontos do plano a partir desses dois, usando apenas régua e compasso. Os novos pontos são obtidos como interseções de retas e círculos, traçados usando-se régua e compasso. De maneira mais formal, temos:

Um ponto P que pode ser obtido a partir de dois pontos escolhidos e fixados O e A , usando apenas régua e compasso um número finito de vezes, é chamado **construtível**. Uma figura plana \mathcal{F} é chamada **construtível** se cada ponto P de \mathcal{F} for **construtível**.

Por exemplo, a Proposição 1 do Livro I dos *Elementos*, nos ensina como obter, usando-se apenas o compasso, um terceiro ponto B que, juntamente com O e A são os três vértices de um triângulo equilátero. Dessa forma, o triângulo equilátero é construtível (figura 98).

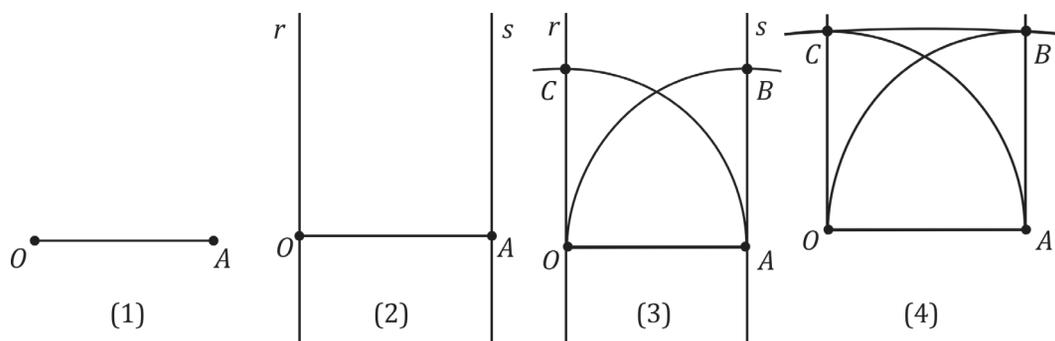
Figura 98 – Construção do triângulo equilátero



A seguir, construiremos outros polígonos regulares. O primeiro será o quadrado.

Construção do quadrado: Para construirmos um quadrado, tomemos o segmento OA determinado pelos pontos dados O e A (figura 99, (1)). Com régua e compasso é possível construir-se perpendiculares r e s à reta OA passando pelos pontos O e A , respectivamente (figura 99, (2)). Com o compasso centrado em O e abertura OA , trace um arco de círculo que intersecte a reta r em C , e com o compasso centrado em A , com abertura AO , trace um arco de círculo que intersecte a reta s no ponto B (figura 99, (3)).

Figura 99 – Construção do quadrado



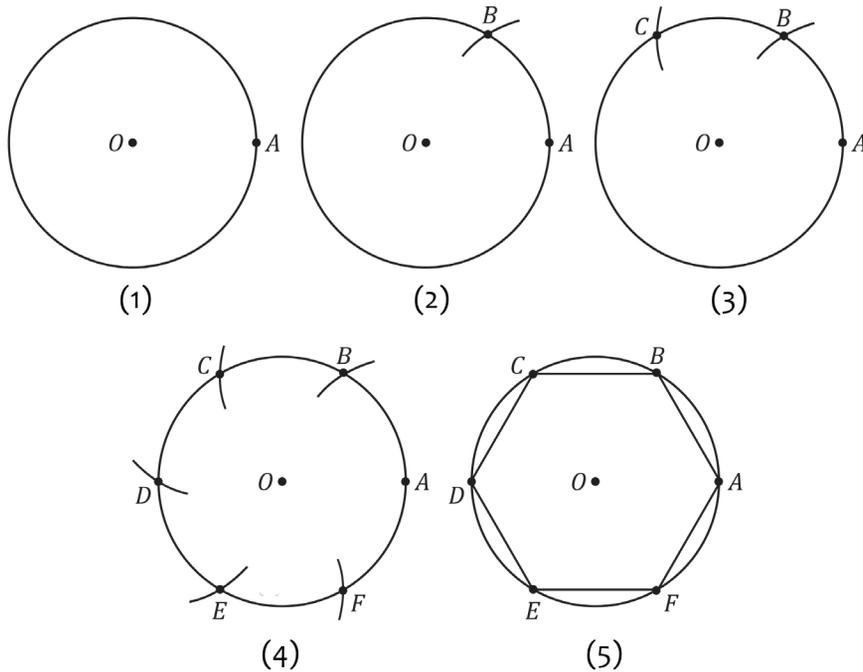
Fonte: DEaD | IFCE

O quadrilátero $OACB$ (figura 99, (4)) é um quadrado. De fato, por construção, $OC \parallel AB$ e $OC \equiv AB$, logo $OACB$ é um paralelogramo pelo Teorema 5.2. Novamente por construção, $OC \equiv AB \equiv OA$, e $BC \equiv OA$, pois são lados opostos de um paralelogramo (Teorema 5.1, (2)). Assim, $OACB$ é um losango. Mais uma vez por construção, $\angle COA$ e $\angle OAB$ são ambos ângulos retos, e $\angle OCB \equiv \angle OAB$ e $\angle ABC \equiv \angle COA$, pois são ângulos opostos de um paralelogramo (Teorema 5.1, (1)). Assim, $OACB$ é também um retângulo, logo é um quadrado.

Como a construção do hexágono regular é bem mais simples que a do pentágono regular, vamos construir o hexágono primeiro.

Construção do hexágono regular: Com o compasso centrado em O e abertura OA , trace um círculo α (figura 100, (1)). Com o compasso centrado em A e abertura OA , trace um arco de círculo que intersecta o círculo α no ponto B (figura 100, (2)). Com o compasso centrado em B e abertura OA , trace um arco de círculo que intersecta o círculo α no ponto C (figura 100, (3)).

Figura 100 – Construção do hexágono regular



Fonte: DEaD | IFCE

Da mesma forma, trace arcos de círculo usando o compasso com abertura OA , centrado sucessivamente nos pontos C , D e E para obter os pontos D , E e F , respectivamente (figura 100, (4)).

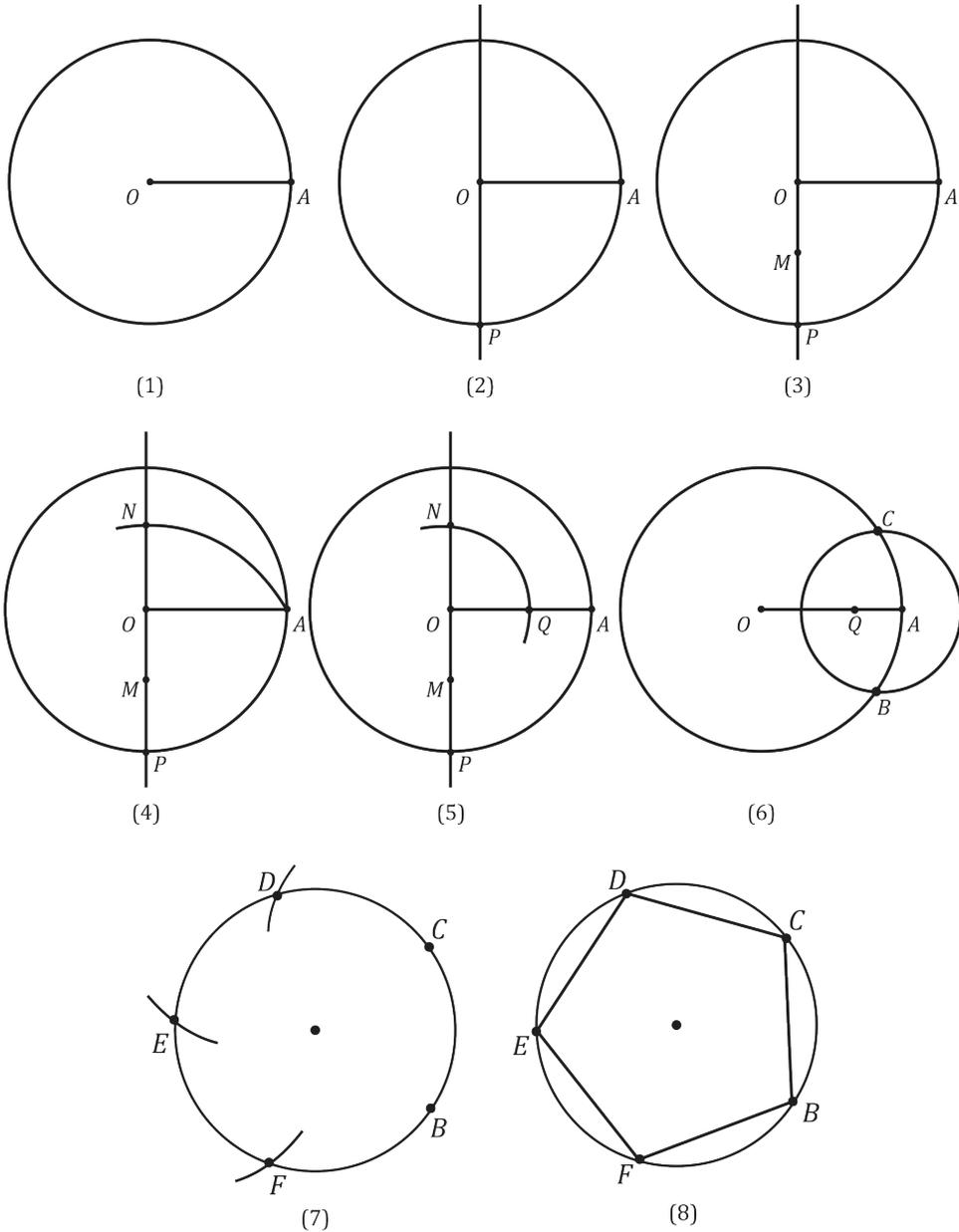
O polígono $ABCDEF$ é um hexágono regular. De fato, por construção, todos os lados desse hexágono são congruentes, pois são todos congruentes ao raio do círculo α . Além disso, o hexágono $ABCDEF$ pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros: $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODE$, $\triangle OEF$ e $\triangle OFA$. Dessa forma, cada ângulo interno do hexágono é a soma de dois ângulos internos de triângulos equiláteros. Logo, todos os ângulos internos do hexágono são congruentes, pois cada um mede 120° . Portanto, o hexágono $ABCDEF$ é regular.

Das construções feitas até aqui, a mais elaborada é a do pentágono regular, descrita a seguir.

Construção do pentágono regular: Trace o círculo α com o compasso centrado em O e abertura OA (figura 101, (1)). Trace a reta perpendicular a OA passando pelo ponto O e intersectando o círculo α no ponto P (figura 101, (2)). Determine o ponto médio M do segmento OP (figura 101, (3)). Com o compasso centrado em M e abertura MA , trace um arco de círculo intersectando PO em N (figura 101, (4)). Com o compasso centrado em O e abertura ON , trace um arco de círculo intersectando OA em Q (figura 101, (5)). Com o compasso centrado em A e abertura OQ , trace um círculo que corta α nos pontos B e C (figura 101, (6)). O segmento BC é um dos

lados do pentágono. Para determinar os outros lados do pentágono, trace arcos, todos com abertura BC , centrados sucessivamente nos pontos C , D e E , para determinar os pontos D , E e F (figura 101, (7)). O polígono $BCDEF$ é um pentágono regular (figura 101, (8)).

Figura 101 – Construção do pentágono regular



Fonte: DEaD | IFCE

Quando estudarmos semelhança de triângulos, na Aula 7, provaremos que $BCDEF$ é, de fato, um pentágono regular. Mostraremos também na Aula 7 que a razão entre as medidas dos segmentos OA e OQ é

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

conhecida como *razão áurea* ou *número de ouro*.

Acabamos de construir com régua e compasso todos os polígonos regulares de até seis lados. O primeiro polígono regular que *não* pode ser construído com régua e compasso é o heptágono regular. Para demonstrar esse fato, precisaríamos usar métodos algébricos que estão fora dos objetivos deste curso. Em vez disso, enunciaremos um resultado geral, demonstrado pelo notável matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um dos mais notáveis matemáticos

de todos os tempos, tendo dado contribuições significativas para a geometria, a teoria dos números, o cálculo numérico, a topografia e a astronomia. Mais informações sobre Gauss podem ser encontradas no link: <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/curiosidades/curiosidadesmatematicas-html/audio-gauss-br.html>



Teorema 5.7 (Gauss, 1796) Um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, $n = 2^k p_1 \cdots p_r$, onde $k \geq 0$ é um número inteiro e cada p_i é um primo de Fermat, ou seja, um número primo da forma $p_i = 2^{2^i} + 1$, com $i \geq 0$.



Um número inteiro p maior do que 1 é chamado **primo**, se não pode ser escrito como produto de números inteiros menores. Caso contrário, o número é chamado **composto**.

A demonstração desse resultado apareceu pela primeira vez no espetacular livro GAUSS, 1966, publicado originalmente em 1801, escrito em latim. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada também em HARTSHORNE, 2000, p. 258.

Os números $p_0 = 3$, $p_1 = 5$, $p_2 = 17$, $p_3 = 257$ e $p_4 = 65537$ são todos primos. Em 1650, o matemático

francês Pierre de Fermat (1601-1665) conjecturou que p_i seria primo para qualquer $i \geq 0$. Quase um século mais tarde, o matemático suíço Leonhard Euler mostrou que $p_5 = 641 \cdot 6700417$ é composto.

Em particular, com o resultado do Teorema 5.7, Gauss foi capaz de demonstrar que o polígono regular de 17 lados pode ser construído com régua e compasso, resolvendo, assim, um problema que os matemáticos gregos não foram capazes de solucionar, e que permaneceu sem solução por cerca de 2000 anos! Quando fez isso, Gauss tinha apenas 19 anos.



Pierre de Fermat era um matemático amador. Sua profissão era o direito: ele era magistrado na cidade francesa de Toulouse. Apesar disso, foi pioneiro na Teoria dos Números, na Geometria Analítica e no Cálculo. Além disso, ele divertia-se, compondo belos poemas em grego e latim.

De acordo com o Teorema 5.7, se um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso, então o polígono regular de $2n$ lados também pode ser construído com régua e compasso. Por exemplo, os polígonos de 8, 10 e 12 lados são construtíveis. Também o polígono de 15 lados é construtível porque 3 e 5 são primos de Fermat. Porém, os polígonos regulares de 7, 11 e 13 lados não podem ser construídos usando-se apenas régua e compasso.

Isso, de modo algum, significa que eles não possam ser construídos, mas, para fazê-lo, é preciso valer-se de outros instrumentos ou métodos, além da régua e do compasso.

Concluimos aqui nosso tópico e nossa Aula 5. Nesta aula, estudamos os polígonos. Vimos a definição de polígono como uma poligonal fechada, definimos polígono convexo e obtivemos algumas propriedades gerais dos polígonos: determinamos a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de n lados e, no caso em que o polígono é regular, calculamos a medida do ângulo interno. No caso particular dos polígonos de quatro lados, os quadriláteros, estudamos os paralelogramos, os trapézios, os losangos, os retângulos e os quadrados.

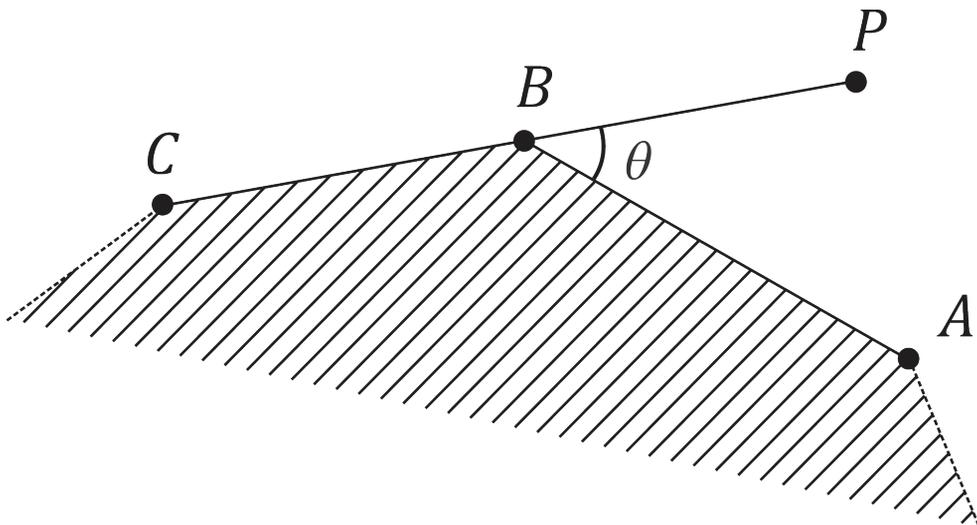
Os polígonos ditos regulares podem ou não serem construídos usando-se régua e compasso. Isso depende apenas do seu número de lados, como é explicado no Teorema 5.7. Exibimos construções explícitas dos polígonos regulares de até seis lados. No caso do pentágono, a justificativa para a validade da construção será vista na Aula 7, quando estudarmos semelhança de triângulos.

Na aula seguinte, estudaremos a importante noção de lugar geométrico e veremos como é possível usá-la para resolver problemas sobre construções geométricas.



1. Mostre que as diagonais de um polígono convexo estão contidas no interior do polígono.
2. Demonstre que um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, suas diagonais são congruentes.
3. Mostre que, em um triângulo ABC , os três lados são congruentes se, e somente se, os três ângulos internos são congruentes.
4. Sejam A, B e C três vértices consecutivos de um polígono convexo (figura 102). Seja P um ponto no prolongamento do lado CB , tal que B está entre C e P , como na figura 102. O ângulo $\angle PBA = \theta$ é chamado ângulo externo do polígono no vértice B .
 - a. Mostre que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a 360° , independentemente do número de lados desse polígono.
 - b. Calcule a medida de um ângulo externo de polígono regular de n lados.

Figura 102 – Um ângulo externo θ de um polígono



Fonte: DEaD | IFCE

Lugares geométricos planos

128

Caro(a) aluno(a),

Chegamos a nossa sexta aula, em que estudaremos a noção de lugar geométrico plano. Veremos a definição de lugar geométrico plano e daremos alguns exemplos de aplicações desse conceito. Iremos também usar a noção de lugar geométrico na resolução de problemas de construção com régua e compasso.

No segundo tópico, estudaremos a noção de reta tangente a um círculo e também alguns ângulos relacionados a um círculo. Estudaremos ainda a importante noção de *arco capaz*, que é outra ferramenta muito útil na resolução de problemas de construção com régua e compasso.

Na Aula 5 vimos o que é o baricentro de um triângulo. Ao longo desta aula, estudaremos os demais pontos notáveis do triângulo: o ortocentro, o circuncentro e o incentro. Provaremos que esses pontos são obtidos pela intersecção de segmentos notáveis no triângulo: alturas, mediatrizes e bissetrizes internas, respectivamente.

Objetivos

- Compreender a noção de lugar geométrico plano e seus exemplos básicos
- Aplicar a noção de lugar geométrico na resolução de problemas sobre construções geométricas e na demonstração de teoremas
- Estudar ângulos em um círculo

Lugares geométricos planos básicos

OBJETIVOS

- Estudar a definição e exemplos básicos de lugar geométrico plano
- Resolver problemas de construção geométrica com régua e compasso usando a noção de lugar geométrico

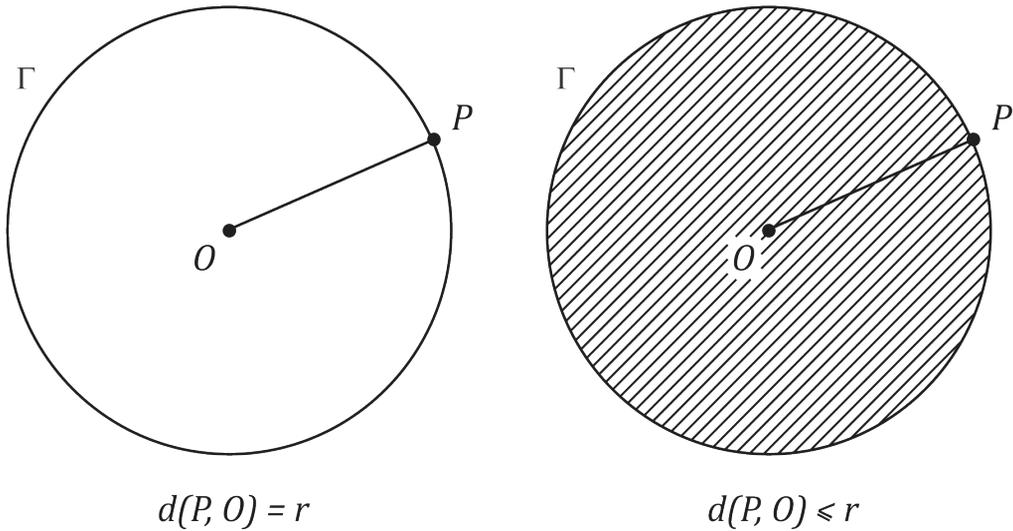
Neste tópico, vamos estudar a noção de lugar geométrico plano. Um lugar geométrico não é uma figura específica, mas uma maneira de se olhar para uma figura, como um conjunto de pontos do plano. Como veremos neste tópico, essa maneira de ver as figuras planas nos traz várias vantagens.

Algumas figuras planas podem ser vistas como conjuntos de pontos do plano que compartilham uma determinada propriedade. Essa propriedade determina se um ponto qualquer do plano pertence ou não à figura. De maneira formal, temos que:

Um **lugar geométrico plano** \mathcal{L} é um conjunto formado por todos os pontos do plano que satisfazem a uma determinada propriedade.

Exibiremos agora alguns exemplos de lugares geométricos.

Figura 103 – Circunferência (à esquerda) e círculo (à direita) de centro O e raio r



Fonte: DEaD | IFCE



A distância entre dois pontos A e B do plano, denotada por $d(A, B)$, é o comprimento do segmento AB , isto é, $d(A, B) = \overline{AB}$.

Exemplo 1 Seja O um ponto do plano e r um número real positivo. Uma **circunferência** Γ de centro O e raio r é o lugar geométrico formado por todos os pontos do plano cuja distância até O é igual a r , isto é,

$$\Gamma = \{P \mid d(P, O) = r\} \text{ (figura 103, acima).}$$

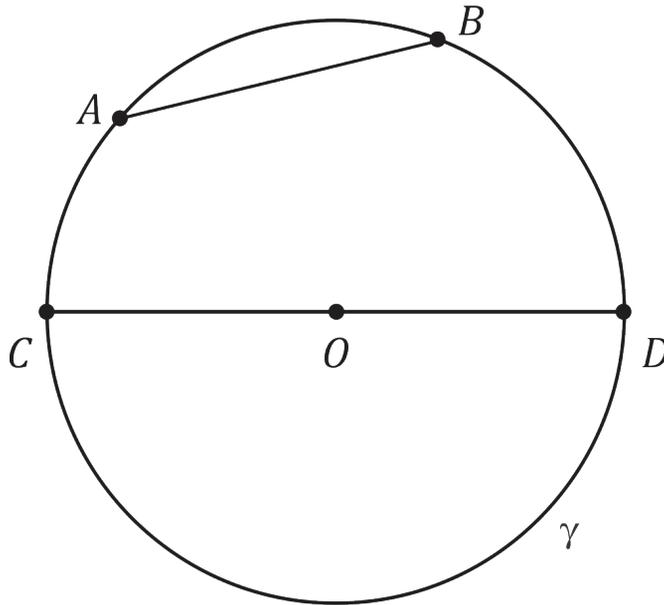
Um **círculo** γ de centro O e raio r é o lugar geométrico formado por todos os pontos do plano cuja distância até O é **menor ou igual** a r (figura 103, à direita). Neste caso, dizemos que γ é o *círculo associado* à circunferência Γ , e que Γ é a *circunferência associada* ao círculo γ , ou simplesmente, à *circunferência do círculo* γ .

Não confunda circunferência e círculo. A circunferência é a curva formada pelos pontos que estão a distância r do centro O . O círculo é a união desta curva com a região do plano delimitada por essa curva.



Neste texto, usaremos *letras gregas maiúsculas* para denotar circunferências, e *letras gregas minúsculas* para denotar círculos.

Figura 104 – Uma corda AB e um diâmetro CD de um círculo γ



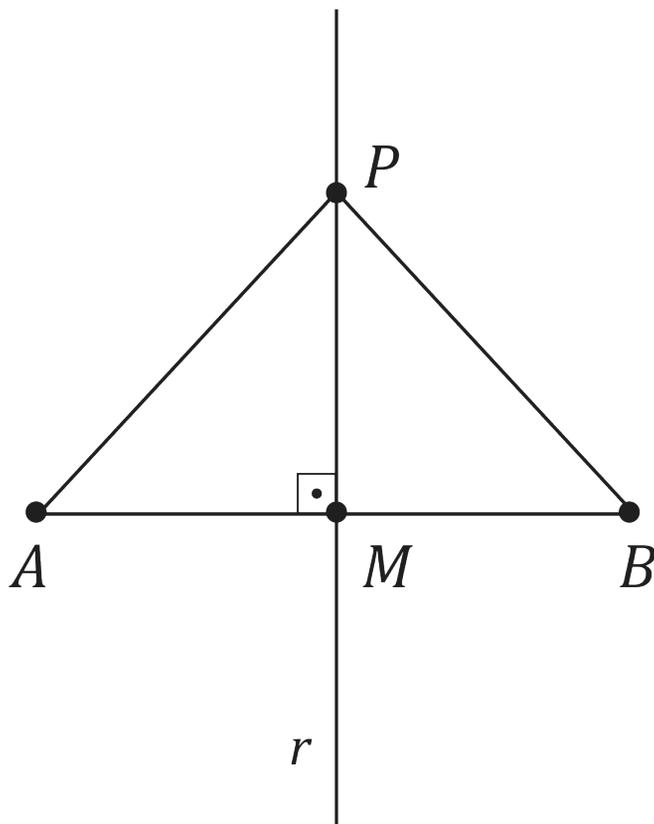
Fonte: DEaD | IFCE

Seja γ um círculo de centro O e raio r . Dizemos que um ponto P é **interior** ao círculo γ , se a distância de P ao centro O for menor do que o raio, isto é, se $d(P, O) < r$. Dizemos que P é um ponto **exterior** ao círculo γ , se a distância de P ao centro do círculo for maior do que o raio, ou seja, se $d(P, O) > r$. Os pontos da circunferência não são interiores nem exteriores.

Se A e B são dois pontos distintos pertencentes à circunferência Γ do círculo γ , o segmento AB é chamado de **corda** do círculo γ (veja a figura 104). Uma corda CD que contém o centro O do círculo é chamada de **diâmetro** do círculo. Um diâmetro qualquer do círculo γ o divide em duas partes, cada uma delas é chamada de **semicírculo**.

Exemplo 2 O lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento AB (figura 105).

Figura 105 – Mediatriz r do segmento AB



Fonte: DEaD | IFCE

Para mostrarmos que o lugar geométrico descrito no exemplo 2 é de fato a mediatriz do segmento AB , precisamos mostrar duas coisas:

1. Todo ponto do lugar geométrico é também um ponto da mediatriz.
2. Todo ponto da mediatriz é também um ponto do lugar geométrico.

Dessa forma, uma vez verificadas as duas condições acima, estará verificado que os dois conjuntos (a mediatriz e o lugar geométrico) coincidem, pois têm os mesmos elementos.

Estamos estudando as figuras planas como **conjuntos de pontos**. Dessa forma, como são conjuntos, duas figuras A e B são iguais, se elas possuem exatamente os mesmos elementos, ou seja, se $A \subset B$ e $B \subset A$.



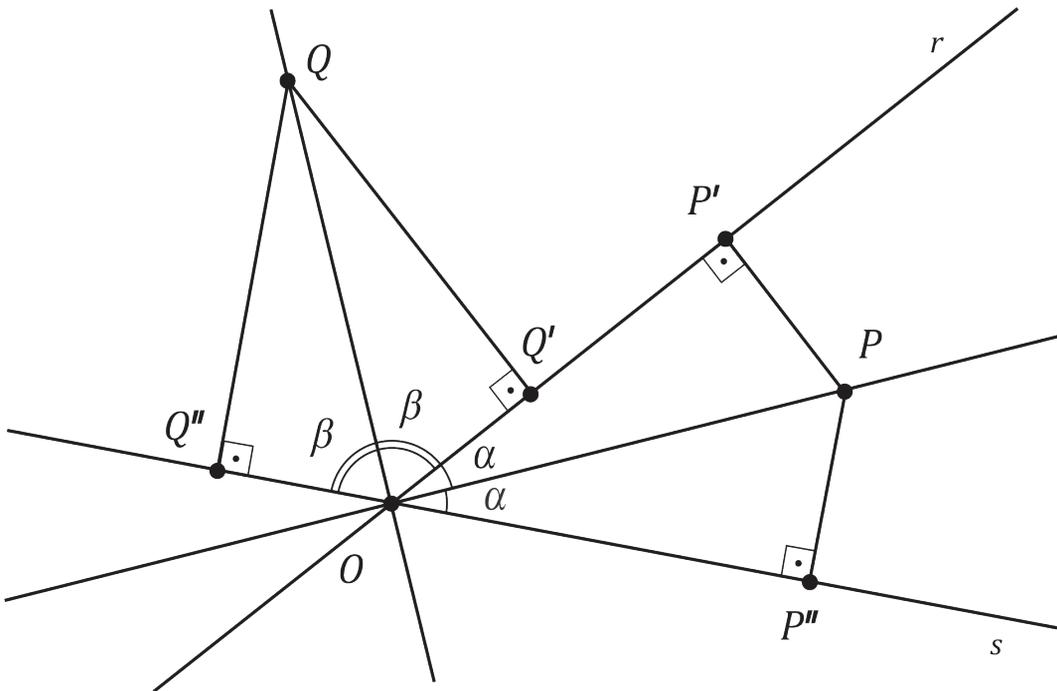
Primeiramente, seja P um ponto pertencente ao lugar geométrico, isto é, P é equidistante aos pontos A e B . Considere M o ponto médio do segmento AB (figura 105). Os triângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LLL, pois

$AM \equiv MB$, $AP \equiv BP$ e o lado PM é comum. Assim, $\angle PMA \equiv \angle PMB$ e, como são suplementares, ambos os ângulos são retos. Dessa forma, o ponto P pertence à reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio de AB , isto é, pertence à mediatriz do segmento AB .

Agora, vamos supor que P é um ponto pertencente à mediatriz do segmento AB . Neste caso, temos $AM \equiv MB$, $\angle AMP \equiv \angle BMP$ e PM comum aos triângulos AMP e BMP (figura 105). Logo, pelo caso LAL, $\Delta AMP \equiv \Delta BMP$. Em particular, $PA \equiv PB$ e, assim, o ponto P pertence ao lugar geométrico dos pontos equidistantes a A e B .

Exemplo 3 O lugar geométrico dos pontos equidistantes a duas retas r e s , concorrentes no ponto O , é a união das bissetrizes dos ângulos formados por essas duas retas.

Figura 106 – As bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas r e s



Fonte: DEaD | IFCE

Seja P (ou Q) um ponto equidistante às retas r e s (figura 106). Sejam P' e P'' (respectivamente, Q' e Q'') as projeções ortogonais de P (respectivamente Q) sobre as retas r e s . Os triângulos retângulos OPP' e OPP'' têm a mesma hipotenusa

A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é um ponto $P' \in r$, tal que a reta PP' é perpendicular a r . Dizemos que P' é o **pé da perpendicular** baixada de P a r (veja a figura 106).



OP e os catetos PP' e PP'' são congruentes. Pelo Teorema de Pitágoras, o cateto remanescente de um dos triângulos também é congruente ao respectivo cateto do outro triângulo. Pelo caso LLL de congruência, $\triangle OPP' \equiv \triangle OPP''$. Em particular, $\angle P'OP \equiv \angle P''OP$. Logo o ponto P pertence à bissetriz do ângulo $P'OQ''$ (figura 106). No caso do ponto Q , também equidistante a r e s , ele pertence à bissetriz do ângulo $Q'OQ''$ (figura 106).

Reciprocamente, se P (ou Q) pertence a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s , temos: $\angle P'OP \equiv \angle P''OP$ e $\angle OPP' \equiv \angle OPP''$, pois são complementares de ângulos congruentes. Como OP é comum aos triângulos OPP' e OPP'' , estes dois triângulos são congruentes, pelo caso ALA. Em particular, $PP' \equiv PP''$ e o ponto P é equidistante às retas r e s . Analogamente, podemos mostrar que o ponto Q , pertencente à bissetriz do ângulo $Q'OQ''$, também é equidistante às retas r e s .

Já vimos na Aula 5, Teorema 5.4, que as medianas relativas aos três lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado *baricentro* do triângulo. Veremos agora que as mediatrizes dos três lados de um triângulo têm a mesma propriedade.

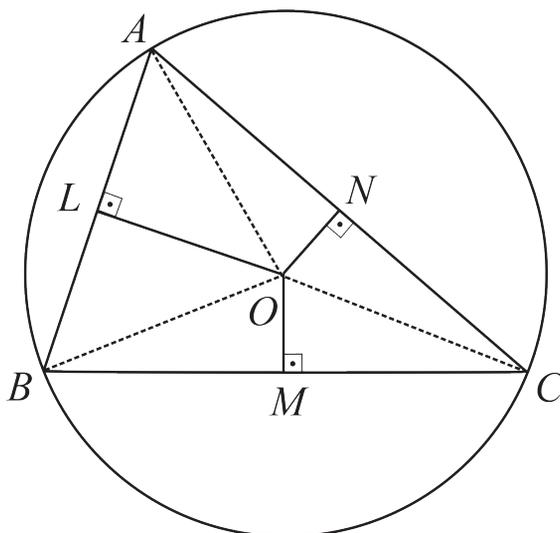
As mediatrizes dos lados de um triângulo são chamadas de *mediatrizes do triângulo*.

Dessa forma, todo triângulo tem três mediatrizes. O próximo resultado estabelece que essas três mediatrizes têm um ponto em comum.

Teorema 6.1 As três mediatrizes de um triângulo se intersectam em um mesmo ponto. Além disso, esse ponto é equidistante dos três vértices do triângulo.

Demonstração: Considere o triângulo ABC e seja O o ponto de encontro das mediatrizes LO e MO dos lados AB e BC do triângulo ABC (figura 107).

Figura 107 – O triângulo ABC e suas mediatrizes



Fonte: DEaD | IFCE

Sendo um elemento da mediatriz LO , o ponto O é equidistante dos pontos A e B . Sendo um elemento da mediatriz MO , o ponto O é equidistante dos pontos B e C . Assim, $OA \equiv OB$ e $OB \equiv OC$, logo $OA \equiv OC$ e o ponto O é equidistante de A e de C e, assim, pertence à mediatriz do lado AC . Portanto, a mediatriz do lado AC também passa pelo ponto O .

Como $OA \equiv OB \equiv OC$, os três vértices do triângulo ABC equidistam do ponto O , que é assim o centro da circunferência de raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ e que passa pelos três vértices do triângulo. ■

O ponto O , interseção das três mediatrizes de um triângulo ABC , é um dos pontos notáveis do triângulo.

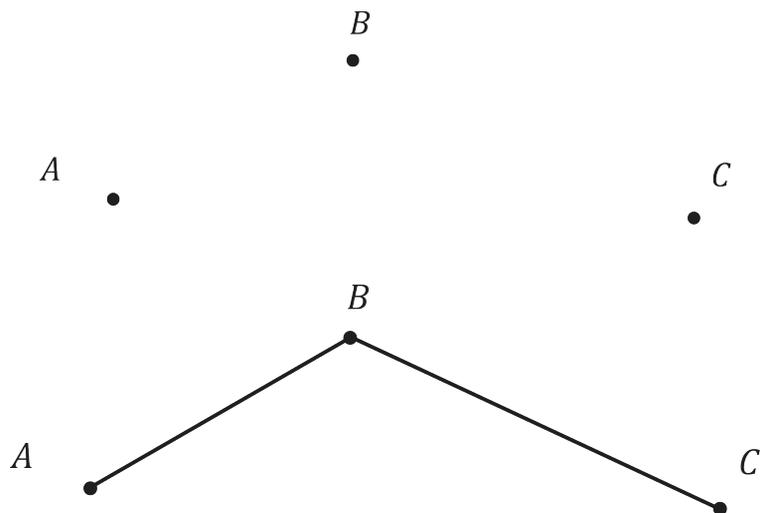
O ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo é chamado **circuncentro**. Ele é exatamente o centro da única circunferência que passa pelos três vértices do triângulo, chamada **circunferência circunscrita** ao triângulo.

Podemos usar os lugares geométricos descritos nos exemplos acima para resolver problemas envolvendo construções geométricas com régua e compasso.

Exemplo 4 Construa uma circunferência passando por três pontos não colineares dados.

Sejam A , B e C esses três pontos. Como não são colineares, eles são vértices de uma triângulo ABC . Vamos considerar dois lados desse triângulo, digamos AB e BC (figura 108).

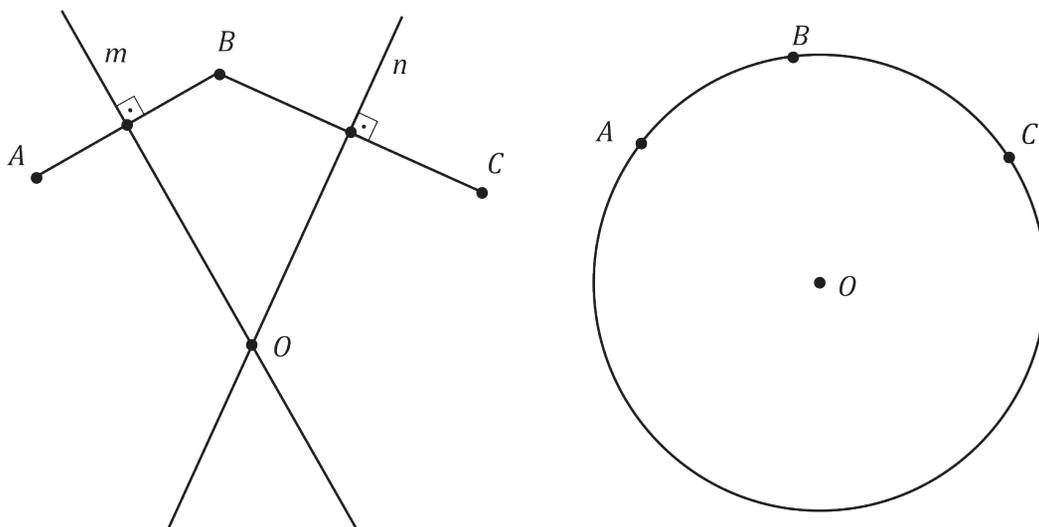
Figura 108 – Três pontos não colineares A, B e C e os segmentos AB e BC



Fonte: DEaD | IFCE

Sejam m e n as mediatrizes dos segmentos AB e BC , respectivamente e seja O o ponto de interseção de m e n (figura 109).

Figura 109 – A interseção O das mediatrizes dos segmentos AB e BC é o centro da circunferência que passa por A, B e C



Fonte: DEaD | IFCE

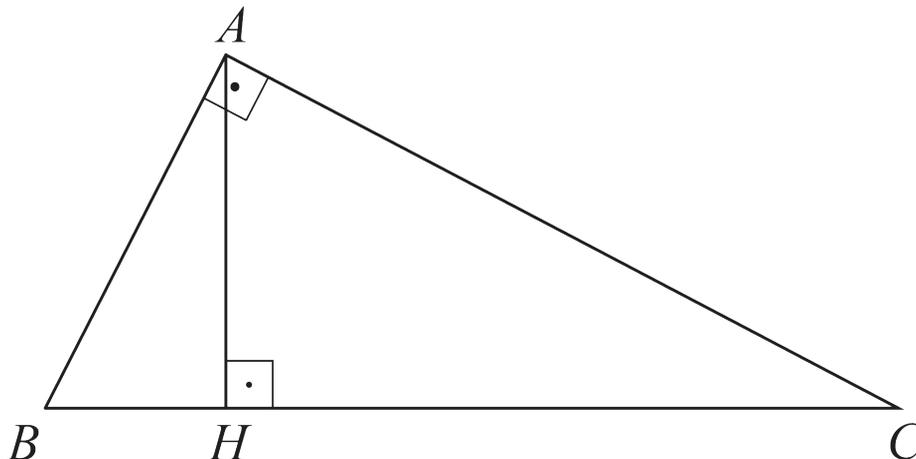
Pelo Teorema 6.1, O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Logo, centrando o compasso em O com abertura igual a um dos segmentos $OA \equiv OB \equiv OC$, podemos traçar uma circunferência que passa pelos três pontos.

A seguir, vamos mostrar que as três alturas de um triângulo, prolongadas se necessário, também se intersectam em um único ponto.

Teorema 6.2 As retas suporte das três alturas de um triângulo ABC encontram-se em um ponto, chamado ortocentro do triângulo.

Demonstração: Suponhamos, primeiro, que o triângulo ABC é retângulo, com $\angle BAC$ reto (figura 110). Neste caso, os catetos AB e AC também são alturas e se intersectam no vértice A , que também faz parte da altura AH relativa à hipotenusa. Portanto, neste caso, as três alturas se encontram no vértice A .

Figura 110 – Em um triângulo retângulo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto

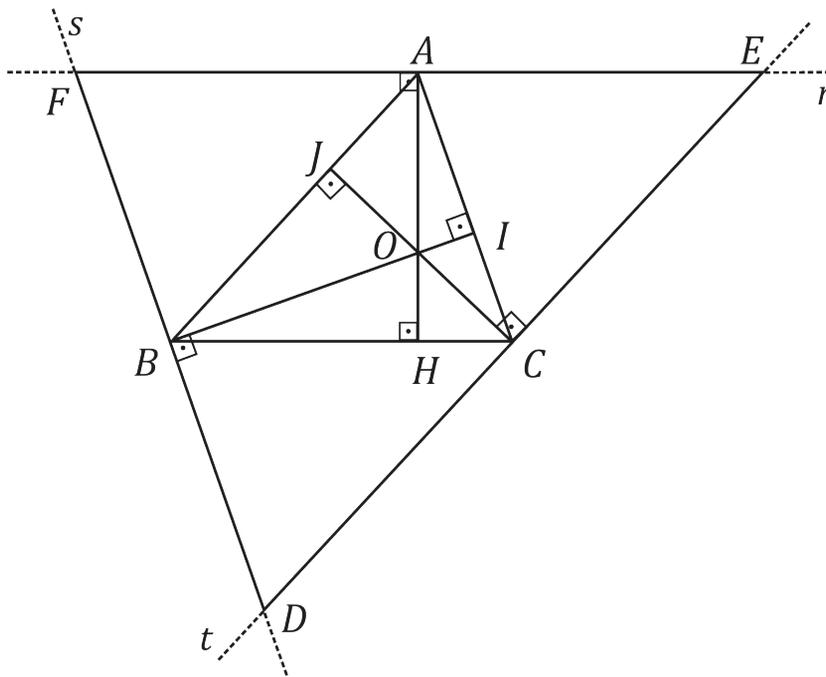


Fonte: DEaD | IFCE

Suponhamos, agora, que o triângulo é acutângulo, isto é, os seus três ângulos internos são agudos.

Trace, pelo vértice A , uma reta r paralela ao lado BC ; pelo vértice B , uma reta s paralela ao lado AC ; e pelo vértice C , uma reta t paralela ao lado AB (figura 111). Essas três retas intersectam-se duas a duas, formando um triângulo DEF .

Figura 111 – O ortocentro do triângulo ABC coincide com o circuncentro do triângulo DEF



Fonte: DEaD | IFCE

Por construção, os lados do triângulo ABC são bases médias do triângulo DEF , logo $ABCE$ e $ABDC$ são paralelogramos. Como os lados opostos de paralelogramos são congruentes, temos $EC \equiv AB \equiv CD$. Isso mostra que C é ponto médio do segmento DE . Da mesma forma, podemos verificar que B é ponto médio de FD , e que A é ponto médio de EF .

Dessa forma, as alturas AH , BI e CJ do triângulo ABC são também mediatrizes dos lados do triângulo DEF . Pelo Teorema 6.1, essas três retas encontram-se em um ponto O que é o ponto de intersecção das três alturas do triângulo ABC .

O caso em que o triângulo é obtusângulo (ou seja, tem um ângulo interno obtuso) pode ser verificado da mesma maneira que o caso acima. ■

Concluimos aqui o primeiro tópico desta aula. Tratamos aqui da noção de lugar geométrico. Vimos que algumas construções importantes feitas em aulas passadas, como a mediatriz de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo, são lugares geométricos. Também vimos como aplicar a noção de lugar geométrico para estudarmos os pontos notáveis de um triângulo.

Tangência e ângulos no círculo

OBJETIVOS

- Estudar retas tangentes a círculos
- Estudar ângulos relacionados a círculos

Vamos ao nosso segundo tópico, em que estudaremos ângulos associados a um círculo: ângulos inscritos e ângulos centrais. Veremos que eles guardam relações estreitas entre si e com os arcos que eles determinam sobre a circunferência. Usaremos os resultados sobre ângulos inscritos para construirmos, com régua e compasso, retas tangentes a círculos passando por pontos dados. Também apresentaremos a noção de arco capaz de um ângulo sobre um segmento, e veremos algumas aplicações desse conceito.

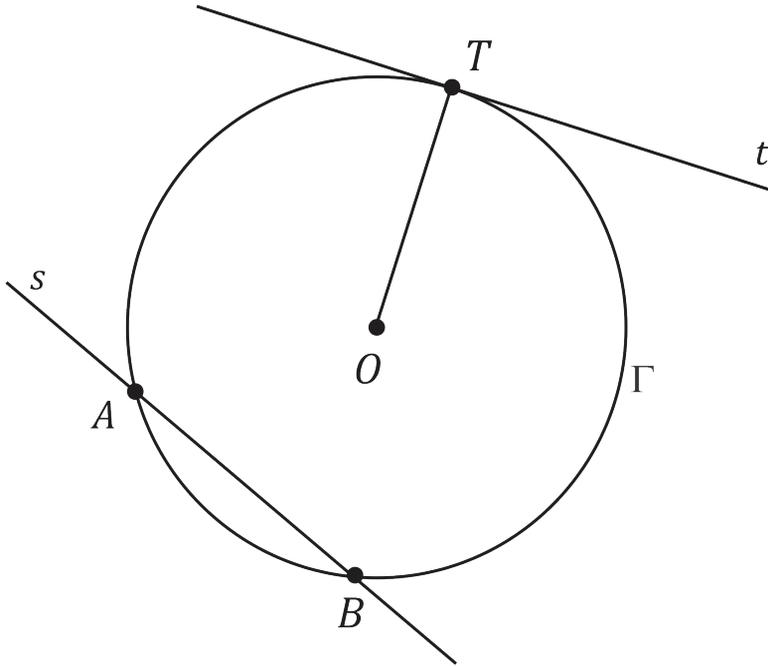
Dizemos que uma circunferência Γ e uma reta t são **tangentes**, ou que t é **tangente** a Γ se t e Γ têm exatamente um ponto T em comum (figura 112). Esse ponto comum T é chamado **ponto de tangência** de t e Γ . Caso uma reta s e uma circunferência Γ tenham dois pontos, A e B , em comum, a reta s é chamada **secante** à circunferência Γ (figura 112).

Também costumamos usar a mesma nomenclatura para círculos, isto é, dizemos que a reta t é *tangente ao círculo* γ no ponto T , se for tangente à circunferência Γ do círculo γ . Dizemos também que a reta s é *secante ao círculo* γ se for secante à circunferência Γ do círculo γ .

Essa definição de reta tangente é válida para circunferências, mas não para curvas em geral. Uma definição geral de reta tangente requer a noção de limite e é estudada no curso de Cálculo.



Figura 112 – A reta t é tangente e a reta s é secante à circunferência



Fonte: DEaD | IFCE

A seguir, exibiremos um critério para decidirmos quando uma reta é tangente a um círculo.

Teorema 6.3 Uma reta t é tangente a um círculo α se, e somente se, a distância de t ao centro O de α for igual ao raio de α . Em particular, a reta tangente ao círculo α no ponto T é perpendicular ao raio OT .

Demonstração: Primeiro, suponhamos que a reta t é tangente ao círculo α no ponto T . Seja T' o ponto sobre a reta t tal que $\overline{OT'} = d(O, t)$. Pela definição de distância entre ponto e reta, $OT' \perp t$ (OT' é perpendicular a t). Assim, devemos mostrar que $T = T'$.

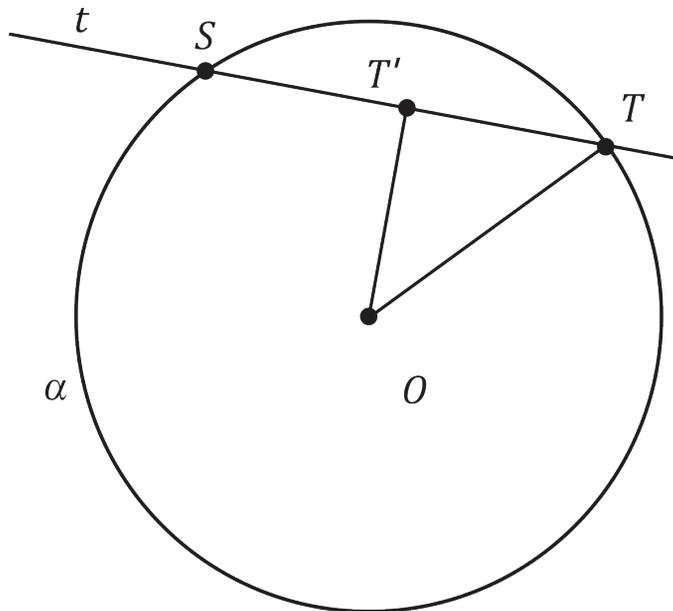
Suponhamos que $T' \neq T$. Então $\overline{OT'} = d(O, t) < \overline{OT}$. Como T pertence à circunferência do círculo α , $\overline{OT} = r$ é o raio do círculo (figura 113). Assim

A distância $d(O, t)$ entre um ponto O e uma reta t é a menor distância entre um ponto P de t e o ponto O . Essa distância é igual a $\overline{OT'}$, onde OT' é o segmento de reta que passa por O e é perpendicular a t .



$\overline{OT'} < r$ implica que T' é um ponto no interior do círculo. Com isso, a reta t “entra” no círculo, logo também deve sair do círculo (veja o exercício 6) e, conseqüentemente, deve intersectar a circunferência do círculo α em dois pontos distintos: T e S (figura 113). Mas isso contradiz o fato de t ser tangente a α . Logo devemos ter $T = T'$, e portanto $d(O, t) = \overline{OT} = r$.

Figura 113 – Se $T' \neq T$ então a reta t não é tangente ao círculo α



Fonte: DEaD | IFCE

Reciprocamente, suponha que $d(O, t) = r$. Seja $T \in t$ tal que $\overline{OT} = d(O, t)$. Para qualquer ponto $P \in t$, diferente de T , temos $\overline{OP} > \overline{OT} = d(O, t) = r$. Logo, todos os pontos de t , exceto T , estão a uma distância maior do que r do centro O do círculo, isto é, são pontos exteriores ao círculo. Isso mostra que o único ponto em comum entre o círculo α e a reta t é o ponto T . Logo, a reta t é tangente ao círculo α no ponto T . ■

A seguir, iremos estudar o ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo. Primeiramente, precisaremos da noção de círculo inscrito em um triângulo.

Dizemos que um círculo α é **inscrito** em um triângulo ABC se os três lados deste triângulo forem tangentes a α (Figura 115).



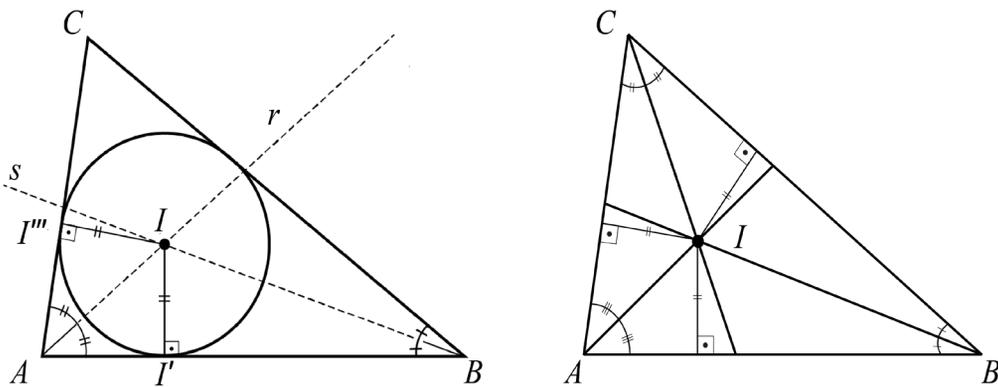
Em um triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos internos são chamadas **bissetrizes internas** do triângulo.

O teorema a seguir mostra que em todo triângulo é possível inscrever um círculo. Para encontrarmos esse círculo, precisamos determinar seu centro e seu raio.

Teorema 6.4 As três bissetrizes internas de um triângulo intersectam-se em um ponto I chamado **incentro** do triângulo. O incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo.

Demonstração: Pelo exemplo 3, um ponto pertencente à bissetriz r relativa ao ângulo $\angle CAB$ é equidistante aos lados CA e AB do triângulo (figura 114, esquerda). Se I é o ponto de interseção de r com a bissetriz s do ângulo $\angle ABC$, então, por pertencer a essa outra bissetriz, I é também equidistante aos lados AB e BC , isto é, $d(I, CA) = d(I, AB)$ e $d(I, AB) = d(I, BC)$. Logo, $d(I, CA) = d(I, BC)$ e, novamente pelo exemplo 3, I pertence à bissetriz do ângulo $\angle BCA$. Portanto, I é a interseção das três bissetrizes internas do triângulo ABC (figura 114, direita).

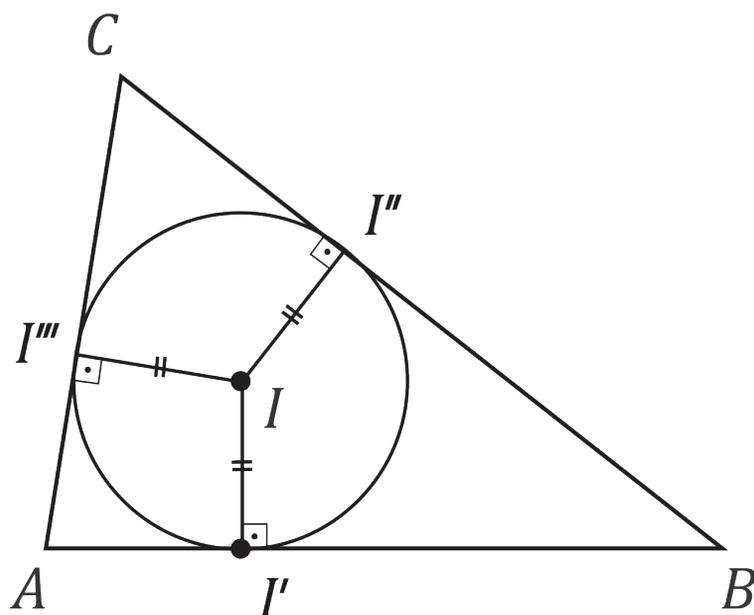
Figura 114 – O incentro de um triângulo é o ponto de intersecção de suas bissetrizes internas



Fonte: DEaD | IFCE

Para traçar o círculo inscrito ao triângulo, centre o compasso no incentro I com abertura igual a $I'I$, onde I' é o pé da perpendicular baixada desde I até um dos lados do triângulo, o lado AB , por exemplo (figura 115).

Figura 115 – O círculo inscrito no triângulo ABC



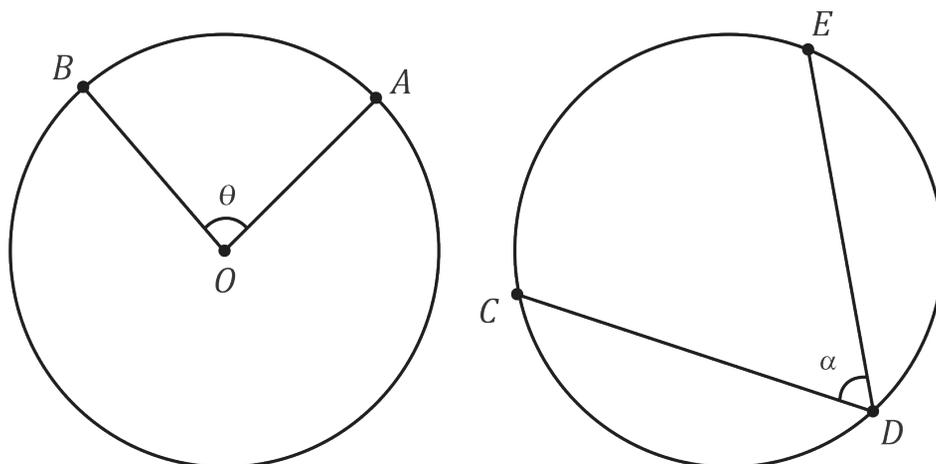
Fonte: DEaD | IFCE

Trace um círculo de centro I e raio $\overline{I'I}$. Este círculo é inscrito no triângulo ABC . De fato, os lados AB , BC e CA do triângulo são respectivamente perpendiculares aos raios $I'I$, $I''I$ e $I'''I$ (figura 115). Logo, a distância de I aos lados do triângulo ABC é igual ao raio $\overline{I'I} = \overline{I''I} = \overline{I'''I}$ do círculo. Pelo Teorema 6.3, os lados do triângulo são tangentes ao círculo de centro I e raio $\overline{I'I}$. ■

Estudaremos a seguir os ângulos centrais e inscritos em um círculo e as relações entre esses objetos.

Seja O o centro de um círculo Γ , e sejam A e B dois pontos sobre Γ (figura 116, esquerda). O ângulo $\theta = \angle AOB$, com vértice no centro do círculo, é chamado **ângulo central** de Γ . Se C, D e E são três pontos sobre um círculo Γ , o ângulo $\alpha = \angle CDE$, que tem o vértice sobre o círculo, é chamado **ângulo inscrito** em Γ (figura 116, direita).

Figura 116 – Ângulo central (esquerda) e ângulo inscrito (direita) em um círculo



Fonte: DEaD | IFCE

Resumindo, um ângulo é dito central se seu vértice é o centro do círculo e é dito inscrito se seu vértice está sobre o círculo.

O próximo passo é definir o que é um arco de circunferência.

Ângulos centrais ou inscritos em um círculo dividem a circunferência desse círculo em duas partes, chamadas **arcos**. Em geral, dois pontos sobre uma circunferência dividem essa circunferência em duas partes, chamadas **arcos de circunferência**.

Por exemplo, na figura 116, à esquerda, os pontos A e B determinam dois arcos do círculo Γ . Ao longo de nossas aulas, sempre que for necessário denotar um arco de círculo, usaremos a seguinte convenção:

Se X e Y são pontos sobre uma circunferência, o arco XY é aquele que liga o ponto X ao ponto Y ao longo da circunferência **no sentido anti-horário**.

Assim, o arco menor na figura 116, à esquerda, é denotado por AB , enquanto o arco maior é denotado por BA . A relação entre arcos de circunferência e ângulos centrais ou inscritos é dada abaixo.

O arco de círculo que está contido em um ângulo θ é chamado **arco determinado pelo ângulo θ** .

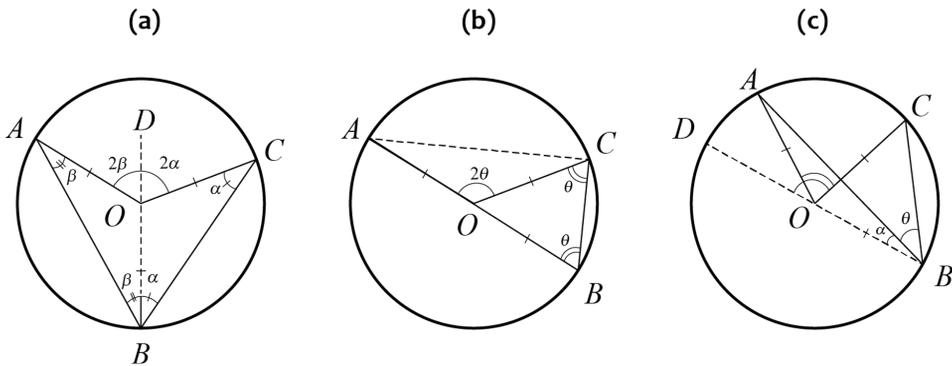
Assim, na figura 116, o ângulo central θ determina o arco AB e o ângulo inscrito α determina o arco EC .

O teorema a seguir estabelece a relação entre ângulos centrais e ângulos inscritos que determinam o mesmo arco em um círculo.

Teorema 6.5 Se um ângulo central $\angle AOC$ e um ângulo inscrito $\angle ABC$ determinam o mesmo arco em uma circunferência Γ , então $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC$ (figura 117). Se dois ângulos inscritos determinam o mesmo arco em uma circunferência Γ , então eles têm a mesma medida.

Demonstração: Há três casos a considerar, ilustrados na figura 117, (a), (b) e (c). No primeiro caso (figura 117 (a)), o centro O do círculo está no interior do ângulo $\angle ABC$. Seja OD o prolongamento do raio BO . Os triângulos ABO e BCO são isósceles, pois dois de seus lados são raios do círculo. O segmento BD divide o ângulo inscrito $\angle ABC$ em dois ângulos α e β , que são ângulos internos dos triângulos isósceles BCO e ABO , respectivamente. O mesmo segmento BD divide o ângulo central correspondente $\angle AOC$ em dois ângulos, $\angle AOD$ e $\angle COD$, que são ângulos externos dos triângulos ABO e BCO , respectivamente. Pelo Teorema 4.14, cada ângulo externo é a soma dos ângulos internos não adjacentes, ou seja, $\angle AOD = 2\beta$ e $\angle COD = 2\alpha$. Assim, $\angle AOC = \angle AOD + \angle COD = 2\beta + 2\alpha = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot \angle ABC$.

Figura 117 – As três possíveis posições relativas de um ângulo central e de um ângulo inscrito que determinam o mesmo arco



Fonte: DEaD | IFCE

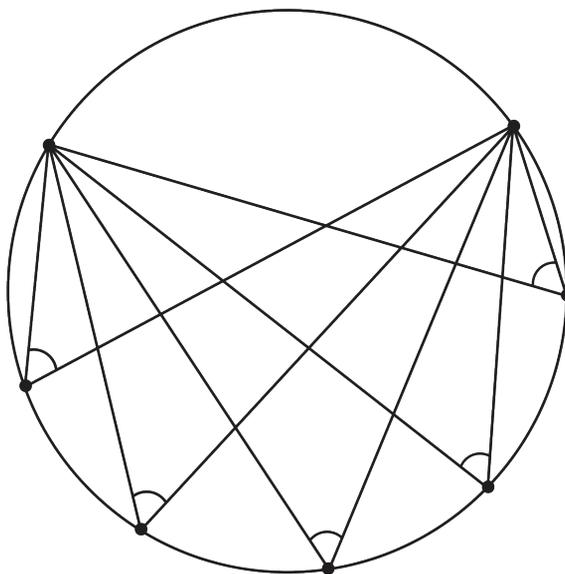
No segundo caso (figura 117, (b)), o centro O do círculo pertence a um dos lados do ângulo, o lado AB , por exemplo. Neste caso, $\angle AOC$ é ângulo externo do triângulo isósceles OBC ($OB \cong OC$ são raios). Logo, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB = \theta + \theta = 2\theta$ e o resultado também vale neste caso.

Finalmente, no terceiro caso (figura 117, (c)), o centro O do círculo está no exterior do ângulo $\angle ABC$. Considere o diâmetro BD . Pelos casos anteriores, temos que $\angle DOC = 2 \cdot \angle DBC$ e $\angle DOA = 2 \cdot \angle DBA$. Assim,

$$\begin{aligned}\angle AOC &= \angle DOC - \angle DOA = 2 \cdot \angle DBC - 2 \cdot \angle DBA = 2 \cdot (\angle DBC - \angle DBA) \\ &= 2 \cdot \angle ABC\end{aligned}$$

e isso mostra que o resultado vale também neste caso.

Figura 118 – Ângulos inscritos que determinam o mesmo arco têm a mesma medida



Fonte: DEaD | IFCE

Para demonstrar a última afirmação do enunciado, note que dois ângulos inscritos determinam o mesmo arco em um círculo, então eles correspondem a um mesmo ângulo central (figura 118), logo a medida de cada um é igual à metade da medida deste ângulo central. Isso mostra que ambos têm a mesma medida. ■

A seguir, iremos aplicar o Teorema 6.5 à construção de retas tangentes a círculos. Primeiramente, iremos obter uma condição necessária e suficiente para que um triângulo inscrito em um círculo seja retângulo.

Dizemos que um triângulo está **inscrito em um semicírculo** se um de seus lados é um diâmetro do círculo.

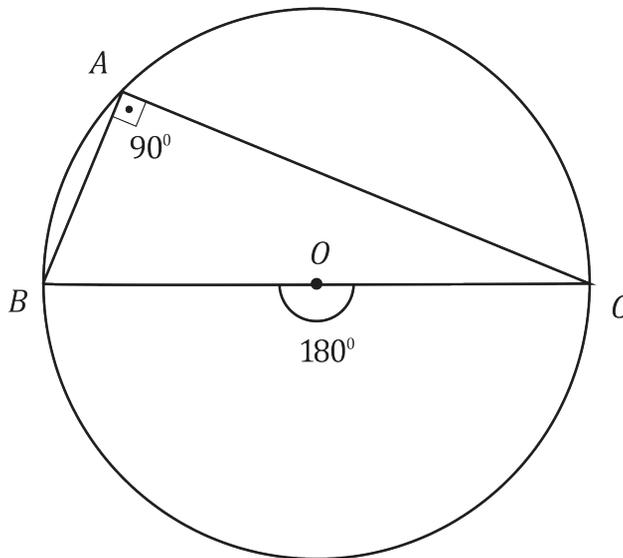
Um caso particular importante do Teorema anterior ocorre quando o ângulo inscrito determina sobre o círculo um arco que corresponde à metade do círculo.

Corolário 6.1 Um triângulo pode ser inscrito em um semicírculo se, e somente se, é retângulo.

Demonstração: Suponha que o triângulo ABC está inscrito em um semicírculo, ou seja, que um de seus lados, digamos BC , é um diâmetro desse círculo (figura 119). Então o ângulo inscrito $\angle BAC$ corresponde ao ângulo central $\angle BOC$, que mede 180° . Pelo

Teorema 6.5, a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, ou seja, $\angle BAC$ é reto e o triângulo ABC é retângulo.

Figura 119 – O ângulo central mede 180° , portanto o ângulo inscrito correspondente mede $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$



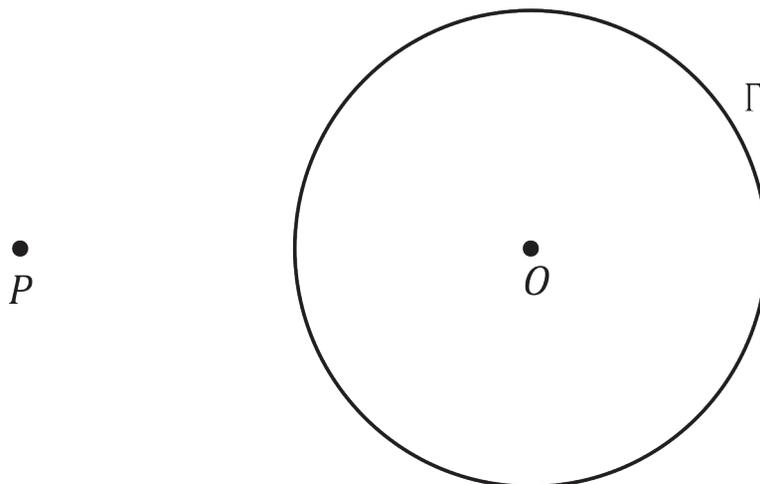
Fonte: DEaD | IFCE

Reciprocamente, seja ABC um triângulo retângulo em A e seja Γ o círculo que passa pelos vértices A, B, C desse triângulo. Como $\angle BAC$ mede 90° , o ângulo central correspondente $\angle BOC$ mede $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$. Isso significa que o centro O do círculo pertence ao lado BC , isto é, BC é um diâmetro do círculo Γ e ABC está inscrito em um semicírculo. ■

O Corolário 6.1 é útil em algumas construções geométricas, como no exemplo a seguir.

Exemplo 5 Seja Γ um círculo de centro O e seja P um ponto exterior a Γ (figura 120). Construa, com régua e compasso, as retas que passam por P e são tangentes a Γ .

Figura 120 – Um círculo Γ de centro O e um ponto P exterior a Γ

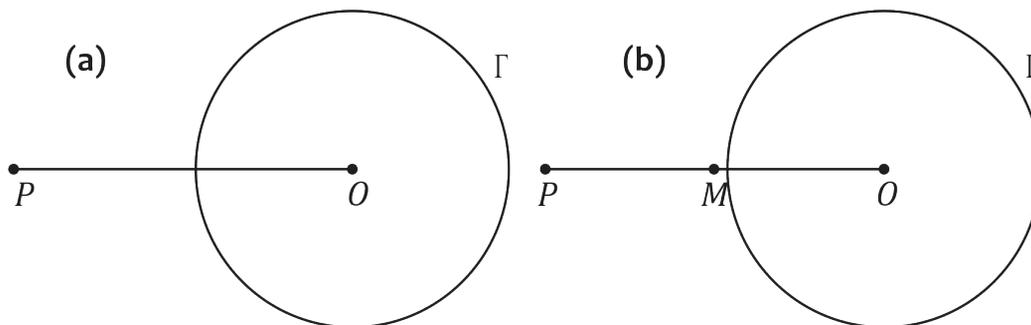


Fonte: DEaD | IFCE

Para construir as retas que passam por P e são tangentes ao círculo Γ , siga os passos abaixo:

1. Trace o segmento de reta PO (figura 121, (a)).
2. Determine o ponto médio do segmento PO (figura 121, (b)).

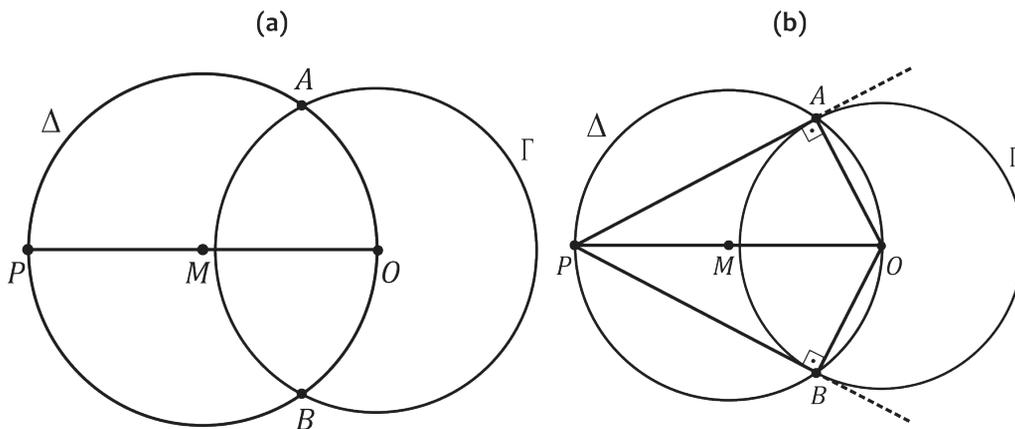
Figura 121 – O ponto M é ponto médio do segmento PO



Fonte: DEaD | IFCE

3. Trace o círculo Δ de centro M e raio MO (figura 122, (a)).
4. Marque os pontos A e B onde o círculo Δ intersecta o círculo Γ . As retas PA e PB são tangentes ao círculo Γ (figura 122, (b)).

Figura 122 – O círculo Δ intersecta o círculo Γ nos pontos de tangência A e B



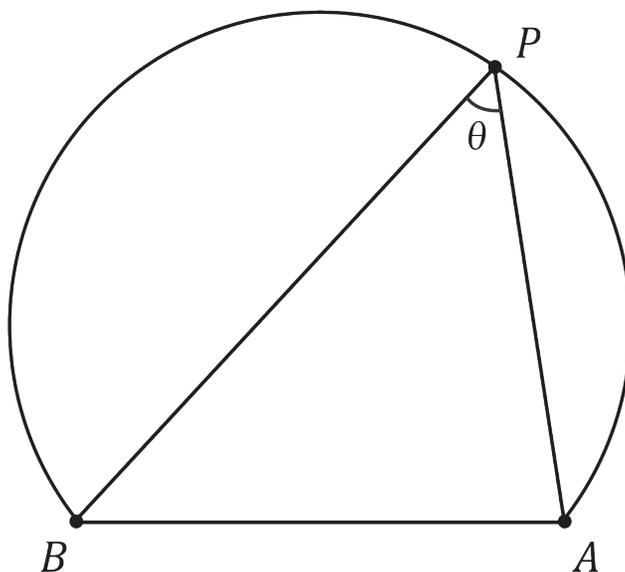
Fonte: DEaD | IFCE

Vamos justificar porque a construção acima funciona. Como PO é diâmetro de Δ , os triângulos APO e BOP estão inscritos em semicírculos, logo são retângulos, pelo Corolário 6.1. Em particular, as retas PA e PB são perpendiculares aos raios OA e OB , respectivamente, logo, pelo Teorema 6.3, são tangentes ao círculo Γ .

A seguir, definiremos a importante noção de *arco capaz*.

Sejam A e B dois pontos sobre um círculo Γ . Todos os ângulos $\angle APB$, com P pertencente ao arco AB , têm a mesma medida (Teorema 6.3). Chamamos o arco AB de **arco capaz** do ângulo θ sobre o segmento AB (figura 123).

Figura 123 – Arco capaz do ângulo θ sobre o segmento AB



Fonte: DEaD | IFCE

Para todo ponto P do arco capaz, o ângulo $\angle APB$ tem medida constante igual a θ . Se um ponto Q pertence ao outro arco do círculo, BA , então $\angle BQA = 180^\circ - \angle APB$.

Pelo Corolário 6.1, o arco capaz de um ângulo de 90° sobre o segmento AB é o semicírculo de diâmetro AB .

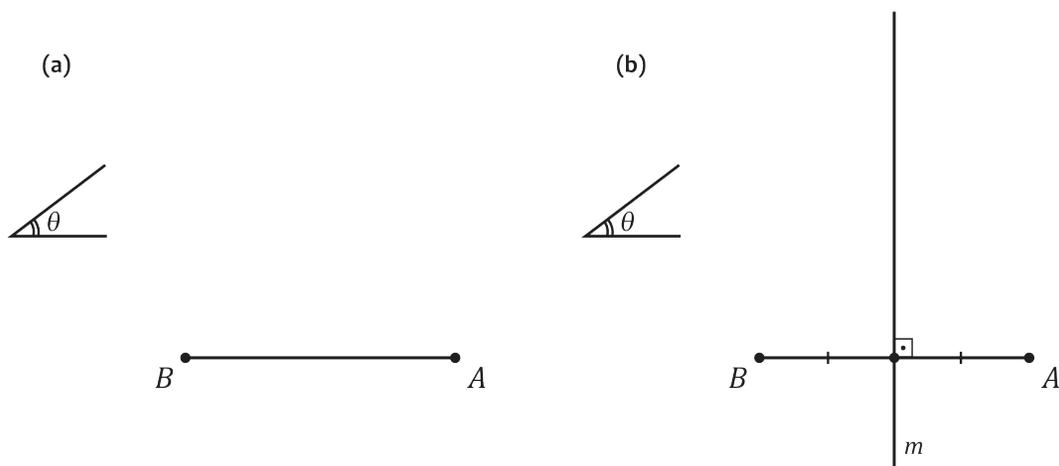
A seguir, vamos construir o arco capaz de um ângulo θ dado sobre um segmento AB dado.

Exemplo 6 Dado um ângulo θ e um segmento AB (figura 124, (a)), construa o arco capaz de θ sobre AB .

A construção do arco capaz pode ser feita, seguindo-se os passos abaixo:

1. Construa a mediatriz m do segmento AB (figura 124, (b)).
2. Determine o ponto C tal que $\angle ABC = \theta$ (figura 125, (a)).

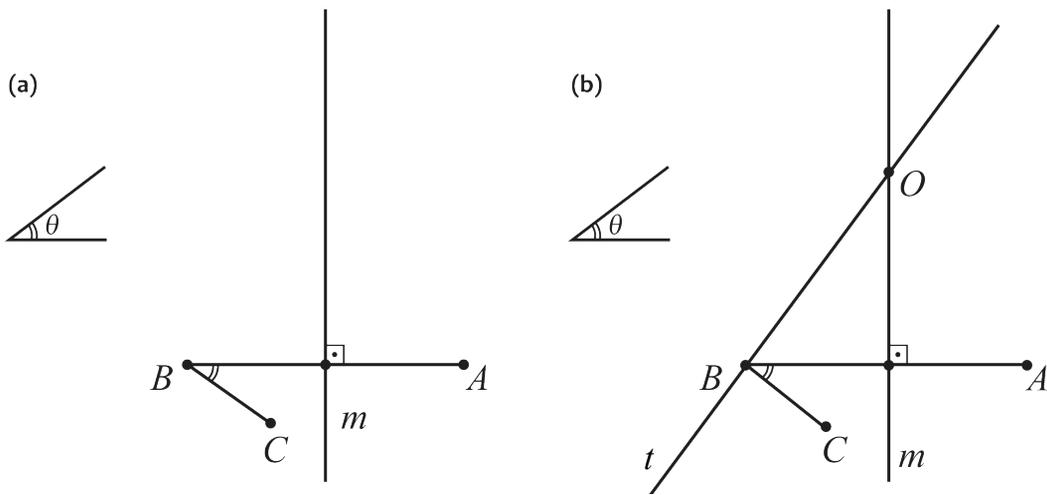
Figura 124 – Um ângulo θ e um segmento AB , com a sua mediatriz m



Fonte: DEaD | IFCE

3. Construa a reta t passando por B e perpendicular a BC (figura 125 (b)).
4. Determine o ponto O de intersecção entre m e t (figura 125, (b)).

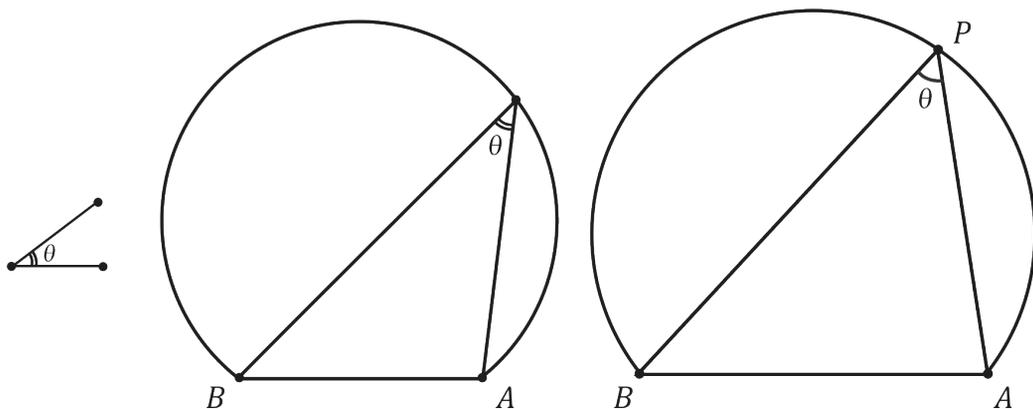
Figura 125 – Transporte do ângulo θ para o ponto B e construção da perpendicular a BC



Fonte: DEaD | IFCE

- Com o compasso centrado em O e abertura OA , trace o arco AB . Este é o arco capaz de θ sobre AB (figura 126).

Figura 126 – O arco capaz de θ sobre AB



Fonte: DEaD | IFCE

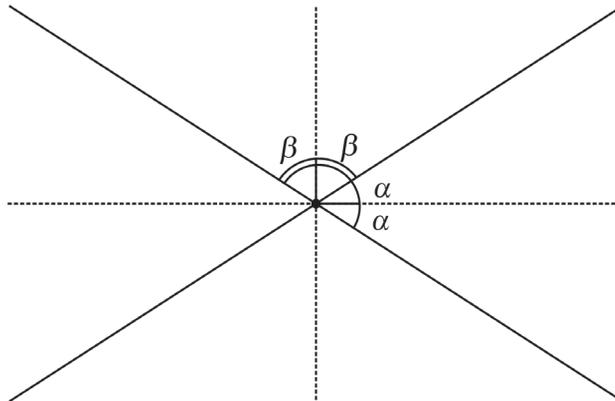
Com a construção do arco capaz, encerramos nosso tópico e nossa aula 6. Esperamos que você tenha gostado de trabalhar com os lugares geométricos e compreendido a sua grande utilidade para resolver problemas envolvendo construções com régua e compasso, e também tenha se divertido com os ângulos centrais e inscritos no círculo e a noção de arco capaz.

Tenho certeza de que você também gostará muito da próxima aula, em que estudaremos uma importantíssima ferramenta: a semelhança de triângulos.



1. Mostre que as bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes são retas perpendiculares entre si.

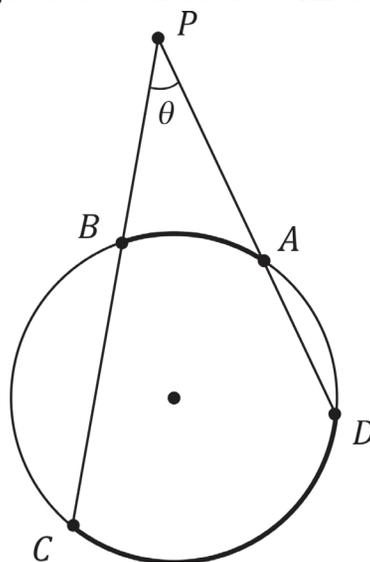
Figura 127 – Bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes



Fonte: DEaD | IFCE

2. Verifique o Teorema 6.2 para o caso em que o triângulo ABC é obtusângulo.
3. A medida de um arco de círculo é a medida do ângulo central que o compreende. Seja $\theta = \angle CPD$ um ângulo cujo vértice P é exterior ao círculo Γ (figura 126). Verifique que $\theta = \frac{CD - AB}{2}$.

Figura 128 – O ângulo θ determina os arcos AB e CD sobre o círculo



Fonte: DEaD | IFCE

4. Justifique a seguinte afirmação, feita no texto: se A e B são pontos em um círculo, P é um ponto no arco AB e Q é um ponto no arco BA , então $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.
5. Considere um segmento de reta AB . Construa um triângulo ABC que tenha um lado congruente a AB , altura relativa ao lado AB igual à metade de AB e tal que $\angle ACB$ meça 60° .
6. Na demonstração do Teorema 6.3, usamos o fato, intuitivamente claro, que uma reta que “entra” em um círculo também deve “sair” desse círculo e, conseqüentemente, de intersectar a circunferência desse círculo em dois pontos. Demonstre esse fato. Sugestão: considere um triângulo onde o círculo está inscrito e use o axioma de Pasch para esse triângulo.

Semelhança de triângulos: conceitos e aplicações

154

Caro(a) aluno(a),

Chegamos à nossa sétima aula, em que estudaremos um assunto muito importante: semelhança de triângulos. A semelhança é uma ferramenta bastante útil para calcular distâncias entre pontos inacessíveis ou o tamanho de objetos muito grandes. Por exemplo, há uma antiga história que conta como o pensador grego Tales de Mileto calculou a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito, usando apenas um bastão e a luz do sol. O matemático e astrônomo grego Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.) mostrou, usando semelhança de triângulos, que o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, e que o Sol é maior do que a Terra, o que o levou a considerar a possibilidade de o nosso planeta, por ser menor do que o Sol, girar em torno deste, sendo o primeiro astrônomo a defender o sistema heliocêntrico.

A semelhança de triângulos é a base do que hoje chamamos de trigonometria. Não desenvolveremos aqui as ideias desta parte da geometria, mas definiremos o que é o seno e o cosseno de um ângulo agudo e calcularemos essas razões trigonométricas para alguns ângulos notáveis. Também estabeleceremos a conexão entre a trigonometria e o Teorema de Ptolomeu, com o qual deduziremos a fórmula para o seno da soma de dois ângulos.

Objetivos

- Estudar o Teorema de Tales, no caso comensurável e no caso incomensurável
- Estudar a noção de semelhança entre triângulos e suas aplicações
- Calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos notáveis

Semelhança de triângulos

OBJETIVOS

- Estudar o Teorema de Tales
- Reconhecer os vários casos de semelhança de triângulos

Neste tópico, vamos estudar certas relações entre medidas de segmentos. Vamos iniciar relembrando o que são segmentos de reta *comensuráveis*, assunto que estudamos no final da Aula 2. Faremos isso porque a demonstração do Teorema 7.1 exige que lidemos com segmentos não necessariamente comensuráveis.

Dois segmentos de reta AB e UV são ditos comensuráveis, se existe um segmento XY que, quando escolhido como unidade de medida, faz com que AB e UV tenham medidas inteiras. Mais precisamente, é possível colocar lado a lado um número inteiro m de cópias de XY , obtendo-se AB , e um número inteiro n de cópias de XY , obtendo-se UV (figura 12, Aula 2).

Neste caso, como já verificamos na Aula 2, a razão entre as medidas dos segmentos AB e UV é um número racional:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{UV}} = \frac{m}{n}$$

Também na Aula 2, vimos que podem existir segmentos de reta *não comensuráveis*, ou *incomensuráveis*, que são aqueles que não admitem medidas inteiras para uma mesma unidade XY . Neste caso, a razão entre suas medidas não é um número racional. Por exemplo, a diagonal de um quadrado e o seu lado são segmentos incomensuráveis (figura 13, Aula 2).

Tales de Mileto (623-546 a.C.) foi um filósofo, matemático, astrônomo grego. É considerado o primeiro filósofo ocidental e um dos sete sábios da Grécia Antiga. Segundo o historiador grego Heródoto, Tales previu um eclipse em 585 a.C. Além do teorema que leva seu nome, Tales também descobriu o caso ALA de congruência e que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, resultados que apareceriam mais tarde nos *Elementos* de Euclides. Há uma história, não comprovada, de que Tales teria determinado a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito, usando apenas uma estaca fincada no chão.

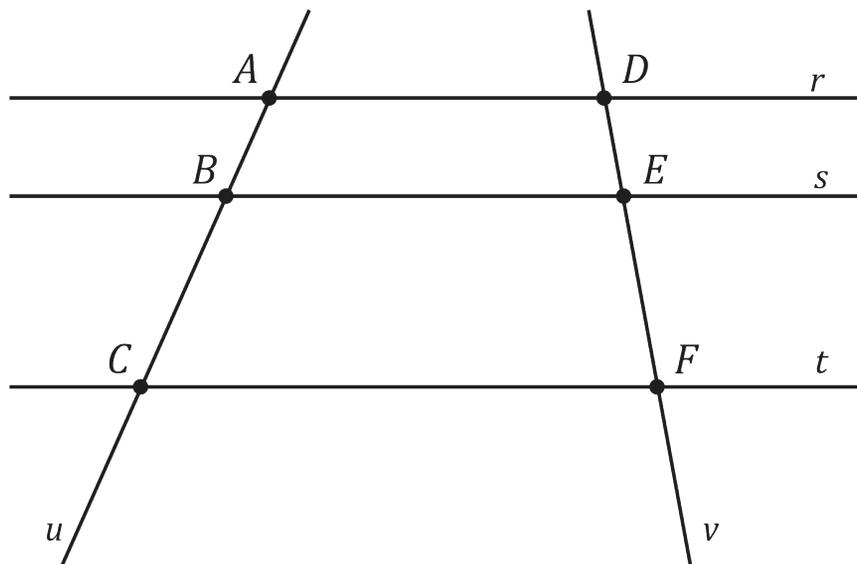


A base do nosso estudo sobre semelhança de triângulos é um importante resultado, desenvolvido pelo pensador grego Tales de Mileto. Este resultado, que leva o nome do famoso sábio, será enunciado a seguir.

Teorema 7.1 (Teorema de Tales) Sejam r, s e t três retas paralelas, e sejam u e v duas transversais que determinam sobre as retas r, s e t os pontos A, B, C e D, E, F , respectivamente (figura 129). Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Figura 129 – Três retas paralelas r, s e t , cortadas por duas transversais u e v



Fonte: DEaD | IFCE

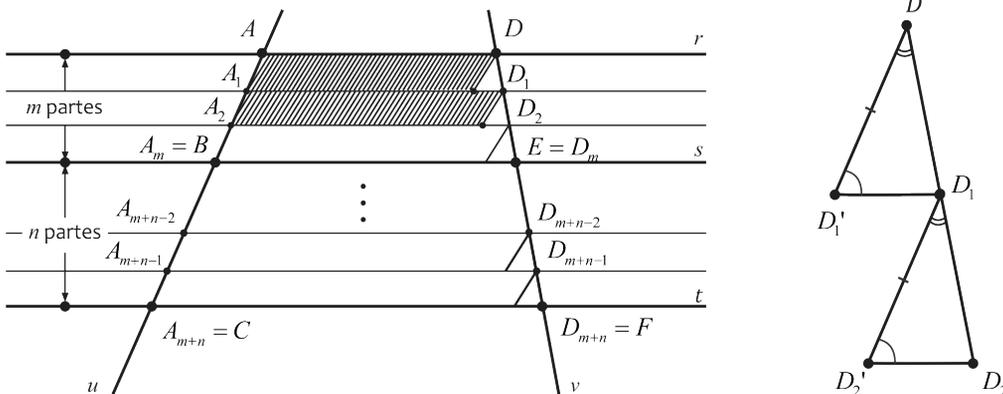
A demonstração do Teorema de Tales pode ser dividida em dois casos: o caso em que os segmentos AB e BC são comensuráveis e o caso em que esses segmentos não são comensuráveis.

Demonstração do Teorema 7.1 (caso em que os segmentos são comensuráveis): Vamos supor, primeiro, que AB e BC são comensuráveis. Isso significa que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$$

onde m e n são números inteiros positivos. Podemos, então, dividir AB em m segmentos e BC em n segmentos, todos congruentes a um segmento XY . Por cada um dos pontos A_1, A_2, \dots, A_{m+n} , que realizam essa divisão, traçamos retas paralelas a r , s e t . Essas retas encontram a reta v em pontos D_1, D_2, \dots, D_{m+n} , que dividem os segmentos DE e EF , como na figura 130.

Figura 130 – Divisão dos segmentos AB, BC, DE e EF em partes iguais



Fonte: DEaD | IFCE

Por cada um dos pontos D_1, D_2, \dots, D_{m+n} , situados sobre a reta v , tracemos retas paralelas a u . Essas retas determinam paralelogramos $AA_1D_1'D$, $A_1A_2D_2'D_1$, $\dots, A_{m-1}A_mD_{m+n}D_{m+n-1}$ (os dois primeiros desses paralelogramos estão tracejados na figura 130). Os triângulos $DD_1'D_1$, $D_1D_2'D_2$, $\dots, D_{m+n-1}D_{m+n}'D_{m+n}$ são todos congruentes. Vamos demonstrar isso para os dois primeiros triângulos, $DD_1'D_1$ e $D_1D_2'D_2$, que aparecem em destaque na figura 130, à direita. Notemos que $\angle D_1'DD_1 \equiv \angle D_2'D_1D_2$, pois esses ângulos são correspondentes, determinados pelas retas paralelas $D_1'D$ e $D_2'D_1$ e pela transversal DD_2 . Essa mesma transversal determina juntamente com as retas paralelas $D_1'D_1$ e $D_2'D_2$ os ângulos correspondentes $\angle D_1'D_1D_1' \equiv \angle D_2'D_2D_2'$. Assim, os ângulos $DD_1'D_1$ e $D_1D_2'D_2$ também são congruentes. Como $DD_1' \equiv XY \equiv D_1D_2'$, os triângulos $DD_1'D_1$ e $D_1D_2'D_2$ são congruentes, pelo caso

ALA de congruência de triângulos. De modo análogo, podemos concluir que os demais triângulos também são congruentes.

Portanto, os pontos D_1, D_2, \dots, D_{m+n} , dividem os segmentos DE e EF em m e n segmentos congruentes a DD_1 , respectivamente. Sendo assim, temos $\overline{DE} = m \cdot \overline{DD_1}$ e $\overline{EF} = n \cdot \overline{DD_1}$. Logo,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Isso demonstra o resultado para o caso em que os segmentos AB e BC são comensuráveis.



Saiba mais...
Eudoxo de Cnido foi um matemático, astrônomo e filósofo grego, que viveu de 408 a 355 a.C., tendo sido contemporâneo de Platão e Aristóteles na academia de Atenas. Sua teoria das proporções ocupa o livro V dos Elementos de Euclides.

Antes de demonstrar o teorema para o caso em que os segmentos AB e BC são incomensuráveis, vamos exibir o *Princípio de Eudoxo* e explicar como funciona o *Método da Exaustão*, pois essa será a ferramenta que usaremos na segunda parte da demonstração. O Princípio de Eudoxo afirma que existem números naturais arbitrariamente grandes, ou seja

(Princípio de Eudoxo) Para qualquer número real x , existe um número natural n , tal que $x < n$.

Uma afirmação equivalente ao Princípio de Eudoxo é a seguinte:

(Princípio de Arquimedes) Dados dois números reais positivos A e B , existe um número natural n , tal que $n \cdot A > B$.

O Princípio de Eudoxo segue do Princípio de Arquimedes, fazendo-se $A = 1$ e $B = x$. Reciprocamente, supondo que vale o Princípio de Eudoxo, vamos mostrar que vale o Princípio de Arquimedes. Como A e B são números reais e positivos, $\frac{B}{A}$ é um número real positivo, logo, pelo Princípio de Eudoxo, existe um número natural n , tal que $\frac{B}{A} < n$ e isso implica que $n \cdot A > B$.

Do princípio de Eudoxo, segue o resultado abaixo:

Proposição 7.1 (Densidade dos racionais nos reais)

Dados dois números reais $a < b$, existe um número racional r , tal que $a < r < b$.

Demonstração: De fato, como $a < b$, a fração $\frac{1}{b-a}$ é um número real positivo. Pelo Princípio de Eudoxo, existe um número natural m tal que $\frac{1}{b-a} < m$, ou seja, $\frac{1}{m} < b-a$. Agora, usando o Princípio de Arquimedes, com $A = \frac{1}{m}$ e $B = a$, vemos que existe um número natural n , tal que $n \cdot \frac{1}{m} > a$, ou seja, existe um número racional $\frac{n}{m} > a$. Escolha o menor número natural n com essa propriedade, ou seja, $n \cdot \frac{1}{m} > a$, mas $(n-1) \cdot \frac{1}{m} \leq a$. Como $\frac{1}{m} < b-a$, temos que $\frac{n}{m} = (n-1) \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b$. Com isso, demonstramos que o número racional $r = \frac{n}{m}$ satisfaz $a < r < b$. ■

Arquimedes de Siracusa, matemático, físico, engenheiro, astrônomo e inventor grego, nasceu em 287 a.C. e é considerado um dos grandes sábios da antiguidade. Ficou famoso por usar suas engenhosas invenções para deter o cerco romano a Siracusa. Mas o general romano Marcelo acabou invadindo a cidade, e Arquimedes foi morto por um soldado romano, em 212 a.C., aos 75 anos. Para mais informações, veja <https://www.youtube.com/watch?v=A1JlqwxxoGY>.



O resultado a seguir é a ferramenta que usaremos para lidar com o caso incomensurável na demonstração do Teorema de Tales.

Lema 7.1 (Teorema da Comparação) Sejam x e y dois números reais. Suponha que

- (1) Todo número racional menor do que x também é menor do que y .
- (2) Todo número racional menor do que y também é menor do que x .

Então $x = y$.

Demonstração do Lema: Mostraremos que não podemos ter $x < y$ e nem $x > y$. Se x fosse menor do que y , pela densidade dos racionais nos reais, existiria um número racional r , tal que $x < r < y$. Logo o número racional r seria menor do que y , mas não seria menor do que x , entrando em contradição com a hipótese (2). Da mesma forma, se y fosse menor do que x , a densidade dos racionais nos reais garantiria a existência de um número racional s , tal que $y < s < x$, logo, s seria menor do que x , mas não seria menor do que y , entrando em contradição com a hipótese (1). ■

O Método da Exaustão consiste em usar o Lema 7.1 para mostrar que duas grandezas são iguais. Faremos isso para demonstrar o Teorema de Tales no caso em que os segmentos AB e BC são incomensuráveis.

Demonstração do Teorema 7.1 (caso em que os segmentos são incomensuráveis): Suponhamos que AB e BC (figura 129) sejam segmentos de reta incomensuráveis,

ou seja, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ não é um número racional. Seja $r = \frac{m}{n}$ um número racional menor

do que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Suponha que o segmento AB foi dividido em m segmentos congruentes

a XY , de modo que $\overline{AB} = m \cdot \overline{XY}$. Sobre o segmento BC , considere pontos

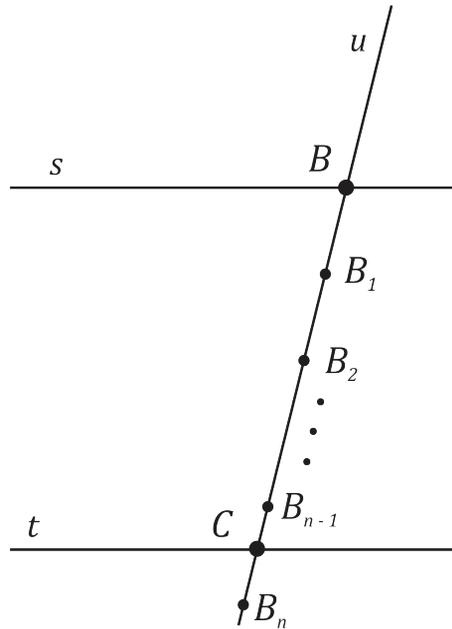
$B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ sobre a reta u , tais que $BB_1 \equiv B_1B_2 \equiv \dots \equiv B_{k-1}B_k \equiv XY$. Então

$\overline{BB_k} = k \cdot \overline{XY}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{BB_k}} = \frac{m \cdot \overline{XY}}{k \cdot \overline{XY}} = \frac{m}{k}$. Fazendo $k = n$, obtemos um ponto B_n sobre a

reta u tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BB_n}} = \frac{m}{n}$. Como $\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BB_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, logo $\overline{BB_n} > \overline{BC}$.

Isso significa que $B * C * B_n$ (figura 131).

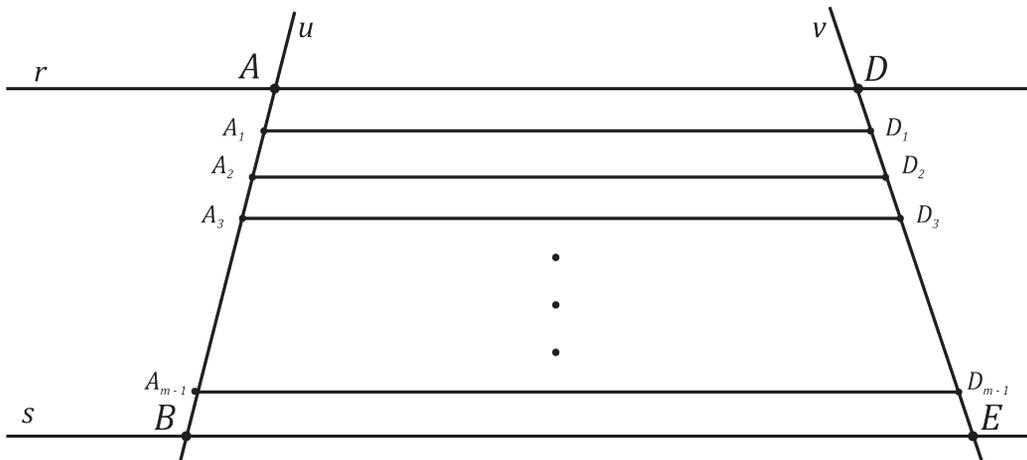
Figura 131 – Os segmentos $BB_1 \equiv B_1B_2 \equiv \dots \equiv B_{n-1}B_n$, com o ponto B_n após C



Fonte: DEaD | IFCE

Pelos pontos A_1, A_2, \dots, A_{m-1} , que dividem o segmento AB em m segmentos $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \dots \equiv A_{m-1}B \equiv XY$, tracemos retas paralelas a r (figura 132). Essas retas encontram a reta v nos pontos D_1, D_2, \dots, D_{m-1} . De acordo com o caso comensurável do Teorema de Tales, que já demonstramos, esses pontos dividem o segmento DE em m partes congruentes a DD_1 . Logo, $\overline{DE} = m \cdot \overline{DD_1}$.

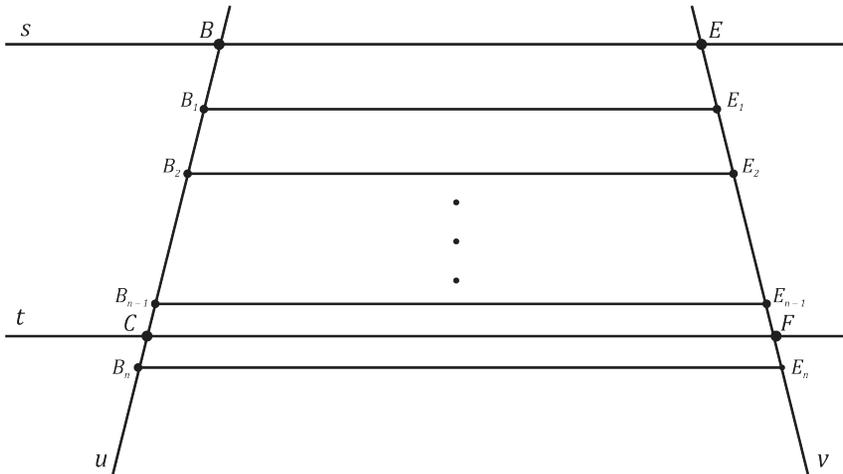
Figura 132 – Retas paralelas a r passando pelos pontos A_1, \dots, A_{m-1} determinam sobre a reta v os pontos D_1, \dots, D_{m-1}



Fonte: DEaD | IFCE

Pelos pontos B_1, \dots, B_n tracemos retas paralelas a s (e a t) que encontram a reta v nos pontos E_1, \dots, E_n (figura 133). Pelo caso comensurável do Teorema de Tales, os segmentos $EE_1, E_1E_2, \dots, E_{n-1}E_n$ são todos congruentes a DD_1 , logo $\overline{EE_n} = n \cdot \overline{DD_1}$.

Figura 133 – Retas paralelas a s passando pelos pontos B_1, \dots, B_{n-1} determinam sobre a reta v os pontos E_1, \dots, E_{n-1}



Fonte: DEaD | IFCE

Como a reta B_nE_n é paralela à reta t , o ponto F deve estar entre E e E_n , do contrário, E_{n-1} e E_n estariam em um mesmo semiplano, dos determinados pela reta t e, como B_n e E_n estão em semiplanos opostos, isso obrigaria a reta B_nE_n a ter um ponto em comum com a reta t . Portanto, $\overline{EF} < \overline{EE_n}$ e, daí,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} > \frac{\overline{DE}}{\overline{EE_n}} = \frac{m \cdot \overline{DD_1}}{n \cdot \overline{DD_1}} = \frac{m}{n}$$

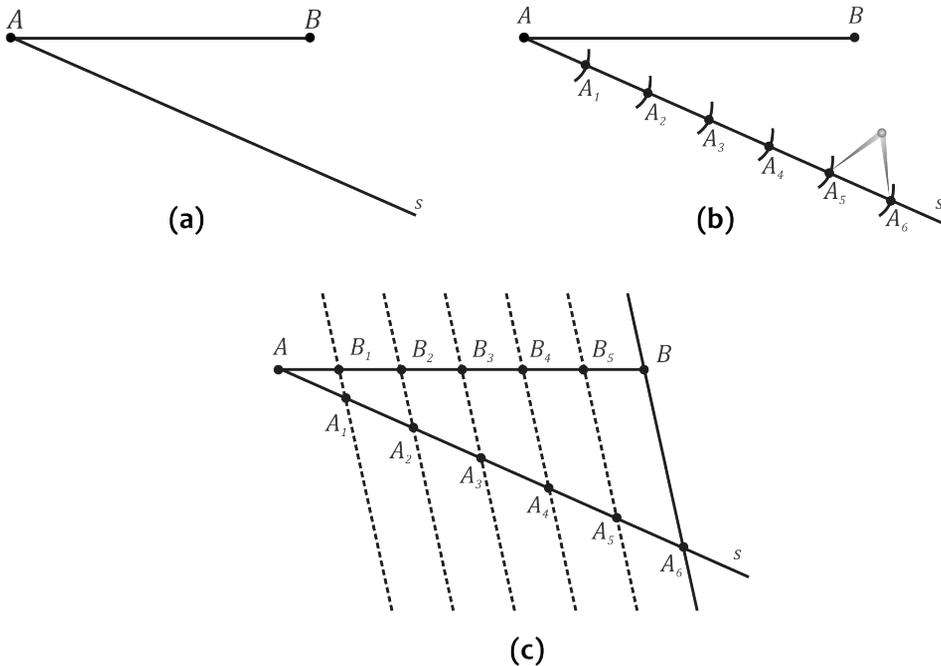
Acabamos de mostrar que, se $r = \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, então $r = \frac{m}{n} < \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$. De modo totalmente análogo, podemos mostrar que todo número racional menor do que $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ também é menor do que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Pelo Lema 7.1, temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ como queríamos demonstrar. ■

Como primeira aplicação do Teorema de Tales, vamos explicar como é possível realizar, usando régua e compasso, a divisão de um segmento dado em um número finito qualquer de segmentos congruentes.

Problema 1 Usando régua e compasso, dividir um segmento dado em um número finito n de segmentos, todos congruentes.

Solução: Seja AB um segmento de reta dado e $n \in \mathbb{N}$ o número de partes em que queremos dividir este segmento. Trace uma semirreta s por um dos extremos do segmento, o ponto A digamos (figura 134, (a)). Usando o compasso, com abertura arbitrária e fixada, marque n pontos A_1, A_2, \dots, A_n sobre a semirreta s . Na figura 134, (b), $n = 6$.

Figura 134 – Três etapas da solução do problema 1



Fonte: DEaD | IFCE

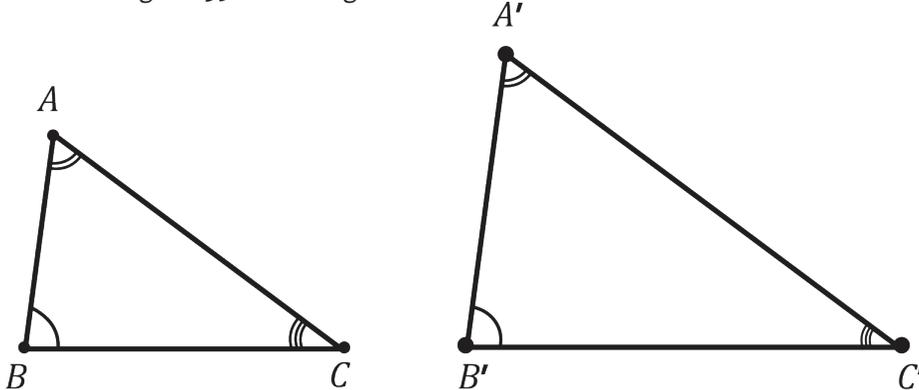
Considere a reta A_nB . Trace as retas que passam por A_1, A_2, \dots, A_{n-1} e são paralelas a A_nB . Essas retas intersectam o segmento AB nos pontos B_1, B_2, \dots, B_{n-1} , respectivamente (veja a figura 134 (c), onde $n = 6$).

Pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_3}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1}B_n}}{\overline{A_{n-1}A_n}}$. Como, por construção, $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n}$, temos que $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \dots = \overline{B_{n-1}B_n}$, ou seja, os pontos B_1, B_2, \dots, B_n dividem o segmento AB em n partes iguais. ■

A seguir, definiremos a noção central desta aula, que é a de semelhança de triângulos.

Dizemos que dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são **semelhantes** e escrevemos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ se existe uma correspondência entre seus vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ de modo que os ângulos internos associados por essa correspondência são congruentes, ou seja, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ e $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ (figura 135).

Figura 135 – Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes



Fonte: DEaD | IFCE

Em triângulos semelhantes, os lados opostos aos ângulos congruentes são chamados **lados correspondentes (ou homólogos)**. Assim, nos triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$, o lado AB é correspondente ao lado $A'B'$, o lado AC é correspondente ao lado $A'C'$, e o lado BC é correspondente ao lado $B'C'$.

O resultado a seguir estabelece uma relação métrica entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes.

Teorema 7.2 Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, então

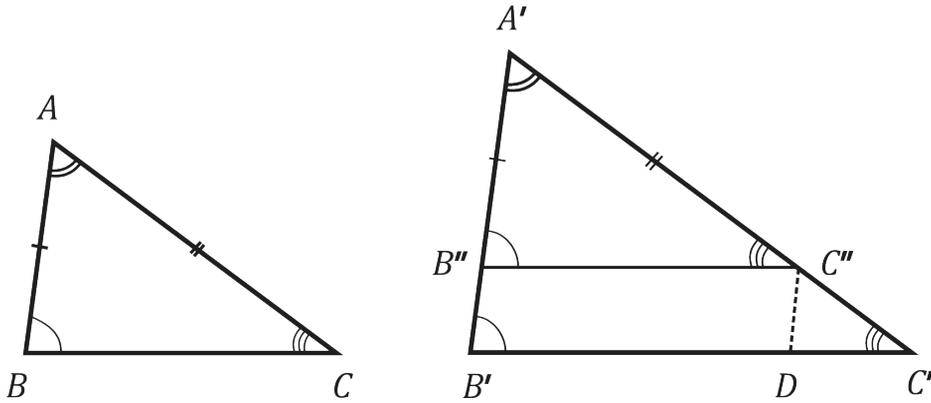
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \quad (7.1)$$

O número k é chamado **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$.

Demonstração: Se $AB \equiv A'B'$, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso ALA. Da congruência segue que $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$ e, portanto, vale (7.1) com $k = 1$. Vamos supor que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. Precisamos demonstrar apenas este caso, pois o outro caso, $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, é similar. Seja B'' um ponto sobre o lado $A'B'$, tal que $A'B'' \equiv AB$ (figura 136). Trace pelo ponto B'' a reta paralela a $B'C'$,

que encontra o lado $A'C'$ no ponto C'' . Os ângulos $\angle A'B'C'$ e $\angle A'B''C''$ são correspondentes, logo são congruentes.

Figura 136 – Os triângulos ABC e $A'B''C''$ são congruentes



Fonte: DEaD | IFCE

Pelo caso ALA, os triângulos ABC e $A'B''C''$ são congruentes. Em particular, $A'C'' \equiv AC$.

As retas $A'B'$ e $A'C'$ são transversais às retas paralelas $B'C'$ e $B''C''$, logo podemos aplicar o Teorema de Tales para concluirmos que

$$\frac{\overline{A'B''}}{\overline{B''B'}} = \frac{\overline{A'C''}}{\overline{C''C'}}$$

Invertendo as frações na igualdade acima e somando 1 em ambos os membros, obtemos

$$\frac{\overline{B''B'}}{\overline{A'B''}} = \frac{\overline{C''C'}}{\overline{A'C''}} \Rightarrow \frac{\overline{B''B'}}{\overline{A'B''}} + 1 = \frac{\overline{C''C'}}{\overline{A'C''}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{B''B'} + \overline{A'B''}}{\overline{A'B''}} = \frac{\overline{C''C'} + \overline{A'C''}}{\overline{A'C''}}$$

De onde concluímos que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B''}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'C''}}$$

e, como $AB \equiv A'B''$ e $AC \equiv A'C''$, obtemos a igualdade

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \quad (7.2)$$

Trace, pelo ponto C'' , uma reta paralela ao lado $A'B'$, e determine o ponto D em que essa reta encontra o lado $B'C'$ do triângulo $A'B'C'$ (figura 136). O quadrilátero $B''B'DC''$ é um paralelogramo e $B'D \equiv B''C''$. Da congruência $\Delta ABC \equiv \Delta A'B''C''$ segue que $B''C'' \equiv BC$, logo $B'D \equiv BC$. Podemos, então, repetir o argumento acima, usando o Teorema de Tales para as retas $C'A'$ e $C''B'$, transversais às retas paralelas $A'B'$ e $C''D$, para concluirmos que

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \quad (7.3)$$

Das igualdades (7.2) e (7.3) segue o resultado que queríamos demonstrar. ■

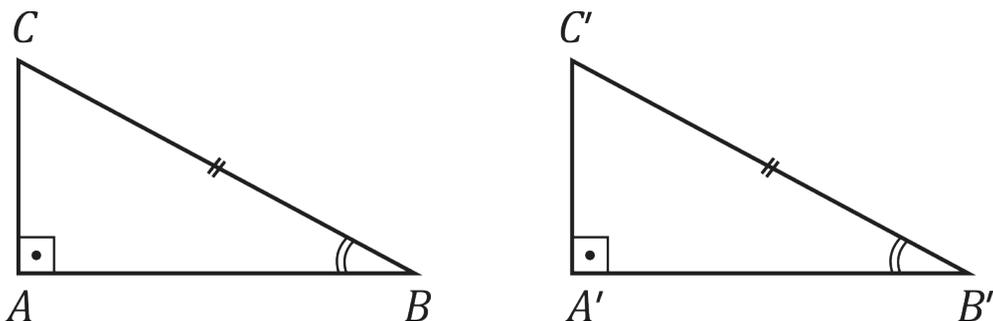
Assim como a relação de congruência, a relação de semelhança entre dois triângulos pode ser deduzida a partir de informações sobre as relações entre lados ou ângulos desses dois triângulos. Por analogia com a relação de congruência, temos os **casos de semelhança de triângulos**.

Caso Ângulo – Ângulo (AA): Se dois triângulos têm ordenadamente dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$, com dois ângulos correspondentes congruentes, por exemplo, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° , se dois ângulos de ΔABC são congruentes a dois ângulos de $\Delta A'B'C'$, então o terceiro ângulo do triângulo ABC é congruente ao terceiro ângulo de $A'B'C'$. Pela definição, esses dois triângulos são semelhantes.

A seguir, exibiremos um caso de congruência de triângulos válido apenas para triângulos retângulos e, por isso, chamado de *caso especial*.

Figura 137 – Caso especial de congruência de triângulos



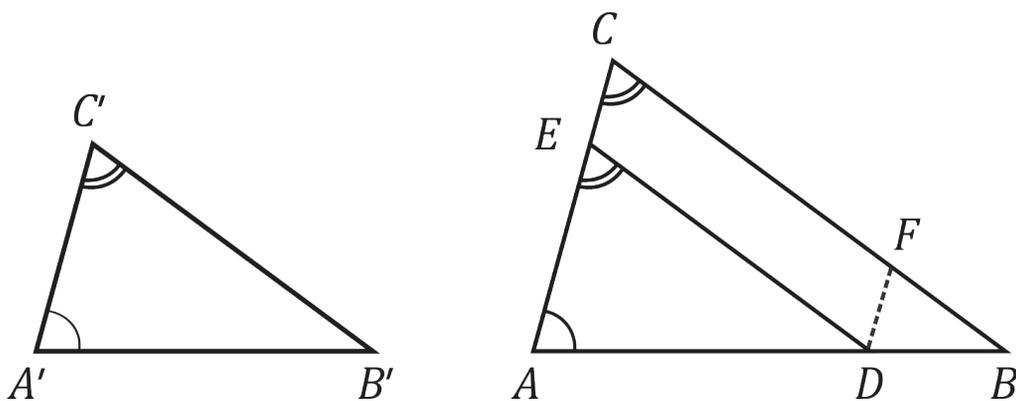
Caso especial de congruência de triângulos: Sejam ABC e $A'B'C'$, dois triângulos retângulos, com $\angle CAB$ e $\angle C'A'B'$ retos. Se $BC \equiv B'C'$ e $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, então $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (figura 137).

De fato, neste caso os triângulos são semelhantes, pelo caso AA de semelhança de triângulos. Da semelhança, temos que $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$. Além disso, a razão de semelhança é igual a 1, pois as hipotenusas coincidem. Dessa forma, do Teorema 7.2, concluímos que $AB \equiv A'B'$ e $AC \equiv A'C'$. Logo $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

O próximo caso é a recíproca do Teorema 7.2.

Caso Lado – Lado – Lado (LLL): Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Figura 138 – O caso LLL de semelhança de triângulos



Fonte: DEaD | IFCE

Queremos mostrar que, se os lados dos triângulos ABC e $A'B'C'$ satisfazem as igualdades $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$, então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Para isso, consideremos um ponto D sobre o lado AB do triângulo ABC , escolhido de modo que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AD}$ (figura 138). Como, por hipótese, $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$, temos que $k \cdot \overline{AD} = k \cdot \overline{A'B'}$, ou seja, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$.

A reta que passa por D , e é paralela ao lado BC do triângulo ABC , intersecta o lado AC no ponto E . Pelo caso de semelhança AA, temos $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Pelo Teorema 7.2, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = k$. Como estamos supondo que $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$, temos: $k \cdot \overline{AE} = \overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}$ e isso implica que $\overline{AE} = \overline{A'C'}$.

A reta que passa por D , e é paralela ao lado AC , encontra o lado BC no ponto F (figura 138). O quadrilátero $CEDF$ é um paralelogramo, de modo que $\overline{DE} = \overline{FC}$. Como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, temos $\frac{\overline{BC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = k$. Logo, $\overline{BC} = k \cdot \overline{FC} = k \cdot \overline{DE}$. Novamente por hipótese, $\overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$. Assim, $k \cdot \overline{DE} = \overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$ e isso implica que $\overline{DE} = \overline{B'C'}$.

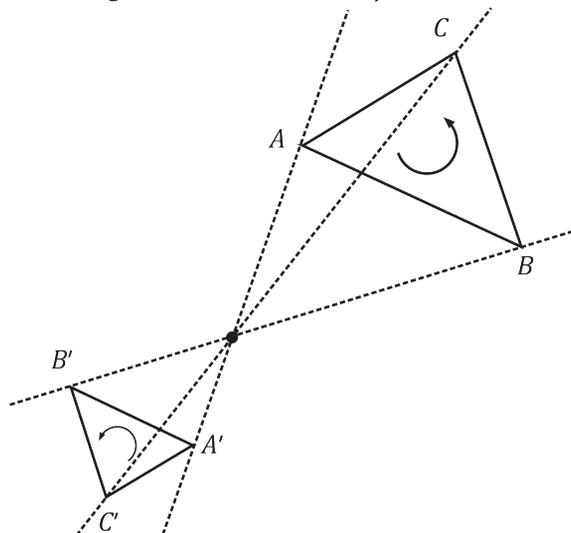
Pelo caso LLL de congruência de triângulos, os triângulos $A'B'C'$ e ADE são congruentes. Em particular, $\angle B'C'A' \equiv \angle DEA \equiv \angle BCA$ e $\angle C'A'B' \equiv \angle EAD = \angle CAB$. Novamente, pelo caso AA de semelhança de triângulos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Com o Teorema 7.2 e o caso LLL de semelhança de triângulos, estabelecemos uma equivalência entre um fenômeno geométrico, a semelhança de triângulos, e um aritmético, a proporcionalidade das medidas dos lados.

A razão de semelhança $k \neq 0$ mede o tamanho relativo dos dois triângulos. Se $|k| < 1$, então $\overline{AB} < \overline{A'B'}$, $\overline{AC} < \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} < \overline{B'C'}$, ou seja, o triângulo ABC é menor que o triângulo $A'B'C'$. Se $|k| > 1$, o mesmo argumento mostra que o triângulo ABC é maior que o triângulo $A'B'C'$. Se $|k| = 1$, os lados correspondentes têm as mesmas medidas, logo são congruentes e, pelo caso LLL de congruência, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Se a razão de semelhança for negativa (figura 139), então um dos triângulos terá orientação contrária à do outro triângulo. Isso significa que, se os vértices do triângulo ABC forem percorridos no sentido anti-horário, então os vértices correspondentes do triângulo $A'B'C'$ serão percorridos no sentido horário (veja a figura 139).

Figura 139 – Se a razão de semelhança entre dois triângulos é negativa, eles têm orientações contrárias



Caso Lado – Ângulo – Lado (LAL) Se dois triângulos têm dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais, e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Considere dois triângulos ABC e $A'B'C'$, com $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\frac{\overline{AC}}{A'C'} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} = k$. Queremos mostrar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. De fato, assim como no caso LLL, podemos considerar um ponto D sobre o lado AB , de modo que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AD}$ (vamos usar novamente a figura 138 como referência). A reta, passando pelo ponto D e paralela ao lado BC , intersecta o lado AC no ponto E (figura 139). Assim como fizemos no caso LLL, podemos usar o Teorema de Tales para concluir que $\overline{AC} = k \cdot \overline{AE}$. Por hipótese, temos que $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}$. Assim, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AE} = \overline{A'C'}$. Como $AD \equiv A'B'$, $AE \equiv A'C'$ e $\angle EAD \equiv \angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Em particular, $\angle A'C'B' \equiv \angle AED \equiv \angle ACB$, essa última congruência sendo válida porque os ângulos são correspondentes. Portanto, pelo caso AA de semelhança, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Com isso concluímos nosso primeiro tópico, em que apresentamos o Teorema de Tales, sobre o qual se baseia a noção de semelhança de triângulos, e estudamos os casos de semelhança de triângulos: AA, LLL e LAL. Eles serão usados como ferramentas para, no tópico a seguir, obtermos vários resultados métricos importantes.

Aplicações da semelhança de triângulos

170

OBJETIVOS

- Estudar relações métricas em triângulos e círculos, decorrentes da noção de semelhança de triângulos
- Reconhecer as razões trigonométricas seno e cosseno

Neste tópico vamos estudar algumas aplicações relevantes da noção de semelhança de triângulos, como as relações métricas em triângulos e círculos. Em particular, apresentaremos as demonstrações dos Teoremas de Pitágoras e de Ptolomeu. Também estudaremos as noções de seno e cosseno e algumas de suas propriedades básicas, explicando como essas propriedades se relacionam com os teoremas de Pitágoras e de Ptolomeu. Calcularemos o seno e o cosseno de ângulos notáveis: $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e, usando o “triângulo áureo”, obteremos $\cos 72^\circ$, o que permite o cálculo das razões trigonométricas de toda uma nova família de ângulos: $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$, etc.

O primeiro resultado que estudaremos é uma aplicação direta do Teorema de Tales e é geralmente apresentado como um par de resultados independentes, chamados *Teorema da Bissetriz Interna* e *Teorema da Bissetriz Externa*. Preferimos aqui seguir a referência de Caminha, 2012, que apresenta os dois resultados em conjunto, chamando-os simplesmente de *Teorema da Bissetriz*.

Lembremos que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo é chamada de bissetriz interna desse triângulo. A bissetriz de um ângulo externo de um triângulo é chamada bissetriz externa desse triângulo. Dessa forma, cada triângulo tem três bissetrizes internas e três bissetrizes externas. Cada bissetriz interna de um triângulo intersecta o lado oposto, determinando segmentos sobre esse lado. O Teorema 7.3 afirma que esses segmentos são proporcionais aos lados do triângulo adjacentes ao ângulo ao qual corresponde a bissetriz. Se a bissetriz externa também corta o lado oposto, então

ela determina, sobre o prolongamento deste lado, segmentos proporcionais aos lados do triângulo adjacentes ao vértice de onde parte a bissetriz externa.

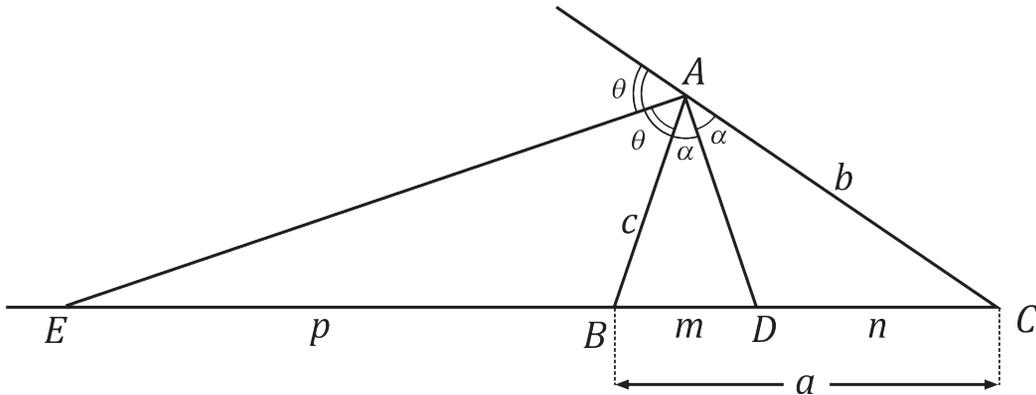
Teorema 7.3 (Teorema da Bissetriz) Em um triângulo ABC , denotemos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Vamos supor que $b \neq c$. Seja D o ponto de intersecção do lado BC com a bissetriz do ângulo interno $\angle BAC$, e seja E o ponto de intersecção do prolongamento do lado BC com a bissetriz do ângulo externo no vértice A (figura 140). Usando a notação $\overline{EB} = p$, $\overline{BD} = m$ e $\overline{DC} = n$, temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} = \frac{p}{p+a} \quad (7.4)$$

Além disso,

$$m = \frac{ac}{b+c}, \quad n = \frac{ab}{b+c}, \quad p = \frac{ac}{|b-c|}, \quad p+a = \frac{ab}{|b-c|} \quad (7.5)$$

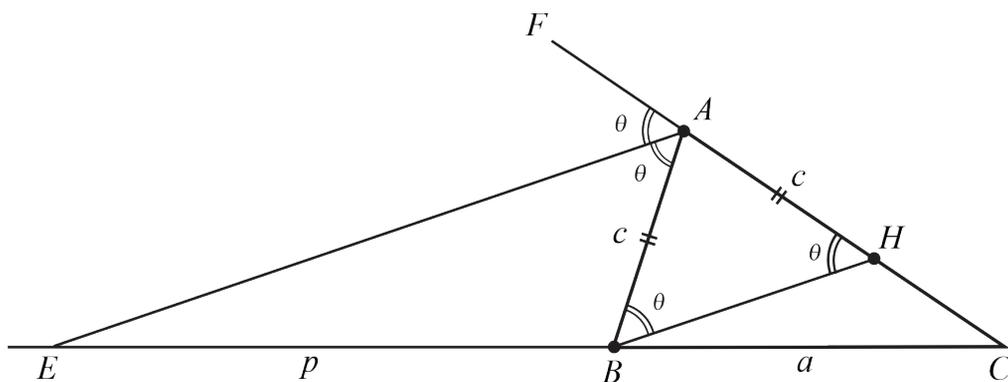
Figura 140 – O teorema da bissetriz



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Trace pelo ponto B a reta paralela a AE , que intersecta o lado AC no ponto H (figura 141). Note que $\theta = \angle EAB \equiv \angle ABH$, pois são alternos internos, e $\angle AHB \equiv \angle FAE = \theta$, pois são correspondentes. Logo, $\angle ABH \equiv \angle AHB$ e o triângulo AHB é isósceles, com $\overline{AH} = \overline{AB} = c$.

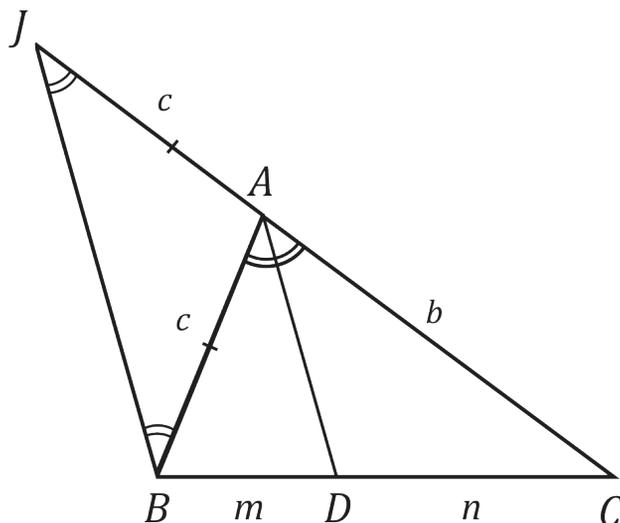
Figura 141 – ABH é isósceles. Pelo Teorema de Tales, $\frac{c}{b} = \frac{p}{p+a}$



Fonte: DEaD | IFCE

Pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{CA}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$, isto é, $\frac{b}{c} = \frac{a+p}{p}$ (essa é uma forma um pouco diferente do Teorema de Tales. Veja o exercício 3).

Figura 142 – Pelo Teorema de Tales, $\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$



Fonte: DEaD | IFCE

A figura 142 ilustra uma situação análoga à anterior: pelo ponto B , trace a reta paralela a AD , que intersecta o prolongamento do lado CA no ponto J . Os ângulos $\angle BJA$ e $\angle DAC$ são correspondentes e os ângulos $\angle JBA$ e $\angle BAD$ são alternos internos, logo, $\angle BJA \equiv \angle DAC \equiv \angle BAD \equiv \angle JBA$. Isso mostra que o triângulo ABJ é isósceles, com $\overline{AJ} = \overline{AB} = c$. Do Teorema de Tales, segue então que $\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$. Com isso, mostramos que são válidas as igualdades em (7.4).

As igualdades em (7.5) seguem de (7.4) e da igualdade $m + n = a$. Por exemplo, de (7.4), temos que $\frac{n}{m} = \frac{b}{c}$, logo $\frac{n}{m} + 1 = \frac{b}{c} + 1$, ou seja, $\frac{a}{m} = \frac{m+n}{m} = \frac{b+c}{c}$, logo $m = \frac{ac}{b+c}$, que é a primeira igualdade em (7.5). Deixaremos as outras igualdades de (7.5) como exercício para você. ■

Vamos agora exibir nossa primeira demonstração do Teorema de Pitágoras. Na aula 8, estudaremos outra demonstração, a que Euclides exibe nos *Elementos*.

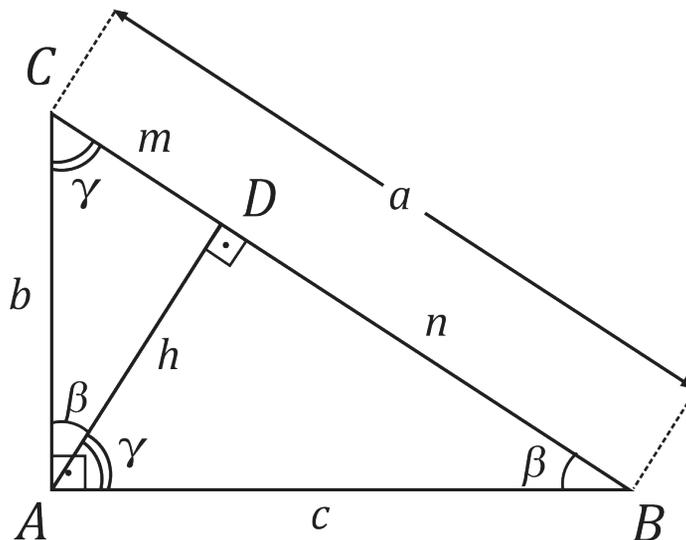
Teorema 7.4 (Pitágoras) Seja ABC um triângulo retângulo, com $\angle BAC$ reto. Se $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, então

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ou seja, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração: Seja AD a altura relativa à hipotenusa BC do triângulo ABC . Denotemos, como na figura 143, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = n$, $\overline{CD} = m$ e $\overline{AD} = h$.

Figura 143 – Um triângulo retângulo e a altura relativa à hipotenusa



Fonte: DEaD | IFCE

A soma dos ângulos internos em um triângulo é igual a dois ângulos retos. Como um dos ângulos internos de ABC é reto, a soma dos outros dois ângulos internos é igual a um ângulo reto, ou seja, os ângulos $\beta = \angle ABC$ e $\gamma = \angle ACB$ são complementares.

Como AD é perpendicular a BC , ABD e ACD também são retângulos e ambos têm dois ângulos internos congruentes a ângulos internos de ABC . Pelo caso de semelhança AA, os triângulos ABC , DBA e DAC são semelhantes. Pelo Teorema 7.2, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{n}{c}$$

$$\Delta DAC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

174

Das igualdades acima, segue que $c^2 = an$ e $b^2 = am$. Somando termo a termo, obtemos $b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \cdot a = a^2$, como queríamos demonstrar. ■

Das semelhanças $\Delta DBA \sim \Delta ABC$ e $\Delta DAC \sim \Delta ABC$, podemos deduzir várias relações entre as medidas dos lados, da altura relativa à hipotenusa e dos segmentos BD e CD , determinados pela altura sobre a hipotenusa. Essas relações são chamadas *relações métricas no triângulo retângulo* (veja o exercício 5).

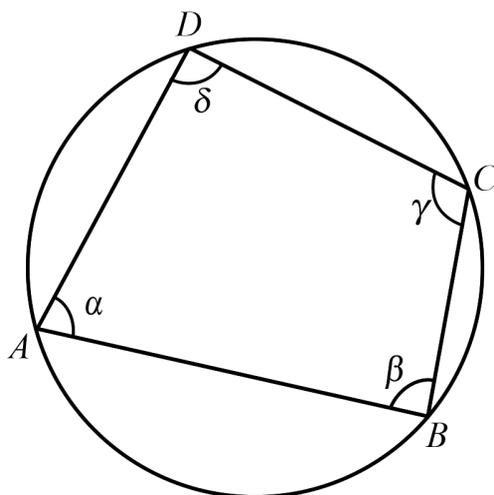
Na Aula 5 estudamos quadriláteros e, na Aula 6, vimos algumas propriedades dos ângulos inscritos em círculos. A seguir, usaremos a noção de ângulo inscrito em um círculo para caracterizar os quadriláteros que podem ser inscritos em um círculo.

Dizemos que um quadrilátero $ABCD$ está **inscrito em um círculo Γ** , se seus quatro vértices pertencem a esse círculo. Também dizemos que os pontos A, B, C e D são **cocíclicos**.

Notemos que, embora por três pontos não colineares sempre passe um único círculo, quatro pontos não colineares podem ser não cocíclicos, ou seja, nem todo quadrilátero pode ser inscrito em um círculo.

Um quadrilátero $ABCD$ que pode ser inscrito em um círculo é chamado quadrilátero inscritível (figura 144).

Figura 144 – Em um quadrilátero inscrito, ângulos internos opostos são suplementares: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$



Fonte: DEaD | IFCE

A seguir, obteremos um critério para que um quadrilátero seja inscrito.

Proposição 7.2 Um quadrilátero é inscrito se, e somente se, ângulos opostos são suplementares, isto é, suas medidas têm somas iguais a 180° (figura 144).

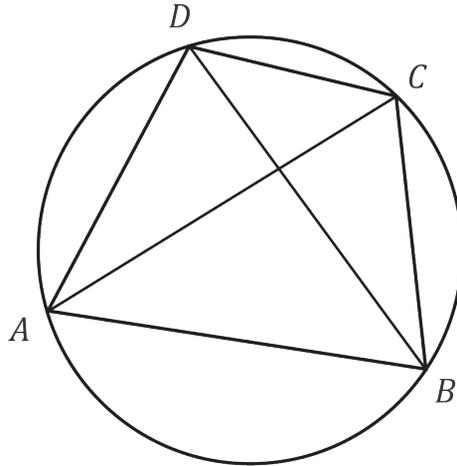
Demonstração: De fato, em um quadrilátero $ABCD$ inscrito em um círculo Γ , ângulos opostos determinam arcos cuja soma é 360° . Como esses ângulos são inscritos em Γ , cada um deles mede metade do arco determinado sobre Γ . Isso mostra que se um quadrilátero é inscrito, seus ângulos opostos são suplementares. A recíproca desta afirmação é o exercício 6. ■

A importante propriedade dos quadriláteros inscritíveis que vamos estudar a seguir foi obtida pelo matemático e astrônomo grego Cláudio Ptolomeu, sobre o qual já falamos na Aula 4.

Teorema 7.5 (Ptolomeu) Se um quadrilátero $ABCD$ é inscrito, então a soma dos produtos dos seus lados opostos é igual ao produto de suas diagonais (figura 145). Em símbolos:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

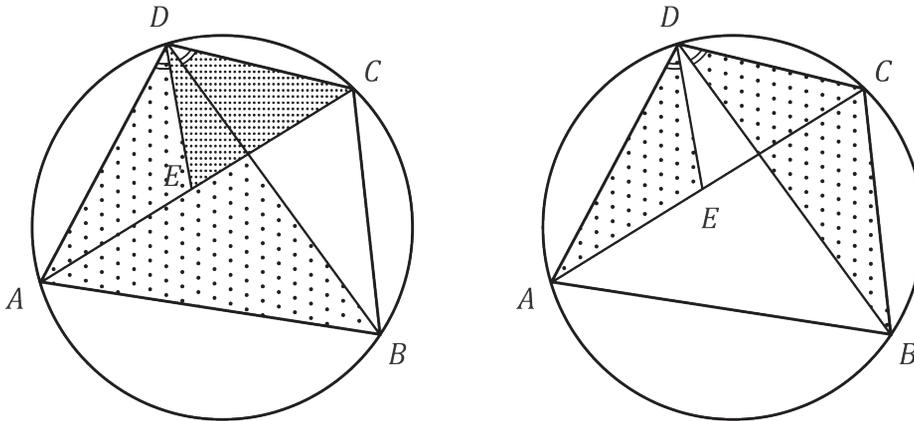
Figura 145 – Um quadrilátero inscrito em um círculo, e suas diagonais



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Construa o ângulo $\angle ADE$, congruente ao ângulo $\angle BDC$ (figura 146). Os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ são inscritos e determinam o mesmo arco, logo são congruentes pelo Teorema 6.5. O mesmo ocorre para os ângulos $\angle DAC$ e $\angle DBC$. Por construção, $\angle ADE \cong \angle BDC$, logo, os triângulos AED e BCD são semelhantes pelo caso AA. Também temos $\angle ADB \cong \angle ADE + \angle EDB \cong \angle EDB + \angle BDC \cong \angle EDC$. Assim, $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ também pelo caso AA de semelhança de triângulos.

Figura 146 – $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ e $\triangle AED \sim \triangle BCD$



Fonte: DEaD | IFCE

Das semelhanças $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ e $\triangle AED \sim \triangle BCD$, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ e } \frac{\overline{DA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CB}}$$

Assim, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{EC} \cdot \overline{BD}$ e $\overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD}$. Somando essas duas últimas igualdades, termo a termo, obtemos

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{EC} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} = (\overline{EC} + \overline{AE}) \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

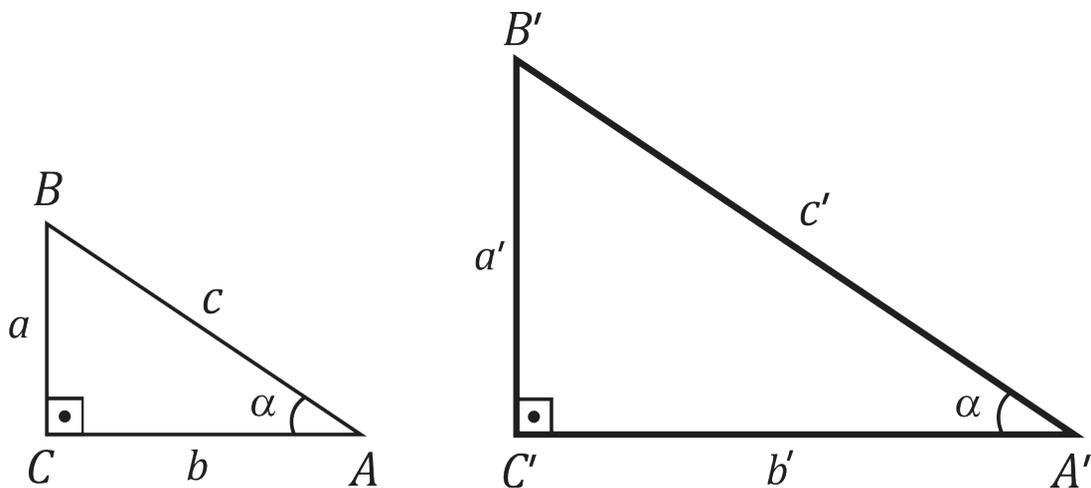
que é a igualdade que queríamos demonstrar. ■

A seguir, definiremos duas razões de medidas em um triângulo retângulo, que são chamadas de **razões trigonométricas** (do grego *trigonos* (*τριγωνος*) = três ângulos = triângulo, *métrica* (*μετρισεις*) = medida).

Consideremos um ângulo agudo α e um triângulo retângulo ABC que tem um dos ângulos internos congruente a α ($\angle BAC \equiv \alpha$ na figura 147). O cateto a , que se opõe ao ângulo α , é chamado **cateto oposto** a α . O cateto b , que está contido em um dos lados do ângulo α , é chamado **cateto adjacente** a α . Chamamos a razão $\frac{a}{c}$ de **seno** de α e denotamos $\frac{a}{c} = \text{sen } \alpha$. A razão $\frac{b}{c}$ é chamada **cosseno** de α e denotamos $\frac{b}{c} = \text{cos } \alpha$. Assim,

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Figura 147 – O seno e o cosseno do ângulo α dependem apenas do ângulo



Fonte: DEaD | IFCE



A palavra “seno” é resultado de uma confusão na tradução de textos do árabe para o latim. As tabelas de cordas, produzidas pelos matemáticos indianos e usadas na astronomia, foram escritas originalmente em sânscrito, traduzidas para o árabe e do árabe para o latim. A palavra “corda” escreve-se em árabe como *jaib*. Essa palavra tem as mesmas consoantes de *jiba*, que significa cavidade ou bolso. Como em árabe só se escrevem as consoantes, o tradutor latino, conhecedor do árabe, mas não do sânscrito, traduziu *jaib* como *jiba* e escreveu *sinus*, que quer dizer cavidade em latim.

Se $A'B'C'$ é outro triângulo retângulo com um ângulo interno congruente a α , então, pelo caso especial de semelhança, ou pelo caso AA, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Assim, pelo Teorema 7.2, $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ e $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$. Isso significa que o seno e o cosseno de um ângulo α não dependem da escolha particular do triângulo retângulo ABC , mas apenas do ângulo α .

Como consequência do Teorema de Pitágoras, obtemos a seguinte relação entre o seno e o cosseno de um mesmo ângulo, chamada **identidade fundamental**:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Nessa igualdade, $\text{sen}^2 \alpha = (\text{sen} \alpha)^2$ e $\text{cos}^2 \alpha = (\text{cos} \alpha)^2$.

Se o ângulo α se aproxima de 90° , então a medida a do cateto oposto se aproxima da medida c da hipotenusa, logo, o seno de α se aproxima de 1. Assim, é natural definirmos $\text{sen} 90^\circ = 1$. Usando a identidade fundamental, obtemos $\text{cos} 90^\circ = 0$.

O resultado a seguir é muito útil na resolução de problemas envolvendo triângulos.

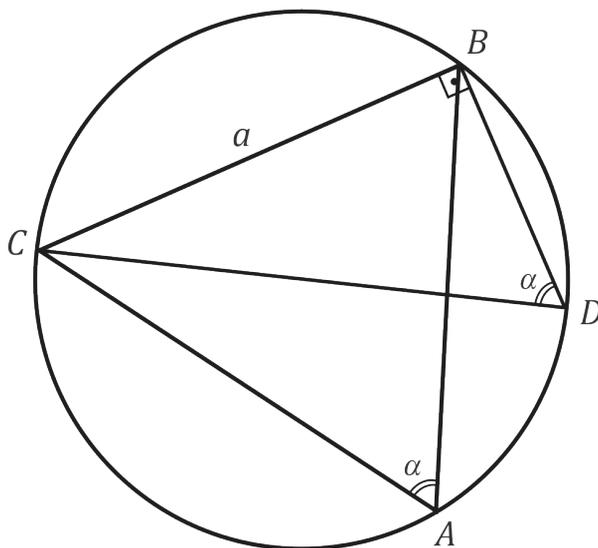
Teorema 7.6 (Lei dos senos) Seja ABC um triângulo inscrito em um círculo de raio r . Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ e $\gamma = \angle BCA$. Então

$$\frac{a}{\text{sen} \alpha} = \frac{b}{\text{sen} \beta} = \frac{c}{\text{sen} \gamma} = 2r$$

Demonstração: Consideremos o diâmetro CD do círculo circunscrito ao triângulo ABC (figura 148). Os ângulos $\angle CAB$ e $\angle ADB$ são inscritos no círculo e determinam

o mesmo arco, logo são congruentes. Como CD é diâmetro, o triângulo BCD é retângulo, logo $\text{sen}\alpha = \frac{a}{CD} = \frac{a}{2r}$, logo $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = 2r$.

Figura 148 - No triângulo retângulo ABC , $\text{sen}\alpha = \frac{a}{CD} = \frac{a}{2r}$



Fonte: DEaD | IFCE

A mesma construção pode ser feita para os outros dois ângulos internos β e γ do triângulo ABC . Com isso, obtemos $\frac{b}{\text{sen}\beta} = 2r$ e $\frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2r$ e o resultado segue. ■

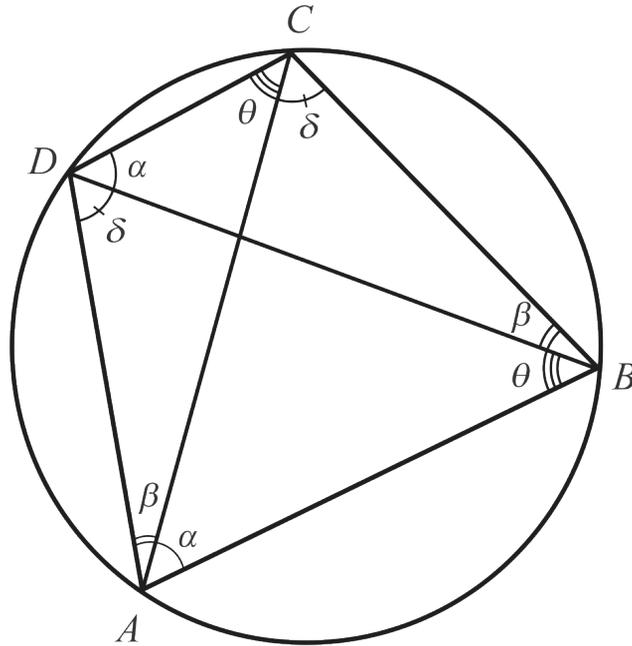
Com a lei dos senos e o teorema de Ptolomeu, podemos obter uma fórmula para o seno da soma de dois ângulos.

Proposição 7.3 Se α, β, θ e δ são ângulos agudos, então

$$\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\beta + \theta) = \text{sen}\delta \text{sen}\beta + \text{sen}\theta \text{sen}\alpha$$

Em particular, se $\beta + \theta = 90^\circ$, então $\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \text{sen}\beta + \cos\beta \text{sen}\alpha$.

Figura 149 – Versão do teorema de Ptolomeu para senos



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Pela lei dos senos, aplicada no triângulo ABC , obtemos $\overline{AB} = 2r \text{sen} \delta$, $\overline{BC} = 2r \text{sen} \alpha$ e $\overline{AC} = 2r \text{sen}(\beta + \theta)$. Aplicando a lei dos senos no triângulo ABD , obtemos $\overline{AD} = 2r \text{sen} \theta$ e $\overline{BD} = 2r \text{sen}(\alpha + \beta)$, e no triângulo ACD , obtemos $\overline{CD} = 2r \text{sen} \beta$. Substituindo na identidade do Teorema de Ptolomeu $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$, temos

$$2r \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot 2r \text{sen}(\beta + \theta) = (2r \text{sen} \delta) \cdot (2r \text{sen} \beta) + (2r \text{sen} \theta) \cdot (2r \text{sen} \alpha)$$

Cancelando $4r^2$ em ambos os membros, obtemos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\beta + \theta) = \text{sen} \delta \text{sen} \beta + \text{sen} \theta \text{sen} \alpha \quad (7.6)$$

Escolhendo C , de modo a AC ser um diâmetro, obtemos $\beta + \theta = 90^\circ$, logo, $\text{sen}(\beta + \theta) = 1$. Sendo β e θ complementares, $\text{sen} \theta = \cos \beta$ e, sendo $\beta + \theta = 90^\circ$, o triângulo ABC é retângulo e α e δ também são complementares, donde segue que $\text{sen} \delta = \cos \alpha$.

Dizemos que os ângulos β e θ são complementares, se $\beta + \theta = 90^\circ$. Neste caso, β e θ são ângulos internos de um triângulo retângulo e o cateto oposto a θ é adjacente a β . Por isso, $\text{sen} \theta = \cos \beta$.



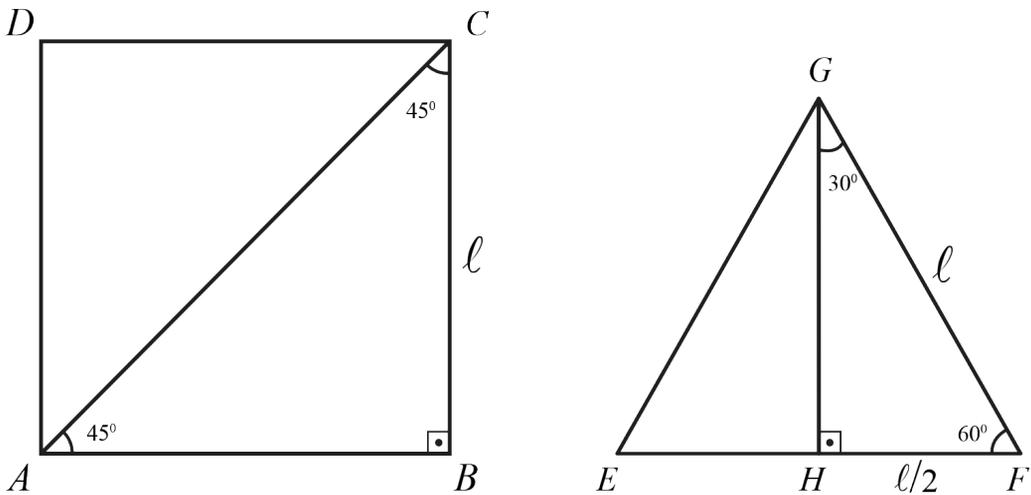
Portanto (7.6) se transforma em

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \text{sen} \beta + \cos \beta \text{sen} \alpha$$

Com essa fórmula, podemos descobrir o seno da soma de dois ângulos, se conhecermos os senos e cossenos desses ângulos. ■

Vamos agora calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos especiais, que chamamos de **ângulos notáveis**. A determinação dos senos e cossenos desses ângulos é facilitada pelas propriedades geométricas a eles relacionadas.

Figura 150 – Um quadrado e um triângulo equilátero



Fonte: DEaD | IFCE

Seja $ABCD$ um quadrado de lado l (figura 150, esquerda). A diagonal AC desse quadrado o divide em dois triângulos retângulos isósceles. No triângulo ABC , os ângulos internos agudos medem 45° e, de acordo com a definição de seno e de

cosseno, $\text{sen}45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ e $\text{cos}45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow \overline{AC} = l\sqrt{2}$$

$$\text{Assim, } \text{sen}45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \text{cos}45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$



Em um triângulo isósceles, dois dos lados têm a mesma medida. O terceiro lado é chamado de base do triângulo. A altura, a mediana e a bissetriz do ângulo oposto a essa base são congruentes. Em particular, em um triângulo equilátero, são congruentes a altura, a mediana e a bissetriz do ângulo oposto a qualquer dos lados.

Consideremos, agora, o triângulo equilátero EFG de lado ℓ (figura 150, direita). A altura GH , relativa ao lado EF , também é mediana relativa a esse lado e bissetriz do ângulo $\angle FGE$. Assim, no triângulo FGH , os ângulos internos agudos medem 30° e 60° . Usando o Teorema de Pitágoras, podemos encontrar a medida da altura GH :

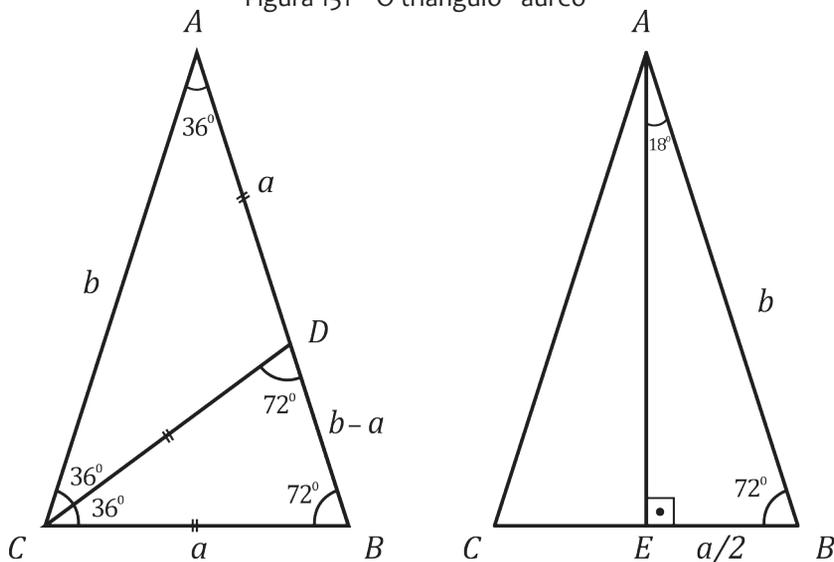
$$\overline{GH}^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow \overline{GH}^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Assim, de acordo com a definição de seno e cosseno, obtemos:

$$\text{sen}30^\circ = \text{cos}60^\circ = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}, \text{sen}60^\circ = \text{cos}30^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Além dos ângulos $30^\circ, 45^\circ$ e 60° , podemos calcular o seno e o cosseno de outros ângulos notáveis. Vamos calcular a seguir o seno e o cosseno dos ângulos $18^\circ, 36^\circ$ e 72° . Para isso, tomaremos como base o triângulo isósceles ABC , cujos ângulos internos medem 72° e 36° (figura 151). Vamos denotar as medidas dos lados de ABC por $a = \overline{CB}$ e $b = \overline{AC} = \overline{BA}$.

Figura 151 – O triângulo “áureo”



Fonte: DEaD | IFCE

Seja CD a bissetriz do ângulo $\angle ACB$. O triângulo BDC tem os mesmos ângulos internos que ABC , logo esses dois triângulos são semelhantes. Além disso, o triângulo ACD também é isósceles, logo $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = a$. Consequentemente, $\overline{BD} = b - a$.

Da semelhança $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ segue, pelo Teorema 7.2, que

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$

Logo, $b^2 - ab - a^2 = 0$. Podemos dividir essa última equação por a^2 , obtendo

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$$

Fazendo $t = \frac{b}{a}$, obtemos a equação quadrática $t^2 - t - 1 = 0$, que tem duas soluções:

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Das quais apenas $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nos interessa, pois a outra raiz é negativa. Esse número,

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, é chamado de **número de ouro**, ou **razão áurea**.

A razão áurea é uma das constantes mais importantes da Matemática, aparecendo em vários fenômenos naturais, como no formato das conchas de certos artrópodes, na distribuição das sementes do girassol e nas proporções do corpo humano. Tem sido bastante usada por arquitetos, engenheiros, escultores e pintores, ao longo da história, para produzir trabalhos geometricamente equilibrados e agradáveis ao olhar. Alguns entusiastas defendem a ideia de que o número de ouro é uma quantificação da beleza. Para mais informações sobre o número de ouro, você pode consultar os links: <http://www.uff.br/cdme/rza/rza.html/rza-br.html> e <http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf>



A altura AE , relativa à base CB do triângulo isósceles ABC (figura 151), divide esse triângulo em dois triângulos retângulos congruentes, ACE e ABE . Os ângulos internos agudos do triângulo AEB medem 18° e 72° . Logo,

$$\text{sen}18^\circ = \text{cos}72^\circ = \frac{a/2}{b} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

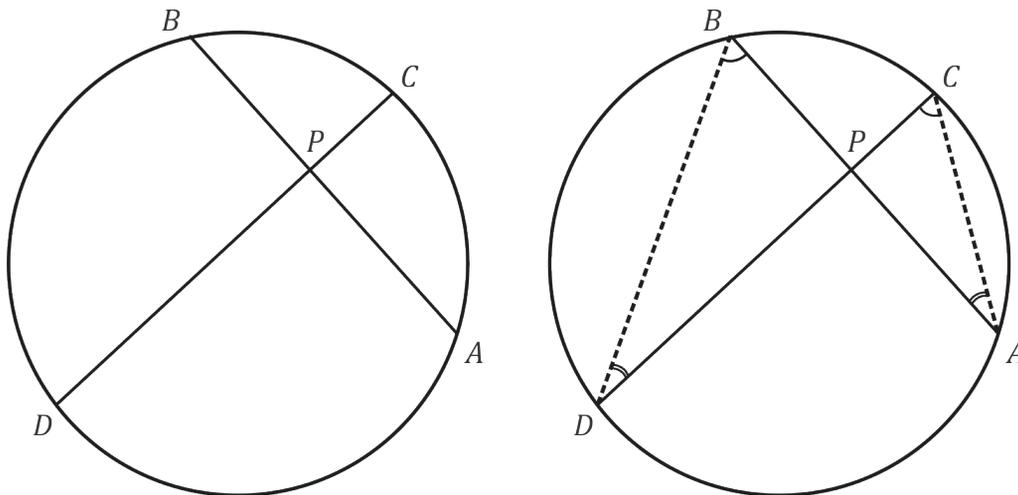
Usando a identidade fundamental $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, podemos encontrar $\cos 18^\circ$ e $\sin 72^\circ$. Usando a fórmula do seno da soma, podemos calcular $\sin 36^\circ = \sin(18^\circ + 18^\circ)$ e, de posse do seno de 36° , podemos calcular $\cos 36^\circ$. É possível, ainda, calcular $\sin 54^\circ = \sin(36^\circ + 18^\circ)$ e $\cos 54^\circ$. Você vai encontrar um exercício no final desta aula cujo objetivo é calcular esses senos e cossenos.

Vamos estudar mais uma aplicação importante da semelhança de triângulos. Lembremos que uma corda em um círculo é um segmento que une dois pontos desse círculo. Se duas cordas AB e CD de um mesmo círculo intersectam-se em um ponto P , temos um resultado métrico notável, enunciado a seguir.

Teorema 7.7 (Teorema das cordas) Sejam AB e CD duas cordas em um mesmo círculo (figura 152). Seja P o ponto de intersecção de AB e CD . Então $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{DP} \cdot \overline{PC}$.

Demonstração: Por serem inscritos no mesmo círculo e determinarem o mesmo arco, os ângulos $\angle CAB$ e $\angle CDB$ são congruentes. O mesmo ocorre para os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ (figura 152).

Figura 152 – Duas cordas que intersectam em um ponto P e ângulos inscritos congruentes a elas associados



Fonte: DEaD | IFCE

Assim, pelo caso AA, os triângulos APC e DPB são semelhantes. Do Teorema 7.2, segue que

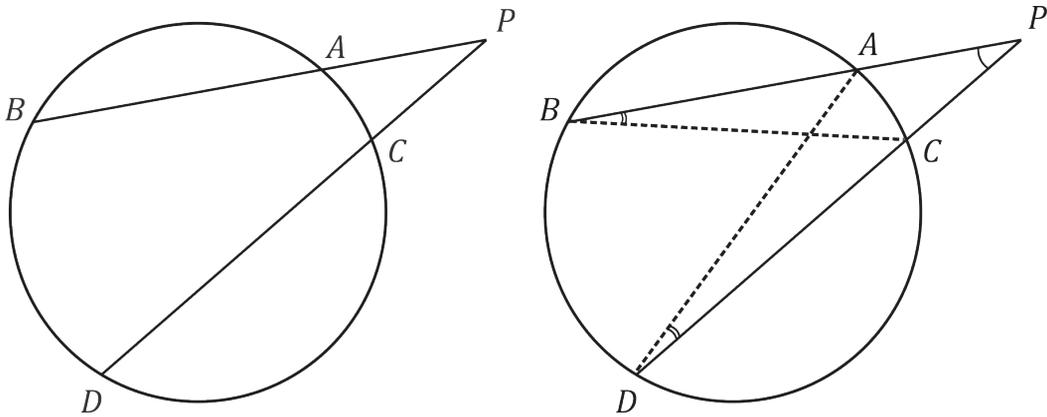
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

e isso implica que $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{DP} \cdot \overline{PC}$. ■

No caso em que P é um ponto exterior ao círculo, temos um resultado análogo ao teorema anterior.

Teorema 7.8 Seja P um ponto exterior a um círculo. Considere duas semirretas partindo de P que intersectam o círculo, uma delas nos pontos A e B , e a outra, nos pontos C e D , como na figura 153. Então $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Figura 153 – O produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ depende apenas do ponto P e do círculo



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Consideremos as cordas AD e BC , como na figura 153. Os ângulos inscritos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ determinam o mesmo arco, logo são congruentes. Como o ângulo com vértice em P é comum aos triângulos ADP e CBP , esses dois triângulos são semelhantes, pelo caso AA. Pelo Teorema 7.2, temos:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

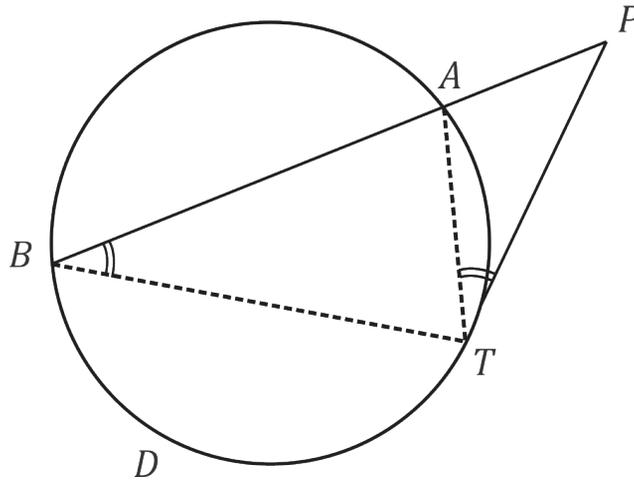
e isso é o que precisávamos demonstrar. ■

Quando uma das semirretas que partem de P é tangente ao círculo, o resultado do Teorema 7.8 assume o seguinte formato:

Corolário 7.1. Com as mesmas hipóteses do Teorema 7.8 e supondo que uma das semirretas é tangente ao círculo no ponto T (figura 154), temos:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

Figura 154 – PT é tangente ao círculo



Fonte: DEaD | IFCE

Demonstração: Para verificarmos essa igualdade, notemos que $\Delta BTP \sim \Delta TAP$, pelo caso AA, pois os ângulos $\angle ABT$ e $\angle ATP$ são inscritos e determinam o mesmo arco, logo são congruentes, e o ângulo com vértice em P é comum aos dois triângulos.

Dessa semelhança segue, pelo Teorema 7.2, que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$ e isso implica que $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. ■

Os Teoremas 7.7 e 7.8 nos dizem que, se Γ é um círculo de raio r , e P é um ponto que não pertence ao círculo, então o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, em que $A, B \in \Gamma$ e A, B e P são colineares, depende apenas de P e de Γ . De fato, seja d a distância entre o ponto P e o centro O do círculo Γ . Então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |d^2 - r^2|$$

Você será convidado a verificar essa igualdade no exercício 10. O número real $|d^2 - r^2|$ é chamado **potência do ponto** P em relação ao círculo Γ . Quando o ponto P pertence ao círculo Γ , a distância d de P ao centro O do círculo é igual ao raio r do círculo, de modo que é natural definirmos a potência de um ponto $P \in \Gamma$ como sendo igual a zero.

Encerramos aqui nossa sétima aula. Tratamos nesta aula da importantíssima ferramenta que é a semelhança de triângulos. Espero que você tenha apreciado a variedade de aplicações geométricas que a semelhança tem, que tenha aprendido a importância do Teorema de Tales, que é o fundamento sobre o qual se assenta toda a teoria da semelhança de triângulos, e também que você tenha percebido a forte conexão entre a noção de semelhança de triângulos e a trigonometria, que é o estudo das razões trigonométricas, das quais vimos apenas o seno e o cosseno. Você deve

ter notado que o Teorema de Ptolomeu é um resultado chave para que se estabeleça essa conexão, pois é ele que permite que calculemos os senos e cossenos de somas de ângulos. Os exercícios propostos ao final desta aula reforçarão alguns pontos do texto e trarão algumas informações adicionais.

Na oitava e última aula, estudaremos a noção de área de figuras planas. Nós nos encontraremos lá. Um abraço!



- Dizemos que um número real é *construtível*, se o ponto correspondente a esse número na reta real for construtível, isto é, puder ser construído com régua e compasso (Veja a Aula 5). Use o método do Problema 7.1 para mostrar que todo número racional é construtível.
- Explique porque não há um caso de semelhança de triângulos “Ângulo – Lado – Ângulo”.
- Na demonstração do Teorema 7.3, usou-se o Teorema de Tales de um modo um pouco diferente do enunciado original (veja a figura 141). Some 1 a ambos os membros da igualdade $\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}}$ para obter a igualdade $\frac{\overline{CA}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$.
- Explique o porquê da hipótese $b \neq c$ no Teorema 7.3.
- Verifique a validade das igualdades (7.5) no Teorema 7.3.
- Mostre, usando semelhança de triângulos, que valem as relações entre as medidas no triângulo retângulo ABC da figura 143: $h^2 = mn$, $cm = bh$, $bn = ch$, $b^2 = am$, $c^2 = an$ e $bc = ah$.
- Seja $ABCD$ um quadrilátero como o da figura 144, tal que $\alpha + \gamma = 180^\circ$.
 - Mostre que $\beta + \delta = 180^\circ$.
 - Seja Γ o círculo que passa pelos pontos A , B e C . Mostre que o arco CDA é o arco capaz do ângulo δ sobre o segmento AC .
 - Conclua que $ABCD$ está inscrito em Γ .
- Use o Teorema de Ptolomeu para dar outra demonstração para o Teorema de Pitágoras. **Sugestão:** Como todo triângulo retângulo pode ser inscrito em um semicírculo, todo retângulo é um inscritível
- Use o Teorema de Pitágoras para demonstrar a relação fundamental $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$.
- Usando a identidade fundamental e a fórmula do seno da soma, determine, a partir dos senos e cossenos dos ângulos obtidos no texto: $\text{sen}36^\circ$, $\text{sen}54^\circ$, $\text{cos}36^\circ$ e $\text{cos}54^\circ$.
- Mostre que a potência de um ponto P em relação a um círculo Γ de raio r é igual a $|d^2 - r^2|$, onde d é a distância do ponto P ao centro O de Γ . **Sugestão:** Considere a semirreta que parte de P e passa pelo centro O do círculo, intersectando Γ nos pontos A e B . Calcule $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Área de figuras planas

Caro(a) aluno(a),

Chegamos à nossa oitava e última aula, em que vamos estudar a noção de área de figuras planas. A noção de área provavelmente já lhe é familiar, e você certamente sabe calcular áreas de triângulos, retângulos, trapézios, e de outras figuras. Nesta aula, vamos estudar a fundamentação da noção de área. Baseados na definição de área, vamos deduzir as fórmulas familiares para o cálculo de áreas, e vamos revelar outras que talvez você não conheça, como a fórmula de Heron que fornece a área de um triângulo em função de seus lados, ou a fórmula de Brahmagupta, que generaliza a fórmula de Heron para quadriláteros inscritíveis.

Vamos também estudar o modo como Euclides trata a noção de área no Livro I dos *Elementos*, que culmina com uma demonstração para o Teorema de Pitágoras que usa a noção de área (Teorema 8.10). Também apresentaremos nesta aula uma demonstração, usando o método da exaustão, da validade da fórmula para a área de um círculo.

Trataremos ainda do *Problema da Quadratura*. Mais precisamente, veremos que é possível construir, com régua e compasso, um quadrado cuja área é igual à área de um polígono dado.

Objetivos

- Compreender as propriedades básicas da noção de área
- Calcular a área de algumas figuras planas elementares

Noção de área

190

OBJETIVOS

- Estudar a noção de área e suas propriedades básicas
- Calcular a área de figuras geométricas básicas: quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango

Assim como é possível calcular o comprimento de um segmento de reta ou certas curvas, como o círculo, também é possível estabelecer uma medida para partes do plano delimitadas por polígonos ou por curvas específicas.

Essa medida, chamada área, é obtida comparando-se uma determinada figura plana F com uma figura padrão, cuja área é considerada unitária por convenção. Geralmente escolhemos o quadrado de lado 1 como sendo o padrão de medida de área no plano. Além disso, as áreas de figuras congruentes devem ser iguais e, se uma figura é decomposta em partes não sobrepostas, a área dessa figura deve ser igual à soma das áreas das partes constituintes.

Vamos formalizar as exigências do parágrafo anterior, fornecendo uma definição

Uma figura plana F é dita **limitada**, se existe um número real $M > 0$, tal que a distância entre dois pontos quaisquer de F não supera M , isto é, $d(P, Q) \leq M$, para quaisquer $P, Q \in F$. A cada figura plana F limitada, associamos um número real $a(F) \geq 0$, chamado **área** de F , que tem as seguintes propriedades:

- (1) **Uniformidade:** se F_1 e F_2 são duas figuras congruentes, então $a(F_1) = a(F_2)$.
- (2) **Aditividade:** se $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ e $a(F_i \cap F_j) = 0$, para $i \neq j$, então $a(F) = a(F_1) + \dots + a(F_n)$.
- (3) **Normalização:** se Q é o quadrado de lado 1, então $a(Q) = 1$.

de área para figuras limitadas.

Algumas observações sobre a definição acima: primeiramente, vamos assumir que existe uma *função área*, isto é, que a cada região limitada do plano é possível efetivamente associar um número real maior ou igual a zero. Vamos também assumir que segmentos de reta têm área nula, ou seja, se AB é um segmento de reta, então $a(AB) = 0$.

Na propriedade (1), falamos sobre *figuras congruentes*. Porém, ao longo do texto, definimos apenas o que são triângulos congruentes.

Podemos entender intuitivamente a ideia de congruência entre figuras planas a partir da ideia de sobreposição: duas figuras são ditas congruentes, se uma pode ser movida até que se sobreponha à outra ou, de modo equivalente, uma das figuras pode ser obtida a partir da outra por um movimento rígido no plano. Por *movimento rígido*, entendemos uma translação, uma rotação, uma reflexão, ou combinações desses movimentos.

Para polígonos, podemos fornecer uma definição mais precisa de congruência:

Dois polígonos P_1 e P_2 são chamados **congruentes** se for possível dividi-los em triângulos congruentes, isto é, se $P_1 = T_{11} \cup \dots \cup T_{1n}$ e $P_2 = T_{21} \cup \dots \cup T_{2n}$, onde T_{ij} são triângulos, $a(T_{ij} \cap T_{ik}) = 0$, se $j \neq k$, e $T_{1j} \cong T_{2j}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Da aditividade segue que, para duas figuras planas F_1 e F_2 , se $F_1 \subset F_2$, então

$$a(F_1) \leq a(F_2) \text{ (Veja o exercício 1).}$$

Referimo-nos a esse resultado como **propriedade de comparação**.

O resultado a seguir, embora seja aparentemente simples, exige, para ser demonstrado, que lidemos com o princípio da exaustão, que já estudamos na Aula 7 e aplicamos na demonstração do Teorema de Tales.

Teorema 8.1 A área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2 .

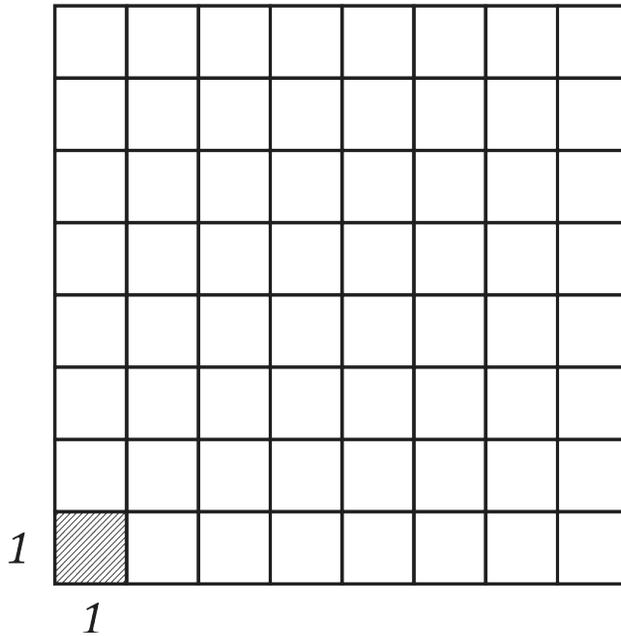
Um movimento rígido no plano euclidiano ε é uma função $f: \varepsilon \rightarrow \varepsilon$

que preserva distâncias, isto é, f satisfaz, para quaisquer pontos $A, B \in \varepsilon$, $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$. Exemplos de movimentos rígidos são as translações, as rotações em torno de um ponto, as reflexões relativas a uma reta. É possível provar que qualquer movimento rígido no plano pode ser obtido como composição de um número finito de translações, rotações ou reflexões.



Demonstração: Suponhamos primeiro que ℓ é um número natural. Neste caso, o quadrado de lado ℓ pode ser dividido em ℓ^2 quadrados de lado 1 (figura 155). Pela propriedade de normalização da área, cada quadrado de lado 1 tem área igual a 1. Como esses quadrados de lado 1 têm em comum no máximo um lado, que tem área igual a zero, pela aditividade, temos que a área do quadrado de lado (natural) ℓ é ℓ^2 .

Figura 155 – A área de um quadrado, cujo lado ℓ é um número natural, é igual ao quadrado do lado

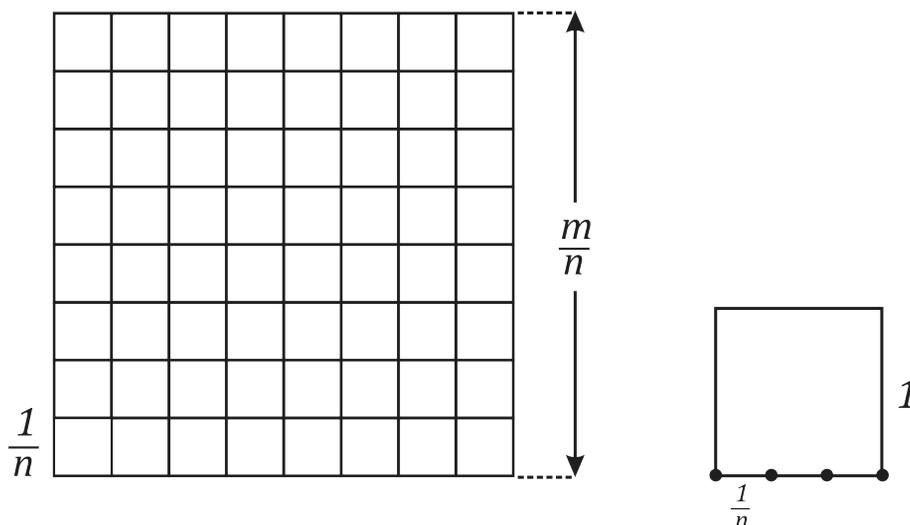


Fonte: DEaD | IFCE

Suponhamos agora que o lado do quadrado Q_ℓ é comensurável com a unidade. Isso é equivalente a supor que o lado ℓ do quadrado Q_ℓ é um número racional. Escreva $\ell = \frac{m}{n}$, onde m e n são números naturais. O quadrado Q_1 , de lado 1, pode ser decomposto em n^2 pequenos quadrados congruentes de lado $\frac{1}{n}$, logo todos com a mesma área (figura 156). Se $Q_{\frac{1}{n}}$ é um desses quadrados, então, pela aditividade da área, $n^2 \cdot a\left(Q_{\frac{1}{n}}\right) = a(Q_1) = 1$, donde segue que $a\left(Q_{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}$.

Figura 156 – Divisão do quadrado unitário em n^2 quadrados de lado

$\frac{1}{n}$ e do quadrado de lado $\frac{m}{n}$ em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$



Fonte: DEaD | IFCE

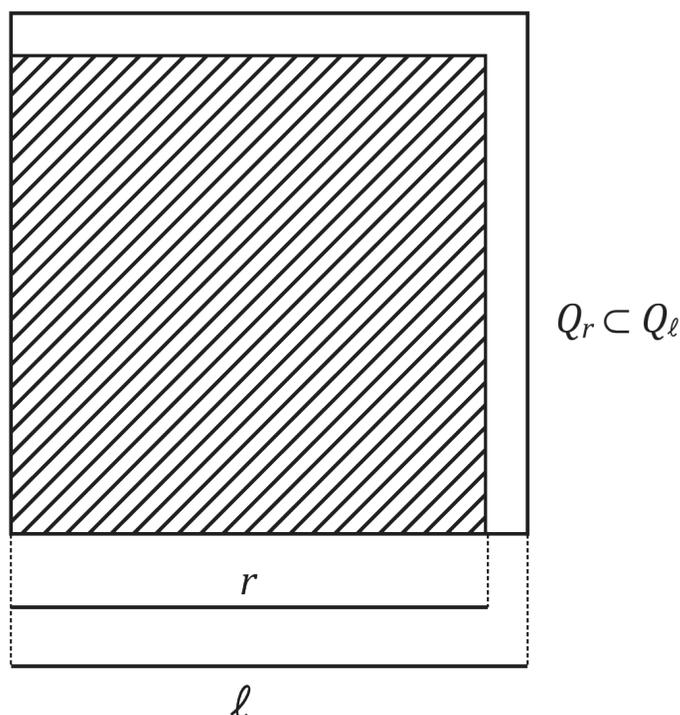
Podemos dividir o lado ℓ do quadrado Q_ℓ em m partes iguais a $\frac{1}{n}$. Com isso o quadrado Q_ℓ de lado ℓ fica dividido em m^2 pequenos quadrados, todos congruentes ao quadrado $Q_{\frac{1}{n}}$, cuja área é $a\left(Q_{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}$ (figura 156). Assim, novamente pela

aditividade da área, $a(Q_\ell) = m^2 \cdot a\left(Q_{\frac{1}{n}}\right) = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \ell^2$.

Vamos, agora, supor que o lado ℓ do quadrado Q_ℓ é irracional. Usaremos o Lema 7.1 (Teorema da Comparação) para demonstrar o resultado neste caso. Com a notação do Lema 7.1, seja $x = a(Q_\ell)$ e seja $y = \ell^2$.

Se s é um número racional, tal que $0 < s < x$, então, pela densidade dos racionais nos reais (veja a Aula 7), existe um número racional r , tal que $\sqrt{s} < r < \sqrt{x}$, ou seja, $s < r^2 < x$. Da desigualdade $r^2 < x$, segue que $a(Q_r) = r^2 < a(Q_\ell)$. Pela propriedade de comparação da área, isso significa que o quadrado Q_r está contido no quadrado Q_ℓ (figura 157). Se r fosse maior ou igual a ℓ , então o quadrado Q_r construído sobre r conteria o quadrado Q_ℓ construído sobre ℓ . Mas já vimos que ocorre justamente o contrário, isto é, Q_r está contido em Q_ℓ . Logo, $r < \ell$, e isso implica que $s < r^2 < \ell^2 = y$. Mostramos com isso que, dado um número racional $s < x$, também ocorre $s < y$.

Figura 157 – O quadrado Q_r está contido no quadrado Q_ℓ



Fonte: DEaD | IFCE

Vamos, agora, mostrar que vale a recíproca, ou seja, que para todo número racional $s < y$ também vale $s < x$. Repetindo o raciocínio anterior, dado s racional tal que $s < y = \ell^2$, pela densidade dos racionais nos reais, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{s} < r < \ell$, ou seja, $s < r^2 < \ell^2$. Como $r < \ell$, o quadrado construído sobre r está contido no quadrado construído sobre ℓ , logo $s < r^2 = a(Q_r) < a(Q_\ell) = x$.

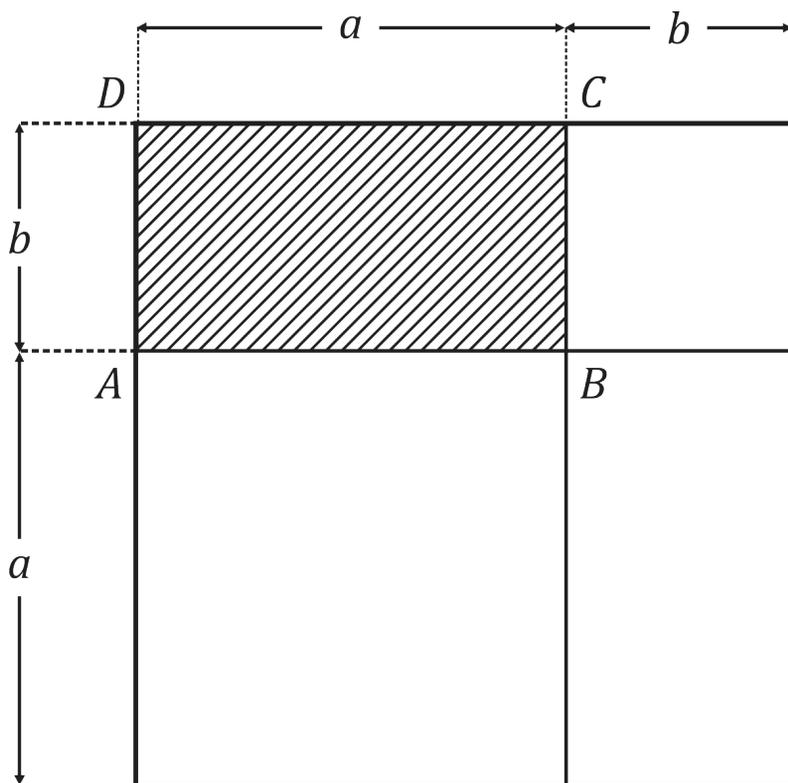
Com isso, o Lema 7.1 nos garante que $a(Q_\ell) = x = y = \ell^2$. ■

O próximo passo é determinar a área de um retângulo.

Teorema 8.2 Um retângulo $ABCD$ com base a e altura b tem área igual a ab .

Demonstração: Sobre os lados do retângulo $ABCD$, construa quadrados como na figura 158. O quadrado maior nessa figura tem lado $a + b$ e, pelo Teorema 8.1, sua área é igual a $(a + b)^2$. Ele é formado por dois quadrados de lados a e b e dois retângulos, um dos quais é o próprio retângulo $ABCD$ e o outro é congruente a $ABCD$ (Veja o Exercício 2).

Figura 158 – Retângulo $ABCD$ e quadrados associados



Fonte: DEaD | IFCE

Pela aditividade da área, temos que a área do quadrado maior é a soma das áreas dos dois quadrados menores e dos dois retângulos congruentes, isto é,

$$(a + b)^2 = 2 \cdot a(ABCD) + a^2 + b^2$$

Desenvolvendo o quadrado no primeiro membro da igualdade acima, obtemos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2 \cdot a(ABCD) + a^2 + b^2$$

E isso implica que $a(ABCD) = ab$, como queríamos demonstrar. ■

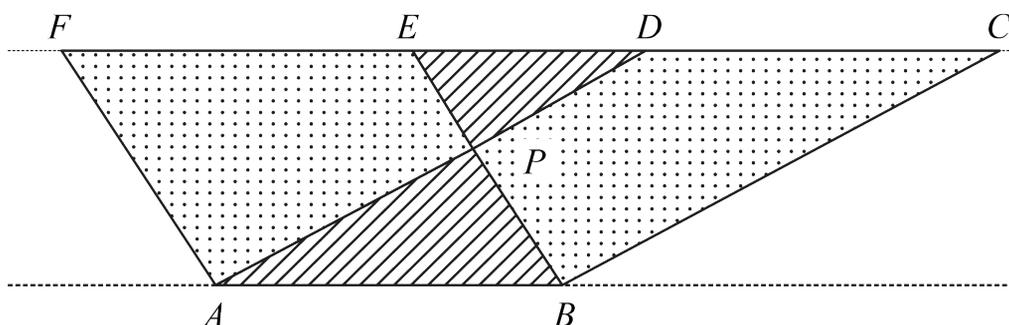
Nosso roteiro, agora, volta a seguir os passos de Euclides e visa, primeiramente, calcular a área de paralelogramos e triângulos. O objetivo principal de Euclides, na parte final do Livro I dos *Elementos*, é obter uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

A partir da Proposição 35 do Livro I, Euclides considera uma noção de “igualdade” diferente da congruência. A partir dessa proposição até o final do Livro I, Euclides chama de “iguais” duas figuras que têm a mesma área.

Teorema 8.3 (Elementos, Livro I, Proposição 35) Se dois paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$ têm a mesma base AB e estão entre duas retas paralelas, então eles têm a mesma área.

Demonstração: Como $ABCD$ é um paralelogramo, seus lados opostos são congruentes, logo $CD \equiv AB$. O mesmo ocorre no paralelogramo $ABEF$, onde $EF \equiv AB$. Por transitividade, temos que $CD \equiv EF$ (figura 159). Assim, $DF \equiv DE + EF \equiv DE + CD \equiv CE$.

Figura 159 – Dois paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$, com a mesma base AB , situados entre as mesmas retas paralelas AB e FC



Fonte: DEaD | IFCE

Além disso, os ângulos correspondentes $\angle AFD$ e $\angle BEC$ são congruentes, assim como os ângulos, também correspondentes, $\angle ADF \equiv \angle BCE$. Pelo caso ALA de congruência, os triângulos ADF e BCE são congruentes, logo, pela propriedade de uniformidade, têm a mesma área.

O triângulo EPD é comum aos dois triângulos ADF e BCE . Temos:

$$a(APEF) + a(EPD) = a(ADF) = a(BCE) = a(BCDP) + a(EPD)$$

e isso implica que

$$a(APEF) = a(BCDP)$$

Os quadriláteros $APEF$ e $BCDP$ aparecem pontilhados na figura 159.

Dessa forma, as áreas dos paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$ são iguais, pois

$$a(ABCD) = a(BCDP) + a(ABP) = a(APEF) + a(ABP) = a(ABEF)$$

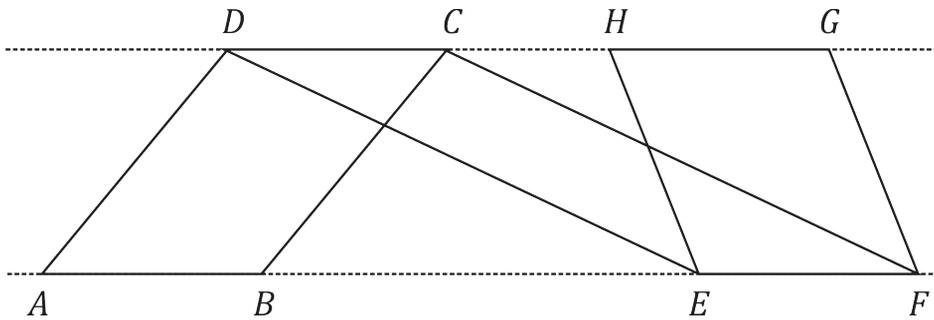
Isso encerra a demonstração. ■

Na proposição seguinte, Euclides exibe um resultado um pouco mais geral.

Teorema 8.4 (Elementos, Livro I, Proposição 36) Se dois paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ têm bases congruentes $AB \equiv EF$ e estão entre duas retas paralelas, então eles têm a mesma área.

Demonstração: Como $ABCD$ é um paralelogramo, $CD \equiv AB$. Por hipótese, $AB \equiv EF$, logo $CD \equiv EF$ e, como estes segmentos estão em retas paralelas, o quadrilátero $CDEF$ é um paralelogramo (figura 160).

Figura 160 – Dois paralelogramos com bases congruentes, situados entre as mesmas paralelas



Fonte: DEaD | IFCE

Pelo Teorema 8.3, $a(ABCD) = a(CDEF)$ e $a(CDEF) = a(EFGH)$. Assim, $a(ABCD) = a(EFGH)$. ■

Como Corolário do Teorema 8.4, obtemos uma fórmula para o cálculo da área de um paralelogramo. A altura de um paralelogramo é a distância entre duas retas paralelas que contêm suas bases.

Corolário 8.1 A área de um paralelogramo com base a e altura b é igual a $a \cdot b$.

Demonstração: Notemos que, pelo Teorema 8.4, a área de um paralelogramo é igual à área de um retângulo com mesma base e mesma altura. Basta, então, aplicar o Teorema 8.2. ■

Em nenhuma passagem dos *Elementos*, Euclides escreve uma fórmula para a área de uma figura plana. Isso porque Euclides não tinha a Álgebra à sua disposição. Esta só seria criada mais de 1000 anos depois, na Índia e no Oriente Médio, e chegaria ao formato que conhecemos hoje apenas em meados do século XVII.

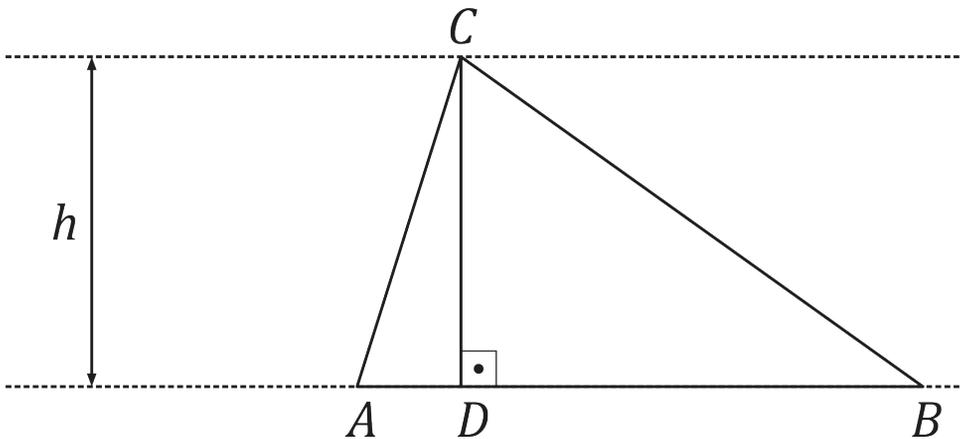


Nas cinco proposições seguintes dos *Elementos*, Euclides trata do problema de determinar a área de triângulos e da relação entre triângulos e paralelogramos. Vamos resumir as proposições 37 a 41 do Livro I dos *Elementos* no Teorema 8.5 a seguir.

Antes disso, precisamos interpretar a altura de um triângulo como a distância entre a reta suporte de um de seus lados e a reta paralela que passa pelo vértice oposto a esse lado.

Pelo vértice C de um triângulo ABC , trace a reta paralela ao lado AB . A distância entre essa reta e a reta AB , é igual à distância $d(C, AB)$ do ponto C à reta AB (figura 161). Essa distância é exatamente a altura do triângulo ABC , relativa ao lado AB . De modo similar, podemos caracterizar as alturas relativas aos outros dois lados do triângulo ABC como distâncias entre retas paralelas.

Figura 161 – A altura de um triângulo como distância entre duas retas paralelas



Fonte: DEaD | IFCE

Teorema 8.5 (Elementos, Livro I, Proposições 37 a 41)

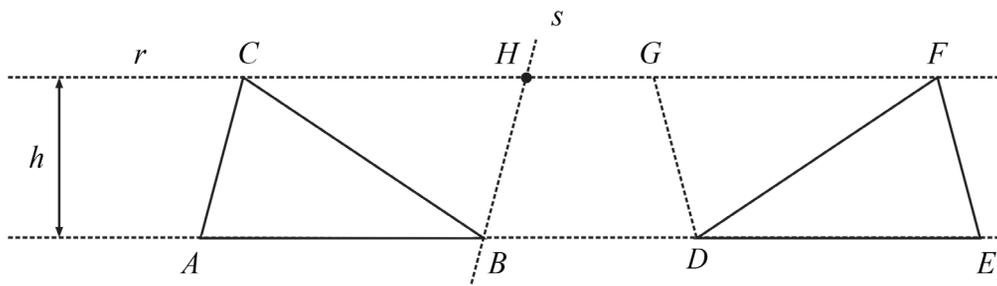
Considere dois triângulos ABC e DEF

- a) A área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo de mesma base e mesma altura.
- b) Se $AB \equiv DE$ e $d(C, AB) = d(F, DE)$, então $a(ABC) = a(DEF)$.
- c) Se $AB \equiv DE$ e $a(ABC) = a(DEF)$, então $d(C, AB) = d(F, DE)$.

Demonstração: Euclides demonstra esses fatos de modo puramente geométrico. Podemos, entretanto, tirar proveito da notação algébrica para demonstrar esses fatos de modo mais direto.

Dado um triângulo ABC , seja H o ponto de interseção da reta r , paralela a AB e passando por C , com a reta s , paralela a AC , passando por B (figura 162). O quadrilátero $ABHC$ é um paralelogramo e, pelo caso LLL, os triângulos ABC e BHC são congruentes. Logo, a área do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo $ABHC$. Isso demonstra o item (a).

Figura 162 – Triângulos com a mesma área



Fonte: DEaD | IFCE

Se G é o ponto construído da mesma forma que H , a partir do triângulo DEF , então $DEFG$ é um paralelogramo cuja área é o dobro da área do triângulo DEF . Pelo Teorema 8.4, se $AB \equiv DE$, então $a(ABC) = \frac{1}{2} \cdot a(ABHC) = \frac{1}{2} \cdot a(DEFG) = a(DEF)$ e isso mostra o item (b).

De acordo com o Corolário 8.1, a área do paralelogramo $ABHC$ é igual a $a(ABHC) = \overline{AB} \cdot h$. Assim, a área do triângulo ABC é dada por

$$a(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot d(C, AB)}{2}$$

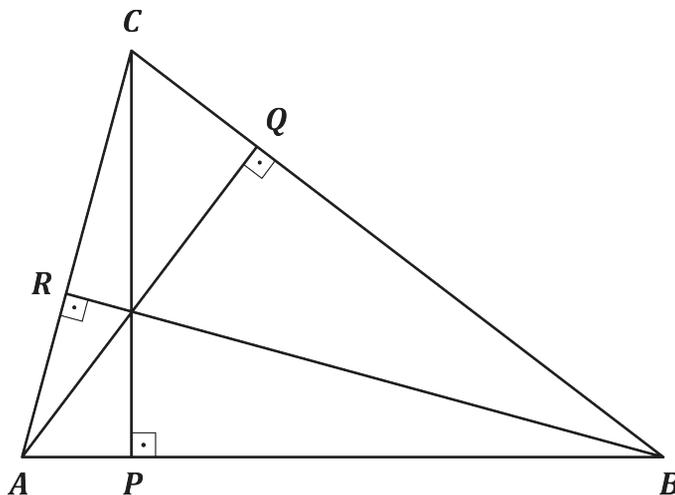
Da mesma forma, $a(DEF) = \frac{\overline{DE} \cdot d(F, DE)}{2}$. Se, $AB \equiv DE$ e $a(ABC) = a(DEF)$, então $\frac{\overline{AB} \cdot d(C, AB)}{2} = \frac{\overline{DE} \cdot d(F, DE)}{2}$, o que implica que $d(C, AB) = d(F, DE)$. Isso demonstra o item (c). ■

Como consequência do Teorema 8.5, obtemos uma fórmula para a área do triângulo.

Seja ABC um triângulo, com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Sejam P , Q e R os pés das perpendiculares baixadas dos vértices C , A e B , respectivamente, aos lados opostos (figura 163). Seja $h_a = \overline{AQ}$, $h_b = \overline{BR}$ e $h_c = \overline{CP}$ as alturas relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente. Então

$$a(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

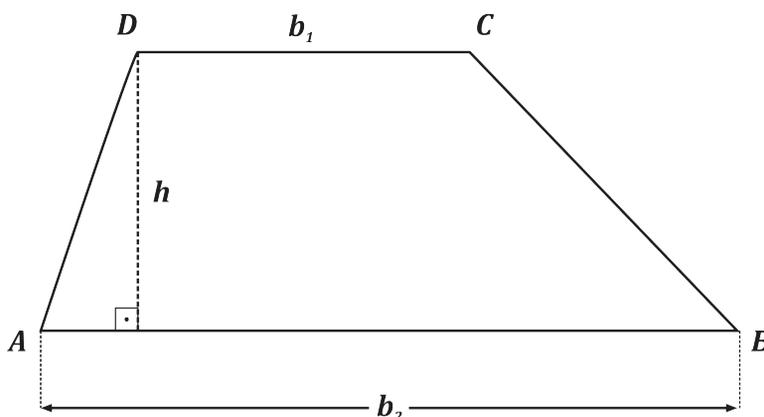
Figura 163 – Um triângulo e suas alturas



Fonte: DEaD | IFCE

Além das áreas de quadrados, retângulos e paralelogramos, podemos calcular as áreas de alguns outros quadriláteros especiais através de fórmulas simples. Vamos começar, deduzindo uma fórmula para o cálculo da área de um trapézio.

Figura 164 – Um trapézio $ABCD$ com suas bases b_1 e b_2 e sua altura h



Fonte: DEaD | IFCE

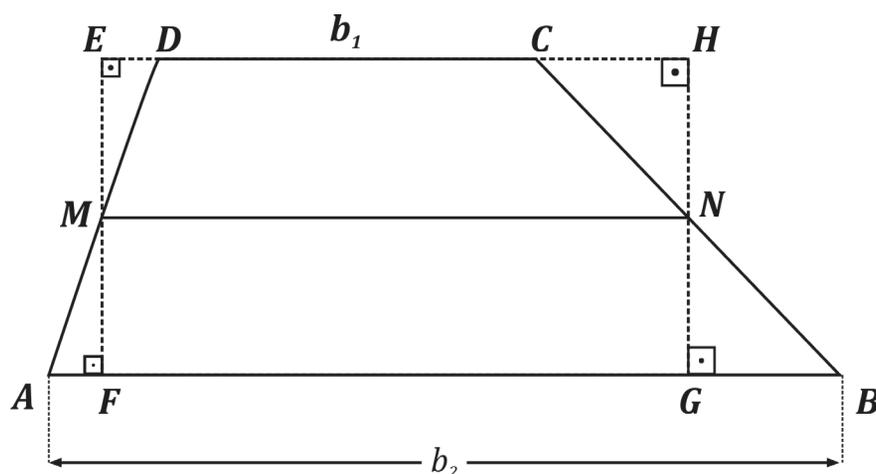
Se b_1 e b_2 são as bases menor e maior de um trapézio $ABCD$ e h é sua altura (figura 164), então a área do trapézio é dada por

$$a(ABCD) = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

Para justificar a fórmula acima, vamos mostrar que a área do trapézio $ABCD$ é igual à área do retângulo $EFGH$ (figura 165). Esse retângulo é construído da seguinte forma: Sejam M e N os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio: AD e BC , respectivamente. O segmento MN é a *base média* do trapézio, que definimos na Aula 5. Pelo Teorema 5.5, o comprimento da base média é a média aritmética das bases do trapézio:

$$\overline{MN} = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

Figura 165 – O trapézio $ABCD$ e o retângulo $EFGH$



Fonte: DEaD | IFCE

Pelos pontos M e N , tracemos perpendiculares às bases do trapézio, que intersectam as retas AB e CD nos pontos F, G e H, E , respectivamente (figura 165). Deixaremos como exercício ao leitor, verificar que $\triangle AFM \cong \triangle DEM$ e $\triangle BNG \cong \triangle CNH$ (veja o exercício 4). Sendo congruentes, esses triângulos têm a mesma área, ou seja, $a(\triangle AFM) = a(\triangle DEM)$ e $a(\triangle BNG) = a(\triangle CNH)$.

Uma rápida inspeção na figura 165 nos permite concluir que o retângulo $EFGH$ pode ser obtido a partir do trapézio $ABCD$, eliminando-se os triângulos AFM e BNG e acrescentando-se os triângulos DEM e CNH . Essas substituições de triângulos não mudam a área da figura, porque cada triângulo retirado é substituído por um triângulo congruente.

Assim, a área do trapézio $ABCD$ é igual à área do retângulo $EFGH$ e, como a base deste retângulo mede $\overline{FG} = \overline{MN} = \frac{b_1 + b_2}{2}$ e a altura do retângulo mede h , obtemos

$$a(ABCD) = a(EFGH) = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

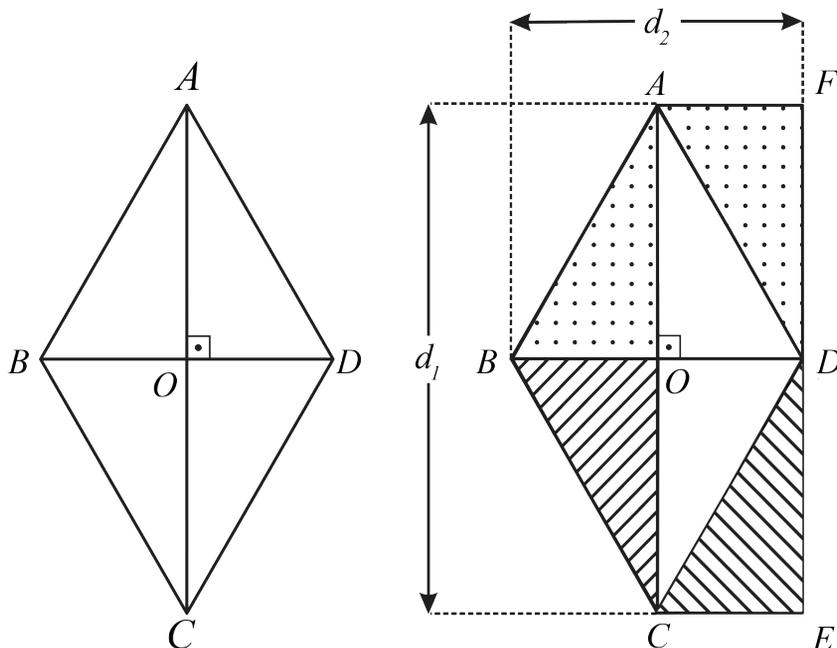
A área de um losango também pode ser calculada através de uma expressão relativamente simples. De fato,

Se d_1 e d_2 são as medidas das diagonais de um losango $ABCD$, então a área desse losango é dada por

$$a(ABCD) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Vamos demonstrar a validade da fórmula acima do seguinte modo: primeiro, como todo losango é um paralelogramo (veja a Aula 5), o ponto O de interseção das duas diagonais divide cada uma delas ao meio, isto é, $\overline{BO} = \overline{OD}$ e $\overline{AO} = \overline{OC}$ (veja a figura 166). Também vimos na Aula 5, Teorema 5.6, que as diagonais de um losango são perpendiculares. Assim, os triângulos BOA , BOC , DOA e DOC são todos retângulos e com catetos dois a dois congruentes. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, esses quatro triângulos são congruentes.

Figura 166 – A diagonal de um losango o divide em quatro triângulos retângulos congruentes, que podem ser reagrupados para formarem um retângulo



Reposicionando os triângulos BOA e BOC como na figura 166, obtemos a partir do losango $ABCD$ o retângulo $ACEF$, cujos lados medem \overline{AC} e $\overline{CE} = \overline{OD} = \frac{\overline{BD}}{2}$.

Assim, a área do losango $ABCD$ é igual à área do retângulo $ACEF$, ou seja,

$$a(ABCD) = a(ACEF) = \overline{AC} \cdot \overline{CE} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

onde $d_1 = \overline{AC}$ e $d_2 = \overline{BD}$ são as medidas das diagonais do losango.

Com isso encerramos este primeiro tópico, em que abordamos a noção de área, fundamentamos essa noção e calculamos a área de algumas figuras planas elementares. No tópico seguinte, obteremos outras fórmulas para calcular a área de um triângulo, calcularemos a área de um quadrilátero inscrito em um círculo e desenvolveremos alguns métodos para construir figuras equivalentes a uma figura dada.

Mais algumas fórmulas para o cálculo de áreas

OBJETIVOS

- Obter fórmulas para o cálculo da área de figuras planas mais gerais
- Construir figuras equivalentes a uma figura dada usando régua e compasso

Este segundo tópico é dedicado a dois temas. O primeiro é o cálculo da área de figuras planas, continuando a abordagem que iniciamos no primeiro tópico, mas abordando figuras mais gerais. Começaremos obtendo mais algumas importantes fórmulas para calcular a área de um triângulo. Em particular, obteremos a fórmula de Heron, que permite calcular a área de um triângulo em função de seus lados. Depois calcularemos a área de quadriláteros inscritíveis usando o método desenvolvido pelo matemático indiano Brahmagupta. Finalmente, calcularemos a área de polígonos regulares e de círculos. O segundo tema é a construção, com régua e compasso, de figuras que têm a mesma área que uma figura dada.

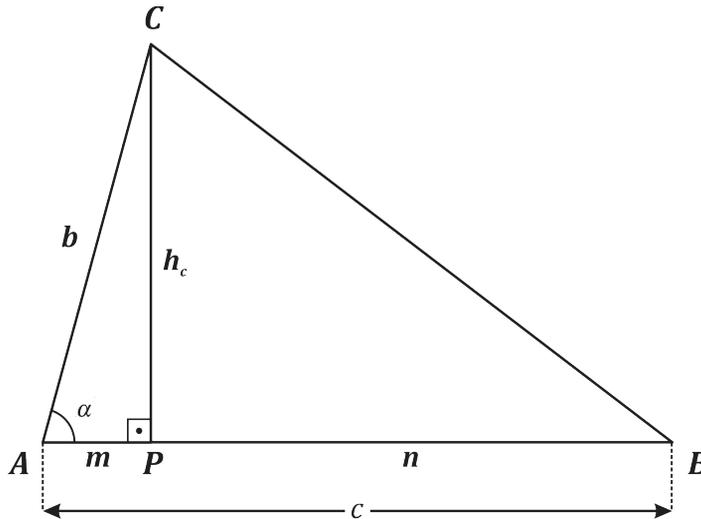
O teorema a seguir fornece mais algumas fórmulas para o cálculo da área de um triângulo.

Teorema 8.6 Seja ABC um triângulo, com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Seja R o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC . Então

$$a(ABC) = \frac{ab}{2} \cdot \text{sen} \gamma = \frac{ac}{2} \cdot \text{sen} \beta = \frac{bc}{2} \cdot \text{sen} \alpha = \frac{abc}{4R}$$

Demonstração: Pelo que estudamos na Aula 7, sabemos que o seno do ângulo α pode ser calculado, no triângulo APC , como $\text{sen} \alpha = \frac{h_c}{b}$, logo $h_c = b \cdot \text{sen} \alpha$.

$$\text{Figura 167} - a(ABC) = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{bc}{2} \cdot \text{sen} \alpha$$



Fonte: DEaD | IFCE

Além disso, $a(ABC) = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Substituindo o valor de h_c nessa última expressão, obtemos: $a(ABC) = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c \cdot b \text{sen} \alpha}{2}$. De modo análogo, obtemos as outras expressões envolvendo ângulos no enunciado.

Quanto à igualdade $a(ABC) = \frac{abc}{4R}$, ela segue da Lei dos Senos (Teorema 7.6). De fato, por esse teorema, $\frac{a}{\text{sen} \alpha} = 2R$, logo $\text{sen} \alpha = \frac{a}{2R}$. Substituindo o valor do seno de α na expressão da área do triângulo, obtemos:

$$a(ABC) = \frac{c \cdot b \text{sen} \alpha}{2} = \frac{abc}{4R}$$

Isso encerra a demonstração. ■

O próximo resultado fornece um modo de calcular a área de um triângulo conhecendo-se apenas as medidas de seus lados. Ele foi obtido pelo matemático *Heron de Alexandria* (10 d.C. – 70 d.C.).

A fórmula de Heron aparece na sua principal obra sobre geometria, chamada *Métrica*. Heron de Alexandria foi também um pioneiro na mecânica, tendo construído a primeira máquina a vapor. Para ver a máquina de Heron em funcionamento, confira o vídeo https://www.youtube.com/watch?v=ZDp_LjbE8Dc



Teorema 8.7 (Fórmula de Heron) Se os lados de um triângulo

ABC são a , b e c , e se $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro desse triângulo, então

$$a(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Demonstração: Por simplicidade, vamos escrever $T = a(ABC)$. Pelo Teorema 8.6,

sabemos que $T = \frac{bc}{2} \cdot \sin \alpha$, em que b , c e α são como na figura 167. Dessa última igualdade, segue que $\sin^2 \alpha = \frac{4T^2}{b^2c^2}$. Da relação trigonométrica fundamental (veja a aula 7) segue que $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4T^2}{b^2c^2}$, ou seja,

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4T^2}{b^2c^2} \quad (8.1)$$

Ainda tomando como base a figura 167, seja $m = \overline{AP}$ e seja $n = \overline{PB}$. Temos que $c = m + n$, isto é, $n = c - m$. Elevando ao quadrado, obtemos

$$n^2 = c^2 - 2cm + m^2 \quad (8.2)$$

O Teorema de Pitágoras, aplicado aos triângulos APC e BPC , fornece as igualdades $b^2 = m^2 + h_c^2$ e $a^2 = n^2 + h_c^2$. Eliminado h_c^2 dessas igualdades, obtemos $b^2 - m^2 = a^2 - n^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + n^2 - m^2$. Substituindo n^2 pela expressão dada em (8.2), obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (8.3)$$

Observando o triângulo APC na figura 167, vemos que $\cos \alpha = \frac{m}{b}$, logo $m = b \cdot \cos \alpha$. Substituindo em (8.3), obtemos a identidade

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (8.4)$$

Essa igualdade é chamada **lei dos cossenos**. Ela pode ser vista como uma generalização do Teorema de Pitágoras (veja o exercício 3).

Usando as identidades (8.1) e (8.4), obtemos a igualdade

$$1 - \frac{4T^2}{b^2c^2} = \cos^2 \alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2$$

Desenvolvendo essa última igualdade, temos:

$$\frac{b^2c^2 - 4T^2}{b^2c^2} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

que é equivalente a

$$16T^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Fatorando o lado direito dessa igualdade, obtemos

$$16T^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

Podemos continuar a fatoração:

$$16T^2 = ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \quad (8.5)$$

Lembrando que $s = \frac{a+b+c}{2}$, temos que $a+b+c = 2s$,
 $b+c-a = 2s - 2a = 2(s-a)$, $a+b-c = 2s - 2c = 2(s-c)$ e
 $a-b+c = 2s - 2b = 2(s-b)$. Substituindo em (8.5), obtemos, enfim, a identidade procurada:

$$16T^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

isto é,

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Isso conclui a demonstração. ■



Brahmagupta (Em sânscrito: ब्रह्मगुप्त) foi um dos grandes matemáticos da antiga Índia. Estudou no observatório de Ujain, onde teve contato com os escritos clássicos de Euclides, Heron, Ptolomeu, Diofanto e Apolônio, e também de seu antecessor Aryabatha. Como era tradição na matemática indiana, Brahmagupta escrevia seus tratados em forma de poemas em sânscrito. É considerado o pai da aritmética, da álgebra (*kuttaka*, em sânscrito) e da análise numérica. Foi pioneiro no uso do zero e dos números negativos. No ano 628, ele forneceu a primeira solução geral da equação quadrática.

A fórmula de Heron admite generalização para quadriláteros *inscritíveis*. Essa generalização foi obtida pelo matemático e astrônomo indiano *Brahmagupta* que viveu de 598 a 668 d.C. Lembremos que um quadrilátero é dito inscritível quando o círculo determinado por três de seus quatro vértices A, B, C e D também passa pelo quarto vértice.

Teorema 8.8 (Brahmagupta) Se o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, a, b, c, d são as medidas de seus lados, e

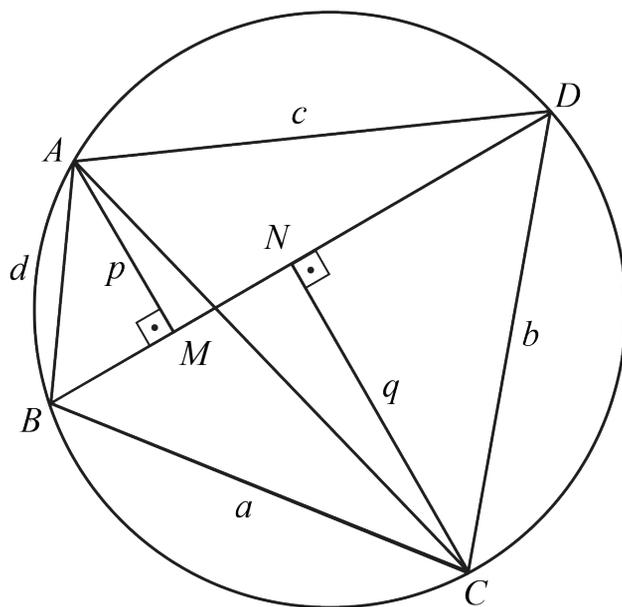
$s = \frac{a+b+c+d}{2}$ é o seu semiperímetro, então

$$a(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (8.6)$$

Demonstração: A diagonal BD divide o quadrilátero $ABCD$ em dois triângulos, ABD e BCD (figura 168). Assim,

$$a(ABCD) = a(ABD) + a(BCD) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AM} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CN}$$

Figura 168 – A área do quadrilátero $ABCD$ é a soma das áreas dos triângulos ABD e BCD



Fonte: DEaD | IFCE

Denotando $\overline{BD} = u$, $\overline{AM} = p$ e $\overline{CN} = q$, podemos escrever

$$a(ABCD) = \frac{u}{2} \cdot (p + q)$$

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABM e AMD , obtemos $d^2 = \overline{BM}^2 + p^2$ e $c^2 = \overline{MD}^2 + p^2$. Assim,

$$\begin{aligned} d^2 - c^2 &= \overline{BM}^2 - \overline{MD}^2 = (\overline{BM} + \overline{MD}) \cdot (\overline{BM} - \overline{MD}) = \overline{BD} \cdot (\overline{BM} - \overline{MD}) \\ &= u \cdot (\overline{BM} - \overline{MD}) \quad (8.8) \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos obter, a partir de $a^2 = \overline{BN}^2 + q^2$ e $b^2 = \overline{ND}^2 + q^2$, que

$$b^2 - a^2 = u \cdot (\overline{ND} - \overline{BN}) \quad (8.9)$$

De (8.8) e (8.9), segue que

$$(b^2 - a^2) + (d^2 - c^2) = u \cdot (\overline{BM} - \overline{MD} - \overline{BN} + \overline{ND})$$

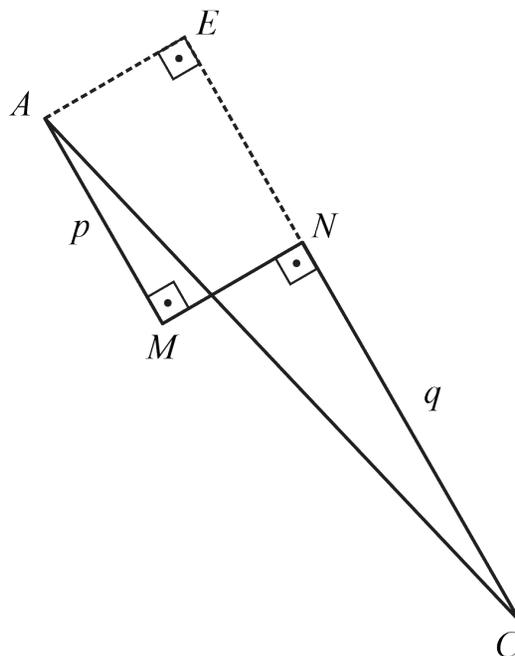
Agora, $\overline{BN} = \overline{BM} + \overline{MN}$ e $\overline{MD} = \overline{MN} + \overline{ND}$ (veja a figura 168). Assim,

$$-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = -2u \cdot \overline{MN}$$

ou seja,

$$\overline{MN} = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2u} \quad (8.10)$$

Figura 169 – Teorema de Pitágoras em ACE : $\overline{MN}^2 + (p+q)^2 = \overline{AC}^2$



Como AM e CN são perpendiculares a BD , as retas suporte desses dois segmentos são paralelas. Assim, a reta que passa por A e é perpendicular a AM também é perpendicular a CN e encontra o prolongamento de CN no ponto E , formando o triângulo retângulo ACE (figura 169).

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACE da figura 169, obtemos: $\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{AC}^2$. Denotando $\overline{AC} = v$ e observando que $\overline{AE} = \overline{MN}$ e $\overline{EC} = p + q$, obtemos

$$\overline{MN}^2 + (p + q)^2 = v^2 \quad (8.11)$$

Vamos denotar a área do quadrilátero $ABCD$ por $\Delta = a(ABCD)$. Elevando a expressão (8.7) ao quadrado, obtemos $\Delta^2 = \frac{u^2}{4} \cdot (p + q)^2$. Substituindo o valor encontrado em (8.11) para $(p + q)^2$, obtemos

$$\Delta^2 = \frac{u^2}{4} \cdot (v^2 - \overline{MN}^2)$$

Substituindo o valor de \overline{MN} encontrado em (8.10), obtemos

$$\Delta^2 = \frac{u^2}{4} \cdot \left(v^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2u} \right)^2 \right) = \frac{1}{16} \left(4u^2v^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \right)$$

De acordo com o Teorema 7.5 (Teorema de Ptolomeu), $uv = ac + bd$. Assim,

$$\Delta^2 = \frac{1}{16} \cdot \left(4(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \right) \quad (8.12)$$

A expressão (8.12) acima já nos informa a área do quadrilátero $ABCD$ em função exclusivamente de seus lados. No entanto, é possível simplificar essa expressão do seguinte modo:

$$\Delta^2 = \frac{1}{16} \cdot \left(2(ac + bd) - (a - b + c - d) \right) \cdot \left(2(ac + bd) + (a - b + c - d) \right) \\ = \frac{1}{16} \cdot \left(b^2 + bd + d^2 - (a^2 - ac + c^2) \right) \cdot \left(a^2 + ac + c^2 - (b^2 - bd + d^2) \right)$$

Fatorando essa última expressão, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{1}{16} \cdot \left((b+d)^2 - (a-c)^2 \right) \cdot \left((a+c)^2 - (b-d)^2 \right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (b+d+a-c) \cdot (b+d-a+c) \cdot (a+c+b-d) \cdot (a+c-b+d) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (2s-2c) \cdot (2s-2a) \cdot (2s-2d) \cdot (2s-2b) \\ &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\end{aligned}$$

Isso fornece, enfim, a identidade de Brahmagupta. ■

Uma observação complementar: se o quadrilátero Q não for necessariamente inscrito, ou seja, se for um quadrilátero geral, com lados a , b , c , d e diagonais u e v , há uma fórmula, devida ao matemático estadunidense Julian Lowell Coolidge (1873-1954):

A fórmula de Brahmagupta vale apenas para quadriláteros inscritíveis, ou cíclicos, que são os quadriláteros que podem ser inscritos em um círculo. Para quadriláteros gerais, não necessariamente inscritíveis, não é possível determinar sua área apenas com as medidas de seus lados.



$$a(Q) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4} \cdot (ac+bd+uv)(ac+bd-uv)}$$

Não vamos demonstrar a validade dessa fórmula aqui. Note que, se o quadrilátero for inscrito, então o Teorema de Ptolomeu (Teorema 7.5) garante que a área é dada como no teorema de Brahmagupta. A expressão acima é também conhecida como *fórmula de Bretschneider* ou *fórmula de Strehlke*.

Até aqui calculamos as áreas de figuras poligonais, triângulos e quadriláteros. De um modo geral, não há fórmulas que permitam o cálculo da área de um polígono qualquer de n lados. Um método que pode ser usado para o cálculo da área de uma figura desse tipo envolve a divisão do polígono em triângulos. No caso em que o polígono é *regular* (veja a aula 5), é possível dividi-lo em triângulos todos congruentes entre si. Neste caso, podemos encontrar uma expressão geral para a área.



Teorema 8.9 Seja P_n um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio r . A área desse polígono é dada por

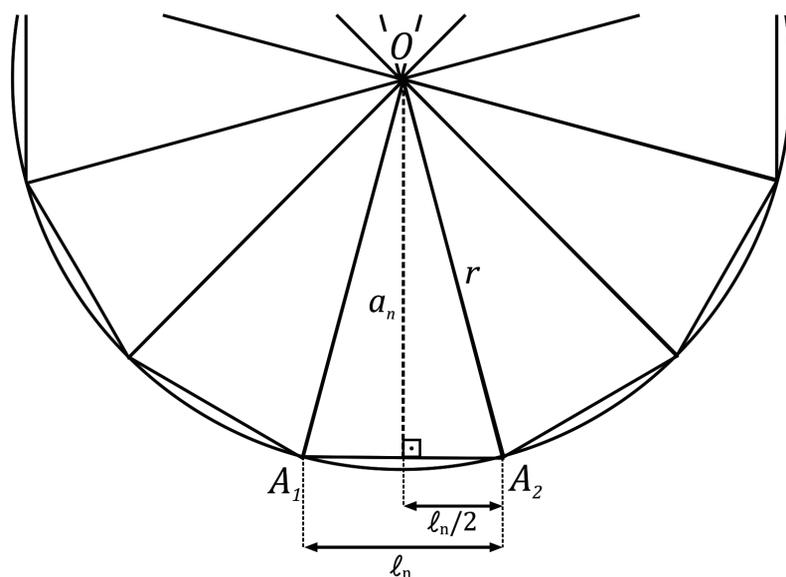
$$a(P_n) = \frac{n \cdot \ell_n}{4} \cdot \sqrt{4r^2 - \ell_n^2} \quad (8.13)$$

onde ℓ_n é a medida do lado do polígono regular P_n .

O **apótema** de um polígono regular é o segmento de reta que liga o centro do círculo circunscrito nesse polígono ao ponto médio de qualquer dos lados do polígono. Também chamamos o comprimento desse segmento de apótema. Como o polígono é regular, o apótema não vai depender do lado do polígono que escolhermos. Por definição, o apótema é a mediana relativa à base de um triângulo isósceles cujos lados iguais são raios do círculo circunscrito, o triângulo OA_1A_2 na figura 170. Como esse triângulo é isósceles, o apótema coincide com a altura. Os apótemas de alguns polígonos regulares, em função de seus lados são: $a_3 = \frac{\ell_3 \sqrt{3}}{2}$ (triângulo equilátero), $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$ (quadrado), $a_6 = \frac{\ell_6 \sqrt{3}}{2}$ (hexágono regular).

Demonstração: O polígono P_n pode ser dividido em n triângulos congruentes, todos do tipo $OA_{n-1}A_n$, em que O é o centro do círculo circunscrito ao polígono e A_{n-1} e A_n são vértices consecutivos do polígono. Na figura 170, vemos uma parte do polígono P_n e alguns dos triângulos congruentes nos quais o polígono está dividido. Em destaque, podemos ver o triângulo OA_1A_2 . Como $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = r$, esse triângulo é isósceles, logo a altura relativa à base A_1A_2 é também mediana em relação a esse lado.

Figura 170 – O polígono regular P_n pode ser dividido em n triângulos congruentes



Fonte: DEaD | IFCE

A altura a_n do triângulo OA_1A_2 é o apótema do polígono regular P_n . Pelo Teorema de

Pitágoras, $a_n^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = r^2$, logo

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - \ell_n^2}$$

e a área do triângulo OA_1A_2 é

$$a(OA_1A_2) = \frac{\ell_n \cdot a_n}{2} = \frac{\ell_n}{4} \cdot \sqrt{4r^2 - \ell_n^2}$$

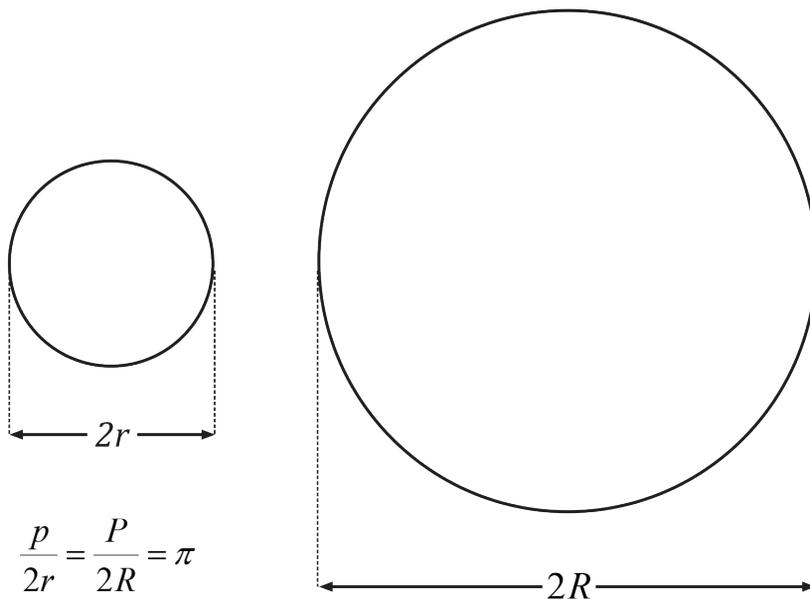
Dessa forma, como o polígono P_n é a união de n triângulos congruentes, todos com área igual à do triângulo OA_1A_2 , temos:

$$a(P_n) = \frac{n \cdot \ell_n}{4} \cdot \sqrt{4r^2 - \ell_n^2}$$

Isso encerra a demonstração. ■

Vamos, agora, usar o Teorema 8.9 para obter uma expressão para a área de um círculo de raio r . Antes, uma breve explicação sobre a definição do número π . Este número é definido como a razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro.

Figura 171 – Dois círculos são sempre semelhantes



Fonte: DEaD | IFCE

O fato básico que permite a definição do número π é que *dois círculos sempre são semelhantes* diferindo apenas pelo seu tamanho. Isso significa que a razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo tem sempre o mesmo valor, não dependendo do tamanho do círculo. Essa razão é justamente o que chamamos que π . Assim, o número π é uma expressão aritmética do fato (geométrico) de que dois círculos sempre são semelhantes.

Pela definição do número π , o perímetro P de um círculo, ou seja, o seu comprimento, depende apenas de seu raio r , sendo dado por

$$P = 2\pi r$$

Suponhamos fixado um círculo de raio r e consideremos um polígono regular de n lados, inscrito neste círculo. Quando o número de lados aumenta, o comprimento ℓ_n de cada lado fica muito pequeno, de modo que podemos desprezar o ℓ_n^2 que aparece sob a raiz quadrada na expressão (8.13). Além disso, o produto $n \cdot \ell_n$ é o perímetro do polígono P_n , que se aproxima cada vez mais do perímetro do círculo de raio r , ou seja, quando n fica muito grande, o produto $n \cdot \ell_n$ fica cada vez mais próximo de $2\pi r$.

Dessa forma, quando n aumenta, a área $a(P_n)$ do polígono P_n , dada pela expressão (8.13), se aproxima de

$$\frac{2\pi r}{4} \cdot \sqrt{4r^2} = \pi r^2$$

De um modo mais preciso, podemos dizer que, para qualquer número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n suficientemente grande, tal que o módulo da diferença entre πr^2 e a área $a(P_n)$ do polígono é menor do que ε , ou seja, $|a(P_n) - \pi r^2| < \varepsilon$.

Como a área do polígono P_n se aproxima da área do círculo quando n cresce, podemos supor que a área do círculo C_r , de raio r , é dada por

$$a(C_r) = \pi r^2 \quad (8.14)$$

Para verificar rigorosamente a validade da expressão (8.14), precisamos aplicar o *Método da Exaustão*, visto na aula 7 e que já usamos no início desta aula para determinar a área de um quadrado que tem lado irracional.

Não exibiremos o argumento completo aqui, mas daremos uma ideia de como o Método da Exaustão funciona neste caso.

Para mostrarmos que vale a igualdade em (8.14), basta mostrarmos que não podem ocorrer as desigualdades $a(C_r) < \pi r^2$ e $a(C_r) > \pi r^2$. Vamos mostrar que não ocorre a primeira desigualdade. Para isso, notemos que, para um número natural n qualquer, o polígono P_n de n lados está sempre contido no círculo C_r , logo

$a(P_n) \leq a(C_r)$ (*). Se ocorresse $a(C_r) < \pi r^2$, teríamos $\varepsilon = \frac{\pi r^2 - a(C_r)}{2} > 0$.

Por outro lado, existe um número natural n , tal que $|a(P_n) - \pi r^2| < \varepsilon$.

Como, neste caso, $a(P_n) \leq a(C_r) < \pi r^2$, podemos escrever

$\pi r^2 - a(P_n) < \varepsilon = \frac{\pi r^2 - a(C_r)}{2} < \pi r^2 - a(C_r)$. Mas isso implica que $a(P_n) > a(C_r)$

para algum número natural n , o que contradiz a desigualdade (*). Portanto, não pode ocorrer a desigualdade $a(C_r) < \pi r^2$.

A demonstração de que a desigualdade $a(C_r) > \pi r^2$ também não pode ocorrer é similar, mas envolve a construção de polígonos regulares *circunscritos* ao círculo, e não vamos fazê-la aqui (veja o exercício 5). Eliminadas as possibilidades $a(C_r) < \pi r^2$ e $a(C_r) > \pi r^2$, podemos concluir que $a(C_r) = \pi r^2$.

Vamos agora tratar do problema conhecido como **problema da quadratura**. Ele consiste no seguinte:

Dada uma figura plana F , construir com régua e compasso um quadrado que tenha área igual à área de F .

Nos *Elementos*, Euclides chama figuras de mesma área de iguais, cabendo ao leitor deduzir pelo contexto o que isso significa. Em textos modernos, figuras de mesma área são chamadas equivalentes:

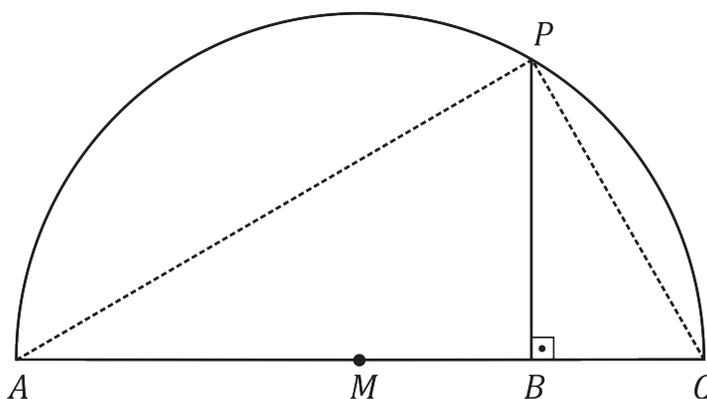
A seguir, vamos resolver o problema da quadratura para polígonos (não necessariamente convexos). Primeiramente, devemos resolver o problema para triângulos.

Dizemos que duas figuras são **equivalentes** se possuírem a mesma área.

Quadratura de triângulos: Seja T um triângulo de base a e altura, relativa a essa base, igual a h . Um quadrado Q que tenha a mesma área que T deve ter lado ℓ tal que $\ell^2 = \frac{a \cdot h}{2}$. Pelo que estudamos na aula 5, para construirmos o quadrado basta construirmos o seu lado. Assim, precisamos construir um segmento cujo comprimento ℓ seja a média geométrica de segmentos com comprimento a e $\frac{h}{2}$.

Considere os segmentos AB e BC tais que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = \frac{h}{2}$. O segmento AC é obtido justapondo-se os segmentos AB e BC . Seja M o ponto médio de AC (figura 172). Trace um semicírculo de centro M e raio MA . Pelo ponto B , trace uma perpendicular à reta AC , que intersecta o semicírculo no ponto P . O segmento BP tem como medida a média geométrica de a e $\frac{h}{2}$.

Figura 172 – Construção da média geométrica de dois segmentos

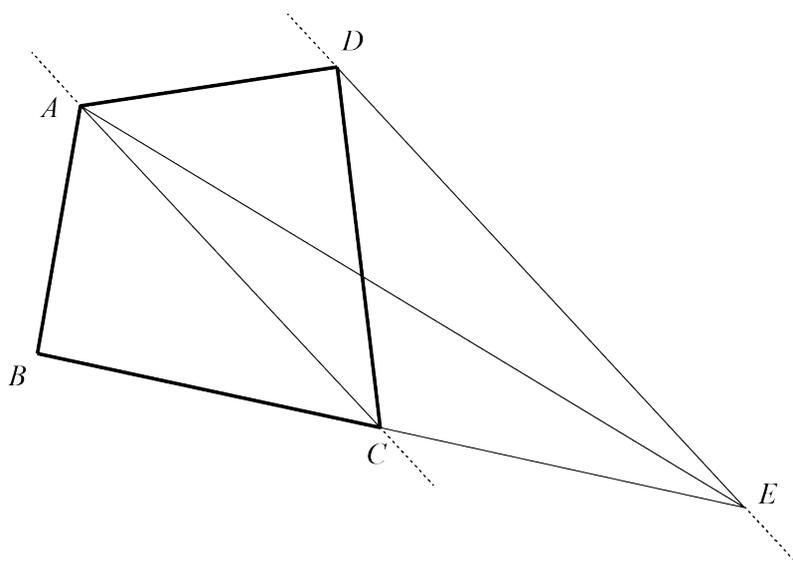


Fonte: DEaD | IFCE

Este fato é consequência do exercício 5 da aula 7 e do fato de $\triangle ACP$ ser retângulo em P , por estar inscrito em um semicírculo. Portanto, o quadrado de lado BP tem a mesma área que o triângulo dado, isto é, é equivalente a esse triângulo.

Quadratura de quadriláteros: Considere um quadrilátero $ABCD$. Uma vez que já sabemos como construir um quadrado que tenha área igual a de um triângulo dado, para resolver o problema da quadratura do quadrilátero $ABCD$, basta construir um triângulo com mesma área.

Figura 173 – O triângulo ABE tem a mesma área que o quadrilátero $ABCD$

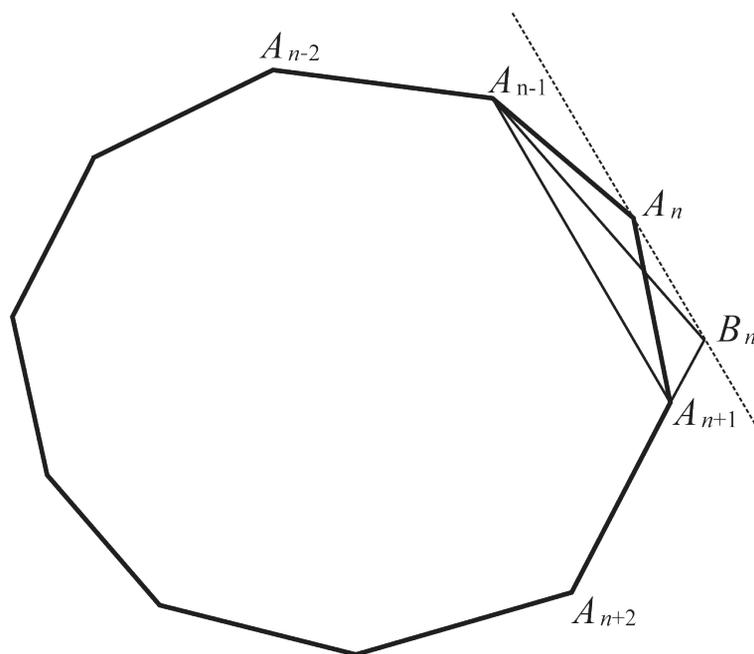


Fonte: DEaD | IFCE

Para fazer essa construção, observemos a figura 173. Pelo ponto D trace a reta DE , paralela à diagonal AC , que intersecta o prolongamento do lado BC no ponto E . Pelo Teorema 8.5, os triângulos ACD e ACE , de mesma base e mesma altura, têm a mesma área. Assim, $a(ABCD) = a(ABC) + a(ACD) = a(ABC) + a(ACE) = a(ABE)$. Essa construção também funciona para quadriláteros não convexos (veja o exercício 7).

Quadratura de polígonos com $n \geq 5$ lados: Vamos mostrar que, dado um polígono P_n de n lados, é possível construir-se um polígono P_{n-1} de $n-1$ lados com a mesma área, usando régua e compasso. Com isso podemos construir, em um número finito de passos, um triângulo com a mesma área e, portanto, um quadrado com a mesma área.

Figura 174 – Construção de um polígono de mesma área e um lado a menos que um polígono dado



Fonte: DEaD | IFCE

Sejam A_{n-1}, A_n e A_{n+1} três vértices consecutivos do polígono P_n (figura 174). Considere a reta $A_n B_n$ que passa pelo vértice A_n e é paralela à diagonal $A_{n-1} A_{n+1}$ e intersecta o prolongamento do lado $A_{n+1} A_{n+2}$ no ponto B_n . Novamente pelo Teorema 8.5, os triângulos $A_{n-1} A_{n+1} A_n$ e $A_{n-1} A_{n+1} B_n$ têm a mesma área. Assim, o polígono inicial P_n , que tem vértices consecutivos $\cdots A_{n-2} A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{n+2} \cdots$, tem a mesma área que o polígono P_{n-1} que tem vértices consecutivos $\cdots A_{n-2} A_{n-1} B_n A_{n+2} \cdots$ e $n-1$ vértices, pois os vértices A_n e A_{n+1} foram substituídos pelo vértice B_n . Como o número de vértices de um polígono coincide com o número de lados, o polígono P_{n-1} tem $n-1$ lados.



Um número real complexo é dito **algébrico** se for raiz de um polinômio com coeficientes racionais. Por exemplo, os números $\sqrt{2}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[5]{7}$ e i são algébricos porque são raízes dos polinômios $x^2 - 2$, $x^2 - x - 1$, $x^5 - 7$ e $x^2 + 1$. Um número que não é algébrico é chamado de **transcendente**. Em 1882, o matemático alemão Ferdinand von Lindemann (1852-1939) demonstrou que o número π é transcendente. Em geral, demonstrar que um determinado número é transcendente é uma tarefa bastante difícil.

Assim, o problema da quadratura pode ser resolvido para qualquer polígono. Uma pergunta natural que surge é o problema da **quadratura do círculo**, isto é, *podemos construir com régua e compasso um quadrado equivalente a um círculo dado?* A resposta é **não**, mas esse é um resultado profundo da Matemática, que só pode ser demonstrado com recursos relativamente sofisticados de Álgebra. Aqui, o papel central é desempenhado pelo número π , e o principal motivo para a impossibilidade dessa construção é o fato de π ser um número *transcendente*.

Vamos finalizar o nosso texto voltando ao primeiro teorema que mencionamos, na Aula 1. Você lembra dele? O *Teorema de Pitágoras*, que já demonstramos na aula 7, usando semelhança de triângulos. Esse teorema aparece nos *Elementos* como a proposição 47 do Livro I. Como Euclides só desenvolveu a teoria da semelhança de triângulos no Livro VI dos *Elementos*, certamente ele não usou semelhança para demonstrar o famoso resultado sobre triângulos retângulos. A seguir, exibiremos o argumento de Euclides para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras já era conhecido na China há cerca de 3000 anos. Lá, esse resultado era chamado de *regra Gougu*. Na Índia, ele também está presente nos *Sulba Sutras* (~ 300 a.C.), manuais antigos sobre rituais e construção de altares.



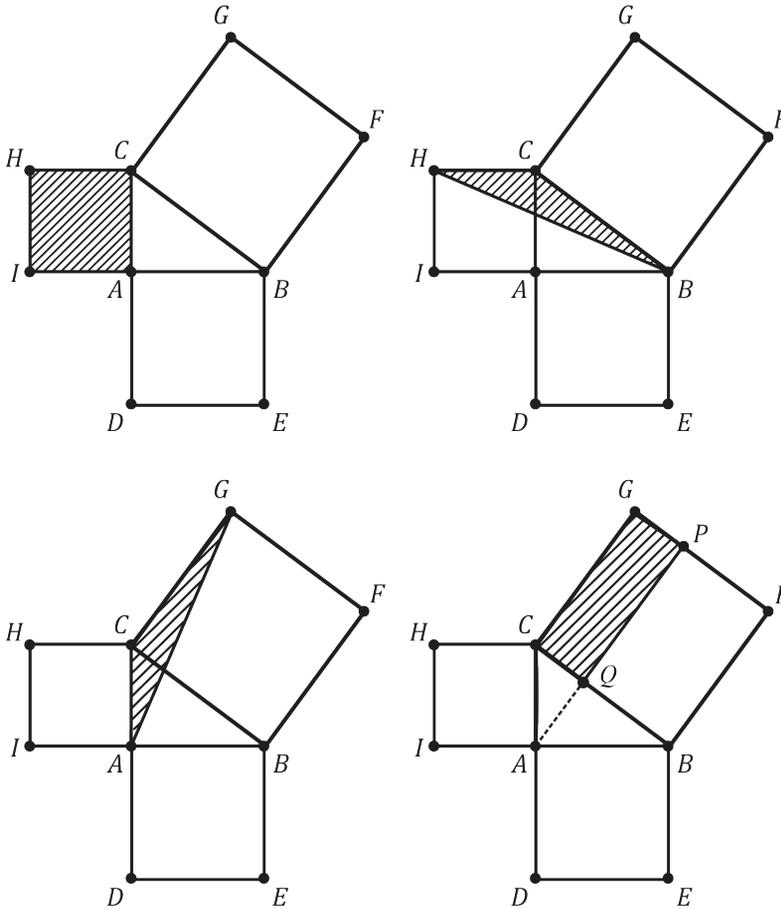
Teorema 8.10 (Elementos, Livro I, Proposição 47 – Teorema de Pitágoras) O quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é a soma dos quadrados construídos sobre os catetos desse triângulo.

Demonstração (Euclides): Na figura 175, o triângulo HCB tem a mesma base e a mesma altura do quadrado $ACHI$, logo tem metade da sua área. Os triângulos HCB e ACG são congruentes, pelo caso LAL, pois $HC \equiv AC$, $CB \equiv CG$ e $\angle HCB \equiv \angle ACG$.

O triângulo ACG e o retângulo $CQPG$ têm a mesma base e a mesma altura, logo a área do retângulo é o dobro da área do triângulo. Assim,

$$a(ACHI) = 2 \cdot a(HCB) = 2 \cdot a(ACG) = a(CQPG)$$

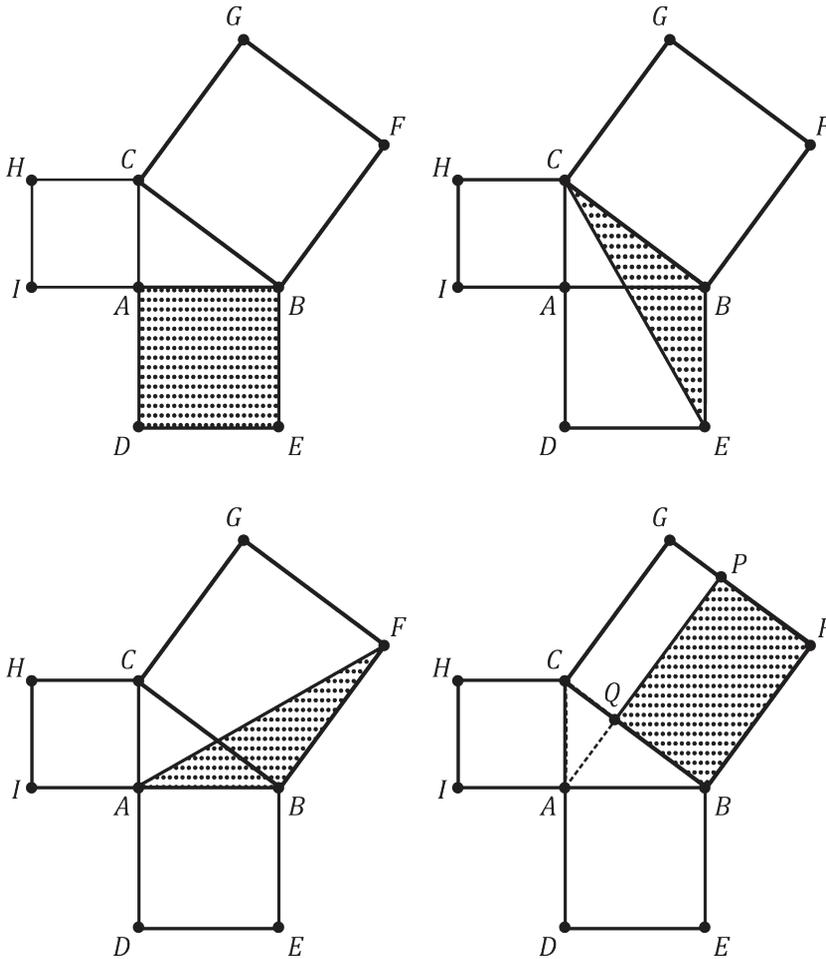
Figura 175 – O quadrado $ACHI$ é equivalente ao retângulo $CQPG$



Fonte: DEaD | IFCE

De modo análogo, na figura 176, o triângulo BCE tem a mesma base e a mesma altura do quadrado $ADEB$, logo tem metade da sua área. Os triângulos BCE e BFA são congruentes, pelo caso LAL, pois $BE \equiv BA$, $BC \equiv BF$ e $\angle EBC \equiv \angle ABF$.

Figura 176 – O quadrado $ADEB$ é equivalente ao retângulo $BFPQ$



Fonte: DEaD | IFCE

O triângulo BFA e o retângulo $BFPQ$ têm a mesma base e a mesma altura, logo a área do retângulo é o dobro da área do triângulo. Assim,

$$a(ADEB) = 2 \cdot a(BCE) = 2 \cdot a(BFA) = a(BFPQ)$$

Como a soma das áreas dos retângulos $CQPG$ e $BFPQ$ é a área do quadrado $CBFG$, temos que a área desse quadrado é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Isso encerra a demonstração. ■

O Livro I dos *Elementos* termina com a Proposição 48, que é a recíproca do Teorema de Pitágoras. Com as ferramentas que já desenvolvemos, podemos demonstrar essa recíproca com relativa facilidade (veja o exercício 8).

E com a demonstração clássica de Euclides para o Teorema de Pitágoras,

encerramos nosso curso de Geometria Plana e Construções Geométricas. Espero que você tenha aproveitado bem este curso, tenha aprendido algumas coisas novas, tenha se divertido e se deleitado com a beleza dos teoremas e de suas demonstrações.

Tivemos a oportunidade, neste curso, de estudar um conhecimento milenar, que acompanha o ser humano desde o início da civilização e tem se desenvolvido ao longo dos séculos. No decorrer de tanto tempo, o mundo mudou bastante: civilizações desapareceram e outras surgiram, idiomas, lendas e mitos caíram no esquecimento, enquanto outros emergiram. Mas os teoremas resistem, impávidos e colossais. Mais resistentes do que as grandes pirâmides e mais perenes do que o mar, estarão neste mundo enquanto houver seres humanos capazes e dispostos a estudá-los, admirá-los e usá-los em seu proveito. A Matemática é um grande feito da humanidade e a Geometria é uma espetacular prova de sua dignidade.

Muito obrigado a todos pela atenção. Espero encontrá-los em outros cursos. Um grande abraço!



1. Se duas figuras planas F_1 e F_2 são tais que $F_1 \subset F_2$, então $a(F_1) \leq a(F_2)$. Demonstre esse fato usando, para isso, a igualdade entre conjuntos

$$F_2 = F_1 \cup (F_2 \setminus F_1)$$

2. Na demonstração do Teorema 8.2, afirmamos que os dois retângulos que aparecem na figura 158 são congruentes. Usando a definição de congruência de polígonos estabelecida no texto, mostre que esses dois retângulos são de fato congruentes. **Sugestão:** Divida os dois retângulos em triângulos e mostre que esses triângulos são congruentes.
3. Verifique que a lei dos cossenos, obtida na demonstração da fórmula de Heron, é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Para isso, faça $\alpha = 90^\circ$ na identidade (8.4). Lembre-se de que $\cos 90^\circ = 0$.
4. Mostre que, na figura 165, $\triangle AFM \equiv \triangle DEM$ e $\triangle BNG \equiv \triangle CNH$.
5. Considere o círculo C_r de raio r . Dizemos que um polígono regular de n lados Q_n é **circunscrito** ao C se cada um dos lados de Q_n é tangente a C_r .

(a) Se L_n é o lado de Q_n , mostre que a área de Q_n é igual a $a(Q_n) = \frac{n \cdot L_n \cdot r}{2}$.

(b) Siga um raciocínio análogo ao que fizemos para polígonos inscritos e mostre que a área do polígono Q_n se aproxima de πr^2 quando n cresce.

(c) Use um raciocínio análogo ao que fizemos no texto, para mostrar que a desigualdade $a(C_r) > \pi r^2$ não pode ocorrer. Isso completa a demonstração de que a área de um círculo de raio r é igual a πr^2 .

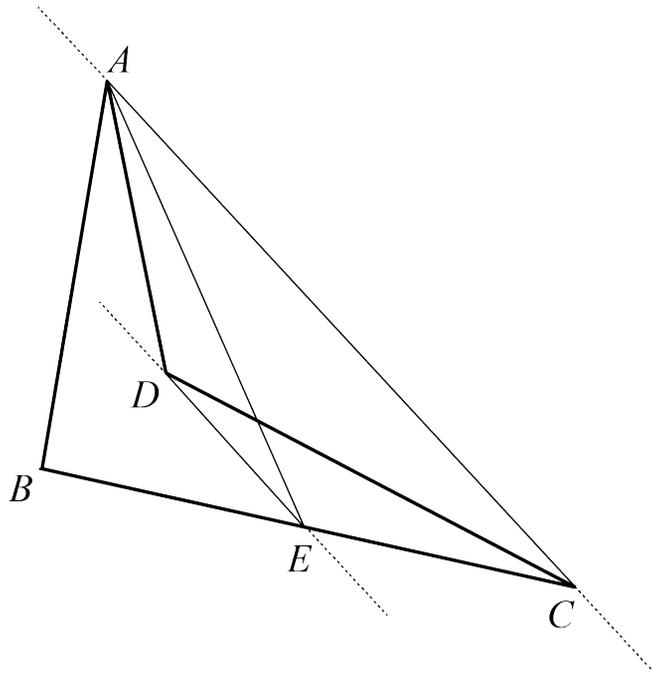
6. Uma coroa circular é uma região do plano delimitada por dois círculos concêntricos.

(a) Se $0 < r < R$ são os raios dos círculos que delimitam a coroa circular K , mostre que $a(K) = \pi(R^2 - r^2)$.

(b) Fixe o raio externo R da coroa circular K e faça o raio interno r se aproximar de R . Encontre o significado da razão $\frac{a(K)}{R-r}$ quando r fica muito próximo de R .

7. Dado um quadrilátero não convexo $ABCD$, construa um triângulo equivalente a esse quadrilátero (veja a figura 177).

Figura 177 – Um quadrilátero não convexo $ABCD$ e um triângulo equivalente ABE



Fonte: DEaD | IFCE

8. Use a lei dos cossenos para demonstrar a recíproca do Teorema de Pitágoras: Se o quadrado sobre o maior lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados sobre os dois outros lados, então esse triângulo é retângulo. Lembre-se de que a lei dos cossenos nos diz que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, em que a , b e c são as medidas dos lados do triângulo e α é o ângulo oposto ao lado a .

Referências

225

- BARBOSA, J.L.M., **Geometria euclidiana plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 222 p.
- CASTRUCCI, B. **Fundamentos da geometria: estudo axiomático do plano euclidiano**. Rio de Janeiro: LTC, 1978. 195 p.
- COXETER, H.S.M. **Non-Euclidean Geometry**. Washington D.C.: MAA, 1998, 336 p.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução Irineu Bicudo, São Paulo: Unesp, 2009, 593 p.
- FORDER, H. G., **The Foundations of Euclidean Geometry**. New York: Dover, 1958. 349p.
- GAUSS, C.F., **Disquisitiones Arithmeticae**. New Haven: Yale, 1966. 472 p.
- GRIFFITHS, H.B.; HILTON, P.J., **Matemática clássica, uma interpretação contemporânea**, Tradução Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/USP, 1975. 172 p. 2 v
- HARTSHORNE, R. **Geometry: Euclid and Beyond**. New York: Springer, 2000 526 p.
- MCCLEARY, J. **Geometry from a Differentiable Viewpoint**, Cambridge: Cambridge UP, 1994. 308 p.
- MOISE, E. E., **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1963. 419 p.
- MURTHY, T.S.B. **A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics**. Nova Dehli: New Age Int. Publ., 2009. 260 p.
- MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 417p. 2 v.

Sobre o autor

226

Angelo Papa Neto

Nasceu e foi criado em Fortaleza, onde estudou até o mestrado, em Álgebra, que concluiu na Universidade Federal do Ceará, em 2002. Estudou Álgebra também no doutorado, que concluiu em 2007 na UNICAMP, em Campinas. Trabalha no IFCE desde os tempos em que ainda se denominava Escola Técnica, tendo começado a dar aulas nesta instituição com 23 anos de idade. Desde que retornou do doutorado, em 2007, tem atuado, com bastante dedicação, no curso de Licenciatura em Matemática do Campus Fortaleza, onde orientou mais de 30 alunos em trabalhos de conclusão de curso. É um apaixonado pela Matemática e tenta transmitir, a seus alunos e a todos aqueles com os quais convive, esse amor que sente pelos números, pelas formas, pelo rigor e pela beleza dos teoremas.



Ministério da Educação
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará