ANÁLISE REAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAPES
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CEARÁ

Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

Análise Real

Ângelo Papa Neto
Zellaber Gondim Guimarães

Fortaleza, CE
2011

CRÉDITOS

Presidente
Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário da SEED
Luís Fernando Massonetto

Diretor de Educação a Distância
Celso Costa

Reitor do IFCE
Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino
Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE
Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB
Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria
José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Priscila Rodrigues de Alcântara

Elaboração do conteúdo
Ângelo Papa Neto
Zellaber Gondim Guimarães

Colaboradora
Lívia Maria de Lima Santiago

Equipe Pedagógica e Design Instrucional
Ana Cláudia Uchôa Araújo
Andréa Maria Rocha Rodrigues
Carla Anaíle Moreira de Oliveira
Cristiane Borges Braga
Eliana Moreira de Oliveira
Gina Maria Porto de Aguiar
Glória Monteiro Macedo
Iraci de Oliveira Moraes Schmidlin
Isabel Cristina Pereira da Costa
Jane Fontes Guedes
Karine Nascimento Portela
Lívia Maria de Lima Santiago
Lourdes Losane Rocha de Sousa
Luciana Andrade Rodrigues
Maria Irene Silva de Moura
Maria Vanda Silvino da Silva
Marília Maia Moreira
Maria Luiza Maia
Saskia Natália Brígido Batista

Equipe Arte, Criação e Produção Visual
Ábner Di Cavalcanti Medeiros
Benghson da Silveira Dantas
Cícero Felipe da Silva Figueiredo
Elson Felipe Gonçalves Mascarenha
Germano José Barros Pinheiro
Gilvandenys Leite Sales Júnior
José Albério Beserra
José Stelio Sampaio Bastos Neto
Lucas de Brito Arruda
Marco Augusto M. Oliveira Júnior
Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento
Samuel da Silva Bezerra

Equipe Web
Benghson da Silveira Dantas
Fabrice Marc Joye
Hanna França Menezes
Herculano Gonçalves Santos
Luiz Bezerra de Andrade FIlho
Lucas do Amaral Saboya
Ricardo Werlang
Samantha Onofre Lóssio
Tibério Bezerra Soares

Revisão Textual
Aurea Suely Zavam
Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web
Antônio Carlos Marques Júnior
Débora Liberato Arruda Hissa
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar

Secretários
Breno Giovanni Silva Araújo
Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar
Ana Paula Gomes Correia
Bernardo Matias de Carvalho
Charlene Oliveira da Silveira
Isabella de Castro Britto
Nathália Rodrigues Moreira
Virgínia Ferreira Moreira
Vivianny de Lima Santiago
Wagner Souto Fernandes

Catalogação na Fonte: Islânia Fernandes Araújo (CRB 3 - Nº 917)

213a Papa Neto, Ângelo.
Análise real / Ângelo Papa Neto, Zelalber Gondim Guimarães; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.
140p.: il. ; 27cm.

ISBN 978-85-475-0018-4

1. MATEMÁTICA - NÚMEROS REAIS. 2. CONTINUIDADE. 3. DERIVADA. 4. ANÁLISE REAL. I. Joye, Cassandra Ribeiro (Coord.). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. III. Universidade Aberta do Brasil – UAB. IV. Título.

CDD – 515

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Os números reais surgiram na Grécia Antiga, em conexão com o estudo de problemas geométricos. Com o desenvolvimento da Geometria Analítica e do Cálculo a partir do século XVII, os números reais passaram a ocupar uma posição central na Matemática e em suas aplicações. Do tratamento matemático dado a problemas clássicos da Física, emergiram as noções de função, continuidade, derivação e integração.

A partir do século XIX, houve uma crescente formalização destas noções, que passaram a ser tratadas sob um novo padrão de rigor. Os personagens centrais destas aulas serão os números reais e as funções reais de uma variável real que apresentam alguma regularidade, seja do ponto de vista topológico (continuidade), seja do ponto de vista geométrico (suavidade, ou seja, derivabilidade). Serão estudados também os teoremas centrais do Cálculo, sob um ponto de vista mais geral e mais profundo, dentro do espírito de crescente rigor que permeia o desenvolvimento dos objetos matemáticos.

Em nossa disciplina, estudaremos aspectos importantes da construção dos números reais; estudos sobre os conceitos de sequências e séries; limites, derivadas e integral de uma função.

Bons estudos!

AULA 1 | Números reais – parte 1

Olá, aluno (a),

Iniciamos aqui o nosso curso introdutório de Análise Real. Estudaremos, ao longo do curso, certas funções que possuem domínio e contradomínio formados por números reais. Assim, é importante que tenhamos uma noção precisa do que é número real e como estes números se organizam. Nesta primeira aula, estabeleceremos a noção de número real. Veremos, no tópico 1, que os números racionais não são suficientes para medirmos comprimentos de segmentos, o que nos dá uma motivação geométrica para a introdução dos números reais. No tópico 2, adotaremos um ponto de vista mais formal, definindo o conjunto dos números reais através de suas propriedades básicas.

Objetivos

- Reconhecer a necessidade do estudo dos números reais
- Identificar as propriedades que caracterizam o conjunto dos números reais
- Perceber a conexão entre números reais e pontos em uma reta

TÓPICO 1

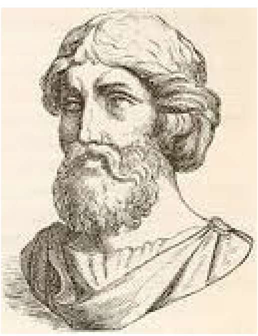
Os números irracionais

Objetivos

- Identificar as questões geométricas que motivaram o estudo de números não racionais
- Compreender os princípios básicos da teoria de Eudoxo sobre as proporções

Os números naturais – $1, 2, 3, \ldots$ – são suficientemente adequados para contar objetos e para enumerá-los. A geometria exige, a priori, a introdução de números racionais, pois o processo de medida se dá por comparação com uma unidade. Cerca de 500 anos antes de Cristo, matemáticos gregos perceberam que mesmo os números racionais não eram suficientes para realizar medições. Percebeu-se, então, a existência de magnitudes incomensuráveis, interpretadas hoje como números irracionais.

1.1 A CRISE PITAGÓRICA



Hipaso de Metaponto

A descoberta, atribuída a Hipaso de Metaponto, um pitagórico que viveu no século V a.C., de que existem segmentos de reta incomensuráveis causou uma profunda crise intelectual e filosófica na escola pitagórica. Para termos uma ideia da magnitude desta crise, basta lembrar que os pitagóricos não eram apenas um grupo pioneiro na Filosofia e na Matemática, mas também adotavam certos princípios matemáticos como dogmas religiosos. Um desses princípios era o de que quaisquer medidas poderiam ser feitas usando-se apenas números racionais, que podem ser obtidos a partir de uma unidade multiplicando-se e dividindo-se essa unidade em partes iguais.

De um modo mais preciso, um segmento de reta a pode ser medido usando-se um outro segmento e como unidade de medida. Se e cabe um número inteiro n de vezes em a, isto é, se n cópias do segmento de reta e, colocadas lado a lado, cobrem perfeitamente o segmento a, dizemos que a tem medida n, ou que mede n unidadesde e.

Dois segmentos a e b são ditos **comensuráveis** se existe um segmento e que, quando tomado como unidade de medida, faça com que a e b tenham medidas inteiras, isto é,

$$a = \overbrace{e + \cdots + e}^{m},$$

$$b = \underbrace{e + \cdots + e}_{n},$$

onde m e n são inteiros positivos.

O segmento e é chamado **medida comum** de a e b.

Uma maneira prática de encontrar a medida comum e de dois segmentos comensuráveis dados a e b é dada na proposição 3 do livro X dos Elementos de Euclides. Trata-se, simplesmente, do algoritmo da divisão. Descrevemos, abaixo, o modo como Euclides exibe o algoritmo:

1. Se a e b são segmentos congruentes, nada há a fazer. Suponhamos, pois, que um dos segmentos é menor do que o outro, digamos $a < b$.

2. Retiremos de b o maior número possível n_0 de segmentos congruentes a a, obtendo a_1, tal que

$$b = n_0 a + a_1 \; e \; 0 \leq a_1 < a.$$

Se $a_1 = 0$, então $e = a$ e algoritmo termina.

3. Caso $0 < a_1 < a$, repitamos o procedimento anterior, para obtermos um segmento a_2 tal que

$$a = n_1 a_1 + a_2 \; e \; 0 \leq a_2 < a_1.$$

Se $a_2 = 0$, então $e = a_1$.

4. Repita os passos acima até que $a_i = 0$, para algum $i \geq 1$. Quando isso ocorre, a medida comum de a e b é $e = a_{i-1}$.

A partir do algoritmo acima, podemos expressar a/b em função da sequência $n_0, \ldots, n_i$:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{n_0a+a_1}=\frac{1}{n_0+\frac{a_1}{a_0}}=\frac{1}{n_0+\cfrac{1}{n_1+\frac{a_2}{a_1}}}=\frac{1}{n_0+\cfrac{1}{n_1+\cdots+\cfrac{1}{n_{i-1}+\frac{1}{n_i}}}}$$

A combinação de frações

$$[0;n_0,n_1,\ldots,n_i]=\frac{1}{n_0+\cfrac{1}{n_1+\cdots+\cfrac{1}{n_{i-1}+\frac{1}{n_i}}}}$$

é chamada **fração contínua**.

Para os pitagóricos, o algoritmo descrito acima sempre terminava em um número finito de passos. Assim, dados dois segmentos de reta, existiria sempre uma medida comum e todos os segmentos de reta seriam comensuráveis. Isto também significa que, para os pitagóricos, uma fração contínua sempre seria finita. Hipaso, no entanto, conseguiu produzir uma fração contínua infinita, gerada a partir de dois segmentos de reta incomensuráveis.

A insígnia da escola pitagórica era o **pentagrama**, que é a figura obtida traçando-se as diagonais de um pentágono regular.

VOCÊ SABIA?

A figura do pentagrama foi largamente difundida entre astrólogos e esotéricos e, até a idade média, acreditava-se que ela retinha grande poder místico. De acordo com a lenda popular alemã, Fausto exorcizou Mefistófeles usando um pentagrama.

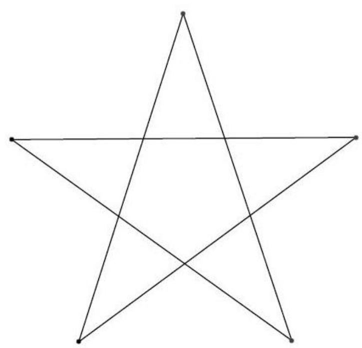


Figura 2 - Pentagrama

Dada a importância do pentagrama para a escola pitagórica, supõe-se que Hipaso tenha descoberto a existência de segmentos incomensuráveis estudando esta figura. Não há, porém, documentação que comprove isto. A seguir, mostraremos que o lado a e a diagonal d de um pentágono regular são segmentos incomensuráveis. De fato, mostraremos que a razão $\varphi = \frac{d}{a}$, conhecida como **razão áurea**, ou **número de ouro**, não é um número racional.

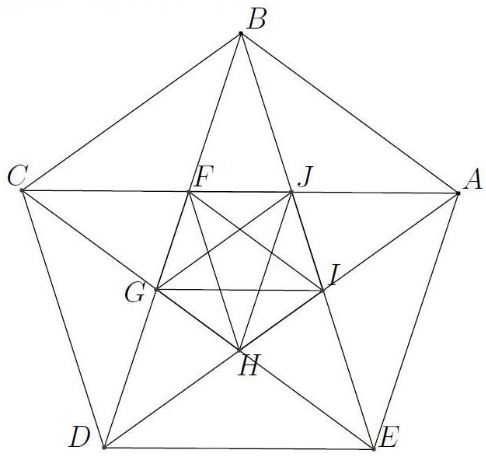


Figura 3 - Pentágono regular

VOCÊ SABIA?

O Número de Ouro é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerado por muitos como uma oferta de Deus ao mundo.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm

Observando a Figura 3, vemos que $a = \overline{AE}$ e $d = \overline{AD}$. O triângulo AEH é isósceles, com $a = \overline{AE} = \overline{AH}$. Os triângulos DEH e ADE são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DH}}.$$

Como $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH} = \overline{AD} - \overline{AE} = d - a$, a igualdade acima toma a forma

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}.$$

Podemos, então, escrever

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} = 1 + \frac{d}{d-a} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{a}{d}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{d-a}{a}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a-d}{a}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a}{a-d}}}.$$

Este procedimento pode ser repetido, o que equivale a considerar um pentagrama menor semelhante ao original (veja a Figura 3). Mais ainda, este procedimento pode ser repetido indefinidamente. Assim, obtemos:

$$\varphi = \frac{d}{a} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}} = [1;1,1,1,\ldots]$$

o que significa que o algoritmo de Euclides não termina em um número finito de etapas.

Baseado em fatos deste tipo, Hipaso concluiu que existem segmentos de reta **incomensuráveis**, isto é, que não admitem uma medida comum. No exemplo descrito acima, a diagonal d e o lado a do pentágono regular são incomensuráveis.

As frações

$$1, 1+\frac{1}{1}=2, 1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{8}{5}$$

são aproximações de φ. Em geral, a sequência de frações contínuas finitas do tipo

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots+\frac{1}{1+1}}}$$

tem o seguinte aspecto:

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots, \frac{F_n}{F_{n+1}}, \ldots$$

onde $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \geq 2$. A sequência $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, é chamada **sequência de Fibonacci**, em homenagem a Leonardo de Pisa, ou Leonardo Fibonacci, pioneiro no seu estudo.

SAIBA MAIS!

O matemático Leonardo Pisa, conhecido como Fibonacci, propôs, no século XIII, a sequência numérica abaixo: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …)

Fonte: http://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/

Mais adiante, discutiremos o comportamento desta sequência quando n cresce. Veremos, em particular que

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1.2 A TEORIA DAS PROPORÇÕES DE EUDOXO

No livro X dos Elementos de Euclides, há uma demonstração de que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis. A ideia, assim como no caso do pentagrama de Hipaso, é mostrar que o algoritmo usado para encontrar a medida comum dos dois segmentos não termina após um número finito de passos.

Se a é a medida do lado de um quadrado e d é a medida de sua diagonal, o Teorema de Pitágoras nos diz que $a^2 + a^2 = d^2$, logo $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$. Assim, afirmar que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis é equivalente a afirmar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Não repetiremos aqui a demonstração clássica de Euclides. Em vez disso, daremos uma demonstração geométrica, no espírito da Matemática grega.

Consideremos, por uma questão de simplicidade e porque não há perda de generalidade, um quadrado de lado 1 e com diagonal d. Supor que 1 e d são comensuráveis é equivalente a supor que existe uma medida comum e tal que $d = ae$ e $1 = be$, ou seja, $d = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos.

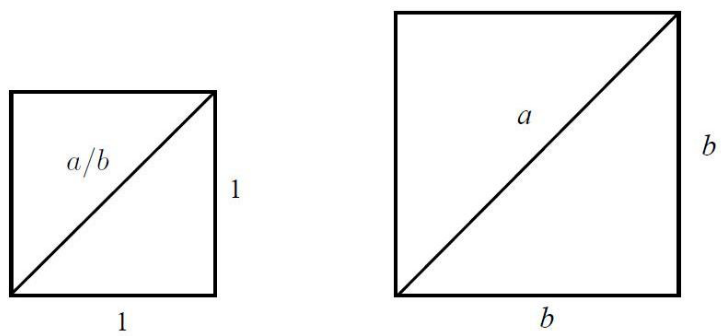


Figura 4 – Quadrados semelhantes

Vamos, pois, supor que a diagonal do quadrado de lado 1 é um número racional a/b. Podemos considerar um novo quadrado semelhante ao quadrado de lado 1, de modo que a razão de semelhança seja b. Assim, o novo quadrado tem lado b e diagonal a, como indicado na figura acima.

A seguir, indicaremos como construir um triângulo CEF, com lados inteiros, semelhante ao triângulo ABC (veja a Figura 5).

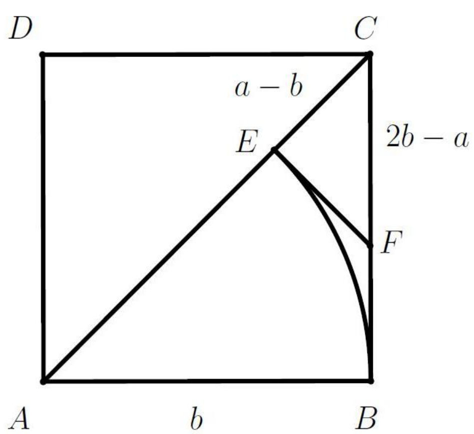


Figura 5 – Triângulos ABC e DEF com lados inteiros

Inicialmente, tracemos um arco de circunferência, com centro no ponto A e raio $\overline{AB} = b$. Seja E o ponto onde esse arco corta a diagonal AC do quadrado. Temos: $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = a - b$. Pelo ponto E, tracemos uma perpendicular à diagonal AC, que corta o lado BC no ponto F. Como FE e FB são tangentes a uma mesma circunferência, temos $\overline{FE} = \overline{FB}$. Por outro lado, o triângulo CEF é retângulo e um de seus ângulos internos mede 45°, logo é um triângulo isósceles, com $\overline{FE} = \overline{EC} = a - b$. Assim, $\overline{FB} = \overline{FE} = a - b$ e $\overline{CF} = \overline{BC} - \overline{FB} = b - (a - b) = 2b - a$.

Portanto, o triângulo CEF é semelhante ao triângulo ABC e possui os lados inteiros. Agora vamos ao passo crucial: **podemos repetir este procedimento para o triângulo CEF**, de modo a obtermos um outro triângulo ainda menor, semelhante a CEF, e com os três lados inteiros. Como este procedimento pode ser repetido indefinidamente, podemos obter triângulos arbitrariamente pequenos com lados inteiros. Em particular, existe um triângulo semelhante a ABC, com lados inteiros e contido em um círculo de diâmetro 1. Isso é impossível, pois os lados do triângulo, sendo inteiros, devem ser necessariamente maiores ou iguais a 1, mas estando o triângulo contido em um círculo de diâmetro 1, pelo menos um dos seus lados deve ser menor do que o diâmetro, ou seja, menor do que 1. Evidentemente, isto é um absurdo, pois não existem número inteiros positivos menores do que 1. A contradição veio de supormos que a diagonal do quadrado de lado 1 é um número racional. Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Cerca de dois séculos depois da descoberta de Hipaso, outro sábio grego, Eudoxo de Knidos (408 a.C. - 355 a.C.), elaborou a teoria geométrica das proporções, ferramenta capaz de lidar com quantidades incomensuráveis. A seguir, descreveremos brevemente as ideias centrais da teoria de Eudoxo e o modo como podem ser encontradas no livro V dos Elementos de Euclides.

Para Eudoxo, magnitudes de um mesmo tipo podem ser somadas. Assim, podemos somar os comprimentos de dois segmentos para obtermos o comprimento de um terceiro segmento. Da mesma forma, a soma de áreas de figuras planas é igual à área de alguma figura plana. Eudoxo assume implicitamente que esta soma de magnitudes é associativa e comutativa. Magnitudes de um mesmo tipo podem ser comparadas: dadas duas magnitudes a e b de um mesmo tipo (dois comprimentos, por exemplo), temos $a < b$, $a = b$ ou $b < a$. O produto de uma magnitude por um número natural tem sentido: $na = a + \cdots + a$ (n vezes). Vale, ainda, a seguinte propriedade fundamental, conhecida como:

> **Princípio de Arquimedes**: dadas duas magnitudes a e b, existe n natural tal que $na > b$.

No tópico seguinte, veremos como estas ideias podem ser formalizadas. Em linguagem moderna, podemos dizer que Eudoxo considerava o conjunto das magnitudes como um corpo ordenado arquimediano.

O objeto central da teoria de Eudoxo são as razões entre magnitudes de um mesmo tipo, comensuráveis ou não. Para permitir que razões possam ser comparadas, a seguinte definição é introduzida:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} \text{ é } equivalente\ a \begin{cases} ma < nb & \Leftrightarrow \quad mA < nB, \\ ma = nb & \Leftrightarrow \quad mA = nB, \\ ma > nb & \Leftrightarrow \quad mA > nB \end{cases} \qquad (1)$$

Na definição (1) está implícito o fato de que os racionais são densos na reta real. Demonstraremos este fato no Teorema 1 da página 16, ainda nesta aula. Por enquanto, é suficiente notarmos que a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ significa que, entre dois números reais distintos, há pelo menos um número racional.

Em particular, se $\frac{a}{b} \neq \frac{A}{B}$, podemos supor que uma das frações é menor do que a outra, digamos $\frac{a}{b} < \frac{A}{B}$. Então, existe $\frac{n}{m}$, com m e n inteiros positivos (lembremos que estamos lidando com magnitudes que são positivas) tal que

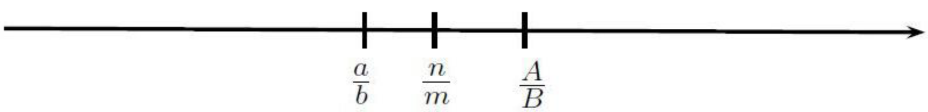


Figura 6 – Entre a/b e A/B existe um número racional n/m

Sendo assim, $\frac{a}{b} < \frac{n}{m}$ implica que $ma < nb$ e $\frac{n}{m} < \frac{A}{B}$ implica que $nB < mA$, o que contradiz uma das equivalências de (1). Reciprocamente, se valem as três equivalências de (1), então não pode existir um número racional entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{A}{B}$ que, portanto, correspondem a um mesmo ponto sobre a reta, isto é, são iguais. De um modo mais preciso, o que Eudoxo afirma é que duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{A}{B}$ são iguais se e somente se, para quaisquer m,n inteiros positivos, $\frac{n}{m} < \frac{a}{b}$ é *equivalente a* $\frac{n}{m} < \frac{A}{B}$.

É notável que esta seja exatamente a ideia sobre a qual R. Dedekind, no século XIX (logo, mais de 2200 anos depois de Eudoxo!), se baseou para definir número real como um corte, ou seção.

Concluímos aqui nosso primeiro tópico, que tratou da origem histórica do estudo dos números irracionais. A descoberta dos números irracionais, compreendidos pelos antigos gregos como magnitudes incomensuráveis, trouxe à tona a necessidade de se trabalhar com um conjunto de números mais amplo do que o conjunto dos racionais, mesmo para lidar com questões simples de geometria plana, como a semelhança de triângulos. Este conjunto mais amplo passou, bem mais tarde, a ser chamado de conjunto dos números reais, mas a determinação precisa do conjunto dos números reais só se deu no final do século XIX. Vale notar ainda que, desde sua origem, os números irracionais estão associados a processos, ou algoritmos, que não cessam após um número finito de passos, ou seja, processos de interação que continuam indefinidamente.

Assim, a descoberta dos números irracionais trouxe pela primeira vez à cena matemática a presença do infinito, tão abominado pelos antigos gregos. Das várias tentativas de se encontrar modos eficazes para lidar com estes processos infinitos, nasceu e se desenvolveu o que chamamos hoje de Análise Matemática.

TÓPICO 2

Propriedades dos números reais

OBJETIVOS

- Reconhecer as propriedades que definem o conjunto dos números reais
- Realizar intuitivamente a noção de completude e perceber a necessidade de se considerar esta noção

No Tópico 1 desta aula, vimos que os números racionais não são suficientes para descrevermos todas as grandezas geométricas. Assim, torna-se necessário o estudo de um conjunto numérico mais amplo, mas que tenha ainda certas propriedades básicas.

Neste tópico, colocaremos de modo preciso que propriedades são essenciais para a definição de número real. De um modo geral, os reais devem possuir uma estrutura algébrica (de corpo), uma estrutura combinatória (de conjunto totalmente ordenado) e uma estrutura topológica (de conjunto completo), e estas três estruturas devem ser compatíveis. Apresentaremos, então, a estrutura algébrica e a estrutura combinatória dos reais, e assim veremos que os reais formam um corpo ordenado arquimediano. Na Aula 2, estudaremos os aspectos topológicos do conjunto dos reais, isto é, sua completude.

2.1 OS NÚMEROS REAIS FORMAM UM CORPO

Ao estudar geometria, vemos que dois segmentos AB e CD podem ser somados e que o resultado desta soma é um novo segmento. Fazemos isso da seguinte maneira: consideramos, na semirreta AB, o único ponto X tal que B está entre A e X e BX é congruente a CD. Chamamos o segmento AX de soma dos segmentos AB e CD e denotamos $AX = AB + CD$.

Nos quatro primeiros livros dos Elementos, Euclides não faz menção alguma a medidas de segmentos. Ao contrário, ele desenvolve uma aritmética de segmentos nos moldes da definição de soma, dada acima, obtendo assim uma teoria puramente geométrica.

Entretanto, para lidar com a noção de semelhança, Euclides precisou associar a cada objeto geométrico uma magnitude, que nada mais é do que sua medida. Assim, a magnitude é um número associado a um objeto geométrico.

A um segmento de reta podemos associar um número que representa seu comprimento; a uma figura plana como um círculo ou um quadrado, podemos associar um número que representa sua área; a um ângulo associamos um número que representa sua medida (em graus ou em radianos); a uma figura no espaço, como um cubo ou uma pirâmide, associamos um número que representa seu volume. Uma vez que segmentos de reta podem ser somados, os números que indicam suas magnitudes devem admitir também uma operação de soma. Além disso, a área de um retângulo é dada como o produto das medidas de dois de seus lados. Como a área de um retângulo também é um número, precisamos definir sobre os números que indicam magnitudes um produto.

Números racionais podem ser somados e multiplicados, mas, como já vimos no tópico anterior, os números racionais são insuficientes para exprimir todas as possíveis magnitudes. Dessa forma, as magnitudes devem ser elementos de um conjunto R que contenha os racionais e seja munido de duas operações, uma soma e um produto. Devemos, ainda, exigir que as operações definidas sobre este conjunto numérico R tenham as mesmas propriedades das respectivas operações no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, ou seja, devemos exigir que R seja um corpo. Já encontramos a noção de corpo nos cursos de Álgebra Linear e de Estruturas Algébricas, mas vamos repetir a definição de corpo aqui, por uma questão metodológica.

ATENÇÃO!

Revise o conteúdo de corpo no material da disciplina Estruturas Algébricas

Definição de corpo

Um conjunto K, munido de duas operações binárias $+ : K \times K \to K$, chamada **soma**, e $\cdot : K \times K \to K$, chmada **produto**, é denominado **corpo**, se são válidas as seguintes condições:

1. A soma é associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para quaisquer $a, b, c \in K$.

2. Existe um elemento neutro para a soma: existe $e \in K$ tal que $a+e=e+a=a$, para todo $a \in K$. É possível demonstrar que este elemento neutro é único e o denotamos por 0.

3. Todo elemento de K possui inverso aditivo: dado $a \in K$, existe $b \in K$ tal que $a+b=b+a=e$. É possível demonstrar que, para cada $a \in K$, este inverso aditivo é único e o denotamos por $-a$.

4. A soma é comutativa: $a+b=b+a$, para quaisquer $a,b \in K$.

5. O produto é associativo: $a(bc)=(ab)c$, para quaisquer $a,b,c \in K$.

6. Existe um elemento neutro para o produto: existe $u \in K$ tal que $au=ua=a$, para todo $a \in K$. É possível demonstrar que este elemento neutro é único e o denotamos por 1.

7. Todo elemento não-nulo possui inverso multiplicativo: dado $a \neq 0$, onde $0 \in K$ é a notação do elemento neutro estabelecida no item 2 acima; existe $b \in K$ tal que $ab=ba=1$, onde $1 \in K$ é o elemento neutro do produto, como no item 6 acima.

8. O produto é comutativo: dados $a,b \in K$, $ab=ba$.

9. Soma e produto satisfazem a distributividade: dados $a,b,c \in K$, temos $a(b+c)=ab+ac$.

Podemos falar, então, no **corpo dos números reais**, que denotaremos provisoriamente por R.Assim, por exemplo, a medida do segmento AC $1+\sqrt{2}$ na Figura 7, em que esta soma corresponde à soma do segmento AB, cuja medida é 1, com o segmento BC, cuja medida é $\sqrt{2}$. Da mesma forma, o perímetro de um triângulo retângulo isósceles de cateto igual a 1 pode ser calculado operando-se normalmente com as medidas dos catetos e da hipotenusa, que são números reais.

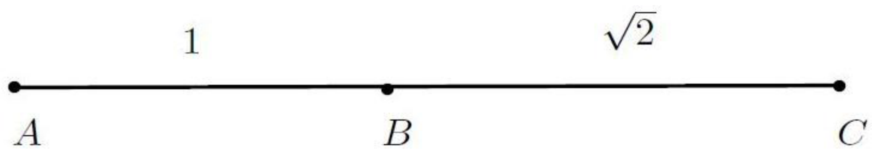


Figura 7 - Segmento AC

O conjunto dos números que representam magnitudes de objetos geométricos deve ser um corpo, como vimos acima, pois é conveniente que as propriedades operatórias que valem para os racionais e, consequentemente, para os segmentos cujas magnitudes são números racionais, sejam válidas para todos os segmentos, quer tenham magnitudes racionais ou não.

2.2 O CORPO R DOS REAIS É ORDENADO E ARQUIMEDIANO

Tão importante quanto somar ou multiplicar segmentos é comparar segmentos, isto é, dizer, para dois segmentos dados, qual é o maior. Da mesma forma, é essencial, em geometria, comparar ângulos, áreas e volumes. Isto implica automaticamente que o corpo R, com as propriedades acima, deve ainda ser ordenado, o que significa que, além de possuir duas operações $+$ e $\cdot$ que o fazem ter estrutura de corpo, sobre R também é preciso definir uma maneira de comparar seus elementos. Fazemos isso do seguinte modo:

Chamamos de **relação de ordem** $\leq$ sobre R a uma relação que satisfaz, necessariamente, as seguintes condições:

1. Reflexividade: dado $a \in R$, $a \leq a$.
2. Antissimetria: se $a,b \in R$ são tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.
3. Transitividade: se $a,b,c \in R$ são tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

As relações acima podem ser interpretadas geometricamente, observando-se a,b e c como medidas de segmentos, por exemplo.Dadas duas magnitudes, devemos sempre poder decidir qual é a maior, ou se as duas são iguais. Assim, a relação de ordem $\leq$ sobre R deve ser **total**, isto é, deve satisfazer a condição:

1. Ordem total: se $a,b \in R$, então $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Finalmente, a relação de ordem deve ser compatível com as operações no seguinte sentido:

1. Dados $a,b,c \in R$, se $a \leq b$, então .
2. Dados $a,b \in R$, se $0 \leq a$ e $0 \leq b$, então .

Outro princípio geométrico natural é o Princípio de Arquimedes, sobre o qual já falamos na página 12, quando da exposição sobre a Teoria de Eudoxo sobre as proporções.

1. Princípio de Arquimedes: dados $a,b \in R$, $a > 0$, existe n natural tal que $na > b$.

Podemos pensar no Princípio de Arquimedes do seguinte modo: seja b a distância do nosso planeta a estrela mais distante que se

ATENÇÃO!

Usamos as notações usuais: $a \geq b$ significa que $b \leq a$, $a < b$ significa que $a \leq b$ e $a \neq b$, $a > b$ significa que $a \geq b$ e $a \neq b$.

conhece e seja a o diâmetro de um átomo de hidrogênio. Evidentemente, b é muito grande e a é muito pequeno, mas é possível, pelo menos teoricamente, enfileirar uma quantidade n de átomos de hidrogênio, mesmo que uma quantidade enorme, de modo a obter uma distância na maior do que b. Isto é uma propriedade que se espera que nosso universo tenha, ou seja, espera-se que não existam objetos infinitamente distantes. O Princípio de Arquimedes capta esta propriedade do espaço geométrico.

Um subconjunto $X \subset R$ é dito **denso** em R se, dados $a, b \in R$, com $a < b$, existe $x \in X$ tal que $a < x < b$. Usando o Princípio de Arquimedes, podemos demonstrar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em R.

Teorema 1: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é denso em R.

Demonstração: Sejam $x, y \in R$, com $x < y$. Como $a := y - x > 0$, pelo Princípio de Arquimedes, existe um número natural n tal que $na > 1$. Logo, $\frac{1}{n} < a = y - x$. A ideia aqui é colocar, lado a lado, uma quantidade inteira de segmentos de medida $\frac{1}{n}$, de modo que o segmento resultante tenha medida maior do que x e menor do que y, como indicado na Figura 8:

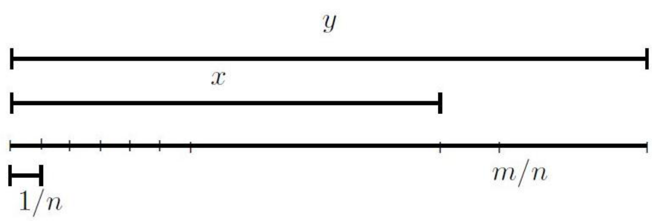


Figura 8 – m cópias justapostas de um segmento de medida 1/n

Novamente o Princípio de Arquimedes nos garante que existe um número natural k tal que $k \cdot \frac{1}{n} > x$. Como todo subconjunto não-vazio de números naturais possui um menor elemento (Princípio da Boa Ordem), existe um número natural m tal que $x < m \cdot \frac{1}{n}$ e $(m-1) \cdot \frac{1}{n} < x$. Afirmamos que $\frac{m}{n} < y$. De fato, se ocorresse $y \leq \frac{m}{n}$, então $y - \frac{1}{n} < \frac{m-1}{n}$. Mas $\frac{1}{n} < y - x$ implica que $x - y < -\frac{1}{n}$. Logo teríamos $x = y + (x - y) < y - \frac{1}{n} < \frac{m-1}{n}$, contrariando a escolha de m. Isto posto, vemos que $x < \frac{m}{n} < y$, o que mostra que $\mathbb{Q}$ é denso em R. ■

A relação de ordem em R nos permite definir a noção de intervalo. De fato, dados $a,b \in R$, se $a<b$, chamamos de **intervalos** com extremo inferior em a e extremo superior em b, os seguintes conjuntos:

$(a,b)=\{x \in R \mid a<x<b\}$,

$[a,b]=\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$,

$(a,b]=\{x \in R \mid a<x \leq b\}$,

$[a,b)=\{x \in R \mid a \leq x<b\}$.

Há também notações especiais para os chamados **intervalos infinitos**:

$(a,+\infty)=\{x \in R \mid x>a\}$,

$(-\infty,b)=\{x \in R \mid x<b\}$,

$[a,+\infty)=\{x \in R \mid x \geq a\}$,

$(-\infty,b]=\{x \in R \mid x \leq b\}$,

Também faz sentido falarmos em **conjunto limitado**: um subconjunto $X \subset R$ não-vazio é dito limitado se existe $M \in R$, $M>0$, tal que $X \subset (-M,M)$, ou seja, todo elemento $x \in X$ satisfaz $-M<x<M$.

A ordem total em R nos fornece, ainda, uma representação linear do corpo dos números reais. Mais precisamente, dada uma reta r, podemos escolher um ponto $O \in r$ e identificá-lo com o elemento neutro 0 de R. Este ponto é chamado origem. Escolhemos um segundo ponto U, à direita de O, e associamos a este ponto o número 1. O segmento OU é tomado, então, como unidade de medida e tem, automaticamente, medida igual a 1.

Os outros números reais são identificados com pontos da reta da seguinte maneira: dado $a \in R$, a>0, escolhemos $A \in r$ tal que o segmento OA tenha medida a e A esteja à direita de O. No caso em que $a<0$, o ponto A é escolhido à esquerda de O e o segmento OA tem medida igual a $-a$.

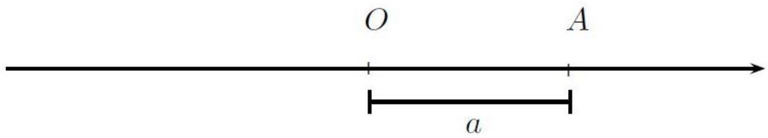


Figura 9 – Correspondência entre o número a e o ponto A sobre a reta

Dado um número inteiro positivo n, é tarefa fácil encontrar o ponto da reta que lhe é correspondente: basta posicionar n cópias de OU justapostas à direita, de modo a obter um segmento ON que tem medida igual à soma $1+\cdots+1$ com n parcelas. Logo, o ponto N corresponde ao número n. O número $-n$ é representado de modo similar, tomando as cópias justapostas do segmento OU à esquerda.

Para obtermos a representação de um número racional $\frac{m}{n}$, devemos, primeiro, dividir o segmento OU em n partes iguais. Cada parte é um segmento de medida $\frac{1}{n}$. Escolhemos o único destes segmentos que contém o ponto O, digamos OX. Ao tomarmos m cópias justapostas de OX, obtemos um segmento OY que tem medida igual a $\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$ com m parcelas. Assim, a medida do segmento OY é $\frac{m}{n}$ e o ponto Y corresponde, portanto, ao número racional $\frac{m}{n}$.

A observação de Hipaso nos leva à conclusão de que existem segmentos de reta cuja medida é incomensurável com OU. Mais especificamente, é possível encontrar um ponto P da reta que não corresponda a número racional algum.

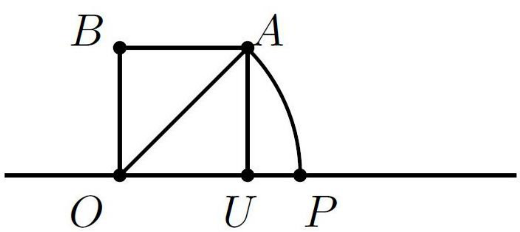


Figura 10 – O ponto P corresponde ao número irracional √2

Observando a Figura 10, onde $OUAB$ é um quadrado construído sobre o segmento OU, AP é um arco do círculo centrado em O e de raio OA igual à diagonal do quadrado. Como sabemos que a diagonal do quadrado e seu lado são incomensuráveis e OP tem a mesma medida de OA, pois ambos são raios, concluímos que o ponto P não corresponde a número racional algum.

Dessa forma, o corpo ordenado dos racionais não é suficentemente grande para descrever todos os pontos de uma reta. Em outras palavras, embora todo número racional corresponda a um ponto sobre a reta, existe pelo menos um ponto da reta que não corresponde a um número racional. Surge, então o seguinte questionamento:

Existe um corpo ordenado cujos elementos estejam em correspondência bijetiva com os pontos de uma reta?

Na próxima aula, veremos como colocar de modo preciso a questão geométrica acima e definiremos o corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais como aquele que satisfaz esta condição, isto é, seus elementos correspondem bijetivamente aos pontos de uma reta.

Concluímos aqui nossa primeira aula, que teve um caráter intuitivo e geométrico. Exibimos aqui as origens geométricas que motivaram o estudo dos números reais. O ponto principal é que os números racionais são insuficientes para o estudo da geometria, mesmo em seu viés mais elementar. Assim, é necessário lançar mão de um conjunto de números mais amplo, que deve ter as mesmas propriedades operatórias de $\mathbb{Q}$, ou seja, deve ser um corpo, que deve, assim como $\mathbb{Q}$, ser totalmente ordenado, e cuja ordem deve ser arquimediana. Além disso, o corpo ordenado arquimediano de que precisamos, deve estar em correspondência bijetiva com os pontos de uma reta. Esta última condição, que denominamos completude, será estudada na Aula 2.

ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO

1. Considere o plano cartesiano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, ou seja, o conjunto de pontos do plano que têm coordenadas racionais. Sejam O a origem $(0,0)$ e A o ponto de coordenadas $(0,1)$. Existe algum triângulo equilátero em $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, tendo OA como um dos lados? Por quê?

2. Seja ABC um triângulo isósceles retângulo em A e AD a altura relativa à hipotenusa, como mostrado na figura abaixo.

Verifique que os triângulos ABC e ABD são semelhantes e que os segmentos AB e BD não incomensuráveis. Discuta como este exemplo justifica a necessidade de se assumir a existência de números não racionais para se trabalhar com semelhança de triângulos.

3. Determine a expansão dos seguintes números racionais como frações contínuas:

(a) $\frac{17}{7}$

(b) $\frac{13}{31}$

(c) $\frac{55}{34}$

(d) $\frac{158}{49}$

4. Demonstração de Euclides da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

(a) Para obter uma contradição, suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, isto é, $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Verifique que é possível supor que a e b sejam primos entre si, isto é, o máximo divisor comum de a e b é 1.

(b) Mostre que a igualdade $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ implica $a^2=2b^2$.

(c) Mostre que $a^2=2b^2$ implica que a é par.

(d) Mostre que a par implica b par.

(e) Conclua que o mdc de a e b é maior ou igual a 2, o que é uma contradição (por quê?).

5. Considere o número $\sqrt{2}$. Podemos escrever

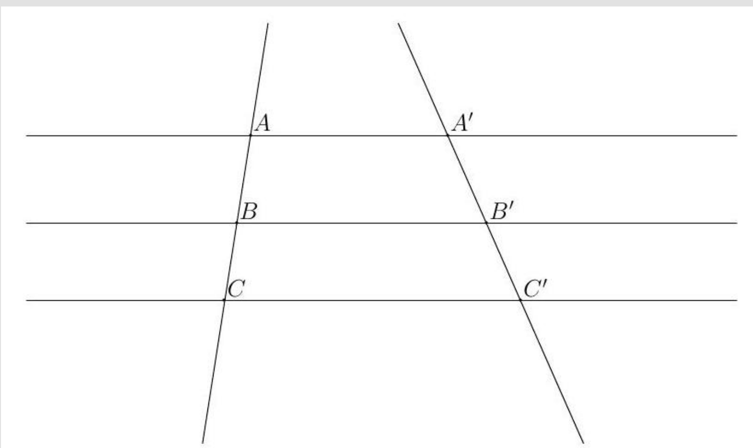
$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}.$$

(a) Verifique que o procedimento acima pode ser repetido indefinidamente e conclua que $\sqrt{2}$ admite uma representação como fração contínua infinita $[1;2,2,2\ldots]$.

(b) Use o item (a) acima para mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional. (Sugestão: repita o argumento usado no texto para demonstrar que a razão áurea φ é irracional).

(c) Encontre a expansão de $\sqrt{5}$ como fração contínua infinita. (Sugestão: comece escrevendo $\sqrt{5}=2+\sqrt{5}-2$ e repita o procedimento usado para $\sqrt{2}$).

Teorema de Tales.



O Teorema de Tales afirma que, se duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as magnitudes dos segmentos delimitados pelas transversais são proporcionais. Com a notação da figura anterior, temos: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$.

6. A proposta deste exercício é apresentar uma demonstração do Teorema de Tales que englobe os casos em que os segmentos são incomensuráveis.

(a) Suponha, primeiramente, que AB e BC são comensuráveis. Seja e a medida comum destes dois segmentos, ou seja, $\overline{AB}=m\cdot e$ e $\overline{BC}=n\cdot e$, onde m e n são números naturais. Trace $m+n$ retas paralelas a AA', dividindo o segmento AC em $m+n$ segmentos congruentes de medida e. Mostre que estas retas paralelas dividem o segmento $A'B'$ em m partes e o segmento $B'C'$ em n partes, todas com medida e. Conclua que o teorema é válido neste caso.

(b) Procure adaptar o argumento acima para o caso em que os segmentos AB e BC são incomensuráveis.

AULA 2 | Números reais – parte 2

Na aula 1, fornecemos justificativas geométricas para a necessidade de se considerar um conjunto numérico mais amplo do que o conjunto dos racionais. Vimos ainda que este conjunto numérico mais amplo deve ser um corpo ordenado arquimediano. Há ainda, no entanto, uma questão importante por responder: que propriedade adicional um tal corpo ordenado arquimediano deve ter para que haja uma correspondência bijetiva entre seus elementos e os pontos de uma reta? Para responder esta pergunta, precisamos de uma ferramenta que nos permita calcular distâncias entre os elementos de um corpo ordenado arquimediano.

No tópico 1 desta aula, veremos que esta ferramenta é o valor absoluto. No tópico 2 desta aula, veremos que um corpo ordenado arquimediano tem seus elementos correspondendo bijetivamente aos pontos de uma reta se, e somente se, satisfaz a propriedade “dos intervalos encaixantes”. Finalmente, no tópico 3, estabeleceremos a noção de conjunto enumerável e veremos que os reais formam um conjunto não-enumerável.

Objetivos

- Utilizar a noção de valor absoluto como ferramenta para determinar distâncias sobre a reta
- Compreender os rudimentos da topologia na reta: abertos, fechados, pontos de acumulação e fechos
- Assimilar a necessidade da introdução da noção de completude, para garantir a correspondência bijetiva entre números reais e pontos sobre a reta orientada
- Compreender a noção de enumerabilidade e justificar a não-enumerabilidade do conjunto dos números reais

TÓPICO 1

Valor absoluto

OBJETIVOS

- Identificar a noção de valor absoluto e suas propriedades mais relevantes
- Perceber a possibilidade de existirem vários valores absolutos definidos em um corpo ordenado
- Desenvolver a noção de espaço métrico a partir da noção de valor absoluto sobre os reais

Na aula 1, vimos que o conjunto dos números reais possui uma estrutura algébrica (de corpo) e uma estrutura combinatória (de conjunto totalmente ordenado e arquimediano). **O valor absoluto** de um número é a maneira pela qual se pode calcular distâncias entre números reais. Uma vez definido o valor absoluto sobre um corpo ordenado, podemos introduzir uma estrutura adicional neste corpo: a de espaço métrico. Neste tópico, estudaremos as principais propriedades do valor absoluto e algumas das propriedades dos reais como espaço métrico.

Consideremos um corpo ordenado arquimediano K, por exemplo, o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Usamos a notação K^+ para indicar o conjunto dos elementos não-negativos de K, ou seja,

$$K^+ = \{a \in K \,|\, a \geq 0\}.$$

Dado um elemento $a \in K$, um valor absoluto, ou módulo de a, é uma função $\phi : K \to K^+$ que satisfaz as seguintes condições:

1. Dado $a \in K$, $\phi(a) = 0$ se, e somente se, $a = 0$.
2. Dados $a, b \in K$, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
3. $\phi(a+b) \leq \phi(a) + \phi(b)$.

O exemplo mais importante de valor absoluto é dado pela função $\phi : K \to K^+$ dada por $\phi(a) = |a|$, onde, para cada $a \in K$,

$$|a| = \begin{cases} a & se \quad a \geq 0 \\ -a & se \quad a < 0 \end{cases}$$

Vamos verificar que, de fato, a função $\phi(a)=|a|$ satisfaz as condições 1,2 e 3 acima e, portanto, é um valor absoluto.

Primeiramente, $|a|\geq 0$ para todo $a\in K$ e $|a|=0$ implica $a=0$ ou $-a=0$, isto é, $|a|=0$ implica $a=0$.

Para verificarmos a validade da condição 2, consideremos $a,b\in K$. Temos alguns casos a considerar:

primeiro, se $a\geq 0$ e $b\geq 0$, temos $|a|=a$ e $|b|=b$ e $ab\geq 0$, logo $|ab|=ab=|a|\,|b|$.

no caso em que $a\geq 0$ e $b<0$, temos $|a|=a$, $|b|=-b$ e $ab\leq 0$, logo $|ab|=-ab=a(-b)=|a|\,|b|$. O caso em que $a<0$ e $b\geq 0$ é similar.

no caso em que $a<0$ e $b<0$, temos $|a|=-a$, $|b|=-b$ e $ab>0$, logo $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a|\,|b|$.

Finalmente, para verificarmos a validade de 3, devemos também considerar alguns casos:

primeiro, se $a\geq 0$ e $b\geq 0$, então $a+b\geq 0$ e $|a+b|=a+b=|a|+|b|$. Note que, neste caso, vale a igualdade.

Se $a\geq 0$ e $b<0$, então $|a|=a$ e $|b|=-b$. Observe que, neste caso, $b<|b|$. Podemos ter duas situações: $a+b\geq 0$ ou $a+b<0$. Se $a+b\geq 0$, então $|a+b|=a+b<a+|b|\leq|a|+|b|$. Se $a+b<0$, então $|a+b|=-(a+b)=-a-b\leq|a|-b=|a|+|b|$. O caso em que $a<0$ e $b\geq 0$ é similar.

Enfim, se $a<0$ e $b<0$, temos $|a|=-a$, $|b|=-b$ e $a+b<0$, logo $|a+b|=-(a+b)=-a-b=|a|+|b|$. Observe que, neste caso, também vale a igualdade.

Vale ressaltar que outros valores absolutos podem ser definidos sobre corpos ordenados arquimedianos. Podemos, por exemplo, definir sobre o corpo dos números racionais um valor absoluto para cada número inteiro primo p, chamado **valor absoluto p-ádico**. De fato, fixado um inteiro primo p, seja $r=\dfrac{a}{b}$ um número racional, onde podemos supor que a fração é irredutível, ou seja, a e b são primos entre si. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existe um único número inteiro n tal que $r=p^n\cdot\dfrac{c}{d}$, com c e d inteiros não divisíveis por p. A função $|\,|_p:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^+$, dada por $|r|_p=p^{-n}$, satisfaz as condições 1,2 e 3 da definição de valor absoluto. Dizemos que $|r|_p$ é o valor absoluto p-ádico de r. Este valor absoluto tem papel central na resolução de equações diofantinas de grau 2, em Teoria dos Números.

SAIBA MAIS!

Acesse o site www.ime.usp.br/~niski/monitoria/corpoarq.pdf e obtenha mais informações sobre as propriedades arquimedianas

VOCÊ SABIA?

Em 1897, o método de Weierstrass de desenvolvimento de séries para funções algébricas o conduziu à invenção dos números p-adic. Hensel estava interessado no primo exato que divide o discriminante de um campo de número algébrico. Os números p-adic podem ser considerados como uma conclusão dos números racionais, de um modo diferente da conclusão habitual que conduz aos números reais.

Fonte: http://www.somatematica.com.br/biograf/hensel.php

Convém ressaltar que nosso interesse é o estudo do valor absoluto usual. Por isso, não teceremos mais comentários sobre os valores absolutos p-ádicos. O leitor interessado pode encontrar mais informações nos exercícios de aprofundamento.

Continuamos a denotar por K um corpo ordenado arquimediano (podemos pensar momentaneamente em K como sendo o corpo dos números racionais). Se $a,b \in K$, o que significa o valor absoluto da diferença $|a-b|$? O exemplo a seguir é elucidativo nesse sentido.

Exemplo: Vamos resolver a equação $|x-1|+|x-3|=2$ em $\mathbb{Q}$. A princípio, por se tratar de uma equação, pode parecer estranho afirmar que o seu conjunto solução é o intervalo $[1,3]=\{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 3\}$. De fato, se $x \in [1,3]$, então $1 \leq x \leq 3$, logo $x-1 \geq 0$ e $x-3 \leq 0$. Logo, $|x-1| = x-1$ e $|x-3| = 3-x$, donde $|x-1|+|x-3| = x-1+3-x = 2$. Assim, todo elemento do **intervalo** é solução da equação. Por outro lado, se $x<1$ ou $x>3$, é possível determinar, de modo análogo ao que fizemos acima, que x não pode ser solução da equação (veja a questão 1 da tarefa).

Apresentaremos, agora, outra solução desse problema, que se baseia na interpretação geométrica da equação: $|x-1|$ e $|x-3|$ podem ser vistos como as distâncias entre x e os elementos 1 e 3. Afirmar que $|x-1|+|x-3|=2$ é equivalente a afirmar que o ponto x está situado na reta de modo que sua distância ao ponto correspondente a 1, somada à sua distância ao ponto correspondente a 3, seja constante e igual a 2. Isso acontece exatamente para os números situados no intervalo $[1,3]$, que correspondem aos pontos racionais situados no segmento que liga os pontos correspondentes a 1 e 3 (veja a Figura 1).

Figura 1 - Número real entre 1 e 3

Dessa forma, o valor absoluto $|a-b|$ mede a **distância** entre a e b. Se assumirmos que os números reais estão em correspondência com os pontos de uma reta, o número $|a-b|$ mede o comprimento do segmento cujas extremidades são os pontos da reta correspondentes a a e b.

Vamos denotar por $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Dado um elemento $a \in \mathbb{R}$, existe um único ponto da reta orientada que corresponde a a. Por não haver risco de confusão, podemos denotar este ponto também por a. Seja $\delta > 0$ um número real positivo, o conjunto dos pontos da reta que estão a uma distância menor do que δ do ponto a é representado pelo intervalo mostrado na Figura 2.

ATENÇÃO!

Nosso principal objetivo é obter um corpo ordenado arquimediano contendo o corpo dos racionais, cujos elementos estejam em correspondência com os pontos de uma reta. Este é exatamente o corpo dos números reais. A partir deste ponto, assumiremos que existe um corpo ordenado arquimediano cujos pontos estão em correspondência bijetiva com os pontos de uma reta. No Tópico 2, exibiremos uma condição suficiente para que exista esta correspondência.

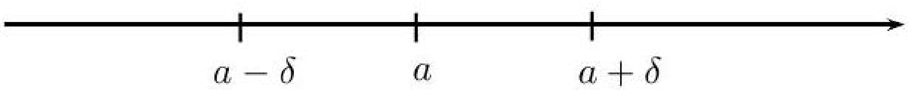


Figura 2 - Intervalo aberto centrado em a

Podemos escrever o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ como um intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$, chamado **intervalo aberto centrado em** a. Outro modo de descrever este intervalo é

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \| x-a| < \delta\}$$

ou seja, $(a-\delta, a+\delta)$ é o conjunto dos números reais que estão a uma distância menor do que δ do número a.

O valor absoluto usual que definimos sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais nos permite calcular distâncias entre os elementos de $\mathbb{R}$. Mais precisamente, existe uma função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $d(x,y) = |x-y|$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $d(x,y) \geq 0$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

2. $d(x,y)=d(y,x)$, para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$.

3. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$, para quisquer $x,y,z\in\mathbb{R}$

Estas condições são consequências diretas das propriedades de valor absoluto que vimos anteriormente (veja o exercício de aprofundamento 3). A função d, definida acima, é chamada **métrica**, e o par $(\mathbb{R},d)$ é chamado **espaço métrico** dos números reais. Em um espaço métrico, podemos definir as importantes noções de conjunto aberto e de conjunto fechado.

Um subconjunto $A\subset\mathbb{R}$ é chamado **aberto** se, para cada $a\in A$, existe $\delta>0$ tal que $(a-\delta,a+\delta)\subseteq A$. Usando a noção de métrica dada acima, $(a-\delta,a+\delta)\subseteq A$ é equivalente a

$$d(x,a)<\delta\Rightarrow x\in A.$$

Em outras palavras, todo elemento de $\mathbb{R}$ que está a uma distância menor do que δ do ponto $a\in A$, pertence necessariamente ao conjunto A.

Os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

1. Os subconjuntos $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são abertos.

2. Se A e B são abertos, então $A\cap B$ é aberto.

3. Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos, então a união $\bigcup_{i\in I}A_i$ é um aberto.

A verificação destes fatos é uma tarefa de rotina e não será essencial para os objetivos deste curso. Assim, não a faremos aqui (veja o exercício de aprofundamento 4).

Exemplos:

1. Todo intervalo aberto é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. De fato, se $I=(\alpha,\beta)$ é um intervalo aberto e $a\in(\alpha,\beta)$, então $\alpha<a<\beta$. Se $\delta=\frac{1}{2}\min\{a-\alpha,\beta-a\}$, então $\alpha<a-\delta$ e $a+\delta<\beta$. Logo, $(a-\delta,a+\delta)\subset I$, o que mostra que I é um conjunto aberto.

2. Os intervalos $(-\infty,\alpha)$ e $(\alpha,+\infty)$ são abertos. A verificação deste fato é similar à do exemplo anterior.

3. O conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ dos números reais não inteiros é aberto em $\mathbb{R}$. De fato, $\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1)$ é um união de intervalos abertos, logo, pelo exemplo 1 e pela condição (iii) acima, $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ é um aberto.

Um subconjunto $F\subseteq\mathbb{R}$ é dito **fechado** se seu complementar $\mathbb{R}-F$ for um conjunto aberto.

Exemplos:

1. Todo intervalo fechado é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$. De fato, se $J=[a,b]$, então $\mathbb{R}-J=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$, que é aberto, por ser um união de dois conjuntos abertos.

2. Todo conjunto finito de números reais é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$. De fato, se $C=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\}$, então, supondo que $a_1<a_2<\cdots<a_n$, temos
$$\mathbb{R}-C=(-\infty,a_1)\cup(a_1,a_2)\cup(a_2,a_3)\cup\cdots\cup(a_{n-1},a_n)\cup(a_n,\infty)$$
é uma união de intervalos abertos, logo é um aberto.

3. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é fechado em $\mathbb{R}$. De acordo com o exemplo 3 acima, o complementar $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ é aberto, logo, $\mathbb{Z}$ é fechado.

Dado um conjunto $X\subset\mathbb{R}$, um elemento $a\in\mathbb{R}$, não necessariamente um elemento de X, é dito **ponto de acumulação** de X se, para cada $\delta>0$, existe $x\in X$, $x\neq a$, tal que $|x-a|<\delta$. Em outras palavras, se, para cada $\delta>0$,
$$(a-\delta,a+\delta)\cap X$$
contém algum ponto diferente de a. O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X é chamado **conjunto derivado** de X e denotado por X'. A união de um conjunto X com o conjunto X' dos seus pontos de acumulação é chamado fecho de X e é denotado por $\overline{X}$, ou seja, $\overline{X}=X\cup X'$. O resultado abaixo caracteriza os conjuntos fechados.

Teorema 1 Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $\overline{X}=X$.

Demonstração: Uma vez que $\overline{X}=X\cup X'$, a afirmação $\overline{X}=X$ é equivalente a $X'\subset X$.

Vamos supor, de início, que X é fechado. Logo $\mathbb{R}-X$ é aberto. Dado $a\in X'$, para obtermos uma contradição, vamos supor que $a\notin X$. Então $a\in\mathbb{R}-X$ e, como este conjunto é aberto, existe $\delta>0$ tal que $(a-\delta,a+\delta)\subset\mathbb{R}-X$. Por outro lado, como $a\in X'$, temos que a é um ponto de acumulação de X. Logo, existe $x_0\in X\cap(a-\delta,a+\delta)$. Mas, como $(a-\delta,a+\delta)\subset\mathbb{R}-X$, temos $x_0\in X\cap(\mathbb{R}-X)=\varnothing$, o que é um absurdo. A contradição veio do fato de supormos que existe $a\in X'$ tal que $a\notin X$. Portanto $X'\subset X$ e $\overline{X}=X$.

Reciprocamente, suponhamos que $\overline{X}=X$. Isso implica que $X'\subset X$. Assim, dado $a\in\mathbb{R}-X$, seguramente temos $a\notin X'$. Portanto existe $\delta>0$ tal que

$(a-\delta, a+\delta) \cap X = \varnothing$ e isso é equivalente a afirmar que $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathbb{R} - X$. Portanto $\mathbb{R} - X$ é aberto e X é fechado. ■

Com este resultado, encerramos o tópico 1. Cabe observar que as noções de conjunto aberto e de conjunto fechado estudadas acima fazem parte de uma teoria mais geral, chamada **topologia**, que estuda os abertos e as funções que, de certo modo, preservam abertos, chamadas funções contínuas, que estudaremos em uma aula posterior. O espaço métrico dos números reais, ou, mais geometricamente, a reta real, é uma espécie de protótipo de espaço onde se podem definir abertos e fechados. Um ponto fundamental para estudarmos o conjunto dos reais como espaço métrico foi assumir a identificação dos reais com os pontos de uma reta. Esta identificação será estabelecida de modo preciso no tópico 2 desta aula, que iniciaremos a seguir.

TÓPICO 2

Completude de um corpo K

OBJETIVOS

- Compreender a noção de supremo e ínfimo de um conjunto limitado e assimilar suas propriedades básicas
- Perceber que a completude de um corpo ordenado é condição suficiente para que os elementos de estejam em correspondência bijetiva com os pontos de uma reta

Neste segundo tópico, veremos uma condição suficiente para que um corpo ordenado arquimediano K admita uma correspondência $\phi : K \rightarrow t$ bijetiva entre seus elementos e os pontos de uma reta t. Esta condição, que chamamos completude, pode ser enunciada de diversas maneiras, dentre as quais escolhemos, para o nosso texto, aquela que envolve a noção de supremo, que será apresentada neste tópico. O principal resultado deste tópico é o Teorema 3, que responde as perguntas levantadas na aula 1 e estabelece a representação geométrica do corpo ordenado dos números reais.

Continuamos assumindo que existe um corpo $\mathbb{R}$ ordenado e arquimediano, cujos elementos estão em correspondência bijetiva com os pontos de uma reta orientada. Este corpo contém o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais e, pelo Teorema 1 da Aula 1, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Isto significa que, para cada número real a e cada $\delta > 0$, existe um número racional r tal que $|a - r| < \delta$, ou seja,

$$r \in (a - \delta, a + \delta) \cap \mathbb{Q}$$

Dizemos que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** quando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq M$, para todo $s \in S$. Dizemos que S é **limitado inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq s$, para todo $s \in S$. Os números M e m são chamados, respectivamente, **cota superior** e **cota inferior** de S.

Exemplos:

1. O intervalo $(0,1]$ é limitado superiormente e inferiormente. Os números $0,-1,-2$ são cotas inferiores de $(0,1]$. Os números $1,2,3$ são cotas superiores de $(0,1]$.
2. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não admite cota superior, mas qualquer número negativo é cota inferior de $\mathbb{N}$.
3. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros não admite cota superior nem cota inferior.
4. O intervalo $(-\infty,0]$ não admite cota inferior, mas 1 é uma cota superior de $(-\infty,0]$.
5. O conjunto de números racionais $S=\{r\in\mathbb{Q}\,|\,r^2<2\}$ é limitado superiormente e 2 é uma cota superior de S.

Consideremos um conjunto $S\subset\mathbb{R}$ limitado superiormente. O **supremo** S é a menor entre todas as cotas superiores de S. O supremo de S é denotado por $\sup S$.

Como já foi observado no início deste tópico, o conjunto dos números reais, cuja existência está sendo assumida a priori, tem em nossa discussão um caráter geométrico, pelo menos provisoriamente. Mais precisamente, estamos assumindo a existência do corpo ordenado arquimediano $\mathbb{R}$ cujos elementos estão em correspondência com os pontos de uma reta. É natural, portanto, que interpretemos a noção de supremo geometricamente.

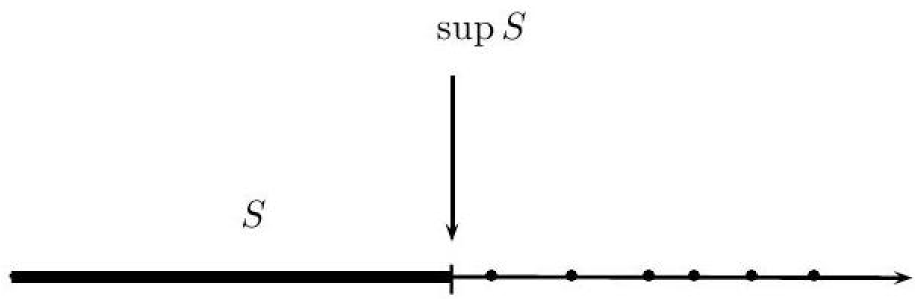


Figura 3 - Supremo do conjunto S

Na Figura 3, cada um dos pontos marcados à direita do conjunto S é uma cota superior de S. O supremo é o ponto da reta assinalado por uma seta. Assim, o supremo de S é o ponto da reta mais à esquerda que ainda está à direita de S.

Devemos observar que o supremo de um conjunto não necessariamente coincide com o máximo do conjunto. Por exemplo, o intervalo $(0,1)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<1\}$ não tem máximo, pois, dado $x\in\mathbb{R}$, $0<x<1$, temos $x<\dfrac{x+1}{2}<1$. Por outro lado,

$\sup(0,1)=1$, pois 1 é cota superior de $(0,1)$ e, dado $\delta>0$, $1-\delta$ não pode ser cota superior de $(0,1)$, pois existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $1-\delta<x<1$. Dessa forma, não existe cota superior de $(0,1)$ menor do que 1, sendo o número 1, portanto, o supremo de $(0,1)$.

No caso em que S é limitado inferiormente, o **ínfimo** de S é a maior entre as cotas inferirores de S. O ínfimo de S é denotado por $\inf S$.

A mesma discussão que fizemos acima sobre a diferença entre supremo e máximo vale para ínfimo e mínimo. Convidamos o leitor a produzir um exemplo de um conjunto que não tenha mínimo e tenha ínfimo (veja a tarefa 2, desta aula).

De um modo mais geral, podemos repetir a discussão acima para caracterizar o supremo de um conjunto limitado superiormente. Faremos isso no teorema a seguir, às vezes chamado **propriedade de aproximação** do supremo.

Teorema 2: Se S é um conjunto de números reais limitado superiormente, um número real s é o supremo de S se, e somente se,

1. Para todo $x\in S$, $x<s$, isto é, s é uma cota superior de S.
2. Para cada $\delta>0$, existe $x\in S$ tal que $s-\delta<x\leq s$.

Demonstração: Vamos, primeiro, supor que s é supremo de S, ou seja, que s é a menor das cotas superiores de S. Sendo uma cota superior de S, o número s satisfaz automaticamente a condição 1. Como s é a menor entre todas as cotas superiores de S, se $\delta>0$, $s-\delta$ não pode ser uma cota superior de S, ou seja, não pode ocorrer $x\leq s-\delta$, para todo $x\in S$. Isso significa que existe $x\in S$ tal que $s-\delta<x$. Como s é cota superior de S, temos $s-\delta<x\leq s$ e, portanto, vale a condição 2.

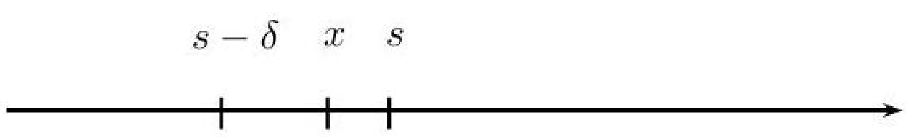


Figura 4 - Para cada $\delta>0$, existe $x\in S$ tal que s − δ < x < s Para

Reciprocamente, seja s um número real que satisfaz as condições 1 e 2. A condição 1 implica imediatamente que s é uma cota superior de S. Se $s'<s$, então $s'=s-\delta$, com $\delta=s-s'>0$. A condição 2 implica, então, que existe $x\in S$

tal que $s' = s - \delta < x$. Logo, s' não pode ser cota superior de S . Mostramos assim que s é a menor cota superior de S , portanto s é o supremo de S .

Vamos observar com um pouco mais de atenção o exemplo 5 dado acima. O conjunto de números racionais $S = \{r \in Q \mid r^2 < 2\}$ é limitado superiormente. Cabe aqui a seguinte pergunta: S possui supremo? Em geral, o que garante que um determinado conjunto possua supremo? Podemos argumentar geometricamente, apelando para a identificação de R com a reta. Essa identificação nos permite assegurar que existe um ponto correspondente a alguma cota superior de S , digamos o ponto correspondente ao número 2 , e que podemos "deslocar" este ponto para a esquerda, mantendo-o sempre à direita de S até uma "posição limite" (veja a Figura 5).

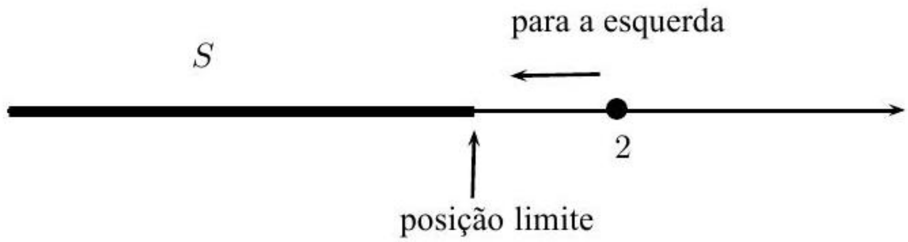


Figura 5 - Supremo como posição limite de cotas superiores

Devemos, no entanto, admitir que o argumento acima, embora tenha um forte apelo à intuição geométrica, carece de precisão e rigor.

Voltando ao exemplo 5, vamos mostrar que o conjunto S não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Seja $a = \sup S$, temos três possibilidades para a :

1. $a^2 < 2$.
2. $2 < a^2$.
3. $a^2 = 2$.

Se ocorre (i), consideremos o seguinte número racional

$$b = \frac{4a}{2 + a^2} > 0.$$

Podemos escrever

$$b^2 = \frac{16a^2}{(2 - a^2)^2 + 8a^2} < 2,$$

e esta última desigualdade é válida, pois, caso contrário, $b^2 \geq 2$ implicaria

$$\frac{16a^2}{(2 - a^2)^2 + 8a^2} \geq 2 \Rightarrow 16a^2 \geq 2(2 - a^2)^2 + 16a^2 \Rightarrow 2(2 - a^2)^2 \leq 0$$

um absurdo, pois $a^2 < 2$ implica $2(2 - a^2)^2 > 0$. Como $b^2 < 2$ então $b \in S$. Por outro lado, de $a^2 < 2$ temos

$$a^2 < 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} < 1 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{2} < 1 \Leftrightarrow a^2 < 1 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{2}(2+a^2) < \frac{1}{2}(2+2) = 2.$$

Segue daí que $\frac{1}{2} < \frac{2}{2+a^2}$, logo $1 < \frac{4}{2+a^2}$ o que é equivalente a

$$a < \frac{4a}{2+a^2} = b,$$

absurdo, pois $b \in S$ e a é o supremo de S.

Por outro lado, se ocorre (ii) temos

$$2 < \frac{2+a^2}{2} < a^2 \Rightarrow \frac{2+a^2}{2a} < a.$$

Como $a = \sup S$, existe $r \in S$ tal que

$$\frac{2+a^2}{2a} < r \leq a$$

consequentemente

$$\left(\frac{2+a^2}{2a}\right)^2 < r^2 < 2,$$

já que $r^2 < 2$. Por outro lado, temos

$$(2-a^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-a^2)^2 + 8a^2 \geq 8a^2 \Leftrightarrow \frac{(2-a^2)^2 + 8a^2}{4a^2} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2+a^2)^2}{4a^2} \geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2+a^2}{2a}\right)^2 \geq 2$$

e chegamos novamente a uma contradição.

Assim, $a = \sup S$ satisfaz necessariamente a condição (iii): $a^2 = 2$ e, como já demonstramos na aula 1, nenhum número racional tem o quadrado igual a 2. Concluímos que S não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

Um corpo ordenado K é dito completo se satisfaz a seguinte condição:

Todo subconjunto $S \subset K$ limitado superiormente admite supremo em K.

A condição acima é chamada **condição de completude**. Vamos exigir que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais seja um corpo, ordenado, arquimediano e que também seja completo.

Repetindo o que fizemos na Aula 1, associamos os elementos de um corpo ordenado

ATENÇÃO!

O exemplo acima mostra que existem subconjuntos de que não admitem supremo em Q. Esta condição, que falha no caso dos racionais, é precisamente aquela que deve ser satisfeita por um corpo ordenado arquimediano para que seus pontos estejam em correspondência bijetiva com os pontos de uma reta. Demonstrar que de fato existe esta bijeção é nosso objetivo no restante deste tópico.

arquimediano R, contendo $\mathbb{Q}$, aos pontos de uma reta t da seguinte forma: escolhemos dois pontos O e U de t de modo que O esteja à esquerda de U.

Consideramos, então, uma função $\phi : R \to t$, tal que $\phi(0) = O$ e $\phi(1) = U$. Dado um número natural n, seja $\phi(n) = U_n$, onde U_n é o ponto obtido justapondo-se n cópias de OU à direita de O, de modo que $OU_n = OU + \cdots + OU$ (n vezes). Além disso, $\phi(\frac{1}{n}) = V_n$, onde $OV_n + \cdots + OV_n = OU$. Assim, todo número racional positivo m/n tem como imagem o ponto P tal que $OP = OV_n + \cdots + OV_n$ (m vezes). Se r é um número racional negativo, então $\phi(r) = Q$, onde Q está à esquerda de O e os segmentos QO e OP são congruentes, com $P = \phi(-r)$.

Seja $a \in R$ é um número (racional ou irracional). Consideremos o conjunto de números racionais

$$E_a = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\}.$$

ATENÇÃO!

Para que as noções de esquerda e direita façam sentido, usamos aqui a noção de reta orientada. Assim, a reta possui uma orientação que fica estabelecida quando os os pontos e são escolhidos e fixados.

A condição de completude para R implica que $\sup E_a$ é um elemento de R. V amos verificar que $\sup E_a = a$. De fato, dado $r \in E_a$, temos $r < a$, logo a é um cota superior de E_a. Dado $\delta > 0$, a densidade de $\mathbb{Q}$ em R (Teorema 1 da Aula 1) implica que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $a - \delta < r < a$. Em particular, $a - \delta$ não é cota superior de E_a. Pelo Teorema 2, $a = \sup E_a$. Podemos, então, definir $\phi(a) = A$, onde A é um ponto da reta t tal que

1. Se $r \in \mathbb{Q}$, A está à direita de $\phi(r)$ se, e somente se, $r \in E_a$.
2. Se A' está à esquerda de A, então existe $r \in E_a$ tal que $\phi(r)$ é um ponto entre A' e A.

O próximo resultado mostra que a completude, como definida acima, garante a bijetividade de ϕ.

Teorema 3 Seja R um corpo ordenado completo que contém o corpo dos números racionais e seja t uma reta orientada, entendida aqui como um conjunto de pontos, com dois pontos distinguidos O e U. A função $\varphi : R \to t$ definida acima é uma bijeção.

Demonstração: Vamos, primeiro, mostrar que ϕ está bem definida, o que significa que, para cada $a \in R$, existe um único ponto A da reta t tal que $\phi(a) = A$. De fato, se $a \in \mathbb{R}$, a construção que fizemos acima garante que $\phi(a)$ é único. Em geral, se a é um elemento de R, não necessariamente racional, suponhamos que $\phi(a) = A$ e $\phi(a) = B$. Vamos mostrar que $A = B$. De fato, se $A \neq B$, então um dos dois pontos está à esquerda do outro. Para fixar ideias, podemos supor que B está à esquerda de A. Como $\phi(a) = A$, a condição (ii) e o fato de B estar à esquerda de A implicam que existe $r_0 \in E_a$ tal que $\phi(r_0)$ está entre B e A, em particular, $\phi(r_0)$ está à direita de B. Por outro lado, como $\phi(a) = B$, (i) implica que $\phi(r)$ está à esquerda de B, para todo $r \in E_a$. Isto gera uma contradição, pois $\phi(r)$ estaria ao mesmo tempo à direita e à esquerda de B. A contradição vem de supormos que A e B são pontos distintos. Logo, $A = B$ e ϕ está bem definida.

Vamos, agora, mostrar que ϕ é injetiva. Para isso, tomemos $a, b \in R$ tais que $\phi(a) = \phi(b) = A$. Queremos mostrar que $a = b$. Sejam

$$E_a = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} \text{ e } E_b = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < b\}.$$

Se $r \in E_a$, então $\phi(r)$ é um ponto de t que está à esquerda de $A = \phi(a)$. Como A também é igual a $\phi(b)$, a condição (i) implica que $r \in E_b$. Assim, $E_a \subseteq E_b$. De modo inteiramente análogo, podemos concluir que $E_b \subseteq E_a$, logo $E_a = E_b$ e, consequentemente, $a = \sup E_a = \sup E_b = b$.

Finalmente, mostraremos que ϕ é sobrejetiva. Para isso, consideremos um ponto $A \in t$. Seja $E_A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \phi(r) \textit{ está à esquerda de } A\}$. Pela condição de completude, $a = \sup E_A$ é um elemento de R. Seja $\phi(a) = A'$. Pela condição (i), $\phi(r)$ é um ponto situado à esquerda de A', para todo $r \in \mathbb{Q}$, $r < a$. Em particular, $\phi(r)$ está à esquerda de A', para todo $r \in E_A$, pois $a = \sup E_A$. Assim, o conjunto dos pontos do tipo $\phi(r)$, situados à esquerda de A, está contido no conjunto dos pontos do tipo $\phi(r)$ situados à esquerda de A'. Como consequência deste fato, segue que A' não pode estar à esquerda de A, pois isso implicaria a existência de um ponto do tipo $\phi(r)$ entre A' e A, ou seja, $\phi(r)$ estaria à esquerda de A e não estaria à esquerda de A', o que é impossível, pelo que vimos acima. Por outro lado, se A estivesse à esquerda de A', então a condição (ii) implicaria a existência de $\phi(r)$ entre A e A', com $r \in E_a$. Logo, $\phi(r)$ estaria à direita de A, o que implicaria $r \notin E_A$. Mas $r \notin E_A$ implica $r \geq a = \sup E_A$ e $r \in E_a$ implica $r < a$. Portanto $a \leq r < a$ é absurdo!

Concluímos, então, que A' não pode estar à esquerda nem à direita de A, ou seja, $\phi(a) = A' = A$ e a função ϕ é sobrejetiva, como queríamos demonstrar. ■

Concluímos aqui o nosso segundo tópico desta aula. Vimos aqui a importante noção de completude, que diferencia o corpo ordenado dos reais do corpo ordenado dos racionais. Vimos que a condição de completude é exatamente aquela que nos permite identificar o conjunto dos números reais com o conjunto dos pontos de uma reta orientada.

Devido ao caráter introdutório destas aulas, não trataremos dois pontos importantes: a existência de um corpo ordenado completo e a unicidade de um corpo ordenado completo. A questão da existência pode ser atacada construindo-se efetivamente os números reais a partir dos números racionais. Existem dois modos clássicos de se fazer esta construção: via sequências de Cauchy ou via cortes de Dedekind. Não entraremos em detalhes, e o leitor interessado pode consultar um dos livros citados nas referências. Quanto à unicidade, deve-se demonstrar que dois corpos ordenados completos são essencialmente idênticos, diferindo apenas quanto à natureza dos seus elementos. Para isso deve-se construir uma função bijetiva entre os dois conjuntos que preserve suas estruturas, ou seja, preserve as operações de soma e de produto e preserve a relação de ordem. Para uma construção deste tipo, remetemos o leitor interessado novamente a uma das referências bibliográficas.

SAIBA MAIS!

Mais informações sobre as sequências de Cauchy no site www.ime.usp.br/~tonelli/map0151/pool/cauchy.pdf

Mais informações sobre os cortes de Dedekind, acesse o site www.dme.ufcg.edu.br/sites_pessoais/professores/Marco/Dedekind.pdf

No tópico 3 a seguir, estudaremos o conjunto dos números reais quanto à sua enumerabilidade. Veremos que esta é outra diferença marcante entre o conjunto dos reais e o conjunto dos racionais.

TÓPICO 3 Enumerabilidade

OBJETIVOS

- Compreender a noção de equivalência de conjuntos
- Saber justificar a enumerabilidade do conjunto dos racionais e a não-enumerabilidade do conjunto dos números reais

Dados dois conjuntos finitos A e B, podemos decidir qual dos dois tem mais elementos simplesmente contando o número de elementos de cada um. O matemático alemão, nascido na Rússia, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) estendeu esta possibilidade de comparação a conjuntos infinitos. Mais precisamente, Cantor estabeleceu a noção de equivalência entre conjuntos (finitos ou infinitos), que exploraremos, de maneira introdutória neste tópico.

Nosso principal objetivo é estabelecer que o conjunto dos números reais não é equivalente ao conjunto dos números racionais: o primeiro possui "mais elementos" do que o segundo, em um sentido que tornaremos preciso ao longo do tópico.

Dois conjuntos A e B são ditos equivalentes, de mesma cardinalidade, ou ainda equipotentes, se existe uma função bijetiva $f : A \to B$. A notação $A \sim B$ indica que A é equivalente a B. Notemos, primeiramente, que a equivalência entre conjuntos, definida acima, tem as seguintes propriedades:

1. A relação ~ é reflexiva, isto é, $A \sim A$, para todo conjunto A. De fato, a função identidade $\mathrm{Id} : A \to A$, dada por $Id(a) = a$, é uma função bijetiva, logo $A \sim A$.

2. A relação ~ é simétrica, isto é, se A e B são conjuntos tais que $A \sim B$, então *B:A*. De fato, se $A \sim B$, então existe uma função bijetiva $f : A \to B$. Sendo bijetiva, f admite uma inversa, $f^{-1} : B \to A$ que também é bijetiva, logo $B \sim A$.

3. A relação *:* é transitiva, isto é, se A, B e C são conjuntos tais que $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$. De fato, $A \sim B$ implica que existe $f : A \to B$ bijetiva e $B \sim C$ implica que existe $g : B \to C$ bijetiva. A composta $g \circ f : A \to C$ é bijetiva, logo $A \sim C$.

Uma relação reflexiva, simétrica e transitiva, é chamada relação de equivalência. Assim, podemos dizer que a relação definida acima é uma relação de equivalência.

Como notação complementar, escrevemos $A \prec B$ se existe uma função injetiva $f : A \to B$. Dizemos, neste caso, que a cardinalidade de A é menor do que a de B. Escrevemos, ainda, $A \succ B$ se existe uma função **sobrejetiva** $f : A \to B$. Dizemos, neste caso, que a cardinalidade de A é maior do que a de B.

Um conjunto A é dito **finito** se existe um número natural n e uma função bijetiva

$$f : \{1, \ldots, n\} \to A.$$

O número n é chamado cardinalidade, ou número de elementos de A. Usamos a seguinte notação:

$|A| = n =$ número de elementos de A.

A seguir, faremos algumas observações para o caso em que os conjuntos A e B são finitos.

Teorema 4: Sejam A e B conjuntos finitos.
1. $A \sim B$ se, e somente se, $|A| = |B|$.
2. $A \prec B$ se, e somente se, $|A| \leq |B|$.
3. $A \succ B$ se, e somente se, $|A| \geq |B|$.

Demonstração: (1) *A:B* se, e somente se, existe uma funçao bijetiva $f : A \to B$. Como A é finito, existe um número natural n e uma função bijetiva $g : \{1, \ldots, n\} \to A$. A função

$$f \circ g : \{1, \ldots, n\} \to B$$

sendo a composta de duas funções bijetiva também uma função bijetiva. Logo $|B| = n = |A|$.

Reciprocamente, se $|A|=|B|=n$, então existem funções bijetivas $f:\{1,\ldots,n\}\to A$ e $g:\{1,\ldots,n\}\to B$. Assim, a função $g\circ f^{-1}:A\to B$ é uma bijeção, o que mostra que *A:B*.

(2) Suponha, primeiro, que $A\prec B$. Neste caso, existe uma função injetiva $f:A\to B$. Supondo que $|A|=m$ e $|B|=n$, existem bijeções $g:\{1,\ldots,m\}\to A$ e $h:\{1,\ldots,n\}\to B$. Assim, a função composta $h^{-1}\circ f\circ g:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}$ é injetiva (pois é a composta de três funções injetivas). Denotando $F=h^{-1}\circ f\circ g$, temos $\{F(1),\ldots,F(m)\}\subseteq\{1,\ldots,n\}$, e, como F é injetiva, $\{F(1),\ldots,F(m)\}$ possui m elementos. Concluímos daí que $m\le n$.

Reciprocamente, se $|A|=m\le n=|B|$, então existem bijeções $f:\{1,\ldots,m\}\to A$ e $g:\{1,\ldots,n\}\to B$. Como $m\le n$, existe uma função injetiva $I:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}$, dada por $I(k)=k$, para $1\le k\le m$. Assim, a função composta $g\circ I\circ f^{-1}:A\to B$ é injetiva (pois é composta de funções injetivas) e, daí, $A\prec B$.

(3) O argumento é similar ao usado no item (2). Veja a tarefa 4.

Passemos, agora, a considerar conjuntos infinitos. Um conjunto infinito A é dito enumerável é equivalente ao conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots,\}$ dos números naturais, isto é, se existe uma função bijetiva $f:\mathbb{N}\to A$. Um conjunto A é chamado contável se for finito ou se for enumerável.

O exemplo evidente de conjunto enumerável é o próprio conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Entretanto, é surpreendente que exista um conjunto infinito X equivalente a um subconjunto próprio $Y\subset X$, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo: O conjunto $2\mathbb{N}=\{2,4,6,\ldots\}$ dos números naturais pares é um subconjunto de $\mathbb{N}$ equivalente a $\mathbb{N}$. De fato, a função $f:\mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$, dada por $f(n)=2n$ é bijetiva, logo $2\mathbb{N}:\mathbb{N}$.

Um fato ainda mais surpreendente é que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ sejam equipotentes. Este é o resultado do Teorema a seguir.

Teorema 5: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}^+$ formado pelos números racionais positivos é enumerável. Lembremos que o conjunto $\mathbb{Q}^+$ é formado por frações do tipo $\frac{a}{b}$, com a e b números naturais. Podemos, ainda, supor que a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível, o que significa que o máximo divisor comum entre a e b é igual a 1, ou seja, a e b não têm fatores comuns.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n o subconjunto de $\mathbb{Q}$ dado por

$$A_n = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \; / \; \frac{a}{b} é irredutível e\, a+b = n+1 \right\}.$$

Por exemplo: $A_1 = \{\frac{1}{1}\}$, $A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\}$, $A_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{3}{1}\}$. Observe que $\frac{2}{2} \notin A_3$ pois $\frac{2}{2}$ não é uma fração irredutível. Mais dois exemplos: $A_6 = \{\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}\}$, $A_7 = \{\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}\}$.

Afirmamos que

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Q}} A_n$$

e que esta união é disjunta. De fato, dado um número racional positivo, podemos escrevê-lo na forma irredutível, digamos $\frac{a}{b}$. Então $\frac{a}{b} \in A_n$, onde $n = a+b-1$. Além disso, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $\frac{a}{b} \in A_m$ e $\frac{c}{d} \in A_n$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica $a = b$ e $c = d$, pois estas frações são irredutíveis. Assim, $m = a+b-1 = n$. Isso mostra que, se $m \neq n$, então $A_m \cap A_n = \varnothing$.

Observemos, ainda, que A_n é finito para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja, agora, $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{Q}} A_n = \mathbb{Q}^+$, dada por: $f(1) = \frac{1}{1} \in A_1$, $f(2) = \frac{1}{2} \in A_2$, $f(3) = \frac{2}{1} \in A_2$ e, em geral, $A_n = \{f(k), f(k+1), \ldots, f(m)\}$, onde $k = |A_1| + \cdots + |A_{n-1}| + 1$ e $m = k + |A_n|$, para cada $n \geq 2$. Como todos os elementos de cada A_n são distintos e dois conjuntos A_i e A_j, com $i \neq j$, são distintos, temos que a função f é injetiva. Além disso, como a união dos conjuntos A_n, $n \geq 1$ é igual ao conjunto $\mathbb{Q}^+$, a função f é sobrejetiva. Mostramos, assim, que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, dada acima, é bijetiva. Logo $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Seja, agora, $\mathbb{Q}^-$ o conjunto dos números racionais negativos. A função $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$, dada por $g(r) = -r$, é uma bijeção, logo $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Q}^-$ são equipotentes e, portanto, $\mathbb{Q}^-$ também é enumerável.

O conjunto dos números racionais pode ser escrito como uma união $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Como $\mathbb{Q}^-$ e $\mathbb{Q}^+$ são enumeráveis, podemos escrever

$$\mathbb{Q}^- = \{a_1, a_2, \ldots\} \, e \, \mathbb{Q}^+ = \{b_1, b_2, \ldots\}.$$

Consideremos, então, a função $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, dada por, $F(1) = 0$ e, para cada $k \geq 1$, $F(2k) = b_k$ e $F(2k+1) = a_k$. Esta função é bijetiva (veja a tarefa 5). Desta forma, o conjunto Q dos números racionais é enumerável. ■

Um conjunto infinito A é dito não-enumerável, se não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$. Nosso próximo passo é demonstrar que o conjunto dos números reais não é enumerável. Primeiramente, mostraremos que o conjunto dos números reais é equipotente ao conjunto dos pontos do intervalo aberto $(0,1)$.

Lema: A função $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$, é bijetiva. Consequentemente, os conjuntos $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ são equipotentes.

Demonstração: A derivada da função $f(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ é $f'(x)=\dfrac{x^2+(x-1)^2}{x^2(x-1)^2}$. Logo, $f'(x)>0$, para todo $x\in(0,1)$, o que mostra que a função $f(x)$ é monótona crescente, portanto injetiva, no intervalo $(0,1)$.

Para demonstrar a sobrejetividade de f, basta notar que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{x(1-x)}=-\infty$$

e, por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x(1-x)}=+\infty.$$

Sendo assim, há uma bijeção entre o intervalo $(0,1)$ e a reta $\mathbb{R}$, o que mostra que os conjuntos $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ são equipotentes. ■

Teorema 6: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável.

Demonstração: Vamos demonstrar que o conjunto $(0,1)$, formado pelos números reais maiores do que zero e menores do que 1, é não-enumerável. Isso mostra que $\mathbb{R}$ é não-enumerável, pois $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ são equipotentes.

Suponhamos, por absurdo, que $(0,1)$ seja enumerável, isto é, $(0,1)=\{x_1,x_2,\ldots\}$. Podemos escrever cada x_i usando sua representação decimal:

$x_i=0,a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots$

onde $a_{ij}\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ é um algarismo e podemos supor que esta representação decimal é infinita. Devemos observar que, caso um número tenha representação decimal finita, como $0,5$, podemos escrever $0,5=0,499\ldots$.

Se dois números $x_k,x_i\in(0,1)$ têm a mesma representação decimal infinita, então $x_k=x_i$. De fato, se $x_k=0,a_{k1}a_{k2}\ldots$ e $x_i=0,a_{i1}a_{i2}\ldots$, então

$$x_k=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{kj}}{10^j}\ \ e\ \ x_i=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{10^j}.$$

Se as representações decimais infinitas de x_k e x_i coincidem, então $a_{kj}=a_{ij}$, para todo $j\ge 1$. Assim, concluímos que $x_k=x_i$.

Usaremos, agora, uma ideia de Cantor conhecida como método da diagonal. Vamos construir um número $x \in (0,1)$ que não pertence à lista $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Para tal, consideremos $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ onde $\alpha_i \neq a_{ii}$, ou seja, α_i é um algarismo diferente daquele que ocupa a casa decimal i do número x_i . Mais especificamente, podemos escolher $\alpha_i = 1$, se $a_{ii} \neq 1$ e $\alpha_i = 2$ se $a_{ii} = 1$. Assim, construímos um número $x \in (0,1)$ cuja representação decimal infinita é diferente da representação decimal infinita de qualquer elemento da lista $x_1, x_2, \ldots$. Isso mostra que vale a inclusão $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset (0,1)$ e que estes conjuntos não podem ser iguais, ou seja, $(0,1)$ é não-enumerável. ■

Com este resultado encerramos o terceiro e último tópico de nossa segunda aula. Vimos que o conjunto dos números racionais é enumerável e que o conjunto dos números reais é não-enumerável. Isto estabelece uma diferença entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ como conjuntos. Este fato também esclarece um ponto importante: os números irracionais, que historicamente surgiram como exceção, são, na realidade, maioria entre os reais, no seguinte sentido: o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, sendo o complementar de um conjunto enumerável em um conjunto não-enumerável, é também não-enumerável, caso contrário, se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fosse enumerável, então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, sendo a união de dois conjuntos enumeráveis, seria também enumerável, o que não ocorre. Desta forma é possível concluir que os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são equipotentes, ou seja, há tantos números irracionais quanto números reais.

AULA 3 | Sequências e séries

Olá, aluno (a),

Nesta aula, iniciaremos o estudo de funções de variáveis reais com imagem no conjunto dos reais. De início, tomaremos como domínio o conjunto dos naturais, embora, nesse caso, o domínio seja um conjunto simples e com menos elementos que a imagem. No entanto, já poderemos ver resultados bem interessantes e exemplos de funções as quais você, aluno, teve oportunidade de estudar no ensino médio.

As sequências e séries proporcionam grandes aplicações na Física e nas engenharias, como, por exemplo, as séries de Fourier e de Bessel. No tópico 1, daremos alguns exemplos e definições; no tópico 2, veremos as propriedades e teoremas sobre sequências; no tópico 3, veremos as sequências com limites infinitos e analisaremos alguns exemplos; no tópico 4, falaremos sobre séries e abordaremos também os testes de convergências sobre séries e exemplos

Bons estudos!

Objetivos

- Definir sequências e séries numéricas
- Identificar as propriedades das sequências e séries
- Reconhecer os principais teoremas sobre sequências e séries
- Estabelecer relação entre teoria e prática

TÓPICO 1

Definição de sequência

Objetivos

- Identificar a noção de valor absoluto e suas propriedades mais relevantes
- Perceber a possibilidade de existirem vários valores absolutos definidos em um corpo ordenado
- Desenvolver a noção de espaço métrico a partir da noção de valor absoluto sobre os reais

Neste tópico, iniciaremos o estudo de sequência. Começamos definindo o conceito de sequência de números reais. Em seguida, introduziremos as propriedades e os principais teoremas. Teremos também a oportunidade de desenvolver algumas aplicações.

O estudo de sequências remonta desde o século V antes de Cristo, quando Zenão de Elea (490 – 425 a. C.) propôs quatro paradoxos que mostravam a impossibilidade de se descrever por meio de números o movimento contínuo. Esses quatro paradoxos são: a dicotomia, o de Aquiles e a Tartaruga, o do Flecha e o do Estádio.

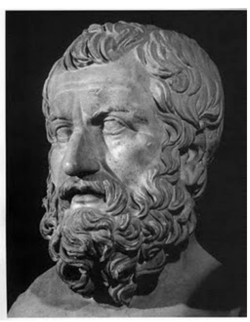


Figura 1: Zenão de Elea

No problema de "Aquiles e a tartaruga", Zenão indagava se seria possível Aquiles alcançar uma tartaruga, quando esta se deslocava. Ele concluiu que a cada ponto que Aquiles chegasse já não alcançaria a tartaruga porque ela teria se deslocado para outro ponto. Hoje sabemos que esse problema resulta em uma sequência ou soma de termos infinitos. Nos trabalhos de Arquimedes sobre o cálculo de áreas sob as curvas quadráticas, também surge a ideia de sequências. Com a descoberta do cálculo feita por Newton e Liebniz, o estudo de sequências obteve um grande impulso no seu desenvolvimento.

Definição 1: Uma sequência é uma função com domínio no conjunto dos números naturais e toma valores (ou imagem) no conjunto dos números reais. Assim, temos

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \to x(n) = x_n$$

Podemos ver uma sequência como uma lista de números reais em uma dada ordem:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

onde o termo x_n é chamado de termo geral ou n-ésimo termo da sequência.

Daqui em diante usaremos a seguinte notação para representar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\geq 1}$ e muitas vezes só representaremos por (x_n). O conjunto de seus termos será representado por $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$.

Vejamos alguns exemplos de sequências:

SAIBA MAIS!

Obtenha mais informações sobre o filósofo Zenão de Elea acessando o link http://www.mundodosfilosofos.com.br/zenao.htm

Exemplo 1: (um exemplo tratado no ensino médio) Uma PA é uma sequência em que cada termo a partir do segundo é obtido adicionando uma constante ao termo anterior.

$$x_{n+1} = x_n + r$$

r é chamado de razão da PA.

Uma PG é uma sequência, em que cada termo a partir do segundo é obtido multiplicando-se uma constante q, isto é,

$$x_{n+1} = x_n . q$$

em que q é a razão da PG.

ATENÇÃO!

O aluno do ensino médio toma o primeiro contato com um tipo bem especial de sequência quando estuda PA e PG.

Exemplo 2: $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo termo geral é dado por: $x(n) = x_n = \dfrac{1}{n}$. O conjunto de seus termos é dado por: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. E o gráfico do conjunto dos seus pontos na imagem é dado abaixo. Como você pode perceber na Figura 2, esses pontos tendem para zero quando n cresce arbitrariamente.

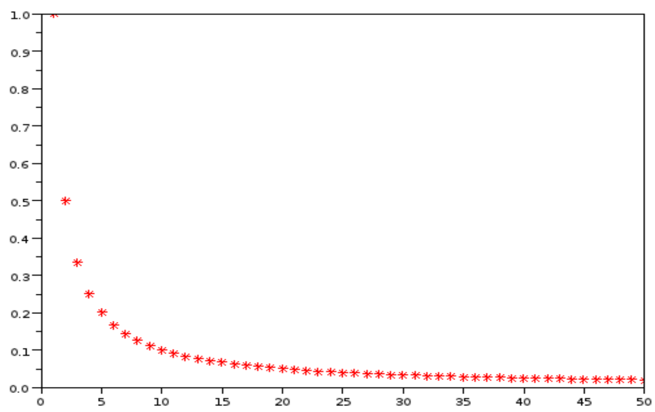


Figura 2: Gráfico da função $x(n) = x_n = \frac{1}{n}$

Exemplo 3: $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por $x_n = n$, cujo conjunto dos termos é $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ que é o conjunto dos naturais (na realidade você pode ver que $x_n = Id(n) = n$ é a função identidade). Já neste caso os pontos tendem para pontos arbitrariamente grandes.

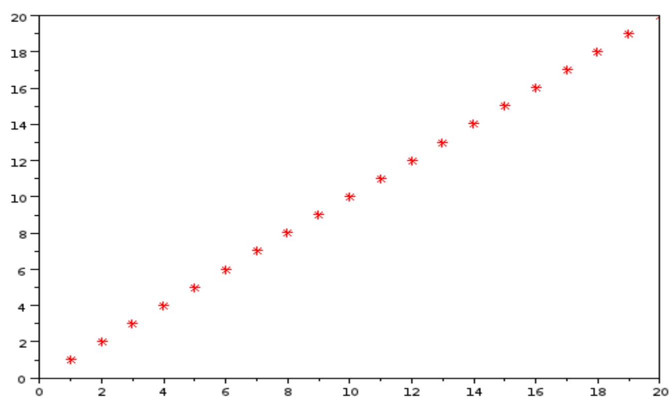


Figura 3: Gráfico da função $x_n = n$

Nem toda sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode ser apresentada como uma expressão vista nos exemplos acima.

Exemplo 4: Para a sequência dos números que representa o π, dado por $x_1 = 3, x_2 = 3{,}1, x_3 = 3{,}14, x_4 = 3{,}141, x_5 = 3{,}1415, x_6 = 3{,}14159\ldots$, não existe fórmula que possa representá-la.

Há, todavia, expressões diferentes que tendem para o mesmo número real como veremos a seguir.

Exemplo 5: $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ e $y_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

O principal fato a ser analisado sobre uma sequência é verificar se ela tende ou não para um número real fixo. No primeiro caso, dizemos que a sequência é convergente; no segundo, dizemos que é divergente. Podemos, então, enunciar a seguinte definição.

Definição 2: Dizemos que uma sequência $x = (x_n)_{n\geq 1}$ converge para um número real a, ou tem limite o número real a, se dado $\varepsilon > 0$ pode-se encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ implica que $|x_n - a| < \varepsilon$. Em termos simbólicos tem-se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Denotaremos a definição acima simbolicamente da seguinte forma:

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$

Quando uma sequência não for convergente, dizemos que é divergente e representamos por: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Vamos agora aplicar a definição dada acima para mostrar que a sequência do Exemplo 2 tende a zero, isto é, $x_n \to 0$. De fato, dado $\dot{o} > 0$ arbitrário, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\dot{o}$ (um tal n_0 pode ser escolhido de acordo com o Princípio de Arquimedes). Se $n \geq n_0$ então

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

Um dos fatos que necessitamos mostrar é se uma sequência tem apenas um único limite. Esse resultado garante que, não importa de que maneira tentemos calcular o limite de uma sequência, ele será sempre o mesmo.

ATENÇÃO!

Podemos afirmar, com base na definição dada anteriormente, que o número real $a \in \mathbb{R}$ é o limite da sequência $x = (x_n)_{n\geq 1}$ se, somente se, para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto

$$x^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\}$$

tem o complemento finito em $\mathbb{N}$.

Teorema 1: Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a e \lim_{n\to\infty} x_n = b$, então $a = b$.

Demonstração: Seja dado $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1 \geq n_0$ implica que . E para todo $n_2 \geq n_0$ também implica que $|x_n - b| < \epsilon / 2$.

Agora considere $n = mín\{n_1, n_2\}$, então para todo $n \geq n_0$ implica que

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \epsilon = \frac{|a-b|}{2}$$

o que dá um absurdo, pois teríamos $|a-b| < \dfrac{|a-b|}{2}$.

Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é injetiva se $n \neq m$ implica que $x_n \neq x_m$, ou ainda que $x_n = x_m \Rightarrow n = m$. Neste caso, diremos que a sequência tem termos dois a dois distintos. ■

Definição 3: Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é:

Limitada Superiormente quando existe um número real b tal que

$$x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Limitada Inferiormente quando existe um número real tal que $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Limitada quando é limitada superiormente e inferiormente, ou seja, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \in [a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observem que podemos tomar $|x_n| \leq c$, onde $c = máx\{|a|, |b|\}$.

Vejamos um exemplo de uma sequência limitada, mas que não é convergente.

Exemplo 6: Considere a sequência $x_n = (-1)^n$ é óbvio que $|x_n| \leq 1$ é uma sequência limitada, porém não é convergente. Suponha, por absurdo, que ela converge, ou seja, $x_n \to a$ para um certo $a \in \mathbb{R}$. Então, dado $\epsilon = 1/2 > 0$, por definição existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, portanto $|x_n - a| < \epsilon = 1/2$. No entanto, para cada n, temos

$$(1) |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < \epsilon + \epsilon = 1$$

E por outro lado, segue que

$$(2) |x_n - x_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2$$

e de (1) e (2) acima chegamos na contradição $2 < 1$. Dessa forma, concluímos que a sequência não é convergente.

Definição 4: Dada uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, uma subsequência da sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é a restrição da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ dos naturais, em que $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ e denotaremos por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que a é o limite de uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ se, somente se, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto dos índices n tais que $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ é infinito. E podemos dar a definição.

Definição 5: Dada uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, chamamos de valor aderente da sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ ao número real $a \in \mathbb{R}$ que é o limite de uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)$.

Conforme o exemplo anterior, uma sequência pode ser limitada e não ser convergente. Veremos, entretanto, que há tipos de sequências cuja limitação garante que é convergente. Por enquanto, segue o seguinte teorema.

Teorema 2: Se $|x_n| \leq c$ é uma sequência limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $|x_n| \leq c$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| < \frac{\epsilon}{|c|}$ para todo $n \geq n_0$, uma vez que o limite $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Então

$$|x_n y_n| = |x_n| \ |y_n| \leq c.\frac{\varepsilon}{|c|} < \varepsilon$$

Ou seja, dado $\epsilon > 0$, mostramos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ implica $|x_n y_n| < \epsilon$. Isso quer dizer que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ como queríamos provar. ■

Teorema 3: Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Com efeito, dado $\epsilon > 0$ qualquer existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ implica que $|x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Isso nos diz que, a partir do índice $n_0 + 1$, a sequência é limitada inferiormente por $a-\epsilon$ e superiormente por $a+\epsilon$. Então, tomando $M = \min\left\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-\epsilon, a+\epsilon\right\}$ e, segue que $M = \max\left\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-\epsilon, a+\epsilon\right\}$ $m \leq x_n \leq M, \forall n \geq n_0$. ■

TÓPICO 2

Operações com sequências

Objetivos

- Entender as operações com sequências
- Compreender a definição de subsequência
- Conhecer as propriedades de sequência

Neste tópico, trataremos de algumas operações sobre as sequências, definições e a noção fundamental de subsequências e de suas propriedades.

Inicialmente, vejamos um teorema que estabelece as principais operações sobre as sequências

Teorema 4: Sejam $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ sequências convergentes, então temos:

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b$

b) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a - b$

c) $\lim_{n\to\infty}(x_n . y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n).(\lim_{n\to\infty} y_n) = a.b$

d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$, desde que $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$

Demonstração:

a) Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ (i)

$\forall n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ (ii)

Tomando $n_0 = máx\{n_1, n_2\}$, então para todo $n \geq n_0$ implica de (i) e (ii) que

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

E, desse modo, estamos de acordo com a definição que $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

b) É análoga ao item a).

c) Por hipótese, temos que $x_n \to a$ e $y_n \to b$ e, portanto, $|\, y_n \,| \le M$; então $|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \le |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|$ o que resulta na desigualdade

$$\le M.|x_n - a| + |a|.|y_n - b| \le M.\frac{\epsilon}{2.M} + |a|.\frac{\epsilon}{2.|a|} \le \epsilon$$

uma vez que podemos tomar $|x_n - a| \le \dfrac{\epsilon}{2.M}$ e $|\, y_n - b \,| \le \dfrac{\varepsilon}{2.|\, a \,|}$, pois as sequências $x_n \to a$ e $y_n \to b$.

d) Deixaremos como exercício para o aluno.

Vamos definir algumas sequências que serão importantes no decorrer do curso e nos possibilitarão ver outros resultados.

Definição 6:

Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\ge 1}$ é crescente quando $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$. Se $x_n \le x_{n+1}, \forall \in \mathbb{N}$, a sequência é dita não-decrescente.

Uma sequência $(x_n)_{n\ge 1}$ é decrescente quando $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_1 > x_2 > \cdots x_n > \cdots$. Agora, se $x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é não-crescente.

Caro aluno, denominaremos os casos i) e ii) definidos acima como sequências monótonas. Assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 5: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $(x_n)_{n\ge 1}$ é não-decrescente, ou seja, $x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \le c, \forall n \in \mathbb{N}$ é limitada e tomemos $a = Sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $a - \epsilon < a$, temos que $a - \epsilon$ não pode ser cota superior do conjunto dos termos da sequência. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} \le a$, como $x_n \ge x_{n_0}$ para $n \ge n_0$ tem-se que $a - \epsilon < x_{n_0} \le x_n \le a < a + \epsilon, \forall n \ge n_0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Exemplo 7: No exemplo 5, consideramos uma importante sequência $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ que define o número irracional e base dos logaritmos naturais. A primeira vez que se teve notícia do surgimento desse número foi em um problema de juros compostos contínuos (séc. XVII). Assim, temos que

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ dada acima é limitada e crescente e, portanto, pelo Teorema 5, é convergente. De acordo com fórmula do binômio de Newton,

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\frac{\sum_{k=1}^{n} n(n-1)\ldots(n-[k-1])}{k!}.\frac{1}{n^k} \ (1)$$

$$x_n = 1+\sum_{k=1}^{n}.\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) (2)$$

Se substituirmos n por $n+1$ na expressão (2) acima, temos

$$x_{n+1} = 1+\frac{\sum_{k=1}^{n+1} 1}{k!}.\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

Se desprezarmos o último termo na expressão acima, estaremos somando até o termo $k=n$, como em (2). Observe que cada termo que aparece acima entre parênteses é maior que os termos em (2), donde concluímos que $x_{n+1} > x_n$, ou seja, a sequência é crescente. Para provarmos que ela é limitada, basta observarmos que cada parêntese que surge em (2) é menor do que 1, de maneira que, para $n>1$, segue que

$$x_n < \frac{\sum_{k=1}^{n} 1}{k!} = 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Ora, sendo crescente e limitada, a sequência $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ tem limite pelo Teorema 5 anterior.

O resultado que enunciamos a seguir é bastante importante, mas não será dada a demonstração. Convidamos você, aluno, a vê-la nas referências que são dadas.

Proposição 1 (Bolzano - Weierstrass): Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

O aluno pode perceber que essa afirmação é mais forte que a dada no Teorema 5. Foi tentando prová-la que o matemático K. Weierstrass (1815 – 1897) viu a necessidade de fundamentar o conceito de números reais.

Definição 7: Uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é chamada de sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \epsilon$ para quaisquer que sejam $m, n > n_0$.

Teorema 6 (Cauchy): Uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é convergente se, e somente se, é de Cauchy. Ou seja, uma sequência de Cauchy é uma condição necessária e suficiente para ser convergente.

Demonstração: Iremos fazer a demonstração do teorema de Cauchy. Provaremos primeiramente que a condição é necessária. Ou seja, se $x_n \to a$, então vale a definição 6. De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - a| < \epsilon/2$ e $|x_n - a| < \epsilon/2$. Daí e da desigualdade triangular, temos que

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

o que prova que a sequência é de Cauchy.

Para provarmos que a condição é suficiente, admitiremos a hipótese de Cauchy e provaremos que a sequência é convergente. Queremos mostrar que $x_n \to a$. Ora, uma vez que a sequência é de Cauchy, temos que a sequência é limitada. De fato, tomando $m = n_0 + 1$, teremos que $|x_{n_0+1} - x_n| < \epsilon$, logo $x_{n_0+1} - \epsilon < x_n < x_{n_0+1} + \epsilon$, donde se conclui que a sequência é limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, temos uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um certo a e, portanto, $|x_{n_k} - a| < \epsilon/2$ para $n_k > n_0$. Assim, usando este fato e a desigualdade triangular, obtemos que

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

e isso mostra que a sequência é convergente. ■

ATENÇÃO!

Um corpo $\mathbb{K}$ (como exemplo $\mathbb{R}$) é dito completo quando toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ é convergente. O teorema acima é válido, pois os números reais é completo. Mas, veja que em $\mathbb{Q}$, se tomarmos uma sequência de números racionais convergindo para $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ela será de Cauchy, pois não irá convergir em $\mathbb{Q}$, uma vez que os racionais não é um conjunto completo.

Uma sequência (x_n) de Cauchy pode ser apresentada numa maneira equivalente à apresentada na definição 6, anterior como: dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left|x_n - x_{n+p}\right| < \epsilon$$

Como sabemos do teorema anterior, as sequências de Cauchy são convergentes. Esse tipo de sequência surgiu quando os matemáticos no século XVIII tentavam processos numéricos para resolver equações. Por exemplo, a equação $x^3 - 9\text{x} + 2 = 0$ pode ser escrita na forma equivalente $x = (x^3 + 2)/9$ ou, ainda, $x = f(x)$, onde $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{9}$. Dessa forma, pode-se construir uma sequência numérica infinita, tomando inicialmente um certo valor x_1 e em seguida tomar-se:

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

O que se quer provar é se a sequência é de Cauchy, pois nesse caso temos que é convergente para um certo x_0, que é solução da equação dada. Vejamos a seguir um exemplo de uma aplicação dessa ideia que são as aproximações sucessivas.

Exemplo 8 (Aproximações Sucessivas): Seja dado $0 \le \lambda < 1$ e suponhamos que a sequência $(x_n)_{n\ge1}$ satisfaz a seguinte condição:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le \lambda |x_{n+1} - x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $|x_{n+1} - x_n| \le \lambda^{n-1} |x_2 - x_1|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com efeito, para $n = 1$, temos que a desigualdade é válida como você pode ver trivialmente. E se $|x_{n+1} - x_n| \le \lambda^{n-1} |x_2 - x_1|$, então $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le \lambda |x_{n+1} - x_n| \le \lambda^n |x_2 - x_1|$. Deste modo, para $m, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, segue que

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \le (\lambda^{n+p-1} + \lambda^{n+p-2} + \cdots + \lambda^{n-1}) |x_2 - x_1| (1)$$

$$(1) = \lambda^{n-1}(\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \cdots + \lambda + 1) |x_2 - x_1| (2)$$

$$(2) = \lambda^{n-1} . \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} |x_2 - x_1| \le \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} |x_2 - x_1|$$

Assim, como $\dfrac{\lim \lambda^{n-1}}{1-\lambda} |x_2 - x_1| = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \le \dfrac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \left|x_2 - x_1\right| < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \epsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, ou seja, $\left|x_m - x_n\right| < \epsilon$ para quaisquer que sejam $m, n > n_0$. E portanto, a sequência $(x_n)_{n\ge1}$ é de Cauchy e concluímos que é convergente.

TÓPICO 3

Sequências com limites infinitos

Objetivos

- Reconhecer uma sequência com limite infinito
- Calcular os limites infinitos de algumas sequências
- Rever as propriedades de sequências com limites infinitos

Neste tópico, trataremos de sequências que não são convergentes, mas têm certa regularidade, ou seja, os seus limites tornam-se ou mantêm-se arbitrariamente grandes positivamente.

Como foi mencionado no tópico 1, nem toda sequência (x_n) é convergente. Dessa forma, há sequências que divergem e mantêm certa regularidade, pois seus termos permanecem arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

ATENÇÃO!

Com limites infinitos para sequências, podemos obter coisas indeterminadas, como $\infty - \infty$, ou seja, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$. Nada podemos afirmar sobre $\lim(x_n + y_n)$, pois pode ser que a sequência $(x_n + y_n)$ seja convergente, ou tenda para $+\infty$, ou tenda $-\infty$, ou finalmente não tenha limite algum.

Quando uma sequência de números reais (x_n) torna-se arbitrariamente grande positivamente ou tende para mais infinito, a denotaremos por $\lim x_n = +\infty$. Assim, dado $M > 0$ arbitrariamente grande, temos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ que implica $x_n > M$. Há apenas um número finito de termos (x_n) tal que $x_n < M$. Na realidade, n_0 termos.

Exemplo 9: Como vimos no exemplo 3, a sequência $x_n = n$ (e observamos o seu gráfico) trivialmente tem $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. E também a sequência $x_n = a^n$

tende para o infinito quando $a > 1$. Como, de fato, seja $a = 1 + r$, com $r > 0$, dado $M > 0$, pela desigualdade de Bernoulli, temos que $a^n = (1+r)^n > 1 + nr > M$. Basta tomar $n > \frac{M-1}{r}$. Assim, se tomarmos $n_0 > \frac{M-1}{r}$ e $n > n_0$, teremos o que queríamos, ou seja, $a^n > M$. De acordo com o que vimos anteriormente, segue que $\lim a^n = +\infty$.

Analogamente, pode-se enunciar que $\lim x_n = -\infty$. Se dado $M > 0$ arbitrariamente grande existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -M$. Como você pode perceber, $\lim x_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-x_n) = +\infty$. Desse modo, mostraremos somente o caso em que a sequência tende para o infinito positivamente; o outro caso você poderá obter trivialmente dessa observação feita. Enfatizamos que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. Vejamos algumas propriedades para a operação com limites infinitos.

Teorema 7 (Operações com Limites Infinitos):

Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente, então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$;

Se $\lim x_n = +\infty$ e existe $b > 0$ tal que $y_n > b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n.y_n = +\infty$;

Seja $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = +\infty$;

Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números positivos. Assim: (a) Se $x_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ com $c > 0$ e $\lim y_n = 0$. Desse modo, temos que $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$; (b). No entanto, se $|x_n| < c$ é limitada e $\lim y_n = +\infty$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Demonstração: Mostraremos apenas o item (4) e deixaremos para você as outras demonstrações.

(4a) Seja dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $0 < y_n < \frac{c}{M}$ e, portanto, $\frac{1}{y_n} > \frac{M}{c}$. Assim, segue que $n > n_0$ implica $\frac{x_n}{y_n} > \frac{c}{c/M} = M$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$. ■

(4b) Existe $c > 0$ tal que $|x_n| = x_n < c$, uma vez que $x_n > 0$ e é limitada. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $y_n > \frac{c}{\epsilon}$ uma vez que $\lim y_n = +\infty$. Dessa maneira, para $n > n_0$, temos que $0 < \frac{x_n}{y_n} < \frac{c}{c/\epsilon} = \epsilon$ e então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Exemplo 9: Se $x_n = n + a$ e $y_n = -n$, então $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, mas $\lim(x_n + y_n) = a$.

Exemplo 10: Se $x_n = \sqrt{n+1}$ e $y_n = -\sqrt{n}$, então $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$

.

Porém,

$$\lim(x_n + y_n) = \lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).\frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Exemplo 11: Sejam $x_n = n^2$ e $y_n = -n$, então $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$; no entanto $\lim(x_n + y_n) = \lim(n^2 - n) = +\infty$, pois $n^2 - n = n(n-1) > n$, para $n \geq 2$. Portanto, $\lim(x_n + y_n) = -\infty$.

Exemplo 12: Consideremos as sequências $x_n = n$ e $y_n = (-1)^n - n$, então é óbvio que $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$. Porém a sequência $(x_n + y_n) = (-1)^n$ não possui limite como provamos no exemplo 6.

Há outras expressões indeterminadas que podemos analisar, tais como $\frac{\infty}{\infty}$, quando $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = +\infty$. Do mesmo modo, nada podemos afirmar sobre o limite da sequência $(\frac{x_n}{y_n})$. Para finalizar este tópico, vejamos um exemplo que dá apenas uma ilustração desse resultado. Outros serão tratados nos exercícios.

Exemplo 13: Sejam $x_n = n + 1$ e $y_n = n - 1$, então $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, mas

$$\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{n(1+1/n)}{n(1-1/n)} = \lim \frac{1+1/n}{1-1/n} = 1$$

TÓPICO 4

Séries numéricas

Objetivos

- Entender as somas infinitas de termos
- Fazer operações com somas infinitas
- Analisar a convergência ou não das séries numéricas

Você já está acostumado a fazer somas de dois termos $x_1 + x_2$, três termos $x_1 + x_2 + x_3$ e até mesmo n termos como: $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. As somas infinitas $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ são um assunto com o qual você tomou contato apenas como um caso simples que é o caso das somas de uma P.G. infinita. O nosso principal objetivo neste tópico é leva-lo a entender as somas infinitas de termos bem gerais.

No ensino médio, o aluno deparou com somas do tipo: $1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n+\cdots$ e aprendeu como calcular a soma desses termos infinitos. Aqui vamos iniciar um estudo mais completo sobre essas somas, que chamamos de séries numéricas. Uma série numérica é uma soma infinita que representamos por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

onde os termos x_n são números reais dados. E x_n é chamado de termo geral da série. A partir da sequência (x_n) de números reais, podemos formar uma nova sequência (s_n), onde $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Chamamos os números s_n de reduzidas da série ou soma parcial da série. Se a sequência (s_n) tiver um limite $\lim s_n = s$, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente e $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \lim s_n$, s será a soma da série. No caso do limite $\lim s_n$ não existir, diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente. Você deve ficar atento, pois, às vezes, começaremos a série pelo termo x_0 em vez de x_1, por uma questão de conveniência.

Exemplo 14: Sabemos que $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (Pode ser provado por indução!). Ora, temos que $\lim |x|^n = 0$ se $|x|<1$, então segue que $\lim s_n = \lim(1+x+x^2+\cdots+x_n) = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \dfrac{1}{1-x}$. Portanto, segue que a série anterior, que é chamada de série geométrica, é convergente.

Exemplo 15: Agora, daremos um exemplo de uma série que não é convergente. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots$. Se considerarmos a soma parcial s_n, temos que essa soma é zero se $n = par$, ou seja, $s_{2n}=0$ e é igual a 1, quando $n = ímpar$, isto é, $s_{2n+1}=1$. Portanto, ela é divergente, pois as subsequências pares e ímpares da soma parcial convergem para valores distintos. Uma sequência é convergente se toda subsequência converge para o mesmo valor.

Teorema 8: A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se, somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon)$ (que pode depender de ε) tal que $|\sum_{i=n}^{m} x_i| < \varepsilon$ para todos $m \geq n > n_0$.

Demonstração: A prova desse fato decorre do teorema sobre sequência de Cauchy e deixamos para você fazer essa demonstração. ■

Corolário 1: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente, então $\lim x_n = 0$, ou seja, o termo geral tende para zero.

Demonstração: Basta tomarmos $m = n$ e $n = n-1$ no teorema anterior, então como $|s_n - s_{n-1}| = |x_n| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ o que decorre o corolário. ■

Exemplo 16: Vamos mostrar que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ é divergente. De fato, seja $\sum_{i=n}^{2n}\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2n}+\cdots+\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$ e pelo teorema 8, tomando $\grave{o} < 1/2$ vemos que a série não é convergente.

Você pode ver com esse exemplo que a recíproca do corolário 1 não é verdadeira. Podemos ter uma série divergente com o termo geral indo para zero. E mais, que não precisamos ver o que ocorre com todos os termos de uma série; basta olharmos o que acontece com finitos termos da série. Porém, o exemplo a seguir restabelece o corolário, mostrando que se o termo geral x_n da série não tende para zero, então a série diverge (temos aqui a contrapositiva).

Exemplo 17: Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$, como o termo geral $x_n=\frac{n^n}{n!}=\frac{n}{1}.\frac{n}{2}\ldots\frac{n}{n}>1$ para todo $n>1$, segue do corolário 1 do teorema 8 que a série é divergente.

Teorema 9 (Critério de Comparação): Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries de termos não negativos. Se existem $k>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tais que $x_n\le k.y_n$ para todo $n>n_0$, então a convergência de $\sum y_n$ implica a convergência de $\sum x_n$ e a divergência de $\sum x_n$ implica a divergência de $\sum y_n$.

Demonstração: Sejam as somas parciais $s_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$ e $t_n=\sum_{j=1}^{n}y_j$ tais que $s_n\le k.t_n,\forall n\in\mathbb{N}$. Se tivermos que $\lim t_n=t$, então $s_n\le k.t$ é crescente e limitada para todo $n\in\mathbb{N}$; logo, pelo teorema 5, é convergente. Por outro lado, se s_n é divergente, portanto é ilimitada e daí temos que $t_n\ge s_n/k$ é também ilimitada e assim divergente. ■

Exemplo 18: Vamos usar o teorema anterior para mostrar que a série $\sum\frac{1}{n^r}$ é divergente para $r<1$, pois como $1/n^r>1/n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, então $\sum\frac{1}{n^r}>\sum\frac{1}{n}$. Como a série harmônica é divergente, segue que a série dada também diverge.

Teorema 10 (Séries Alternadas): Seja a série $\sum(-1)^{n+1}x_n$, com os termos não-crescentes, ou seja, $x_1\ge x_2\ge x_3\ge\ldots\ge x_n\ge\ldots$ e $\lim x_n=0$, a série $\sum(-1)^{n+1}x_n$ é convergente.

Demonstração: Basta considerarmos as reduzidas de ordem par e ímpar da série $\sum(-1)^{n+1}x_n=x_1-x_2+x_3-x_4+\ldots$. Seja $s_{2n}=(x_1-x_2)+(x_3-x_4)+\ldots+(x_{2n-1}-x_{2n})$ é formada por termos positivos e não-decrescentes. E a reduzida de ordem ímpar $s_{2n+1}=x_1-(x_2-x_3)-(x_4-x_5)-\ldots(x_{2n}-x_{2n+1})$ é não-crescente. Observemos que $s_{2n}\le s_{2n+1}\le s_1$ e assim temos que possuem limites de acordo com o teorema 5. Então, seja $\lim s_{2n}=r$ e $\lim s_{2n+1}=s$, mas como $\lim s_{2n+1}=\lim s_{2n}+\lim x_{2n+1}$ e $\lim x_{2n+1}=0$ isso implica que $r=s$ e, portanto, a série é convergente. ■

Teorema 11 (Teste da Razão ou Teste de D'Alembert): Seja dada a série $\sum x_n$ e suponhamos que $\lim |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = r$ exista. Então: (a) a série é convergente se $r < 1$; (b) a série diverge se $r > 1$; (c) e nada podemos afirmar se $r = 1$.

Demonstração: Vamos demonstrar que (a) sabemos que $\lim |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = r$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leq k$ para $n \geq n_0$ onde $r < k < 1$. Dessa desigualdade obtemos as seguintes desigualdades abaixo:

$$|x_{n_0+1}| \leq k.|x_{n_0}|$$
$$|x_{n_0+2}| \leq k.|x_{n_0+1}|$$
$$|x_{n_0+3}| \leq k.|x_{n_0+2}|$$
$$\vdots$$
$$|x_{n_0+p}| \leq k.|x_{n_0+p-1}|$$

fazendo o produto dessas parcelas membro a membro, obtemos $|x_{n_0+p}| \leq k^p |x_{n_0}|$ e essa desigualdade mostra que a série $\sum |x_{n_0+p}|$ é limitada superiormente pela série $\sum |x_{n_0}|.k^p = |x_{n_0}| \sum k^p$, que é convergente, pois $0 < k < 1$ e, portanto, concluímos que a série é convergente. Os outros casos deixamos para você verificar. ■

Dizemos que uma série converge absolutamente, quando $\sum |x_n|$ é uma série convergente. E quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente, mas $\sum |x_n|$ não é convergente, diz-se que a série é condicionalmente convergente. Um exemplo de série condicionalmente convergente, mas que não é absolutamente convergente, é a série alternada dada no teorema 10. Você deve verificar que toda série absolutamente convergente é condicionalmente convergente.

Teorema 12 (Teste da raiz ou Teste de Cauchy): Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Suponha que o limite $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = r$ exista. Então: (a) a série converge absolutamente se $r < 1$; (b) a série diverge se $r > 1$; (c) e nada se pode afirmar quando $r = 1$.

Demonstração: (a) Basta tomar $\sqrt[n]{|x_n|} \leq k$ e isso existe porque a sequência converge, com $r < k < 1$. Disso segue que $|x_n| \leq k^n$ para todo $n \geq n_0$ e, portanto, a série é limitada superiormente por uma série convergente $\sum k^n$. Então $\sum |x_n|$ é convergente e, portanto, absolutamente convergente. Os outros casos deixamos para você verificar usando o teste de comparação. ■

SAIBA MAIS!

Mais informações sobre sequências e séries acesse os links

www.ime.uerj.br/~calculo/LivroV/series.pdf

www.ufjf.br/sandro_mazorche/files/2010/08/Séries.pdf

Esperamos que você tenha achado interessantes os resultados de sequências e séries que tratamos nesta aula. Recomendamos que procurem um livro de análise real para que possam se aprofundar mais no assunto e ver resultados que, por falta de espaço neste material, não deram para ser tratados aqui. Na próxima aula, veremos uma pouco de noções topológicas na reta real.

AULA 4 | Noções topológicas na reta real

Olá, aluno(a),

Esta aula é uma preparação para a próxima aula, que tratará de limite de uma função real. Embora o conceito de limite já tenha sido estudado por você, aluno, na disciplina de Cálculo I, aqui você verá uma formulação mais rigorosa e cuidadosa de algumas questões que não tinham sido formuladas, tais como os conjuntos em que podemos tomar limites. Sabemos que, quando tomamos limites, os pontos tendem para certo ponto. É sempre possível fazer isso, em qualquer conjunto? Essas e outras são questões importantes, sinalizadas em Cálculo 1, serão agora vistas, pois naquela disciplina não tínhamos como abordá-las.

A partir desses questionamentos, estudaremos, no tópico 1, a definição de conjunto aberto, interior de um conjunto, e ilustraremos com exemplos. No tópico 2, veremos conjuntos fechados, pontos aderentes e pontos de acumulação. Por último, no tópico 3, definiremos os conjuntos compactos, que se traduzem em propriedades importantes para as funções contínuas neles definidas.

O caráter desta aula é preparatório; não se trata, portanto, de uma abordagem completa e abrangente sobre a topologia da reta. No final desta aula, daremos algumas referências para que você aprofunde seus conhecimentos.

Vamos lá?!

Objetivos

- Compreender termos como conjuntos abertos, fechados, interior de um conjunto
- Definir os principais conjuntos necessários à noção de limite
- Reconhecer esses conjuntos e saber usá-los

TÓPICO 1

Conjuntos abertos e fechados

OBJETIVOS

- Compreender a definição de conjunto aberto e fechado
- Entender os conceitos sobre subconjuntos da reta real

Você já deve ter visto a noção de intervalo aberto e intervalo fechado no ensino médio e até mesmo neste curso de Matemática na disciplina "Matemática Básica I". O principal objetivo deste tópico é ampliar e dar um tratamento mais rigoroso a essa noção intuitiva de intervalo aberto e consequentemente ampliar conceitos sobre conjuntos abertos para outros subconjuntos da reta. Veremos também outras definições de subconjuntos da reta real, como interior, ponto aderente, ponto de acumulação.

De início, relembramos a noção de intervalo da reta, que denotaremos por:

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ Intervalo Aberto

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$ Intervalo Fechado

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\}$ Semiaberto à Direita

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\leq b\}$ Semiaberto à Esquerda

Antes de partirmos para a definição de conjunto aberto em $\mathbb{R}$, vejamos a noção de interior de um conjunto X. Posteriormente estabeleceremos uma relação entre o interior de um conjunto X e o fato de ele ser aberto. O primeiro intervalo no ensino médio é dito aberto, mas não se prova esse resultado. Aqui nós faremos a comprovação.

Definição 1: Consideremos $X \subset \mathbb{R}$ e $x \in X$. Dizemos que x é um ponto interior de X quando existe um intervalo (a,b) tal que $x \in (a,b) \subset X$. Isto significa que todos os pontos suficientemente próximos de x ainda pertencem ao conjunto X. Com isso, podemos estabelecer que $x \in X$ é um ponto interior de X se, somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset X$. Com efeito, basta tomar $\epsilon = min\{x-a, b-x\} > 0$ para $x \in (a,b) \subset X$, então

$a \leq x-\epsilon \leq x \leq x+\epsilon \leq b$, ou seja, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (a,b) \subset X$.

De agora em diante, representaremos o conjunto dos pontos $x \in X \subset \mathbb{R}$, que são interiores a X, por $I(X)$ e o chamaremos de interior do conjunto X. É óbvio que $I(X) \subset X$ e, ainda, se $X \subset Y \Rightarrow I(X) \subset I(Y)$. Vejamos os exemplos de interiores de subconjuntos da reta.

Exemplo 1: $X = (a,b)$ ou $X = [a,b]$, ou $X = (a,b]$, ou ainda $X = [a,b)$. Temos $I(X) = (a,b)$ e supomos que $X \subset \mathbb{R}$, para qualquer um dos casos dados anteriormente. Você pode verificar isso facilmente imitando a demonstração apresentada no final da definição 1 anterior.

Exemplo 2: Se $x_0 \in I(X)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset X$ e nesse caso o conjunto X contém uma quantidade não enumerável de pontos e nesse conjunto X tem que ter uma quantidade infinita de elementos (ou pontos). Portanto, todo conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tem $I(X) = \varnothing$. Dessa forma, também temos que $I(\mathbb{Q}) = \varnothing$, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável e não pode conter um intervalo só de racionais. Analogamente, segue que $I(\mathbb{Z}) = \varnothing$. No entanto, mesmo que o irracional $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não seja enumerável, temos que $I(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$, pois, para todo , teremos que o intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ contém $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ algum número racional uma $r \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ que o racional é denso nos reais.

ATENÇÃO!

Se $a \in I(X)$, dizemos que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a.

Definição 2: Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, quando todos o seus pontos são interiores. Em outras palavras, temos que, para todo $x \in A$, existe ò>0 tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A$, ou ainda, $I(A) = A$

É importante que você, aluno, lembre que a noção de limite de uma sequência $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ pode ser reformulada usando a definição de aberto. De fato, se fizermos $A = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ para $\epsilon > 0$ dado, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, implica que $x_n \in A$. Agora, vejamos alguns exemplos de conjuntos abertos da reta real.

Exemplo 3: A reta real $\mathbb{R}$ é obviamente um conjunto aberto, pois contém todo intervalo (a,b). O conjunto vazio $\varnothing$ também é aberto, pois, para não ser aberto, teríamos que obter um ponto x em $\varnothing$ que não seja interior, isto é, para todo $\epsilon > 0$, o intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon) \not\subset \varnothing$, mas isso não é possível, porque um tal x não existe em um conjunto vazio. Ou seja, não se pode mostrar que o conjunto vazio não possui ponto que não seja interior. Desse modo, só podemos concluir que o vazio é aberto.

Exemplo 4: Todo conjunto aberto não-vazio é não enumerável. Portanto $\mathbb{Q}$ e todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ não são abertos.

Exemplo 5: Nenhum subconjunto do conjunto dos números irracionais $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é aberto, uma vez que todo intervalo aberto contém um número racional, pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema 1: A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Demonstração: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ subconjuntos abertos. Considere o conjunto $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \cdots \bigcap A_n$ e seja $x \in A$ um ponto qualquer, então $x \in A_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ e assim temos que $(x - \epsilon_i, x + \epsilon_i) \subset A_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, pois todos os A_i são abertos. Tomando $\varepsilon = min_{1 \le i \le n}\{\varepsilon_i\}$ teremos que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (x-\epsilon_i, x+\epsilon) \subset A_i$ para todo $1 \le i \le n$ e consequentemente segue que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ e consequentemente a conclusão de que A é aberto. ∎

Teorema 2: Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma família arbitrária de subconjuntos abertos em $\mathbb{R}$. Então a união arbitrária de abertos, $A = \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é um aberto.

Demonstração: Com efeito, seja $x \in A = \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ qualquer, então $x \in A_{\alpha_0}$ para algum $\alpha_0 \in L$. Ora, como A_{α_0} é aberto, segue que existe $\epsilon > 0$ tal que e, portanto, $A\ (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A_{\alpha_0} \subset A$ é aberto, como queríamos provar. ∎

Observação 3: Um espaço topológico Γ é uma coleção de subconjuntos abertos da reta que satisfaz às seguintes condições:

$\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são abertos;

A intersecção de finitos abertos é também um conjunto aberto;

A união de uma família arbitrária de abertos é também um conjunto aberto.

Exemplo 6: Seja $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ um conjunto finito de números reais com $x_1<x_2<\cdots<x_n$. Então, o complemento do conjunto X, que é $\mathbb{R}-X=(-\infty,x_1)\bigcup(x_1,x_2)\bigcup\cdots\bigcup(x_{n-1},x_n)\bigcup(x_n,+\infty)$, é um conjunto aberto de acordo com o teorema 2. Assim, o complemento de um conjunto finito de números reais é um conjunto aberto.

TÓPICO 2

Conjuntos fechados

OBJETIVOS

- Compreender a noção de fechados na reta real
- Relacionar os conjuntos fechados com os conjuntos abertos
- Perceber a diferença entre conjuntos fechados e abertos

Neste tópico, veremos que a definição de conjuntos fechados é complementar à definição de conjuntos abertos. Mudando um pouco a relação de operações entre conjuntos (trocando intersecção por união), poderíamos definir um espaço topológico através dos conjuntos fechados. Os resultados seguem bem parecidos aos dados anteriormente em conjuntos abertos.

Começaremos a caminhada definindo um ponto aderente a um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, que é uma noção fundamental para expressarmos e provarmos as propriedades relativas a conjuntos fechados.

Definição 3: Dizemos que um ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$, quando $\lim x_n = a$ com os pontos da sequência (x_n) todos pertencentes $x_n \in X, \forall n$ ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$.É óbvio que o ponto $a \in X$ que pertence a um conjunto X é ponto aderente dele .Basta tomarmos a sequência constante $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$.

Outra definição importante para caracterizar um conjunto fechado é o fecho de um conjunto X, que definimos como:

Definição 4: Chamamos fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, que representamos por $\overline{X}$, ao conjunto formado por todos os pontos aderentes a $X \subset \mathbb{R}$. É evidente que, se $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$ e $X \subset \overline{X}$, dizemos que um conjunto X é fechado quando $X = \overline{X}$, isto é, ele contém todos os seus pontos aderentes ($X \supset \overline{X}$).

Fica claro, pela definição anterior, que, se $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, só se, para toda sequência $(x_n) \subset X$ convergente, tem-se que $\lim x_n = a \in X$.

Outra maneira de caracterizar se um conjunto X é denso em um conjunto Y é quando $Y \subset \overline{X}$, ou seja, se, para todo $a \in Y$, tivermos que $\lim x_n = a$ com $x_n \in X$ é um ponto aderente de X. Desse modo, concluímos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, pois todo número real é limite de uma sequência de números racionais.

Teorema 3: Um ponto a é aderente ao conjunto X, se, somente se, para toda vizinhança $V_\epsilon(a) = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ do ponto a, houver algum ponto de X.

Demonstração: A afirmação é suficiente, seja a um ponto aderente a X. Então, $\lim x_n = a$, com $x_n \in X$. Assim, pela definição de convergência de uma sequência, dado $\epsilon > 0$, a vizinhança $x_n \in V_\epsilon(a) = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ contém infinitos pontos para todo $n > n_0$, ou seja, temos que $V_\delta(a) \bigcap X \neq \varnothing$.

Agora a necessidade da afirmação: se toda vizinhança $V_\delta(a)$ do ponto a contiver ontos de X, escolhemos as vizinhanças do tipo $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ com $x_n \in X$ e assim temos que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, e então $\lim x_n = a$ e a é aderente a X. ∎

De outra maneira, o que o teorema anterior afirma é que qualquer vizinhança de um ponto $a \in \overline{X}$ deve ter intersecção com o fecho do conjunto. Ou, ainda, $a \notin \overline{X} \Leftrightarrow a \in V_\delta(a) \bigcap X = \varnothing$. Agora podemos enunciar o principal teorema deste tópico, que caracteriza um conjunto fechado como o complementar de um conjunto aberto.

Teorema 4: Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complemento $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.

Demonstração: Consideremos F fechado e $a \in A$ um ponto qualquer em A. Vamos mostrar que A é aberto. Com efeito, temos que $a \notin F$, então pelo Teorema 3 demonstrado anteriormente, verificamos que existe uma vizinhança $a \in V_\delta(a)$ que não contém pontos de F. Assim podemos concluir que $a \in V_\delta(a) \subset A$ e, portanto, A é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que o conjunto A é aberto e a é um ponto aderente ao conjunto $F = \mathbb{R} - A$, então, do Teorema 3, segue que toda vizinhança de a contém pontos de F, e assim $a \in V_\delta(a) \not\subset A$ e a não é um ponto interior a A. Ora, como A é aberto, temos que $a \notin A$ e, consequentemente, $a \in F$. E assim todo ponto aderente a F pertence a F, então F é fechado. ■

Exemplo 7: Se $X = (a,b)$, então $\overline{X} = [a,b]$. De fato, basta tomar as sequências em X, $a + \frac{1}{n}$ e $b - \frac{1}{n}$ e como $a + \frac{1}{n} \to a$ e $b - \frac{1}{n} \to b$, logo $[a,b] \subset \overline{(a,b)}$.

Exemplo 8: De maneira mais geral, temos que, para um subconjunto, $X \subset \mathbb{R}$ limitado e $X \neq \varnothing$. Então $a = Inf(X)$ e $b = Sup(X)$ são pontos aderentes a X. Uma vez que, podemos tomar a sequência $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + \frac{1}{n}$, logo $\lim x_n = a$ e desse modo segue que $a \in \overline{X}$. E de maneira análoga, tomamos $y_n \in X$, com $\lim y_n = b$.

Usando a relação de complementar de um conjunto, pode-se provar facilmente que:

1. $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são fechados;
2. A união finita de fechados é um conjunto fechado (nos abertos é a intersecção);
3. A intersecção de uma família de fechados é um conjunto fechado.

ATENÇÃO!

Você deve notar que, na justificativa da afirmação 2 anterior, fizemos o uso da Lei de Morgan, que afirma que $(\bigcup X_i)^C = \bigcap X_i^C$ ou $(\bigcap X_i)^C = \bigcup X_i^C$ No caso acima, usamos na forma $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \dots \bigcap A_n = [\bigcap_{1 \leq i \leq n} (\mathbb{R} - F_i)]^C = \mathbb{R} - (\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i)$. Repetindo esses argumentos de maneira análoga, você vai obter as outras demonstrações dos outros casos. Poderíamos fazer a mesma observação sobre um espaço topológico Γ com fechados em vez de abertos.

Faremos a prova de 2 e deixamos para você a justificativa dos outros casos. Com efeito, sejam $F_1, F_2, \dots, F_n$ fechados de $\mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 4, segue que os conjuntos $A_1 = \mathbb{R} - F_1, A_2 = \mathbb{R} - F_2, \dots, A_n = \mathbb{R} - F_n$ são abertos. Então, conforme o Teorema 2, temos que $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \dots \bigcap A_n = \mathbb{R} - (\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i)$ é aberto. Portanto segue novamente, pelo Teorema 4, que $\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i$ é fechado como o complemento de um aberto.

Concluiremos este tópico com uma definição de pontos de acumulação que tem uma grande importância na definição de limites de uma função f com domínio nos reais. Na definição do limite de função real, faz-se uso explícito de pontos de acumulação como você poderá ver na aula seguinte.

Agora podemos enunciar um teorema que elenca algumas equivalências sobre a definição de pontos acumulação.

Teorema 5: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. x_0 é um ponto de acumulação de X;
2. x_0 é o limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{x_0\}$;
3. Todo intervalo aberto de centro em x_0 contém uma infinidade de pontos de X.

Demonstração: Para provarmos que $(i) \Rightarrow (ii)$ supondo que (i) ocorre, tomamos os intervalos do tipo $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ com $x_n \neq x_0$ e $x_n \in X$. Logo, teremos que $\lim x_n = x_0$, o que prova (ii).

Por outro lado, se admitirmos (ii), devemos provar (iii). Mas isso é fato, pois o conjunto $\{x_n : n > n_0\}$ é infinito , porque, do contrário, existiria um termo $x_i, i \geq n$ que se repetiria infinitas vezes e isso acarretaria que a sequência (x_n) seria constante e convergente para x_0, mas com $x_n \neq x_0$ por hipótese. O que resultaria um absurdo! Portanto, segue que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Por último, a implicação $(iii) \Rightarrow (i)$ é óbvia da definição de pontos de acumulação. ■

Exemplo 9: Se um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é finito, então $X^a = \varnothing$, o conjunto dos pontos de acumulação, é vazio. Mesmo o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, que é infinito, tem o conjunto dos pontos acumulação $\mathbb{Z}^a = \varnothing$, uma vez que todos os seus pontos $n \in \mathbb{Z}$ são isolados, pois basta tomar intervalos com comprimento $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ que teremos que $(n - \epsilon, n + \epsilon) \bigcap \mathbb{Z} = \{n\}$ e $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$.

TÓPICO 3

Conjuntos compactos

Objetivos

- Distinguir entre um conjunto fechado e um compacto
- Compreender a noção de compacto de um conjunto
- Saber relacionar a noção de subconjuntos compactos com suas aplicações

Neste último tópico desta aula, analisaremos os subconjuntos da reta que têm grande importância na análise de convergência de sequências, sejam numéricas, sejam de funções que não serão vistas neste curso. Além disso, os conjuntos compactos são importantes também quando analisamos as funções contínuas definidas sobre eles, pois isso nos garante a existência de máximos e mínimos para uma função contínua. E é óbvio que saber se uma função tem um máximo ou mínimo é uma das questões mais relevantes tanto em estudos teóricos, quanto em estudos práticos. Na verdade, você pode rever alguns dos interessantes resultados sobre essa questão de máximos e mínimos de uma função contínua sobre um compacto no curso de cálculo numérico.

Definição 6: Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito compacto, quando é limitado e fechado em $\mathbb{R}$.

ATENÇÃO!

Advertimos que essa definição 6 de um conjunto compacto só é válida em $\mathbb{R}$. Se o subconjunto estivesse em um espaço de dimensão infinita, essa definição não seria verdadeira. Porém, em espaço de dimensão finita, ela é perfeitamente válida.

Exemplo 10: Todo subconjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ finito é compacto, pois é fechado, uma vez que seu complemento $\mathbb{R} - X = (-\infty, x_1)\bigcup(x_1, x_2)\bigcup\ldots(x_{n-1}, x_n)\bigcup(x_n, +\infty)$ é aberto e é limitado (você deve justificar!) e, portanto, pela definição é compacto. Outro exemplo trivial é o intervalo $[a,b]$, que é fechado e limitado na reta. Por outro lado, o intervalo (a,b) é limitado, mas não é fechado e, portanto, não é compacto. Os números inteiros $\mathbb{Z}$ não é conjunto compacto; é fechado, mas não é limitado.

Teorema 6: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, se somente se, toda sequência de pontos em X possuir uma subsequência que converge para um ponto de X.

Demonstração: Se X é compacto, então toda sequência $(x_n) \subset X$ é limitada, portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, temos que existe uma subsequência convergente $x_{n_j} \to x_0 \in X$, cujo limite está em X, pois X é fechado.

SAIBA MAIS!

Para revisar o Teorema de Bolzano-Weierstrass, acesse o site: wwmat.mat.fc.ul.pt/aninf/2003_2/aninf2/notas/pcomp/Similares

Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto, toda sequência $(x_n) \subset X$ possui uma subsequência convergente para um ponto dele $x_{n_j} \to x_0 \in X$. Então, afirmamos que X é limitado, pois, do contrário, teríamos para cada n um termo da sequência $(x_n) \subset X$ com $|x_n| > n$ e desse modo a sequência obtida não possuiria subsequência limitada e, portanto, não seria convergente. Além disso, X é fechado, porque, caso contrário, existiria um ponto $x_0 \notin X$ com $\lim x_n = x_0$ com $x_n \in X, \forall n$ e dessa forma a sequência (x_n) não teria subsequência nenhuma convergindo para um ponto de X, uma vez que todas as subsequências teriam como limite o ponto x_0 o que nos leva a uma contradição. Assim, X é fechado e limitado, logo é compacto. ■

Deste ponto, podemos enunciar um resultado que já foi visto com intervalos encaixados, e que agora podemos generalizar para conjuntos compactos. Assim, dada uma sequência decrescente de conjuntos compactos $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, então existe pelo menos um número real que pertence a todos os conjuntos compactos X_n. Para sua demonstração, nos valemos do fato de eles serem compactos e do teorema de Bolzano-Weierstrass.

Para finalizar esta aula, enunciamos, sem demonstração, um resultado bastante importante, que é o chamado Teorema de Borel-Lebesgue.

Teorema 7 (Borel-Lebesgue): Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.

SAIBA MAIS!

Para mais informações sobre tópicos importantes de análise real, acesse o material elaborado pelo Prof. Adriano Pedreira Cattai, disponível no link cattai.mat.br/site/files/AnaliseReal/AnaliseReal_cattai_uneb.pdf

A prova pode ser vista nos livros que colocamos nas referências.

Entendemos uma cobertura de um conjunto X como uma família de abertos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Se o número de aberto $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é finito, diz-se que a cobertura é finita.

Exemplo 11: Os intervalos abertos $I_n = (1/n, 2)$, $n \in \mathbb{N}$ é uma cobertura de abertos do conjunto $X = (0,1]$, uma vez que $X = (0,1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Entretanto, você pode ver facilmente que o conjunto $X = (0,1]$ não admite uma subcobertura finita.

AULA 5 | Limites de funções

Olá, aluno(a),

Nesta aula, estudaremos a noção de limite, de que já tratamos na aula 3, em um contexto mais geral. Em vez de considerarmos somente sequências, que são funções $s:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, consideraremos funções $f:X\to\mathbb{R}$, em que X é um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}$. Devemos observar que o conjunto X pode ser igual ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o que inclui as sequências como um caso particular das funções a serem estudadas nesta aula. O outro caso relevante é aquele em que X é um intervalo, aberto ou fechado, de $\mathbb{R}$.

No primeiro tópico, veremos a definição, as propriedades básicas e alguns exemplos de limites de funções. No tópico 2, estudaremos a noção de limite lateral e obteremos um critério para a existência de limites de funções. Apresentaremos, também neste tópico, os limites infinitos e os limites no infinito.

Bons estudos!

Objetivos

- Compreender a noção de limite de função
- Identificar a noção de limite de sequências como caso particular da noção de limite de funções
- Saber aplicar as propriedades de limites
- Compreender as noções de limite lateral, limite infinito e limite no infinito

TÓPICO 1

Definição, propriedades e exemplos de limites de funções

Objetivos

- Compreender a definição de limite
- Obter, a partir da definição de limite, suas propriedades

Neste primeiro tópico, veremos a definição formal de limite de uma função, que faz uso da ideia de valor absoluto de números reais como maneira de medir distâncias sobre a reta, ideia essa que foi introduzida na aula 2. Mais precisamente, a noção de limite de uma função formaliza a seguinte ideia: se x se aproxima de um número real a, então $f(x)$ se aproxima de algum número real L. Para que um número real x pertencente ao domínio X da função f se aproxime do número real a, é necessário que a seja um ponto de acumulação de X, noção que foi apresentada na aula 2.

A partir da definição de limite, obteremos as propriedades que nos permitem operar com este conceito de modo mais eficaz, sem precisarmos recorrer sempre à definição. Esta tarefa é uma tanto quanto delicada, e, como você deve notar, teremos aqui uma dose maior de formalismo, característico da Análise Matemática.

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Vimos, na aula 2, que um elemento $a \in \mathbb{R}$ é chamado ponto de acumulação de X quando, dado $\delta > 0$, existe $x \in X$, $x \neq a$, tal que $|x-a| < \delta$. Isto significa dizer que existem elementos de X arbitrariamente próximos de a. Assim como na aula 2, denotaremos o conjunto dos pontos de acumulação de X por X'.

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, ou seja, a é um ponto de acumulação de X. Queremos estudar o comportamento de $f(x)$ quando x é um elemento de X próximo de a. A princípio, estudaremos o caso em que $f(x)$ é estável quando x está próximo de a, ou seja, o caso em que $f(x)$ se aproxima de um número real, quando x se aproxima de a.

Um número $L \in \mathbb{R}$ é dito limite de $f(x)$, quando x tende a a se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x)-L| < \varepsilon$. Usamos a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

para sintetizar as informações acima.

- As afirmações $|x-a| < \delta$ e $|f(x)-L| < \varepsilon$ são equivalentes, respectivamente, a $x \in (a-\delta, a+\delta)$ e $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Assim, a definição de limite pode ser reescrita da seguinte forma: para cada $J = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe $I = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ tal que $f(I) \subset J$, em que $f(I)$ indica o conjunto formado pelas imagens dos elementos de I pela função f, isto é, $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$. Em outras palavras, todo intervalo aberto J centrado em L contém a imagem, por f, de um intervalo aberto I centrado em a, excluído o ponto central a.

- A desigualdade $0 < |x-a|$ é equivalente a $x \neq a$. Em termos de intervalos, isto significa que podemos tomar o conjunto $I = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$, em vez do intervalo $(a-\delta, a+\delta)$. Isto se dá porque não nos interessa o comportamento da função f no ponto a, e sim o seu comportamento numa vizinhança I de a. Outro modo de interpretar esta informação é dizer que o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ não nos dá informação alguma sobre $f(a)$, que pode, inclusive, não existir. Veremos, mais adiante, que existem funções f para as quais podemos inferir o valor $f(a)$ a partir do limite $\lim_{x \to a} f(x)$. Tais funções são chamadas contínuas e serão o objeto de estudo da aula 6.

Exemplos:

1. Seja $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x+1$. O número real 1 é um ponto de acumulação de $(0,1)$. Assim, faz sentido calcularmos o limite $\lim_{x \to 1}(2x+1)$ embora 1 não seja um elemento de $(0,1)$. Em geral, para que o limite $\lim_{x \to 1} f(x)$, com $f : X \to \mathbb{R}$, faça sentido é suficiente que a seja um ponto de acumulação de X, mas a não precisa ser um elemento de X.

Para demonstrarmos que $\lim_{x \to 1}(2x+1) = 3$, procedemos da seguinte maneira: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon \Rightarrow |2x+1-3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon.$$

Assim, de acordo com a definição de limite, $f(x)$ tende a 3 quando x tende a 1.

2. Além de ser uma condição suficiente para que o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ faça sentido, o fato de a ser um ponto de acumulação do domínio de f é também uma condição necessária, isto é, se a não é ponto de acumulação de f, o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ não pode ser definido. Para ilustrar este fato, exibimos a seguir um exemplo: seja $f:(0,1) \cup \{2\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$. A figura 2 é um esboço do gráfico de f.

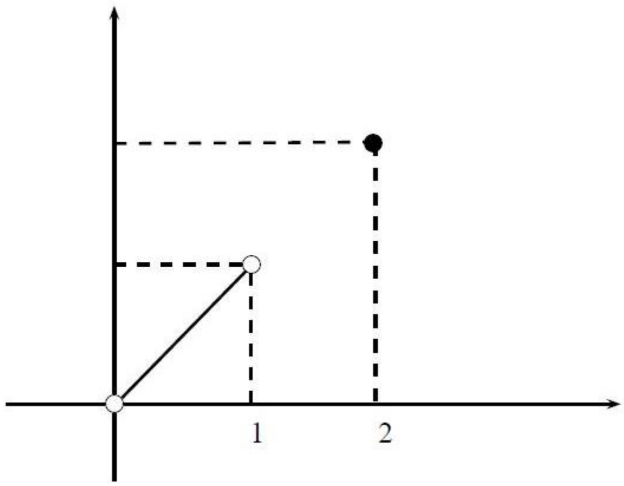


Figura 1 – Gráfico da função f

Devemos notar que, se $X = (0,1) \cup \{2\}$, então $2 \notin X'$, ou seja, 2 não é ponto de acumulação de X. Isso se dá porque, por exemplo, o intervalo $(2-\delta, 2+\delta)$, com $\delta = \frac{1}{2}$, é disjunto de X, isto é, $(2-\delta, 2+\delta) \cap X = \{2\}$. Neste caso, dizemos que 2 é um ponto isolado de X.

Observemos que $|x-2| < \delta$ é equivalente a $x \in (2-\delta, 2+\delta)$. Além disso, $f(x)$ só está definida para $x \in X$ e, se $I = (2-\delta, 2+\delta) - \{2\}$, então $I \cap X = \varnothing$, logo $f(I) = \varnothing$. Como o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, para qualquer número real L e qualquer $\varepsilon > 0$, se $J = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, então $f(I) \subset J$. Isso mostra que qualquer número real pode ser considerado o limite de $f(x)$ quando x tende a 2. É claro que este é um caso que devemos evitar, pois queremos que o limite seja um número real bem definido. Por isso, vamos sempre considerar limites de funções quando a variável x tende a um elemento a que é ponto de acumulação do domínio da função.

O resultado a seguir esclarece a questão da unicidade do limite de uma função.

> **Teorema 1 (Unicidade do limite):** Dados $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $|x-a| < \delta_1$ implica $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|x-a| < \delta_2$ implica $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então existe $x \in X$ tal que $|x-a| < \delta$, pois $a \in X'$. Para $x \in X$ tal que $|x-a| < \delta$, temos $|x-a| < \delta_1$ e $|x-a| < \delta_2$. Logo, $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$.

Assim, $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \le |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, onde a primeira desigualdade é a desigualdade triangular.

Mostramos, dessa maneira, que $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Como $L_1 - L_2$ é um número real fixado, a única possibilidade é que $L_1 - L_2 = 0$, logo $L_1 = L_2$, como queríamos demonstrar. ■

> **Teorema 2:** Dados $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, então f é limitada em alguma vizinhança de a.

Demonstração: Por hipótese, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, onde L é um número real. Dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < 1$, isto é, se $x \in (a-\delta, a+\delta)$ e $x \neq a$, então $|f(x)| = |f(x) - L + L| \le |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$. Fazendo $M = 1 + |L| > 0$, obtemos $|f(x)| < M$, para todo $x \in I$, onde $I = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ é uma vizinhança de a. Isso encerra a demonstração.

ATENÇÃO!

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita limitada em $Y \subseteq X$, se existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in Y$. O resultado a seguir mostra que, se uma função f tem limite quando x tende a a, então f é limitada em alguma vizinhança de a.

O resultado a seguir, conhecido como Teorema do Confronto, ou Teorema do Sanduíche, garante que é possível calcular o limite de uma função f que é limitada superior e inferiormente por duas outras funções, g e h, cujos comportamentos para x próximo a um ponto a são controlados.

Teorema 3 (Teorema do confronto): Dados $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, suponhamos que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in X$, $x \neq a$. Se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Demonstração: A figura abaixo dá uma ideia do comportamento da função f numa vizinhança do ponto a. Note que o gráfico de f é "sanduichado" pelos gráficos de g e de h. Como $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, pela definição de limite, para cada $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon,$$

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

Assim, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $|x - a| < \delta$ implica que $|g(x) - L| < \varepsilon$ e $|h(x) - L| < \varepsilon$.

Podemos reescrever as duas últimas desigualdades como

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon, L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

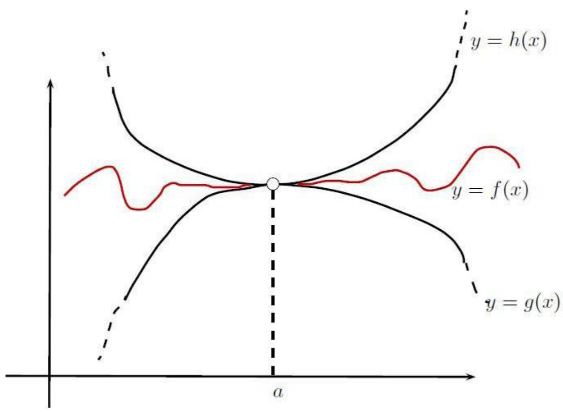


Figura 2 – Teorema do Confronto

Uma vez que, por hipótese, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, temos

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$. Isso mostra que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, como queríamos demonstrar. ■

Devemos observar que não é necessário que as desigualdades $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ valham para qualquer ponto x do domínio X. De fato, a mesma demonstração dada acima continua válida se tivermos $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo

$x \in I$, onde $I \subseteq X$ é um intervalo da reta tal que $a \in I$. Como aplicação do Teorema do Confronto, vamos demonstrar um corolário muito útil no cálculo de limites.

Corolário 4: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções, com f limitada e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Então

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = 0$$

Demonstração: Como f é limitada, existe um número real positivo M tal que

$$0 \leq | f(x) | \leq M,$$

para todo $x \in X$.

Por hipótese, suponhamos que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, logo $\lim_{x\to a} | g(x) | = 0$ (veja o exercício 2a desta aula). Como $| g(x) | \geq 0$, podemos multiplicar as desigualdades $0 \leq | f(x) | \leq M$ por $| g(x) |$ para obtermos

$$0 \cdot | g(x) | \leq | f(x) \cdot g(x) | \leq M \cdot | g(x) |.$$

As funções $G(x) = 0$ (identicamente nula) e $H(x) = M \cdot | g(x) |$ são tais que $\lim_{x\to a} G(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} H(x) = 0$. Pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x\to a} | f(x) \cdot g(x) | = 0$. Portanto, $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = 0$ (veja o exercício 2b desta aula). ■

O resultado a seguir mostra que, se o limite de uma função é positivo, então a função é positiva em algum intervalo suficientemente pequeno.

Teorema 5 (Conservação do sinal): Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, onde $L \in \mathbb{R}$ e $L > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon = L / 2 > 0$. Pela definição de limite, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (a - \delta, a + \delta)$ então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = (\frac{L}{2}, \frac{3L}{2})$. Logo $0 < \frac{L}{2} < f(x)$, o que implica que $f(x) > 0$, para $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Observemos que, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $L < 0$, então vale um resultado análogo ao do Teorema 5. De fato, neste caso, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in (a - \delta, a + \delta)$. A demonstração deste fato é inteiramente análoga à do Teorema 5 (veja o exercício de aprofundamento 1). ■

A seguir, demonstraremos as propriedades operatórias básicas dos limites.

Teorema 6: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existam. Então

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$, onde $k \in R$ é uma constante.
3. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Demonstração: Vamos fixar, ao longo da demonstração, a notação $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$.

(1) Observemos que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Assim, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| = |f(x)-L_1+g(x)-L_2| \leq |f(x)-L_1| + |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Isso mostra que, pela definição de limite, vale a identidade (1).

(2) Usaremos novamente a definição de limite. Se a constante k for igual a zero, então $\lim_{x\to a}(k\cdot f(x)) = \lim_{x\to a} 0 = 0 = 0 \cdot L_1$, ou seja, a identidade (2) é verdadeira neste caso. Podemos supor, então, que $k \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/|k|$. Assim,

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |k\cdot f(x) - k\cdot L_1| = |k|\cdot|f(x)-L_1| < |k|\cdot\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

Isso mostra que $\lim_{x\to a}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x)$.

(3) Comecemos observando que

$$|f(x)g(x)-L_1L_2| = |f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2| \leq |g(x)|\cdot|f(x)-L_1| + |L_1|\cdot|g(x)-L_2| \quad (1)$$

Primeiramente, se $L_1 = 0$ (ou $L_2 = 0$) então o resultado que queremos demonstrar é consequência do Teorema 2 e do Corolário 4. Podemos supor, então, que $L_1 \neq 0$ e $L_2 \neq 0$. É possível escolher $\delta_1 > 0$ de modo que $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)-L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2|L_1|}$.

Por outro lado, se $|x-a| < \delta_1$, então a desigualdade $|g(x)-L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2|L_1|}$ pode ser reescrita como

$$L_2 - \frac{\varepsilon}{2|L_1|} < g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2|L_1|},$$

donde deduzimos que

$$|g(x)| < m = \max\left\{\left|L_2 - \frac{\varepsilon}{2|L_1|}\right|, \left|L_2 + \frac{\varepsilon}{2|L_1|}\right|\right\}.$$

Dessa forma, $|g(x)|\cdot|f(x)-L_1|<m\cdot|f(x)-L_1|$. Podemos, então, escolher $\delta_2>0$ tal que $|x-a|<\delta_2$ implica $|f(x)-L_1|<\dfrac{\varepsilon}{2m}$. Juntando estas informações com as desigualdades de (1) vemos que, para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $|x-a|<\delta$, onde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, temos

$|f(x)g(x)-L_1L_2|\leq|g(x)|\cdot|f(x)-L_1|+|L_1|\cdot|g(x)-L_2|<m\cdot|f(x)-L_1|+|L_1|\cdot|g(x)-L_2|<$

$$<m\cdot\frac{\varepsilon}{2m}+|L_1|\cdot\frac{\varepsilon}{2|L_1|}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

o que demonstra a igualdade em (3).

(4) Para demonstrarmos o último item, notemos, primeiramente, que, se $L_2\neq 0$, então

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{L_2-g(x)}{g(x)L_2}\right)=\lim_{x\to a}\left[(L_2-g(x))\cdot\frac{1}{g(x)L_2}\right].$$

Notemos que $\lim_{x\to a}(L_2-g(x))=0$, pois $\lim_{x\to a}g(x)=L_2$. Por outro lado, como $L_2\neq 0$, o Teorema 5 e os comentários feitos logo após a sua demonstração nos permitem concluir que $|g(x)|\geq N>0$, para $x\in(a-\delta,a+\delta)$, com $\delta>0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\left|\frac{1}{g(x)L_2}\right|\leq\frac{1}{|N\cdot L_2|}$$

o que significa que a função $\dfrac{1}{g(x)L_2}$ é limitada. Pelo Corolário 4, temos

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}\right)=\lim_{x\to a}\left[(L_2-g(x))\cdot\frac{1}{g(x)L_2}\right]=0$$

e, portanto, $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{L_2}$, se $L_2\neq 0$.

Usando, agora, o item (3), obtemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=L_1\cdot\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}.$$

Com isso, concluímos a demonstração. ■

Com este resultado, chegamos ao final do nosso primeiro tópico desta aula 5. Exibimos a definição formal de limite e usamos esta definição para demonstrarmos alguns teoremas fundamentais, como o Teorema do Confronto (Teorema 3) e o Teorema da conservação do sinal (5). Obtivemos também algumas propriedades operatórias do limite que serão úteis mais adiante.

TÓPICO 2

Limites laterais

OBJETIVOS

- Assimilar a noção de limite lateral
- Usar a noção de limite lateral como critério para a existência de limite bilateral em um ponto

Existem exatamente duas maneiras de acessar um ponto a da reta real por caminhos contidos na reta. Podemos nos aproximar de a vindo pela esquerda ou pela direita de a. A ideia de limite lateral é observar o comportamento de uma função $f(x)$ quando x tende a a mas está restrito a uma das semirretas determinadas por a sobre a reta real, isto é, forçamos x a ser maior do que a ou a ser menor do que a. Veremos, neste tópico, que os limites laterais pela esquerda e pela direita coincidem se, e somente se, o limite (bilateral, ou seja, no sentido usual definido no tópico anterior) existe.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e X' o conjunto dos pontos de acumulação de X. Em geral, X' pode ser vazio, por exemplo, se X é finito ou se $X = \mathbb{Z}$, o conjunto dos número inteiros. Para que faça sentido o cálculo de limites, estamos supondo, ao longo desta aula, que $X' \neq \varnothing$, ou seja, os conjuntos de números reais considerados nesta aual têm pontos de acumulação. O caso mais importante é, sem dúvida, aquele em que X é um intervalo.

Os conjuntos $X'_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid X \cap (a, a+\delta) \neq \varnothing, \forall \delta > 0\}$ e $X'_- = \{a \in \mathbb{R} \mid X \cap (a-\delta, a) \neq \varnothing, \forall \delta > 0\}$ são chamados, respectivamente, conjuntos dos pontos de acumulação à direita e à esquerda. É claro que $X' = X'_- \cup X'_+$, e esta reunião não precisa ser necessariamente disjunta.

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Um número real L é dito limite à direita de $f(x)$, denotado por $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, quando x tende a a se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A condição $x \in (a, a+\delta)$ é equivalente a $0 < x - a < \delta$.

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $x \in X'_{-}$. Um número real L é dito limite à esquerda de $f(x)$, denotado por $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, quando x tende a a se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon.$$

A condição $x \in (a - \delta, a)$ é equivalente a $0 < a - x < \delta$.

O resultado a seguir caracteriza a existência do limite de uma função em um ponto $a \in X'_{+} \cap X'_{-}$.

Teorema 7: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_{-} \cap X'_{+}$. Então o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existem e são iguais. Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Demonstração: Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Pela definição de limite, isto significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a - \delta, a + \delta)$ implica $| f(x) - L | < \varepsilon$. Em particular $x \in (a - \delta, a)$ implica $| f(x) - L | < \varepsilon$, logo $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ e $x \in (a, a + \delta)$ implica $| f(x) - L | < \varepsilon$, logo $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Reciprocamente, se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon,$$

$$a - \delta_2 < x < a \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $(a - \delta, a + \delta) \subset (a - \delta_2, a + \delta_1)$. A figura a seguir ilustra o caso em que $\delta = \delta_1$.

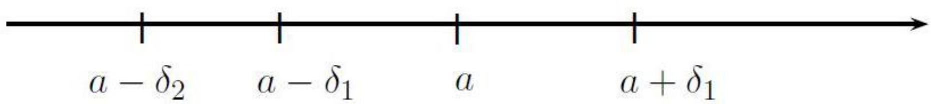


Figura 3 – O caso em que $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta_1$

Podemos concluir que, se $0 < | x - a | < \delta$, então $x \neq a$ e $x \in (a - \delta, a + \delta) \subset (a - \delta_2, a + \delta_1)$, o que implica $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_1)$. Logo, $| f(x) - L | < \varepsilon$. Isso mostra que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. ∎

Exemplo 1: Sejam $L, M, a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Consideremos a função $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{M + L}{a} \cdot x + (M - L) \cdot \frac{x - a}{| x - a |} \right).$$

Se $x < a$, então $x - a < 0$ e, consequentemente, $\dfrac{x-a}{|x-a|} = -1$. Logo, neste caso,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{M+L}{a} \cdot x - (M-L)\right).$$

Assim, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (M + L - M + L) = L$.

Analogamente, se $x > a$, então $x - a > 0$ e $\dfrac{x-a}{|x-a|} = 1$. Logo, neste caso,

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M+L}{a} \cdot x + (M-L)\right).$$

Portanto, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (M + L + M - L) = M$.

Mostramos, portanto, que, dados L e M reais, é possível produzir uma função que tenha limite lateral pela esquerda igual a L e limite lateral pela direita igual a M, em um ponto $a \neq 0$. Como consequência do Teorema 7, o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe se, e somente se, $L = M$.

Exemplo 2: A função logaritmica $L:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $L(x) = \ln x$, tem como domínio o intervalo aberto $I = (0,\infty)$. Logo, $I'_- = \varnothing$ e $I' = I'_+ = [0,+\infty)$. Portanto $\lim_{x \to 0^-} L(x)$ não existe e só faz sentido considerarmos o limite lateral $\lim_{x \to 0^+} L(x)$. No entanto, mesmo este limite não é um número real. De fato, se $\lim_{x \to 0^+} L(x) = p \in \mathbb{R}$ então, para $\varepsilon = \dfrac{p}{2}$, existiria $\delta > 0$ tal que

$$0 < x < \delta \Rightarrow \frac{p}{2} = p - \varepsilon < L(x) < p + \varepsilon.$$

Porém, $\dfrac{p}{2} < L(x)$ implicaria $0 < e^{1/p} < x$, onde $e \approx 2{,}718$ é o número de Euler. Mas isso contraria o fato de x poder ser qualquer elemento no intervalo $(0,\delta)$. A contradição veio de supormos o limite finito, o que não ocorre. Trataremos de limites deste tipo no próximo tópico.

O exemplo 2 acima exibe o caso em que o domínio de uma função não possui pontos de acumulação à esquerda e, portanto, o limite lateral à esquerda não existe. O resultado a seguir mostra que, se $X'_- \neq \varnothing$ e $a \in X'_-$, então o limite lateral $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe, para uma função monótona e limitada f definida em X, o mesmo valendo para um ponto de acumulação à direita.

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita estritamente crescente se, dados $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Se, para $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$, ocorre $f(x_1) > f(x_2)$, dizemos que f é estritamente decrescente. Se, para $x_1, x_2 \in X$ ocorre $f(x_1) \leq f(x_2)$, dizemos que f é crescente e se, para $x_1, x_2 \in X$ ocorre $f(x_1) \geq f(x_2)$, dizemos que f é decrescente. Se f é de um dos tipos acima, dizemos que f é uma função monótona.

Teorema 8: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Os seguintes limites laterais existem:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x),$$
$$M = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Demonstração: Vamos supor que a função f é crescente, sendo os demais casos análogos. Seja $L = \inf\{f(x) \mid x \in X, x > a\}$. Vamos mostrar que $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$. De fato, pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe $b \in X$, $b > a$ tal que $L \le f(b) < L + \varepsilon$. Como f é crescente, se $a < x < b$, então $L \le f(x) \le f(b) < L + \varepsilon$. Tomando $\delta = b - a > 0$, vemos que, se $a < x < a + \delta$, então $L - \varepsilon < L \le f(x) < L + \varepsilon$, ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$. De modo inteiramente análogo, vemos que, se $M = \sup\{f(x) \mid x \in X, x < b\}$, então $\lim_{x \to b^-} f(x) = M$. ■

SAIBA MAIS!

Heinrich Eduard Heine, matemático alemão, nasceu em 1821 e faleceu em 1881. Em sua homenagem, a definição de limite de uma função foi chamada definição de Heine. Para mais informações, consulte a página http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Heine.html.

Na aula 4, vimos que uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais, é chamada sequência de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usamos a notação x_n em vez da notação usual $x(n)$ para o valor da função x em n, e usamos a notação (x_n) para indicar a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de x_n é igual a L se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

ATENÇÃO!

Na demonstração do teorema 8, usamos, de modo essencial, a propriedade de completude dos reais, vista na aula 2.

$$n \ge N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Usamos as notações $\lim_{n \to \infty} x_n = L$, ou $\lim_n x_n = L$, ou $\lim x_n = L$.

A seguir, obteremos uma caracterização de limite de uma função, dada no Teorema 9, chamada definição de limite segundo Heine.

Teorema 9: Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Vale a seguinte equivalência

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{n} f(x_n) = L$$

Para toda sequência (x_n) tal que $\lim_n x_n = a$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Seja (x_n) uma sequência que converge para a. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$ e, para cada $\delta > 0$, existe N natural tal que $n \geq N$ implica $|x_n - a| < \delta$. Temos, então, as seguintes implicações:

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon.$$

Mostramos, assim, que, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que $n \geq N$ implica $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Portanto $\lim f(x_n) = L$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, vamos supor que $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ e, a partir deste fato, produziremos uma sequência (x_n) que converge para a tal que $\lim f(x_n) \neq L$. De fato, para cada $n \geq 1$ natural, consideremos $x_n = a + \frac{1}{n}$. Dado $\delta > 0$, existe (pela propriedade arquimediana dos reais) $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$, logo $a - \delta < a < a + \frac{1}{n} < a + \delta$. Isso mostrea que $\lim x_n = a$. Por outro lado, como $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, $a - \delta < x < a + \delta$ implica $f(x) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, isto é, $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Em particular, $x_n \in (a - \delta, a + \delta)$, para n natural suficientemente grande. Logo, $f(x_n) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, para n suficientemente grande, o que nos leva a concluir que $\lim f(x_n) \neq L$. ■

Encerramos aqui nosso segundo tópico, que tratou de limites laterais. Vimos que é possível usar a ideia de limite lateral para testar se uma função possui limite em um determinado ponto. Vimos, ainda, um resultado (Teorema 9), que nos permite usar sequências para testar se um determinado limite existe ou não.

TÓPICO 3

Limites no infinito e limites infinitos

OBJETIVOS

- Compreender as noções de limite no infinito e de limite infinito
- Calcular limites no infinito de funções racionais

Até aqui vimos a noção de limite como uma ferramenta para analisar o comportamento de uma função na vizinhança de um ponto fixado sobre a reta real. Neste tópico, veremos que é possível adaptar a definição de limite de modo a nos permitir a análise do comportamento de uma função quando o valor absoluto $|x|$ da variável torna-se "arbitrariamente grande". Veremos ainda que existem funções que assumem valores arbitrariamente grandes (em valor absoluto) quando a variável x se aproxima de algum ponto a da reta real.

Vamos, agora, considerar limites quando a variável x torna-se muito grande em valor absoluto. Estes limites são chamados limites no infinito. Suponhamos que $X \subset \mathbb{R}$ não seja limitado superiormente. Consideremos a função $f: X \to \mathbb{R}$. Dado $L \in \mathbb{R}$, dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende ao infinito positivo, ou a "mais infinito", quando

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{R}$, $N > 0$, tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Indicamos este limite por $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

De modo análogo, se X não é limitado inferiormente e $f: X \to \mathbb{R}$ é uma função, então o número M é dito limite de $f(x)$ quando x tende ao infinito negativo, ou a "menos infinito", quando

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{R}$, $N > 0$, tal que $x < -N \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$.

Indicamos este limite por $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$.

Exemplos:

1. Temos $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ tal que $x > N = \frac{1}{\varepsilon}$ implica $0 < f(x) = \frac{1}{x} < \varepsilon$, ou seja, $|f(x) - 0| < \varepsilon$. O caso $x \to -\infty$ é análogo.

2. Se $f(x)=e^x$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. De fato, dado $\varepsilon>0$, existe $N=-\ln\varepsilon$ tal que $x<-N=\ln\varepsilon$ implica $0<e^x<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$, ou seja, $x<-N$ implica $|e^x-0|<\varepsilon$.

3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{x^n}=0$, para todo $n\geq 1$ natural e todo $a\in\mathbb{R}$ constante. De fato, as propriedades operatórias de limite implicam que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{x^n}=a\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=a\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^n=a\cdot 0^n=0.$$

4. Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais, então

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=0,$$

se o grau do polinômio $q(x)$ é maior do que o grau do polinômio $p(x)$. De fato, sejam $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ e seja $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$, com $m>n$. Então

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\frac{\dfrac{a_0}{x^m}+\dfrac{a_1}{x^{m-1}}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^{m-n}}}{\dfrac{b_0}{x^m}+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\cdots+\dfrac{b_{m-1}}{x}+b_m}=\frac{0}{b_m}=0.$$

No limite acima, usamos diversas vezes o resultado exibido no exemplo anterior.

5. Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais onde p e q são polinômios de mesmo grau, com coeficientes líderes a_n e b_n, respectivamente, então

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Veja o exercício de aprofundamento 2.

Dada uma função $f:X\to\mathbb{R}$, onde $X\subset\mathbb{R}$, e dado $a\in X'$, pode ocorrer a seguinte situação:

Dado $N>0$, existe $\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>N$. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende a "mais infinito" quando x tende a a e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Se, por outro lado, ocorre o seguinte:

Dado $N>0$, existe $\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<-N$, dizemos que $f(x)$ tende a "menos infinito" quando x tende a a e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

ATENÇÃO!

As funções do tipo $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p(x) e q(x) são polinômios e q(x) não é identicamente nulo, são chamadas funções racionais.

ATENÇÃO!

Os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ não indicam números. São símbolos que indicam o comportamento da função quando x tende a a.

Exemplos:

1. Se $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ é dada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, então $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$. Observemos, primeiramente, que 0 não pertence ao domínio de f, mas 0 é ponto de acumulação do conjunto $\mathbb{R}-\{0\}$. Dado $N>0$, seja $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{N}}$. Consequentemente, se $|x-0|<\delta$, então
$$|x|<\delta \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow x^2<\frac{1}{N} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>N.$$

Isso mostra que $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, como queríamos.

2. $\lim_{x\to 0+}(\ln x)=-\infty$. De fato, dado $N>0$, seja $\delta=e^{-N}>0$. Se $0<x<\delta=e^{-N}$, então $\ln x<\ln(e^{-N})=-N$, e isso mostra que $\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$.

Com estes exemplos, encerramos nosso terceiro tópico e nossa aula 5. Discutimos a definição e as propriedades do limite de funções. Estudamos, também, os casos especiais em que o limite é lateral, quando o limite ocorre com x tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$ e ainda o caso em que o limite é infinito.

ATIVIDADES DE APROFUDAMENTO

1. Sejam $X\subset\mathbb{R}$, $a\in X'$ e $f:X\to\mathbb{R}$ uma função, tais que $\lim_{x\to a} f(x)=L$, onde $L\in\mathbb{R}$ e $L<0$. Mostre que existe $\delta>0$ tal que $f(x)<0$, para todo $x\in(a-\delta,a+\delta)$. (Sugestão: proceda como na demonstração do Teorema 5).
2. Usando o mesmo raciocínio do exemplo 4, mostre que, se $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinmiais onde p e q são polinômios de mesmo grau, com coeficientes líderes a_n e b_n, respectivamente, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a_n}{b_n}$.
3. Dada uma função polinomial $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x)=a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0$, com $a_n\neq 0$, mostre que
   a. Se $a_n>0$ e n é par, então $\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}p(x)=+\infty$.
   b. Se $a_n>0$ e n é ímpar, então $\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.
   c. Se $a_n<0$ e n é par, então $\lim_{x\to+\infty}p(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.
   d. Se $a_n<0$ e n é ímpar, então $\lim_{x\to+\infty}p(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}p(x)=+\infty$.

AULA 6 | Limites de funções

Olá, aluno (a),

Nesta aula, estudaremos as funções contínuas. Intuitivamente, podemos imaginar uma função contínua em um ponto a de seu domínio como sendo uma função que tenha comportamento estável em uma vizinhança de a. Mais precisamente, uma função é contínua em a se pequenas variações de um número real x próximo ao ponto a causam pequenas variações de $f(x)$ em torno de $f(a)$. Para colocar isso de um modo claro, devemos usar a noção de limite, desenvolvida na aula 5. As funções contínuas têm propriedades adequadas ao estudo de fenômenos físicos. Estudaremos nesta aula a principal destas propriedades: o Teorema do Valor Intermediário.

Objetivos

- Compreender a definição de função contínua e interpretar geometricamente esta definição
- Identificar se uma dada função é ou não é contínua
- Enunciar, demonstrar e aplicar o Teorema do valor Intermediário

TÓPICO 1

Definição e exemplos de funções contínuas

Objetivos

- Identificar funções contínuas e funções descontínuas
- Reconhecer e aplicar as propriedades das funções contínuas

Neste primeiro tópico, definiremos, de modo preciso, a noção de função contínua e veremos suas propriedades básicas. As funções contínuas surgem naturalmente na descrição de fenômenos naturais, como indica o seguintes exemplo.

Suponhamos que um ponto material esteja sujeito a uma força constante e não-nula. Como consequência da segunda lei de Newton, este ponto tem o seu movimento uniformemente acelerado, com aceleração $a \neq 0$. Sua velocidade é dada pela equação $v(t) = v_0 + at$. Se o tempo é medido em segundos, após a passagem de 1 segundo, a velocidade do ponto material é de $v(1) = v_0 + a$. Dizemos que o ponto material sofreu uma aceleração e sua velocidade variou de v_0 a $v_0 + a$. Se $a > 0$, então $v_0 < v_0 + a$.

SAIBA MAIS!

Para revisar o conteúdo sobre a Lei de Newton, acesse o site http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/2a_lei_de_newton/seg_lei_Newton/

É natural se pensar que o ponto material assumiu, no intervalo de tempo entre 0 e 1, todas as possíveis velocidades entre v_0 e $v_0 + a$. Para exprimirmos este fato, dizemos que a função $v(t) = v_0 + at$, que fornece a velocidade a cada instante de tempo entre 0 e 1, é uma **função contínua**.

Exemplos deste tipo são abundantes na natureza: se uma pessoa nasce com $40cm$ e quando adulto tem $170cm$, em algum momento da vida teve exatamente $100cm$ de altura. Se um recipiente, a princípio vazio, é cheio em uma hora, em algum instante dessa hora esteve exatamente com medade da capacidade ocupada. Nestes dois casos, as funções que regem a variação da grandeza (altura da pessoa ou volume ocupado no recipiente) são contínuas.

Consideremos um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e um ponto $a \in X$ que também seja ponto de acumulação X, isto é, $a \in X'$. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **contínua em** a, se

1. o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e
2. vale a igualdade

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **contínua** se é contínua em todo ponto $a \in X$.

A continuidade é uma propriedade preservada pelas operações elementares, como podemos ver no resultado a seguir.

Teorema 1: Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em a. Então

1. A função $f + g : X \to \mathbb{R}$, dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, é contínua em a.
2. Dada uma constante $k \in \mathbb{R}$, a função $kf : X \to \mathbb{R}$, dada por $(kf)(x) = k \cdot f(x)$, é contínua em a.
3. A função $fg : X \to \mathbb{R}$, dada por $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$, é contínua em a.
4. A função $f/g : X \to \mathbb{R}$, dada por $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Demonstração: Todos os itens são consequências do Teorema 6, que vimos na Aula 5, e da hipótese de f e g serem contínuas no ponto a. No último item, vale ressaltar que, pela continuidade $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, logo supor que $g(a) \neq 0$ equivale a supor que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Exibiremos, a seguir, alguns exemplos de funções contínuas. De especial importância é o exemplo 4, que mostra que toda função polinomial é contínua. ■

Exemplos:

1. A função constante $f : \mathrm{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua. De fato, se $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k = f(a)$.

2. A função identidade $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, é contínua. De fato, dado $a\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x=a=f(a)$.

3. Dado um número inteiro $n\geq 2$, seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^n$. Aplicando o item 3 do Teorema 1, $n-1$ vezes, e o resultado do exemplo anterior, concluímos que a função f é contínua.

4. Seja $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função polinomial, dada por $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

Aplicando n vezes os itens 1 e 2 do Teorema 1 e usando os resultados dos exemplos acima, concluímos que a função p é contínua.

ATENÇÃO!

À primeira vista, pode parecer estranho que a função f do exemplo 5 seja contínua. Ocorre que o único ponto a da reta real onde o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe é o ponto $a=0$, que não faz parte do domínio de f. Assim, não faz sentido perguntar se f é ou não e contínua em $a=0$, pois este ponto não faz parte do domínio da função f. No exemplo 6, em que 0 faz parte do domínio, a função em questão não é contínua neste ponto.

5. A função $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é **contínua**. De fato, dado $a\in\mathbb{R}-\{0\}$, temos $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}=f(a)$. Logo, a função f é contínua.

6. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\dfrac{1}{x}$, se $x\neq 0$ e $f(0)=0$ **não é contínua**. De fato, 0 é um ponto do domínio de f e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ enquanto $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$. Como os limites laterais não coincidem, o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Portanto, f não é contínua em 0.

Exemplos:

1. A função $f(x)=senx$ é contínua. De fato, dado $a\in\mathbb{R}$,

$$|senx-sena|=\left|2sen\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|=\left|\frac{sen\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\cdot|x-a|.$$

Usando o limite trigonométrico fundamental, estudado no curso de Cálculo 1, obtemos $\lim_{x\to a}\dfrac{sen\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$. Como a função $\cos\dfrac{x+a}{2}$ é limitada e $|x-a|$ tende a zero quando x tende a a, obtemos $\lim_{x\to a}|senx-sena|=0$, ou seja, $\lim_{x\to a}(senx)=sena$.

2. A função $E(x)=e^x$ é contínua. De fato, dado $a\in\mathbb{R}$,

$$|e^x-e^a|=|\frac{e^x-e^a}{x-a}|\cdot|x-a|.$$

Sabemos, do curso de Cálculo I, que $\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$ é a derivada de e^x em $x=a$, isto é, é igual a e^a. Assim,

$$\lim_{x\to a}|e^x-e^a|=\lim_{x\to a}\left(|\frac{e^x-e^a}{x-a}|\cdot|x-a|\right)=e^a\cdot 0=0,$$

o que mostra que e^x é contínua.

Dadas duas funções $f:X\to\mathbb{R}$ e $g:Y\to\mathbb{R}$, tais que a imagem $f(X)$ de f está contida em Y, ou seja, $f(X)\subseteq Y$, então podemos considerar a função composta $g\circ f:X\to\mathbb{R}$

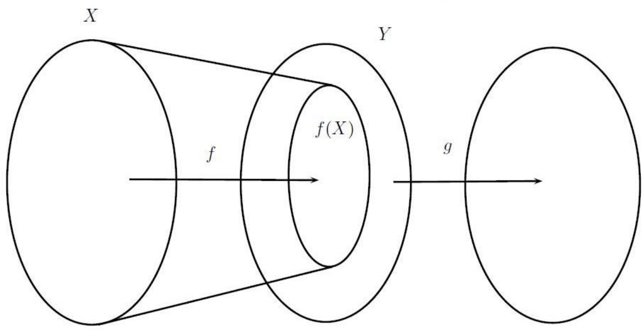


Figura 1: Gráfico da função $g\circ f:X\to\mathbb{R}$

A seguir, mostraremos que a composta de duas funções contínuas também é contínua.

Teorema 2: Dadas duas funções contínuas $f:X\to\mathbb{R}$ e $g:Y\to\mathbb{R}$, tais que $f(X)\subseteq Y$, a função composta $g\circ f:X\to\mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração: Queremos mostrar que, para todo $a\in X$, $\lim_{x\to a}g(f(x))=g(f(a))$. Como g é contínua, dado $\varepsilon>0$, existe $\varepsilon'>0$ tal que, se $y\in Y$ e $|y-f(a)|<\varepsilon'$, então $|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$. Como f também é contínua, existe $\delta>0$ tal que, se $|x-a|<\delta$, então $|f(x)-f(a)|<\varepsilon'$. Consequentemente,

$$|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon'\Rightarrow|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon.$$

Isso mostra que a função $g\circ f$ é contínua em todo $a\in X$. ■

Um ponto $a\in X$ onde uma função $f:X\to\mathbb{R}$ não é contínua é chamado ponto de descontinuidade de f. Uma função que apresenta pelo menos um **ponto de descontinuidade** é chamada **função descontínua**.

Exemplos:

1. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases}-1 & se \quad x\le 0\\ 1 & se \quad x>0\end{cases}$$

é descontínua em 0. De fato, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\neq 1=\lim_{x\to 0^+} f(x)$, logo $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe e, portanto, f não é contínua em 0.

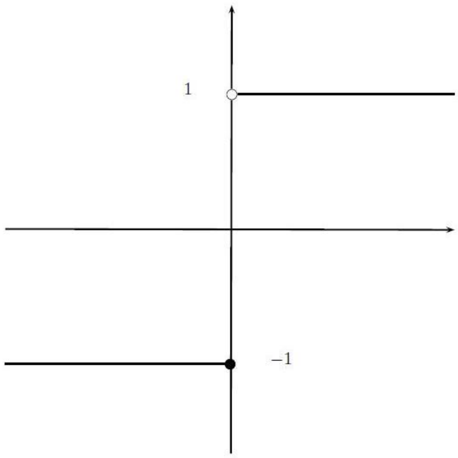


Figura 2: Gráfico de função descontínua

2. Uma função com uma infinidade de descontinuidades. Dado um número real x, a notação $\lfloor x\rfloor$, indica o maior número inteiro que não supera x, ou seja,

$\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{R}\mid n\le x\}$.

Por exemplo, $\lfloor\sqrt{2}\rfloor=1$, $\lfloor\pi\rfloor=3$, $\lfloor e\rfloor=2$, $\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor=0$, $\lfloor 5\rfloor=5$, $\lfloor -2{,}1\rfloor=-3$.

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$f(x)=x-\lfloor x\rfloor$

é descontínua em n, para todo n inteiro. De fato, se $n\in\mathbb{Z}$, então $\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to n\\ x<n}}(x-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to n}(x-(n-1))=1$. Isso ocorre porque, como $x\to n$ e $x<n$, podemos supor que $n-1<x<n$, logo $\lfloor x\rfloor=n-1$.

Por outro lado, $\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}}(x-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to n}(x-n)=0$. Isso ocorre porque, como $x\to n$ e $n<x$, podemos supor que $n<x<n+1$.

Como os limites laterais são diferentes, $\lim_{x\to n} f(x)$ não existe, logo f é descontínua em n, para cada n inteiro.

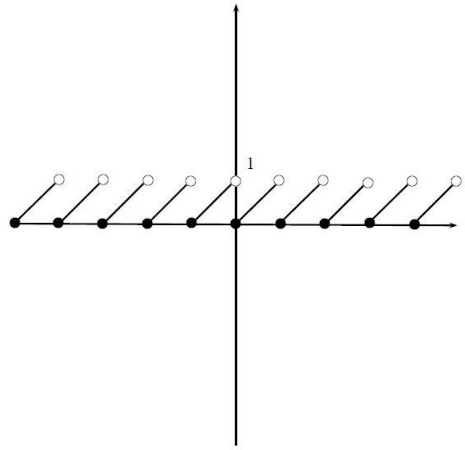


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

3. Uma função descontínua em todos os pontos da reta. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=0$, se $x\notin\mathbb{Q}$ e $f(x)=1$, se $x\in\mathbb{Q}$. Vamos mostrar que a função f é descontínua em a, para todo número real a. Uma vez que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, dados $a\in\mathbb{R}$ e $\delta>0$, existem $r\in\mathbb{Q}$ e $t\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, tais que $|r-a|<\delta$ e $|t-a|<\delta$. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existisse e fosse igual a L, então existiria $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\frac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $|x-a|<\delta$. Em particular, teríamos $|f(r)-L|<\frac{1}{2}$ e $|f(t)-L|<\frac{1}{2}$. Mas, sendo r racional e t irracional, temos $f(r)=1$ e $f(t)=0$, logo
$$1=|1-0|=|f(r)-f(t)|\le|f(r)-L|+|f(t)-L|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$
o que é um absurdo. A contradição veio de supormos que o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existia. Logo este limite não existe, para qualquer $a\in\mathbb{R}$ o que mostra que f não pode ser contínua em ponto algum da reta real.

Dada uma função $f:X\to\mathbb{R}$ e $Y\subseteq\mathbb{R}$, usamos a seguinte notação
$$f^{-1}(Y)=\{x\in X\,|\,f(x)\in Y\}.$$
Este conjunto é chamado **imagem inversa** ou **pré-imagem** de Y. O conjunto $f^{-1}(Y)$ pode ser, inclusive, o conjunto vazio, como mostra o primeiro exemplo abaixo.

Exemplos:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^2$ e seja $Y=(-1,0)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1<x<0\}$. Então $f^{-1}(Y)=\varnothing$. De fato, se $x\in f^{-1}(Y)$, então $f(x)\in Y$, ou seja, $x^2\in(-1,0)$.

Mas isso implicaria $-1 < x^2 < 0$, o que é uma contradição, pois $x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A contradição vem de supormos que existe algum elemento em $f^{-1}(Y)$. Portanto, este conjunto é vazio.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função constante $f(x) = 1$, então $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$.

Na aula 2, vimos a definição de conjunto aberto. Vamos usar esta definição para caracterizar, no Teorema abaixo, as funções contínuas.

Teorema 3: Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é um aberto, para todo aberto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que f é contínua. Isto significa que, dado $a \in X$, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um aberto. Queremos mostrar que $f^{-1}(A)$ é um aberto. Para tal, tomemos $a \in f^{-1}(A)$. Então, $f(a) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in A$, sempre que $|y - f(a)| < \varepsilon$. Uma vez que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Logo, $|x - a| < \delta$ implica $f(x) \in A$, ou seja, $x \in f^{-1}(A)$. Dessa forma, mostramos que, dado $a \in f^{-1}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(A)$. Isso mostra que $f^{-1}(A)$ é um aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(A)$ é aberto para todo aberto $A \subseteq \mathbb{R}$. Dado $a \in X$ e $\varepsilon > 0$, o intervalo $I = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Assim, por hipótese, $f^{-1}(I)$ é um aberto e $a \in f^{-1}(I)$, o que significa que existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(I)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow x \in (a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(I) \Rightarrow f(x) \in I = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Portanto $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. ■

Com esta caracterização, encerramos o primeiro tópico da aula 6. Vimos aqui a definição e propriedades das funções contínuas. No próximo tópico, exibiremos alguns teoremas importantes sobre funções contínuas.

TÓPICO 2

O teorema do valor intermediário

Objetivos

- Compreender o Teorema do Valor Intermediário
- Exibir exemplos para os quais o Teorema do Valor Intermediário não é válido
- Aplicar o Teorema do valor Intermediário na localização de raízes reais de polinômios

Neste tópico, estudamos o Teorema do valor intermediário (Teorema 4) e algumas de suas consequências. O Teorema do valor Intermediário é a propriedade fundamental das funções contínuas de uma variável real. Ele garante que as funções contínuas se comportam como se espera, ou seja, que descrevem de modo adequado certos fenômenos naturais, como aqueles expostos na introdução do tópico anterior.

Costuma-se afirmar, nos cursos de Cálculo, que o gráfico de uma função contínua não apresenta saltos. Evidentemente, este não é um bom critério para verificar se uma dada função é ou não é contínua. De fato, a função tangente , embora contínua, tem saltos em seu gráfico. Isso cocorre porque seu dominio é formado por vários intravalos disjuntos, e não por um intervalo só. Assim, um critério mais conveniente para verificarmos se uma dada função é contínua é, primeiramente, olhá-la como uma transformação. Podemos dizer, então, que uma função é contínua se leva intervalos da reta em intervalos da reta. Para garantir que a imagem de um dado intervalo por uma função contínua não contenha ``falhas'', precisamos do seguinte resultado fundamental.

SAIBA MAIS!

Faça uma revisão sobre função tangente acessando o site http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/ftangente/ftangente.htm

Teorema 4 (Teorema do Valor Intermediário): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)<d<f(b)$ então existe tal que $f(c)=d$.

Demonstração: Seja $A=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)<d\}$. Como, por hipótese, $f(a)<d$, temos $a\in A$, logo $A\neq\varnothing$. Tomemos $\alpha\in A$. Uma vez que $f(\alpha)<d$ e $d<f(b)$, temos que $\alpha\neq b$. Mais precisamente, $\alpha\in[a,b]$ e $\alpha\neq b$ implicam $\alpha<b$.

A função f é contínua em α, logo, dado $\varepsilon=d-f(\alpha)>0$, $c\in(a,b)$ existe $\delta>0$ tal que $[\alpha,\alpha+\delta)\subset[a,b]$ e

$$x\in[\alpha,\alpha+\delta)\Rightarrow f(x)\in[f(\alpha),f(\alpha)+\varepsilon).$$

Em particular, $f(x)<f(\alpha)+\varepsilon=d$. Assim, se $x\in[\alpha,\alpha+\delta)$, então $f(x)<d$, o que significa que $[\alpha,\alpha+\delta)\subset A$. Disso concluímos que o conjunto A não possui elemento máximo.

Seja $c=\sup A$. Dado $n\geq1$, existe $x_n\in A$ tal que $c-\dfrac{1}{n}<x_n\leq c$. Logo, $\lim x_n=c$. Pelo Teorema de Heine (Teorema 9 da aula 5), $f(c)=\lim f(x_n)\leq d$. Se $f(c)<d$, então c pertenceria ao conjunto A, logo teríamos $c=\max A$. Mas o conjunto A não possui elemento máximo. Portanto, $f(c)<d$ não ocorre. Como $f(c)\leq d$, deve necessariamente ocorrer a igualdade $f(c)=d$, como queríamos. ■

ATENÇÃO!

Obtenha mais informações sobre o Teorema do Valor Médio assistindo ao vídeo http://www.youtube.com/watch?v=Da84AXj2rvA

SAIBA MAIS!

O Teorema 4 continua válido, com a mesma demonstração, no caso em que $f(b)<d<f(a)$.

Uma consequência importante do Teorema do Valor Intermediário é o resultado abaixo, devido ao matemático Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848).

Teorema 5 (Bolzano): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)$ e $f(b)$ são números reais com sinais contrários, então existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$.

Demonstração: Para fixar ideias, suponhamos que $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Podemos usar o Teorema 4, com $d=0$, obtendo então $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

O Teorema 6 abaixo garante que uma função contínua leva intervalos em intervalos.

> **Teorema 6:** Seja I um intervalo. Se $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(I)$ é um intervalo.

ATENÇÃO!

O Teorema 5 nos dá um método para decidir se há alguma raiz de uma equação do tipo $f(x)=0$, com f contínua, em um dado intervalo $I=[a,b]$. Se $f(a)=0$, ou $f(b)=0$, então a, ou b, é uma raiz da equação. Caso $f(a)\neq 0$ e $f(b)\neq 0$ tenham sinais contrários, o Teorema de Bolzano afirma que há pelo menos uma raiz de $f(x)=0$ no interior do intervalo I.

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que f é limitada em I. Sejam $\alpha = \inf_{x\in I} f(x)$ e $\beta = \sup_{x\in I} f(x)$. Temos $f(I)\subseteq(\alpha,\beta)$. Se d é um número real tal que $\alpha<d<\beta$, então existe $c\in I$ tal que $f(c)=d$. Isso mostra que $(\alpha,\beta)\subseteq f(I)$. Assim, pode ocorrer $f(I)=(\alpha,\beta)$, $f(I)=[\alpha,\beta)$, $f(I)=(\alpha,\beta]$ ou $f(I)=[\alpha,\beta]$.

No caso em que f não é limitada, a única diferença é que $f(I)$ pode ser um intervalo do tipo $(\alpha,+\infty)$ ou $(-\infty,\beta)$.

Exemplos:

1. Considere a função polinomial $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $P(x)=x^3-2x^2-3x+1$. Temos $P(0)=1>0$ e $P(1)=-3<0$. Pelo Teorema 5, existe c, $0<c<1$, tal que $P(c)=0$.

2. A função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & se \quad x=0 \\ x & se \quad 0<x<1 \\ -1 & se \quad x=1 \end{cases}$$

é contínua em $(0,1)$ mas não é contínua em $[0,1]$. Note que o Teorema do Valor Intermediário não é válido para esta função, pois ela não é contínua em $[0,1]$. De fato, $d=-1/2$ satisfaz $f(0)<d<f(1)$ e não existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=-1/2$.

3. Se $I\subset\mathbb{R}$ é um intervalo e $f:I\to\mathbb{R}$ é uma função contínua cuja imagem é formada apenas por números inteiros, então f é constante. De fato, pelo Teorema 6, $f(I)$ deve ser um intervalo contido no conjunto dos números inteiros, logo é degenerado, isto é, reduz-se a um ponto. Portanto, a função f é constante.

Outra aplicação interessante do Teorema 4 é o resultado abaixo, conhecido como Teorema do Ponto Fixo para intervalos.

Teorema 7: Seja $f:[a,b]\to[a,b]$ uma função contínua. Mostre que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$. Um número real c tal que $f(c)=c$ é chamado **ponto fixo** de f.

Demonstração: Se $f(a)=a$ ou $f(b)=b$, não há nada a demonstrar, pois basta escolhermos $c=a$ ou $c=b$, respectivamente. Suponhamos, pois, que $f(a)\neq a$ e $f(b)\neq b$. Como o contradomínio de f é o intervalo $[a,b]$, sabemos que $f(a)\geq a$ e que $f(b)\leq b$. Como não podem ocorrer igualdades nestas desigualdades, temos $f(a)>a$ e $f(b)<b$.

Consideremos, agora, a função $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, dada por $h(x)=x-f(x)$. Como f é contínua, h também é uma função contínua. Além disso, $h(a)<0$ e $h(b)>0$. Pelo Teorema 5, existe $c\in(a,b)$ tal que $h(c)=0$, o que implica $f(c)=c$, como queríamos demonstrar. ■

ATENÇÃO!

O Teorema 7 acima é um caso particular do "Teorema do Ponto Fixo de Brouwer", descoberto por Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966), que garante a existência de um ponto fixo para uma função contínua $f:C\to C$, onde C é um conjunto compacto e convexo. Este resultado mais geral tem aplicações à teoria das equações diferenciais ordinárias.

Encerramos este tópico com um importante teorema devido a Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897). O Teorema de Weierstrass trata de funções contínuas cujos domínios são compactos. Relembremos que um conjunto C, contido na reta, é chamado **compacto** se é um conjunto **fechado** e **limitado**. Isto significa que C contém todos os seus pontos de acumulação (pois é fechado) e existe um número real positivo M tal que $|x|\leq M$, para todo $x\in\mathbb{C}$ (pois $\mathbb{C}$ é limitado). Podemos enunciar o teorema da seguinte maneira:

Teorema 8: Seja $C\subset\mathbb{R}$ um conjunto compacto e $f:C\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Então:

1. a imagem $f(C)$ da função f é um compacto.
2. existem $a,b\in C$ tais que $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$, para todo $x\in C$.

Demonstração: (1) Seja (y_n) uma sequência em $f(C)$. Para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in C$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como C é compacto, a sequência (x_n) é limitada, logo admite uma subsequência convergente (x_{n_k}), digamos, $x_{n_k} \to x$. Como C é fechado, temos $x \in C$. Sendo f uma função contínua, obtemos $\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(C)$. Mostramos, assim, que toda sequência em $f(C)$ possui uma subsequência que converge para um ponto de $f(C)$. Isso implica de imediato que $f(C)$ é fechado, pois qualquer ponto de acumulação L de $f(C)$ é limite se uma sequência de pontos em $f(C)$. Esta sequência de pontos admite uma subsequência que converge para um ponto de $f(C)$, necessariamente igual a L. Logo, todo ponto de acumulação L de $f(C)$ é um elemento de $f(C)$.

Por outro lado, se $f(C)$ não fosse limitado, seria possível produzir uma sequência divergente em $f(C)$ sem pontos de acumulação, ou seja, sem subsequências convergentes. Como isso não pode ocorrer, segue que $f(C)$ é limitado. Logo $f(C)$ é compacto, como queríamos demonstrar.

(2) Pelo item (1), $f(C)$ é um compacto de $\mathbb{R}$. Logo, $A = \inf f(C)$ existe, pois $f(C)$ é limitado, e $A \in f(C)$, porque o ínfimo de um conjunto é um de seus pontos de acumulação e $f(C)$ é fechado. Analogamente, $B = \sup f(C) \in f(C)$. Como $A, B \in f(C)$, existem $a, b \in C$ tais que $f(a) = A$ e $f(b) = B$. Portanto $f(a) \leq y \leq f(b)$, para todo $y = f(x) \in f(C)$. Isso encerra a demonstração do Teorema. ■

Com este resultado, encerramos a aula 6, que tratou das funções contínuas e de suas propriedades, em especial do Teorema do Valor Intermediário e suas consequências.

ATIVIDADES DE APROFUDAMENTO

Funções continuas

(Elaborado pelo professor Ângelo Papa Neto)

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in I$ tal que f é descontínua em a.

- O ponto $a \in I$ é chamado **ponto de descontinuidade de primeira ordem** se os limites laterais $L_+ = \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $L_- \lim_{x \to a^-} f(x)$ existem. Se $L_+ = L_- \neq f(a)$, dizemos que a é uma descontinuidade removível. Se $L_+ \neq L_-$, dizemos que a é uma **descontinuidade não-removível**. Neste caso, a diferença $L_+ - L_-$ é chamada **salto de descontinuidade** de f em a.

- O ponto $a \in I$ é chamado **ponto de descontinuidade de segunda ordem** se pelo menos um dos limites laterais L_+ ou L_- não existe ou é infinito.

Para cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, encontre (se existirem) os pontos de descontinuidade e verifique se são de primeira ou de segunda ordem. No caso de existirem pontos de descontinuidade de primeira ordem, determine se tais pontos são descontinuidades removíveis e, se for caso, encontre o valor do salto de descontinuidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & se \quad -\infty < x \leq 1 \\ 6-5x & se \quad 1 < x < 3 \\ x-3 & se \quad 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & se \quad x \leq 3 \\ 3x & se \quad 3 < x \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$$

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

$$f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen x}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

2. A função $d : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, dada por

$$d(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é chamada **função de Dirichlet**, em homenagem a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Mostre que d é descontínua em cada $x \in \mathbb{R}$.

(Confira a biografia de Dirichlet, acessando o link

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html)

3. Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x-a)^2(2d(x)-1)$, onde d é a função de Dirichlet, definida no problema anterior. Mostre que esta função é contínua em apenas um ponto e encontre esse ponto.

4. Considere a função $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Encontre os pontos de descontinuidade da função composta $y=f(f(f(x)))$. Esses pontos são descontinuidades removíveis?

5. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 19h. No dia seguinte, ele acorda cedo e às 7h desce do topo do monte pelo mesmo caminho que usou na ida, chegando ao monastério às 19h. Mostre que existe um ponto no caminho em que o monge passará exatamente na mesma hora do dia na ida e na volta.

6. Admitindo que a temperatura T de um ponto qualquer do equador da terra seja uma função contínua, demonstre que, em qualquer instante, existem pontos antípodas do Equador que estão a um mesma temperatura. Sugestão: Se P é um ponto sobre o equador, sua posição é determinada por sua longitude θ. Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos. Logo se P e Q são antípodas e θ é a longitude de P, então a longitude de Q é $\theta+\pi$.

7. Seja $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ o círculo de raio 1 centrado na origem. Se $f:S^1\to\mathbb{R}$ é contínua, mostre que existe $(x,y)\in S^1$ tal que $f(x,y)=f(-x,-y)$. Sugestão: Mesma ideia do exercício anterior.

8. Sejam A e B duas regiões limitadas, com áreas finitas, de um mesmo plano. Mostre que existe uma reta ℓ que divide A e B simultaneamente ao meio.

AULA 7 A derivada de função real

Olá, aluno(a),

Nessa aula apresentaremos as funções que possuem derivadas sobre subconjuntos dos números reais. Veremos que essas funções possuem importantes propriedades e aplicações. Estabeleceremos as propriedades e aplicações das funções deriváveis em um intervalo da reta e poderemos observar que isso garante algumas consequências e resultados em aplicações tanto na matemática quanto em áreas afins como a Física. Exemplos dessas aplicações são: determinar o máximo e mínimo de uma função real, estabelecer correlação com a noção de velocidade e aceleração da Física, fazer aproximações de funções por derivadas.

No mesmo espirito de aulas anteriores, não temos o objetivo de esgotar todo o assunto, apresentaremos somente os principais resultados e deixaremos alguns para o aluno fazer a pesquisa na literatura recomendada sobre o assunto para maiores aprofundamentos.

Objetivos

- Identificar as propriedades das funções deriváveis
- Entender as aplicações das funções deriváveis
- Relacionar as derivadas de uma função ao máximo e mínimo de uma função

TÓPICO 1

Conceitos de derivada de função real

Objetivos

- Compreender a definição de derivada de uma função real
- Saber reconhecer quais funções tem derivada

Assim como no Cálculo I, em que fazemos um grande apelo à noção geométrica na definição da derivada de uma função real $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aqui também, a noção da derivada de uma função ganha uma grande importância geométrica, que estabelecemos logo a seguir. Dizemos que uma função f é derivável em ponto $x_0 \in I \, e \, x = x_0 + h \in I, I \subset \mathbb{R}$ aberto, se goza da seguinte condição:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se existe e é finito o limite da razão incremental dada acima. O quociente $q(x) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ ou razão incremental para $x \neq x_0$ é conhecido como quociente de Newton. O mesmo é uma função que determina o valor da secante que passa pelos pontos $(x_0 \ , f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Geometricamente, as retas secantes passando pelos pontos $A = (x, f(x)), B = (x_0, f(x_0))$ tendem para a tangente ao gráfico da função f. Conforme representado na figura abaixo:

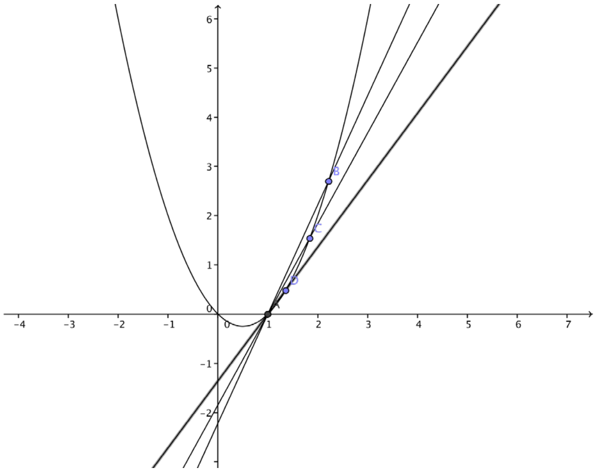


Figura 1 – retas secantes que passam por A e B

De forma análoga à derivada ordinária de uma função f, podemos definir as derivadas à direita e a esquerda, respectivamente, por:

$$f'(x_0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

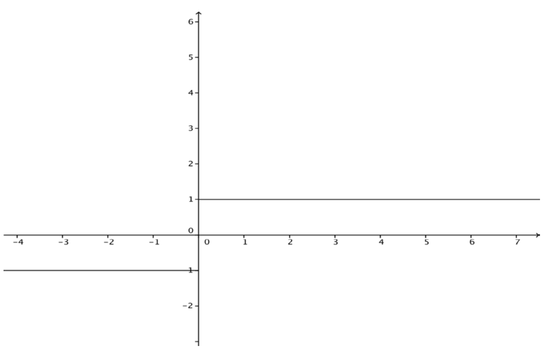
no caso dos limites existirem e fazendo as necessárias alterações na definição da derivada ordinária, teremos a seguinte condição: A derivada ordinária existirá, se as derivadas dos limites laterais existirem e forem iguais, ou seja,

ATENÇÃO!

A partir daqui, faremos o uso de várias notações para representar a derivada de uma função, entre elas $f', \dfrac{dy}{dx}, D_{x_0}f \;\; ou \;\; \dot{x}$

$$f'(x_0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Exemplo 1: Seja a função dada pela expressão $f(x)=|x|$, a função modular, cujas derivadas laterais são representadas pelo gráfica abaixo:



O aluno pode verificar como exercício que $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$ e que $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$, portanto, as derivadas laterais existem, mas não são iguais. Portanto, concluímos que a função dada acima não é derivável na origem.

Observação 1: Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f: I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$ e $x=x_0+h\in I, I\subset\mathbb{R}$ aberto, seja derivável no ponto $x_0\in I$ é que $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0).h+r(h)$, com $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h}=0$.

De fato, basta observar que $\dfrac{r(h)}{h}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$, logo $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right]=0$ e decorre da definição da derivada de uma função.

Teorema 1: Se f é derivável no ponto $x_0\in I\subset\mathbb{R}$, então f é contínua em x_0.

Demonstração: Sabemos que uma função f é contínua em $x_0\in I\subset\mathbb{R}$, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, então como f é derivável no ponto x_0, temos $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Daí segue que

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right].(x-x_0)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right].\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0).0=0$$

Logo f é contínua em x_0 como queríamos provar. ■

Exemplo 2: Seja a função constante $f(x)=c\ (constante)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Então $f'(x)=0$. Com efeito, por definição temos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

Se $f(x)=ax+b$ é uma função afim, tem-se que $f'(x)=a$. Por definição, segue que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)}{(x-x_0)}=a$$

em que na última igualdade fizemos o cancelamento do termo comum no denominador e numerador.

Vejamos agora a derivada da função quadrática $f(x)=x^2$, utilizando a definição.

Com efeito,
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2x+h).h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$. E em geral, podemos ver que, $f(x)=x^n$, $f'(x)=n.x^{n-1}$ o que o aluno pode verificar facilmente, utilizando o binômio de Newton, $(x+h)^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k$.

Exemplo 3: (A Regra de L'Hôpital) Muitas vezes nos deparamos com o cálculo de limites indeterminados como: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$ com $f(a)=g(a)=0$, se as funções f e g são deriváveis em a. Podemos obter uma aplicação interessante da derivada. De fato, sabemos que $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$ e da mesma forma $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$, pois temos que $f(a)=g(a)=0$. Então segue que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

desde que, $g'(a)\neq 0$. Podemos exemplificar essa regra, através da seguinte questão, que você teve a oportunidade de ver no Cálculo I, que é calcular o limite de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{(sen\,x)'\big|_{x=0}}{(x)'\big|_{x=0}}=\frac{\cos 0}{1}=1$. Você deve observar que nesse exemplo fizemos uso da derivada da função $(sen\,x)'=\cos x$. Essa derivada pode ser provada usando a definição de derivada da função seno na origem e a identidade trigonométrica $sen(x+h)=sen\,x.\cos h+sen\,h.\cos x$.

TÓPICO 2

Propriedades operatórias das derivadas

Objetivos

- Analisar as propriedades operatórias da derivada
- Estudar as propriedades operatórias através de exemplos
- Fazer aplicações utilizando essas operações

Nesse tópico abordaremos as propriedades operatórias das derivadas de uma função real. Além disso, analisaremos a derivada de uma composta e de uma inversa de uma função real. E por fim, daremos exemplos que ilustraram a teoria tratada nesse tópico.

Teorema 2: Sejam as funções $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis no ponto $x_{0 \in} I$. Então temos as seguintes propriedades:

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, desde que $g(x_0) \neq 0$.

Demonstração:

1. A prova de (1) é imediato se observarmos que $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$, aplicando o

limite em ambos os membros dessa identidade, obtemos o resultado para a derivada da soma. E de maneira análoga, o aluno pode ver que a derivada da diferença é facilmente obtida.

2. Para provarmos a derivada do produto, observemos a seguinte identidade

$$\frac{(f.g)(x)-(f.g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

então aplicando o limite no primeiro e terceiro membro da identidade anterior. Ou seja,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f.g)(x)-(f.g)(x_0)}{x-x_0}==\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

teremos o resultado que queríamos.

E finalmente, para a prova de (3), devemos primeiramente notar que a seguinte identidade é válida: $\dfrac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0}=-\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\dfrac{1}{f(x).f(x_0)}$ para todo $x\in I$ em que $f(x)\neq 0$. Então, aplicando o limite a essa identidade, temos

$$\left(\frac{1}{f(x_0)}\right)'=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\frac{1}{f(x).f(x_0)}=-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$ e

no caso geral do quociente basta observarmos que $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x).\dfrac{1}{g(x)}$, assim aplicando a fórmula já provada em (2) para a derivada de um produto. Segue que, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=f'.\left(\dfrac{1}{g}\right)+f.\left(\dfrac{1}{g}\right)'=\dfrac{f'}{g}+f.\left(-\dfrac{g'}{g^2}\right)$, basta fazer as operações que obtemos a fórmula da derivada do quociente. Agora, para os casos em que $f(x_0)=0$ e $g(x_0)=0$, tomamos sequências tendendo para $x_n\to x_0$, mas que $f(x_n)\neq 0$ e $g(x_n)\neq 0$ e o resultado segue naturalmente. ■

Exemplo 4: Já vimos no exemplo (2) anteriormente, que a derivada da função $f(x)=x^n$,$\forall n\in\mathbb{N}$ é dada por $f'(x)=nx^{n-1}$. Vamos aplicar a regra 3 da derivada de um quociente para calcularmos a derivada da função $f(x)=x^{-n}$, ora temos que $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$, aplicando a derivada do quociente obtemos $f'(x)=\dfrac{(1)'x^n-1.(x^n)'}{(x^n)^2}=-\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\dfrac{nx^{n-1}}{x^{n-1}x^{n+1}}=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$. Mesmo quando, $f(x)=x^r$, com $r=\frac{m}{n}$. De fato, basta ver que, $x^m=\left(x^{m/n}\right)^n$, então derivando em ambos os membros da igualdade temos que $\left(x^m\right)'=mx^{m-1}=n.\left[(x^{\frac{m}{n}})'\right]^{n-1}$ e daí extraindo a raiz e dividindo por n obtemos que $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\frac{m}{n}(x^{\frac{m}{n}-1})$, e então vale para todo racional r. E podemos estender este resultado para os números reais $\alpha\in\mathbb{R}$, pois sabemos que existe uma sequência de racionais $r_n\to\alpha$ como a afirmação é válida para $(x^{r_n})'=r_n.x^{r_n-1}$ aplicando o limite resulta na afirmação para $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$.

Agora faremos uma importante propriedade que é a derivada da inversa de uma função. Temos que toda função $f:I\to\mathbb{R}$ contínua e injetiva sobre sua imagem $J=f(I)$ (poderíamos considerar, ao invés da injetividade, que f fosse monótona em I) tem uma inversa contínua $f^{-1}:J\to I$, admitiremos que f é derivável em I e analisaremos a derivada da função inversa $(f^{-1})'$. Portanto, podemos enunciar.

Teorema 3: Seja $f:I\to\mathbb{R}$ uma função monótona em um intervalo aberto I. Supondo que f seja derivável em I e $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in I$. Então a função inversa $f^{-1}:J=f(I)\to\mathbb{R}$ é também derivável no intervalo (aberto) J. E temos a fórmula seguinte: $\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \forall y\in J$

Antes de demonstrarmos o teorema acima apresentaremos a regra da cadeia que nos auxiliará na demonstração do teorema 3 acima.

Teorema 4 (Regra da Cadeia): Consideremos as funções $f:I\to\mathbb{R}$ e $g:J\to\mathbb{R}$, com $f(I)\subset J$ e $f(x_0)=y_0$. Se f é derivável em x_0 e g é derivável no ponto y_0, então a composta $(g\circ f):I\to\mathbb{R}$ é derivável no ponto x_0, com $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0)).f'(x_0)$.

Demonstração: Como g é derivável no ponto y_0, podemos, de acordo com a observação 1 dessa aula, colocar na forma:

$$\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}=g'(y_0)+r_2(k)$$

onde $r_2(k)\to 0$, quando $k\to 0$. Pondo $r_2(0)=0$ podemos escrever essa equação na forma: $g(y_0+k)-g(y_0)=k[g'(y_0)+r_2(k)]$, que continua válida mesmo que $k=0$. Considere, $k=f(x_0+h)-f(x_0)$. Então,

$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{h}=\frac{[g'(y_0)+r_2(k)]k}{h}$$
$$==[g'(f(x_0))+r_2(k)].\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Em que o aluno deve lembrar que, como f é derivável no ponto x_0, então f é continua no mesmo. Desse modo, temos que $k\to 0$, quando $h\to 0$. Assim se tomarmos h tendendo para zero na expressão anterior, obteremos o resultado que queríamos. ■

ATENÇÃO!

A condição para que a derivada ($f'(x)\neq 0, \forall x\in I$), seja não nula, é essencial no teorema 3. Uma vez que a função $f(x)=x^3$ é crescente e derivável para todo $x\in\mathbb{R}$ e $f'(x)=3x^2=0$ para $x=0$. Mas, a função inversa $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$ não é derivável em $y=0$.

Agora podemos proceder à demonstração do teorema 3.

Com efeito, temos

$$(f^{-1} o f)(x)=x$$

Derivando a expressão acima e usando a regra da cadeia, obtemos

$$(f^{-1} o f)'(x)=1$$

que resulta (pela regra da cadeia) em $(f^{-1})'(y).f'(x)=1$ que é o resultado que queríamos provar.

Temos que uma função $f:I\to\mathbb{R}$ tem um máximo local no ponto $x_0\in I$ se existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in I$, com $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\bigcap I$ implica que $f(x)\leq f(x_0)$. E um ponto $x_0\in I$ é um mínimo local se existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\bigcap I$ implica que $f(x)\geq f(x_0)$. Os pontos máximo e mínimo locais são ditos estritos, quando ocorrem as desigualdades estritas, $f(x)<f(x_0)$ e $f(x)>f(x_0)$, respectivamente. Agora, quando uma função tem um máximo ou mínimo em todo o seu domínio, dizemos que a função tem um máximo ou mínimo absoluto. Como vimos na definição de derivada de uma função é local, e uma maneira de determinarmos se um ponto é o máximo ou mínimo local de uma função derivável é respondida pelo seguinte teorema.

Teorema 5: Se uma função f é derivável em um ponto x_0, onde ela assume valor máximo ou mínimo, então $f'(x_0)=0$.

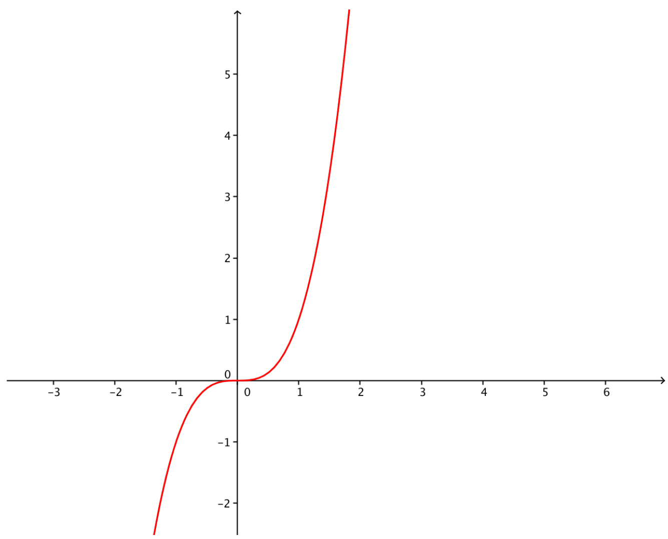
Demonstração: Considere x_0 um ponto de máximo, então para $|h|$ arbitrariamente pequeno, temos que $f(x_0+h)-f(x_0)\leq 0$ implica que o quociente de newton:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0, para\, h>0$$

Ou $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$, $para\, h<0$

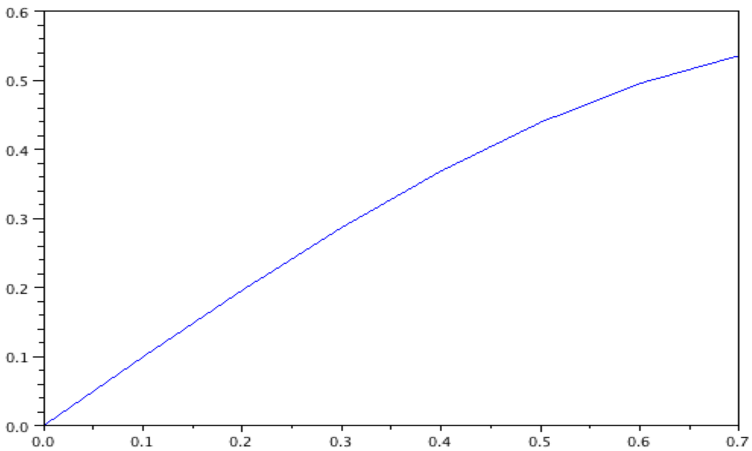
E como consequência, o limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$, onde concluímos que $f'(x_0)=0$. E de maneira completamente análoga provamos quando x_0 é um ponto de mínimo.

A recíproca desse teorema não é válida, pois podemos ter $f'(x_0)=0$ sem que o ponto x_0 seja um máximo ou um mínimo. Conforme vimos, a função $f(x)=x^3$ tem derivada nula em $x_0=0$, mas esse ponto não é máximo, nem mínimo, como você pode ver no gráfico abaixo:



Exemplo 5: Seja a função $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$ com $f(x)=x\cos x$, podemos ter que a derivada não é necessariamente nula em todos os pontos de máximo ou de

mínimo, se estes são os extremos do intervalo. Pois, a função $f(x) = x\cos x$ tem um mínimo em $x = 0$ (veja o gráfico a seguir) e um máximo em $x = \pi/4$, porém a sua derivada não se anula nesses pontos. Uma vez que $f'(x) = \cos(x) - xsen(x)$ e $f'(0) = 1 > 0$ e $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.



TÓPICO 3 O teorema do valor médio

OBJETIVOS

- Compreender o teorema do valor médio
- Fazer aplicações desse teorema
- Estudar alguns exemplos que ilustrem o teorema

Nesse tópico, trataremos de um dos tópicos centrais sobre a derivada de uma função real, que é o Teorema do Valor Médio. Esse será obtido como uma consequência do Teorema de Rolle. E em paralelo obteremos aplicações sobre o Teorema do Valor Médio.

O teorema que tratamos a seguir é uma consequência do teorema 5 do tópico anterior.

Teorema 6 (de Rolle): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a,b), com $f(a)=f(b)$. Então, existe pelo menos um $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demonstração: Se a função é constante, segue imediatamente que $f'(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. Se a função f não é constante, por ser contínua em um intervalo compacto, terá de assumir um valor máximo e um mínimo. Então, se f assumir valores maiores do que $f(a)$, ela atingirá um máximo num ponto interno c. E se assumir valores menores do que f(a), essa função assumirá seu mínimo num ponto interno c em (a,b). E em qualquer caso, $f'(c)=0$, de acordo com o teorema 5. ■

Teorema 7 (do Valor Médio ou de Lagrange): Seja uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável no aberto (a,b). Então existe um ponto $c\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Demonstração: Basta aplicar o teorema de Rolle à função $q(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. É claro que $q(a)=q(b)=0$. Então, existe $c\in(a,b)$ tal que $q'(c)=0$, e isso significa que temos:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

que é equivalente à fórmula que queríamos. ■

Em termos geométricos, o Teorema do Valor Médio significa que existe um número $c\in(a,b)$ tal que a reta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $(c,f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$. O teorema do valor médio tem uma importante aplicação. Com ele é possível determinar se uma função f é crescente ou decrescente. Conforme a sua derivada seja positiva ou negativa, respectivamente.

Assim, se $f'(c)>0$ para todo $c\in(a,b)$, então se $x_1<x_2$ implica que $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0$, logo $f(x_1)<f(x_2)$. E analogamente, se $f'(c)<0$ para todo $c\in(a,b)$, então segue que se $x_1<x_2\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)<0$, logo $f(x_1)>f(x_2)$.

Você deve notar que o conhecimento do sinal da derivada em um único ponto não permite concluir que a função é crescente ou decrescente em todo o seu domínio. Apenas podemos concluir em uma vizinhança desse ponto.

O Teorema do Valor Médio tem uma generalização que estabelecemos a seguir.

Teorema 8 (do Valor Médio Generalizado ou de Cauchy): Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a,b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a,b) e além disso, suponha que $g'(x)\neq 0$ e $g(b)-g(a)\neq 0$. Então existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstração: Basta considerar a função
$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.(g(x)-g(a))$, então podemos observar que $F(a)=F(b)=0$ e aplicar o teorema de Rolle. ■

3.1 DERIVADA DE 2ª ORDEM

A derivada de segunda ordem é dada por $f''(x_0)=(f')'(x_0)$ como a derivada da derivada de uma função. Se procedermos indutivamente dessa maneira obtemos a n-ésima derivada de uma função f, como sendo $f^n(x_0)=(f^{n-1}(x_0))'$, desde que a derivada (n-1)-ésima exista. Um resultado bem conhecido sobre as derivadas superiores de uma função real é a conhecida fórmula de Taylor infinitesimal, que diz que se uma função $f: I \to \mathbb{R}$ é n-vezes derivável em um ponto $x_0 \in I$, podemos aproximar uma função pelo "polinômio" de Taylor que é dado por:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0).h+f''(x_0)/2.h^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}.h^n+r(h)$$

onde $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^n}=0$. Chamamos de polinômio, pois podemos expressar uma função f no ponto x_0 por:

$$p(h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^i(x_0)}{i!}.h^i$$

que aproxima essa função até a ordem n.

AULA 8 | Integral de Riemann

Olá, aluno(a),

Estamos chegando ao final de nossa disciplina. Nesta aula, estudaremos alguns aspectos que envolvem o estudo da integral de Riemann. Dentro de uma cronologia histórica, a ideia da integral é um conceito mais antigo que o de derivada. Enquanto o conceito de derivada é do século XVII, o conceito de integral teve um razoável desenvolvimento com o cálculo de áreas de figuras planas, ou volume de sólidos através de um método conhecido como método da exaustão, que teve em Arquimedes um dos seus principais divulgadores.

Nesse período, a Matemática era muito geométrica e não havia simbologia que possibilitasse um maior desenvolvimento do cálculo integral. Ainda nesta aula, trataremos dos seguintes conceitos: no tópico 1, veremos a definição da integral de Riemann e o critério para uma função real ser integrável; no tópico 2, apresentaremos as propriedades da integral; no tópico 3, teremos o principal resultado desta aula, que é o teorema fundamental do cálculo, e também faremos algumas aplicações.

Bons estudos!

Objetivos

- Estudar os conceitos sobre a Integral de Riemann
- Compreender e aplicar as definições da integral de Riemann

TÓPICO 1

A integral de Riemann

OBJETIVOS

- Definir a integral como soma de retângulos sob o gráfico da função
- Analisar quando uma função real é integrável
- Dar alguns exemplos de funções integráveis

Neste tópico, começamos a definir o conceito da integral de Riemann e os aspectos que determinam quando uma função real é integrável. Veremos que o problema original se inverteu. No início, o cálculo de áreas utilizava diretamente à integral, hoje definimos primeiro a integral em termos numéricos, para depois definirmos a área em termos da integral.

Consideraremos que as funções tratadas a seguir são sempre definidas e limitadas num intervalo $I=[a,b]$, a menos que seja estabelecido ao contrário. Uma partição P desse intervalo é um conjunto finito de pontos dados por:
$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, com $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ e denotaremos por $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ o comprimento do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$ da partição P.

Diz-se que uma partição P' é um refinamento de uma partição P se tivermos que $P\subset P'$, ou seja, todos os pontos de P estão em P'. Como a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é limitada, consideremos $m_i=inf\{f(x):x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$ e $M_i=sup\{f(x):x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$. Define-se a soma inferior da função f com relação à partição P e que denotamos por $s(f,P)$ como sendo $s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$.

De maneira análoga, temos a soma superior de f, com relação à mesma partição P dada por $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$. Em termos geométricos, podemos representar essas ideias conforme figuras 1e 2, respectivamente.

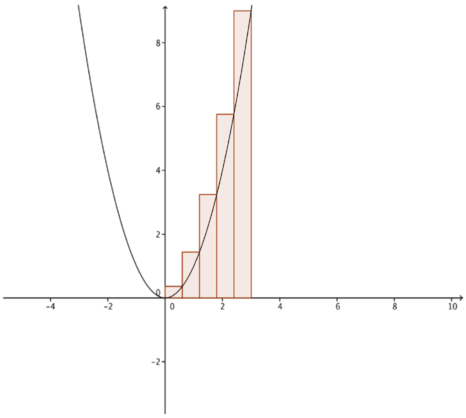


Figura 1: Partições retangulares

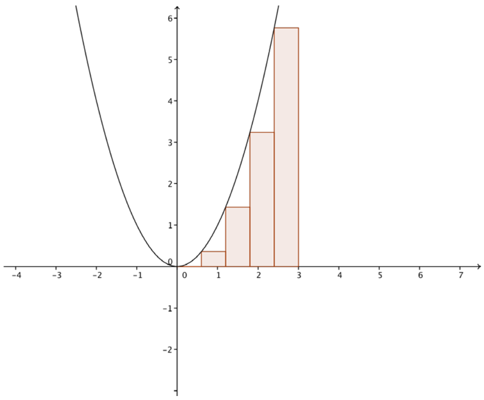


Figura 2: Partições retangulares menores

Supondo que a função $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo $[a,b]$, então sabemos, pelo teorema de Weierstrass, que a função assume um mínimo e um máximo no intervalo compacto $[a,b]$. Sejam $m=\min f(x)$ e $M=\max f(x)$ em $[a,b]$, assim temos que $m\leq m_i \leq M_i \leq M$ e é claro que decorre dessa desigualdade a seguinte desigualdade:

$$m(b-a)\leq s(f,P)\leq S(f,P)\leq M(b-a)$$

SAIBA MAIS!

Faça uma revisão do teorema de Weierstrass acessando o site http://ecalculo.if.usp.br/derivadas/estudo_var_fun/teorema_vm/teoremas/teo_weierstrass.htm

Na Figura 1, cada soma inferior é um valor aproximado por falta do que devemos entender por área da figura geométrica limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas retas $x=a$ e $x=b$. Analogamente, cada soma superior é um valor aproximado por excesso da mesma área.

Agora, mostraremos um resultado que diz que o supremo do conjunto das somas inferiores é igual ao ínfimo do conjunto das somas superiores, e esse valor comum é usado para definir a integral de uma função no intervalo $I=[a,b]$ e tal que f seja contínua nesse intervalo. Na verdade, esse resultado se estende para um conjunto mais amplo do que o das funções contínuas, como, por exemplo, o conjunto das funções integráveis.

Teorema 1: Seja $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição qualquer do intervalo $I=[a,b]$ e P' um refinamento de P. Então, $s(f,P)\leq s(f,P')$ e $S(f,P')\leq S(f,P)$, ou seja, ao se refinar uma partição, a soma inferior só pode crescer e a soma superior só pode decrescer.

Prova: Seja um refinamento da partição P, dada por $P'=P\bigcup\{x'\}$, isto é, P' é formada por mais um ponto. Suponha que $x'\in[x_{i-1},x_i]$ da partição P. Consideremos $M_i=sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$ e ainda sejam $M_i^{'}$ e $M_i^{''}$ os supremos de f nos subintervalos $[x_{i-1},x']$ e $[x',x_i]$, respectivamente. É evidente que, $M_i^{'}\leq M_i$ e também que $M_i^{''}\leq M_i$. Vemos ainda que $x_i-x_{i-1}=(x_i-x')+(x'-x_{i-1})$, então

$$S(f,P)-S(f,P^{'})=M_i(x_i-x_{i-1})-M_i^{'}(x_i-x^{'})-M_i^{''}(x^{'}-x_{i-1}),$$

que resulta em:

$S(f,P)-S(f,P')=(M_i-M_i^{'})(x_i-x')+(M_i-M_i^{''})(x'-x_{i-1})\geq 0$, o que prova a segunda desigualdade da soma superior dada no teorema 1. Deixamos para você, aluno, fazer a prova da desigualdade da soma inferior que é feita de forma análoga. ■

Teorema 2: Toda soma inferior é menor ou igual a toda soma superior, isto é, sejam P e Q partições quaisquer do intervalo $[a,b]$, então $s(f,P)\leq S(f,Q)$.

Prova: Com efeito, consideremos a partição $P\bigcup Q\supset P$ e $P\bigcup Q\supset Q$ que refina as partições P e Q. Desse modo, temos pelo teorema 1, que $s(f,P)\leq s(f,P\bigcup Q)\leq S(f,P\bigcup Q)\leq S(f,Q)$, que é o que queríamos demonstrar.

Como $m(b-a)\leq s(f,P)\leq S(f,P)\leq M(b-a)$, temos que o conjunto das somas inferiores é limitado superiormente por $M(b-a)$, de maneira que o seu supremo é finito. Este supremo é chamado a integral inferior da função $\boldsymbol{f}$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx=\sup s(f,P)$$

E analogamente, o conjunto das somas superiores é limitado inferiormente por $m(b-a)$, logo tem um ínfimo finito, chamado a integral superior de $\boldsymbol{f}$, que é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx=\inf S(f,P)$$

De acordo com o teorema 2 dado anteriormente, segue que:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

Dizemos que uma função $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ é integrável quando essas duas integrais dadas acima são iguais. E nesse caso, o valor comum da integral inferior e superior é chamado a integral da função $\boldsymbol{f}$ e que denotaremos por:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}$$

Exemplo 1: Seja a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\, x \in Q \\ 1, se\, x \in (R - Q) \end{cases}$$

Seja uma partição P arbitrária do intervalo $[a,b]$, como cada intervalo $[x_{i-1}\ , x_i]$ da partição contém números racionais e irracionais, logo $m_i = 0$ e $M_i = 1$. Portanto, $s(f,P) = 0$ e $S(f,P) = b - a$. Desse modo, f não é integrável, uma vez que $\underline{\int_a^b f(x)dx} = 0$ e $\overline{\int_a^b f(x)dx} = b - a$.

Vejamos um exemplo de uma função integrável, a função constante.

Exemplo 2: Seja a função constante $f(x) = c$ $(constante)$ para todo $x \in [a,b]$. Então para toda partição P, temos que $m_i = M_i = c$ em todos os intervalos, logo $s(f,P) = S(f,P) = c(b-a)$. Desse modo, decorre que

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx} = c(b-a)$$

Uma pergunta imediata que nos vem é: que condições uma função deve satisfazer para ser integrável? Baseados nisso, enunciaremos o teorema 3.

Teorema 3: Seja $f : [a\ , b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As afirmações seguintes são equivalentes:

f é integrável;

Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P,Q de $[a,b]$ tais que $S(f,Q) - s(f,P) < \varepsilon$.

Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0,\ x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$, onde $\omega_i = M_i - m_i$ e é chamada de oscilação de f.

Prova: Sejam $L=\left\{s\left(f,P\right):P\,\acute{e}\,uma\,partição\,de\,\left[a,b\right]\right\}$ o conjunto das somas inferiores e $U=\left\{S\left(f,P\right):P\,\acute{e}\,uma\,partição\,de\,\left[a,b\right]\right\}$ o conjunto das somas superiores. Sabemos que $s\leq S$ para toda partição de P de $[a,b]$. Então se i) é válida, temos que $\sup L=\inf U$, portanto podemos concluir que existe $\epsilon>0$ tal que $S\left(f,Q\right)-s\left(f,P\right)<\varepsilon$ e assim temos que $i)\Rightarrow ii)$. Agora, provaremos que $ii)\Rightarrow iii)$, basta observar que se $S\left(f,P'\right)-s\left(f,P'\right)<\varepsilon$, então tomando $P'=P\bigcup Q$ que é um refinamento das duas partições e segue do teorema 1 que $s\left(f,P\right)\leq s\left(f,P'\right)\leq S\left(f,P'\right)\leq S(f,Q)$, donde concluímos que $S\left(f,P'\right)-s\left(f,P'\right)<\varepsilon$. E por fim, a implicação $iii)\Rightarrow i)$ segue naturalmente da definição da soma superior e inferior.

Com esse resultado fechamos este tópico sobre definição de funções integráveis e passaremos agora às propriedades da integral no tópico seguinte.

TÓPICO 2 Propriedades da integral

Objetivos
- Compreender as propriedades da integral
- Aplicar tais propriedades em alguns exemplos

A partir daqui veremos as propriedades da integral e aplicaremos essas propriedades em alguns exemplos. Poderemos perceber que as propriedades da integral facilita-nos a vida ao fazermos o cálculo de algumas integrais.

A primeira propriedade da integral de que tratamos é a que expressa o fato de que a integral pode ser calculada sobre subintervalos que compõem um intervalo maior. É importante no caso em que uma função não é contínua em um ponto interno de um intervalo.

Teorema 4: Seja $a<c<b$. A função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada é integrável, se somente se, as restrições $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis. Portanto, temos

Prova: Sejam $a=\underline{\int_a^c} f$, $A=\overline{\int_a^c} f$, $b=\underline{\int_c^b} f$ e $B=\overline{\int_c^b} f$. Então, decorre da definição da integral de Riemann, e tomando uma partição que refina a partição dada, que: $A+B=\overline{\int_a^b} f$ e $a+b=\underline{\int_a^b} f$. Para isso basta tomar uma partição que contém o ponto c e seja um refinamento das anteriores. Muito bem, sabemos que $a\leq A$ e $b\leq B$, sendo assim temos que $a+b=A+B \Leftrightarrow a=A \, e \, b=B$, ou seja, f é integrável se, somente se, $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis.

Teorema 5: Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:

$f \pm g$ é integrável e vale: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

Se $c \in \mathbb{R}$, temos que $\int_a^b c.f(c)dx = c\int_a^b f(x)dx$;

Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

Se $|f(x)|$ é integrável, então temos $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Prova: Nós nos preocuparemos em fazer as demonstrações dos itens a) e d) ; os itens b) e c) deixaremos para você, aluno, como exercício.

a) Seja uma P partição arbitrária do intervalo $[a,b]$, se denotarmos por m'_i , m''_i e m_i os ínfimos de f, g e $f \pm g$, respectivamente, no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. É fácil ver que $m'_i + m''_i \leq m_i$, assim temos que $s(f,P) \pm s(g,P) \leq s(f \pm g, P) \leq \underline{\int_a^b}(f \pm g)$ para toda partição P. Se tomarmos duas partições obteremos ainda que: $s(f,P) \pm s(g,Q) \leq s\left(f, P \bigcup Q\right) \pm s(g, P \bigcup Q) \leq \underline{\int_a^b}(f \pm g)$. Então tomando o supremo sobre todas as partições P do intervalo, teremos que $\underline{\int_a^b} f \pm \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} f \pm g$ e o mesmo se pode concluir para a integral da soma superior e consequentemente:

$$\underline{\int_a^b} f \pm \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} f \pm g \leq \overline{\int_a^b} f \pm g \leq \overline{\int_a^b} f \pm \int_a^b g$$

e quando as funções f e g são integráveis as três desigualdades se reduzem a uma igualdade e daí segue o resultado. ■

d) Basta observarmos que: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e, como por hipótese $|f|$ é integrável, segue que se usarmos duas vezes o item c) teremos que $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$ e pela definição do módulo teremos o resultado.

Teorema 6: Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável.

Prova: Como uma função contínua em um intervalo compacto é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Seja P uma partição do intervalo $[a,b]$ cujos subintervalos da partição têm comprimentos $\Delta_i x = |x_i - x_{i-1}| < \delta$ e nesse subintervalo a função um valor máximo e um valor mínimo que são respectivamente $M_i \, e \, m_i$ e daí segue que $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon$ e desse modo obteremos que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

e conforme o teorema 3 segue o que queríamos demonstrar. ■

Exemplo 3: Considere a função $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Temos que a função é limitada e descontínua apenas em $x = 0$, logo f é integrável.

Você pode verificar facilmente que, se a função é monótona no intervalo $[a,b]$, então de maneira análoga pode-se mostrar que a função é também integrável. Deixamos para você a verificação desse resultado. E com isso finalizamos este tópico 2 e partimos para o tópico 3 para demonstrarmos o teorema mais importante dessa aula: o Teorema Fundamental do Cálculo.

TÓPICO 3

Teorema fundamental do cálculo

Objetivos

- Realizar o cálculo explícito da integral de uma função
- Compreender a integral como o valor da primitiva de uma função
- Entender algumas aplicações sobre o cálculo de integrais

Aqui apresentamos o principal resultado desta aula: Oo Teorema Fundamental do Cálculo, que expressa a maneira como se deve fazer para calcular uma integral de uma função. Nos tópicos anteriores, vimos quais funções são integráveis, mas não sabemos como fazer para obter a integral de uma função. A partir deste tópico, nós saberemos como fazer para calcular a integral de uma função.

Teorema 7 (Fundamental do Cálculo): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua, então:

A função $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é derivável para $a<x<b$ com $G'(x)=f(x)$ e é contínua em $[a,b]$ e $G(a)=0$.

Para qualquer função F contínua sobre o intervalo $[a,b]$ e que diferenciável em (a,b) com $F'(x)=f(x)$ e em que $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Prova: a) Como $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, segue que f é integrável. Para $h>0$ suficientemente pequeno, tome $x+h<b$. Então

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)=\frac{\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt-f(x)=\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt$$

e portanto temos que $\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right|\leq\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt$. Se dado $\varepsilon>0$, escolhemos $\delta>0$ para a função f contínua tal que $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$ com $0<h\leq\delta$, assim obtemos que $\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right|\leq\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt<\varepsilon$, como queríamos provar. ■

As funções F e G são duas funções contínuas sobre $[a,b]$ com derivadas iguais em (a,b). Isso significa que $G(x)=F(x)+c$, para algum c. Então $\int_a^b f=G(b)-0=G(b)-G(a)=F(b)+c-F(a)-c=F(b)-F(a)$.

Corolário 1(Integração por Partes): Sejam f e g funções reais definidas e tendo derivadas contínuas sobre $[a,b]$. Então $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x).g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

Prova: Sabemos que, da regra da derivada do produto, temos que $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)]=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$ aplicando a integral e usando o teorema fundamental do cálculo

$$\int_a^b\frac{d}{dx}[f(x).g(x)]dx=\int_a^b f'(x).g(x)dx+\int_a^b f(x).g'(x)dx,$$

que dá o resultado. ■

Exemplo 4: Seja a função $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x1\\ 1, & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

tomando $F:[0,2]\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ onde $F(x)=0$ se $0\leq x\leq 1$ e $F(x)=x-1$ se $1\leq x\leq 2$. É fácil ver que F é contínua no intervalo $[0,2]$, enquanto a função f não é contínua em $x=1$.

Teorema 8 (Mudança de Variável): Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ derivável, com g' integrável e $g([c,d])\subset[a,b]$. Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)}f(x)dx=\int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Prova: Como f é uma função contínua, temos que f possui uma primitiva $F:[a,b]\to\mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos observar que:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c)) \quad (1)$$

Mas, por outro lado, a regra da cadeia dá $(F\circ g)'(t) = F'(g(t)).g'(t) = f(g(t)).g'(t)$ e vemos que a função $(F\circ g)$ é uma primitiva da função integrável $f(g(t)).g'(t)$. Então, integrando e usando o teorema fundamental do cálculo, chegamos ao resultado desejado:

$$\int_{c}^{d} f(g(t)).g'(t)dt = \int_{c}^{d} (F\circ g)'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c)) \quad (2).$$

Basta igualar a igualdades (1) e (2) e teremos o resultado, veja abaixo.

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_{c}^{d} f(g(t)).g'(t)dt \quad \blacksquare$$

Com esse resultado, chegamos ao fim de mais uma disciplina. Espero que você tenha apreciado a consistência e a produtividade dos argumentos que apresentamos para caracterizar o conceito de uma função real, limites, derivadas e integrais. Esses conceitos mudaram a visão e a forma de encarar os problemas em Matemática. A Matemática deixa de tratar de objetos estáticos e passa a abordar objetos em movimento. Por isso, com essa ferramenta matemática, o homem tem conseguido feitos inimagináveis.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

FIGUEIREDO, D. Guedes. **Análise I**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3. ed. v. 5, São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar.** 3. ed. v.6, São Paulo: Atual, 1977.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do Ensino Médio**. 3. ed. v.3, São Paulo: SBM, 2000.

________. **A matemática do Ensino Médio**. 3. ed., ano. v.2. s/l: SBM.

________. **Análise Real**. Rio de Janeiro: SBM, 2004. V.1.

CURRÍCULO

Angelo Papa Neto

Angelo Papa Neto nasceu em Fortaleza, onde fez seus estudos básicos e sua graduação. É licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC), onde também fez seu mestrado. Concluiu o doutorado em Matemática em 2007 na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Sua área de pesquisa é a Álgebra Comutativa, área em que nutre especial interesse pela Teoria de Valorizações, pela Teoria das Formas Quadráticas e pela Álgebra Real. É professor efetivo do IFCE desde 1997. Casado desde 2000, é pai de dois filhos. Na música, é um grande admirador de J. S. Bach, L. Beethoven e Dimitri Shostakovich; no cinema, de F. W. Murnau, Fritz Lang e A. Hitchcock; na literatura, de F. Kafka, A. Tchekov e Guimarães Rosa; na gastronomia, de sua esposa Sueli.

Zelalber Gondim Guimarães

Possui mestrado em Matematica pela Universidade Federal do Ceará (1998) . Atualmente é professor titular da Universidade Regional do Cariri. Tem experiência na área de Matemática , com ênfase em Geometria e Topologia.