Matem@tica na Pr@tica

Curso de Especialização em Ensino de
Matemática para o Ensino Médio

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Matem@tica na Pr@tica

Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio

Módulo I
Desafio geométrico

Cláudio Carlos Dias
João Carlos Vieira Sampaio

CENTRAL DE TEXTO

Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio

Equipe de especialistas em formação de professores de Matemática
Coordenação: Paulo Antonio Silvani Caetano (DM-UFSCar)
Especialistas: Cláudio Carlos Dias (UFRN), João Carlos Vieira Sampaio (DM-UFSCar), Marlusa Benedetti da Rosa (CAp-UFRGS), Pedro Luiz Aparecido Malagutti (DM-UFSCar), Roberto Ribeiro Paterlini (DM-UFSCar), Victor Augusto Giraldo (IM- UFRJ)

Desenvolvimento Instrucional
Coordenação: Cristine Costa Barreto
Designers instrucionais: Juliana Silva Bezerra, Leticia Terreri, Maria Matos e Wagner Beff

Responsáveis por este fascículo
Autores: Cláudio Carlos Dias e João Carlos Vieira Sampaio
Leitores: Marlusa Benedetti da Rosa
Designers instrucionais: Cristine Costa Barreto e Juliana Silva Bezerra
Revisão: Paulo Alves

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

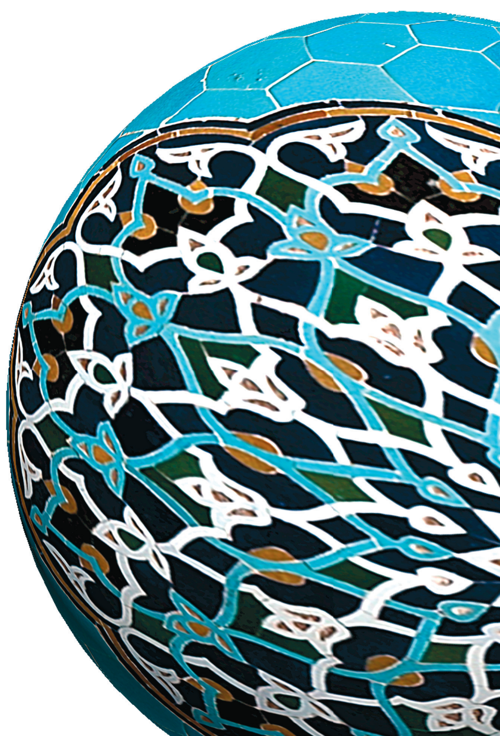
Dias, Cláudio Carlos
Desafio geométrico : módulo I / Cláudio Carlos Dias, João Carlos Vieira Sampaio. -- Cuiabá, MT : Central de Texto, 2013. -- (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)

Bibliografia.
ISBN 978-85-88696-92-1

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Matemática - Formação de professores 3. Prática de ensino I. Sampaio, João Carlos Vieira. II. Título. III. Série.

13-07112 CDD-370.71

Índices para catálogo sistemático:
1. Professores de matemática : Formação : Educação 370.71



Produção Editorial - Central de Texto
Editora: Maria Teresa Carrión Carracedo
Produção gráfica: Ricardo Miguel Carrión Carracedo
Projeto gráfico: Helton Bastos
Paginação: Ronaldo Guarim Taques
Revisão para publicação: Henriette Marcey Zanini

Apresentação

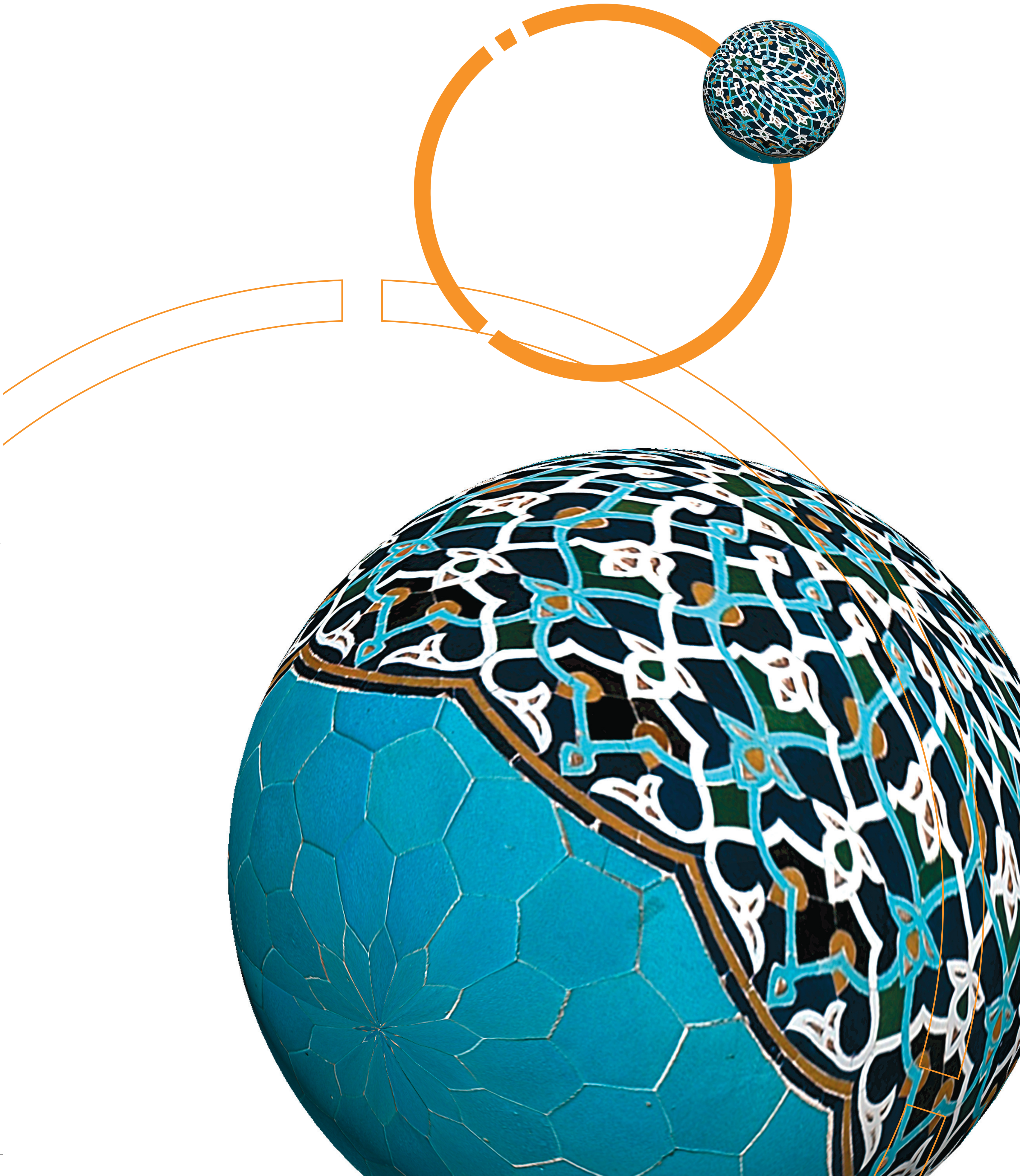
O Matem@tica na Pr@tica é um Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio de Matemática na modalidade de Educação a Distância, que está inserido no Plano de Ações Articuladas do Ministério da Educação. Esse plano tem como um dos objetivos promover uma importante atividade de formação continuada dirigida a você, professor do ensino básico, incentivando a renovação da sua prática pedagógica e propondo caminhos para que você possa criar, organizar e compartilhar novos conhecimentos com seus estudantes e colegas de trabalho.

O primeiro módulo de nosso curso consiste em três atividades práticas sobre temas que trazem importantes significados para a Matemática do ensino básico. Em seguida, você terá a oportunidade de refletir sobre essas atividades para, depois, dedicar-se à aplicação de uma delas em sua sala de aula.

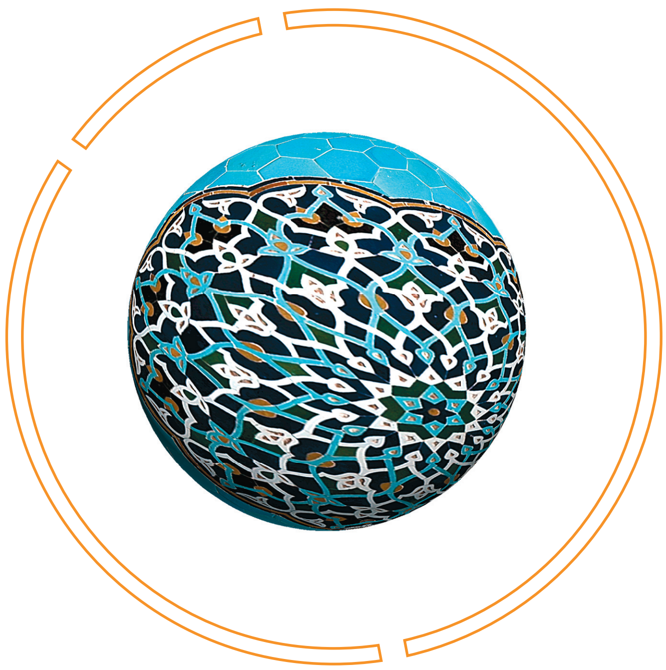
Neste fascículo, apresentamos a atividade prática denominada "desafio geométrico", que constitui uma oportunidade para o estudante refletir sobre conceitos da Geometria Plana. Inclui investigação envolvendo padrões geométricos, polígonos regulares, ângulos, construções geométricas, ladrilhamentos do plano e classificação de ladrilhados por polígonos regulares. As atividades são atraentes para os estudantes, pois estão inseridas em contextos familiares a eles.

Seja bem-vindo ao desafio geométrico!

Equipe do Matem@tica na Pr@tica
Março, 2013

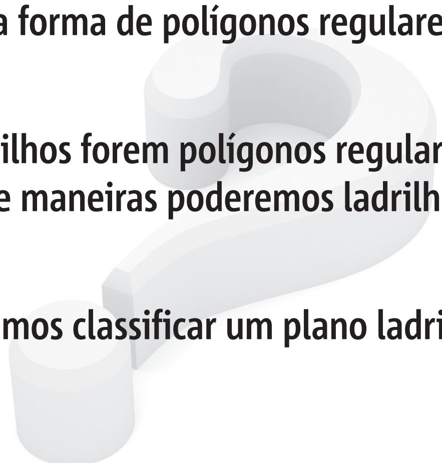


Sumário



Ciclo I
Desafio geométrico

- De que maneiras podemos ladrilhar um plano, usando ladrilhos na forma de polígonos regulares de um único tipo?
- E se os ladrilhos forem polígonos regulares de mais de um tipo, de que maneiras poderemos ladrilhar esse mesmo plano?
- Como podemos classificar um plano ladrilhado?



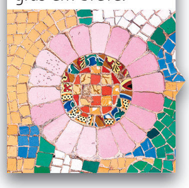
Svilen Milev / SXC

1. Se essa rua fosse minha...

O autor da cantiga popular que dá nome à seção de abertura de nosso terceiro desafio seria capaz de ladrilhar uma rua inteira com pedrinhas de brilhantes, só para ver o seu amor passar. Muito dedicado o rapaz, realmente foi uma ideia e tanto... Mas já pensou se esse amor não fosse uma pessoa muito ligada em joias e se encantasse mais com arte? Nosso amigo romântico ia ter de quebrar a cabeça para conquistar a eleita!

Matthew Bowden - Lisa Nouwen - Kia Abell / SXC

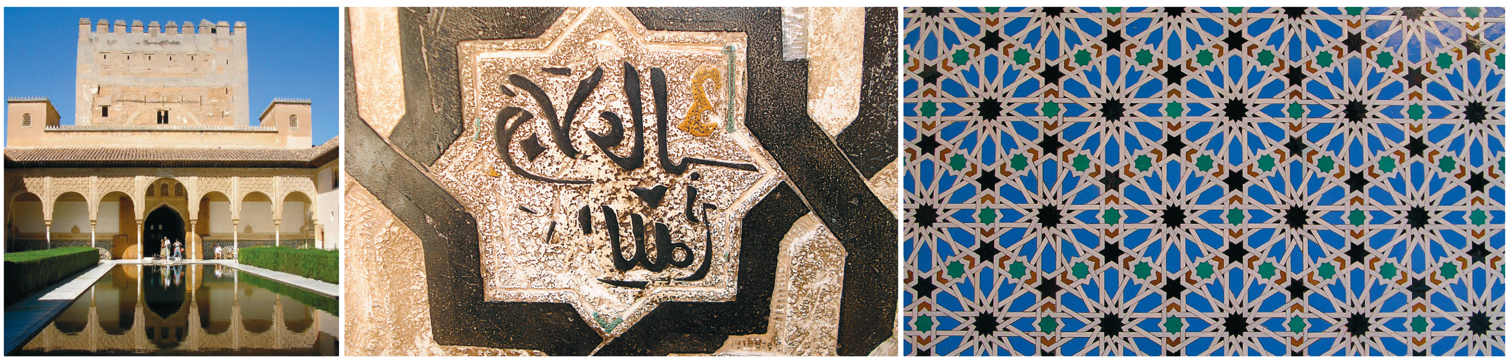
Enquanto o termo ladrilhamento significa "pavimento ou chão ladrilhado", na maioria dos dicionários, na literatura matemática tem um emprego um pouco diferente: "cobrir um plano com figuras geométricas, seguindo um determinado conjunto de regras". Você vai conhecer essas regras em breve.



Richard McMillan / SXC

Se essa história se passasse há 4.000 anos, o problema estava resolvido. Era só pedir uma consultoria aos egípcios que, desde essa época, já eram experts em usar geometria nas mais variadas situações. Egípcios, árabes e outras civilizações mandaram ladrilhar – apesar de não ter sido com pedrinhas - seus templos e castelos, que se tornaram obras de arte "brilhantes", admiradas pela humanidade até hoje.

Os antigos egípcios, por exemplo, desde 4.000 a.C usavam ladrilhos decorativos na construção de templos e nas grandes pirâmides. Mais recentemente, os árabes criaram belíssimos **ladrilhamentos** como os encontrados em Alhambra, um conjunto de palácios da Espanha, construído por mouros e cristãos nos séculos XIII, XIV e XV. Tipos diferentes de ladrilhamentos foram criados e recriados por diversas civilizações, e eventualmente introduzidos nas Américas pelos próprios espanhóis.



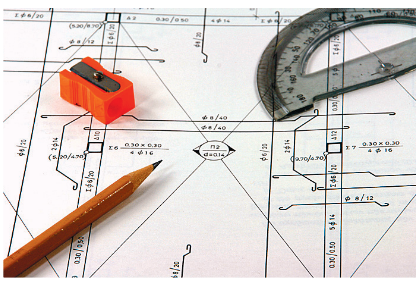
Thea Nielsen – Guel Meri – Tom Albrighton / SXC

Figura 1: Alhambra é a marca da presença árabe na história espanhola. Localizado em Granada, na parte sul do país, reúne a arquitetura islâmica do século XIV e a arquitetura cristã do século XVI

Você consegue imaginar como, no século XIII, os árabes já eram capazes de construir estes padrões impressionantes, que se estendem por amplas paredes, sem qualquer sobreposição ou lacunas entre ladrilhos, sem erros visíveis em sua estrutura e em grande escala?

Essa questão intriga pesquisadores até os dias de hoje. O que se sabe é que, naquela época, os árabes já possuíam conhecimento em processos geométricos de simetria, os quais só foram formalizados em meados do século XIX. Peter Lu, um investigador da Universidade de Harvard, acredita que os artesãos árabes usavam pequenos mosaicos, formados por polígonos, e suas variadas composições deram origem à Alhambra: uma das mais complexas, simétricas e extensas obras de arte já construídas em pleno século XIII. Alhambra foi declarado patrimônio da humanidade pela UNESCO.

Neste desafio, vamos seguir os passos dos mestres de Alhambra e mergulhar em uma interessante investigação interdisciplinar, relacionando arte e geometria: qual o segredo da arte de ladrilhar?



Zsuzsanna Kilian – Vangelis Thomaidis – Baris Gencler / SXC

2. Antes de ladrilhar... os ladrilhos!

"as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca."

"O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas."

Os dois trechos que você acabou de ler foram retirados, respectivamente, dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e das Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

A importância da Geometria dentro da Matemática para representar o mundo que nos cerca é reconhecida e inquestionável. No entanto, é comum ouvirmos relatos, quer seja de professores, quer seja de alunos, acerca de uma formação deficiente nessa área.

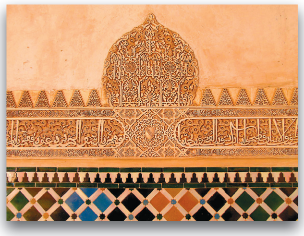
Janela Pedagógica **O ensino de geometria**

Veja a seguir o relato de um professor acerca das dificuldades encontradas no ensino da Geometria.

"Uma parte da dificuldade em trabalhar conteúdos de Geometria em sala de aula está relacionada com a falta de material e de pré-requisitos. Meus alunos não sabiam sequer a diferença entre centímetro e milímetro. Levanto também a questão do tempo gasto para certas demonstrações, as quais acabam consumindo toda a aula. Por causa de todas estas dificuldades, confesso que tenho trabalhado apenas as questões mais superficiais da Geometria, "as coisas mais fáceis de ensinar e de aprender", que demandam menos tempo para serem desenvolvidas.

Poucas vezes dedico-me à preparação de uma demonstração geométrica mais complexa (pelas razões já apontadas), e admito, também, que algumas demonstrações até mesmo eu tenho encontrado dificuldades para compreender e ensinar. Destaco que na minha graduação de Matemática estudei Geometria, mas aprendi muito pouco. Foi quase que apenas o necessário para passar. E o que tenho aprendido de lá para cá, resulta de esforço pessoal. Tenho estudado mais Geometria depois que terminei a graduação do que durante ela, e muito mais no meu dia a dia de professor, para ensinar aos meus alunos, do que em qualquer outra situação. A minha dificuldade é mais ou menos nessa linha."

Izaias Resplandes – Professor de Matemática da Escola Estadual Padre César Albisetti e Escola Profª. Juracy Macedo, Poxoréu/MT.



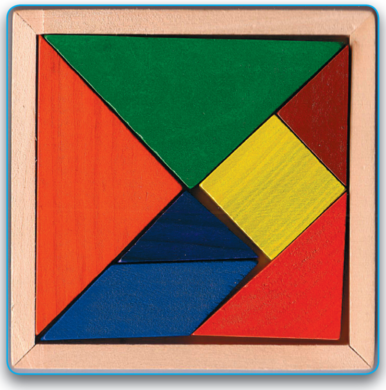
Xiskya Valladares / SXC

Assim, esse desafio foi proposto para ajudar você a reciclar seu conhecimento na área da Geometria e repensar maneiras de abordar junto a seus alunos os conceitos tão essenciais para o ensino e aprendizagem da Matemática, e para que eles possam visualizar e compreender melhor o mundo que os cerca.

Para simplificar as coisas, nas atividades propostas iremos explorar ladrilhamentos que utilizam apenas polígonos regulares. Sendo assim, é fundamental conhecermos nossos ladrilhos! Antes de seguirmos adiante, dê uma olhada no boxe a seguir, que sugere uma boa maneira de você desenvolver com seus alunos o conceito de polígono.

Janela Pedagógica — Tangran

Para falar sobre ladrilhamento para seus alunos, é necessário naturalmente que eles conheçam o conceito de polígonos. Em sua sala de aula, você já experimentou ensinar este tema usando um Tangram?



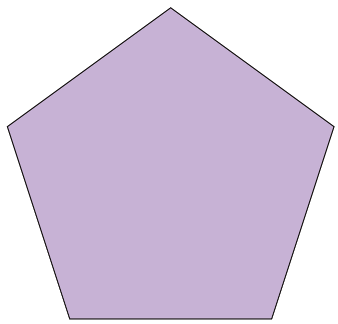
Nevit Dilmen / SXC

O Tangram é um jogo chinês, composto por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) que, juntas, formam um quadrado. Acredita-se que este jogo foi inventado por um homem chamado Tan, quando quebrou em 7 pedaços uma telha quadrada e, ao tentar arrumá-la, formou com eles uma série de outras figuras.

O primeiro objetivo desse jogo é montar o quadrado. A partir daí, os alunos podem ser conduzidos por inúmeros caminhos, pois a associação das figuras geométricas permite a formação de mais de 1.000 imagens.

Um polígono é uma figura geométrica plana, limitada por uma linha poligonal fechada. Assim, em um simples jogo de Tangram, você pode explorar muitos elementos dos polígonos, tais como:

- Seus lados (ou arestas), que são segmentos de retas, têm dois vértices como extremidades;
- Cada vértice é o ponto de encontro de dois lados que são, então, chamados lados consecutivos;
- Ângulos internos são formados entre lados consecutivos;
- As diagonais do polígono, que não fazem parte da configuração do polígono, são segmentos de reta que unem dois vértices não consecutivos;
- O conceito de polígono regular baseia-se em uma figura cujos lados e ângulos internos são todos congruentes entre si, ou seja, possuem o mesmo comprimento e medida, respectivamente, como por exemplo o pentágono regular, que possui 5 lados, 5 vértices, 5 ângulos internos e 10 diagonais.

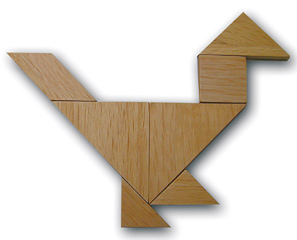


Janela Pedagógica

Veja a seguir o relato de uma professora contando suas experiências em sala de aula com o uso do Tangram:

"Quando trabalhei com Tangram, e deu certo, comecei fazendo a construção do material em cartolina. Depois exploramos as formas (polígonos), as relações entre elas, e fizemos montagem de figuras, usando todas as peças do Tangram. Também dá para utilizar a relação entre as peças para introduzir as ideias iniciais sobre números racionais. Mas é um trabalho árduo. Dependendo do perfil da turma (5ª série), levo o quadrado maior pronto e peço para fazerem as divisões, ou trabalho com dobraduras para formar as peças."

(Clarice Barreto, Profª de Matemática da Rede Escola Estadual, Salvador-BA)



Julia R / SXC

Atividade 1 Todos os nomes

Faça uma pesquisa na Internet sobre as denominações dos diversos polígonos regulares. Um eneágono regular é um polígono regular de 9 lados. Você sabe o que é um tridecágono? E um icoságono? E um quilógono? E um googólgono? Em seguida, liste os nomes curiosos de polígonos regulares.

Utilize o espaço abaixo para registrar as informações que encontrou.

Resposta comentada

Como você deve ter percebido em sua pesquisa, o nome de um polígono está associado à quantidade de lados que o constitui. Por exemplo, o tridecágono e o heptacontakaidígono possuem 13 e 72 lados, respectivamente. Conseguiu ver o que essas terminologias têm em comum?

Observe com atenção e veja que a terminação é sempre *gono* (vem do grego e significa ângulos), enquanto que o início depende do número de lados do polígono. Interessante, não?

3. Você sabe o que significa um ladrilhamento "bem-comportado"?

Na vida cotidiana, os ladrilhamentos por ladrilhos quadrados são habitualmente construídos encaixando-se uma quantidade finita de ladrilhos, um a um, como ilustramos na figura a seguir. Cada lado é compartilhado por dois ladrilhos vizinhos, e os ladrilhos podem preencher uma região retangular, como, por exemplo, uma parede.

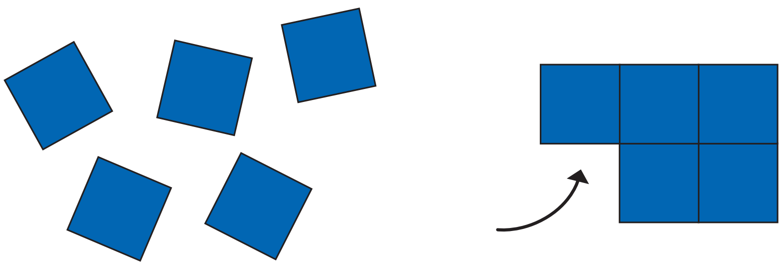
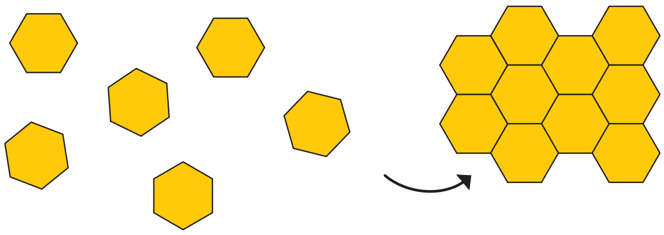


Figura 2: Devido às suas dimensões, é usual um plano retangular ser preenchido por ladrilhos quadrados.

Já um ladrilhamento feito por hexágonos, como o da figura a seguir que não preenche uma região retangular, e deixa sempre folgas nas beiradas, que normalmente são preenchidas por pedaços de ladrilhos.



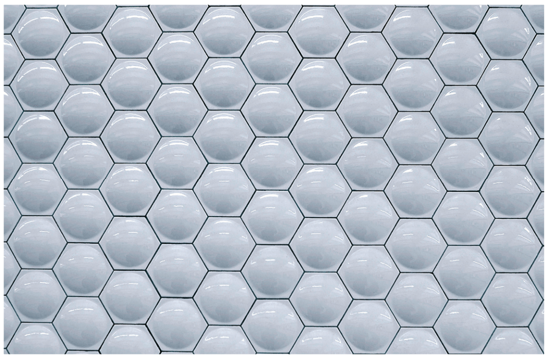


Figura 3: Ladrilhamento com hexágonos regulares.

- Por isto, de forma ideal, nossos ladrilhamentos são sempre imaginados de forma a preencher todo um plano, ilimitado em todas as direções, e diremos assim que é possível ladrilhar o plano com hexágonos regulares. Os ladrilhos terão sempre lados de mesma medida, independentemente do número de lados que formam cada polígono.

Além disso, os ladrilhamentos do plano que estaremos explorando são os ladrilhamentos que chamamos de *bem-comportados*. Isto significa que devem obedecer a três condições ou às regras de *bom comportamento*.

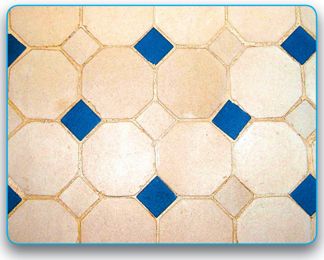
1. Os ladrilhos devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos.
2. A interseção de dois ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice.

Antes de passarmos à terceira regra de bom comportamento, vamos ver se você pegou o espírito da coisa? Já conseguiu visualizar em sua mente ladrilhamentos com mais de um tipo de polígono? Então, tente fazer a atividade a seguir.

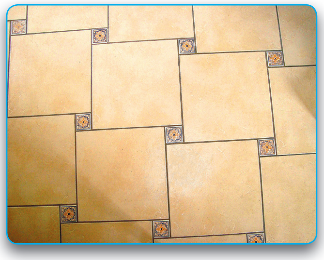
Atividade 2 Bem ou mal-comportados?

Qual dos ladrilhamentos, nas duas figuras, atende às duas primeiras regras expostas anteriormente para um ladrilhamento bem-comportado?

a



b



Fotos: Autor desconhecido

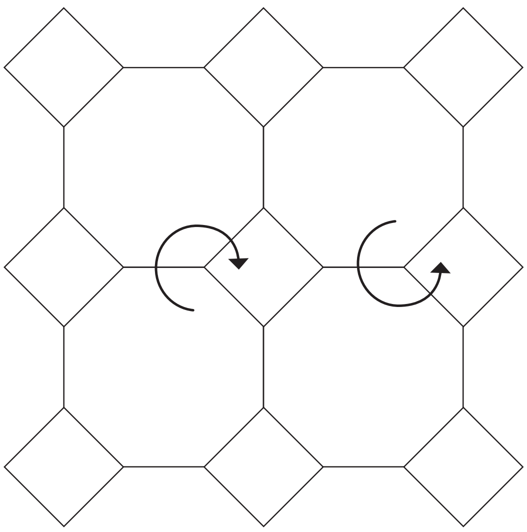
Resposta comentada

O ladrilhamento da figura a atende ao padrão de ladrilhamento que estaremos admitindo em nosso estudo. O ladrilhamento é formado por quadrados e hexágonos que possuem lados de mesma medida, e a interseção entre dois ladrilhos é sempre um lado inteiro. Já no ladrilhamento ilustrado na figura b, são utilizados quadrados de lados diferentes, além de ladrilhos vizinhos não compartilharem um lado inteiro; portanto, o ladrilhamento a é bem-comportado, mas o ladrilhamento b, não.

Agora que já entendemos as duas primeiras regras de bom comportamento, vamos passar à terceira e última condição necessária a nossos ladrilhamentos:

3. A distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

Explicando melhor esta terceira regra: se dermos uma volta, no sentido horário ou anti-horário, em torno de qualquer vértice, encontraremos sempre os mesmos tipos de polígonos regulares, e a sequência cíclica em que esses polígonos aparecem será sempre a mesma. Por exemplo, no ladrilhamento, mostrado na figura a seguir, ao redor de cada vértice sempre estão dispostos dois octógonos e um quadrado.



Atividade 3 Rock ao redor do vértice

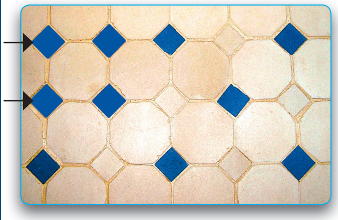
Agora que você já conhece as três condições para um ladrilhamento ser considerado bem-comportado, associe as figuras a seguir com a numeração apropriada, justificando sua resposta.

(1) atende a uma condição;

(2) atende a duas das condições;

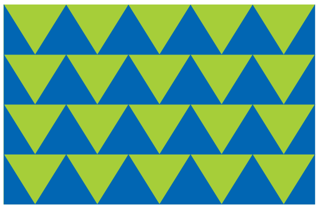
(3) atende às três condições.

a



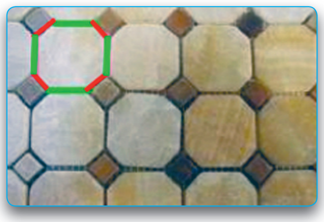
( )

b



( )

c

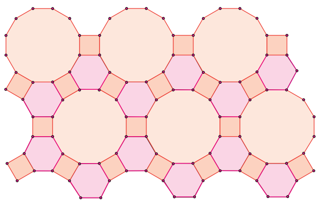


( )

d

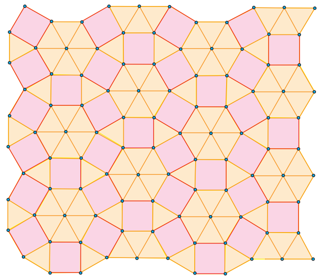
( )

e



( )

f



( )

Fotos: Autor desconhecido

Resposta comentada

Apenas as figuras **a**, **d** e **e** atendem às três condições de bom comportamento, pois, nestes casos, todos os polígonos são regulares, a interseção de dois ladrilhos é sempre um lado ou um vértice e a distribuição dos ladrilhos ao redor de cada vértice é sempre a mesma. A figura **b** atende à primeira e à terceira condições, pois os triângulos são equiláteros e, ao redor de cada vértice, temos sempre 4 triângulos, porém a segunda condição não é contemplada. Na figura **c**, a segunda e a terceira condições são atendidas, porém como os octógonos não possuem todos os seus lados iguais, a primeira condição é quebrada. Por fim, a figura **f**, apesar de ser um ladrilhamento constituído de polígonos regulares e de atender à segunda condição, possui distribuições diferentes de polígonos ao redor dos seus vértices.

4. Passo a passo, ladrilho a ladrilho

Em nosso desafio, estudaremos dois tipos de ladrilhamentos bem- comportados do plano. Os ladrilhamentos regulares, em que todos os ladrilhos são congruentes, ou seja, de um único tipo, e os ladrilhamentos quase regulares ou semirregulares, que podem conter 2 ou mais tipos de ladrilhos.

Autor desconhecido

Agora que sabemos os tipos de ladrilhamento que vamos adotar, convido você a retomar as questões que vimos no início de nossa conversa:
De quais maneiras podemos ladrilhar um plano, usando apenas polígonos regulares? E se os ladrilhos forem polígonos regulares de mais de um tipo, de quais maneiras poderemos ladrilhar esse mesmo plano?
Como podemos classificar um plano ladrilhado?

Partindo desses questionamentos, vamos percorrer uma sequência de etapas que vai nos orientar para o desenvolvimento de todas as atividades experimentais que serão propostas daqui para adiante. Veja o fluxograma a seguir:

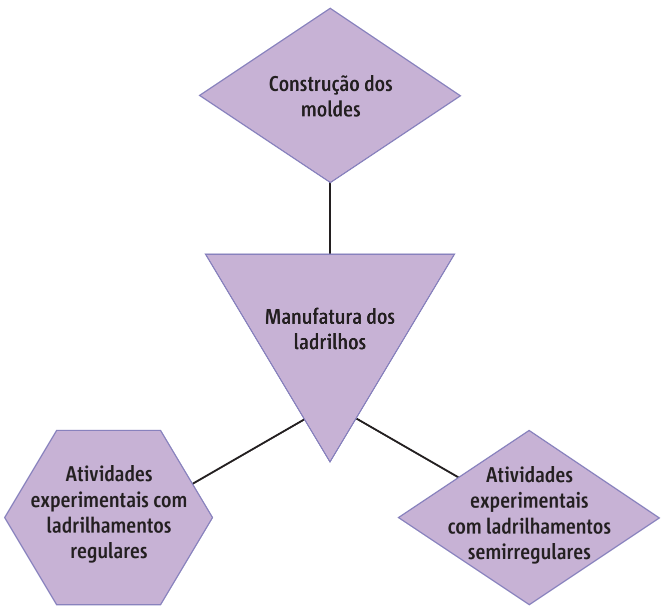


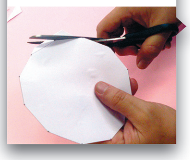
Figura 4: Representação gráfica de todas as etapas de nosso desafio.

Você perceberá que as duas primeiras etapas são instrumentações para a realização das atividades experimentais. Vamos à primeira etapa:

1ª etapa: construção dos moldes

Para realizar as atividades experimentais, primeiro precisamos construir polígonos regulares que serão os “ladrilhos” de nossos ladrilhamentos. Propomos que os polígonos sejam construídos em papel cartão ou em materiais similares, de cores variadas, a partir de **moldes**.

Molde significa um polígono regular, recortado de uma folha de material duro. O molde é usado como padrão para a construção de ladrilhos.

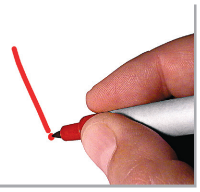


Uma vez feitos os moldes, várias peças com o formato do polígono regular podem ser riscadas e em seguida recortadas. Diversos materiais são bastante funcionais, como:

- folhas de papel cartão;
- papel color-set de boa gramatura (grossura);
- folhas de **E.V.A.**

E.V.A. é uma abreviação de etileno-vinil-acetato, um material sintético, macio e de aparência emborrachada, vendido em lojas de materiais plásticos e papelarias.

Polígonos regulares de mesmo número de lados devem ser feitos da mesma cor. Como teremos mais de um tipo de polígono, usaremos diversas cores.



Adam Ciesielski / SXC

Vamos construir um molde com a forma de cada um dos seguintes polígonos regulares:

- triângulo equilátero;
- quadrado;
- pentágono regular;
- hexágono regular;
- octógono regular;
- dodecágono regular (polígono regular de 12 lados).

Para as experiências de ladrilhamentos no plano, os ladrilhos a serem construídos deverão ter lados com um mesmo comprimento.

Você deve estar se perguntando: como vou fazer os moldes? É simples.

A seguir, são exibidas figuras que orientarão a construção de moldes dos polígonos regulares listados. Repare que os polígonos regulares presentes nas figuras têm lados de mesmo comprimento.

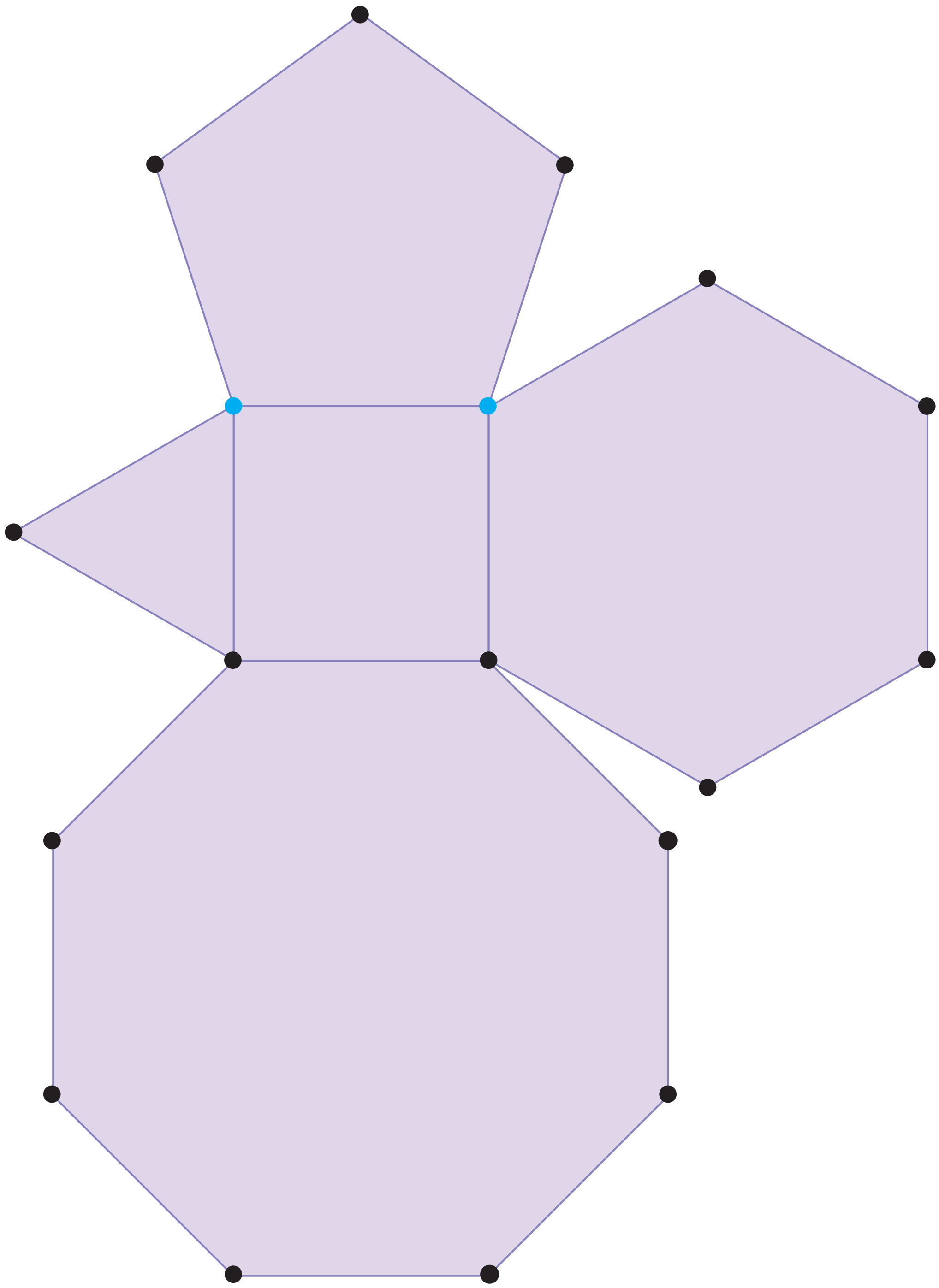


Figura 5: Padrões para a feitura dos moldes que permitirão a construção de ladrilhos nos formatos do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono regular, do hexágono regular e do octógono regular.

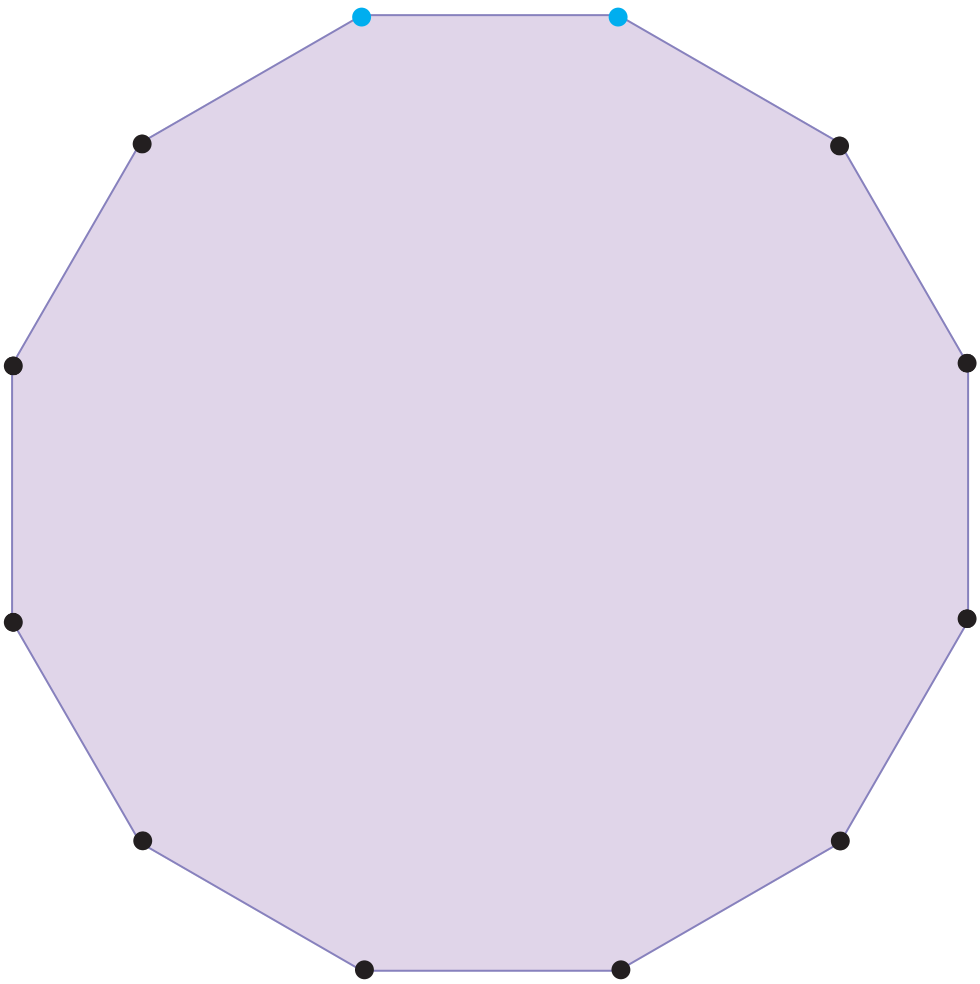
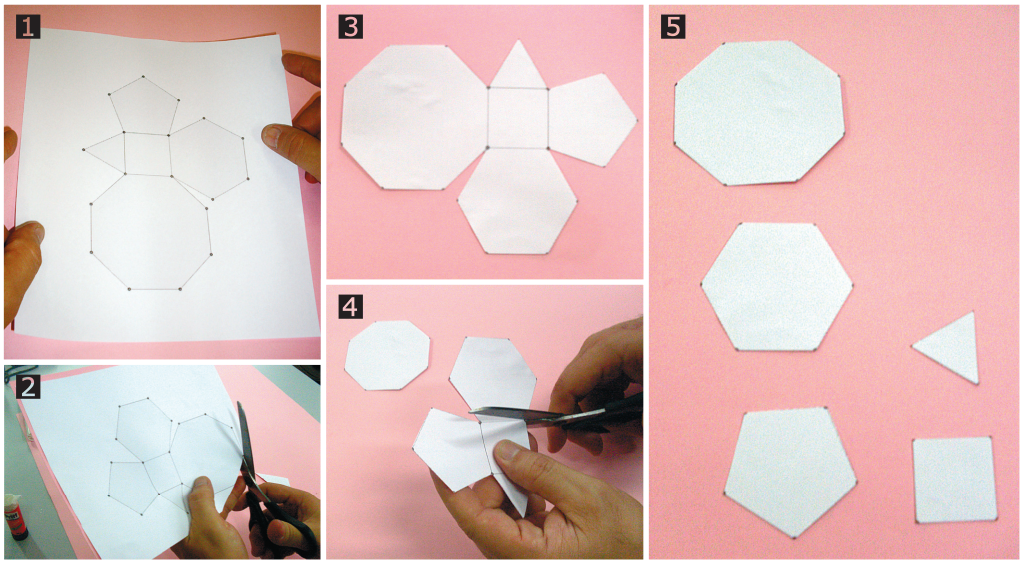


Figura 6: Padrão para a feitura dos moldes que permitirão a construção de ladrilhos no formato do dodecágono regular.

As figuras 5 e 6 deverão ser fotocopiadas sem redução e coladas sobre o material que você estiver usando para fazer o molde.

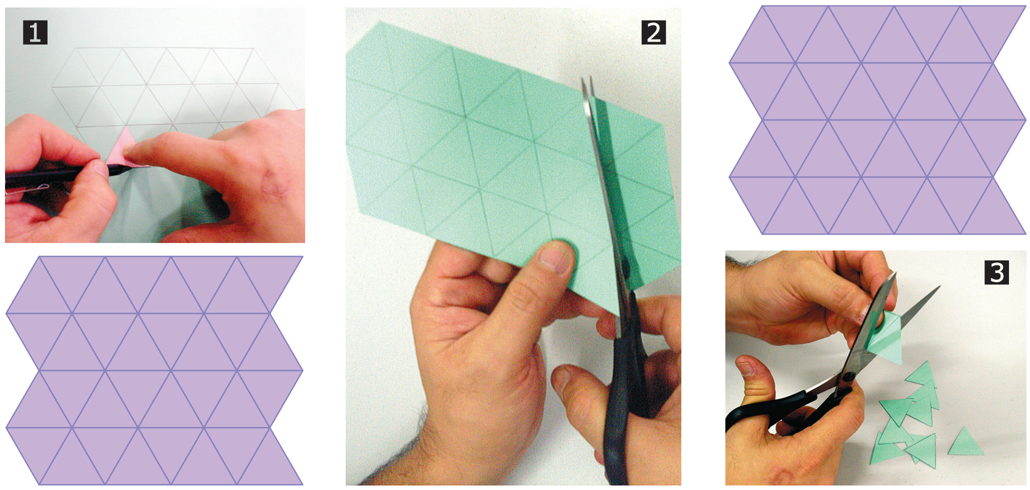
Os polígonos deverão então ser recortados ao longo de seus contornos.



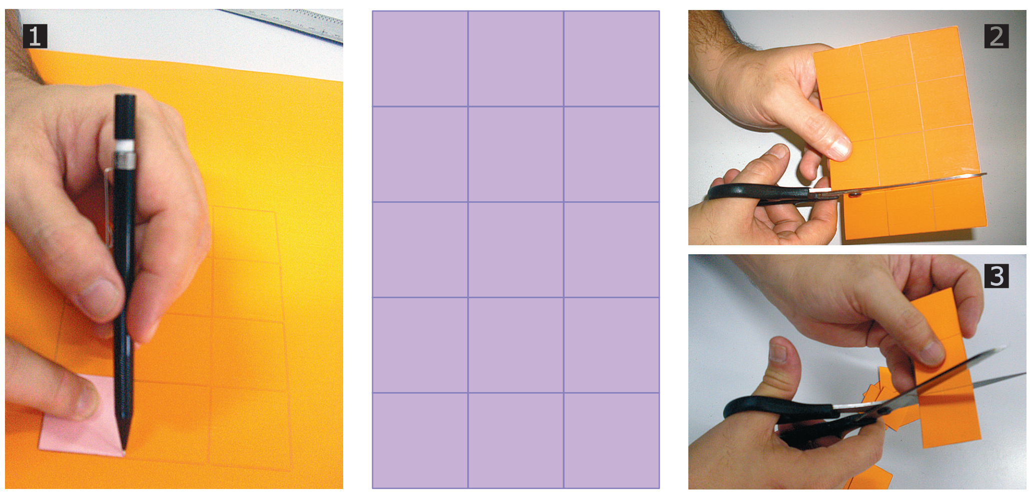
Feitos os moldes, podemos partir para a segunda etapa de nosso desafio: confeccionar vários ladrilhos, para começarmos nossos ladrilhamentos.

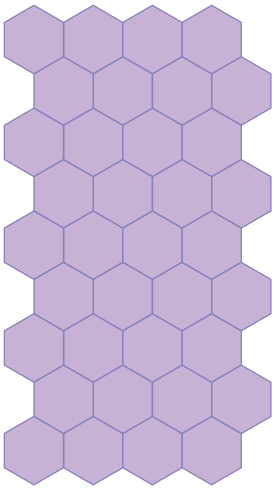
2ª etapa: Manufatura dos ladrilhos

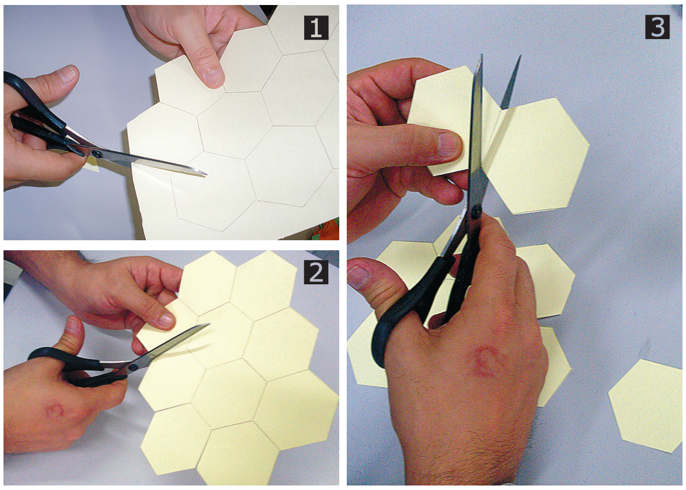
Usando os moldes recortados, os polígonos regulares deverão ser traçados em papel cartão, cartolina, color-set ou similares. Para recortar os triângulos, você poderá primeiro desenhar a lápis uma malha de triângulos equiláteros, todos com as dimensões do triângulo do molde, sobre uma folha de papel cartão, ou cartolina, ou ainda color-set. Depois disto, os vários triângulos serão recortados.

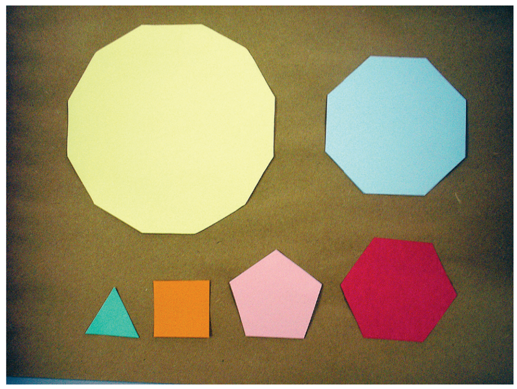


De modo análogo, em outras folhas de papel, de cores diferentes, deverão ser recortados quadrados e hexágonos regulares com lados iguais aos dos triângulos equiláteros. Veja a sequência de fotos abaixo:









Utilize os moldes para confeccionar ladrilhos de diferentes tipos em cores variadas. Recorte o maior número possível de ladrilhos de cada tipo, de cada folha de papel cartão ou cartolina utilizada.

Agora você já tem em mãos todo material necessário para as experiências com ladrilhamentos regulares e semirregulares.

A partir dos variados tipos de ladrilhos e das associações feitas com eles, podemos afirmar que é possível ladrilhar um plano atendendo às três regras de bom comportamento?

Responder à esta questão é justamente o desafio que você vai enfrentar na terceira etapa do processo.

3ª etapa: Construção de ladrilhamentos regulares e semirregulares

A partir desta etapa, vamos começar a realizar as atividades experimentais propriamente ditas. Propomos uma série de ações que vão ajudar você a desvendar o mistério da arte de ladrilhar e a explorar a Geometria de uma maneira lúdica.

Vamos começar com uma atividade de construção de ladrilhamentos regulares. Podemos, por exemplo, ladrilhar o plano usando apenas pentágonos regulares?

Atividade 4 Ladrilhos pentagonais

Quando você estava riscando os ladrilhos quadrados, triangulares e hexagonais, deu-se conta de que estava fazendo um ladrilhamento? Experimente, agora, construir ladrilhamentos, que atendam às três regras de bom comportamento, usando apenas pentágonos regulares.

A construção é possível? Ela atende às três condições de bom comportamento? Justifique sua resposta.

Resposta comentada

Ladrilhar, usando apenas um tipo de polígono, nem sempre é uma tarefa possível. O caso do ladrilhamento feito com pentágonos é um exemplo claro desta afirmação, uma vez que duas condições de bom comportamento são violadas.

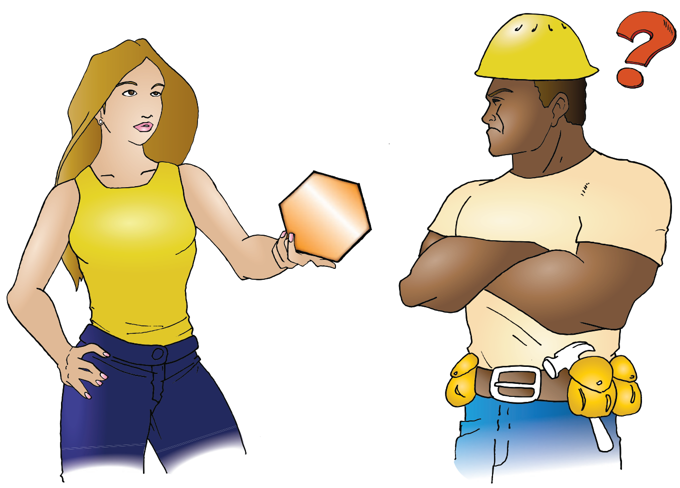
Utilizando os ladrilhos pentagonais, confeccionados nas etapas anteriores, já podemos concluir que a primeira condição é atendida, pois o molde usado na construção deste polígono possui lados e ângulos iguais.

No entanto, não é possível acomodar ladrilhos pentagonais ao redor de cada vértice, de modo a preencher o plano, sem que haja superposição de ladrilhos e, em consequência disto, a segunda condição não é atendida. Quando a segunda regra não é atendida, a terceira também não é, dado que a distribuição de ladrilhos em torno dos vértices é impossível.

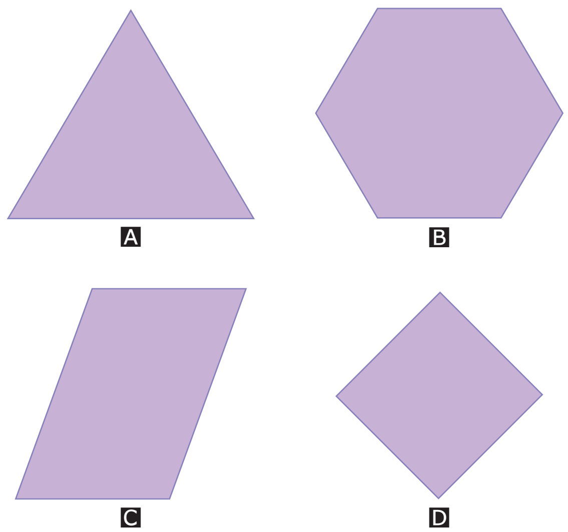
Experimentamos construir um ladrilhamento do plano, usando apenas um tipo de polígono regular que, neste caso, foi o pentágono. Vimos que isto é impossível. Vamos agora mergulhar nos ladrilhamentos semirregulares e utilizar os variados polígonos que construímos.

Para começar as próximas atividades, tenha em mãos todos os seus ladrilhos e comece a pensar quais seriam as associações possíveis de serem feitas com eles, ou seja, quais polígonos podem ser combinados de modo a formar um ladrilhamento semirregular. No caso do dodecágono, por exemplo, com que polígono podemos combiná-lo para que seja possível ladrilhar um plano?

Atividade 5 O sonho de Dona Neide



Dona Neide quer revestir as paredes de sua cozinha com um ladrilhamento especial. Para isto, mandou fazer, sob medida, os tão sonhados ladrilhos na forma de dodecágonos regulares (polígonos de 12 lados), para fazer o revestimento. O problema é que três pedreiros já se recusaram a fazer este serviço, alegando que não daria para revestir toda a parede, pois sobrariam espaços entre os ladrilhos. Porém, o último pedreiro contratado deu algumas opções para preencher os espaços vazios com um dos polígonos seguintes:



Se você fosse a Dona Neide e tivesse de conferir qual das opções preencheria corretamente os vazios deixados, qual seria? Utilize os ladrilhos que você confeccionou e justifique sua resposta.

Resposta comentada

Construindo o ladrilhamento, você provavelmente percebeu que, utilizando somente polígonos dodecagonais, é impossível o revestimento, uma vez que, por causa dos espaços formados entre os dodecágonos, faz-se necessária a combinação deles com outro tipo de polígono. Assim, a opção (A) é a única quepreenche esses espaços e atende às três condições de bom comportamento, tornando possível esse ladrilhamento semirregular.

Vamos agora fazer experimentos, a partir de uma malha de triângulos equiláteros, de modo a descobrir alguns ladrilhamentos semirregulares que fazem uso de hexágonos.

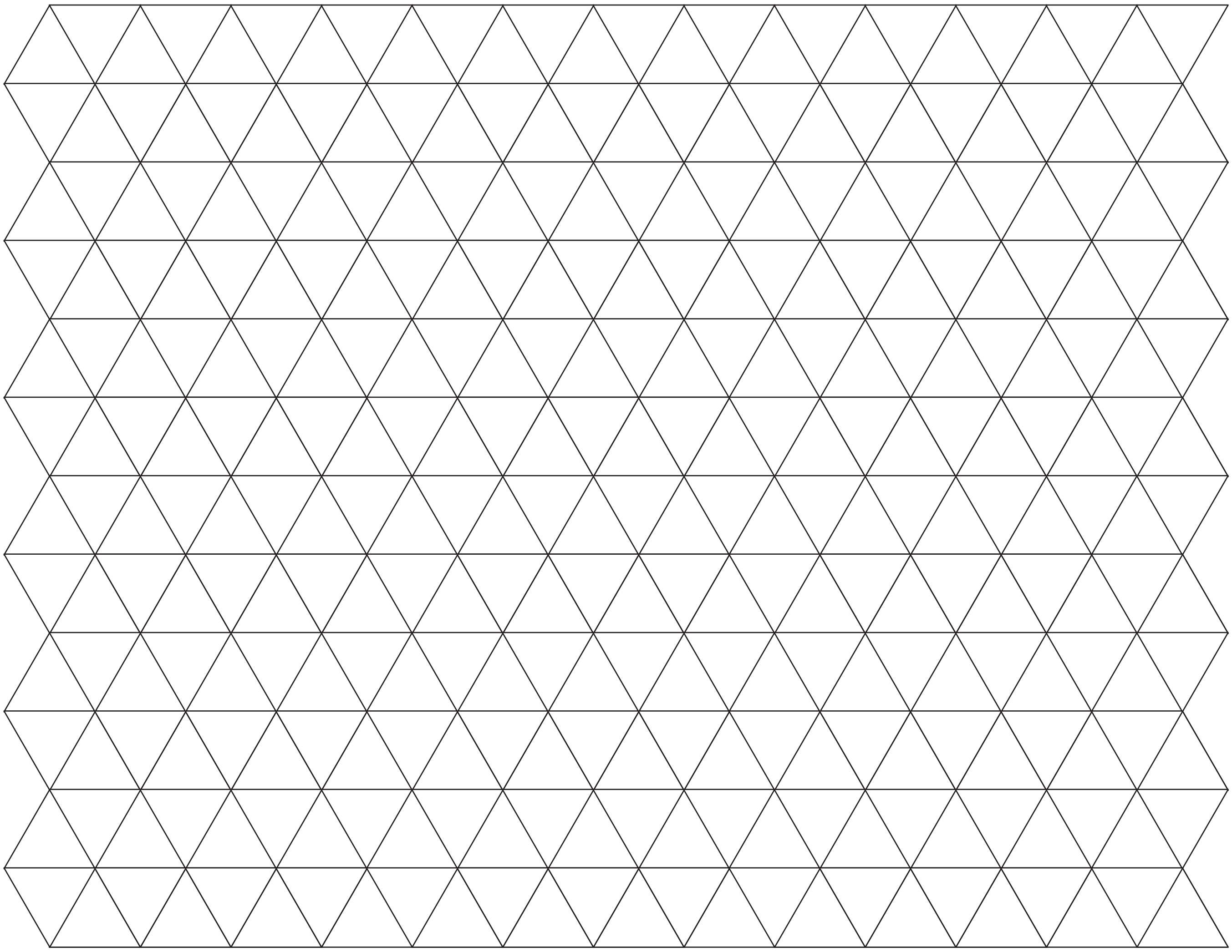
Atividade 6 Ladrilhando com o pincel

Observe o ladrilhamento regular da figura a seguir. Identifique grupos de ladrilhos triangulares que formam um hexágono regular e pinte-os, com lápis de cor, de tal maneira que os hexágonos coloridos deixem espaços vazios no ladrilhamento. Pinte estes espaços de forma que o resultado final seja um ladrilhamento semirregular.Depois construa este ladrilhamento, a partir de ladrilhos de cartões, isto é, manufaturados.

Resposta comentada

Há várias maneiras de colorir a malha de modo a formar ladrilhos no formato de hexágonos regulares. Uma dessas maneiras dará origem a um ladrilhamento semirregular, o qual apresenta, em torno de cada vértice, a seguinte sequência cíclica de ladrilhos: hexágono-triângulo-hexágono-triângulo.

Outros ladrilhamentos surgirão, porém eles não se classificam como regulares ou semirregulares, pois não mantêm a mesma sequência cíclica de ladrilhos em torno de cada um de seus vértices, o que quebra a terceira condição de bom comportamento.



Multimídia

Já parou para pensar como seria a sua aula, se você aplicasse um pouco do que vimos até aqui? O que você acha de dividir suas ideias com professores do Brasil inteiro? No portal do professor, você pode encontrar inúmeras propostas de aulas e ainda pode contribuir com todo seu conhecimento e criatividade.

Assim como fez a professora Aline Araújo de Souza Pereira, da Universidade de Brasília, quando escreveu: *Mosaicos – Recobrindo o plano com o uso de polígonos*. “Só para você ter uma ideia, essa aula já teve mais de 300 acessos”. Ficou curioso? Então não perca tempo e acesse o link da aula:

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/showLesson.action?lessonId=270>.

5. Fazendo um catálogo de ladrilhamentos bem-comportados

Podemos fazer um catálogo dos ladrilhamentos regulares e semirregulares seguindo uma forma especial de classificação.

Para catalogar ou classificar um tipo de vértice de um ladrilhamento, damos uma volta completa em torno deste vértice, no sentido anti-horário ou horário. Anotamos sequencialmente o número de lados dos polígonos regulares que se agrupam em torno do vértice. Por exemplo, um vértice $(4,8,8)$ é um vértice que tem em torno de si, um quadrado, um octógono e um outro octógono, nesta ordem, quando é feito em torno deste vértice um percurso tanto no sentido horário como no anti-horário.

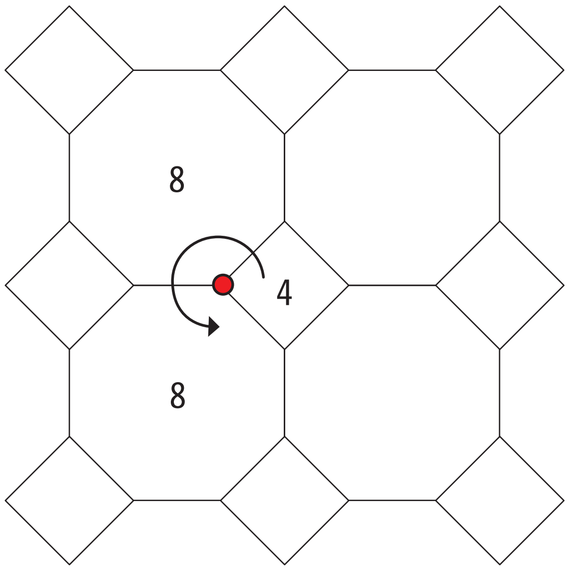


Figura 7: Classificação do vértice $(4,8,8)$, percorrendo o sentido anti-horário.

Esse vértice também pode ser classificado como tipo $(8,8,4)$, ou tipo $(8,4,8)$, dependendo de qual ladrilho anotamos primeiro ou ainda do sentido de percurso em torno do vértice, se horário ou anti-horário. Veja a figura a seguir:

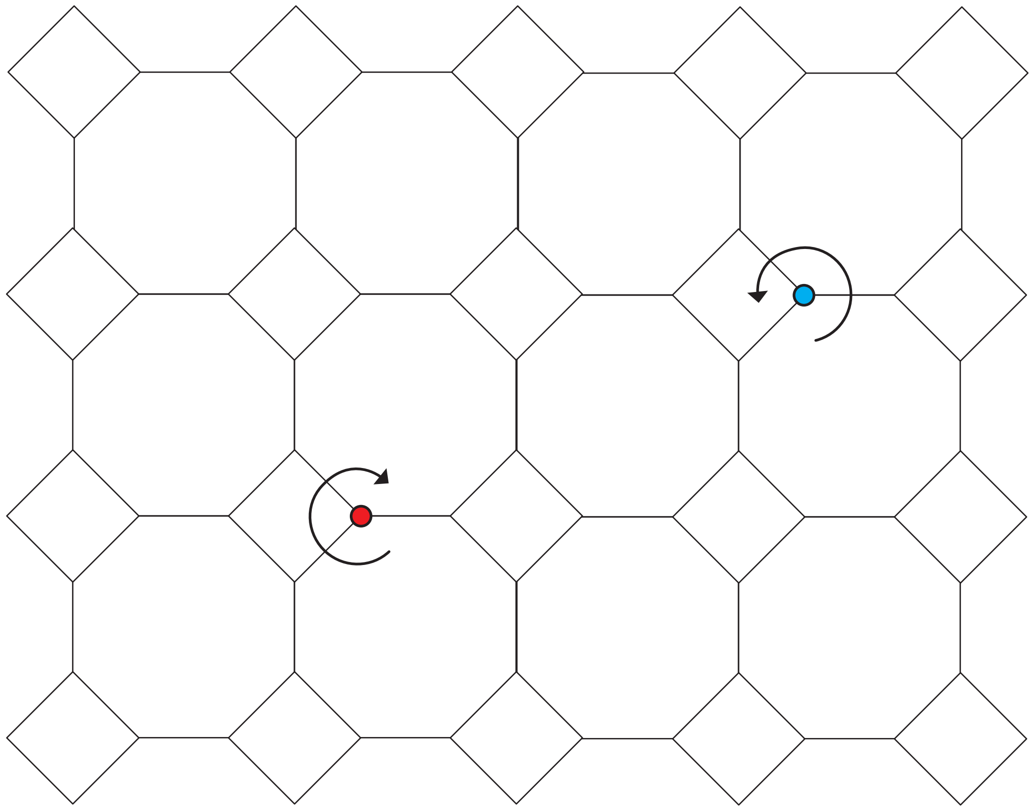
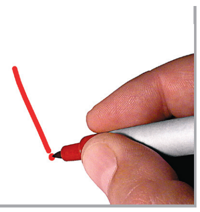


Figura 8: O vértice destacado em azul é do tipo $(8,8,4)$, pois ao realizarmos um percurso circular em torno dele, no sentido anti-horário como indicado, encontramos a sequência de polígonos em torno dele: octógono, octógono e quadrado. Já o vértice em vermelho, que também é do tipo $(8,8,4)$, pode ainda ser classificado como $(8,4,8)$ se fizermos um percurso circular em torno dele no sentido horário, tal como indicado na figura.

Quando todos os vértices de um ladrilhamento são de um mesmo tipo, temos um ladrilhamento regular. Neste caso, diremos que o padrão do ladrilhamento é o tipo de cada um de seus vértices.

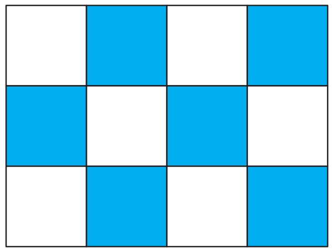
O tipo do vértice é considerado sempre o mesmo, independentemente do sentido de percurso que fazemos em torno dele, ou ainda de qual polígono em torno dele iniciamos o percurso. Por exemplo, vértices dos tipos $(4,8,4)$, $(8,8,4)$ e $(4,8,8)$ são considerados como sendo do mesmo tipo.



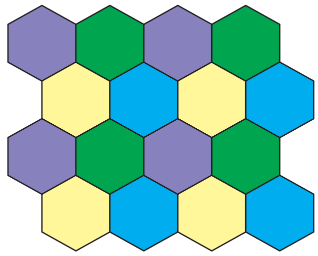
Adam Ciesielski / SXC

Desta forma, por exemplo, os ladrilhamentos a seguir podem ser assim catalogados:

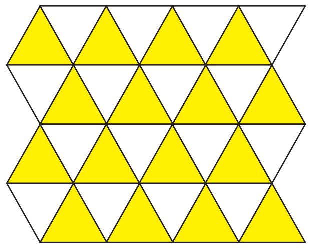
- Ladrilhamento de padrão $(4,4,4,4)$, ou seja, em torno de cada vértice temos quadrado, quadrado, quadrado e quadrado.



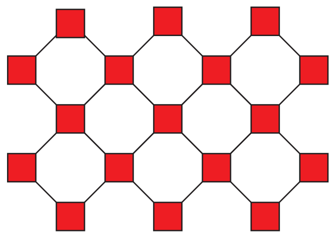
- Ladrilhamento de padrão $(3,3,3,3,3,3)$, ou seja, em torno de cada vértice temos 6 triângulos equiláteros.



- Ladrilhamento de padrão $(6,6,6)$, ou seja, em torno de cada vértice temos 3 hexágonos regulares.



- Ladrilhamento de padrão $(4,8,8)$, ou $(8,8,4)$, ou ainda $(8,4,8)$, ou seja, em torno de cada vértice encontramos um quadrado e 2 octógonos regulares. Este é um ladrilhamento de um mural chinês.



Atividade 7 Experiência das Arábias

Esta é uma tarefa que vai levar tempo e fazer você se sentir um ladrilheiro de Alhambra! Não deixe de fazê-la, pois é fundamental para você concluir todas as etapas de trabalho propostas neste desafio e para vivenciar uma experiência rica que pode ser facilmente reproduzida em sala de aula com seus alunos. Então vamos lá, por partes.

a ▸ Faça um catálogo de todos os ladrilhamentos regulares e semirregulares que puder encontrar, manuseando ladrilhos. Este experimento pode durar algumas horas.

b ▸ Verifique experimentalmente que é possível a construção de um ladrilhamento $(3,6,3,6)$, mas que é impossível construir um ladrilhamento de padrão $(3,3,6,6)$. Uma dica para realizar essa tarefa é utilizar o ladrilhamento de triângulos equiláteros da atividade 6.

c ▸ Verifique experimentalmente que é possível a construção de um vértice do tipo $(3,3,4,12)$, mas que é impossível construir um ladrilhamento de padrão $(3,3,4,12)$.

Resposta comentada

Em um ladrilhamento que atenda às três condições de bom comportamento, a sequência dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma, em ambos os sentidos, e é o que acontece com o exemplo $(3,6,3,6)$.

Apesar de ser possível construir um vértice do tipo $(3,3,6,6)$, é impossível manter em um ladrilhamento todos os vértices com este mesmo tipo. Sendo assim, para este tipo de vértice, a terceira condição de bom comportamento não é atendida. É possível construir um ladrilhamento usando triângulos equiláteros, quadrados e dodecágonos regulares, mas a distribuição de ladrilhos ao redor de cada vértice não será sempre a mesma.

Conclusão

A busca para desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes no ensino da Matemática configura-se um dos maiores desafios enfrentados por educadores, nos dias atuais.

Na maioria das vezes, o livro didático é o recurso quase exclusivamente adotado em sala de aula.

Na intenção de enfrentar essa realidade, muitos educadores buscam aprofundar seus conhecimentos com o objetivo de utilizar novas abordagens em sua prática docente. Porém, inovar não é uma tarefa fácil, e conteúdos matemáticos não podem ser tratados como algo definitivo e estático.

Nesse contexto, o estudo da Geometria é determinante para a aprendizagem da Matemática, pois propicia a compreensão e a representação, de forma organizada, do mundo em que vivemos.

A confecção de um material de apoio para o uso da análise geométrica contribui para a construção de um conhecimento pleno, uma vez que a experimentação proposta estimula a investigação, exploração e interpretação de procedimentos e conceitos matemáticos.

A confecção dos ladrilhos a partir dos moldes, bem como a construção dos variados ladrilhamentos, levam-nos a questionar nossas próprias convicções e a transformar um problema em uma oportunidade de repensar o conhecimento.

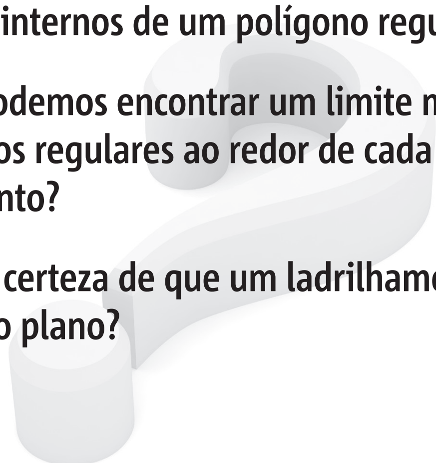
A atividade experimental, como vimos, nos permite o desenvolvimento da capacidade de observação de diversas formas de raciocínio, além da argumentação e validação de condições definidas. Essas práticas levam ao exercício da análise e da reflexão de uma forma geral.

Resumo

- Vimos, neste desafio, que podemos construir três padrões de ladrilhamento, formados com polígonos regulares de um único tipo;
- Estes são os ladrilhamentos: por triângulos equiláteros, por quadrados e por hexágonos regulares;
- Constatamos ainda que é impossível ladrilhar um plano usando apenas pentágonos regulares, pois este ladrilhamento não atende às três regras de comportamento;
- Os ladrilhamentos semirregulares, em número de oito, podem ser descobertos experimentalmente;
- Os regulares são os de padrões $(3,3,3,3,3,3)$; $(4,4,4,4)$; $(6,6,6)$;
- Além disto, construímos e analisamos, segundo as condições de bom comportamento, os ladrilhamentos semirregulares com os seguintes padrões: $(8,8,4)$, $(12,12,3)$ e $(3,6,3,6)$;
- Existem ainda outros cinco padrões de ladrilhamentos semirregulares que podem ser descobertos experimentalmente.

CICLO II
DO DESAFIO GEOMÉTRICO

- Existe relação entre um ladrilhamento bem-comportado e os ângulos internos de um polígono regular?
- Será que podemos encontrar um limite máximo e mínimo de polígonos regulares ao redor de cada vértice de um ladrilhamento?
- Como ter a certeza de que um ladrilhamento pode se expandir no plano?



Svilen Milev / SXC

1. Música para músicos? Não...


Vangelis Thomaidis / SXC


Vangelis Thomaidis / SXC


Duncan Hopkin / SXC


Miriam Lewis / SXC


Thomas Ricks / SXC

Ah, o jazz... O som das cordas, das teclas do piano suavemente marteladas, das gargantas e vozes afinadas, dos diálogos entre saxofones e trompetes... É difícil ficarmos alheios à emoção e vitalidade presentes na obra de grandes gênios como Charlie Parker (1920-1955) e Ray Charles (1930-2004), merecidamente imortalizados por Hollywood nos ótimos filmes “Bird” (1988, Clint Eastwood) e “Ray” (2004, Taylor Hackford). Quando a música nos toca, quando os músicos fazem sua mensagem e emoção chegarem até nós e nossa realidade, saltando por sobre as distâncias do tempo e da língua, estamos diante da mais pura magia, não é verdade? Pois esse mesmo jazz, gênero musical surgido nos Estados Unidos no começo do século XX, gerou várias vertentes ao longo de sua história, algumas delas tão herméticas e pouco preocupadas com seu próprio público ouvinte, que suas composições eram comumente descritas como “música para músicos”.

Muitos matemáticos enfatizam, ao longo de suas carreiras, a importância de se provar teoremas, de se perseguir demonstrações que desafiam o homem há séculos ou de se desenvolver teorias tão complexas que parecem enredo de filme de ficção científica. Essa ênfase não deixa de soar como outra espécie de “música para músicos”, que ressalta a “ciência pela ciência” ou a “arte pela arte”, em que a Matemática pode parecer distanciada de nossa realidade mais cotidiana, de aplicações mais concretas, mais “pé-no-chão”, parecendo servir tão somente a si mesma.

No entanto, assim como o jazz não precisa ser um estilo impenetrável, capaz de ser apreciado só por músicos, a Matemática não é circunscrita a meios acadêmicos específicos, descolada do cidadão comum, do mundo comum, do dia a dia, enfim, que permeia a nossa sala de aula. Cabe a nós, portanto, ressaltar a importância de contextualizarmos o ensino da Matemática, ou seja, de associá-lo, sempre que possível, ao uso de situações e objetos familiares aos alunos.


Jesper Baerentzen / SXC

Você já se deu conta de que a geometria está sempre presente em nosso dia a dia, mesmo quando não lidamos diretamente com a Matemática?

Quando fazemos algo simples como observar as formas dos objetos, com suas regularidades ou irregularidades, estamos entrando sem perceber no mundo da geometria, e é aí que vemos como, de fato, ela está por toda parte. Um conhecimento básico de geometria serve para nos orientar, estimar distâncias, fazer medidas, relacionando as ideias geométricas com números e proporções.


Emiliano Hernandez / SXC

Trine de Florie / SXC

Cabe a nós, professores, analisar os objetos que fazem parte de nosso cotidiano, particularmente o de nossos alunos, para ensinar, com instrumentos tão simples e corriqueiros quanto possível, as diversas possibilidades de aplicação desta área da matemática, como fizemos com os ladrilhos que construímos no Ciclo 1. Uma das principais metas desse desafio é dar exemplos a você, professor, de maneiras como a matemática pode ser útil para compreender, explicar, descrever e predizer aspectos do mundo real. Então, estamos de acordo que a linguagem matemática pode e deve ser aplicada nos diversos problemas que enfrentamos em nosso cotidiano?

Certo, certo, mestre... Sabemos que não é uma tarefa fácil estimular nossos alunos a enfrentar desafios matemáticos. No entanto, pode ser muito prazeroso caminhar com eles de forma criativa, relacionando observações do mundo real com conceitos que desenvolvemos em cada aula. O Ciclo 1 ajudou-nos a articular todas essas questões. Entre pentágonos, triângulos, dodecágonos etc., descobrimos diferentes combinações que podem ser feitas com os polígonos para a construção dos ladrilhamentos, e, assim, começamos a desvendar o segredo dos ladrilheiros de Alhambra. Viu como conseguimos adicionar uma dimensão mágica ao nosso objeto de estudo, impedindo-o de se tornar enfadonho ou abstrato demais?

Yuriy Artemenko / SXC

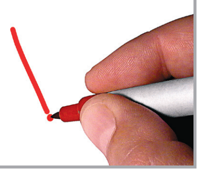
Figura 1: Arte e Geometria... Será possível reunir essas áreas e ainda aprender Matemática de maneira mágica?

Mas não paramos por aí... Mergulhamos nesse universo alhambrês, associando a arte à geometria, ao fazermos uso do que chamamos de “regras de bom comportamento”. E mais: definimos diferentes padrões de ladrilhamento! No entanto, para completarmos a construção desse conhecimento, devemos avançar no desenvolvimento da linguagem matemática, em todas as suas implicações.

Para começarmos uma nova etapa de nosso estudo, e irmos ainda mais fundo na geometria que há por trás da beleza de Alhambra, é preciso que você não tenha dúvidas quanto aos padrões de ladrilhamento que estudamos no Ciclo 1. Você ainda se lembra do que são ladrilhamentos bem-comportados, regulares e semirregulares?

Calma... A próxima atividade vai lhe ajudar a relembrar!

Se julgar necessário, volte à seção *"Você sabe o que significa um ladrilhamento bem-comportado?"*, do Ciclo 1, e refresque sua memória sobre os padrões de ladrilhamento regular e semirregular que construímos.

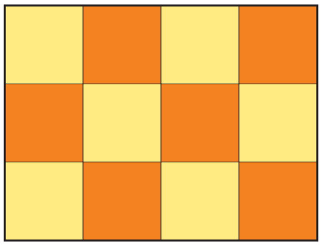


Benjamin Earwicker – Adam Ciesielski / SXC

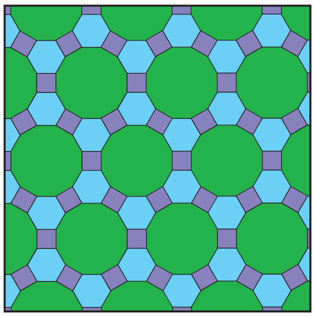
Atividade 1 — De olho no vértice

Observe os ladrilhamentos "bem-comportados" a seguir e classifique-os quanto aos seus padrões de construção, justificando sua resposta.

A



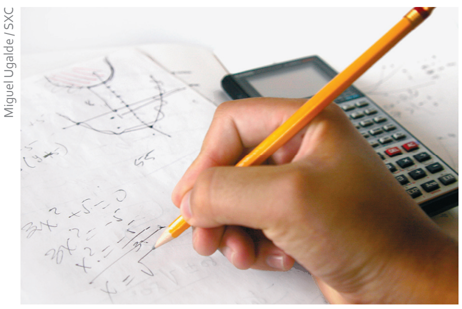
B



Resposta comentada

O ladrilhamento da figura A é de padrão $(4,4,4,4)$, já que dando uma volta completa em torno de cada vértice, tanto no sentido anti-horário como no horário, identificamos uma sequência de quatro quadrados. Usando esse mesmo raciocínio, podemos classificar o ladrilhamento da figura B como sendo de padrão $(4,6,12)$. Esse mesmo ladrilhamento ainda pode ser classificado como $(6,12,4)$, $(12,4,6)$, $(12,6,4)$, $(6,4,12)$ ou $(4,12,6)$, dependendo do sentido de percurso em torno de cada um de seus vértices e do primeiro polígono a ser considerado em cada um desses percursos. Tudo entendido? Então, podemos dar prosseguimento aos nossos estudos.

2. Ângulos, dobraduras e deduções...



Miguel Ugalde / SXC

Como sabemos, a geometria é um campo fértil para o desenvolvimento de nossa capacidade de generalizar, reconhecer padrões e abstrair, e esse é um dos principais objetivos associados ao estudo da matemática.

Neste segundo Ciclo de nosso desafio, você será estimulado a pensar geometricamente enquanto elabora e valida procedimentos, demonstra formulações, compara resultados e formula hipóteses a partir de comparações com os resultados obtidos por meio das atividades propostas no Ciclo 1.

Vamos entender, por meio de ferramentas matemáticas, por que somente algumas combinações de polígonos atendem às regras de bom comportamento estabelecidas para a criação de nossos ladrilhamentos. Vamos utilizar essas ferramentas de forma a atingir níveis cada vez mais complexos de construções geométricas.

Mas vamos dar um passo de cada vez, começando por retomar alguns pontos básicos do saber geométrico para que possamos avançar para níveis mais complexos.

A primeira investigação que propomos a você é a seguinte: como fazemos para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados?

Saiba Mais **Polígono convexo**

Você se lembra do que caracteriza um polígono convexo?

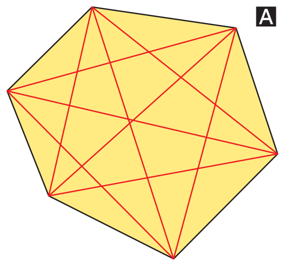
Não? Então vamos refrescar a memória:

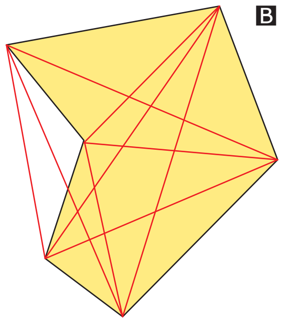
A figura A representa um polígono convexo porque, em seu interior, estão contidas todas as suas diagonais.

Já na figura B, notamos que duas das diagonais do polígono não estão totalmente contidas em seu interior, ou seja, na área delimitada por seus lados. Nesse caso, tal polígono é chamado de não-convexo.

Para que um polígono seja considerado não-convexo, basta que apenas uma de suas diagonais "pule a cerca", ou seja, não esteja completamente confinada ao interior do polígono.

Além disso, vale lembrar da seguinte regra importante: todo e qualquer polígono, cujos ângulos internos sejam menores que 180º, será um polígono convexo.


A


B

Verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a $180°$ é um assunto que merece uma recapitulação com alunos de todos os níveis, pois decorre de dois fatos importantes dentro do estudo da geometria:

1. Dado um ponto P, não contido em uma reta r, teremos sempre uma única reta paralela a r (uma reta s) passando pelo ponto P.

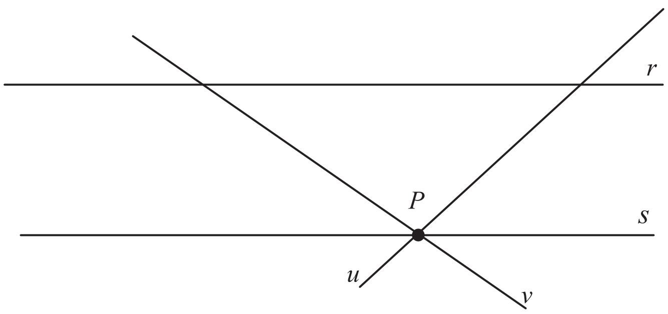


Figura 2: A reta s é a única reta, paralela à reta r, que passa pelo ponto P. As retas u e v são transversais às retas r e s.

2. Dadas duas retas paralelas e uma reta transversal a ambas, teremos o que chamamos de ângulos alternos internos, neste caso, **congruentes**.

Quando definimos que dois ou mais ângulos são **congruentes**, estamos dizendo que eles na verdade têm a mesma medida.

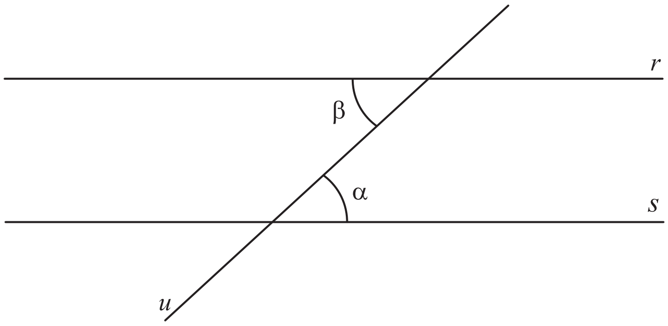
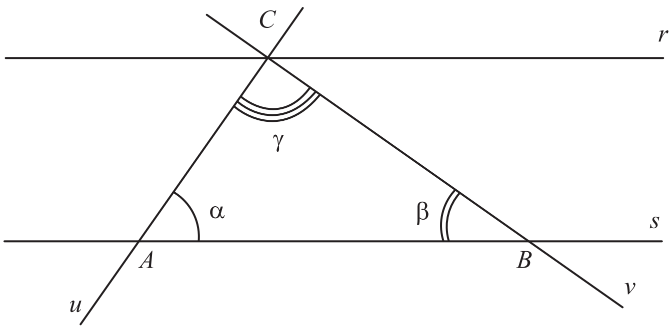
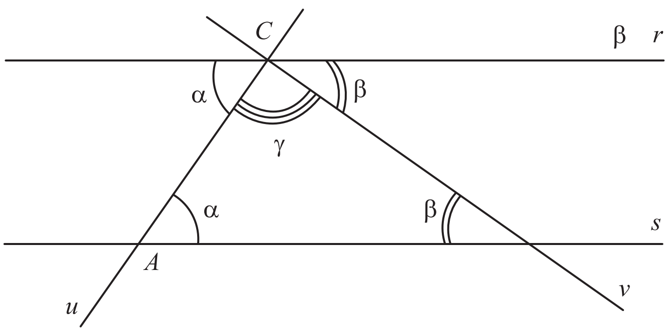


Figura 3: Os ângulos alternos internos α e β são geometricamente iguais.

Agora, observe a figura do triângulo ABC, de ângulos internos α, β e γ. Sendo s a reta prolongamento da base AB, pelo vértice C passa uma única reta r paralela à reta s. Os outros dois lados (AC e BC) do triângulo encontram-se contidos nas duas retas u e v, transversais às retas paralelas r e s.



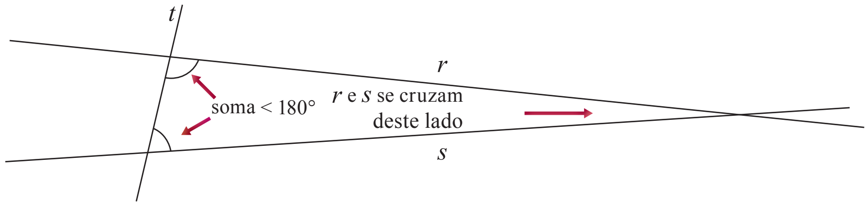
As retas u e v, ao encontrarem as retas paralelas r e s, definem os pares de ângulos alternos internos α (à esquerda) e β (à direita). Observando os três ângulos que aparecem no topo, em torno do vértice C, podemos ver que $\alpha+\beta+\gamma=180°$, e então é simples deduzir que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é $180°$.

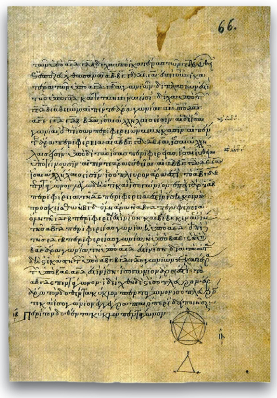


Multimídia

Uma das primeiras pessoas a deduzir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º foi Euclides de Alexandria, um dos maiores matemáticos gregos da Antiguidade. Suas afirmações sobre as propriedades dos objetos geométricos, apesar de não possuírem prova, são consideradas autoevidentes. Os cinco pressupostos de Euclides são os seguintes:

1 ▹ Por dois pontos distintos dados, podemos traçar um único segmento de reta;
2 ▹ Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em ambos os sentidos;
3 ▹ Dados dois pontos distintos, podemos construir uma circunferência que passe por um desses pontos e que tenha o outro ponto como centro;
4 ▹ Todos os ângulos retos são congruentes entre si;
5 ▹ Se uma reta transversal a duas outras retas cria ângulos interiores, de um mesmo lado, com soma menor do que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, cruzam-se naquele lado no qual a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos.





Esse último pressuposto é mais difícil de ser entendido. A sua versão mais moderna diz que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

Chamamos este tipo de geometria plana, que usamos mais comumente em nossa vida diária, de geometria euclidiana.

Se você quiser aprofundar seus conhecimentos de história da Geometria, leia o artigo do Observatório Nacional disponível no site

Página de um manuscrito grego do século XI, "Elementos", um conjunto de livros desenvolvido por Euclides e considerado um dos mais importantes da história da Matemática.

<http-_upload.wikimedia.org_wikipedia_commons_9_9e_Euklid> <http://www.on.br/site_edu_dist_2006/pdf/modulo3/a_geometria_euclidiana.pdf>

Com frequência, nossos alunos apresentam resistência a demonstrações de natureza puramente matemática. Embora, muitas vezes, seja fundamental o domínio desse tipo de conteúdo, quase sempre podemos fazer uso de meios divertidos e bastante eficazes para chegarmos a algumas conclusões matemáticas. Quer ver?

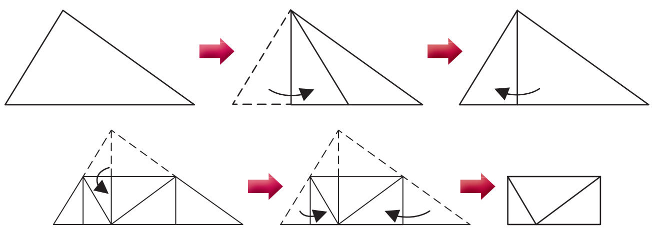
A dedução da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer pode ser explorada, por exemplo, por meio de um exercício simples de dobradura de papel. Veja o boxe "Aprendendo com dobraduras" e crie uma maneira nova de desenvolver esse tema com seus alunos.

Janela Pedagógica — Aprendendo com dobraduras

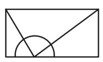
Normalmente, em nossas salas de aula, as atividades são utilizadas apenas como forma de verificação do conhecimento adquirido. Para mudar e expandir essa realidade, você pode utilizar meios simples que levem seus alunos a entender, construir e estabelecer as conexões desejadas.

Seguindo as instruções a seguir, você verá que a dedução da soma dos ângulos internos de um triângulo pode se transformar em um momento prazeroso de aprendizagem. Então, mãos à obra!

Recorte um triângulo qualquer de papel e trabalhe com seus alunos a sequência de dobraduras indicada nas ilustrações abaixo:

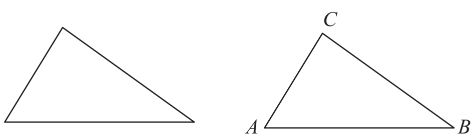


Como eles poderão ver, ao final da sequência de dobraduras, os ângulos internos do triângulo se aglomeram em torno de um ponto H, formando um ângulo raso, ou seja, de $180°$ ($\hat{H} = 180°$), conforme a figura abaixo.



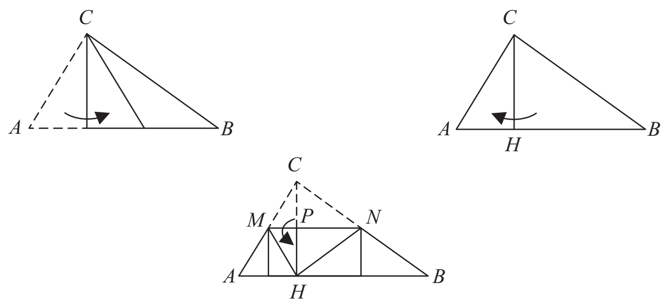
Vamos agora entender, de uma maneira matemática, como isso acontece?

Inicialmente, desenhe em um papel um triângulo escaleno (que possui três lados diferentes) e recorte-o. Posicione o papel de modo que a base do triângulo seja o seu maior lado, como indicado na figura. Vamos identificar os vértices do triângulo por A, B e C, sendo AB a sua base.



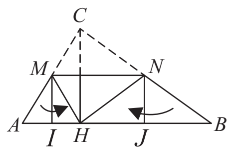
Ao dobrarmos o papel através de C, de tal forma a levar o vértice A sobre o segmento AB, e desdobrarmos o papel em seguida, determinamos a altura CH do triângulo ABC.

Em seguida, por uma segunda dobra, levamos o vértice C sobre o ponto H. Os pontos M e N, indicados na figura a seguir, são os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos entender por quê?

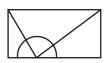


Chamemos de M, N e P os pontos que essa dobra determina sobre os lados AC, BC e sobre a altura CH, respectivamente. Desse modo, temos que $CP = PH$, $CN = NH$, o que nos mostra que o triângulo CNH é isósceles de base CH e que o segmento NP é mediana e, portanto, altura também. Continuando com nossa dedução geométrica, vemos que MN é paralelo a AB. Ora, como P é ponto médio de CH, ao fazermos uso do Teorema de Tales, concluímos que M é ponto médio de AC e que N é ponto médio de BC. Dessa argumentação decorre que os triângulos BNH e AMH são isósceles de bases BH e AH, respectivamente.

Sejam MI e NJ alturas dos triângulos AMH e BNH, respectivamente. O triângulo AMI é, portanto, congruente ao triângulo HMI, do mesmo modo que o triângulo HNJ é congruente ao triângulo BNJ.



Logo, dobrando-se os triângulos AMH e BNH ao longo de suas alturas, obtemos que $\hat{A} = A\hat{H}M$ e $\hat{B} = B\hat{H}N$. Como $\hat{C} = M\hat{H}N$, segue-se que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.



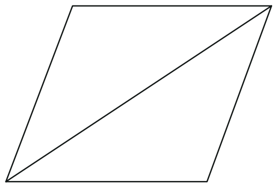
Os três ângulos internos do triângulo ABC agora se posicionam em torno do ponto H, e visualmente podemos notar que a soma deles é de fato $180°$. Perceba que, com esta atividade, você pode trabalhar vários pontos importantes da geometria euclidiana plana com seus alunos. Por exemplo, congruência de triângulos ou, quem sabe, o teorema fundamental das proporções (também chamado Teorema de Tales).

Partindo do princípio de que a soma dos ângulos internos de um triângulo já é conhecida, e que ela é igual a $180°$, podemos deduzir uma expressão que nos forneça a soma dos ângulos internos dos demais polígonos convexos.

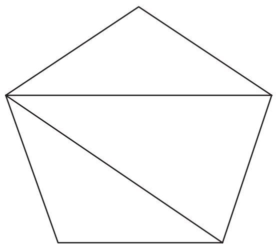
Para isso, basta encontrarmos triângulos dentro de cada polígono.

Quer ver como?

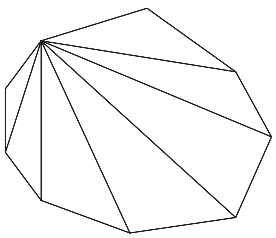
Em um polígono de quatro lados, traçamos uma diagonal, a partir de um vértice qualquer, e formamos dois triângulos. A soma dos ângulos internos de cada triângulo é igual a $180°$, e a soma dos ângulos internos do quadrilátero será igual à soma dos ângulos internos dos dois triângulos, ou seja, $180° + 180° = 360°$.



Em um pentágono, por exemplo, podemos traçar duas diagonais, que formarão três triângulos, cuja soma dos ângulos internos corresponderá a $180° + 180° + 180° = 540°$, ou seja, o mesmo que a soma dos ângulos internos de um pentágono.



Para descobrir a soma dos ângulos internos de um polígono de 9 lados, traçamos, a partir de qualquer vértice, 6 diagonais que dividirão esse mesmo polígono em 7 triângulos. Desse modo, a soma dos ângulos internos do eneágono será igual a $7 \times 180° = 1.260°$.



Com isso, estabelece-se uma relação entre a soma dos ângulos internos dos triângulos, a soma dos ângulos internos dos polígonos, e o número de lados dos polígonos. Isso é possível, pois a diferença entre o número de triângulos formados e o número de lados dos polígonos é sempre 2. Então, considerando-se um polígono convexo de n lados, a soma de todos os ângulos internos dos $n-2$ triângulos assim definidos coincidirá com a soma dos ângulos internos do polígono, sendo, portanto, igual a

$$(n-2) \cdot 180°$$

Agora que já deduzimos a expressão da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, que tal fazermos a atividade a seguir?

Atividade 2 **Soma dos ângulos internos em xeque.**

Agora que você já entendeu como se determina a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, complete a tabela a seguir:

n (número de lados do polígono)	Soma dos ângulos internos $S_n = (n-2)\cdot 180°$
3	$S_3 = 180°$
4	$S_4 = 360°$
5	$S_5 = 540°$
6	
7	
8	
9	$S_9 = 1260°$
10	
11	
12	
15	
20	

Resposta comentada

Para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, temos primeiro que traçar $n-3$ diagonais, partindo de um vértice qualquer do polígono. As $n-3$ diagonais traçadas subdividem o polígono em $n-2$ triângulos, cuja soma dos ângulos internos é igual a $(n-2)\cdot 180°$, isto é, a soma dos ângulos internos do polígono.

Em um polígono de 7 lados, por exemplo, podemos traçar 4 diagonais e formar 5 triângulos. Como vimos anteriormente, a soma dos ângulos internos desse polígono corresponderá à soma dos ângulos internos desses 5 triângulos. Assim, temos $S_7 = (7-2)\cdot 180°$; e portanto $S_7 = 5\cdot 180° = 900°$.

Para preencher toda a tabela, é só seguir o mesmo raciocínio. Fácil, não?

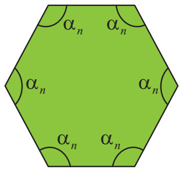
Você notou que um dos objetivos desta atividade é estimular você na elaboração de um procedimento fácil e articulado para demonstrar a formulação apresentada?

Que tal mostrar para seus alunos que a soma dos ângulos internos de um quadrado é, na verdade, igual à soma dos ângulos internos de dois triângulos? Seria interessante, não acha? É bem simples, e, se quiser, você ainda tem à sua disposição o material do Ciclo 1. Então, ladrilhos triangulares na mesa e uma tabela no quadro negro... Use e abuse de sua criatividade e didática!

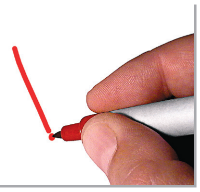
Na Atividade 2, você pôde verificar que, a partir de um vértice qualquer de um polígono convexo de n lados, com $n \geq 4$, traçamos $n-3$ diagonais que subdividiram a região poligonal em $n-2$ triângulos.

Se um polígono convexo com n lados for regular, então ele terá n ângulos internos congruentes entre si, cuja soma será igual a $(n-2)\cdot 180°$. Assim sendo, cada ângulo interno α_n de um polígono regular de n lados será dado pela igualdade:

$$\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$



Quando todos os lados de um polígono são iguais e também são iguais os seus ângulos internos, dizemos que ele é um polígono regular.



Adam Ciesielski / SXC

Por exemplo, cada ângulo interno de um pentágono regular mede

$$\alpha_5 = \frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 3\cdot\frac{180°}{5} = 3\cdot 36° = 108°$$

Com base nessa expressão, faremos aqui uma pequena tabela de polígonos regulares e seus ângulos internos.

Tabela 1: Alguns polígonos regulares e seus ângulos internos

polígono regular	n (número de lados)	medida do ângulo interno $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$
triângulo	3	$60°$
quadrado	4	$90°$
pentágono	5	$108°$
hexágono	6	$120°$
heptágono	7	$\approx 128,57°$
octógono	8	$135°$
eneágono	9	$140°$
decágono	10	$144°$
undecágono	11	$\approx 147,27°$
dodecágono	12	$150°$
pentadecágono	15	$156°$
icoságono	20	$162°$

Jonathan Ruchti / SXC

Podemos agora descobrir a medida dos ângulos internos de qualquer polígono regular desenvolvendo a próxima atividade.

Atividade 3 Polígonos regulares e seus ângulos internos

Complete a tabela a seguir com os dados faltantes. Calcule os valores aproximados desses ângulos em graus, minutos e segundos ($1° = 60' = 60$ minutos, $1' = 60'' = 60$ segundos).

polígono regular	n (número de lados)	medida do ângulo interno $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$
decágono	10	$144°$
undecágono	11	$\approx 147{,}27° = 147°16'12''$
tridecágono	13	$\approx 152{,}3° = 152°18'$
tetradecágono	14	
hexadecágono	16	
heptadecágono	17	
octodecágono	18	
eneadecágono	19	
pentacoságono	25	
triacontágono	30	
tetracontágono	40	
pentacontágono	50	

Resposta comentada

O ângulo interno α_n de um polígono regular de n lados é dado por: $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$; logo, para determinar a medida do ângulo interno do tetradecágono, por exemplo, calculamos $\alpha_{14} = \frac{(14-2)\cdot 180°}{14} \approx 154{,}28°$. O valor aproximado desse ângulo em graus, minutos e segundos é dado por $154{,}28° = 154°16'48''$.

O cálculo dos demais ângulos da tabela é realizado do mesmo modo.

3. Ladrilhamentos sob novos ângulos

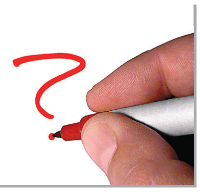
A arte de desenhar pavimentações e padrões é claramente muito antiga e bem desenvolvida. Em contraste, a ciência das pavimentações e padrões, o que para nós significa o estudo das suas propriedades matemáticas, é comparativamente recente e muitas partes deste tema permanecem ainda por explorar.

Shepard e Grunbaum em *Tilings and Patterns* (New York, 1987)

No Ciclo 1, vimos no exemplo de Alhambra que os ladrilhamentos islâmicos são bastante conhecidos por causa de sua beleza e criatividade artística. No entanto, para descobrir a matemática que está por trás dessa arte ainda temos que trilhar uma parte do caminho. Nesse sentido, Shepard e Grunbaum acertaram em cheio, não acha? No Ciclo que iniciamos agora analisaremos tudo que ainda nos resta explorar! Quer saber como?

Bem, começamos essa nova aventura apaixonante quando estudamos e catalogamos os padrões de ladrilhamento regular e semirregular, segundo as condições de bom comportamento. Logo em seguida, e já nesse Ciclo, vimos a relação dos ângulos internos dos polígonos regulares e sua soma. Agora, cabe a nós pensar na seguinte questão:

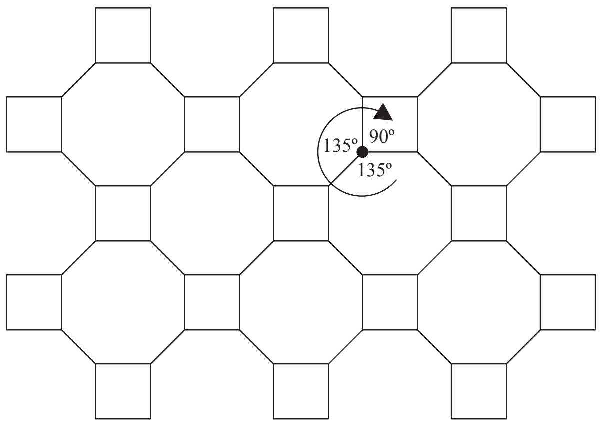
Qual é a relação das condições de bom comportamento com os ângulos internos estudados até agora?



Adam Ciesielski / SXC

A partir desse momento daremos um passo importante no nosso desafio, pois veremos quais são os pressupostos matemáticos que estão por trás dos ladrilhamentos possíveis, ou seja, daqueles que atendem às “regras de bom comportamento”. Essa será a chave para estudarmos e, posteriormente, ensinarmos geometria através da construção dos ladrilhamentos. Então, fique atento!

Em um ladrilhamento regular ou semirregular, a soma dos vários ângulos que se posicionam em torno de cada vértice é o ângulo de uma volta completa, ou seja, $360°$.



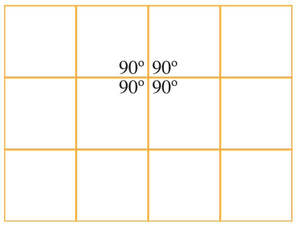
Por exemplo, no ladrilhamento $(8,8,4)$, exemplificado na figura acima, temos dois octógonos regulares e um quadrado em torno de cada vértice. De acordo com a tabela 1, a soma dos ângulos internos desses polígonos é precisamente $360°$:

$$135°+135°+90°=360°$$

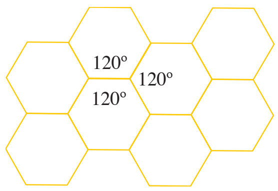
Como sabemos, em um ladrilhamento considerado "bem-comportado", os polígonos que o constituem precisam ser regulares, ou seja, é necessário que cada um deles possua todos os lados e ângulos internos também iguais. Além disso, a interseção entre dois polígonos, quando houver, deve ser sempre um lado ou um vértice, para que não exista sobreposição nem espaços vazios entre eles. Garantidas essas condições, a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice será sempre igual a $360°$.

Retomando alguns ladrilhamentos que vimos no Ciclo 1, podemos agora observar:

- Um ladrilhamento onde usamos apenas quadrados $(4,4,4,4)$ atende às condições de bom comportamento, pois a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice é igual a $4\times 90°=360°$.



- Um ladrilhamento com hexágonos regulares é do tipo $(6,6,6)$, e a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice é $3\times 120°=360°$; portanto, é um outro exemplo de ladrilhamento "bem-comportado".



Até agora, ficou clara a relação das condições de bom comportamento com os ângulos internos? Verifique, fazendo a Atividade 4.

Atividade 4 Volta completa

Utilize a tabela a seguir para resolver as questões propostas:

A Explique, considerando os ângulos internos dos polígonos, por que os ladrilhamentos regulares $(6,6,6)$, $(4,4,4,4)$ e $(3,3,3,3,3,3)$ são classificados como ladrilhamentos “bem-comportado s”.

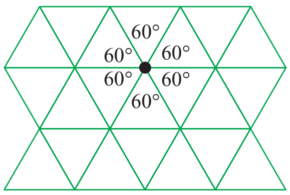
polígono regular	n (número de lados)	medida do ângulo interno $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$
triângulo	3	$60°$
quadrado	4	$90°$
pentágono	5	$108°$
hexágono	6	$120°$
heptágono	7	$\approx 128{,}57°$
octógono	8	$135°$

polígono regular	n (número de lados)	medida do ângulo interno $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$
eneágono	9	$140°$
decágono	10	$144°$
undecágono	11	$\approx 147{,}27°$
dodecágono	12	$150°$
pentadecágono	15	$156°$
icoságono	20	$162°$

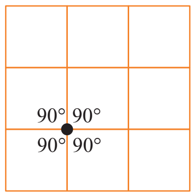
B Em um ladrilhamento regular, é impossível haver apenas pentágonos regulares em torno de um vértice. Por quê?

Resposta comentada

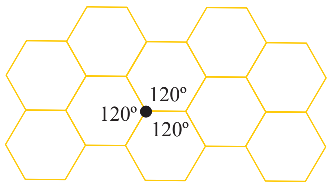
(i)



(ii)

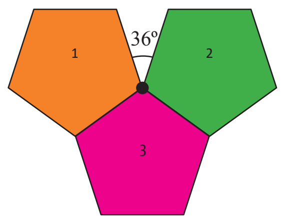


(iii)



A De acordo com o que vimos anteriormente, para demonstrar que os ladrilhamentos regulares $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$ e $(6,6,6)$ são bem-comportados temos que verificar, em cada um deles, que a soma dos ângulos adjacentes a qualquer vértice é sempre $360°$. Consultando a tabela, observamos que a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice, no ladrilhamento $(3,3,3,3,3,3)$, é igual a $6\times 60°$, como está reproduzido na figura (i). Já no ladrilhamento $(4,4,4,4)$, figura (ii), a mesma soma é de $4\times 90°$. Por fim, no ladrilhamento $(6,6,6)$, ilustrado por nossa terceira figura, a soma é dada por $3\times 120°$. Em todos os casos, o resultado da adição dos ângulos internos, em torno de cada vértice, é $360°$.

B Utilizando apenas pentágonos regulares, a construção de um ladrilhamento regular é impossível, pois, ao dispormos três pentágonos regulares em torno de um vértice, perceberemos que a soma dos ângulos internos adjacentes ao vértice é igual a $108°+108°+108°=324°$, deixando um espaço vazio equivalente a um ângulo de $36°$ para completar as condições de um ladrilhamento regular. Nesse caso, ainda, se tentássemos colocar mais de três polígonos ao redor do vértice, iria ocorrer sobreposição entre eles.

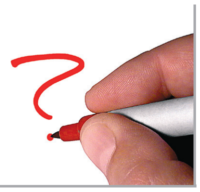


4. Na pista do ladrilhamento


Hvaldez1's / SXC

Até esse momento, você foi incentivado a elaborar procedimentos, demonstrar formulações e a verificar se os resultados atingidos estão de acordo com os conceitos apresentados no Ciclo 1. Vamos continuar a trilhar nosso caminho, trazendo para você uma questão importante no estudo dos ladrilhamentos. Para isso, pense um pouco na atividade que acabamos de realizar. Você percebeu que, em um ladrilhamento regular ou semirregular, a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice deve ser de $360°$ para garantir a segunda condição de bom comportamento, certo? Agora, reflita:

Será que em um ladrilhamento bem-comportado há um número máximo e mínimo de polígonos regulares ao redor de cada vértice?


Adam Ciesielski / SXC

Para respondermos a essa questão, vamos começar pensando em qual seria o número máximo. Para colocar uma grande quantidade de polígonos regulares em torno de um vértice, é melhor que os ângulos internos desses polígonos não tenham medidas muito grandes, caso contrário, a soma desses ângulos rapidamente passará de $360°$.

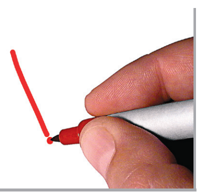
De acordo com a tabela 1, sabemos que o polígono regular de menores ângulos internos é o triângulo equilátero, com três ângulos de $60°$.

Note que $6 \times 60° = 360°$. Assim, podemos ter, no máximo, seis ângulos de $60°$ adjacentes a um vértice, ou seja, seis triângulos equiláteros.

Para pensarmos acerca do número mínimo de polígonos regulares ao redor de cada vértice, o raciocínio é parecido com o que acabamos de estudar. É fácil deduzir que não podemos ter apenas dois polígonos ao redor de um vértice. Isso porque, por maior que seja o número de lados de um polígono regular, por ser convexo, a medida de cada um de seus ângulos internos nunca chegará a $180°$, certo? Assim, não é possível, em um ladrilhamento, a existência de apenas dois polígonos regulares adjacentes a um vértice, e, portanto devemos ter, pelo menos, três polígonos em torno de cada vértice.

A partir dessas considerações, podemos estabelecer uma importante regra que chamaremos de regra delimitadora.

Regra delimitadora: Em torno de cada vértice de um ladrilhamento bem-comportado teremos sempre, no mínimo, três polígonos e, no máximo, seis.


Adam Ciesielski / SXC

Diferentemente do caso do número máximo de polígonos, o caso do número mínimo não define um único ladrilhamento bem-comportado, já que várias combinações de três polígonos regulares em torno de um vértice são possíveis. Por exemplo, podemos ter três hexágonos regulares em torno de cada vértice ou ainda dois octógonos e um quadrado, conforme vimos experimentalmente no Ciclo 1. Em todos os casos, a soma dos ângulos internos adjacentes ao vértice, será igual a $360°$.

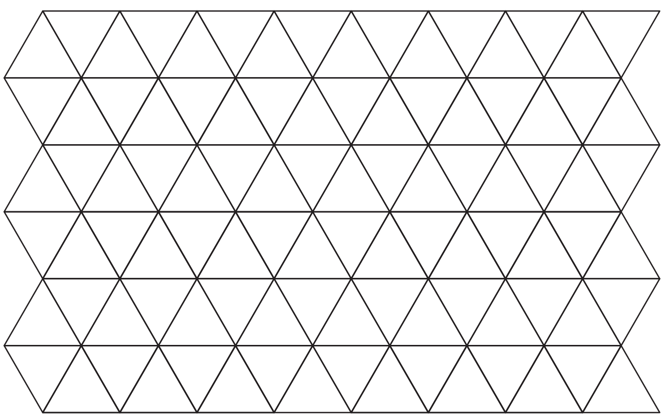
Agora fica fácil percebermos que ladrilhamentos bem-comportados têm sempre um dos seguintes padrões, no que se refere aos tipos de seus vértices: (k,ℓ,m), (k,ℓ,m,n), (k,ℓ,m,n,p), (k,ℓ,m,n,p,q), com um mínimo de três e um máximo de seis polígonos ao redor de cada vértice. Mas, quais são esses polígonos? Isso é o que veremos na próxima seção.

Paul Barker / SXC

5. Quem é quem, no reino da Poligolândia?

Você já sabe que os vértices de um ladrilhamento bem-comportado, isto é, de um ladrilhamento regular ou semirregular, têm todos eles um dos quatro tipos listados: (k,ℓ,m), (k,ℓ,m,n), (k,ℓ,m,n,p), (k,ℓ,m,n,p,q). Agora vamos descobrir quais são os polígonos que compõem esses ladrilhamentos. Vamos começar com uma combinação bem fácil: o ladrilhamento que tem todos os vértices do tipo (k,ℓ,m,n,p,q), ou seja, o ladrilhamento com seis polígonos ao redor de cada vértice.

Partindo do princípio de que o único ladrilhamento que comporta seis polígonos regulares em torno de cada vértice é o ladrilhamento de padrão $(3,3,3,3,3,3)$, descobrimos que o único ladrilhamento de padrão (k,ℓ,m,n,p,q) é aquele que tem seis triângulos equiláteros ao redor de cada vértice. Na verdade, esse é um tipo de ladrilhamento regular, pois todos os polígonos adjacentes a cada vértice são idênticos.



Agora nos resta descobrir quais são os ladrilhamentos que têm vértices de um dos tipos (k,ℓ,m), (k,ℓ,m,n), (k,ℓ,m,n,p). Quais são regulares? Quais são semirregulares? Esse segredo nós vamos começar a desvendar na próxima seção.

Maarten Uilenbroek / SXC

Para descobrir os possíveis padrões de ladrilhamento semirregular existentes, dentre os ladrilhamentos de padrões (k,ℓ,m), (k,ℓ,m,n) e (k,ℓ,m,n,p), adotaremos estratégias que dependerão, em cada caso, do número de polígonos regulares (ladrilhos) em torno de cada vértice. As estratégias foram escolhidas com base na experiência dos autores, por serem as que mais eficazmente dão conta da descoberta dos padrões existentes.

No caso de ladrilhamentos de padrão (k,ℓ,m), dividiremos nosso estudo em dois casos: (a) ladrilhamentos em que ao menos um dos valores k, ℓ ou m é ímpar; (b) ladrilhamentos em que os valores k, ℓ e m são todos pares.

- No caso de ladrilhamentos de padrão (k,ℓ,m,n), o estudo também será dividido em dois casos: (a) ladrilhamentos que fazem uso de triângulos; (b) ladrilhamentos que não fazem uso de triângulos.
- Já com ladrilhamentos de padrão (k,ℓ,m,n,p), nossa investigação começará pela possibilidade (ou impossibilidade) de eles existirem sem nenhum triângulo sequer.

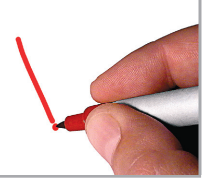
Mas não vamos colocar a carroça (ou os triângulos!) na frente dos bois, certo? Ao final de toda nossa investigação faremos diagramas que reunirão, passo a passo, as estratégias usadas nela.

5.1 Três por vez...

Vamos dar o pontapé inaugural de nossa pesquisa analisando ladrilhamentos bem-comportados de padrões (k,ℓ,m), isto é, com três polígonos regulares em torno de cada vértice.

Uma boa maneira de fazer isso é considerar os diferentes polígonos que poderiam compor esse ladrilhamento. O polígono de menor número de lados é o triângulo, certo? Imagine um ladrilhamento de padrão (k,ℓ,m) que faça uso de ladrilhos triangulares. Então, um dos valores k, ℓ ou m será igual a 3. Como vértices de tipos $(3,a,b)$, $(a,3,b)$, e $(a,b,3)$ são todos equivalentes, vamos considerar o padrão (k,ℓ,m), onde $k=3$.

Lembre-se de que quando falamos em tipo de vértice estamos nos referindo à distribuição dos polígonos ao redor de um vértice. No entanto, quando essa distribuição é a mesma em torno de todos os vértices de um ladrilhamento, o tipo de cada vértice define o padrão do ladrilhamento.


Adam Ciesielski / SXC

5.1.1 Triângulo entre os polígonos

Um ladrilhamento do tipo $(3,\ell,m)$ tem, pelo menos, um triângulo ao redor de cada um de seus vértices, conforme ilustrado a seguir.

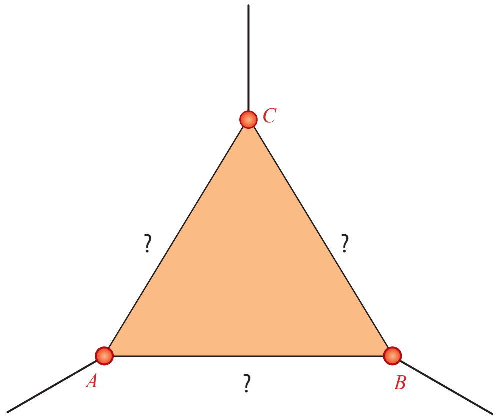


Figura 4: Na figura acima, os vértices A, B e C têm, pelo menos, um triângulo ao redor de cada vértice. Mas, que tipos podem ter os outros dois ladrilhos adjacentes a cada vértice?

Agora observe a próxima figura e faça conosco algumas ponderações:

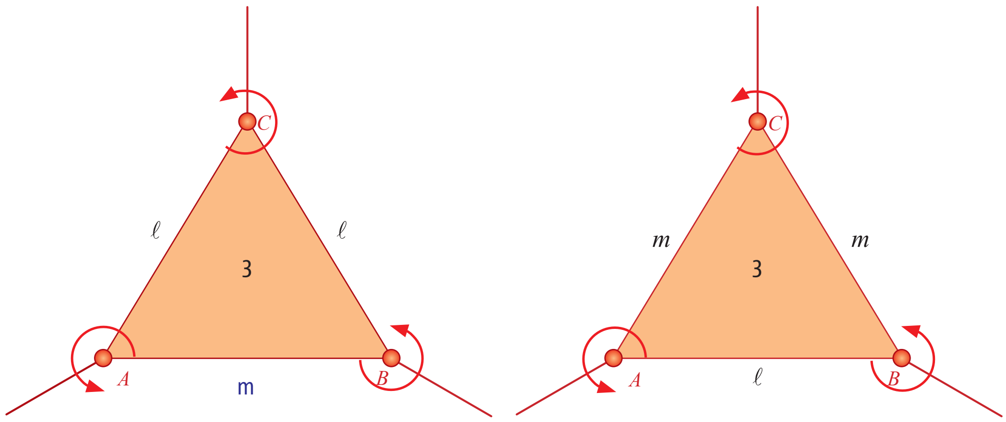


Figura 5: Estamos estudando um ladrilhamento do tipo $(3,\ell,m)$. Seguindo a orientação dada pelas setas, e comparando (a) e (b), observamos que os tipos dos vértices A e B são equivalentes.

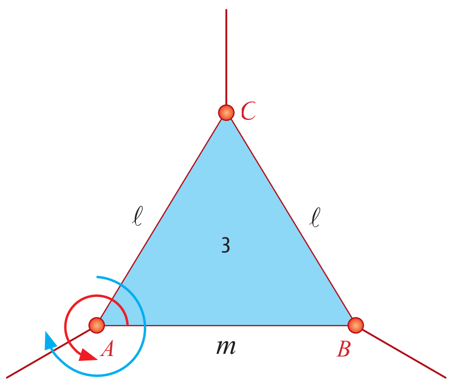
Chamemos de A, B e C os três vértices dos triângulos, representados na Figura 5 em (a) e em (b). Ao redor do vértice A, temos um triângulo, um ℓ-ágono (polígono de lados) regular e um m-ágono (polígono de m lados) regular. Suponhamos que o ℓ-ágono esteja colado ao lado AC (Figura 5 (a)). Para caracterizarmos os vértices como sendo do tipo $(3,\ell,m)$, necessariamente devemos ter um m-ágono colado ao lado AB.

Isto faz com que o vértice A seja do tipo $(3,\ell,m)$ e o vértice B seja do tipo $(3,m,\ell)$, iniciando tal classificação pelo triângulo e realizando um percurso no sentido anti-horário. Ora, esses dois vértices são equivalentes, do mesmo tipo, mas qual deve ser o tipo do vértice C para que o ladrilhamento atenda à terceira condição de bom comportamento, que diz que todos os vértices devem ser de um mesmo tipo? Na Figura 5 (a), o vértice C é do tipo $(3,\ell,\ell)$. Isto significa que a única situação em que os três vértices são equivalentes, em um ladrilhamento do tipo $(3,\ell,m)$, é aquela na qual os três polígonos são iguais e, portanto, $\ell = m$.

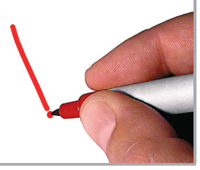
Analogamente, chegaremos à mesma conclusão se levarmos em conta que temos um m-ágono colado ao lado AC, conforme ilustra a Figura 5 (b). Nesse caso, o vértice C é do tipo $(3,m,m)$.

Assim, acabamos de estabelecer a seguinte condição de existência:

Se um ladrilhamento tem um padrão $(3,\ell,m)$, então $\ell = m$, ou seja, tem um padrão da forma $(3,\ell,m)$; logo, não existe nenhum ladrilhamento de padrão $(3,m,m)$ quando $\ell \neq m$.



Ao realizarmos um percurso circular em torno do vértice A, no sentido anti-horário, identificamos esse vértice como sendo do tipo $(3,\ell,m)$. Se o percurso circular for feito no sentido horário, então vemos que o mesmo vértice tem o tipo $(3,m,\ell)$. Por este motivo, em um contexto geral, consideramos como equivalentes vértices dos tipos $(3,\ell,m)$ e $(3,m,\ell)$.



Adam Ciesielski / SXC

Tudo bem até aqui, mas... qual é o polígono regular de m lados (ou ℓ lados) que compõe o ladrilhamento de padrão $(3,\ell,m)$?

A resposta para essa pergunta é fácil.

Tal como estivemos fazendo desde o princípio, vamos sempre indicar por α_m a medida de cada ângulo interno de um polígono regular de m lados (chamado de m-ágono regular).

Em torno de cada vértice do ladrilhamento deveremos ter um triângulo equilátero e dois m-ágonos regulares. Assim, os três ângulos adjacentes ao vértice têm medidas α_3, α_m e α_m e devem ter soma igual a $360°$. Logo,

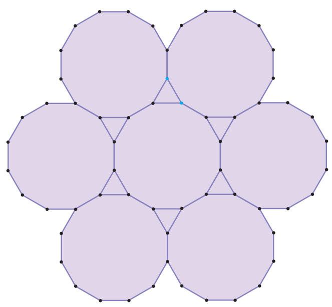


Figura 6: Ladrilhamento semirregular.

$$\alpha_3 + \alpha_m + \alpha_m = 360°$$

ou seja,

$$60° + 2 \cdot \alpha_m = 360°$$

e, portanto,

$$\alpha_m = 150°$$

De acordo com a tabela 1, $m = 12$, pois o dodecágono possui ângulo interno igual a $150°$. Assim, concluímos que se um ladrilhamento bem-comportado tem o padrão $(3, \ell, m)$, então $\ell = m = 12$. Logo, esse ladrilhamento terá o padrão $(3,12,12)$ e será composto por um triângulo e dois dodecágonos ao redor de cada vértice, o que faz com que seja classificado como semirregular.

5.1.2 Pentágono entre os polígonos

Você se deu conta de que a razão pela qual $m = \ell$ no ladrilhamento $(3, \ell, m)$ é o fato de que o triângulo é um polígono de um número ímpar de lados? Para facilitar nosso estudo, vamos continuar pensando sob essa mesma lógica e agora, em vez do triângulo, vamos considerar um novo polígono regular com número ímpar de lados: o pentágono.

Nesse caso, um dos valores k, ℓ ou m será igual a 5. Podemos supor $k = 5$ tendo em vista que os vértices de tipos $(5, a, b)$, $(a, 5, b)$, e $(a, b, 5)$ são todos equivalentes.

Vamos, então, descobrir qual ladrilhamento bem-comportado tem três polígonos ao redor de cada vértice, sendo um deles um pentágono regular.

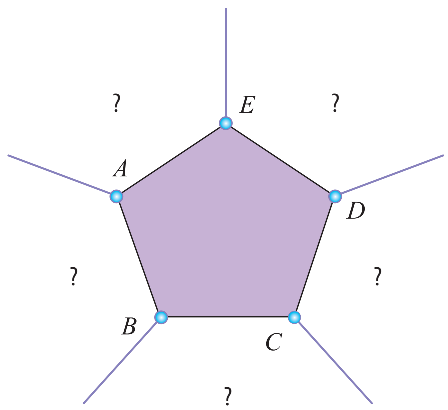


Figura 7: Na figura acima, os vértices A, B, C, D e E têm, pelo menos, um pentágono ao seu redor.
Mas quais são os outros dois ladrilhos ao redor de cada vértice?

Chamemos de A, B, C, D e E os cinco vértices do pentágono regular. Ao redor dos vértices A A, B, C e D devemos ter um pentágono, um ℓ-ágono (polígono de ℓ lados) regular e um m-ágono (polígono de m lados) regular.

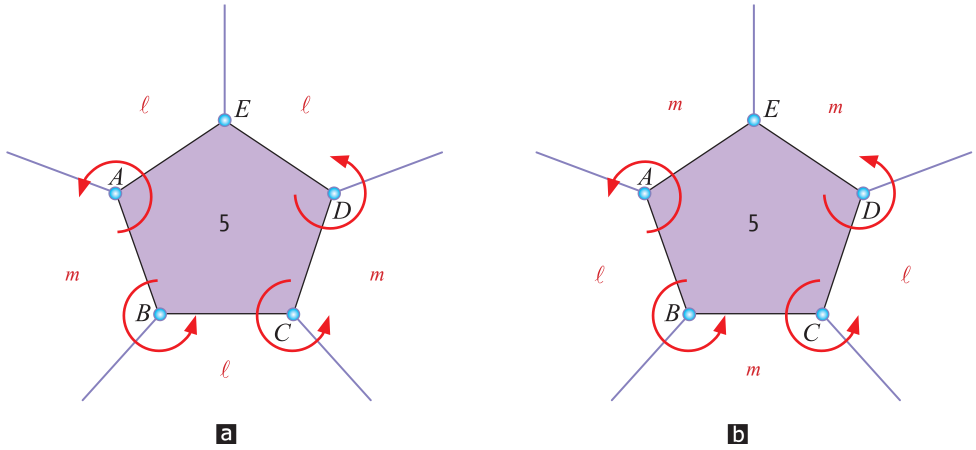


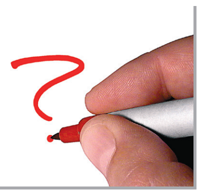
Figura 8: Seguindo a orientação dada pelas setas, os vértices A, B, C, e D tanto no item **a** como no **b**, possuem tipos equivalentes.

Fazendo um pequeno percurso circular em torno dos quatro primeiros vértices, no sentido anti-horário, os identificamos como tendo os tipos $(5, \ell, m)$, $(5, m, \ell)$, $(5, \ell, m)$ e novamente $(5, m, \ell)$. Dessa forma, o vértice E deverá ter o tipo $(5, \ell, \ell)$, como mostra a figura 8 (a), ou o tipo $(5, m, m)$, conforme a figura 8 (b). Para atender à terceira condição de bom comportamento, o vértice E precisa ter o mesmo tipo dos demais vértices. Então, só podemos concluir que, necessariamente, $\ell = m$. Isso porque, também como o triângulo, o número de lados de um pentágono é ímpar.

Assim, acabamos de estabelecer o seguinte:

Se um ladrilhamento tem o padrão $(5, \ell, m)$, então $\ell = m$, ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma $(5, m, m)$. Equivalentemente, não pode haver nenhum ladrilhamento de padrão $(5, \ell, m)$ quando $\ell \neq m$.

E mais uma vez perguntamos... se $\ell = m$, quais são os polígonos regulares de m (ou ℓ) lados que compõem o ladrilhamento de padrão $(5, \ell, m)$?



Adam Ciesielski / SXC

Da mesma forma que foi calculado para ladrilhamentos contendo triângulos, em torno de cada vértice do ladrilhamento deveremos ter um pentágono e dois m-ágonos regulares. Veja a equação:

$$\alpha_5 + \alpha_m + \alpha_m = 360°$$

ou seja,

$$108° + 2 \cdot \alpha_m = 360°$$

e, portanto,

$$2 \cdot \alpha_m = 360° - 108° = 252°$$

o que nos leva a

$$\alpha_m = 126°$$

Examinando a tabela 1, notamos que não existe nenhum polígono regular cuja medida dos ângulos internos seja igual a $126°$. O hexágono tem ângulos inferiores a $126°$, e o heptágono tem ângulos superiores a esse valor. Em nenhum dos dois casos seria possível construir um ladrilhamento bem-comportado.

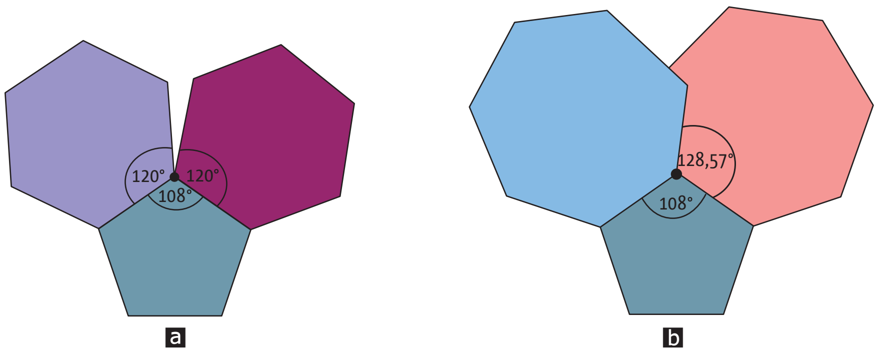


Figura 9: Os ângulos internos de um hexágono medem $120°$. Se um vértice é rodeado por um pentágono e dois hexágonos, teremos lacunas entre os polígonos, como vemos na figura 9 a. Por outro lado, os ângulos internos de um heptágono medem, aproximadamente, $128,57°$. Na figura 9 b vemos que, se um vértice é rodeado por um pentágono e dois heptágonos, há sobreposições entre polígonos.

Como nos dois casos anteriores as "regras de bom comportamento" não são atendidas, podemos concluir que...

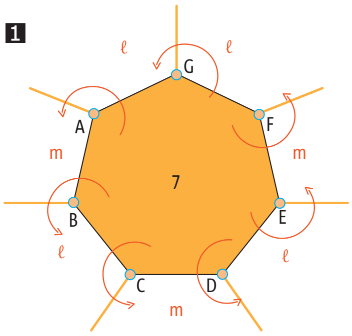
Não há nenhum ladrilhamento bem-comportado com padrão da forma $(5, \ell, m)$, ou seja, não há nenhum ladrilhamento bem-comportado, com três polígonos em torno de cada vértice, que faça uso de algum pentágono regular.

Agora vamos deixar para você, professor, a tarefa de verificar se é possível ou não a existência de ladrilhamentos de padrões $(7, \ell, m)$ e $(9, \ell, m)$, usando argumentos análogos aos apresentados. Quando estiver pronto, vamos à atividade 5?

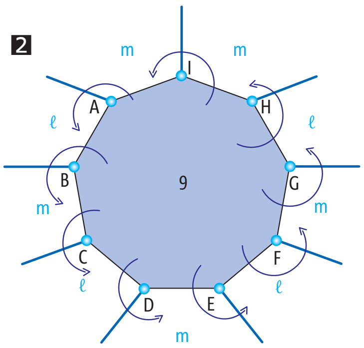
Atividade 5 Padrão (k, ℓ, m) em análise

Analise as informações **1**, **2** e **3** e verifique se existe um padrão de ladrilhamento das formas $(7, \ell, m)$ e $(9, \ell, m)$.

1

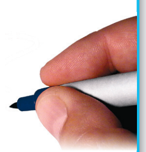


2



3

polígono regular	n (número de lados)	medida do ângulo interno $\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$
triângulo	3	$60°$
quadrado	4	$90°$
pentágono	5	$108°$
hexágono	6	$120°$
heptágono	7	$\approx 128,57°$
octógono	8	$135°$
eneágono	9	$140°$
decágono	10	$144°$
undecágono	11	$\approx 147,27°$
dodecágono	12	$150°$
pentadecágono	15	$156°$
icoságono	20	$162°$



Resposta comentada

Analisando a configuração de ladrilhos ao redor do heptágono, sabemos que, se um ladrilhamento tem um padrão $(7, \ell, m)$, necessariamente $\ell = m$, ou seja, o ladrilhamento deverá ter um padrão $(7, m, m)$ ou $(7, \ell, \ell)$. Em outras palavras, não pode haver nenhum ladrilhamento de padrão $(7, \ell, m)$ quando $\ell \neq m$. Isso ocorre porque, assim como no pentágono, o número de lados de um heptágono é ímpar.

Logo, para definir (caso existam) quais são os polígonos que vão compor o vértice desse ladrilhamento, teremos

$$\alpha_7 + \alpha_m + \alpha_m = 360°$$

Como $\alpha_7 = \frac{7-2}{7} \cdot 180° = \frac{5}{7} \cdot 180° \approx 128,57°$, teremos

$$2 \cdot \alpha_m \approx 360° - 128,57° \approx 231,43°$$

e, então,

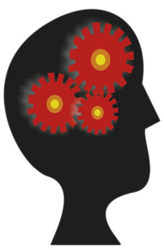
$$\alpha_m \approx 115,7°$$

Examinando a tabela (informação **3**), notamos que um tal m-ágono regular não existe. Concluímos então que não há nenhum ladrilhamento bem-comportado com padrão da forma $(7,\ell,m)$, ou seja, não há nenhum ladrilhamento semirregular, com três polígonos em torno de cada vértice, que faça uso de pelo menos um heptágono regular.

Analisando a configuração de ladrilhos ao redor do eneágono, e usando argumentos semelhantes, podemos também concluir que, se um ladrilhamento tem o padrão $(9,l,m)$, ℓ será igual a m $(\ell = m)$, ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma $(9,m,m)$ ou $(9,\ell,\ell)$. Equivalentemente, não existe nenhum ladrilhamento de padrão $(9,\ell,m)$ quando $\ell \neq m$.

Ademais, para existir um padrão de ladrilhamento $(9,m,m)$, deveremos ter $\alpha_m = 110°$. Como não existe nenhum polígono regular com ângulos internos com essa medida, concluímos finalmente que não há nenhum ladrilhamento bem-comportado com padrão da forma $(9,\ell,m)$, ou seja, não há nenhum ladrilhamento bem-comportado, com três polígonos em torno de cada vértice, que faça uso de pelo menos um heptágono regular.

5.1.3 Generalizando...


Art Ram / SXC

Estudamos detalhadamente o ladrilhamento de padrão (k,ℓ,m), onde k é um número ímpar. Até a Atividade 5, que acabamos de fazer, nos limitamos aos padrões $(3,\ell,m)$, $(5,\ell,m)$, $(7,\ell,m)$ e $(9,\ell,m)$. Será que podemos chegar a uma conclusão a respeito de todos os ladrilhamentos bem-comportados de padrão (k,ℓ,m), quando k é um número ímpar?

Vale lembrar que os vértices de tipos (k,ℓ,m), (m,k,ℓ) e (ℓ,m,k) são todos equivalentes. Assim, para estudarmos padrões de ladrilhamento (k,ℓ,m) nos quais um dos três valores é ímpar, é suficiente estudar o caso onde k é um número inteiro ímpar.

De maneira geral, usando um raciocínio geométrico, igual aos usados anteriormente, podemos deduzir que:

Se um ladrilhamento tem um padrão (k,ℓ,m) e k é um número ímpar, $k \geq 3$, então $\ell = m$, ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma (k,m,m) ou (k,ℓ,ℓ). Equivalentemente, se k é ímpar, e $k \geq 3$, não existe nenhum ladrilhamento de padrão (k,ℓ,m) quando $\ell \neq m$.

Tudo certo, até aqui? Então, vamos dar mais uns passos, de forma a sistematizar um pouco o conhecimento que construímos até agora.

Consideremos um k-ágono regular, em um ladrilhamento de padrão (k,ℓ,m), sendo k um número ímpar e $k \geq 3$. Enumeremos os k vértices consecutivos do k-ágono regular como sendo $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Vamos agora supor que temos um ℓ-ágono colado ao lado A_1A_2. Teremos, então, um m-ágono colado ao lado A_2A_3, um ℓ-ágono colado ao lado A_3A_4, e assim por diante.

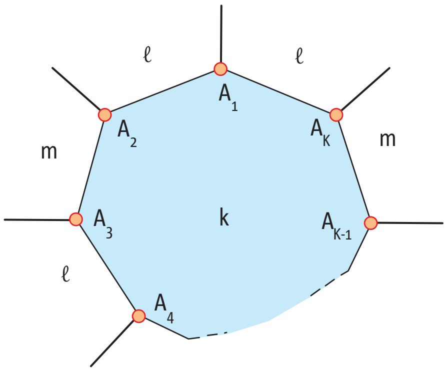


Figura 10: Representação de um ladrilhamento de padrão (k, ℓ, m), onde k representa todos os polígonos formados por um número ímpar de lados.

Em outras palavras, sendo o valor de k ímpar, teremos a seguinte tabela de lados consecutivos do k-ágono e correspondentes tipos de ladrilhos colados a esses k lados:

A_1A_2	A_2A_3	A_3A_4	...	$A_{k-1}A_k$	A_kA_1
ℓ-ágono	m-ágono	ℓ-ágono	...	m-ágono	ℓ-ágono

Assim sendo, o vértice A_1 deverá ser do tipo (k, ℓ, ℓ), conforme mostra a figura 8. Como o ladrilhamento é de padrão (k, ℓ, m), então, lembrando de nossa terceira condição de bom comportamento, concluímos que, necessariamente, $\ell = m$.

Para definir os polígonos que vão compor os vértices de um ladrilhamento de padrão (k, m, m), quando k é um número ímpar e $k \geq 3$, teremos que partir do princípio de que a soma de seus ângulos internos deve ser igual a $360°$. Logo, temos:

$$\alpha_k + \alpha_m + \alpha_m = 360°$$

ou seja,

$$2 \cdot \alpha_m = 360° - \alpha_k$$

Lembrando que cada ângulo interno α_n de um polígono regular de n lados é dado pela expressão:

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

Assim, para polígonos de k e m lados, temos:

$$\alpha_k = \frac{(k-2)}{k} \cdot 180° = \left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdot 180° \quad \text{e} \quad \alpha_m = \frac{(m-2)}{m} \cdot 180° = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot 180°$$

Substituindo esses valores na equação anterior, obtemos

$$\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot 180° + 2\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot 180° = 360°$$

Logo,

$$\left(1-\frac{2}{k}\right) + 2\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right) = \frac{360°}{180°} = 2$$

que nos conduz a

$$\left(1-\frac{2}{k}\right) + \left(2-\frac{4}{m}\right) = 2 \text{ , ou ainda, } \frac{2}{k} = 1-\frac{4}{m} = \frac{m-4}{m}$$

o que finalmente nos dá

$$k = \frac{2m}{m-4}$$

Como k e m são números inteiros positivos, então a fração $\frac{2m}{m-4}$ também deve ser um inteiro positivo. Portanto, podemos concluir que $m-4>0$, logo, $m>4$, ou seja, $m \geq 5$.

Agora temos $k = \frac{2m}{m-4} = \frac{2(m-4)+8}{m-4} = 2 + \frac{8}{m-4}$

Sendo $m-4 \geq 1$, temos $\frac{8}{m-4} \leq 8$, e então $k = 2 + \frac{8}{m-4} \leq 2+8=10$

Logo,

$$k = \frac{2m}{m-4} \leq 10$$

Como $k = \frac{2m}{m-4}$ e $k \geq 3$, então $k =$ 3 ou 5 ou 7 ou 9. Isolando m na expressão $\frac{2}{k} = 1 - \frac{4}{m}$, ficaremos com $m = \frac{2k}{k-4}$. Esta fórmula permite montar a seguinte tabela, e explicar, matematicamente, o que você já havia concluído por experimentação:

k	m	Padrão de ladrilhamento (k, m, m)
3	12	$(3,12,12)$
5	20/3	Não é possível
7	28/5	Não é possível
9	36/7	Não é possível

Nesta seção, vimos que o método algébrico utilizado para analisar os ladrilhamentos de padrão (k, ℓ, m) é indispensável, pois só perceberíamos isso geometricamente se tentássemos infinitamente todas as combinações possíveis de polígonos.

Esse método nos permite verificar, de maneira rápida, todas as possibilidades dos ladrilhamentos desse padrão, considerando que pelo menos um dos polígonos possui um número ímpar de lados.

Adam Ciesielski – Damian Searles
Emiliano Hernandez/ SXC

Podemos, então, enunciar:

1. Se um ladrilhamento tem um padrão (k, ℓ, m), e um dos valores k, ℓ ou m é ímpar, os outros dois valores são iguais. Podemos nesse caso supor que k é um inteiro ímpar e concluiremos que $\ell = m$.
2. Existe um único ladrilhamento, de padrão (k, ℓ, m), quando $k = 3$, que é o ladrilhamento de padrão $(3,12,12)$.
3. Quando k é um número ímpar e $k \geq 5$, não existe nenhum ladrilhamento bem-comportado do plano de padrão (k, ℓ, m).

Saiba Mais **Kepler**

http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Johannes_Kepler_1610.jpg

Você sabia que Kepler foi o primeiro a estudar ladrilhamentos do plano utilizando polígonos regulares?
O astrônomo Joannes Kepler (1580-1630) publicou, em 1619, uma obra chamada Harmonices Mundi (Harmonia do Mundo), onde enunciou a terceira lei do movimento planetário. Nela, explorou três aspectos: geometria, música e astronomia.
Nesse escrito, Kepler apresentou uma classificação de diferentes ladrilhamentos, obtidos a partir dos trabalhos de Arquimedes e de Platão sobre poliedros. Logo, os primeiros ladrilhamentos regulares e semirregulares surgem por analogia com os poliedros de Platão e Arquimedes.

5.1.4 E se só tivermos polígonos com números pares de lados?

Ainda nos resta pesquisar ladrilhamentos de padrão (k, ℓ, m) que não façam uso de polígonos regulares com número ímpar de lados, ou seja, cujos números de lados sejam todos números pares. Que tal começarmos por ladrilhamentos com a presença do polígono regular que possui o menor número par de lados? Estamos falando do quadrado, claro.

Vamos começar a pesquisa por meio de uma abordagem geométrica, porém um pouco diferente daquela que fizemos com os ladrilhamentos que admitem polígonos com número ímpar de lados.

Considere, então, que um dos valores k, ℓ ou m é igual a 4. Os vértices de tipos $(4,\ell,m)$, $(\ell,4,m)$ e $(\ell,m,4)$ são todos equivalentes. Assim, podemos supor que, se o ladrilhamento com padrão (k,ℓ,m) admite quadrado, então $k=4$.

Diferentemente do que ocorreu no estudo dos ladrilhamentos de padrão (k,ℓ,m), quando k é um número ímpar, notamos que quando k é um número par podemos ter $\ell \neq m$.

Para o caso em que $k=4$, observe a figura 11, que mostra os quatro vértices, A, B, C e D, de um quadrado que integra um ladrilhamento de padrão $(4,\ell,m)$. Assim, ao redor dos vértices A, B, e C podemos ter um quadrado, um ℓ-ágono (polígono de ℓ lados) regular e um m-ágono (polígono de m lados) regular, com $\ell \neq m$.

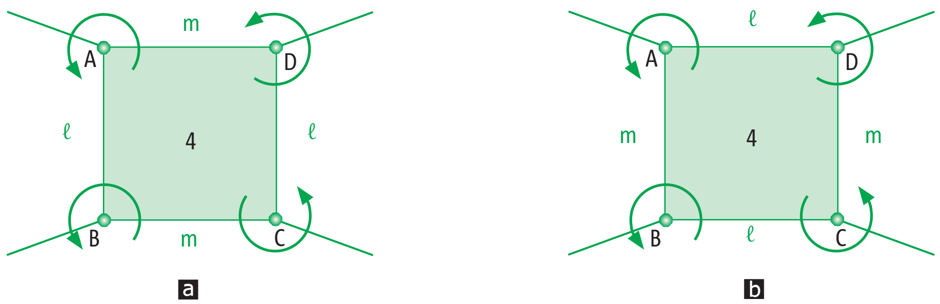


Figura 11: Seguindo a orientação dada pelas setas, os vértices A, B, C e D, tanto no item **a** como no **b**, são de tipos equivalentes. Fazendo um pequeno percurso circular em torno desses vértices, no sentido anti-horário, podemos identificá-los como tendo, respectivamente, os tipos $(4,\ell,m)$, $(4,m,\ell)$, $(4,\ell,m)$ e novamente $(4,m,\ell)$.

E mais uma vez perguntamos... quais são os possíveis valores de ℓ e m em um ladrilhamento de padrão $(4,\ell,m)$, sendo ℓ e m pares?

Para respondermos a essa pergunta, novamente partiremos do princípio de que a soma dos ângulos internos dos polígonos adjacentes a cada vértice é igual a $360°$. Logo, havendo um ladrilhamento de padrão $(4,\ell,m)$ deveremos ter

$$\alpha_4 + \alpha_\ell + \alpha_m = 360°$$

Como $\alpha_4 = 90°$, ficamos com a equação

$$\alpha_\ell + \alpha_m = 270°$$

Para descobrirmos quem é o ℓ-ágono e o m-ágono envolvidos em nosso problema, é importante que nos lembremos das equações que definem as medidas dos ângulos internos desses polígonos:

$$\alpha_\ell = \frac{\ell - 2}{\ell} \cdot 180° = \left(1 - \frac{2}{\ell}\right) \cdot 180°$$

$$\alpha_m = \frac{m - 2}{m} \cdot 180° = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot 180°$$

Ora, se a soma dos ângulos internos do ℓ-ágono e do m-ágono concorrentes em um vértice deve ser $270°$, então

$$\left(1 - \frac{2}{\ell}\right) \cdot 180° + \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot 180° = 270°$$

Desenvolvendo a equação acima, temos a segunda sequência de expressões:

$$\left[\left(1 - \frac{2}{\ell}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right)\right].180^\circ = 270^\circ$$

$$\left(1 - \frac{2}{\ell}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{270}{180} = \frac{3}{2}$$

Isso nos diz que

$$\frac{2}{\ell} + \frac{2}{m} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } \frac{2}{\ell} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2}$$

Como ℓ e m são inteiros pares, ambos são múltiplos de 2. Assim, teremos $\ell = 2r$ e $m = 2s$, para certos inteiros positivos r e s. Para facilitar nosso desenvolvimento algébrico, vamos introduzir as duas novas variáveis, r e s, na última equação obtida acima, saem de cena "ℓ" e "m", e entram "$2r$" e "$2s$".

Nossa última equação envolvendo ℓ e m transforma-se então na equação $\frac{2}{2r} + \frac{2}{2s} = \frac{1}{2}$, que é equivalente à equação $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$

Isolando a variável *r*, começamos fazendo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s} = \frac{s-2}{2s}$$

e chegaremos a

$$r = \frac{2s}{s-2}$$

É necessário ressaltar que, para que o denominador permaneça sempre positivo, devemos ter $s \geq 3$.

Observamos ainda que,

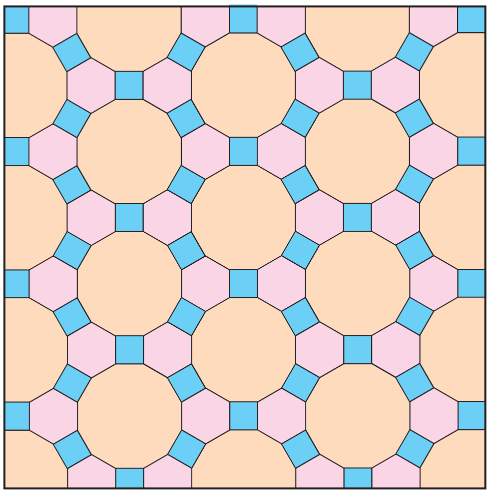
$$r = \frac{2s}{s-2} = \frac{2(s-2)+4}{s-2}\text{, ou seja, } r = 2 + \frac{4}{s-2}$$

Como r é um número inteiro, então $s-2$ deverá ser um divisor de 4, logo, s atinge seu valor máximo quando $s-2=4$, ou seja, quando $s=6$. Assim, concluímos que $3 \leq s \leq 6$.

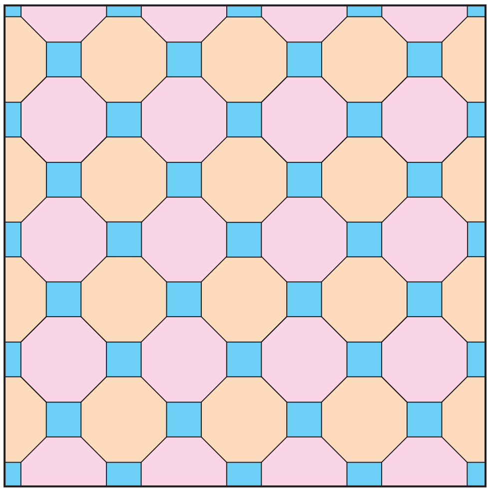
Pronto! Agora ficou fácil definir os possíveis valores de ℓ e m. Usando a igualdade $r = \dfrac{2s}{s-2}$ podemos construir a seguinte tabela:

s	r	$\ell = 2r$	$m = 2s$	**Padrão de ladrilhamento:** $(4,\ell,m)$
3	6	12	6	$(4,12,6)$
4	4	8	8	$(4,8,8)$
5	10/3	20/3	10	Não é possível
6	3	6	12	$(4,6,12)$

Concluímos, então, que:



Ladrilhamento de padrão
(4, 6, 12)



Ladrilhamento de padrão
(4, 8, 8)

Existem dois padrões de ladrilhamento bem-comportado, com três polígonos em torno de cada vértice, que fazem uso de quadrados. São os ladrilhamentos de padrões $(4,6,12)$ e $(4,8,8)$, pois o padrão $(4,12,6)$, também encontrado, é equivalente ao padrão $(4,6,12)$.

Acabamos de estudar os ladrilhamentos com três polígonos adjacentes a cada vértice, nos quais todos os polígonos têm número par de lados, e pelo menos um dos polígonos é um quadrado, certo? E se nenhum desses polígonos for um quadrado, você saberia fazer um desenvolvimento matemático análogo a esse que acabamos de desenvolver? Que tal tentar na próxima atividade? Vamos lá, professor... É de polígono em polígono que desataremos o nó desse pingo d'água geométrico.

Atividade 6 Os restaurantes do Sr. Carlos

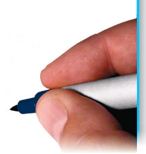
O Sr. Carlos é dono de uma rede de restaurantes que são conhecidos, dentre outros aspectos, por causa do uso de uma decoração arrojada. Na reforma de um deles, o Sr. Carlos decidiu surpreender seus clientes ladrilhando as paredes dos banheiros de uma forma especial.

Pipp – Adam Ciesielski / SXC

Para isso, planeja encomendar três tipos de ladrilho, sendo um deles um hexágono regular, com o objetivo de construir um ladrilhamento semirregular. Não havendo a comercialização de ladrilhos triangulares em sua região, Sr. Carlos resolveu usar apenas ladrilhos que tenham número par de lados. Se fosse você, como faria esse planejamento e quais os tipos de polígono que encomendaria?

Em seu planejamento, considere o padrão de ladrilhamento $(6, \ell, m)$. Utilize a tabela a seguir no desenvolvimento de sua resposta.

s	r	$\ell = 2r$	$m = 2s$	Padrão de ladrilhamento: $(6, \ell, m)$



Resposta comentada

Para começarmos a planejar essa encomenda, basta estudarmos quais ladrilhamentos do plano têm um padrão $(6, \ell, m)$. Não esqueça que os padrões de ladrilhamento $(6, \ell, m)$, $(\ell, 6, m)$ e $(\ell, m, 6)$ são equivalentes entre si.

Havendo um ladrilhamento de padrão $(6, \ell, m)$, e considerando as condições de bom comportamento, sabemos que a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser igual a $360°$. Logo, temos:

$$\alpha_6 + \alpha_\ell + \alpha_m = 360°$$

Como $\alpha_6 = 120°$, ficamos com a equação

$$\alpha_\ell + \alpha_m = 240°$$

Para descobrir os valores de α_ℓ e α_m basta usarmos a fórmula da medida dos ângulos internos de um polígono regular.

$$\alpha_\ell = \frac{\ell - 2}{\ell} \cdot 180° = \left(1 - \frac{2}{\ell}\right) \cdot 180°$$

$$\alpha_m = \frac{m - 2}{m} \cdot 180° = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot 180°$$

Substituindo esses valores de α_ℓ e α_m na equação anterior e expressando ℓ em função de m, obtemos

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$$

Como ℓ e m são inteiros pares, ambos são múltiplos de 2. Assim $\ell = 2r$ e $m = 2s$, para certos inteiros positivos r e s. Nossa última equação envolvendo ℓ e m transforma-se então na equação $\frac{1}{2r} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{3}$.

Isolando a variável r, chegaremos a $r = \frac{3s}{2s - 3}$

É necessário ressaltar que, para que o denominador permaneça sempre positivo devemos ter $s \geq 2$. Notemos também que $r \geq 2$, já que com $r = 1$ teríamos $\ell = 2$, ou seja, um polígono de dois lados, o que não existe.

Da desigualdade $\frac{3s}{2s - 3} \geq 2$, obtemos $s \leq 6$.

Para definir possíveis valores de ℓ e m, basta usar a igualdade $r = \frac{3s}{2s - 3}$ e assim construir a seguinte tabela:

s	r	$\ell = 2r$	$m = 2s$	**Padrão de ladrilhamento:** $(6, \ell, m)$
2	6	12	4	$(6, 12, 4)$
3	3	6	6	$(6, 6, 6)$
4	12/5	24/5	8	Não é possível
5	15/7	30/7	10	Não é possível
6	2	4	6	$(6, 4, 12)$

Assim, existem apenas dois padrões de ladrilhamento bem-comportado, com três polígonos em torno de cada vértice, que fazem uso de hexágonos. São os ladrilhamentos de padrões $(6, 4, 12)$ e $(6, 6, 6)$. No entanto, só poderíamos encomendar o ladrilhamento de padrão $(6, 4, 12)$, pois ele é o único com três tipos diferentes de polígonos regulares em torno de cada vértice que faz uso de hexágonos e que possui todos os polígonos com número par de lados.

Sua resposta acaba aqui. Repare, porém, que esses padrões de ladrilhamento já foram descobertos anteriormente: o padrão $(6, 4, 12)$ é equivalente ao padrão $(4, 6, 12)$ (que faz uso de quadrados), e o padrão $(6, 6, 6)$ é o de um ladrilhamento regular.


Kristian Stokholm / SXC

Para encerrar nossa pesquisa acerca de ladrilhamentos de padrões da forma (k, ℓ, m), vamos agora à nossa última questão.

Pensemos um pouco. Imagine um ladrilhamento padrão (k, ℓ, m) em que todos os polígonos têm um número par de lados. Se esse ladrilhamento não fizer uso de pelo menos um quadrado – padrão $(4, \ell, m)$ – ou de pelo menos um hexágono regular, como o exemplo que acabamos de estudar na Atividade 6, seus ladrilhos (polígonos regulares) terão no mínimo 8 lados, não é verdade?

Logo, cada um desses ladrilhos terá ângulos internos, no mínimo, iguais a $135°$, que é a medida do ângulo interno do octógono regular. Assim sendo, a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice do ladrilhamento deverá ser, no mínimo, $135° + 135° + 135° = 405°$, considerando que esse ladrilhamento é formado apenas com octógonos regulares. Nesse caso, a soma dos ângulos adjacentes ao vértice é maior que $360°$, o que não atende às regras de bom comportamento. Visto isso, a nossa conclusão é que:

Não existe nenhum ladrilhamento com padrão da forma (k, ℓ, m), com k, ℓ , e m todos pares, que não faça uso de quadrados e nem de hexágonos regulares.

Com essa última conclusão, chegamos ao final do estudo do padrão (k, ℓ, m), descobrindo que os únicos ladrilhamentos bem-comportados, com três polígonos em torno de cada vértice, são o ladrilhamento regular $(6, 6, 6)$ os ladrilhamentos semirregulares de padrões $(3, 12, 12)$, $(4, 8, 8)$ e $(4, 6, 12)$.


Richard Dudley / SXC

Agora que você já fez uso da maior parte das ferramentas matemáticas necessárias para o estudo dos ladrilhamentos, acreditamos que, daqui por diante, você se sentirá mais seguro para fazer as generalizações geométricas necessárias no decorrer deste Ciclo e, posteriormente, em sua sala de aula. Parabéns por ter chegado até aqui. Vamos em frente!

5.2 Quarteto *Poli*... fantástico

Conforme estabelecemos desde o Ciclo 1, fazer um ladrilhamento consiste em preencher uma superfície plana com figuras geométricas (ladrilhos), de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre elas. Sabemos que o que diferencia dois ladrilhamentos semirregulares são os polígonos regulares que configuram sua formação e a disposição que tomam os diferentes polígonos em torno dos vértices.

A partir de agora, pesquisaremos ladrilhamentos bem-comportados de padrões (k, ℓ, m, n), isto é, com quatro polígonos regulares em torno de cada vértice. Mas, antes de continuarmos nosso estudo, convidamos você a ler o boxe a seguir, para que você conheça um artista renomado que desenvolveu, dentre outras representações, inúmeras associações de polígonos no plano.

Multimídia **Jeito "Escher" de ladrilhar**

"Apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas."

M. C. Escher

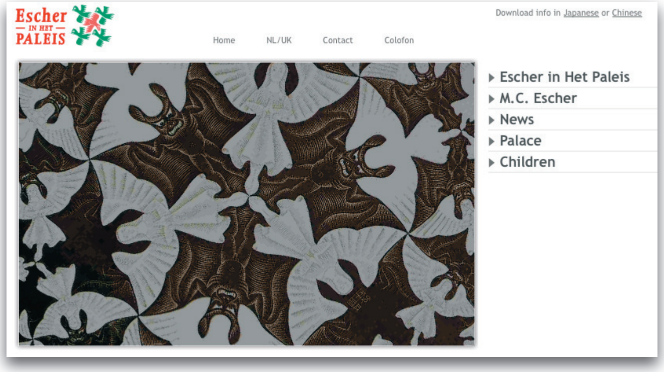
Nenhum artista mergulhou tão fundo no infinito quanto Mauritius Cornelius Escher. Em suas viagens pelo mundo, descobriu a arte árabe de ladrilhar, especialmente quando conheceu os azulejos de Alhambra. Escher se apaixonou pelas figuras geométricas que se repetiam e se refletiam, e começou a ladrilhar superfícies, substituindo as figuras geométricas, usadas pelos árabes, por imagens concretas.

Seu caso de amor com o infindável encontrou um lar definitivo. O antigo palácio da rainha holandesa Emma, um charmoso casarão no centro de Haia, foi transformado no Escher in Het Paleis, ou, se preferir, Museu Escher. São quatro andares com todas as obras importantes do artista nascido em 1898 e falecido em 1972.

Ao final do passeio, o visitante ainda tem à disposição um playcenter escheriano, com jogos que ajudam a entender as ilusões que ele criou.

Não deixe de aproveitar esse tour pela vida e obra desse memorável artista. Faça uma visita virtual ao site do Museu Escher:

www.escherinhetpaleis.nl



5.2.1 Reco-reco, chocalho e... triângulos outra vez!

Para investigar os ladrilhamentos bem-comportados de padrão (k, ℓ, m, n), vamos dividir o nosso estudo em dois casos:

1. ladrilhamentos de padrão (k, ℓ, m, n) que possuem triângulos equiláteros.
2. ladrilhamentos de padrão (k, ℓ, m, n) que não fazem uso de triângulos equiláteros.

Como os casos 1 e 2 são excludentes entre si e, juntos, abarcam todo o universo do nosso tema atual, teremos apenas esses dois casos para estudar. A divisão do nosso estudo nesses dois casos nos permitirá tirar conclusões de maneira rápida e produtiva.

Começaremos nossa análise com ladrilhamentos que fazem uso de triângulos eqüiláteros. Como feito anteriormente, vamos assumir $k = 3$, lembrando novamente que um padrão de ladrilhamento $(3, \ell, m, n)$ é equivalente aos ladrilhamentos de padrões $(n, 3, \ell, m)$, $(m, n, 3, \ell)$ e $(\ell, m, n, 3)$.

Repetindo um procedimento geométrico já utilizado anteriormente, examinemos então um ladrilho triangular, em um ladrilhamento de padrão $(3, \ell, m, n)$, e a disposição cíclica de outros ladrilhos (polígonos) que compartilham de seus vértices.

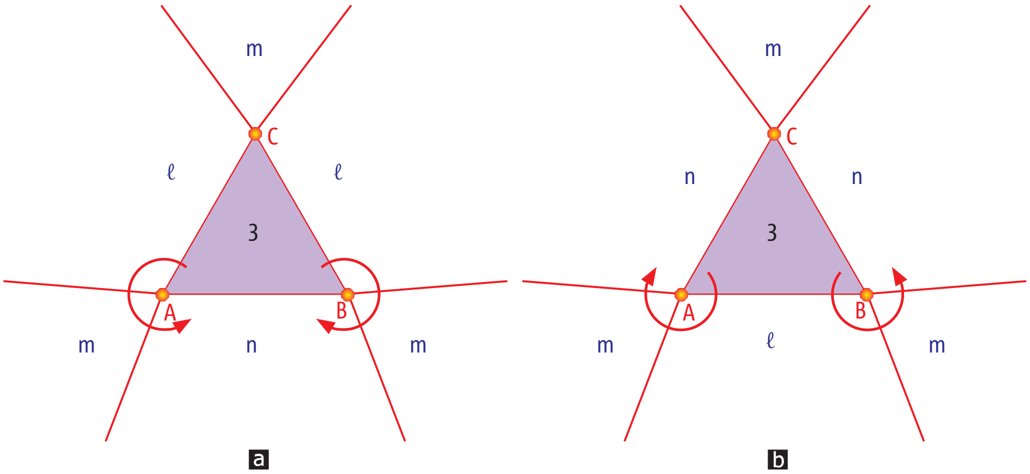
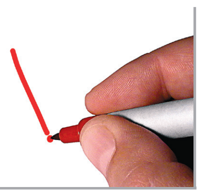


Figura 12: Vemos que os tipos dos vértices A e B são equivalentes, se compararmos a figura do item **a** com a do item **b**, seguindo a orientação das setas.

Chamemos de A, B e C os três vértices do triângulo. Ao redor dos vértices A e B deveremos ter o triângulo, um ℓ-ágono, um m-ágono e um n-ágono. Fazendo pequenos percursos circulares em tornos dos vértices A e B, identificamos ambos os vértices como tendo o tipo $(3, \ell, m, n)$. Observando a figura 12, vemos que o vértice C pode ser do tipo $(3, \ell, m, \ell)$, como mostra a figura 12 (a), ou do tipo $(3, n, m, n)$, conforme figura 12 (b). Como o vértice C precisa ser do mesmo tipo dos vértices A e B para atender à terceira condição de bom comportamento, então só podemos concluir que necessariamente $\ell = n$.

Assim, acabamos de estabelecer a seguinte condição de existência:

Se um ladrilhamento tem um padrão $(3, \ell, m, n)$, então $\ell = n$, ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma $(3, n, m, n)$. Assim, não existe nenhum ladrilhamento de padrão $(3, \ell, m, n)$ quando $\ell \neq n$.



Adam Ciesielski / SXC

Estabelecida a condição de existência desse padrão de ladrilhamento, ainda precisamos pensar em um ponto importante... Quais são os polígonos regulares, de n e m lados, que fazem parte do ladrilhamento de padrão $(3, n, m, n)$?

Sabemos que, para atender às condições de bom comportamento, a soma dos ângulos que compartilham cada vértice deverá satisfazer a equação

$$\alpha_3 + 2 \cdot \alpha_n + \alpha_m = 360°$$

ou seja,

$$60° + 2 \cdot \alpha_n + \alpha_m = 360°$$

Sendo assim, temos

$$2 \cdot \alpha_n + \alpha_m = 300°$$

Poderíamos usar o mesmo raciocínio empregado nas seções anteriores. Mas vamos tentar uma abordagem diferente, professor? Desta vez, vamos atribuir valores para n e, usando a expressão acima, vamos encontrar os valores correspondentes de m. Vamos lá!

Se $n = 3$, $\alpha_n = 60°$, e então $\alpha_m = 300° - 120° = 180°$, o que é impossível, pois pela definição de polígono convexo todos os seus ângulos internos são menores que $180°$.

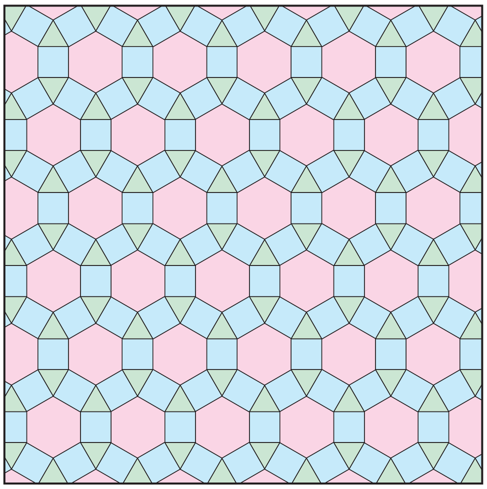
Se $n = 4$, $\alpha_n = 90°$, e então $\alpha_m = 300° - 180° = 120°$, que é o ângulo interno de um hexágono regular. Nesse caso, nosso ladrilhamento será de padrão $(3,4,6,4)$.

Se $n = 5$, $\alpha_n = 108°$, e então $\alpha_m = 300° - 216° = 84°$, que também é impossível de ocorrer, pois nenhum polígono regular possui ângulos internos com essa medida.

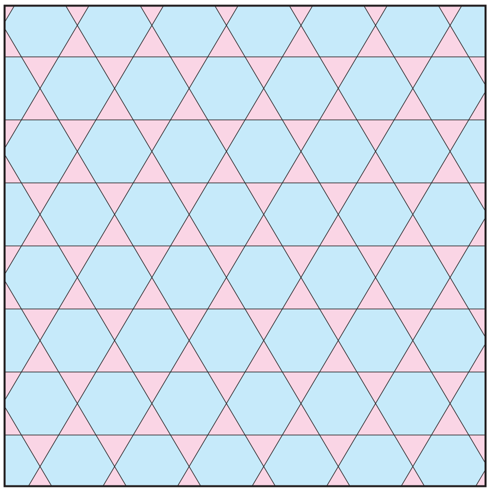
Se $n = 6$, $\alpha_n = 120°$, e então $\alpha_m = 300° - 240° = 60°$, que é o ângulo interno de um outro triângulo. Logo, teremos uma ladrilhamento de padrão $(3,6,3,6)$.

Se $n = 7$, $\alpha_n = \alpha_7 \approx 128,57°$, e então $\alpha_m \approx 300° - 257,14° = 42,86°$, o que é impossível, pois não existe polígono regular que possua ângulo interno menor que $60°$.

Além disso, podemos notar que se $n \geq 7$, então $\alpha_n > 120°$ e $\alpha_m < 60°$, o que é impossível, pois se consultarmos a tabela 1 veremos que o polígono regular de menor ângulo interno é o triângulo equilátero, que tem cada um de seus ângulos internos igual a $60°$.



Ladrilhamento de padrão
(3, 4, 6, 4)



Ladrilhamento de padrão
(3, 6, 3, 6)

Assim, concluímos que os ladrilhamentos bem-comportados que possuem padrão da forma $(3,\ell,m,n)$ são $(3,4,6,4)$ e $(3,6,3,6)$.

5.2.2 Nada de triângulos agora...

Vamos agora nos voltar para o segundo caso do nosso estudo. Investigaremos quais são os ladrilhamentos bem-comportados de padrão (k, ℓ, m, n) que não fazem uso de triângulos. Certo?

Nesse caso, o polígono de menor número de lados que utilizaremos será o quadrado, que possui cada ângulo interno igual a $90°$. Ou seja, vamos então supor que $k = 4$.

Como nosso ladrilhamento é bem-comportado, a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice é $360°$. Será que se usarmos somente quadrados, essa condição será atendida? Que tal conferirmos?

A resposta é positiva, pois podemos verificar imediatamente que:

$$\alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360°$$

Esse é o ladrilhamento regular $(4,4,4,4)$, que já conhecemos; ele é o único desse padrão que é constituído por quatro polígonos iguais em torno de cada vértice. Perceba que, se substituirmos apenas um quadrado por um pentágono no ladrilhamento $(4,4,4,4)$, o valor da soma dos ângulos internos adjacentes ao vértice já será maior que $360°$, o que não atende às condições de bom comportamento.

Com isso, nossa pesquisa de ladrilhamentos de padrões (k, ℓ, m, n) termina. Por quê? Ora, como não estamos empregando triângulos, se um dos valores k, ℓ, m ou n for maior que 4, a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice será maior que a soma de quatro ângulos retos, ou seja,maior que $360°$.

Logo, concluímos que os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrões (k, ℓ, m, n), isto é, com quatro polígonos regulares em torno de cada vértice, são os ladrilhamentos semirregulares de padrões $(3,4,6,4)$ e $(3,6,3,6)$ e o ladrilhamento regular $(4,4,4,4)$.

Avançamos, não acha? Estamos quase na reta final deste Ciclo. Faremos agora o estudo do último padrão de ladrilhamento. Vamos em frente que atrás vem gente (ladrilhando, ladrilhando sem parar...).

5.3 Cinco de uma vez

O último padrão de ladrilhamento que vamos explorar é da forma (k, ℓ, m, n, p). Novamente, vamos dividir o nosso estudo em dois casos mutuamente excludentes:

1. Ladrilhamentos de padrão (k, ℓ, m, n, p) que possuem triângulos equiláteros.
2. Ladrilhamentos de padrão (k, ℓ, m, n, p) que não fazem uso de triângulos equiláteros.

Como antes, para começar a nossa análise pelo primeiro caso, assumiremos que $k = 3$.

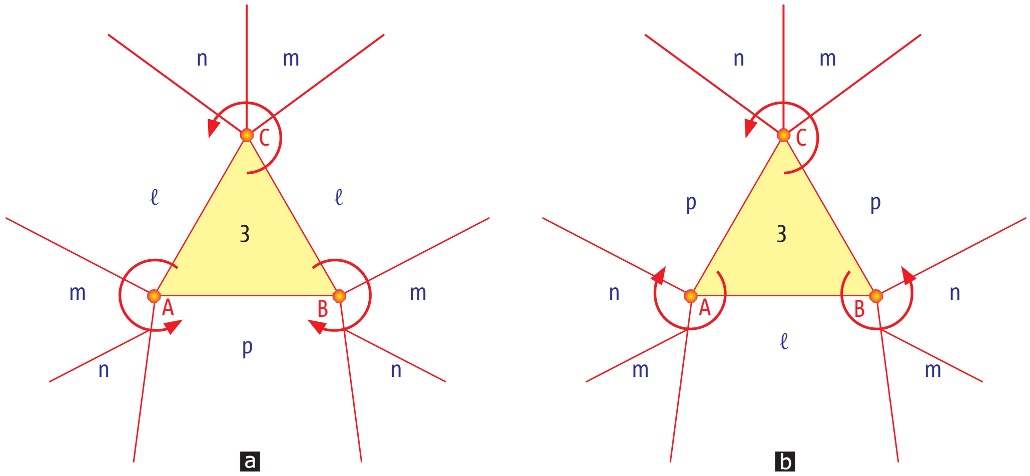


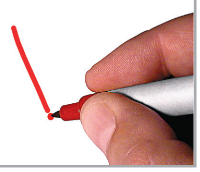
Figura 13: Como os vértices A e B, de um ladrilho triangular, fazem parte de um ladrilhamento $(3, \ell, m, n, p)$, a distribuição cíclica de ladrilhos, em torno deles, deve ser como na figura **a** ou como na figura **b**.

A partir de dois vértices A e B, de um triângulo equilátero do ladrilhamento, fazemos "leituras circulares" dos tipos de polígonos regulares que os contornam, considerando que ambos os vértices têm o tipo $(3, \ell, m, n, p)$.

Notamos então que, se A e B têm ambos esse tipo, então o vértice C deverá ter o tipo $(3, \ell, m, n, \ell)$, como mostra a figura 13 (a), ou o tipo $(3, p, m, n, p)$, conforme a figura 13 (b). Para que a terceira condição de bom comportamento seja atendida, os vértices A, B e C precisam ter todos o mesmo tipo. Concluímos que, necessariamente, deveremos ter $\ell = p$.

Assim,

Se um ladrilhamento tem um padrão $(3, \ell, m, n, p)$, então necessariamente $\ell = p$, ou seja, o ladrilhamento deverá ter um padrão $(3, \ell, m, n, \ell)$. Em outras palavras, não pode haver nenhum ladrilhamento de padrão $(3, \ell, m, n, p)$ com $\ell \neq p$.



Adam Ciesielski / SXC

Observe que se dentre os demais polígonos de um ladrilhamento $(3, \ell, m, n, p)$ não houver outro triângulo, cada um deles terá, no mínimo, quatro lados.Sendo assim, a soma dos ângulos internos, adjacentes a cada vértice do ladrilhamento, será no mínimo igual a

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 420^\circ$$

Levando em consideração que queremos um ladrilhamento bem-comportado, vemos que a construção desse padrão de ladrilhamento é impossível quando possui apenas um triângulo ao redor de cada um de seus vértices.

Você entendeu a relação que acabamos de deduzir? Então, antes de avançar na análise desse padrão de ladrilhamento, tente fazer a atividade a seguir.

Atividade 7 **Padrão** (k, ℓ, m, n, p)

É possível construir um ladrilhamento bem-comportado de padrão (k, ℓ, m, n, p) com apenas dois triângulos equiláteros em torno de cada vértice?

Justifique sua resposta com base na soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice.

Adam Ciesielski / SXC

Resposta comentada

Se colocarmos somente dois triângulos ao redor de cada vértice do ladrilhamento, a soma dos ângulos internos em torno de cada vértice será no mínimo igual a

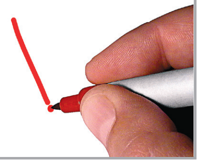
$$60° + 60° + 90° + 90° + 90° = 390°$$

Novamente, como esta soma deve ser sempre igual a $360°$, vemos que esse ladrilhamento não é possível quando constituído por apenas dois triângulos ao redor de cada um de seus vértices.

Você percebeu que, ao realizar a Atividade 7, pudemos constatar um aspecto importante a respeito do padrão de ladrilhamento (k, ℓ, m, n, p)?

Não só não existe ladrilhamento de padrão (k, ℓ, m, n, p) que não faça uso de triângulos equiláteros, como não existem ladrilhamentos desse padrão com apenas um ou dois triângulos equiláteros em torno de cada vértice. Eles têm que ser pelo menos três! Ou seja, em um ladrilhamento de padrão $(3, \ell, m, n, \ell)$ – (lembre-se que assumimos $k = 3$ e que concluímos que $\ell = p$) – teremos pelo menos três triângulos equiláteros em torno de cada vértice, para que o nosso ladrilhamento seja bem-comportado.

Logo, podemos concluir também que:


Adam Ciesielski / SXC

Se um ladrilhamento tem um padrão $(3, \ell, m, n, \ell)$, ele deverá ter um dos seguintes dois padrões: $(3, 3, m, n, 3)$ e $(3, \ell, 3, 3, \ell)$.

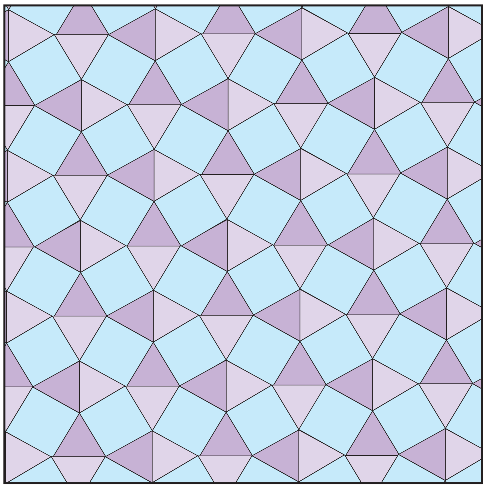
Feitas as restrições necessárias, podemos nos questionar... Quais são os polígonos que podem ser usados nesse padrão de ladrilhamento?

No caso do padrão $(3, \ell, 3, 3, \ell)$, devemos ter

$$3 \cdot 60° + 2\alpha_\ell = 360°$$

$2\alpha_\ell = 180°$, ou seja, $\alpha_\ell = 90°$

Neste caso, então, o ladrilhamento terá padrão $(3, 4, 3, 3, 4)$.



Ladrilhamento de padrão
(3, 4, 3, 3, 4)

Já no caso do padrão $(3, 3, m, n, 3)$, teremos

$$3 \cdot 60° + \alpha_m + \alpha_n = 360°$$

$$\alpha_m + \alpha_n = 180°$$

Um exame rápido da tabela de polígonos regulares e seus ângulos internos nos revela que as únicas possibilidades neste caso são: $m = n = 4$, $m = 3$ e $n = 6$, e $m = 6$. e $n = 3$. Ou seja, o ladrilhamento deverá ter padrão $(3,3,4,4,3)$ ou $(3,3,3,6,3)$, sendo este último equivalente a $(3,3,3,3,6)$.

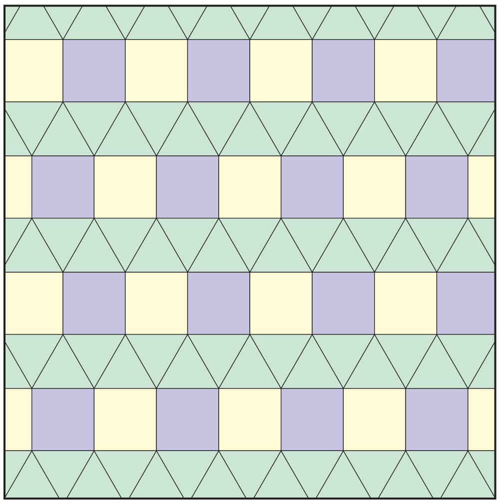
A justificativa dessas possibilidades é baseada na soma dos ângulos ao redor de cada vértice, e pode ser facilmente elaborada. Que tal tentar fazendo a Atividade 8?

Atividade 8 Caso $(3,3,m,n,3)$ em foco

Adam Ciesielski / SXC

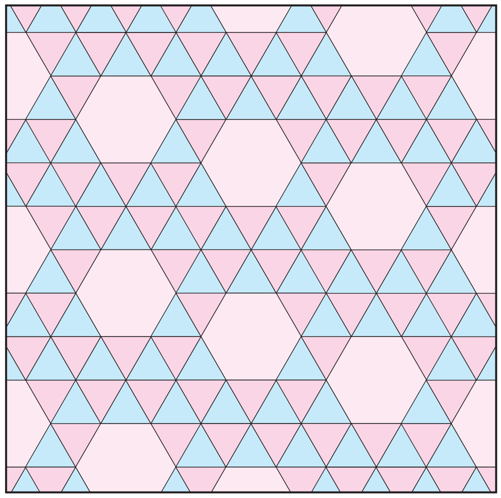
Nas ilustrações abaixo, visualizamos as realizações geométricas de dois tipos de ladrilhamento de padrão $(3,3,m,n,3)$.

1



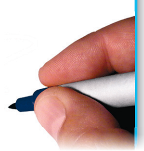
(3, 3, 4, 4, 3)

2



(3, 3, 3, 6, 3)

Deduza detalhadamente a existência desses ladrilhamentos como sendo os únicos de padrão $(3,3,4,4,3)$.



Resposta comentada

O primeiro passo para resolver essa questão é partir do princípio de que a soma dos ângulos internos ao redor de cada um dos vértices de um ladrilhamento é igual a $360°$. Sendo assim, no padrão $(3,3,m,n,3)$, teremos

$$\alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_m + \alpha_n + \alpha_3 = 360^\circ$$

$$3 \cdot \alpha_3 + \alpha_m + \alpha_n = 360^\circ$$

$$3 \cdot 60° + \alpha_m + \alpha_n = 360^\circ$$

$$\alpha_m + \alpha_n = 180^\circ$$

Vamos utilizar a estratégia das hipóteses, como fizemos na seção 5.2.1. Atribuiremos valores para m e descobriremos os valores de n.

Se $m = 3$, $\alpha_m = 60°$, e então $\alpha_n = 180° - 60° = 120°$, que é o ângulo interno de um hexágono regular, o ladrilhamento deverá ser de padrão $(3,3,3,3,6)$.

Se $m = 4$, $\alpha_m = 90°$, e então $\alpha_n = 180° - 90° = 90°$, que é o ângulo interno de um quadrado, nosso ladrilhamento deverá ter o padrão $(3,3,3,4,4)$.

Se $m = 5$, $\alpha_m = 108°$, e então $\alpha_n = 180° - 108° = 72°$. Como não existe nenhum polígono regular cujo ângulo interno seja igual a $72°$, podemos concluir que esse ladrilhamento é impossível.

Se $m = 6$, $\alpha_m = 120°$, e então $\alpha_n = 180° - 120° = 60°$, que é o ângulo interno de um triângulo equilátero, o ladrilhamento deverá ter o padrão $(3,3,3,3,6)$.

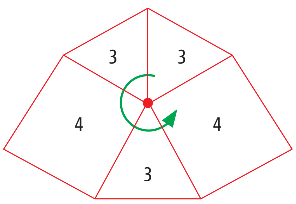
Se $m = 7$, $\alpha_m \approx 128{,}57°$, e então $\alpha_n \approx 300° - 257{,}14° = 42{,}86°$, o que é impossível, pois não existe polígono regular que possua ângulo interno menor que $60°$.

Diante disso, podemos concluir que se $m \geq 7$, então $\alpha_m > 120°$ e $\alpha_n < 60°$, o que é impossível, pois o menor polígono regular que existe é o triângulo equilátero, cuja medida de cada um dos ângulos internos é igual a $60°$.

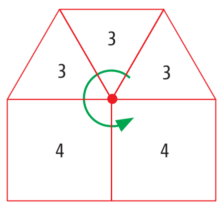
Explorando e analisando os ladrilhamentos (k, ℓ, m, n, p), concluímos que:

Os únicos ladrilhamentos bem-comportados com cinco polígonos em torno de cada vértice são os de padrões $(3,3,3,4,4)$, $(3,3,3,3,6)$ e $(3,4,3,3,4)$.

Alguns vértices que possuem os mesmos polígonos regulares ao seu redor podem ser vértices de tipos diferentes, dependendo da distribuição dos polígonos. Veja a figura a seguir.

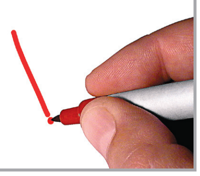


a Vértice do tipo (3, 3, 4, 3, 4)



b Vértice do tipo (3, 3, 3, 4, 4)

Apesar dos vértices destacados das figuras (a) e (b) serem rodeados por três triângulos e dois quadrados, eles são classificados de forma diferente. Dando uma volta em torno de cada vértice, no sentido anti-horário, vemos que, na figura a, o tipo de vértice é $(3,3,4,3,4)$, e, na figura b, é $(3,3,3,4,4)$.



Adam Ciesielski / SXC

E, dessa forma, deduzimos matematicamente todos os padrões de ladrilhamento que atendem às três condições de bom comportamento. Observe, ainda, que o padrão (k,ℓ,m,n,p,q) não requer estudo, pois descobrimos – no início deste Ciclo – que o único ladrilhamento que comporta seis polígonos regulares em torno de cada vértice é o ladrilhamento de padrão $(3,3,3,3,3,3)$.

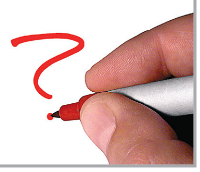
Veja que no decorrer do nosso estudo usamos diferentes estratégias:

- **No caso do ladrilhamento de padrão (k,ℓ,m), primeiro analisamos esse ladrilhamento considerando que pelo menos um dos polígonos utilizados tem número ímpar de lados e, em seguida, analisamos esse padrão no caso em que todos os polígonos possuem um número par de lados.**

Já nos ladrilhamentos de padrões (k,ℓ,m,n) e (k,ℓ,m,n,p), a investigação se deu de forma diferente:

- **Primeiro consideramos ladrilhamentos que possuem triângulos equiláteros e, depois, consideramos os ladrilhamentos que não fazem uso de triângulos.**

Essas estratégias foram escolhidas por se tratarem de um modo mais rápido e produtivo de investigação, mas não significa que você não possa buscar novas estratégias de investigação.



Adam Ciesielski / SXC

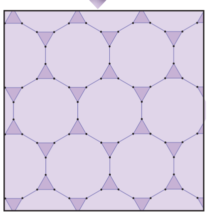
Conclusão

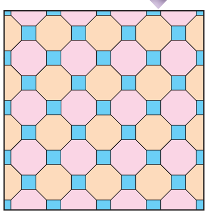
Um conceito matemático é sempre construído articulando-o com outros conceitos genéricos. Por isso, neste desafio, observamos que o problema matemático adjacente ao desafio dos ladrilhamentos do plano requer, em primeiro lugar, o conhecimento da natureza dos polígonos regulares e seus ângulos internos.

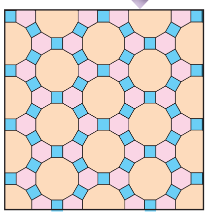
Outro fator importante nesta abordagem é o estudo da distribuição combinatória de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices de um determinado ladrilhamento e, a partir daí, sua possível classificação. Assim, o estudo dos ladrilhamentos do plano leva em conta não somente os ângulos internos dos polígonos regulares envolvidos, mas também a distribuição relativa desses ladrilhos no ladrilhamento em questão. Neste contexto, vemos que a proposta de ensinar geometria através da construção e análise dos ladrilhamentos nos estimula a questionar os problemas iniciais levantados desde o Ciclo 1 e a transformá-los em uma fonte de novos questionamentos, uma vez que, mudando as condições, os mesmos problemas admitem diferentes respostas.

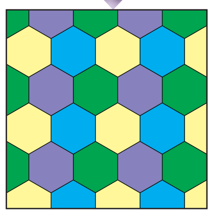
As situações-problema discutidas neste Ciclo devem ser entendidas como ponto de partida no ensino e aprendizagem da Matemática, além de terem funcionado também como eixo organizador dos desenvolvimentos geométricos que realizamos ao longo do nosso estudo.

- ladrilhamento de padrão k, ℓ, m
  - um dos valores k, ℓ, m é ímpar
    - os padrões (k, ℓ, m), (ℓ, k, m) e (k, m, ℓ) são equivalentes. Para simplificar, supomos que k é ímpar
      - $k = 3$
        - necessariamente $\ell = m$
          - ladrilhamento de padrão $(3, 12, 12)$

            
      - $k > 3$, ímpar
        - necessariamente $\ell = m$
          - ladrilhamento inexistente
  - os inteiros k, ℓ, m são todos pares
    - o ladrilhamento faz uso de quadrados
      - Para simplificar, podemos supor $k = 4$
        - concluímos que, necessariamente, $\ell = m = 8$ ou $\ell = 6$ e $m = 12$ ou $\ell = 12$ e $m = 6$
          - ladrilhamento $(4, 8, 8)$

            
          - ladrilhamento $(4, 6, 12)$

            
    - o ladrilhamento não faz uso de quadrados
      - os inteiros k, ℓ, m são pares, $k \geq 6$, $\ell \geq 6$, $m \geq 6$
        - $k = \ell = m = 6$ é a única possibilidade
          - ladrilhamento regular $(6, 6, 6)$

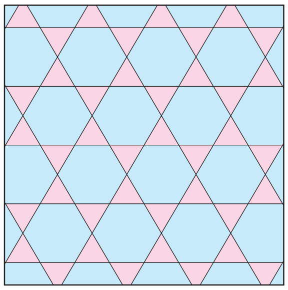
ladrilhamento de padrão (k, l, m, n)

o ladrilhamento faz uso de triângulos

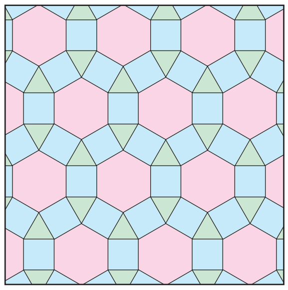
Para simplificar, supomos que $k = 3$

concluímos que,
necessariamente, $\ell = n$
e, portanto,
$(3, \ell, m, n) = (3, \ell, m, \ell)$

ladrilhamento
de padrão $(3, 6, 3, 6)$



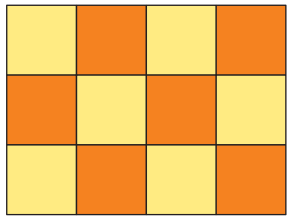
ladrilhamento
de padrão $(3, 4, 6, 4)$



o ladrilhamento não faz uso de triângulos

os inteiros (k, l, m, n) satisfazem
$k \geq 4, \ell \geq 4, m \geq 4, n \geq 4$

ladrilhamento regular
$(4, 4, 4, 4)$
é a única possibilidade



ladrilhamento de padrão (k, ℓ, m, n, p)

↓

o ladrilhamento deve necessariamente fazer uso de triângulos

↓

para simplificar, podemos dizer que $k = 3$

↓

concluímos que, necessariamente, $\ell = p$

↓

o ladrilhamento deve ter um padrão $(3, \ell, m, n, \ell)$

↓

devemos ter, necessariamente, $\ell = 3$ ou $m = n = 3$

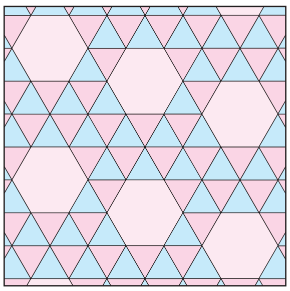
↓ $\ell = 3$

↓

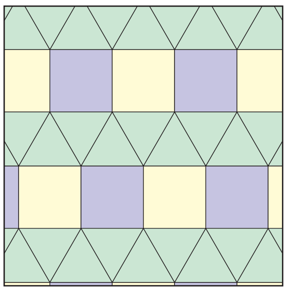
$m = n = 4$,
ou
$m = 3, n = 6$
ou
$m = 6, n = 3$

↓

ladrilhamento de padrão
$(3, 3, 3, 6, 3)$



ladrilhamento de padrão
$(3, 3, 4, 4, 3)$

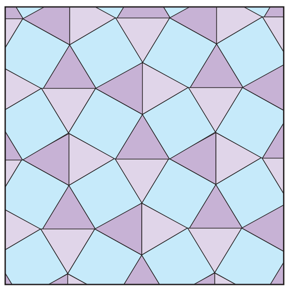


↓ $m = n = 3$

↓ $\ell = 4$

↓

ladrilhamento de padrão
$(3, 4, 3, 3, 4)$



Resumo

- Nenhum ladrilhamento regular ou semirregular pode ter menos que três ou mais que seis polígonos regulares em torno de cada um de seus vértices.
- São três os padrões de ladrilhamento regular e apenas oito os padrões de ladrilhamento semirregular.
- Os ladrilhamentos regulares são os de padrões $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$ e $(6,6,6)$.
- Os semirregulares, com três polígonos em torno de cada vértice, são os de padrões $(3,12,12)$, $(4,8,8)$ e $(4,6,12)$.
- Os semirregulares, com quatro polígonos em torno de cada vértice são os de padrões $(3,4,6,4)$ e $(3,6,3,6)$.
- Finalmente, os com cinco polígonos regulares em torno de cada vértice são os de padrões $(3,3,3,4,4)$, $(3,3,3,3,6)$ e $(3,4,3,3,4)$.

Extra... Extra... "poligonando" as estratégias utilizadas na classificação dos ladrilhamentos regulares e semirregulares, em diagramas resumidos.

Todo ladrilhamento regular ou semirregular tem ao menos três e no máximo seis polígonos regulares ao redor de cada um de seus vértices, sendo, neste último caso, o ladrilhamento regular de padrão $(3,3,3,3,3,3)$ o único existente.

Orientações sobre avaliação

Lembramos que estão à sua disposição, nos recursos do Ambiente Virtual do Matem@tica na Pr@tica, atividades por meio das quais você poderá desenvolver e complementar seus estudos. Sua participação ali é imprescindível, pois nesse recurso interativo está inserido todo o registro de sua avaliação.

Com o propósito de orientar e fazer uma síntese, listamos os itens de conteúdo e habilidades que fazem parte dessa avaliação.

Após ter realizado o desafio geométrico, você deverá ser capaz de:

- Perceber as interações do desafio geométrico com as artes e a arquitetura;
- Entender porque a experimentação resolve o problema do ladrilhamento e porque são feitas hipóteses simplificadoras na busca da solução;
- Construir o material didático necessário para investigar o problema proposto;
- Saber utilizar os simuladores virtuais para estudar ladrilhamentos com polígonos regulares;
- Compreender as técnicas geométricas utilizadas para construir e classificar os ladrilhamentos;
- Adaptar as atividades propostas para sua realidade escolar e propor estratégias criativas para essa transposição.

Lembramos que a avaliação não se destina apenas a aferir conhecimentos e participação. Ela é importante para apontar novos caminhos e para a correção de rumos, tanto para os próprios participantes como para as equipes aplicadoras e proponentes desse curso.

Encerramento

Chegamos ao final dos ciclos 1 e 2 do experimento "desafio geométrico". Esperamos que você tenha aproveitado todo o conhecimento desenvolvido para refletir sobre o ensino de Matemática, bem como sobre seu trabalho cotidiano na sala de aula.

Ao longo deste estudo, abordamos importantes conceitos da Matemática com o objetivo de mostrar que podemos contextualizar e repensar seu ensino na escola. Desejamos que ele tenha sido apenas o início das suas reflexões e experimentações pedagógicas e que você possa continuar o seu trabalho como professor criando e incorporando novas propostas.

O "desafio geométrico" continua no Ciclo 3, em conjunto com os outros dois experimentos, o modelo de despoluição e o jogo dos discos. Você está convidado a aplicar em sala de aula um dos três experimentos. Para auxiliá-lo, disponibilizamos sugestões de aulas no Portal do Professor do MEC. A apresentação do Portal do Professor será feita no Ciclo 3 e pode contribuir no seu trabalho de docência. Neste espaço do Portal do Professor, você poderá buscar recursos e debater com outros professores, trocando e pensando constantemente sobre o ensino de Matemática e sobre a educação no Brasil.

Mas nossos trabalhos não param por aqui! Continuaremos caminhando juntos e refletindo sobre a melhoria do ensino de Matemática em nossas escolas.

Referências

ALVES, S.; DALCIN, M. *Mosaicos do Plano*. Revista do Professor de Matemática, no 40. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 2º quadrimestre de 1999. P. 3-12.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio*. Brasília, Ministério da Educação, 1999.

_____. *Orientações curriculares para o Ensino Médio; Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Volume 2. Brasília, Ministério da Educação, 2008.

_____. *Matriz de Referência para o Enem 2009*. Disponível em: <http://www.mec.gov.br>.

KINSEY, L.C.; MOORE, T. *Symmetry, Shape, and Space*: An Introduction to Mathematics Through Geometry. Emeryville, Key College Publishing, 2001.

Sallum, E. M., *Ladrilhamentos*. <http://matemateca.incubadora.fapesp.br/portal/textos/matemateca/ladrilhos/ladrilhamentos.pdf>.

Anexo

a) Simulador: <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02012/toepassing_wisweb.xml?Xlanguage=en>

b) Software livre de desenho geométrico: <http://www.geogebra.org>

"GeoGebra é um software de matemática dinâmica para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne **GEO**metria, ál**GEBRA** e cálculo. Recebeu muitos prêmios internacionais, incluindo o prêmio de software educacional alemão e europeu."

WebStart: geogebra disponível online