Antônia Jocivania Pinheiro

GEOMETRIA EUCLIDIANA II

EdUFERSA

Antônia Jocivania Pinheiro

GEOMETRIA EUCLIDIANA II

EdUFERSA

Conselho Editorial da EdUFERSA

Mário Gaudêncio, Me.

Walter Martins Rodrigues, Dr.

Francisco Franciné Maia Júnior, Dr.

Rafael Castelo Guedes Martins, Me.

Keina Cristina S. Sousa, Me.

Antonio Ronaldo Gomes Garcia, Dr.

Auristela Crisanto da Cunha, Dr.

Janilson Pinheiro de Assis, Dr.

Luís Cesar de Aquino Lemos Filho, Dr.

Rodrigo Silva da Costa, Dr.

Valquíria Melo Souza Correia, Me.

Governo Federal
Ministro de Educação
Aloizio Mercadante Oliva

Universidade Aberta do Brasil
Responsável pela Diretoria da Educação a Distância
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Reitor
José de Arimatea de Matos

Pró-Reitor de Graduação
Augusto Carlos Pavão

Núcleo de Educação a Distância
Coordenadora UAB
Kátia Cilene da Silva

Equipe multidisciplinar
Antônio Charleskson Lopes Pinheiro - Coordenador de Produção de Material Didático
Ulisses de Melo Furtado – Designer Instrucional
Nayra Maria da Costa Lima – Assessora Pedagógica
Celeneh Rocha de Castro - Coordenadora de Formação Continuada
Thiago Henrique Freire de Oliveira – Gerente de Rede
Edinaldo de Queiroz Fonseca Junior – Webdesigner
Adriana Mara Guimarães de Farias – Programadora
Felipe de Araújo Alves – Designer Gráfico
Renato Cássio Arruda Alves – Designer Gráfico
Paulo Victor Maciel de Morais - Diagramador
Marcos Aurélio Oliveira Ribeiro - Diagramador
Ramon Ribeiro Vitorino Rodrigues - Diagramador

Arte da capa
Felipe de Araújo Alves

Equipe administrativa
Rafaela Cristina Alves de Freitas – Assistente em Administração
Iriane Teresa de Araújo – Responsável pelo fomento
Lucas Vinicius Martins Cunha – Estagiário

Equipe de apoio
Nayra Maria da Costa Lima – Revisora Didática
Ana Mara Alves de Freitas - Revisor Linguístico
Josenildo Ferreira Galdino – Revisor Matemático
Alvaneide Maria de Morais Moura - Revisora Didática

Serviços técnicos especializados
Urbanóide Comunicação & Design

Edição
EdUFERSA

Impressão
Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME

© 2013 by NEaD/UFERSA - Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, do NEaD/UFERSA. O conteúdo da obra é de exclusiva responsabilidade dos autores.

Biblioteca Central Orlando Teixeira – BCOT/UFERSA
Setor de Processos Técnicos – Ficha Catalográfica

P654g Pinheiro, Antônia Jocivania.

Geometria euclidiana II / Antônia Jocivania Pinheiro. – Mossoró : EdUFERSA, 2013.
104 p. : il.

ISBN: 978-85-63145-40-6

1. Matemática. 2. Geometria euclidiana. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 516.2

Bibliotecário-Documentalista
Mário Gaudêncio – CRB-15/476

http://nead.ufersa.edu.br/

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

A Geometria Euclidiana II, também conhecida como geometria espacial, é uma continuação natural da Geometria Euclidiana Plana. Antes, na Geometria Euclidiana I ou Geometria Plana, você trabalhava no plano, agora trabalharemos no espaço, no ambiente em que vivemos. A geometria euclidiana espacial pode ser dividida em duas linhas de estudo: geometria euclidiana espacial de posição e geometria euclidiana espacial métrica. A primeira será vista na primeira unidade do nosso material; a segunda será estudada na segunda e terceira unidades.

Esta disciplina está muito presente em nosso dia a dia.

O planeta em que vivemos, por exemplo, tem o formato de uma grande bola, ou seja, de uma grande esfera, que será um dos sólidos estudados. Vejamos agora alguns exemplos que poderão ser resolvidos com a geometria euclidiana espacial:

1º) Para pintar sua casa, você precisa saber a quantidade de tinta necessária, para isso, deverá saber quantos metros quadrados de parede irá pintar.
2º) Se você vai fazer um aniversário, como saber se a quantidade de suco será suficiente para a quantidade de pessoas convidadas?
3º) Como calcular o volume de uma pedra, ou de um objeto qualquer, ou até mesmo o volume de seu corpo?

Sugiro que faça uma revisão de conhecimentos relacionados à Geometria Euclidiana I, pois esta é pré-requisito para nossa disciplina. Espero ainda ter despertado em você interesse pela disciplina. Estou à disposição para colaborar, no que for preciso, para que tenhamos um trabalho satisfatório.

Seja bem-vindo!

SOBRE O AUTOR

Sou Vania Pinheiro, graduada em matemática e tenho mestrado também em matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC), desde 2010, na área de geometria. Hoje, sou professora do Departamento de Ciências Exatas e Naturais (DCEN) da Universidade Federal Rural do Semi-Àrido -UFERSA.

Durante a graduação fui bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por quatro anos seguidos. Participei dos Encontros Universitários de Iniciação à Pesquisa com os temas abaixo:

1. XXIV Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. "Construção de Caratheodory das Medidas de Hausdorff". 2005.
2. XXV Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. "A Fórmula do Fluxo para Superfície com bordo em R3". 2006.
3. XXVI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. "Teorema de Alexandrov". 2007

Com o sucesso do trabalho apresentado neste último encontro, fui convidada pelo meu orientador, o Professor Antônio Gervasio Colares (currículo Lattes: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?metodo=apresentar&id=K4783217H9>) a desenvolver uma monografia com o título "Superfícies de Curvatura Media Constante em R3". Com mais dois anos de dedicação, agora no mestrado, desenvolvemos um novo trabalho (dissertação de mestrado) que tem como título "Hipersuperfície com r-ésima curvatura média constante positiva imersa em MxR", concluindo com este o mestrado.

SUMÁRIO

I UMA INTRODUÇÃO INTUITIVA E POLIEDROS

Apresentamos, nesta primeira unidade, conceitos básicos da geometria plana e prescrevemos as posições relativas entre retas, entre retas e planos, e entre planos, mostrando casos particulares como: perpendicularidade entre retas e planos, e entre planos. No terceiro tópico desta unidade estudaremos os conceitos de diedros e triedros para entendermos melhor poliedros convexos. Neste, apresentamos as relações básicas e suas propriedades. Temos como objetivo desta unidade:

- Conhecer os objetos primitivos (pontos, retas, planos, ângulos e superfícies) do ponto de vista espacial e ainda, estudar os sólidos geométricos e algumas das numerosas relações que existem entre dois sólidos quando construídos um deles dentro do outro (sólidos inscritos e circunscritos);

Pontos, retas e planos no espaço

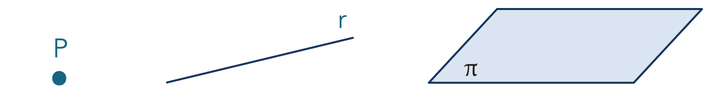
Primeiras noções: conceitos primitivos, postulados e proposições

Os conceitos primitivos são aceitos sem definição. Na Geometria Euclidiana Espacial, são conceitos primitivos ou entes geométricos elementares, os conceitos de pontos, retas, planos e espaço. Lembrando que os três primeiros são os conceitos primitivos da Geometria Euclidiana Plana.

NOTAÇÕES

$$\begin{cases} \text{Ponto-letras maiúsculas latinas:} A,B,C,\ldots \\ \text{Reta – letras minúsculas latinas:} a,b,c,\ldots \\ \text{Plano-letras gregas minúsculas: } \alpha,\beta,\gamma,\ldots \end{cases}$$

GRÁFICAS



O ponto *P* A reta *r* O plano π

Espaço: é o conjunto de todos os pontos. Nesse conjunto desenvolveremos a Geometria Espacial.

Exemplo: Qualquer conjunto de pontos, uma reta, um cubo, uma esfera ou um plano é um subconjunto do espaço.

Axioma: Princípio tão evidente, que não precisa de demonstração. Em matemática, os termos "axioma", "postulado" e "hipótese" são palavras sinônimas.

Exemplo 1: Axioma Fundamental – "Existem infinitos pontos, retas e planos."

Exemplo 2: "Dois pontos distintos, A e B, determinam uma única reta $\overleftrightarrow{AB}$"

Proposição: São propriedades ou afirmações geométricas que são aceitas mediante demonstrações. A proposição se compõe de duas partes: Hipótese e Tese.

Vejamos terminologias para certas proposições, chamamos então de:

Teorema é toda proposição de grande relevância;

Lema é uma proposição que será utilizada na demonstração de outra ou de um teorema;

Corolário é a denominação de toda proposição que é consequência imediata de outra ou de um teorema;

Escólio é qualquer proposição extraída da demonstração de outra.

Axiomas e Proposições

Enunciaremos os axiomas da Geometria Euclidiana Espacial. Você verificará que alguns deles são axiomas da Geometria Euclidiana Plana, estabelecendo com isso relações entre as geometrias.

A_1: Por dois pontos distintos passa uma única reta.

A_2: Por três pontos não colineares passa um único plano.

A_3: Dada uma reta *r,* existem nela, bem como fora dela, infinitos pontos.

A_4: Dado um plano α, existem nele, bem como fora dele, infinitos pontos.

A_5: Se uma reta r têm dois pontos distintos num plano α, então a reta *r* está contida nesse plano.

A_6: Se dois planos têm um ponto em comum, então eles possuem mais de um ponto em comum.

Com esses axiomas podemos provar as seguintes afirmações:

Proposição 1: Dados dois pontos distintos, existe um plano que os contém.

Demonstração:
Sejam *A* e *B* pontos distintos. Pelo Postulado A_1 existe uma reta *r* que passa por *A* e *B*. Pelo Postulado A_3 existe um ponto *C* tal que $C \notin r$. Assim, *A*, *B* e *C* são não colineares e, portanto, segue do axioma A_2 que existe um plano contendo *A*, *B* e *C*.

Proposição 2: Dada uma reta e um ponto fora dela, então eles determinam um único plano que os contém.

A demonstração dessa proposição pode se compor de duas etapas, existência e unicidade.

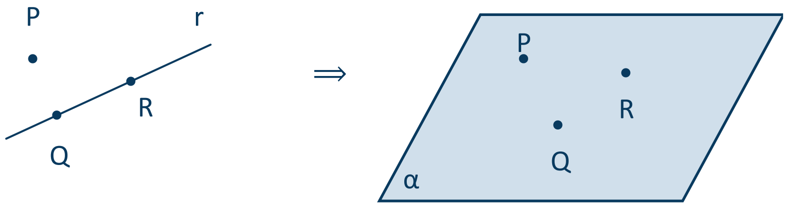
Sejam *P* o ponto, *r* a reta e α o plano.

Hipótese: $P \notin r$

Tese: $\exists!\ \alpha \mid P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$

Demonstração: Tomando dois pontos *Q* e *R*, em r, temos por A_2, que *P*, *Q* e *R* determinam um plano α, já que estes pontos não são colineares pois $P \notin r$ e $Q, R \in r$.

Existência:



Sendo α determinado pelos pontos *P, Q* e *R*, temos que $P \in \alpha$ e como $Q \neq R$ e, além disso, $Q, R \in r$ temos por A_5 que $r \subset \alpha$, isto é, o plano α contém a reta *r*.

Unicidade: Mostraremos que α é o único plano determinado por *r* e *P*. Suponhamos que exista um plano α´, passando por *r* e *P*. Logo, como α´contém *r* e *P*, e *r* contém *Q* e *R* temos que α´é determinado pelos pontos *P*, *Q* e *R*. Mas já temos que α também é determinado por estes pontos, portanto α´= α. Isto é, o plano α é único.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Sejam α e β planos distintos e A e B pontos tais que $A \in \alpha \cap \beta$ e $B \in \alpha \cap \beta$. Responda as seguintes perguntas utilizando os axiomas:

a) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida no plano α?
b) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida no plano β?
c) Você pode garantir que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida na interseção de α e β?

Será que a interseção dos planos α e β contém outros pontos além dos pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$? (Dica: Tome um ponto C, tal que $C \in \alpha \cap \beta$, mas $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Usando o axioma A_2, chegará a uma contradição com relação aos planos serem distintos)

Concluímos do exercício 1 que: "Se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, então, a interseção desses planos é uma reta".

2. Considere r e s retas distintas e P um ponto tal que $r \cap s = \{P\}$. Mostre que as retas r e s são coplanares, isto é, pertencem a um mesmo plano.

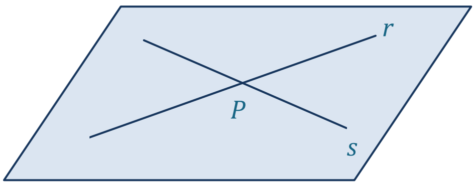
3. Quantas retas podemos traçar por um ponto no espaço? Demonstre.

4. Quantos são os planos determinados por quatro pontos distintos dois a dois? Justifique sua resposta.

Posições relativas entre duas retas

No espaço, duas retas distintas podem ser concorrentes, paralelas ou reversas.

Retas concorrentes: Duas retas r e s são concorrentes quando elas se interceptam num único ponto P.



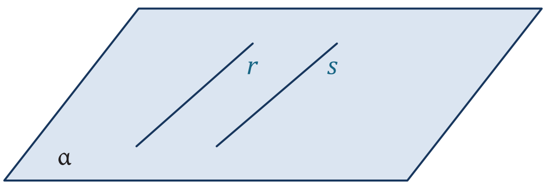
$$r \cap s = \{P\}$$

FIQUE POR DENTRO
Diz-se que duas retas são coplanares quando existe um plano que as contém.

Retas paralelas: Duas retas r e s são paralelas se são coincidentes ou coplanares e não têm ponto em comum. Denotamos por $r /\!/ s$.

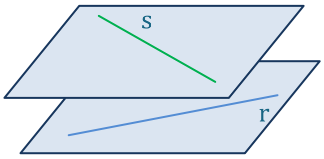
Axioma das paralelas.
Por um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela à reta r.

$$r = s \Longrightarrow r /\!/ s$$



$$r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset \Longrightarrow r /\!/ s$$

Retas reversas: Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Isso significa que não existe plano que as contém. Outra definição seria: Duas retas são ditas reversas quando não são coplanares.

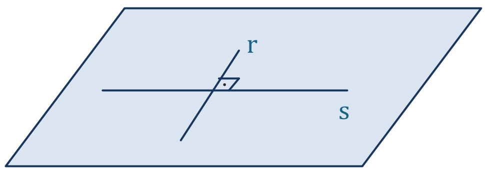


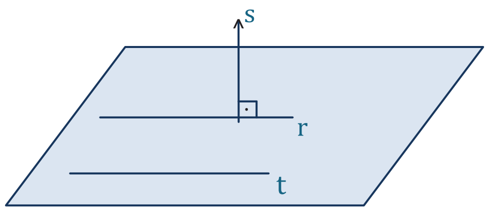
FIQUE ATENTO:
Mostrar que duas retas não se interceptam não é suficiente para concluir que as mesmas são paralelas, pois essas retas podem ser reversas

Concluímos então que:	$r \cap s$	**r** e **s** são coplanares?
Concorrentes	P	Sim
Paralelas	$\emptyset$	Sim
Reversas	$\emptyset$	Não

Casos particulares

$r \perp s$ perpendiculares
$s \perp t$ ortogonais, onde $r // t$.



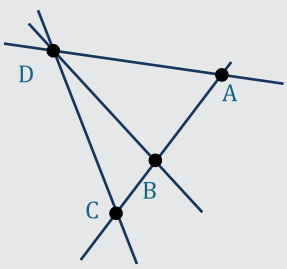


EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Dada uma reta r, marque três pontos distintos A, B e C, em r, e um ponto D fora de r. Quantas retas podemos determinar com esses pontos ?

Solução:

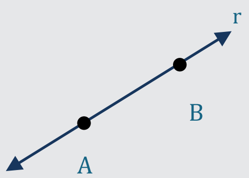
Quatro retas determinadas pelos pontos: AB, AD, BD e CD.



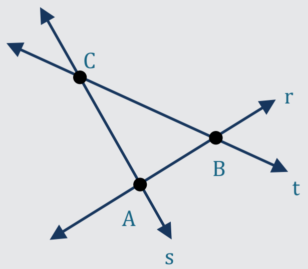
2. Quantas retas há no espaço? Demonstre.

Solução: Infinitas.

De fato, consideremos dois pontos distintos do espaço A e B. Esses pontos determinam uma reta r.



3. Seja C um ponto do espaço, fora da reta r. Os pontos A e C determinam uma reta s, e os pontos B e C determinam uma reta t.

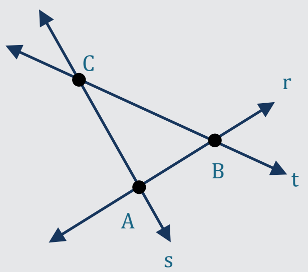


Desse modo, podemos construir "quantas retas quisermos", isto é, construiremos "infinitas" retas.

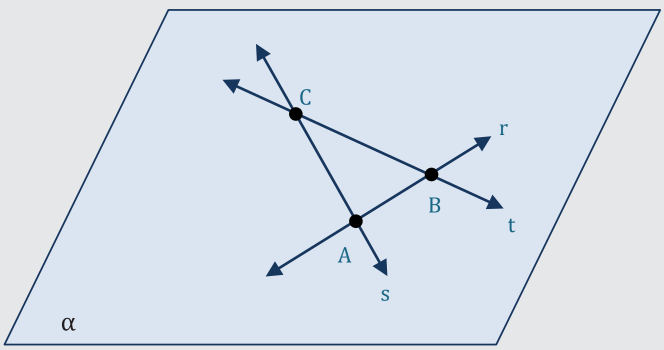
4. Mostre que, três retas duas a duas concorrentes, não passando por um mesmo ponto, estão contidas no mesmo plano.

Solução:

Consideremos três retas r, s e t tais que $r \cap s = \{A\}$, $r \cap t = \{B\}$ e $s \cap t = \{C\}$, onde A, B e C são pontos não colineares.



Dados os pontos A, B e C existe um único plano α que os contém, assim α=(A,B,C).



Sendo os pontos dois a dois distintos e $A,B,C \in \alpha$, temos que r, s e t estão contidas no mesmo plano α, já que $r = \overleftrightarrow{AB}$, $s = \overleftrightarrow{AC}$ e $t = \overleftrightarrow{BC}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

(a) Duas retas ou são coincidentes ou são distintas.
(b) Duas retas ou são coplanares ou são reversas.
(c) Duas retas distintas determinam um plano.
(d) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
(e) Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.
(f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
(g) Duas retas concorrentes são coplanares.
(h) Duas retas coplanares são concorrentes.
(i) Duas retas distintas não paralelas são reversas.
(j) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
(l) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.
(m) Duas retas coplanares ou são paralelas ou são concorrentes.

2. Sejam $\alpha=(P,Q,R)$, onde os pontos P, Q e R são não colineares, e S um ponto fora de α. Responda:

a) A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ está contida no plano α?

b) A reta $\overleftrightarrow{RS}$ está contida no plano α?

c) Existe algum plano que contém as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$, simultaneamente? (Dica: Suponha que existe um plano β que contém as retas e depois basta responder as seguintes perguntas: Os pontos P, Q e R pertencem ao plano β? Os pontos P, Q e R pertencem ao plano α? Pode-se dizer que os planos α e β são coincidentes?)

d) As retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ são coplanares?

e) Qual a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$?

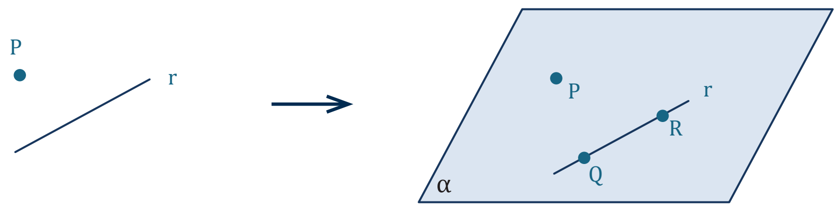
Esta questão nos dá o roteiro necessário para demonstrar que duas retas são reversas.

Determinação de planos

O axioma A_2 garante que três pontos não colineares determinam um único plano. Aqui veremos outros três conjuntos de elementos que determinam planos.

Proposição 1: Uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano.

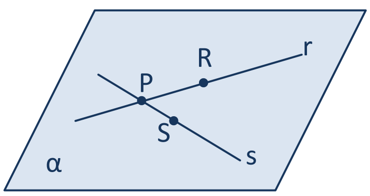
Demonstração: Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Tome, em r, dois pontos distintos Q e R.



Como Q e R pertencem à reta r e $P \notin r$, temos que P, Q e R são não colineares, logo, pelo axioma A_2, existe um único plano α determinado pelos pontos P, Q e R, isto é, $\alpha=(P,Q,R)$. Temos pelo axioma A_5 que $r \subset \alpha$, já que $Q,R \in r$ e $Q,R \in \alpha$. Concluímos, então, que existe um plano α determinado por P e r, ou seja, $\alpha=(P,r)$.
Para mostrar a unicidade, suponha que existe outro plano β, determinado por P e r. Assim, teríamos que $\beta=(P,r)$, como $Q,R \in r$, concluímos que $\beta=(P,Q,R)$. Mas temos pelo axioma A_2 que três pontos não colineares determinam um único plano, logo, $\alpha=\beta$.

Proposição 2: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

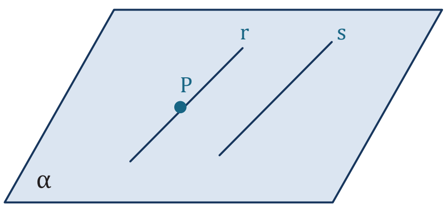
Demonstração: Sejam r e s retas e P um ponto, tal que $r \cap s=\{P\}$. Tome em r um ponto R e em s um ponto S, tais que ambos sejam diferentes de P. Logo P, R e S são não colineares, portanto, pelo axioma A_2, determinam um único plano $\alpha=(P,Q,R)$. Como $P,R \in r \cap \alpha$ e $P,S \in s \cap \alpha$, temos pelo axioma A_5 que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$, respectivamente. Portanto existe um plano α determinado por r e s, ou seja, $\alpha=(r,s)$.



Para mostrar a unicidade, suponha que existe outro plano β, determinado por r e s, ou seja, $\beta=(r,s)$. Como $P,R \in r$ e $P,S \in s$, concluímos que $\beta=(P,R,S)$. Mas, pelo axioma A_2, concluímos que, $\alpha=\beta$.

Proposição 3: Duas retas paralelas determinam um único plano.

Demonstração: Como duas retas paralelas são coplanares temos que existe um plano α que contém r e s, portanto, $\alpha=(r,s)$. Para mostrar a unicidade, considere a reta s e um ponto P de r. Sabemos, pela proposição 1, que dado uma reta e um ponto fora dela existe um único plano β que os contenha. Mas, a reta s e o ponto P estão contidos em α e também em β, portanto, $\alpha=\beta$.

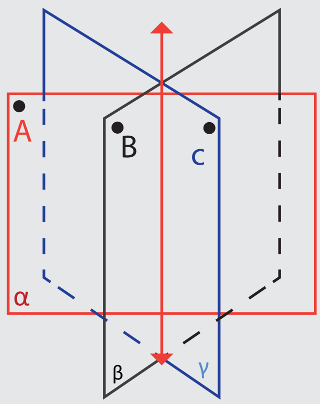


EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Quantos são os planos que passam por uma reta dada? Justifique sua resposta.

Solução:

Infinitos.
Seja r a reta dada. Como existem infinitos pontos fora de r (axioma A_3), tomemos A um ponto fora de r. Temos então, pela proposição 1, que a reta r e o ponto A determinam um plano α. Fora do plano α existem infinitos pontos (axioma A_4), tomamos um ponto B. Desse modo, temos que a reta r e o ponto B determinam um plano β (proposição 1). Fora de α e β, tomamos um ponto C. A reta r e o ponto C determinam um plano γ.



Desse modo, podemos construir, por r, tantos planos quantos quisermos, isto é, construiremos infinitos planos.

2. Quantos planos passam por dois pontos distintos? Justifique sua resposta.

Solução: Infinitos.

Sejam A e B tais pontos distintos. Pelo axioma A_1, temos que existe uma única reta r passando por eles. Logo, como vimos no exercício anterior, existem infinitos planos passando pela reta r, portanto, pelos pontos A e B.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1.Classifique em verdadeiro(V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

(a) Três pontos distintos determinam um plano.
(b) Um ponto e uma reta determinam um único plano.
(c) Duas retas distintas paralelas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.
(d) Três retas distintas, duas a duas paralelas, determinam um ou três planos.
(e) Três retas distintas, duas a duas concorrentes, determinam um ou três planos.

2. Sejam α um plano e P um ponto fora de α. Dadas duas retas concorrentes r e s, em α, identifique a interseção do plano determinado por r e P com o plano determinado por s e P. (Dica: Note que você terá dois pontos que estão em ambos os planos e use o axioma A_1).

3. Dadas duas retas reversas r e s, sejam P e Q pontos de r e s, respectivamente. Os planos determinados por r e Q e por s e P, se interceptam? Caso a resposta seja afirmativa, identifique a interseção.

4. Considere os triângulos ABC e DEF situados em planos distintos, tais que as retas AB, AC e BC encontram as retas DE, DF e EF nos pontos P, Q e R, respectivamente. Mostre que P, Q e R são colineares. (Dica: Note que as retas AB e DE estão contidas nos planos que contêm os triângulos ABC e DEF, respectivamente. Como P pertence às retas AB e DE, temos que P pertence a interseção dos plano. Analogamente, você poderá verificar que os pontos Q e R também pertencem a essa interseção).

5. Sejam r e s retas paralelas distintas e t concorrente com as duas, mostre que r, s e t são coplanares.

6. Dadas duas retas paralelas distintas r e s, e um plano α, que contém P e s, onde P r, mostre que α contém r.

SAIBA MAIS

Você sabia que banquinhos (ou mesas) com três pés são estáveis, ou seja, não balançam, mesmo que a altura dos pés tenham tamanhos diferentes?

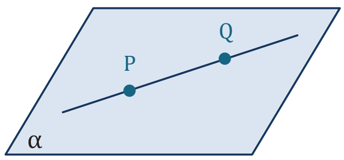
A explicação desta curiosidade você encontrará nos links abaixo:

<http://www.klickeducacao.com.br/bcoresp/bcorespmostra/0,5991,POR-1908-h,00.html>

<http://www.professor.bio.br/matematica/provas_topicos.asp?topico=Retas%20e%20planos>

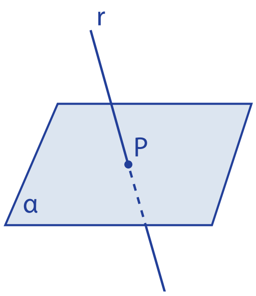
Posições relativas entre reta e plano

São três as posições relativas entre uma reta e um plano: a reta está contida no plano, eles são secantes ou são paralelos. O primeiro caso ocorre quando a reta e o plano têm em comum, pelo menos, dois pontos. Se a reta não está contida no plano, então existem duas possibilidades: a reta intercepta o plano ou não intercepta.



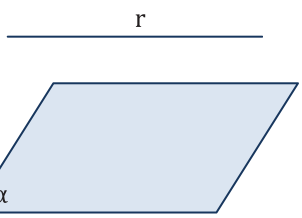
$r \subset \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = r$

Definição 1: Dizemos que uma reta é secante (ou concorrente) a um plano, quando possuem um único ponto comum.



$r \cap \alpha = \{P\}$

Definição 2: Uma reta r é paralela a um plano α se, e somente se, r e α não possuem pontos comuns.



$r // \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \emptyset$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Se uma reta é paralela a um plano então essa reta é paralela a uma reta desse plano.

Solução:

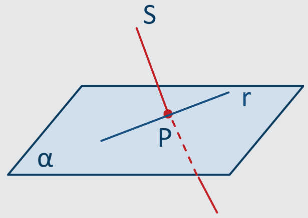
Sejam r uma reta e α um plano, tais que r//α. Tome um ponto P∈α qualquer. Seja β o plano determinado por P e r. Como P∈α∩β, temos pelos axiomas A_6 e A_1, respectivamente, que existe uma reta s, contendo P, tal que α∩β=s. Como as retas r e s são coplanares (r,s⊂β) e r∩s=∅, já que, r∩α=∅, temos que r//s.

2. Sejam r e s retas e α um plano, tais que r ⊂ α e s é concorrente ao plano α. Quais podem ser as posições relativas entre r e s?

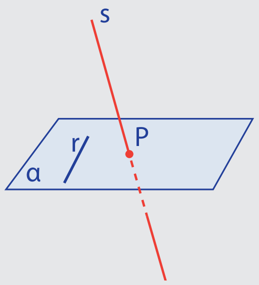
Solução:

Seja P o ponto de intersecção de s e α, isto é, s ∩ α={P}. Há, então, duas possibilidades:

i) A reta r contém P: neste caso, r e s são concorrentes;



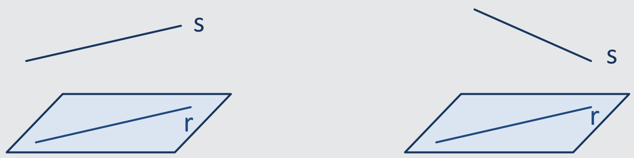
ii) A reta r não contém P: logo, r e s são reversas.



iii) A reta paralela ao plano α e r uma reta contida em α. Quais podem ser as posições relativas de r e s?

Solução:

Como s // α, temos que s ∩ α=∅, logo s ∩ r=∅, já que r ⊂ α. Temos então que s e r não podem ser concorrentes, portanto só podem ser paralelas ou reversas.



EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

(a) Uma reta e um plano que têm um ponto comum são concorrentes.
(b) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.
(c) Se uma reta está contida num plano, eles têm um ponto comum.
(d) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano.
(e) Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta dada.
(f) Se uma reta é paralela a um plano, existe no plano uma reta concorrente com a reta dada.

2. Seja r uma reta paralela ao plano α. Mostre que existem infinitas retas em α paralelas a r.

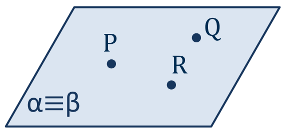
3. Dadas duas retas reversas r e s, construa por s um plano paralelo a r.

4. Sejam α e β dois planos secantes e P um ponto fora de α e β. Construa por P uma reta paralela aos dois planos secantes.

DICA
Use o mesmo raciocínio da primeira questão resolvida.

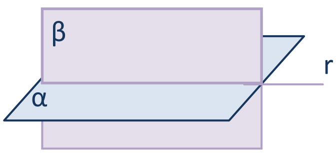
Posições relativas entre dois planos

Dois planos podem apresentar em comum:



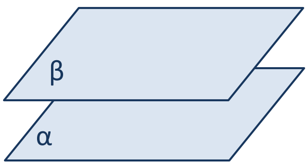
Planos coincidentes ou iguais
α≡β

Uma única reta



Planos concorrentes ou secantes
$\alpha \cap \beta = r$

Nenhum ponto em comum



Planos paralelos $\alpha // \beta$
$\alpha \cap \beta = \emptyset$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Sejam α e β dois pontos distintos e paralelos. Mostre que toda reta r de α é paralela ao plano β.

Solução:

Sendo α e β planos paralelos distintos e $r \subset \alpha$, mostraremos que $r \parallel \beta$. Para isso, faremos uso do método indireto de demonstração, ou seja, vamos supor que a reta r não seja paralela ao plano β. Logo, existe pelo menos um ponto $A \in r$, tal que $A \in \beta$. Como $r \subset \alpha$, temos que $A \in \alpha$. Portanto, $A \in \alpha \cap \beta$. Mas isso é um absurdo, já que, por hipótese, $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Concluímos então que $r \parallel \beta$.

2. Se dois planos são paralelos, todo plano que encontra um deles encontra o outro.

Solução:

Sejam α,β e γ três planos distintos e r uma reta, tais que $\alpha \parallel \beta$ e $\alpha \cap \gamma = r$. Provaremos que γ encontra β segundo a reta s, isto é, $\gamma \cap \beta = s$. Seja t uma reta em γ, concorrente com a reta r. Como $\gamma \neq \alpha$, concluímos que t é concorrente com α. Sendo $\alpha \parallel \beta$, teremos que t é concorrente com o plano β em um ponto, Q. Logo, como $Q \in t \subset \gamma$, temos que $Q \in \gamma \cap \beta$ e, portanto existe uma reta, s, tal que $Q \in s$ e $\gamma \cap \beta = s$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

a) ( ) Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro.
b) ( ) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
c) ( ) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser reversa com uma reta do outro.
d) ( ) Dois planos distintos paralelos têm um ponto em comum.
e) ( ) Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um deles é paralela ao outro.
f) ( ) Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um e outra reta de outro podem ser concorrentes.
g) ( ) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
h) ( ) Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um e uma reta do outro são reversas ou paralelas.

2. Dois planos α e β são paralelos distintos e uma reta r é paralela ao α. Quais as posições relativas de r e β?

3. Se dois planos são paralelos e interceptam um terceiro, então as interseções são paralelas?

4. Construa por um ponto P um plano paralelo a duas retas reversas.

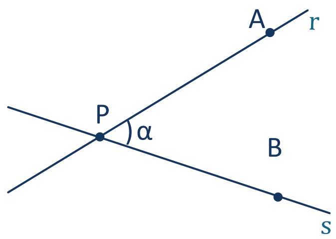
Perpendicularidade e Aplicações

Ângulo entre retas e entre reta e plano

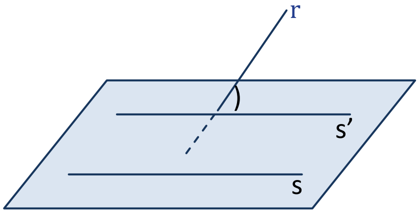
Definição 1 (Ângulos entre retas): Dadas duas retas distintas r e s, temos que elas são paralelas, concorrentes ou reversas, logo:

(i) Se r e s são paralelas, dizemos que o ângulo entre r e s é 0º. Denotamos por $\measuredangle(r, s)$.

(ii) Se r e s são concorrentes, dizemos que o ângulo entre r e s é o ângulo α, $0<\alpha\leq 90°$, determinado pelas semirretas $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$, onde A e B são pontos de r e s, respectivamente e P é o ponto de interseção de r e s.



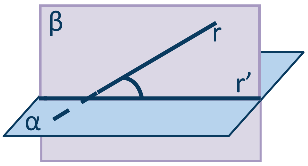
(iii) Se r e s são retas reversas, dizemos que o ângulo entre r e s é o ângulo entre a reta r e uma reta s' paralela à reta s e que é concorrente com a reta r.



Concluímos então que o ângulo entre duas retas r e s quaisquer varia entre 0° e 90º, ou seja, $0\leq\measuredangle(r, s)\leq 90°$.

Definição 2: Dizemos que duas retas r e s são ortogonais quando $\measuredangle(r, s)=90º$. Se além de ortogonais, as retas r e s forem concorrentes, então se diz que r e s são perpendiculares

Definição 3 (Ângulos entre reta e plano): Dada uma reta r e um plano α oblíquos, definimos o ângulo entre r e α, denotado por $\measuredangle(r, \alpha)$, como sendo o ângulo agudo que a reta forma com a sua projeção ortogonal sobre o plano.



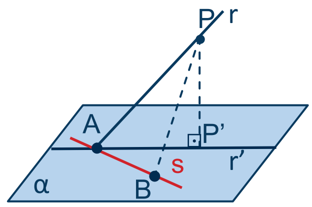
$\measuredangle(r, \alpha) = \measuredangle(r, r')$, onde $r' = proj_{\alpha} r$

Observação: Se a reta r é paralela ou está contida num plano α, temos que o ângulo entre r e α é nulo ($r \,//\, \alpha$ ou $r \subset \alpha \Leftrightarrow \measuredangle(r, \alpha)=0º$).

Uma justificativa para a definição de ângulo entre reta e plano é dada pelo teorema a seguir:

Teorema: Se uma reta r é oblíqua a um plano α e r ∩ α = {A}, então ∡(r, r')< ∡(r, s), onde r' = $proj_\alpha$ r e s é uma reta qualquer em α contendo o ponto A.

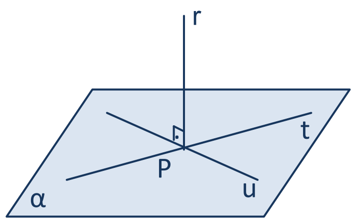
Demonstração:



Seja B um ponto de s tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AP}$, onde P' = $proj_\alpha$ P. Sendo $\overline{PP'} \perp$ α e $\overline{PB}$ oblíquo a α temos que $\overline{PP'} < \overline{PB}$. Analisando os triângulos PAP' e PAB temos $\overline{AP}$ comum, $\overline{AP'} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{PP'} < \overline{PB}$, logo P$\hat{A}$P' < P$\hat{A}$B, isto é, ∡(r, r') < ∡(r, s).

Perpendicularismo entre reta e plano

Definição 1: Dada uma reta r concorrente ao plano α no ponto P, dizemos que r é perpendicular ao α, se r é perpendicular a toda reta contida no plano que passa pelo ponto P. Chamamos o ponto P de pé da perpendicular.



Definição 2: Uma reta e um plano são oblíquos se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

Pra que estudar Perpendicularidade?
Essa proposição, por exemplo, justifica o fato de que numa pirâmide regular o segmento determinado pelo vértice da pirâmide e o centro da base é ortogonal a todo segmento contido no plano da base dessa pirâmide. (assunto do capitulo 5)

Proposição 1: Se uma reta r é perpendicular ao plano α no ponto P, então r é perpendicular ou ortogonal a toda reta de α.

Demonstração: Seja s uma reta qualquer de α. Duas possibilidades podem ocorrer:

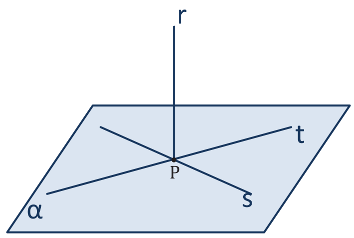
1ª) P∈s
Neste caso, como r é perpendicular ao plano α temos pela definição 1 que r é perpendicular a toda reta contida no plano que passa pelo ponto P, logo r é perpendicular à reta s.

2ª) P∉s
Neste caso, como s⊂α e s∩r=∅ temos que r e s são reversas, logo existe uma reta s' paralela à s, tal que s'∩r={P}. Novamente, pela definição 1, temos que r é perpendicular à reta s', isto é, ∡(r, s')=90º. Logo, pela definição de ângulos entre retas reversas, temos que, ∡(r, s)=∡(r, s')=90º, ou seja, r é ortogonal a reta s.

Para demonstrar que uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, devemos mostrar pela definição 1 que r é perpendicular a toda reta contida no plano que passa pelo ponto P. Mas, temos infinitas retas em α passando por este ponto. Para facilitar enunciaremos uma proposição, onde a qual garante que basta mostrarmos que r é perpendicular a duas retas concorrentes do plano α.

Proposição 2: Para que uma reta seja perpendicular a um plano basta ser perpendicular a duas retas concorrente desse plano.

$$r \perp \alpha \iff \begin{cases} \exists s, t \in \alpha \\ \ \ r \perp s \quad , com\ s \cap t = \{P\} \\ \ \ r \perp t \end{cases}$$



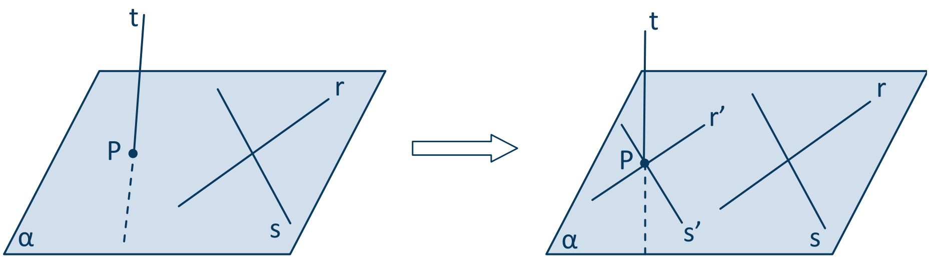
SAIBA MAIS

A demonstração da proposição 2 poderá ser encontrada no link abaixo (página 4):

<http://www.uems.br/profmat/arquivos/aulas/MA13/Unidade17e18/MA13_U17.pdf>

Corolário: Sejam r e s retas concorrentes pertencentes ao plano α. Se t é uma reta ortogonal à r e à s, então t é perpendicular a esse plano.

Demonstração: Como t é uma reta ortogonal às retas r e s que estão contidas no plano α, temos que t fura o plano α, seja P o ponto tal que t∩α={P}, e ∡(t, r)=∡(t, s)=90º.



Dado o ponto P e a reta r, sabemos que existe uma única reta paralela à r passando por P, seja r' essa reta. Do mesmo modo, seja s' uma reta paralela à s passando por P. Como a reta r' é paralela à reta r temos que ∡(t, r')=∡(t, r)=90º. Assim, as retas r' e t são perpendiculares. Analogamente, as retas s' e t são perpendiculares. Temos então que t é uma reta perpendicular às retas concorrentes r' e s', contidas no plano α. Portanto, a proposição 2 garante que a reta t é perpendicular ao plano α.

Proposição 3: Dados um ponto P e uma reta r pode-se traçar um único plano α que passa por P e é perpendicular à reta r.

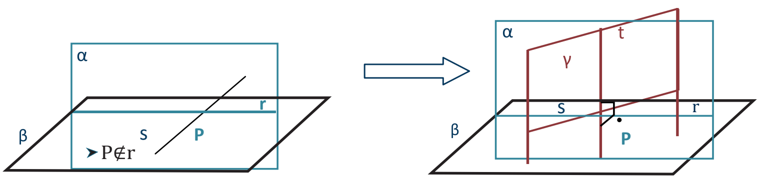
Demonstração: A demonstração dessa proposição se divide em duas partes: a primeira provará a existência do plano e por último verificará sua unicidade.

Existência

Analisemos os casos em que P∈r e P∉r:

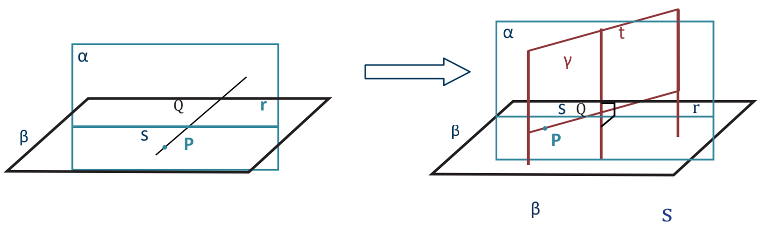
- P∈r

Sejam α e β dois planos distintos contendo a reta r, isto é, α∩β=r. Seja s uma reta no plano β perpendicular à r passando por P. No plano α, trace a reta t perpendicular à reta r. Como as retas s e t são concorrentes em P, temos que elas determinam um plano γ. Assim, a reta r é perpendicular ao plano γ, já que r é perpendicular às retas concorrentes s e t do plano γ (Proposição 2).



▶ $P \notin r$

Sabemos que uma reta r e um ponto P fora dela determinam um único plano, seja β este plano. Seja s uma reta de β tal que s passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r. Seja Q o ponto de interseção de r e s. Considere um plano α, distinto de β, que contém a reta r. No plano α, trace a reta t perpendicular à reta r pelo ponto Q. Note que, as retas s e t são concorrentes em Q, logo determinam um plano γ. Assim, a reta r é perpendicular ao plano γ, já que r é perpendicular às retas concorrentes s e t do plano γ (Proposição 2).



Em qualquer caso, dados uma reta r e um ponto P qualquer se pode traçar um plano γ perpendicular à reta r que passa por P.

Unicidade

Provaremos a unicidade apenas para o caso em que $P \in r$. O outro caso segue análogo. Considerando β o plano que contem à reta r. Suponha que γ não é único, isto é, existe outro plano θ que passam pelo ponto P e é também perpendicular à reta r. Como o ponto P pertence aos planos β e γ, esses planos se interceptam segundo uma reta s, que passa por P. Analogamente, os planos β e θ também se interceptam segundo uma reta s' que passa por P. Logo as retas r, s e s' são coplanares, já que estão contidas no plano β.

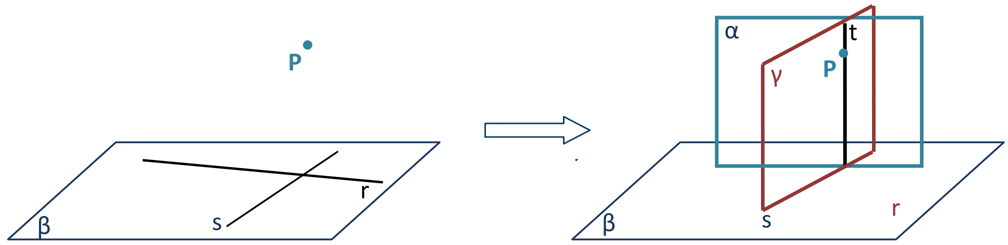
Além disso, as retas s e s' são duas perpendiculares à reta r que passam por P, pois ambas foram tomadas em planos perpendiculares a reta r. Mas isso é impossível sabendo-se que por um ponto P pode-se traçar uma única reta perpendicular a uma reta dada. Assim, não pode existir outro plano que passa pelo ponto P e é também perpendicular à reta r. Concluímos que se $P \in r$ então o plano γ é o único que passa por P e é perpendicular à reta r.

Proposição 4: Dados um ponto P e um plano β pode-se traçar uma única reta t que passa por P e é perpendicular ao plano β.

Demonstração: Dados o plano β e o ponto P, existem duas possibilidades: $P \notin \beta$ ou $P \in \beta$. Provaremos a existência e a unicidade da reta para o caso $P \notin \beta$, a demonstração do outro caso é análoga e deixaremos como exercício.

Existência

Considerando que o ponto P não pertence ao plano β, trace em β duas retas concorrentes quaisquer, r e s.



Sabemos da proposição anterior que dados um ponto e uma reta pode-se traçar um único plano que passa pelo ponto e é perpendicular à reta dada, logo dado o ponto P e as retas r e s, sejam α e γ os planos que passam por P e são perpendiculares às retas s e r, respectivamente. Mas da Proposição 1 temos que se uma reta é perpendicular a um plano então essa reta é ortogonal a todas as retas contidas nesse plano. Assim, a reta r é ortogonal a todas as retas contidas no plano γ e a reta s é ortogonal a todas as retas contidas no plano α.

Por outro lado, os planos α e γ possuem o ponto P em comum, logo esses planos se interceptam segundo uma reta t que passa pelo ponto P. Concluímos então, que a reta r é ortogonal a reta t, pois a reta t está contida no plano γ e de modo análogo, a reta s é ortogonal a reta t, pois t está contida no plano α. Logo a reta t é ortogonal as retas r e s, que são concorrentes e estão contidas no plano β. Portanto, pelo Corolário temos que a reta t é perpendicular ao plano β.

Unicidade

Considerando que o ponto P não pertence ao plano β, suponha que a reta t não é única, isto é, suponha que existe t e t' distintas passando pelo ponto P e perpendiculares ao plano β. Como t e t' passam, ambas, pelo ponto P temos que elas são concorrentes, logo determinam um plano. Seja α o plano determinado por t e t'. Como $t \subset \alpha$ e t intercepta β em um ponto, já que t é perpendicular ao plano β, temos que os planos α e β possuem um ponto em comum, então esses planos se interceptam segundo uma reta. Seja r esta reta, isto é, $r = \alpha \cap \beta$.

Sendo t perpendicular ao plano β, temos que t é ortogonal a todas as retas contidas no plano β, em particular à reta t é ortogonal à reta r. Mas, as retas t e r são concorrentes, logo t é perpendicular à reta r. Analogamente, temos que t' é perpendicular a reta r.

Como as retas t, t' e r estão ambas no plano α, temos que elas são coplanares. Mas isso não pode ser verdade, já que por um ponto P pode-se traçar uma única reta perpendicular a uma reta dada. Portanto, concluímos que pelo ponto P é possível construir uma única reta r perpendicular ao plano β.

Os resultados obtidos até aqui possibilitam a obtenção de algumas relações entre paralelismo e perpendicularismo. Vejamos a seguir:

- Se dois planos são perpendiculares à mesma reta, então eles são paralelos.
- Se dois planos são paralelos, então qualquer reta perpendicular a um deles é também perpendicular ao outro.
- Se duas retas são paralelas, então todo plano perpendicular a uma delas é também perpendicular a outra.
- Se duas retas são perpendiculares ao mesmo plano, então elas são paralelas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Classifique em verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta.

a)Uma reta e um plano secantes são perpendiculares?

Resposta: Falso, já que a reta e o plano podem ser secantes oblíquos.

b)Se uma reta for perpendicular a um plano, ela é perpendicular a infinitas retas desse plano?

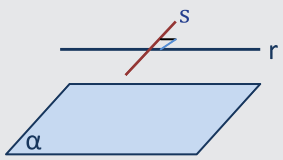
Resposta: Verdadeiro, pela definição de perpendicularismo entre reta e plano.

c)Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano?

Resposta: Falso, a reta pode está contida no plano e ser perpendicular a duas retas paralelas dele.

d)Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano?

Resposta: Falso, veja a figura abaixo.

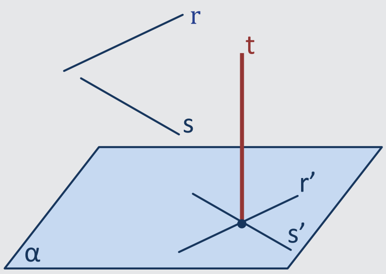


r $\parallel \alpha$, $s \perp r$ mas s $\parallel \alpha$

2. Construa por um ponto P dado, uma reta t ortogonal a duas reversas r e s e mostre que a reta t é única.

Solução:

Existência: Suponha que o ponto P não pertence nem à reta r, nem à reta s. Dado o ponto P existe uma única reta paralela à r passando por P e também existe uma única reta paralela à s passando por P. Sejam r’ e s’ tais retas, respectivamente. Desse modo as retas r’ e s’ são concorrentes em P, logo determinam um único plano α. Dado o ponto P e o plano α, a proposição 4 garante que você pode traçar uma única reta t que passa por P e é perpendicular ao plano α. Assim, a reta t é ortogonal a todas as retas contidas em α. Em particular, t é perpendicular à r’ e como r é paralela à r’, temos que t é ortogonal à r. Analogamente, concluímos que t é ortogonal à s.



Observação: Se o ponto P pertencer a uma das retas, digamos P∈r, a demonstração segue análoga, a diferença é que o plano será formado pelas retas r e s’, onde s’ é paralela à s passando por P.

Unicidade: Suponha que além de t existe outra reta t’ ortogonal às retas r e s passando por P. Como as retas r’ e s’ são paralelas às retas r e s, respectivamente, temos que t’ é também ortogonal às retas r’ e s’. Consequentemente, t’ é perpendicular ao plano α e passa por P. Logo, existem duas retas t e t’ passando pelo ponto P e perpendiculares ao plano α, mas isso contradiz a proposição 4. Portanto, a reta t é a única ortogonal às retas r e s passando por P.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

a) ( ) Para que uma reta e um plano sejam perpendiculares é necessário que eles sejam secantes.
b) ( ) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.
c) ( ) Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.
d) ( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
e) ( ) Uma reta ortogonal a duas retas paralelas e distintas de um plano pode ser paralela ao plano.

2. Construa por um ponto P dado, uma reta t ortogonal a duas retas concorrentes r e s e mostre que a reta t é única.

3. Seja r uma reta perpendicular ao plano α no ponto P. Mostre que uma reta s é perpendicular à r em P se, somente se, a reta s está contida em α. (Dica: (⇒) Verifique que as retas r e s determinam um plano β e que esse plano intercepta o plano α segundo uma reta t, depois veja que as retas r, s e t são coplanares e conclua mostrando que s=t, para isso use o fato que, em um plano, dado uma reta existe uma única reta perpendicular passando por um ponto da reta dada. (⇐) A volta é imediata, use o seguinte fato, como r é perpendicular ao plano α, então a reta r é perpendicular a todas as retas contidas em α e que passam por P)

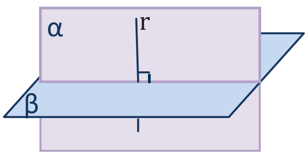
4. Considere uma reta s, contida em um plano α, e uma reta r perpendicular à s. Então, necessariamente (Justifique cada item):

(a) r é perpendicular à α.
(b) r e s são coplanares.
(c) r é paralela à α.
(d) r está contida em α.
(e) Todas as retas paralelas à r interceptam s.

5. Qual a posição relativa entre dois planos distintos, sabendo que os mesmos são perpendiculares a uma mesma reta?

Perpendicularismo entre Planos

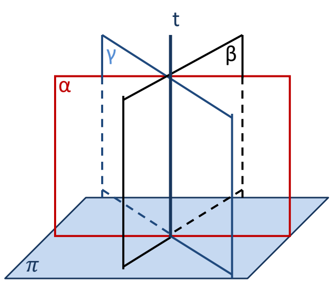
Definição 1: Dois planos são ditos perpendiculares quando um contém uma reta perpendicular ao outro.



$\alpha \perp \beta \iff \exists\, r \subset \alpha$ tal que $r \perp \beta$

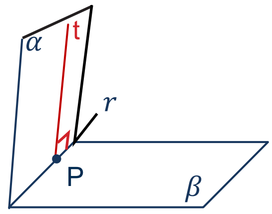
Proposição 1: Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer outro plano que a contenha é perpendicular ao primeiro.

Demonstração: Seja t uma reta perpendicular ao plano π. Seja α um plano qualquer que contém a reta t, isto é, $t \subset \alpha$. Como α contém a reta t e essa é perpendicular ao plano π, temos pela definição 1 que $\alpha \perp \pi$. Analogamente, provamos para qualquer outro plano que contenha a reta t.

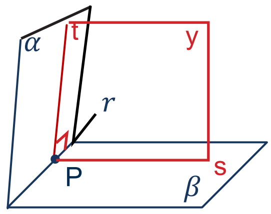


Proposição 2: S*e* dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles que é perpendicular à interseção desses planos, é perpendicular ao outro.

Demonstração: Sejam α e β planos perpendiculares e r a reta de interseção desses planos, isto é, r=α ∩ β. Seja ainda t uma reta de α que é perpendicular à reta r no ponto P. Provaremos que a reta t é perpendicular ao plano β.



Trace uma reta s perpendicular à reta r no ponto P. Como s ∩ t={P}, temos que as retas s e t determinam um plano. Seja γ este plano.



Como a reta r é perpendicular às concorrentes t e s, temos que r é perpendicular ao plano γ. Como o plano γ é perpendicular à reta r, temos que o ângulo entre t e s é igual ao ângulo entre α e β, mas ∢(α, β)=90° 0 temos que ∢(t, s)=90°. Logo a reta t é perpendicular às retas s e r que são duas retas concorrentes contidas no plano β. Portanto, t é perpendicular ao plano β.

Definição 2: Dois planos são ditos oblíquos quando são secantes e não perpendiculares.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

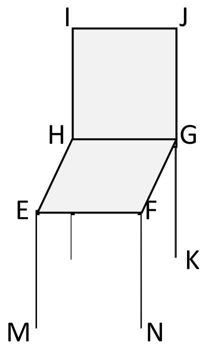
a) ( ) Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.
b) ( ) Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.
c) ( ) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
d) ( ) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.
e) ( ) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.

2. Sejam α um plano e P um ponto que não pertence ao α. Quantos planos que contêm P são perpendiculares a α?

3. Classifique as sentenças como verdadeiras (V) ou falsas (F), representando em um desenho a situação verdadeira ou um contraexemplo que comprove a falsidade da afirmação.

a) ( ) Dois planos distintos perpendiculares a um mesmo plano são paralelos.
b) ( ) Por um ponto não pertencente a um plano, pode-se conduzir uma única reta perpendicular a esse.
c) ( ) Se dois planos são perpendiculares, uma reta contida em um deles é perpendicular ao outro.
d) ( ) Por uma reta não pertencente a um plano, pode-se conduzir apenas um plano perpendicular a este.

4. Na cadeira, representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este paralelo ao chão:

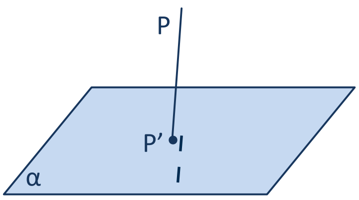


Sendo assim, classifique como verdadeiro ou falso e justifique sua resposta:
i) Os planos EFN e EGJ são paralelos.
ii) HG é um segmento de reta comum aos planos EFJ e EFH.
iii) Os planos EFN e HIJ são paralelos.
iv) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.
v) Os planos MNL e HIJ são perpendiculares

Projeção ortogonal sobre um plano

Projeção de um Ponto

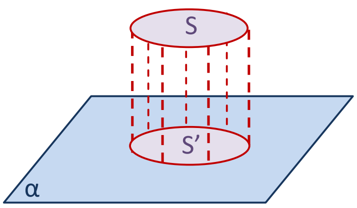
Definição: A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é a interseção do plano com a reta perpendicular a ele, passando pelo ponto P. Denotamos por $P' = proj_\alpha P$.



$P' = proj_\alpha P$

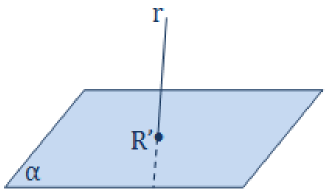
Projeção de uma Figura Geométrica

Definição 1: A projeção ortogonal (S’) de uma figura geométrica S (qualquer conjunto de pontos) sobre um plano α é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos de S sobre α. Denotamos $S' = proj_\alpha S$.



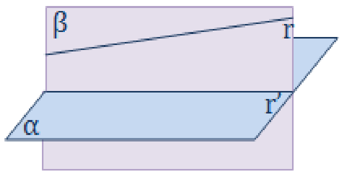
$S' = proj_\alpha S$

Definição 2 (Projeção de uma reta perpendicular ao plano): Se a reta r é perpendicular ao plano α, teremos como projeção ortogonal exatamente um ponto, digamos R'.



$R' = proj_{\alpha} r$

Definição 3 (Projeção de uma reta não perpendicular ao plano): Chama-se projeção ortogonal de uma reta r, não perpendicular a um plano α, sobre esse plano, ao traço em α, do plano β, perpendicular ao α, conduzido por r.



$r' = proj_{\alpha} r$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

a) ( ) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.
b) ( ) A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é sempre um segmento.
c) ( ) A projeção ortogonal, sobre um plano, de um segmento contido em uma reta, não perpendicular ao plano, é menor que o segmento ou congruente a ele.
d) ( ) Se um segmento tem projeção ortogonal congruente a ele, então ele é paralelo ao plano de projeção ou está contido nele.
e) ( ) A projeção ortogonal de um triângulo, sobre um plano, é sempre um triângulo.
f) ( ) Se as projeções ortogonais de duas retas sobre um plano são paralelas, então as retas são paralelas.
g) ( ) Duas retas paralelas não perpendiculares ao plano de projeção têm projeções paralelas.

2. Mostre que, se um segmento de reta é obliquo a um plano, então sua projeção ortogonal sobre esse plano é menor que o segmento.

3. Dadas duas retas concorrentes, quais as posições relativas das projeções ortogonais dessas sobre um plano?

4. Dadas duas retas reversas, quais as posições relativas das projeções ortogonais dessas sobre um plano?

Distâncias geométricas

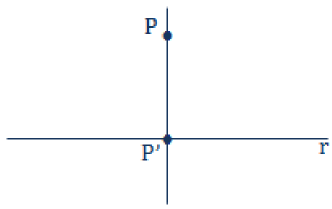
Distância entre Pontos

Definição: A distância entre dois pontos distintos P e Q é dada pelo comprimento do segmento de reta $\overline{PQ}$. Se P=Q, a distância entre P e Q é nula. Denotamos por d(P, Q)=PQ.

$d(P,Q)=PQ$

Distância entre Ponto e Reta

Definição: A distância entre um ponto P e uma reta r é dada pela distância entre esse ponto e o pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto.

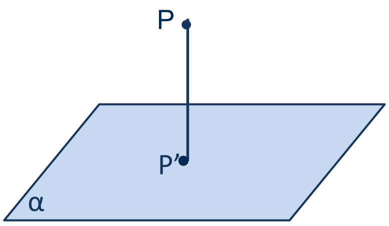


d(P, r)=PP’

Seja P’ o pé da perpendicular à reta r, conduzido por P, ou seja, P’ é a interseção de uma reta conduzida por P e perpendicular à reta r.

Distância entre Ponto e Plano

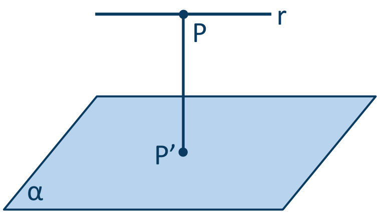
Definição: A distância entre um ponto P e um plano α é a medida do segmento cujos extremos são o ponto e sua projeção ortogonal sobre o plano.



d(P, a)=PP’

Distância entre uma Reta e um Plano Paralelo

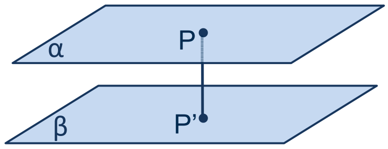
Definição: A distância entre uma reta r e um plano paralelo α é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.



d(r, a)=PP’

Distância entre dois Planos Paralelos

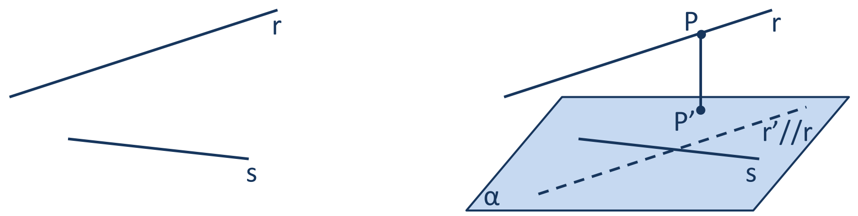
Definição: A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano.



d(α,β)=d(P,β)=PP’

Distância entre duas Retas Reversas

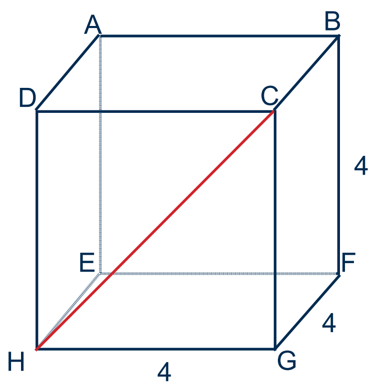
Definição: A distância entre duas retas reversas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que passa pela outra e é paralelo à primeira reta.



$d(r,\ s) = d(P,\ \beta) = PP'$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. De acordo com o cubo abaixo, de aresta 4 cm, determine o que se pede:



a) A distância do ponto B ao plano ADH (isto é, d(B,ADH)).

Solução:

Sendo A o pé da perpendicular de B sobre o plano ADH, temos que d(B, ADH)=d(B, A)=4 cm.

b) A distância do ponto C à reta que passa pelos pontos G e F (isto é, d(C, GF)).

Solução:

Sendo G o pé da perpendicular de C sobre a reta GF, temos que d(C, GF)=d(C, G)=4 cm.

c) A distância do ponto C à reta que passa nos pontos H e E (isto é, d(C, HE)).

Solução:

Como a reta que passa nos pontos H e E é perpendicular ao plano CDH e a reta CH está contida neste plano e $HC \cap HE = H$, temos que $HC \perp HE$, logo H é o pé da perpendicular de C sobre a reta HE, portanto, d(C, HE) = d(C,H). Considerando o triângulo retângulo CGH, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$d(C,\ H)^2 = d(C,\ G)^2 + d(G,\ H)^2 \Rightarrow d(C,H)^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow d(C,H) = \sqrt{32} \Rightarrow d(C,H) = 4\sqrt{(2.)}$$

d) A distância da reta BC ao plano DHE.

Solução:

Considerando o ponto B da reta BC, temos, por definição, que d(BC, DHE)=d(B, DHE). Mas, os planos DHE e ADH são coincidentes, logo d(BC, DHE)=d(B, DHE)=d(B, ADH)=4 cm, esta última igualdade é garantida pelo item a) desta mesma questão.

e)A distância da reta CB à reta EF.

Solução:

Como a reta BF é perpendicular às retas CB e EF, isto é, BF⊥CB e BF⊥EF temos, pela definição de retas reversas, que d(CB, EF)=d(B, F)=4 cm.

f) A distância da reta CB à reta BF.

Solução:

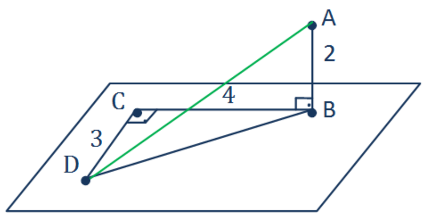
Como as retas CB e BF são concorrentes, isto é, CB ∩ BF=B, temos, por definição, que d(CB, BF)=0.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

a) ( ) Se $\overline{PA}$ é um segmento oblíquo a um plano α, com A em α, então a distância entre P e A é a distância entre P e α.
b) ( ) A distância entre um ponto e um plano é a distância entre o ponto e qualquer ponto do plano.
c) ( ) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer do plano e a reta.
d) ( ) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e um ponto qualquer do plano.
e) ( ) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.
f) ( ) A distância entre duas retas reversas é a distância entre um ponto qualquer de uma a outra reta.

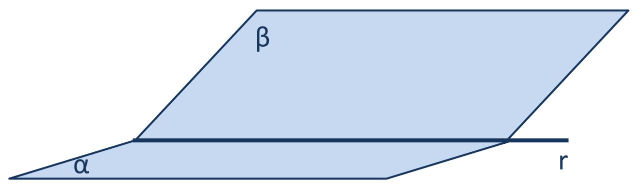
2. Na figura abaixo, o segmento AB é perpendicular ao plano α, CD e BC estão contidos nesse plano e CD é perpendicular ao BC. Se AB = 2 cm, BC = 4 cm e CD = 3 cm, ache a distância entre A e D:



Diedros, triedros e poliedros convexos

Diedros

Definição: A figura geométrica determinada por dois semiplanos não coplanares, com origem em uma mesma reta, é chamada de ângulo diédrico, ou ângulo diedro, ou simplesmente diedro.

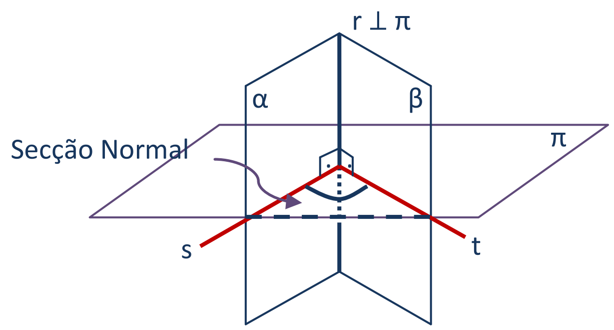


- α e β: faces do diedro
- r: aresta do diedro
- o diedro ao lado é denotado por $\alpha\hat{r}\beta$.

Chamamos de diedro nulo quando suas faces são coincidentes.

Secções: Secção de um diedro é a intersecção do diedro com um plano secante à aresta.

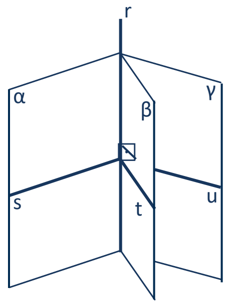
Secção Reta ou Normal: É a secção cujo plano é perpendicular à aresta do diedro.
Denotada por $\widehat{st}$



Propriedades: Secções paralelas de um mesmo diedro são congruentes. Em particular, temos as secções normais.

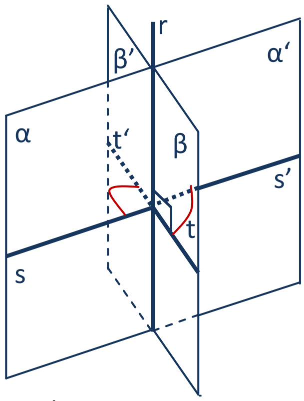
Nomenclaturas:

Reto: Um diedro é reto quando sua secção normal forma um ângulo reto.
Agudo: Um diedro é agudo quando sua secção normal forma um ângulo agudo.
Obtuso: Um diedro é obtuso quando sua secção normal forma um ângulo obtuso.
Adjacentes: Dois diedros são adjacentes quando suas secções normais forem ângulos adjacentes.

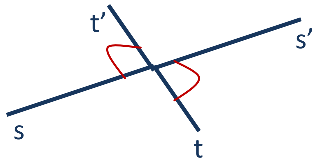


$\widehat{st}$ é adjacente a $\widehat{tu}$

Opostos: Dois diedros são opostos pela aresta quando as secções normais forem ângulos opostos pelo vértice.



$\alpha\hat{r}\beta'$ e $\beta\hat{r}\alpha'$ são opostos pela aresta



$\widehat{st}'$ e $\widehat{ts}'$ são opostos pelo vértice

Definição: Dizemos que dois diedros são congruentes quando uma secção normal de um é congruente a uma secção normal do outro.

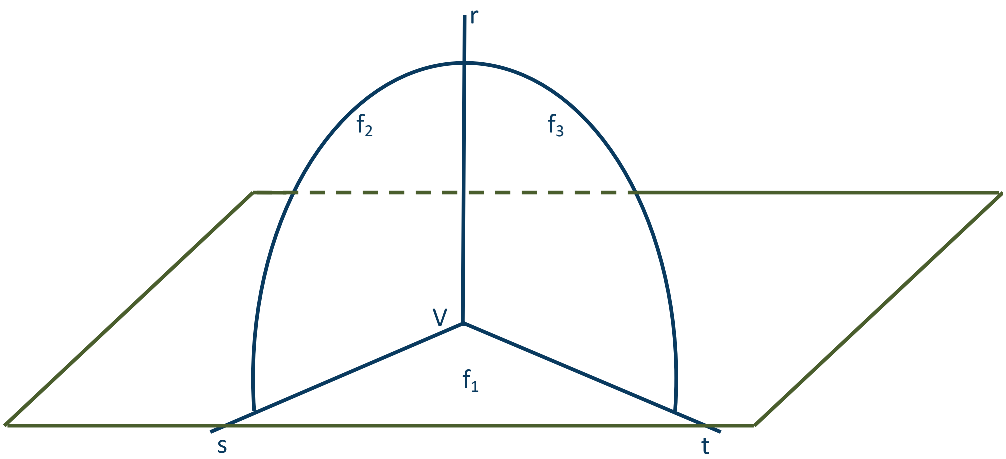
EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a)( ) Dois planos perpendiculares determinam quatro diedros retos.
b)( ) Dois diedros opostos pela aresta são congruentes.
c)( ) Dois diedros congruentes são opostos pela aresta.
d)( ) Duas secções paralelas de um mesmo diedro são congruentes.
e)( ) Toda secção de um diedro reto é um ângulo reto.

Triedros

Definição 1: A figura geométrica formada por três ângulos, onde os quais são determinados por três semirretas não coplanares, com origem em um mesmo ponto, é chamada ângulo triédrico, ou simplesmente triedro.

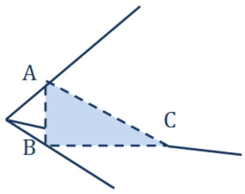


V: vértice do triedro

f_1, f_2 e f_3: faces do triedro

semirretas r, s e t: arestas do triedro

Secções: Secção de um triedro é dada pelo triângulo ABC, onde cada vértice do triângulo pertence à arestas distintas.



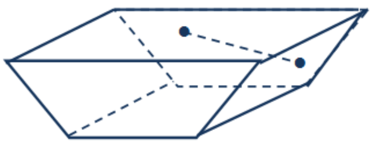
Definição 2: Dizemos que dois triedros são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre suas arestas e as do outro, de modo que seus diedros sejam ordenadamente congruentes aos diedros do outro e suas faces sejam ordenadamente congruentes às faces do outro.

Poliedros convexos

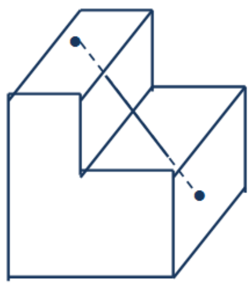
Definição: Chamamos de poliedro o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Os polígonos planos são as faces do poliedro. As interseções das faces são as arestas do poliedro. As interseções das arestas são os vértices do poliedro. A reunião das faces é chamada de superfície do poliedro.

Definição: Definimos por poliedros convexos, os poliedros cujos ângulos diedrais formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180 graus. Ou ainda, dados quaisquer dois pontos de um poliedro convexo, o segmento que tem esses pontos como extremidades, deverá estar inteiramente contido no poliedro.

Exemplos:



Poliedro convexo



Poliedro não convexo

Classificação

Os poliedros convexos possuem nomes especiais de acordo com o número de faces, como por exemplo:

tetraedro: quatro faces
pentaedro: cinco faces
heptaedro: sete faces
octaedro: oito faces
dodecaedro: doze faces
icosaedro: vinte faces

Quando houver dificuldade em nomear o poliedro, poderá ser usada a expressão “poliedro de n faces”, onde n é o número de faces. Por exemplo, o heptaedro pode ser chamado poliedro de 7 faces.

Relação de Euler

FIQUE DE OLHO!!! Todo poliedro convexo é Euleriano (vale a relação de Euler), mas nem todo poliedro Euleriano é convexo.

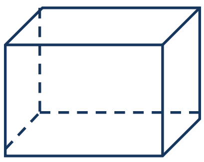
Em todo poliedro convexo vale a seguinte relação:

$$\boxed{V - A + F = 2,}$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F, o número de faces.

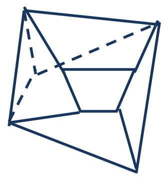
Observação: Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados eulerianos.

Exemplos:



$V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$

$8 - 12 + 6 = 2$



$V = 9$, $A = 15$ e $F = 8$

$9 - 15 + 8 = 2$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

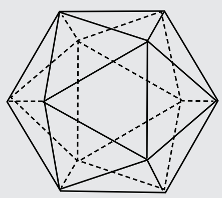
1. Determinar o número de arestas e de vértices de um poliedro convexo com seis faces quadrangulares e quatro faces triangulares.

Solução:

Cada face quadrangular e triangular têm 4 arestas e 3 arestas, respectivamente, logo com 6 faces quadrangulares obtemos 24 arestas e com 4 faces triangulares obtemos 12 arestas. Logo, o número total de arestas é 36. Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:
$2A = 36 \Rightarrow A = 18$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$A + 2 = V + F \Rightarrow 18 + 2 = V + 10 \Rightarrow V = 10$
Portanto, o poliedro tem 10 faces, 18 arestas e 10 vértices.

2. Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?

Solução:



Como o poliedro tem 12 faces pentagonais e cada face pentagonal tem 5 arestas, então $12 \cdot 5 = 60$. Analogamente, temos 20 faces hexagonais e cada face hexagonal tem 6 arestas, assim $20 \cdot 6 = 120$, logo como cada aresta(A) foi contada duas vezes, temos:

$$2A = 60 + 120 \Rightarrow A = 90.$$

Sendo, o poliedro convexo, vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, portanto, como temos $F = 12 + 20 = 32$ faces:

$$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 2 + 90 - 32 \Rightarrow V = 60$$

Assim, o número de vértices é 60.

3. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares , 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

Solução:

O número total de faces do poliedro é $F = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$. Calculando o número de arestas em função das faces, temos:
$2A = 3.3 + 1.4 + 1.5 + 2.6 \Rightarrow 2A = 30 \Rightarrow A = 15$
Substituindo os valores na relação de Euler, vem:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$. Logo há 10 vértices.

4. Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces têm esse poliedro?

Solução:

Pelo enunciado temos, $F = V$. Utilizando a relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 10 + V = 2 \Rightarrow 2V = 10 + 2$. Logo $V = 6$. Portanto, como o número de faces é igual ao número de vértices, temos 6 faces.

5. Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.

Solução:

Como o número de arestas (A) excede o número de vértices (V) em 6 unidades, temos que $A = V + 6$. Logo temos pela relação de Euler que:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - (V + 6) + F = 2 \Rightarrow V - V - 6 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 6 \Rightarrow F = 8$

6. Determine o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por 5 ângulos triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos.

Solução:

Um ângulo triédrico contém um vértice onde concorrem 3 arestas. Da mesma forma o tetraédrico contém um vértice onde concorrem 4 arestas, o mesmo ocorrendo com os pentaédricos (5 arestas) e hexaédricos (6 arestas). Logo, o número de vértices é dado por: $V = 5 + 7 + 9 + 8 = 29$. E o número de aresta é dado por: $2A = 5.3 + 7.4 + 9.5 + 8.6 \Rightarrow 2A = 136 \Rightarrow A = 68$. De acordo com a relação de Euler vem:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 29 - 68 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 68 - 29 = 41$.
Portanto há 29 vértices, 68 arestas e 41 faces.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Quantos vértices tem um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares?

2. Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. Qual o número de arestas desse poliedro?

3. Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. Qual o número de vértices desse poliedro?

4. Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol. Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos?

5. Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. Qual o número de faces desse poliedro?

6. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. Qual o número de vértices desse poliedro?

Soma dos ângulos das faces

Em todo poliedro convexo de vértices (V), a soma dos ângulos de todas as suas faces é dada por: S=(V–2).360°

Com efeito, sejam V, A e F o número de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente. Sejam ainda, n_1, n_2, n_3 ,..., n_F os números de lados das faces 1, 2, 3, ..., F, ordenadamente. A soma dos ângulos internos de uma face é (n-2).1800.

Logo, a soma dos ângulos de todas as faces do poliedro é dada por:

$$S=(n_1-2).180^o+(n_2-2).1800+(n_3-2).180^o+\cdots+(n_F-2).180^o$$
$$S=n_1\ 180^o-360^o+n_2\ 180^o-360^o+n_3\ 180^o-360^o+\cdots+n_F\ 180^o-360^o$$
$$S=(n_1+n_2+n_3+\ldots+n_F).180^o-F.360^o,$$
$$\text{Mas } n_1+n_2+n_3+\ldots+n_F=2A, \text{ logo}$$
$$S=2A.180^o-F.360^o\Rightarrow S=A.360^o-F.360^o\Rightarrow S=(A-F).360^o,$$

Temos da relação de Euler que,

$$V-A+F=2\Rightarrow V-2=A-F,$$

Portanto,

$$S=(V-2).360^o.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo de 12 vértices.

Solução:

Temos então V=12, logo
$S=(V-2).360^o\Rightarrow S=(12-2).360^o\Rightarrow S=10.360^o\Rightarrow S=3600^o$.
Portanto, a soma dos ângulos das faces é igual a 3600^o

2. Um poliedro convexo de 15 arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces têm de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é 32 ângulos retos?

Solução:

Encontramos o número de vértices pela fórmula da soma dos ângulos das faces, S = (V – 2).360º, como, pelo enunciado, $S=32.90^o=2880^o$, temos que:

$$S=(V-2)360^0\Rightarrow 2880^0=(V-2)360^0\Rightarrow V-2=\frac{2880^0}{360^0}\Rightarrow V-2=8,$$

logo, V=10.
Utilizando a relação de Euler V-A+F=2, sendo A=15 e V=10, temos
V-A+F=2⇒F=2+A-V⇒F=2+15-10=7.

Portanto, temos no total 7 faces. Considerando "x" o número de faces quadrangulares e "y" o de faces pentagonais forma-se um sistema onde uma das equações envolve o número de arestas em função do número de faces, isto é, 2A = 4x+5y, sendo A=15 temos 4x+5y=30. Portanto,

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 4x+5y=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x-4y=-28 \\ 4x+5y=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=7-2=5 \end{cases}$$

Logo das 7 faces, 5 são faces quadrangulares e 2 são pentagonais.

3. A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 720º. Calcule o número de faces, sabendo que é $\frac{2}{3}$ do número de arestas?

Solução:

Sendo S=720⁰, temos que

$$720^0 = (V-2)360^0 \Rightarrow V-2 = \frac{720^0}{360^0} \Rightarrow V-2 = 2 \Rightarrow V = 4.$$

Como $F = \frac{2}{3}A$, temos pela relação de Euler,

$$F - A + V = 2 \Rightarrow \frac{2}{3}A - A + 4 = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}A = 2-4 \Rightarrow -\frac{1}{3}A = -2 \Rightarrow A = 6.$$

Logo, $F = \frac{2}{3}A = \frac{2}{3}.6 = 4.$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Um poliedro convexo de 28 arestas tem somente faces triangulares e heptagonais. Quantas faces têm de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é 64 ângulos retos?

2. A soma dos ângulos das faces de um poliedro regular é 1440º. Quantas arestas possui este poliedro?

3. Um poliedro apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces é igual a 2160°. Determine o número de faces de cada espécie desse poliedro, sabendo que ele tem 15 arestas.

Poliedros de Platão
Diz-se que um poliedro é de Platão se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

a) for convexo;
b) em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas;
c) toda face tiver o mesmo número de arestas;
d) for válida a relação de Euler.

Propriedade: Existem cinco, e somente cinco classes de poliedros de Platão. São elas:

Tetraedro - possui 4 faces triangulares;
Hexaedro - possui 6 faces quadrangulares;
Octaedro - possui 8 faces triangulares;
Dodecaedro - possui 12 faces pentagonais;
Icosaedro - possui 20 faces triangulares.

Poliedros Regulares
Um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes e em cada vértices, concorre o mesmo número de arestas.

Propriedade: Existem cinco, e apenas cinco, tipos de poliedros regulares. São eles: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.

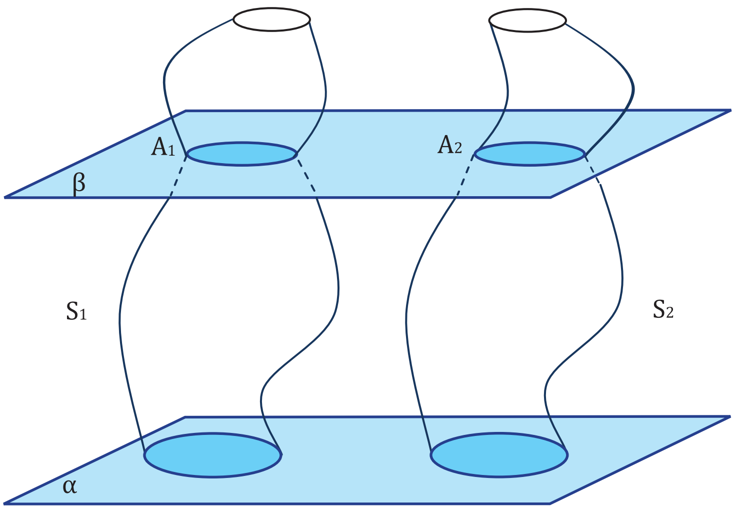
Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Tetraedro regular: É formado por quatro triângulos equiláteros que equivalem a uma pirâmide de base triangular. Esse é o menor de todos os poliedros.

Hexaedro regular: É formado por seis quadrados iguais.
Octaedro regular: É formado por oito triângulos equiláteros iguais e equivale a um balão junino.
Dodecaedro regular: É formado por doze pentágonos regulares.
Icosaedro regular: É formado por vinte triângulos equiláteros.
Observação: Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular.

Princípio de Cavalieri

Considere os sólidos S1 e S2 sobre um plano horizontal α. Considere também o plano β, paralelo ao α que, ao seccionar S1, também secciona S2, determinando duas regiões planas de áreas A1 e A2. Logo, se para todo plano β temos A1 = A2, então $V_{S1} = V_{S2}$.



SAIBA MAIS

- A estrutura poliédrica da bola de futebol.

<http://www.dm.ufscar.br/hp/hp153/hp153001/hp153001.html>

- Construindo poliedros com canudos

<http://www.youtube.com/watch?gl=NG&feature=topics&hl=en-GB&v=FXcrq3QSAZI>

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcular a medida da altura de um tetraedro regular sabendo que o perímetro da base mede 9 cm.

2. Calcule a soma dos ângulos das faces do:

a)Tetraedro regular
b)Octraedro regular
c)Icosaedro regular

3. Determine a área da superfície de:

a)Tetraedro regular de aresta 6m.
b)Icosaedro regular de aresta 5m.

4. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais tiram-se as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, faces e vértices da superfície poliédrica que resta.

II

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Nesta unidade, trabalharemos com as principais figuras geométricas espaciais, as quais são chamadas de sólidos geométricos (prisma, pirâmide, cilindro e cone). Aprenderemos a:

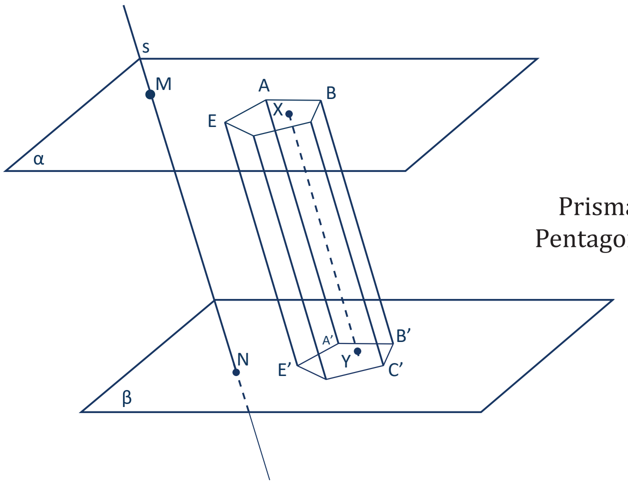
- Conceituar, classificar e destacar os elementos de cada sólido;
- Estabelecer a nomenclatura e tipos de sólidos;
- Calcular áreas laterais, áreas totais e volumes de cada sólido;
- Aplicar conceitos em situações que envolvam interdisciplinaridade e contextualização.

Prisma

Prisma: conceitos, elementos, classificação e secções

Conceitos

Sejam α e β dois planos paralelos e distintos, e s uma reta que intercepta estes planos nos pontos M e N, respectivamente. Dada uma região poligonal P no plano α, definimos por prisma o conjunto de todos os segmentos ($\overline{XY}$) congruente com o segmento ($\overline{MN}$) e paralelos a reta s, onde X ∈ P e Y ∈ β.



Prisma Pentagonal

FIQUE DE OLHO! Todo prisma é um poliedro (convexo), mas nem todo poliedro é um prisma, já que temos poliedros convexos e côncavos.

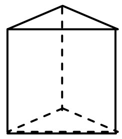
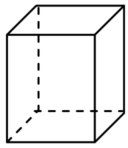
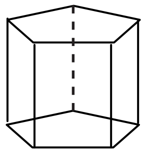
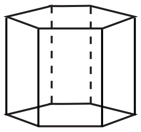
Em outras palavras, prisma é um sólido geométrico (poliedro convexo) delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos.

Elementos

Bases: regiões poligonais dos planos α e β; Ex.: ABCDE e A'B'C'D'E'.
Vértices: são os vértices dos polígonos das bases; Ex.: A, B, D', E'
Arestas da base: são os lados do polígono da base; Ex.: ($\overline{AB}$) e ($\overline{C'D'}$).
Arestas laterais: são os segmentos que ligam os vétices correspondentes dos polígonos; Ex.: ($\overline{BB'}$) e ($\overline{EE'}$).
Faces laterais: são os paralelogramos definidos pelos lados correspondentes da base poligonal de α e de β; Ex.: ABA'B' e CDC'D'.
Superfície lateral: é formada pelas faces laterais;
Superfície total: é formada pelas faces laterais e pelas bases;
Altura: é a distância entre os planos α e β;

Natureza do prisma

A natureza do prisma é dada de acordo com o polígono da base.

POLÍGONO	NOME DO PRISMA	FIGURA CORRESPONDENTE
Triângulo	Prisma triangular	
Quadrado	Prisma quadrangular	
Pentágono	Prisma pentagonal	
Hexágono	Prisma hexagonal	

Dentre os prismas quadrangulares convém destacar os paralelepípedos. São aqueles cujas bases são paralelogramos.

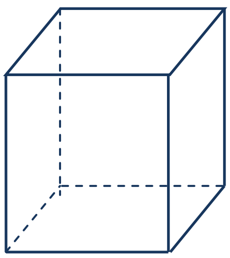
Classificação

Podemos classificar os prismas como reto e oblíquo.

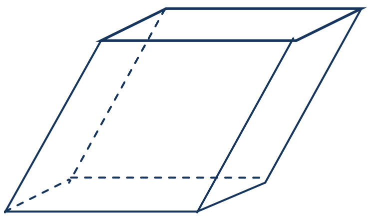
Prisma reto: Dizemos que um prisma é reto quando suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Logo suas faces laterais são retângulos.

Prisma oblíquo: Dizemos que um prisma é oblíquo quando suas arestas laterais são oblíquas aos planos das bases. Neste caso, as faces laterais são paralelogramos.

Um caso particular dos prismas retos é o PRISMA REGULAR. Prisma Regular é todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



Prisma reto



Prisma obliquo

- A relação de Euler vale para todo poliedro convexo, logo vale no prisma, já que o prisma é um poliedro convexo.
- Dentre os prismas retos convêm destacar o paralelepípedo reto, no qual todas as faces, incluindo as bases, são retângulos.
- Dentre os prismas regulares devemos destacar o cubo, no qual todas as faces são quadrados.

Exemplos:

1. Calcule o valor numérico dos vértices, arestas e faces do prisma, cujas bases são polígonos de n lados.

Solução:

Vértices: Temos em cada base n vértices. Como são duas bases, teremos 2n vértices no prisma.
Arestas: Como em cada base temos n arestas (lados), nas duas teremos 2n, acrescentando as n arestas laterais, totaliza 3n arestas.
Faces: Como o polígono tem n lados, o prisma tem n faces laterais, e mais as 2 bases totalizamos n + 2 faces.

2. Em um prisma regular de 7 faces, determine:

a) O nome do prisma;
b) A validade da relação de Euler.

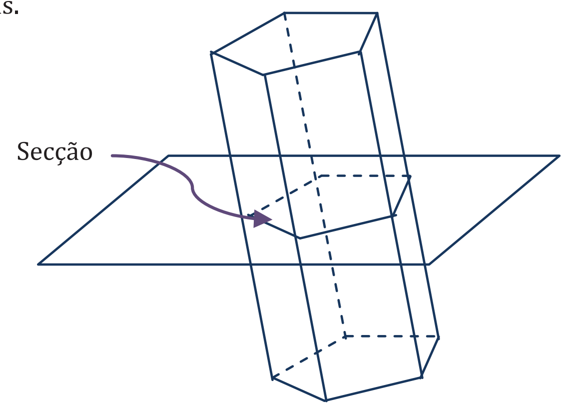
Solução:

*a)*Sendo 7 o número de faces, temos 5 faces laterais, já que 2 são bases. Logo, o polígono da base tem 5 lados, portanto o nome do prisma é prisma pentagonal.

*b)*No prisma pentagonal temos n=5 lados, logo, pela questão anterior: V=2.5=10 vértices, A=3.5=15 arestas e F=5+2=7 faces.
Como o prisma é um poliedro convexo temos que ele satisfaz a relação de Euler. Com efeito, V-A+F=10-15+7=2.

Secções

Definimos por secção de um prisma, a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Chamamos de secção reta ou secção normal, a secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.

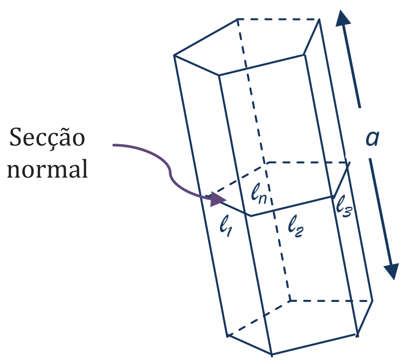


Note que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Área lateral e área total do prisma

Área Lateral do Prisma

A área lateral de um prisma, denotada por A_l, dada pela soma das áreas das faces laterais, denotada por A_{fl}. Se for um prisma de n lados, temos que, $A_l = nA_{fl}$.



Dado um prisma de aresta lateral a e secção normal de lados l1, l2,..., ln, temos que cada face lateral é um paralelogramo de base a e altura igual a um lado da secção normal, logo,
$A_l=A_{l1}+A_{l2}+\cdots+A_{ln}=a.l_1\ a.l_2+\cdots+\ a.l_n$, onde $A_{l1}\ ,A_{l2}\ ,...,A_{ln}$ são as áreas dos paralelogramos de altura $l_1,l_2,...,l_n$, respectivamente, portanto:

$$A_l=al_1+al_2+\cdots+al_n\ .$$

Se o prisma for regular, temos que a secção normal é um polígono regular, logo teremos $l_1,l_2,...,l_n=l$, portanto, $A_l=(l+l+\cdots+l).a=nla$.

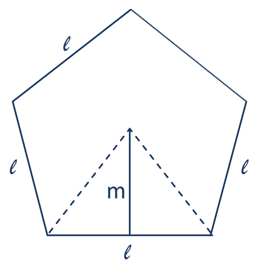
Área Total do Prisma

A área total de um prisma é dada pela soma das áreas das faces laterais (A_l) com as áreas das duas bases. Denotamos por A_t.

Logo,

$$A_t=A_l+2A_b$$

onde, A_b é a área da base.



Temos então, que a área da base é dada pela soma de n triângulos de base l (medida do lado) e altura m (medida do apótema), isto é, $A_b=n.A_\Delta$, onde n é o número de lados da base. Logo,

$$A_b=n.\left(\frac{l.m}{2}\right)$$

Cálculo da área total (A_t)

O cálculo da área total é $A_t=A_l+2A_b=nla+2n.\left(\frac{l.m}{2}\right)=nl.(a+m)$. Portanto,

$$A_t=nl.(a+m).$$

Volume do prisma

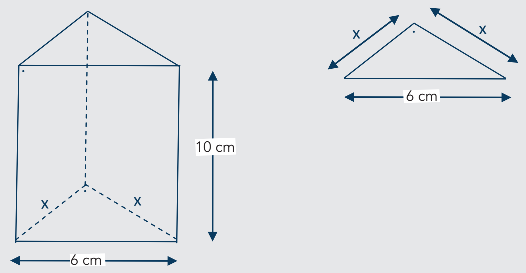
O volume de um prisma é o produto da área da base (A_b) pela altura (h), assim:

$$V\ =A_b.h.$$

FIQUE DE OLHO!
A altura (h) de um prisma é sempre a distância entre os planos paralelos que contêm as suas bases, seja o prisma reto ou oblíquo.

Exemplo 1: A base de um prisma de 10 cm de altura é um triângulo retângulo isósceles de 6 cm de hipotenusa. Calcule a área lateral, a área total e o volume do prisma.

Solução:



Como a base é um triângulo retângulo isósceles temos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$6^2=x^2+x^2 \Rightarrow 2x^2=36 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=3\sqrt{2}.$$

A área lateral do prisma é dada pela soma das áreas dos paralelogramas laterais:

$$A_l=6.10+3\sqrt{2}.10+3\sqrt{2}.10=(6+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}).10=60+60\sqrt{2},$$

logo, $A_l=60.(1+\sqrt{2})$ cm^2.

Como a área total é dada por $A_t=A_l+2A_b$, e já temos a área lateral, basta calcularmos a área da base, assim:

$$A_b=\frac{base.altura}{2}=\frac{6.3}{2}=9 \text{ cm}^2$$

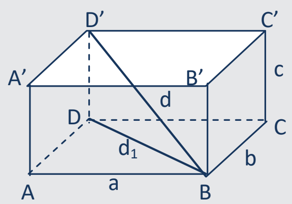
Através disso concluímos que: $A_t=A_l+2A_b= 60 + 60\sqrt{2} + 9 = 69 + 60\sqrt{2}$ cm^2.

O volume é dado por,

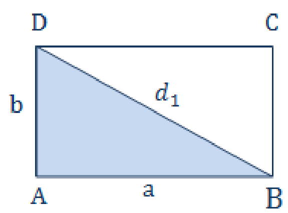
$$V = A_{b.}h = 9.10 = 90\text{cm}^3.$$

Exemplo 2:
Um paralelepípedo é um prisma no qual as bases são paralelogramos. Chamamos de paralelepípedo retângulo o prisma reto cujas bases são retângulos. Dado então, um paralelepípedo retângulo de dimensões a,b e c, calcule as diagonais d_1,d_2 e d_3 das faces, a diagonal do paralelepípedo d, a área total A_t e o seu volume V.

Solução:



Cálculo de d_1,d_2 e d_3



Considerando o triângulo ABD, temos pelo Teorema de Pitágoras que:

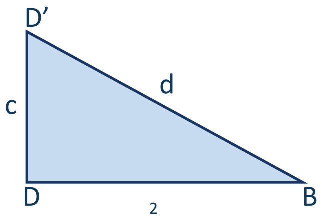
$$d_1{}^2=a^2+b^2 \Rightarrow d_1=\sqrt{a^2+b^2}$$

Analogamente, temos.

$$d_2^2=a^2+c^2 \Rightarrow d_2=\sqrt{a^2+c^2} \text{ e } d_3^2=b^2+c^2 \Rightarrow d_3=\sqrt{b^2+c^2},$$

onde d_2 e d_3 são as diagonais das faces ABB'A' (ou DCC'D') e BCC'B' (ou ADD'A'), respectivamente.

Cálculo de d.



Considerando o triângulo DBD', temos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$d^2=d_1^2+c^2 \Rightarrow d^2=a^2+b^2+c^2$$

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Cálculo da área total A_t.

Sendo o paralelepípedo um prisma, temos que a área total é dada por:

$$A_t=A_l+2A_b.$$

Como,

$A_l=A_{ABB'A'}+A_{BCC'B'}+A_{CDD'C'}+A_{DAA'D'}=ac+bc+ac+bc=2(ac+bc)$ e $A_b=ab$, temos que:

$$A_t=2(ab+ac+bc).$$

Volume

Como o paralelepípedo é um prisma temos que seu volume é dado por:

$$V=A_b.h.$$

Sendo $A_b=ab$ e $h=c$, temos que,

$$V = abc,$$

onde a,b e c são as dimensões do paralelepípedo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

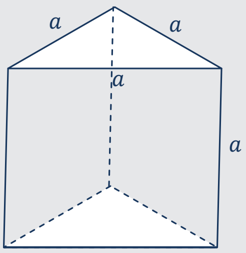
1. Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. Encontre o valor de x.

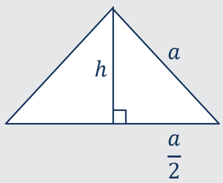
Solução:
Pelo enunciado, o volume do paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos. Assim,

$$8.8.x=6^3+10^3 \Rightarrow 64x=216+1000 \Rightarrow 64x=1216 \Rightarrow x=19.$$

2. Um prisma regular triangular tem todas as arestas congruentes e 48 m² de área lateral. Encontre seu volume.

Solução:





$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2_2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Como a altura da base é $h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$, temos que $A_b=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Sendo a área da face igual a A_f=a.a=a², obtemos $A_l=3a^2$. Logo, pelo enunciado

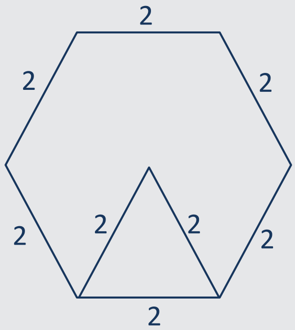
$$3a^2=A_l=48 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4 \text{ m}.$$

Portanto,

$$V=A_b.h=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}.a = \frac{\sqrt{3}.4^2}{4}.4 = 16\sqrt{3}\text{m}^3$$

3. Encontre o volume de um prisma regular hexagonal, sabendo que as arestas da base medem 2 m e sua altura é de 10m.

Solução:



Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos congruentes e equiláteros. Os lados dos triângulos medem 2*m* e sua altura mede $h=\frac{\sqrt{3}.2}{2}=\sqrt{3}$. Então, a área de cada triângulo é dada por:

$$A_\Delta=\frac{b.h}{2}=\frac{2.\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.m^2.$$

Logo, a área da base é dada por:

$$A_b=6A_\Delta=6\sqrt{3}\ m^2.$$

Portanto, o volume do prisma é dado por:

$$V = A_b.h = 6\sqrt{3}.10 = 60\sqrt{3}\ m^3.$$

4. Em uma piscina regular hexagonal cada aresta lateral mede 8 dm e cada aresta da base mede 4 dm. Calcule, desses prismas:

a) a área de cada face lateral;
b) a área de uma base;
c) a área lateral;
d) a área total.

Solução:

a) $A_f = b.h = 4.8 = 32\ dm^2$

b) $A_b = 6.A_\Delta = 6.\dfrac{\sqrt{3}\,4^2}{4} = 24\sqrt{3}\ dm^2$

c) $A_l = 6.A_f = 6.32 = 192 dm^2$

d) $A_t = A_l + 2A_b = 192 + 2.24\sqrt{3} = 192 + 48\sqrt{3} dm^2$

5. Joana pretende confeccionar embalagens em forma de prisma reto hexagonal regular com aresta da base medindo 3 cm e aresta da face lateral medindo 6 cm. Sabendo que para confeccionar a embalagem o material utilizado custa R$3,00/cm², quanto Joana gastará? Obs.: adote $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Solução:

Para saber quanto Joana irá gastar, é necessário saber a área total da embalagem.

Considerando:

- medida da aresta lateral: r = 6*cm*;
- medida da aresta da base: a = 3*cm*;

Iniciemos calculando a área lateral do prisma. Como o prisma possui 6 faces laterais (retângulos), a área lateral é igual a seis vezes a área de cada face (retângulo - A_f).

Área lateral: $A_l = 6.A_f = 6.r.a = 6.6.3 = 108 cm^2$.

Área da base: Como a base é um hexágono regular que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros, a área de um hexágono regular é igual a seis vezes a área do triângulo equilátero (A_Δ). Sendo a medida do lado do triângulo equilátero a mesma medida da aresta da base (a), tem-se:

$$A_b = 6A_\Delta = 6.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} cm^2.$$

Área total:

$$A_t = A_l + 2A_b = 108 + 2.\frac{27\sqrt{3}}{2} = 108 + 27\sqrt{3} = 9.12 + \sqrt{3} cm^2.$$

Agora, que temos a área total, podemos obter o custo total. Como o material utilizado na embalagem custa R$ 0,30 cada centímetro quadrado, o custo total (C_t) será 0,3 vezes a área total, isto é,

$$C_t = 0{,}3.A_t = 0{,}3.9.(12 + \sqrt{3}) \cong 46{,}41.$$

Portanto, Joana gastará aproximadamente R$ 46,41.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Em um prisma regular triangular, cada aresta lateral mede 10*cm* e cada aresta da base mede 6*cm*. Calcular desse prisma:

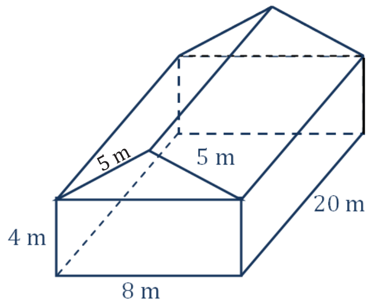
a) a área de uma face lateral;
b) a área de uma base;
c) a área lateral;
d) a área total.

2. Calcular em litros o volume de uma caixa d'água em forma de prisma reto, de aresta lateral 6 m, sabendo-se que sua base é um losango cujas diagonais medem 7*m* e 10*m*. (1m^3=1000 *litros*)

3. O volume de um paralelepípedo retângulo é 1620 m^3. Calcular as arestas sabendo que estas são proporcionais aos números 3, 4 e 5.

4. A água de um reservatório na forma de um paralelepípedo retângulo de comprimento 30 *m* e largura 20 *m* atingia a altura de 10 *m*. Com a falta de chuvas e o calor, 1.800 m^3 da água do reservatório evaporaram. Qual a altura máxima atingida pela água restante no reservatório?

5. Paulo tem um galpão com as medidas indicadas na figura. Qual o volume do galpão?

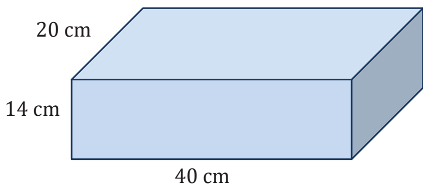


6. Calcule o volume de um prisma quadrangular regular cuja área total tem 144 m^2, sabendo que sua área lateral é igual ao dobro da área da base.

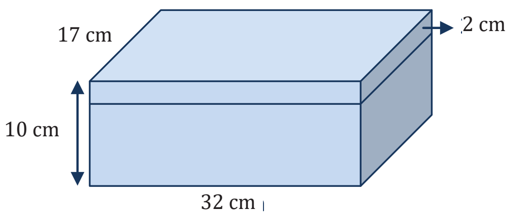
7. Numa cozinha de 3 m de comprimento, 2 *m* de largura e de 2,80 *m* de altura, as portas e as janelas ocupam uma área de 4 m^2. Para azulejar as quatro paredes, o pedreiro aconselha a compra de 10% a mais da metragem a ladrilhar. Qual a metragem quadrada de ladrilhos a comprar?

8. Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo 50 *cm* de comprimento por 30 *cm* de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de 8 *cm* de lado em cada canto da folha. Qual o volume dessa caixa?

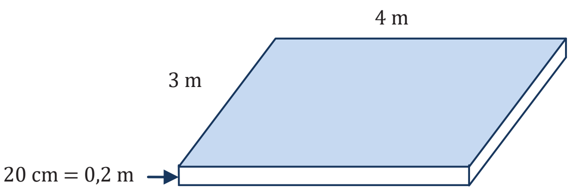
9. Uma indústria precisa fabricar 10000 caixas de sabão com as mesmas medidas da figura abaixo. Desprezando as abas calcule, aproximadamente, quantos m^2 de papelão serão necessários.



10. Quantos cm^2 de papelão são gastos para fazer uma caixa de sapatos do tipo e tamanho abaixo?



11. Qual é o volume de concreto necessário para fazer uma laje de 20 *cm* de espessura em uma sala de 3 m por 4 *m*?



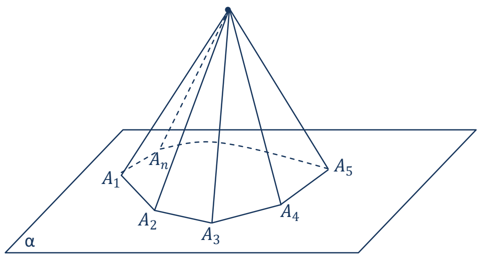
12. Quantos litros de água são necessários para encher uma caixa-d'água cujas dimensões são: 1,20 *m* por 0,90 *m* por 1 *m*?

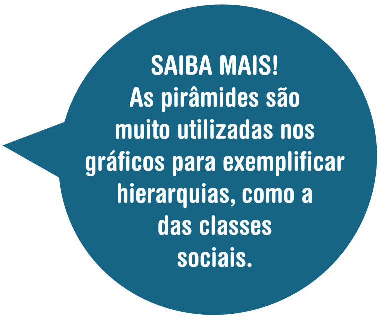
Pirâmide

Pirâmide: conceitos, elementos, classificação e secções

Conceitos

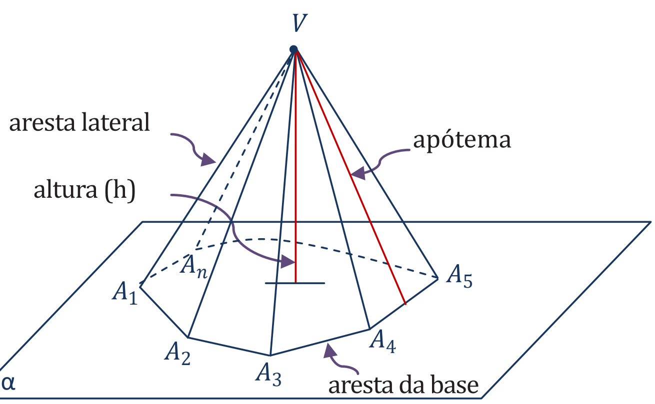
Consideremos um polígono convexo $A_1\ A_2\ A_3 ... A_n$ contido no plano α e um ponto V fora de α. A reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer do polígono é chamada pirâmide. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.





Elementos

Base: região poligonal do plano α sobre a qual se apoia a pirâmide;
Vértice da pirâmide: ponto isolado V mais distante da base da pirâmide;
Arestas da base: é qualquer um dos lados do polígono da base;
Arestas laterais: segmentos que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano α;
Faces laterais: regiões planas triangulares que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base;
Superfície lateral: é formada pelas faces laterais;
Superfície total: é formada pelas faces laterais e pela base;
Altura: distância do vértice da pirâmide ao plano α;
Eixo: quando a região poligonal é simétrica ou regular, o eixo da pirâmide é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base;
Apótema da face (a_f) *:* é a altura de cada face lateral.
Apótema da base (a_b)*:* é o apótema do polígono da base.



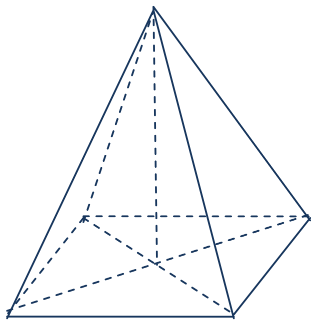
Exemplos: Calcule o valor numérico dos vértices, arestas, faces laterais e faces da pirâmide, cuja base é polígono de n lados.

Solução:

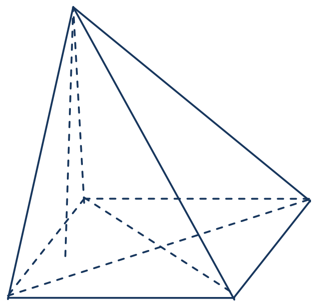
Vértices: Temos n vértices na base. Somados com o vértice V teremos n + 1 vértices na pirâmide.
Arestas: De cada vértice da base parte uma aresta ao encontro de V. Logo, como são n vértices temos então ***n arestas laterais.*** Acrescentando as n arestas da base, totaliza 2n arestas.
Faces: Como o polígono tem n lados, a pirâmide tem n faces laterais, e mais a base totalizamos n + 1 faces.

Classificação

Podemos classificar a pirâmide como reta ou oblíqua.
Dizemos que uma pirâmide é reta quando a projeção ortogonal do vértice P da pirâmide coincide com o centro do polígono da base. Caso contrário, é oblíqua.



Pirâmide Reta



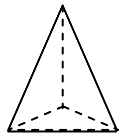
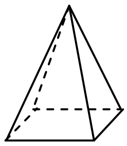
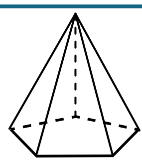
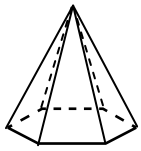
Pirâmide Oblíqua

Um caso particular das pirâmides retas são as pirâmides regulares:

Pirâmide Regular é toda pirâmide reta que tem como base um polígono regular.

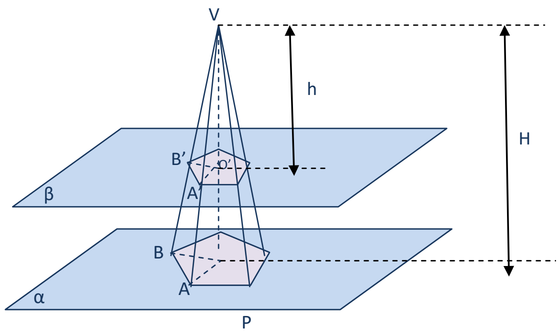
- Toda pirâmide é um poliedro convexo, mas nem todo poliedro convexo é uma pirâmide;
- Como a pirâmide é um poliedro convexo, temos que ela satisfaz a relação de Euler;
- Os nomes das pirâmides são dados de acordo com o polígono da base.

FIQUE DE OLHO!
Toda pirâmide regular tem as arestas laterais congruentes, logo as faces laterais são triângulos isósceles

POLÍGONO	NOME DO PIRÂMIDE	FIGURA CORRESPONDENTE
Triângulo	Pirâmide triangular	
Quadrado	Pirâmide quadrangular	
Pentágono	Pirâmide pentagonal	
Hexágono	Pirâmide hexagonal	

Veja os exemplos:

Triangular regular: quando é reta e a base é um triângulo equilátero;
Quadrangular oblíqua: quando é oblíqua e a base é um quadrado;
Pentagonal reta: quando é reta e a base é um pentágono.



- Observe que a parte superior que foi seccionada é também uma pirâmide, semelhante em todos os aspectos à pirâmide original.
- Se duas pirâmides têm a mesma altura e as áreas das bases são iguais, então as seções transversais localizadas à mesma distância do vértice têm a mesma área.

Temos da figura acima que os triângulos correspondentes formados nas duas pirâmides, assim como as duas bases, são semelhantes entre si.

$$\begin{array}{l} \Delta AOB \sim \Delta A'O'B' \\ \Delta AVB \sim \Delta A'VB' \\ \Delta AOV \sim \Delta A'O'V \end{array} \Rightarrow \frac{A'O'}{AO} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'V}{AV} = \frac{O'V}{OV} = \frac{h}{H}$$

Sendo OÂB = O'Â'B' (denotaremos esse ângulo por γ), temos que

$$\frac{\text{área de } p'}{\text{área de } P} = \frac{5.(\text{área do } \Delta A'O'B')}{5.(\text{área do } \Delta AOB)} = \frac{O'A'.A'B'.\operatorname{sen}\gamma}{OA.AB.\operatorname{sen}\gamma} = \frac{O'A'}{OA} \cdot \frac{A'B'}{AB} = \frac{h}{H} \cdot \frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

$$\frac{\text{área de } p'}{\text{área de } P} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Considerando que o volume da pirâmide é dado por $V = \frac{1}{3}.A_b.h$ (provado nas próximas páginas). Temos que:

$$\frac{V_{\text{pirâmide de altura } h}}{V_{\text{pirâmide de altura } H}} = \frac{\frac{1}{3}(\text{área de } p').h}{\frac{1}{3}(\text{área de } P).H} = \frac{\text{área de } p'}{\text{área de } P} \cdot \frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \cdot \frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Isto é,

$$\frac{V_{\text{pirâmide de altura } h}}{V_{\text{pirâmide de altura } H}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Se o polígono da base tiver n lados basta trocarmos 5 por n, e a propriedade continua valendo.

Área lateral e área total da pirâmide

Área Lateral da Pirâmide

A área lateral (A_l) de uma pirâmide é dada pela soma das áreas das faces laterais, ou seja, é a área da superfície lateral.

Se a pirâmide for regular, basta calcular a área de uma face lateral (triângulo) e multiplicar pela quantidade de faces (n). Assim,

$$A_l = nA_{fl},$$

onde A_{fl} é a área de uma face lateral da pirâmide.

Área Total da Pirâmide

A área total (A_t) de uma pirâmide é a soma da área lateral com a área da base. Isto é,

$$A_t = A_l + A_b$$

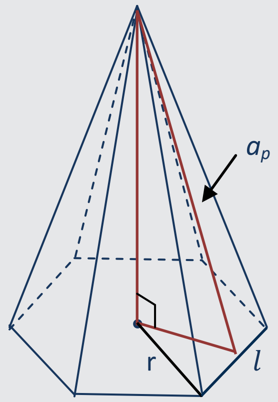
onde A_b é a área da base.

Exemplo: Uma pirâmide regular hexagonal tem 8 cm de altura e a aresta de sua base mede $3\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total.

Solução:

Como vimos anteriormente $A_t=A_l+A_b$, basta então encontrar a área da base e a área lateral.

Como a base é um hexágono regular, temos:



$r = l$, $a_p = \dfrac{l.\sqrt{3}}{2}$ (apótema da base) e $A_b = 6.\dfrac{l.a_b}{2} = 6.\dfrac{l^2.\sqrt{3}}{4}$.

Logo, o Teorema de Pitágoras garante,

$a_p^{\,2} = h^2 + a_b^{\,2}$ e $r^2 = l^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + a_b^{\,2}$

onde h = 8 cm e $l = 3\sqrt{3}$ cm.

- *Área da base*

$$A_b = 6.\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = 3\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2} = 40{,}5\sqrt{3}.$$

- *Área lateral*

$$A_l = 6.A_{fl} = 6.\frac{l.a_p}{2}$$

onde

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2 = h^2 + l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{3l^2}{4} = 8^2 + \frac{3\left(3\sqrt{3}\right)^2}{4} = 64 + \frac{81}{4} = 84{,}25$$

logo,

$$a_p \cong 9{,}1.$$

Portanto,

$$A_l = 6.\frac{l.a_p}{2} = \frac{6.3\sqrt{3}.9{,}1}{2} = 81{,}9\sqrt{3}.$$

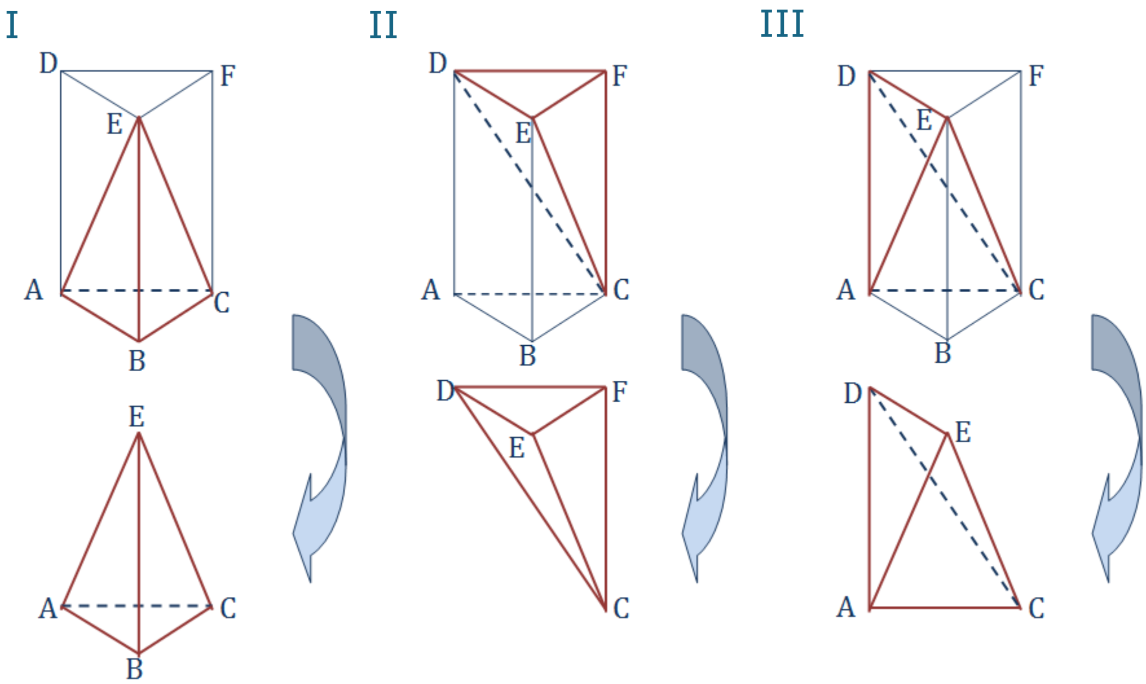
- *Área total*

$$A_t = A_l + A_b = 81{,}9\sqrt{3} + 40{,}5\sqrt{3} = 122{,}4\sqrt{3}\,cm^2$$

Volume da pirâmide

Volume da Pirâmide Triangular

Vamos decompor um prisma triangular em três pirâmides. Veja as figuras abaixo:



Note que as pirâmides ABCE e CEDF têm o mesmo volume, pois possuem as bases (ABC e DEF) congruentes e a mesma altura (a do prisma). Então, $V_I=V_{II}$. O mesmo ocorre com as pirâmides ACDE e CDEF, pois as bases (ACD e CDF) são congruentes e possuem a mesma altura (distância de E ao plano ACDF). Então, $V_{III}=V_{II}$. Logo,

$$V_I=V_{II}=V_{III}=V_{PT},$$

onde V_{PT} é o volume da pirâmide triangular.

Portanto,

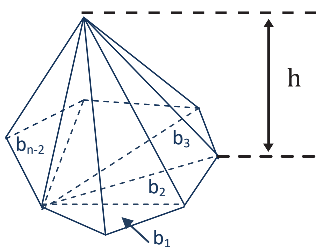
$$V_{PRISMA}=V_I+V_{II}+V_{III}=3.V_{PT}.$$

Como, já vimos que, $V_{PRISMA}=A_b.h$, concluímos, então,

$$V_{PT}=\frac{1}{3}.A_b.h.$$

Volume de uma Pirâmide qualquer

Considere agora uma pirâmide qualquer com altura h, cuja base seja um polígono de n lados (n ≥ 3). Podemos decompor esse polígono em n – 2 triângulos. Assim ficaremos com a pirâmide decomposta em n – 2 pirâmides triangulares de bases $b_1,b_2,...,b_{n-2}$, como mostra a figura abaixo:



Portanto,

$$V=\frac{1}{3}A_{b1}.h+\frac{1}{3}A_{b2}.h+...+\frac{1}{3}A_{n-2}.h=\frac{1}{3}(A_{b1}+A_{b2}+\cdots+Ab_{n-2}).h=\frac{1}{3}A_b.h.$$

Concluímos então que

$$V=\frac{1}{3}A_b.h.$$

FIQUE DE OLHO!
O volume de um prisma equivale ao volume de três pirâmides que têm mesma base e altura que a dele.

Exemplo: Calcule o volume de uma pirâmide de 12*cm* de altura, sendo a base um losango cujas diagonais medem 6 *cm* e 10 *cm*.

Solução: Sabemos que a área do losango é A=(D.d)/2, onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor, assim a área da base da pirâmide é dada por:

$$A_b=A=\frac{D.d}{2}=\frac{10.6}{2}=30\ cm^2.$$

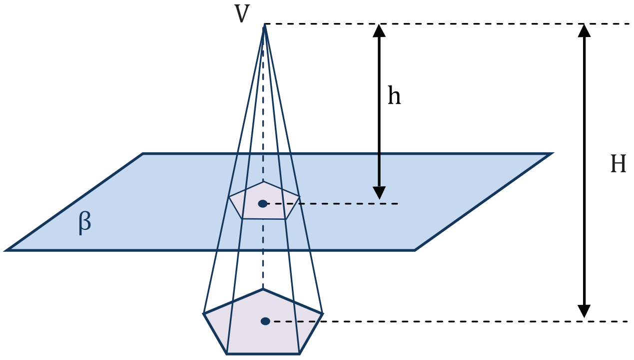
Logo,

$$V\ \frac{1}{3}A_b.h=\frac{1}{3}\ 30.12=120cm^3.$$

Tronco de pirâmide de bases paralelas

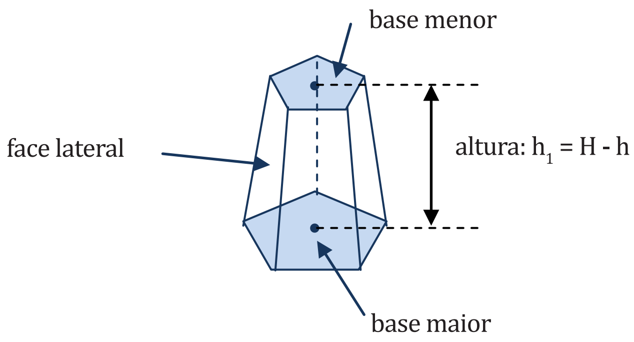
Conceito

Considere uma pirâmide de vértice V e altura H. Traçando um plano β paralelo a base, que secciona a pirâmide a uma distância h do vértice, obtém dois poliedros: uma pirâmide de vértice V e altura h e um poliedro que é chamado tronco da pirâmide inicial.



Elementos do tronco da pirâmide

Duas bases: a base da pirâmide inicial (base maior) e a secção determinada pelo plano β (base menor);
Faces laterais: as faces laterais são trapézios;
Altura: é a distância entre as bases do tronco. Sua medida é $h_1 = H - h$.



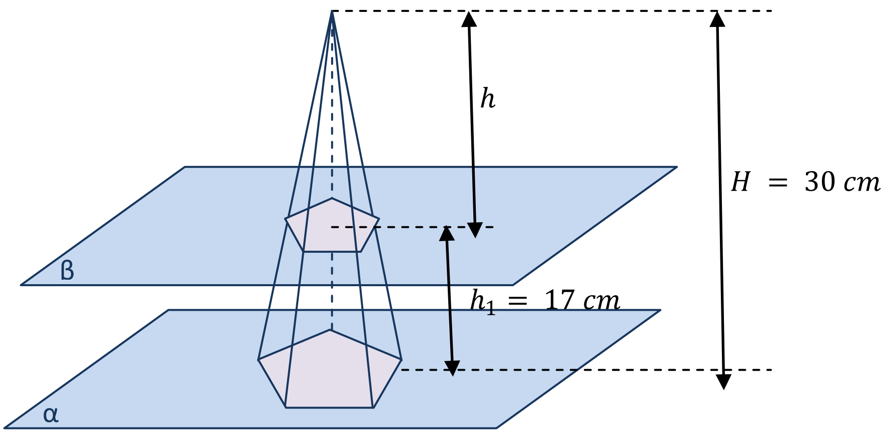
Quando a pirâmide original é regular o tronco de pirâmide se diz regular. Neste caso:

- as bases são polígonos regulares semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles;
- a altura de um desses trapézios é chamada apótema do tronco.

Exemplos:
Uma pirâmide tem a altura medindo 30 cm e área da base igual a 150 cm^2. Qual é a área da secção superior (base menor) do tronco dessa pirâmide, obtida pelo seu corte por um plano paralelo a sua base, sabendo-se que a altura do tronco da pirâmide é 17 cm?

Solução:

Temos pela figura abaixo que $h = H - h_1 = 30 - 17 = 13$ cm, já que $H = 30$ cm e $h_1 = 17$ cm.



Portanto, como

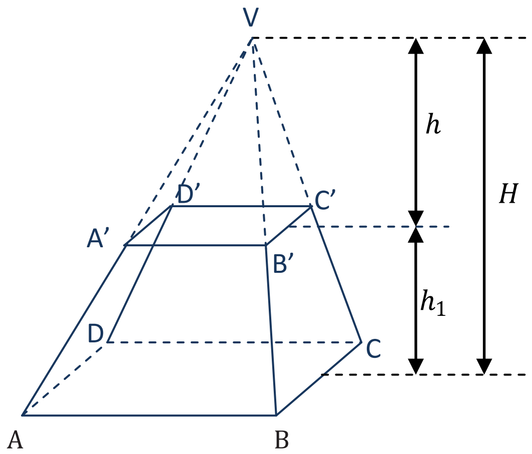
$$\frac{\text{área da secção}}{\text{área da secção}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

temos:

$$\frac{\text{área da secção}}{150} = \left(\frac{13}{30}\right)^2 \Rightarrow \text{área da secção} = \frac{13^2.150}{30^2} \cong 28{,}2\ cm^2.$$

Volume do Tronco de Pirâmide

Consideremos o tronco de pirâmide abaixo:



B = base maior
b = base menor
H = altura da pirâmide VABCD
h = altura da pirâmide VA'B'C'D'
h_1 = altura do tronco
V = volume do tronco

Concluímos da figura que:

vol. do tronco (V) = vol. da pirâmide VABCD – vol.da pirâmide VA'B'C'D',

onde,

vol. da pirâmide VABCD = 1/3 A_B H e vol. da pirâmide VA'B'C'D' = 1/3 A_b.h=1/3 A_b (H-h_1).

Então:

$$V=\frac{1}{3}A_B H-\frac{1}{3}A_b(H-h_1)=\frac{1}{3}[A_B H-A_b(H-h_1)]=\frac{1}{3}[A_B H-A_b H+A_b h_1]=\frac{1}{3}[(A_B-A_b)H+A_b h_1]$$

O volume deve ser dado em função dos elementos do tronco da pirâmide A_B,A_b e h_1. Basta então, calcular H em função desses elementos. Temos da propriedade da secção transversal que:

$$\frac{A_b}{A_B}=\left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_b}{A_B}=\left(\frac{H-h_1}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}}=\frac{H-h_1}{H} \Rightarrow H\sqrt{A_b}=H\sqrt{A_B}-h_1\sqrt{A_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\sqrt{A_b}-H\sqrt{A_B}=-h_1\sqrt{A_B} \Rightarrow H\left(\sqrt{A_b}-\sqrt{A_B}\right)=-h_1\sqrt{A_B} \Rightarrow H=\frac{h_1\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}.$$

Substituindo então na fórmula do volume temos:

$$V=\frac{1}{3}\left[(A_B-A_b).\frac{h_1\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}+A_b h_1\right]=\frac{1}{3}\left[h_1\sqrt{A_B}.\frac{(A_B-A_b)}{\left(\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}\right)}+A_b h_1\right],$$

sendo,

$$\frac{(A_B-A_b)}{\left(\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}\right)}=\frac{(A_B-A_b)\left(\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b}\right)}{\left(\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}\right)\left(\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b}\right)}=\frac{(A_B-A_b)\left(\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b}\right)}{(A_B-A_b)}=\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b},$$

temos:

$$V = \frac{1}{3}\left[h_1\sqrt{A_B}.\left(\sqrt{A_B}+\sqrt{A_b}\right)+A_b h_1\right] = \frac{1}{3}\left[h_1 A_B + h_1\sqrt{A_B}\sqrt{A_b}+A_b h_1\right].$$

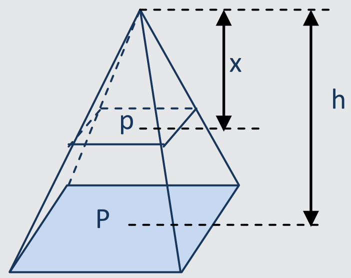
Diante desse cálculo, conclui-se que:

$$V = \frac{h_1}{3}\left(A_B+\sqrt{A_B A_b}+A_b\right).$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. A área da base de uma pirâmide é $36cm^2$. Uma secção transversal, feita a $3cm$ da base, tem $9cm^2$ de área. Calcule a altura da pirâmide.

Solução:



Na figura, temos:
P=$36cm^2$
p=$9cm^2$
h-x=3 $cm \Rightarrow$ x=h-3

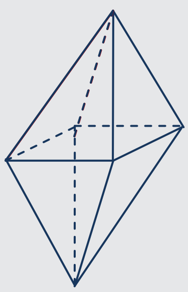
Logo, como $\frac{P}{p} = \frac{h^2}{x^2}$, temos:

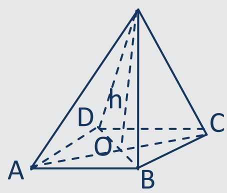
$$\frac{36}{9} = \frac{h^2}{(h-3)^2} \Rightarrow 4 = \frac{h^2}{(h-3)^2} \Rightarrow 2 = \frac{h}{h-3} \Rightarrow 2h-6 = h \Rightarrow h = 6.$$

A altura da pirâmide é 6 cm.

2. Quando duas pirâmides regulares de bases quadradas e cujas faces laterais são triângulos equiláteros são colocadas base a base, o sólido resultante é chamado octaedro regular. Calcule então o volume do octaedro regular de aresta 5 cm.

Solução:





Note que da segunda figura acima, temos:

- $\overline{AC}$ = diagonal do quadrado $=5\sqrt{2}$
- $\overline{VO}$ = altura da pirâmide
- OC = metade da diagonal do quadrado$=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

No triângulo retângulo VOC (reto em Ô) temos:

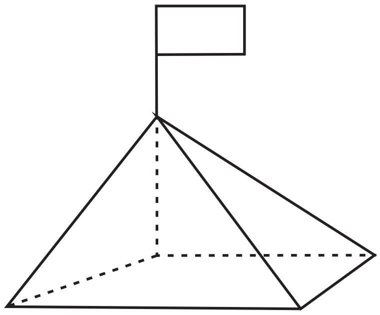
$$5^2 = h^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 25 - \frac{50}{4} = \frac{50}{4} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

A área da base é dada por A_b=5.5=25, logo o volume da pirâmide é:

$$V = \frac{A_b.h}{3} = \frac{25.\frac{5\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{6}.$$

Como são duas pirâmides, temos que o volume do octaedro regular é $V = 2.\frac{125\sqrt{2}}{6} = \frac{125\sqrt{2}}{3}cm^3$.

3. O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente a prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, calcule o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide.

Solução:

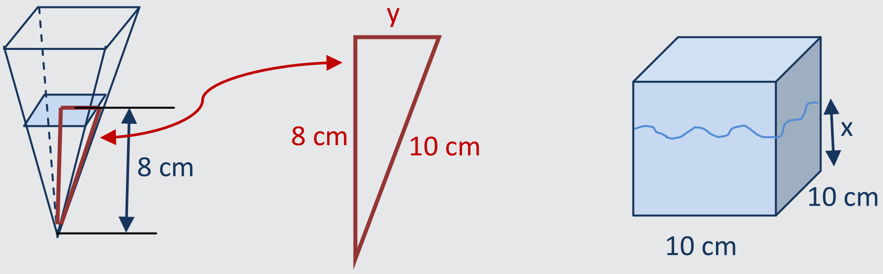
A área da base (quadrado) é A_b=3.3=9, logo o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b.h}{3} = \frac{9.4}{3} = 12.$$

Portanto, o volume de concreto necessário para a construção da pirâmide será 12 m^3.

4. Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular, para verificar o índice pluviométrico de certa região. A água, depois de recolhida, é colocada em um cubo de 10 cm de aresta. Se, na pirâmide, a água atinge uma altura de 8 cm e forma uma pequena pirâmide de 10 cm de apótema lateral, então qual a altura atingida pela água no cubo?

Solução:



Para encontrarmos o valor de x, isto é, a altura atingida pela água no cubo basta encontramos o volume de água, já que, V_{agua}=10.10.x=100.x. Olhando para a pirâmide temos que V_{agua}=1/3 A_b.h, onde A_b é a área do quadrado de lado l=2y. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo acima temos a seguinte expressão:

$10^2=8^2+y^2 \Rightarrow y^2=100-64=36 \Rightarrow y=6.$

Portanto, como $A_b=l^2=12^2=144$, temos:

$$100.x = V_{água} = \frac{1}{3}A_b.h = \frac{1}{3}144.8 = \frac{1152}{3} = 384 \Rightarrow x = \frac{384}{100} = 3{,}84.$$

5. Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem 21 dm^3 de volume. A altura do tronco mede 30 cm e o lado do quadrado da base maior, 40 cm. Calcule o lado do quadrado da base menor.

Solução:

Seja L e l, os lados da maior e menor base, respectivamente. Como L=40 cm, temos que a área da base maior é $A_B=L_2=1600$ cm^2 e a área da base menor é $A_b=l^2$. Sendo $h_1=30$ cm e $V=21dm^3=21000cm^3$, temos:

$$V=\frac{h_1}{3}\left(A_B+\sqrt{A_B.A_b}+A_b\right)=\frac{30}{3}\left(1600+\sqrt{1600.l^2}+l^2\right)$$

$$21000=10.\left(1600+40l+l^2\right)\Rightarrow l^2+40l+1600=\frac{21000}{10}\Rightarrow l^2+40l+1600=2100\Rightarrow$$
$$l^2+40l-500=0$$

Dada a equação do segundo grau acima, temos:

$$l=\frac{-40\pm\sqrt{40^2-4.1.(-500)}}{2.1}=\frac{-40\pm\sqrt{1600+2000}}{2}=\frac{-40\pm\sqrt{3600}}{2}\Rightarrow l=\frac{-40\pm 60}{2}$$

Como l é uma medida, logo positiva, temos que:

$$l=\frac{-40+60}{2}=10\,cm.$$

6. Um obelisco de granito tem a forma de um tronco de pirâmides de base triangular regular. Os lados das bases têm 3 m e 1 m. A altura do obelisco é de 15 m. Calcule o volume de granito usado para a construção de obelisco.

Solução:

Sendo L=3 m o lado da base maior, temos que sua área é: $A_B=\frac{L.H}{2}=\frac{3.\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}m^2$, já que a base é um triangulo equilátero de lado L=3 m e a altura de um triângulo equilátero é dado por $h=\frac{L\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, sendo l=1 m, temos que a área da base menor é:

$$A_b=\frac{l.h}{2}=\frac{1.\frac{1\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2.$$

Sendo $h_1=15$ m, temos:

$$V=\frac{h_1}{3}\left(A_B+\sqrt{A_B.A_b}+A_b\right)=\frac{15}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$=5\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{27}{16}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=5\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=5\left(\frac{13\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$=\frac{65\sqrt{3}}{4}\cong 28{,}1\,m^3.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Uma pirâmide regular hexagonal tem 10 cm de altura e a aresta da sua base mede 4 cm. Calcule:

*a)*o apótema da base;
b) o apótema da pirâmide (apótema da face);
c) a aresta lateral;
d) a área da base;
e) a área lateral;
f) a área total.

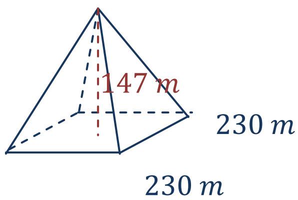
2. Calcule a aresta lateral de uma pirâmide regular, sabendo que sua base é um hexágono de 6 cm de lado, sendo 10cm a altura da pirâmide.

3. Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sendo 10 cm sua altura e 6 cm a medida da aresta da base.

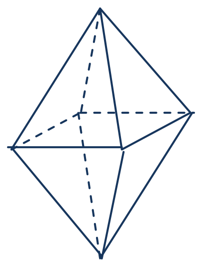
4. Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base medindo 8 cm e a área lateral igual a 3/5 da área total. Calcule a altura e a área lateral dessa pirâmide.

5. Um enfeite de acrílico tem a forma de uma pirâmide quadrada. Sua base tem 15 cm de aresta e sua altura é de 20 cm. Supondo-a maciça, qual o volume de acrílico usado para fazer esse enfeite?

6. A pirâmide de Quéops, conhecida como a Grande Pirâmide, tem cerca de 230 m de aresta na base e altura aproximada de 147 m. Qual é o seu volume?



7. Um octaedro regular é um poliedro constituído por 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra a figura a abaixo. Se o volume desse poliedro é 72 cm^3, calcule a medida de sua aresta.



8. Pretende-se construir uma tenda feita com um tecido e na forma de uma pirâmide de base quadrangular de aresta 5 m e 8 m de altura. Sabendo que o preço de 1 m^2 equivale a 5,50 reais, calcule:

a) a quantidade de tecido necessária para se construir a tenda, em m^2;
b) o valor gasto para comprar o material necessário para fazer a tenda.

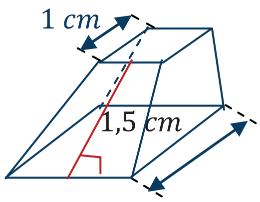
9. Visando abastecer a população de uma cidade com água potável, foi construído um tanque em formato de pirâmide onde a base hexagonal regular tem aresta medindo 30 m e altura de 4 m. O preço do litro de água é 0,20 reais (20 centavos) e cada pessoa consome em média 50 litros de água por dia. Calcular:

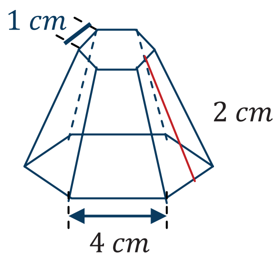
a) a quantidade de litros de água deste tanque quando ele estiver completamente cheio;
b) o dinheiro gasto para encher totalmente o tanque;
c) o nº de pessoas que poderá ser abastecida com o tanque cheio.

10. Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem $1m^2$. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), qual o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado?

11. Calcule a área total e o volume dos troncos de pirâmides cujas medidas estão indicadas nas figuras.

a) Quadrangular regular
b) Hexagonal regular





SAIBA MAIS

Certamente você já ouviu falar das pirâmides do Egito. Elas estão localizadas na esplanada de Gizé, nas proximidades da atual Cairo. São pirâmides regulares de bases quadradas e foram construídas como túmulos reais. A maior delas foi construída por volta de 2600 a.C. para abrigar o corpo do faraó Khufu (Quéops) e se tornou conhecida como uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo.
Você pode saber mais sobre as pirâmides nos endereços:

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A2mides_de_Giz%C3%A9>

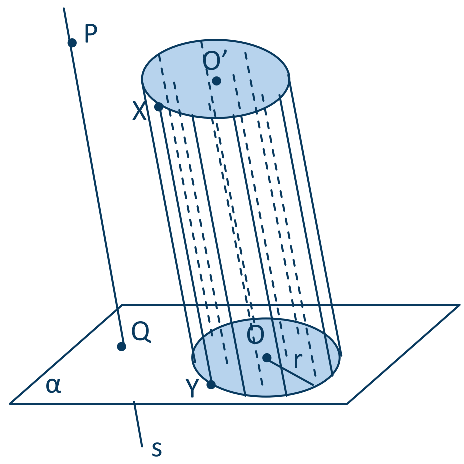
<http://www.estadao.com.br/noticias/internacional,novas-tumbas-recontam-historiadas--piramides-do-egito,493786,0.htm>

Cilindro

Cilindro: conceito, elementos e classificação

Conceito

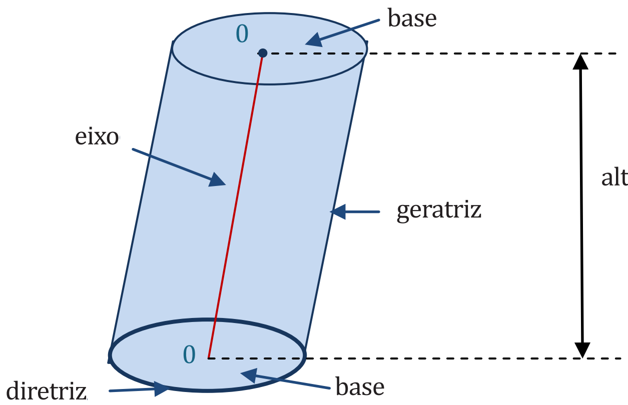
Sejam α um plano e $(\overline{PQ})$ um segmento de reta cuja reta suporte s intercepta esse plano. Dado um círculo de centro O e raio r contido no plano α, definimos por cilindro circular ou cilindro o conjunto de todos os segmentos $(\overline{XY})$ congruente com o segmento $(\overline{PQ})$, paralelos a reta s com uma extremidade nos pontos do círculo e situados em um mesmo semiespaço em relação a α.



Elementos

Vejamos as definições de cada elemento:

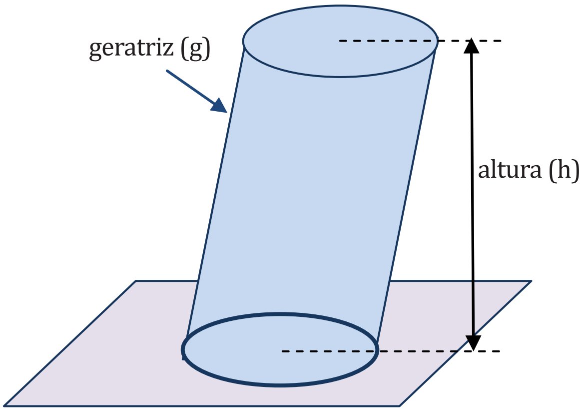
Bases: são os círculos congruentes de centro O e O', e raio r, situados em planos paralelos;
Eixo: é a reta que passa pelo centro das bases;
Altura (h): é a distância (h) entre os planos das bases;
Geratriz (g): são os segmentos com uma extremidade em um ponto do circulo de centro O e a outra no ponto correspondente do circulo de centro O', ambos com raio r;
Curva diretriz: é a curva que fica no plano α;
Superfície Lateral: é a reunião das geratrizes;
Superfície Total: é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases;
Seção meridiana de um cilindro: é uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical, que contém o eixo do cilindro, com o cilindro.



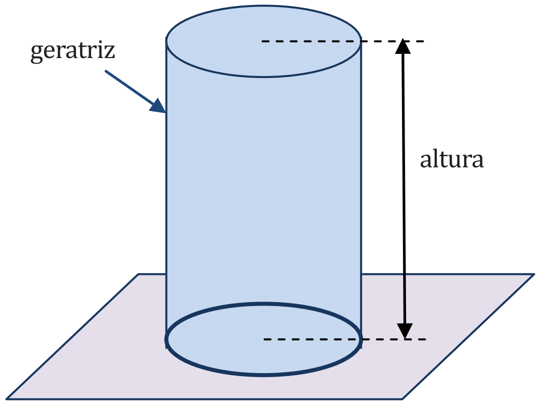
Classificação

Os cilindros são classificados de acordo com a inclinação da geratriz em relação ao plano que contém a curva diretriz, podendo ser oblíquo ou reto.

Cilindro oblíquo: é aquele cuja geratriz é oblíqua ao plano da diretriz.
Cilindro reto ou de revolução: é aquele cuja geratriz é perpendicular ao plano da diretriz.



Cilindro Oblíquo

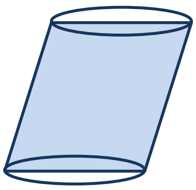


Cilindro Reto

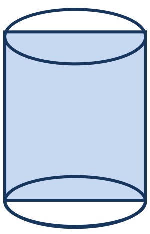
Observações:

- O cilindro reto cuja altura é igual ao diâmetro da base é chamado cilindro equilátero.
- Temos que, g > h se o cilindro for oblíquo e g = h se o cilindro for reto.
- A secção meridiana de um cilindro é um:

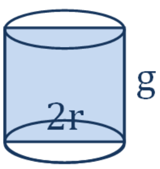
paralelogramo se o cilindro for obliquo;



retângulo se o cilindro for reto;

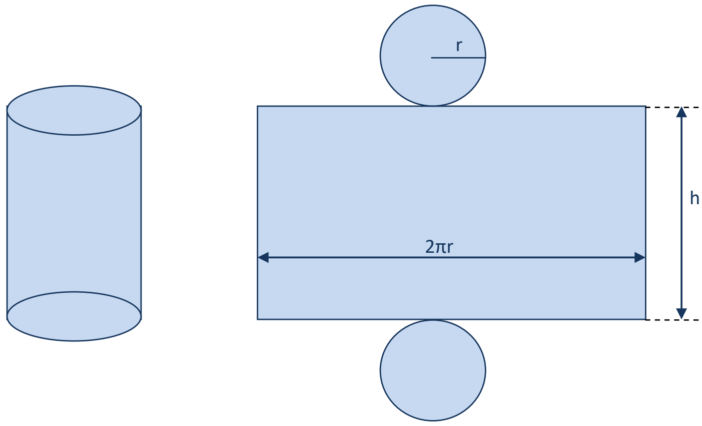


quadrado se o cilindro for equilátero, assim g = h = 2r.



Área lateral e área total do cilindro

A superfície do cilindro é formada por duas partes planas (as bases) e uma parte curva (superfície lateral). Veja as figuras abaixo:



Analisando o cilindro planificado temos a área lateral (A_l) do cilindro é dada pela área do retângulo de base $2\pi r$ (comprimento do círculo de raio r) e altura h, onde r é o raio da base. Assim:

$$A_l=2\pi r.h.$$

Como a base é um circulo de raio r temos que sua área é dada por:

$$A_b=\pi r^2.$$

A área total (A_t) do cilindro é dada pela soma da área lateral com o dobro da área da base, já que os dois círculos são congruentes e, portanto possuem a mesma área. Logo,

$$A_t=A_l+2A_b$$

Observação:

Se o cilindro for oblíquo, sua superfície lateral planificada será um paralelogramo e a área do paralelogramo também é o produto da base pela altura, logo as fórmulas acima continuam valendo.

Volume do cilindro

O volume do cilindro é dado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (h). Assim:

FIQUE DE OLHO!
Temos pelo princípio de Cavalieri que o volume do cilindro de altura h e área da base Ab é igual ao volume de um prisma que tem mesma área da base e altura.

$$V= A_b.h.$$

Como a base é um círculo de raio r, temos que $A_b=\pi r^2$, portanto:

$$V = \pi r^2.h$$

Exemplo:
Um cilindro circular reto tem 10 cm de altura e sua base tem 12 cm de diâmetro. Calcule a área lateral, a área total e o volume do cilindro.

Solução:
Sendo o diâmetro igual a 12 cm, temos que r = 6 cm. Logo:
Área lateral: $A_l=2\pi r.h=2\pi.6.10=120\pi cm^2$.
Área da base: $A_b=\pi r^2=\pi.6^2=36\pi cm^2$
Área total : $A_t=A_l+2A_b=120\pi +2.36\pi=192\pi\ cm^2$
Volume: $V=\pi.6^2.10=360\pi cm^3$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcular o raio de um cilindro equilátero cuja área lateral é $100\pi cm^2$.

Solução:

No cilindro equilátero, a secção meridiana é um quadrado, então a altura é duas vezes o raio, ou seja, h = 2r. Logo,

$$A_l = 2\pi r.h \Rightarrow 100\pi = 2\pi r.h \Rightarrow 100\pi = 2\pi r.2r \Rightarrow 100\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2$$
$$= \frac{100\pi}{4\pi} \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5cm.$$

2. Quantos cm^2 são necessários para revestir a superfície de uma lata de óleo de altura 22 cm e diâmetro da base 6 cm, com papel laminado e quantos mililitros de óleo cabem nessa lata?

Solução:

Calculando a área lateral, saberemos quantos cm^2 são necessários para revestir a superfície da lata de óleo. Sendo $A_l=2\pi r.h$, devemos encontrar o valor do raio r. Como d=2r, temos que $r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$, onde d é o diâmetro do círculo (base da lata). Portanto,

$$A_l=2\pi r.h \Rightarrow A_l=2\pi 3.22 \Rightarrow A_l=132\pi cm^2.$$

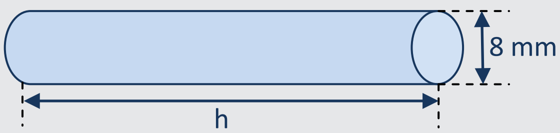
Agora, para saber quantos mililitros de óleo cabem na lata, é necessário obter o volume. Sendo $V=\pi r^2.h$, temos $V=\pi r^2.h \Rightarrow V=\pi 3^2.22 \Rightarrow V=198\pi=198.3,14=621,72cm^3$, já que, $\pi \cong 3,14$.

Sabemos que $1l=1dm^3$ e $1dm^3=1000cm^3$, logo $1l=1000cm^3$, mas 1l=1000ml.

Então $1000ml=1000cm^3 \Rightarrow 1 ml=1cm^3$. Concluímos então que cabem $621,72cm^3$= 621,72 ml de óleo na lata.

3. Qual deve ser o comprimento de um tubo, de forma cilíndrica, se a sua superfície total pode ser coberta com $43,7088cm^2$ de plástico e o diâmetro de cada base tem 8 mm? (Use π=3,14.)

Solução:



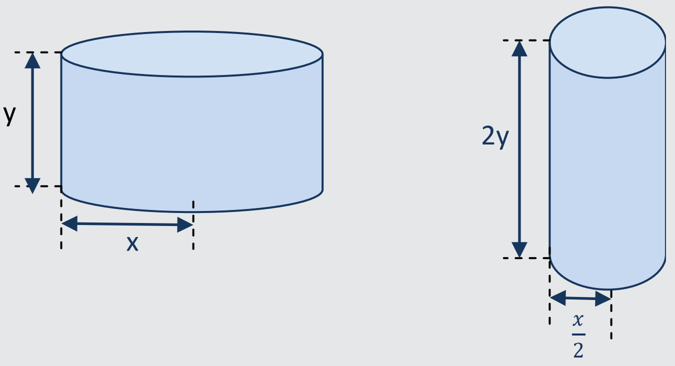
Sendo o tubo, cilíndrico, temos que seu comprimento é a altura do cilindro h. O diâmetro da base é 8 mm=0,8 cm. Logo, $r = \frac{d}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4cm$. Temos então:

$A_b=\pi r^2=\pi(0,4)^2=0,16\pi=0,16.3,14=0,5024cm^2$ e
$A_l=2\pi r.h=2\pi.0,4.h=0,8\pi.h=0,8.3,14.h=2,512.hcm^2$.

Logo, $A_t=A_l+2A_b \Rightarrow 43,7088=2,512.h+2.0,5024 \Rightarrow h = \frac{42,704}{2,512} = 17.$
$\Rightarrow 2,512.h=43,7088-1,0048 \Rightarrow 2,512.h=42,704$

Portanto, a altura do tubo deve ser de 17 cm.

4. Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas. Uma delas (fig. I) tem raio da base x e altura y. A outra (fig. II) tem raio da base $\frac{x}{2}$ e altura 2y. A primeira delas é vendida por R$ 16,00 e a segunda por R$ 10,00. Qual das duas latas é mais vantajoso comprar?



Sejam V_I e V_{II}, os volumes das latas da fig. I e II, respectivamente. Assim, como o volume de um cilindro é $V=\pi.r^2.h$, onde h é a altura e r o raio do circulo da base, temos:

$$V_I=\pi.x^2.y \text{ e}$$

$$V_{II}=\pi.\left(\frac{x}{2}\right)^2.2y=\pi.\frac{x^2}{4}.2y=\pi.\frac{x^2}{2}.y=\frac{\pi.x^2.y}{2}=\frac{V_I}{2}$$

$$\Leftrightarrow V_I=2V_{II}$$

Note que, o volume do cilindro I é o dobro do volume do cilindro II. Logo, é mais vantajoso comprar a lata I que custa R$ 16,00 e tem o dobro de suco que a lata II.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Qual é a capacidade de uma lata que tem a forma cilíndrica, com 7 cm de diâmetro e 14 cm de altura? (Lembre-se: $1cm^3=1$ ml)

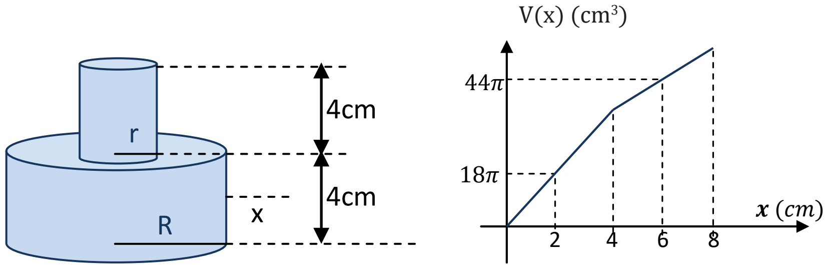
2. Para fabricar uma caixa de lápis de cor, é preciso saber inicialmente qual é o volume de cada lápis. Calcule então o volume de um lápis (sem apontar) que tem 8 mm de diâmetro e 8 cm de comprimento e, em seguida, determine o valor aproximado de 20 lápis. (Use $\pi=3,14$)

3. Um cilindro circular reto tem 10 cm de altura e sua base tem 12 cm de diâmetro. Calcule a área lateral, área total e o volume do cilindro.

4. Um galpão de vinho de forma cilíndrica tem o raio da base igual a 2,5 m e sua altura é 2 m. Se apenas 40% do seu volume está ocupado por vinho, qual é a quantidade de vinho existente no galpão, em litros? ($1l=1dm^3$)

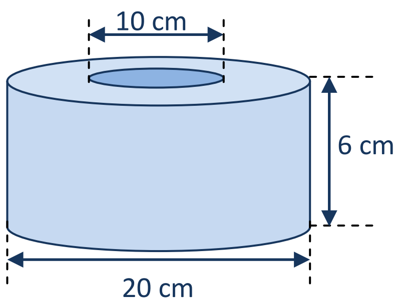
5. Uma seringa tem a forma cilíndrica com 2 cm de diâmetro por 8 cm de comprimento. Quando o êmbolo se afastar 5 cm da extremidade da seringa próxima à agulha, qual o volume, em ml, de remédio liquido que a seringa pode conter?

6. Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura de 4 cm e raios das bases R e r, respectivamente. Se o volume V(x) de um líquido que atinge a altura x da garrafa se expressa segundo o gráfico a seguir, quais os valores de R e r?



7. Um cilindro reto tem $48\pi\ m^2$ de área total. A altura desse mede 5 *m*. Determine o volume dele.

8. Uma peça de madeira tem as medidas e a forma da figura abaixo. Qual é o volume de madeira empregado para fabricar esta peça?

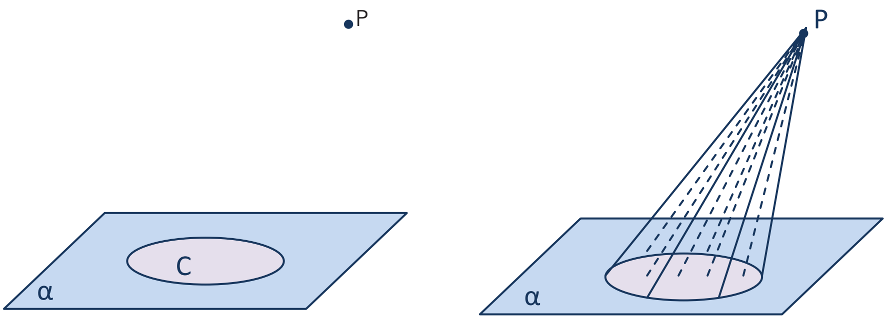


Cone

Cone: conceito, elementos e classificação

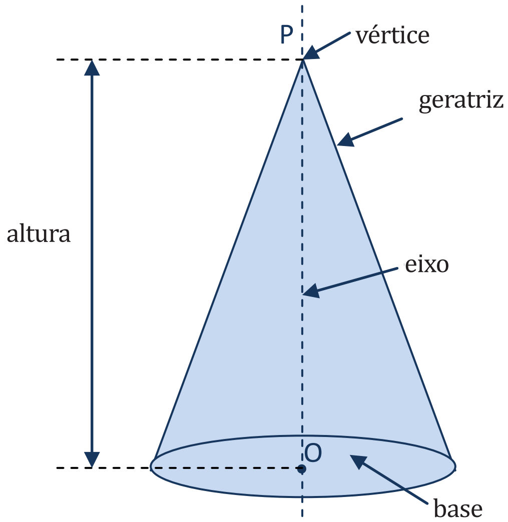
Conceito

Dado um plano α, um círculo C contido em α e um ponto P, tal que P∉ α, denominamos cone a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto P e a outra no círculo C.



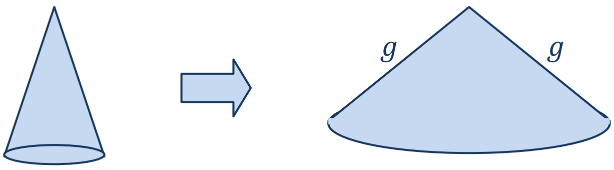
Elementos

Observe cada elemento na figura e sua definição logo abaixo:

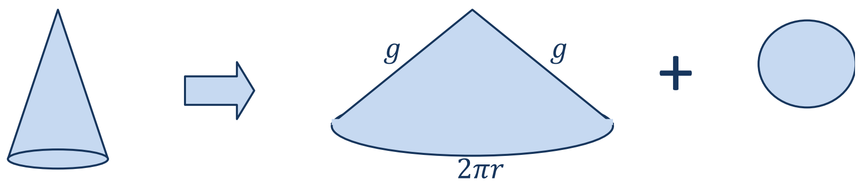


Base: é o círculo C contido no plano α;
Vértice: é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta;
Altura (h): é a distância do vértice do cone ao plano da base;
Eixo: é a reta que contém o vértice P e centro do círculo da base;
Geratriz: é o segmento com uma extremidade no vértice P e a outra na curva que envolve a base (circunferência);

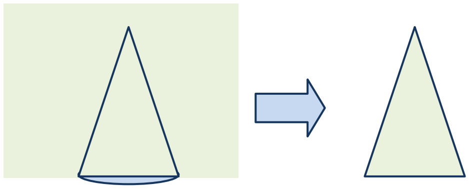
Superfície lateral: é a reunião de todas as geratrizes do cone;



Superfície do cone: é a reunião da superfície lateral com a base do cone (círculo);

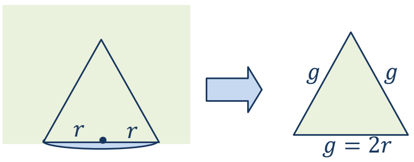


Secção meridiana: é a região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contém o eixo dele.



Observação:

- Todo cone, em que a secção meridiana é um triângulo de lados congruentes (triângulo equilátero), é chamado de cone equilátero;

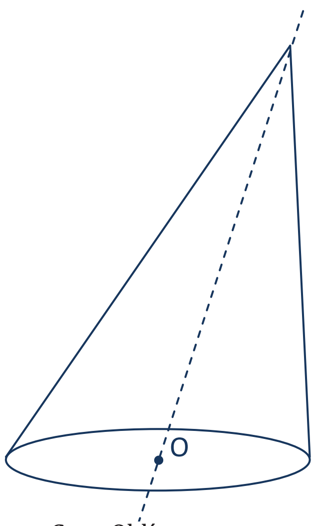


- No caso particular do cone equilátero, a geratriz é igual ao diâmetro da base, isto é, g = d ou g = 2r, onde r é o raio da base (veja figura anterior).

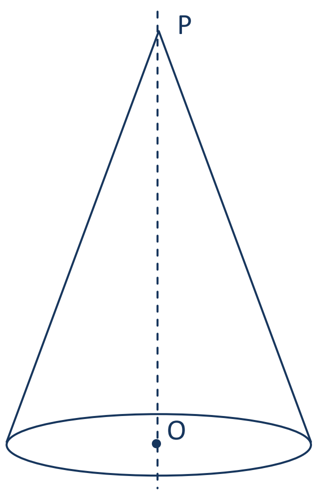
Classificação

Classificamos o cone de acordo com a posição de seu eixo em relação ao plano da base:

Cone oblíquo: é o cone cujo eixo é oblíquo a base;
Cone reto: é o cone cujo eixo é perpendicular à base



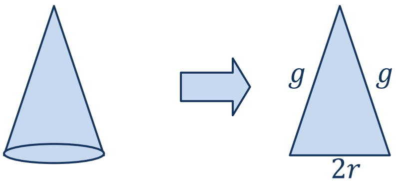
Cone Oblíquo



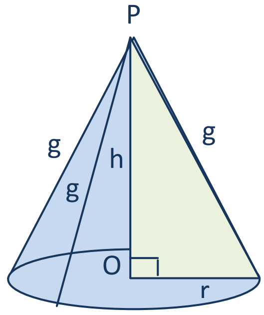
Cone Reto

Observação:

- Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si;
- No cone reto, a secção meridiana é um triângulo isósceles;



O cone reto pode ser obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno da reta suporte de um dos catetos. Neste caso, h=($\overline{PO}$) (veja figura abaixo);



No triângulo retângulo, temos a seguinte relação:

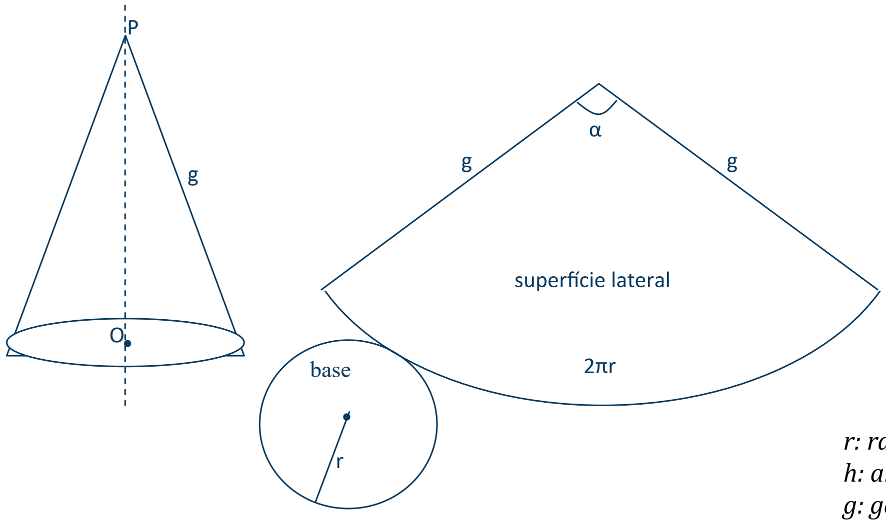
$$g^2=h^2+r^2,$$

onde,

g é a *medida da geratriz;*
h é a *altura do cone;*
r é a *medida do raio da base.*

Área lateral e área total do cone

A superfície total de um cone reto é formada pela superfície lateral (um setor circular) mais a base (um círculo). Veja:



r: raio da base
h: altura
g: geratriz (raio do setor)
α: ângulo do setor

A superfície lateral de um cone de raio r e geratriz g é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi r$. Logo a área da superfície lateral (A_l) do cone é dada pela área do setor circular. Assim:

	Comp. arco		área
círculo todo:	$2\pi g$	-	πg^2
setor:	$2\pi r$	-	A_l

$$A_l = \frac{2\pi r.\pi g^2}{2\pi g} = \pi r g$$

Portanto,

$$A_l = \pi r g.$$

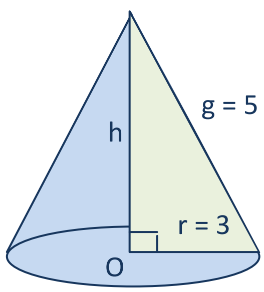
A área total do cone é dada por $A_t=A_l+A_b$, como a base é um circulo de raio r temos que $A_b=\pi r^2$, logo $A_t=A_l+A_b= \pi rg+\pi r^2=\pi r(g+r)$. Assim

$$A_t=\pi r(g+r).$$

Exemplo:
Para um cone reto que tem geratriz g com 5 cm e raio r da base com 3 cm, calcular:

a) área lateral;
b) área da base;
c) área total;
d) altura.

Solução:
a) $A_l = \pi r g \Rightarrow A_l = \pi.3.5=15\pi cm^2$
b) $A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi 3^2=9\pi$ cm²
c) $A_t = A_b + A_l \Rightarrow A_t=9\pi+15\pi=24\pi$ cm²
d) Considerando a figura abaixo, temos pelo triângulo de Pitágoras que:



$g^2=h^2+r^2 \Rightarrow 5^2=h^2+3^2$
$\Rightarrow h^2=25-9 \Rightarrow h=\sqrt{16}=4$

onde,

g é a medida da geratriz;
h é a altura do cone;
r é a medida do raio da base

Volume do cone

O volume do cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura, isto é, $V = \frac{1}{3} A_b . h$. Como a base do cone é um círculo de raio r, temos que $A_b = \pi r^2$, logo

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

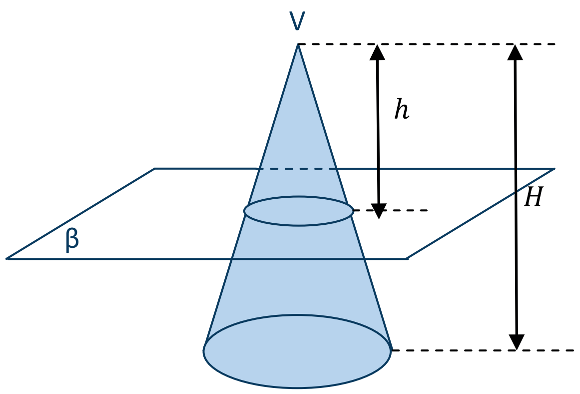
Exemplo:
Qual é o volume da casquinha de um sorvete que tem a forma de um cone reto, sabendo que o raio da base mede 3 cm e a altura 12 cm?

Solução:
A base do cone é um círculo de área: $A_b = \pi r^2 = \pi . 3^2 = 9\pi cm^2$. Como o volume da casquinha é dado por, $V = \frac{1}{3} A_b . h$ temos:

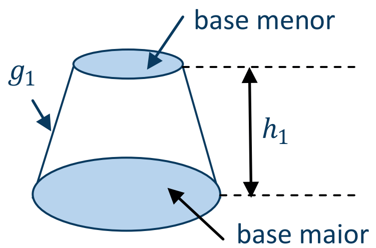
$$V = \frac{1}{3} 9\pi . 12 = 36\pi \, cm^3 .$$

Tronco do cone

Conceito
Considere um cone circular reto de vértice V e altura H. Seja β um plano, paralelo à base, que secciona o cone, de acordo com a figura:



Obtemos, então, dois sólidos: um cone de vértice V e altura h e outro chamado tronco do cone inicial:



Elementos

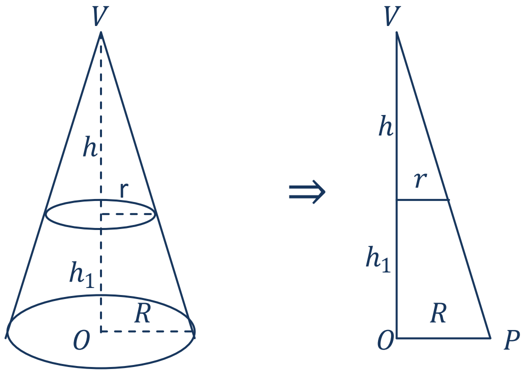
Duas bases: a base maior (base do cone inicial) e a base menor (secção determinada por β);

- Altura (h_1): é a distância entre as bases do tronco. Sua medida é $h_1 = H - h$.

- Geratriz (g_1): é a diferença das medidas das geratrizes dos dois cones, isto é, $g_1=g-\tilde{g}$, onde g é a geratriz do cone inicial e $\tilde{g}$ é a geratriz do cone determinado por β.

Volume do Tronco do Cone

Dado o cone de vértice V, altura H e base de raio R, seccionado paralelamente a uma altura h_1 de sua base, destacamos o triângulo retângulo VOP. Temos por semelhança de triângulo que:



$$\frac{H}{R}=\frac{h}{r},$$

como $H=h+h_1$, temos:

$$\frac{h+h_1}{R}=\frac{h}{r}\Rightarrow rh+rh_1=Rh$$
$$\Rightarrow (R-r)h=rh_1$$
$$\Rightarrow h=\frac{rh_1}{R-r}$$

Como $V_T=V_{Tronco}=V_{(\text{cone maior})}-V_{(\text{cone menor})}$, temos que:

$$V_T=\frac{1}{3}\pi R^2 H-\frac{1}{3}\pi r^2 h\Rightarrow V_T=\frac{1}{3}\pi R^2\left(h+h_1\right)-\frac{1}{3}\pi r^2 h\Rightarrow$$

$$V_T=\frac{\pi}{3}\left(R^2h_1+R^2h-r^2h\right)\Rightarrow V_T=\frac{\pi}{3}\left[R^2h_1+\left(R^2-r^2\right)h\right]$$

Sendo $R^2-r^2=(R+r).(R-r)$ e $h=\frac{rh_1}{R-r}$, temos que:

$$V_T=\frac{\pi}{3}.\left[R^2h_1+\left(R^2-r^2\right).\frac{rh_1}{R-r}\right]\Rightarrow V_T=\frac{\pi}{3}.\left[R^2h_1+\left(R+r\right)\left(R-r\right).\frac{rh_1}{R-r}\right]$$

$$\Rightarrow V_T=\frac{\pi}{3}.\left[R^2h_1+\left(R+r\right)rh_1\right]\Rightarrow V_T=\frac{\pi}{3}.h_1\left[R^2+Rr+r^2\right]$$

Portanto,

$$V_T=\frac{\pi}{3}.h_1\left[R^2+Rr+r^2\right]$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8πcm, calcule o volume do cone, em centímetros cúbicos.

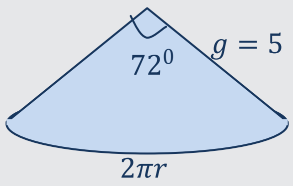
Solução:

O comprimento de uma circunferência é dado por C=2πr, onde r é o raio, logo temos pelo enunciado que $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = \dfrac{8\pi}{2\pi} = 4\,cm.$ Como a altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base, isto é, h=3r, temos h=3.4=12 cm. Portanto, o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi 4^2.12 = 64\pi\, cm^3$$

2. A geratriz de um cone mede 5 cm e o ângulo central do setor circular mede 72^0. Calcule a área lateral do cone.

Solução:



Dado o setor circular de raio R=g=5 cm, temos, pela regra de três simples que, a área do circulo de raio R está para 360^0 assim como a área do setor circular (área lateral- A_l) está para 72^0, isto é,

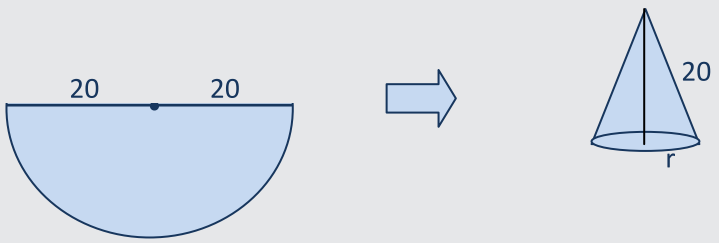
$$\begin{array}{ccc} \pi R^2 & - & 360^0 \\ A^l & - & 72^0 \end{array} \qquad A_l = \frac{72^0\,\pi R^2}{360^0},$$

Logo, a área lateral é dada por:

$$A_l = \frac{72^0\,\pi R^2}{360^0} \Rightarrow A_l = \frac{\pi 5^2}{5} = 5\pi = 5.3{,}14 = 15{,}70\,cm^2.$$

3. Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina, um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual a distância do bico do chapéu à mesa?

Solução:

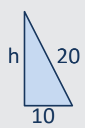


Quando você formar o cone (chapéu) perceberá que o raio do semicírculo será, agora, a geratriz do cone, isto é, g=R=20 cm. Para encontrar a distância do bico do chapéu à mesa (altura do cone), devemos antes encontrar o raio do circulo (r) da base do cone. Note que o comprimento do semicírculo (metade do círculo) de raio R=20, na figura I, é igual ao comprimento do círculo de raio r, na figura II, isto é,

$$\frac{Comprimento\ do\ circulo\ de\ raio\ R}{2} = Comprimento\ do\ circulo\ de\ raio\ r$$

$$\frac{2\pi R}{2} = 2\pi r \Rightarrow \frac{2\pi.20}{2} = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 20.\pi \Rightarrow r = \frac{20\pi}{2\pi} = 10.$$

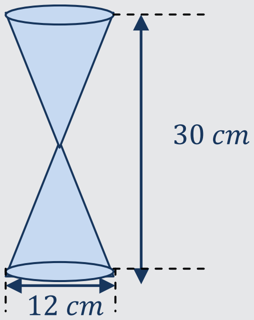
Portanto, temos do teorema de Pitágoras que:



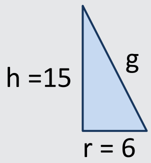
$20^2=10^2+h^2 \Rightarrow h^2=400-100$
$\Rightarrow h=\sqrt{300} \Rightarrow h=10\sqrt{3}$

4. Quantos cm^2 de vidro são necessários para fabricar ampulheta cujas dimensões estão na figura abaixo?

Solução:



Note que a ampulheta é formada por dois cones de altura $h = \frac{30}{2} = 15\,cm$ raio da base igual a $r = \frac{12}{2} = 6\,cm$. Temos então que:



$g^2 = 15^2 + 6^2 = 261$
$g = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$.

Onde g é a geratriz.

Portanto, $A_l = \pi rg = \pi.6.3\sqrt{29} = 18\sqrt{29}\ \pi = 18.5{,}38.3{,}14 \cong 304 cm^2$. Como são dois cones temos que a quantidades de vidro necessário para fabricar uma ampulheta é 608 cm^2.

5. Uma vasilha tem a forma da figura dada. Seu topo circular tem 30 cm de diâmetro e a altura da vasilha é 20 cm. Qual é o volume máximo de líquido que essa vasilha pode conter em litros?

Solução:

Sendo o diâmetro igual a 30 cm, temos que o raio é dado por $r = \frac{30}{2} = 15\,cm$.
Logo como a vasilha tem a forma de um cone, seu volume é dado por:

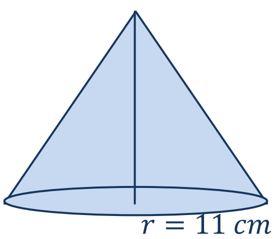
$$V = \frac{1}{3}A_b.h = \frac{1}{3}\pi r^2.h \Rightarrow V = \frac{\pi(15)^2.20}{3} \Rightarrow V = \frac{3{,}14.225.20}{3} = \frac{14130}{3} = 4710\ cm^3.$$

Como 4710 cm^3=4,710 dm^3 e 1dm^3=1 litro, temos que o volume máximo de líquido que esta vasilha pode conter é de, aproximadamente, 4,7 litros.

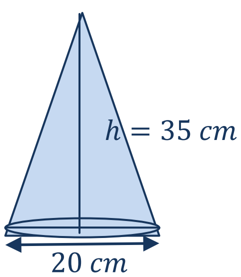
EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras a seguir.

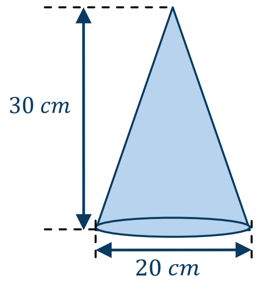
a) Cone equilátero



b) Cone Reto



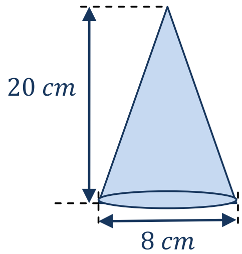
2. Quantos cm^2 de cartolina serão gastos para fazer o chapéu de palhaço cujas medidas estão na figura abaixo?



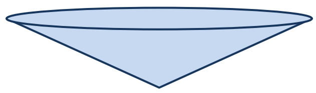
3. A área lateral de um cone é 24π cm^2 e o raio de sua base é 4 cm. Qual é a área total do cone?

4. Planificando a superfície lateral de um cone, obtemos um setor circular de raio 6 cm e ângulo central de 60^0. Qual a área lateral do cone?

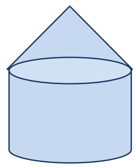
5. Quantos cm^2 de papelão são necessários para fabricar um carretel de novelo de lã cuja forma e medidas estão na figura abaixo? (Suponha que o carretel não utilize papelão na base)



6. Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Qual é o volume máximo, em litros, que ele pode conter de líquido?

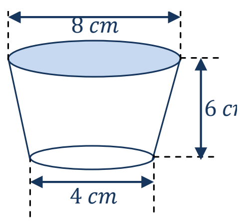


7. Um silo para armazenar cereais tem a forma da figura. O raio do cilindro e do cone é 4 m. A altura total do silo é 10 m e a altura do cone é 4 m. Quantos m^3 de cereais podem ser armazenados nesse silo?



8. Uma sorveteria utiliza copos de forma cônica para colocar sorvete. O copo tem 10 cm de profundidade por 4 cm de diâmetro na abertura. Num copo, foram colocadas duas colheradas de sorvete, cada uma delas com um volume de $\frac{16\pi}{3}cm^3$. Se o sorvete colocado no copo derreter, ele transbordará?

9. Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura. Supondo, π=3,14, o volume máximo de líquido que ela pode conter é?



SAIBA MAIS

Acesse ao link abaixo para saber mais sobre a Geometria das embalagens:

<http://grupo-gauss.blogspot.com.br/2010/12/geometria-das-embalagens.html>

III SÓLIDOS GEOMÉTRICOS E INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

Nesta unidade, trabalharemos com mais um sólido geométrico, a esfera. Estudaremos ainda algumas das numerosas relações que existem entre dois sólidos quando construídos um deles dentro do outro (sólidos inscritos e circunscritos). Logo, temos como objetivos nesta unidade:

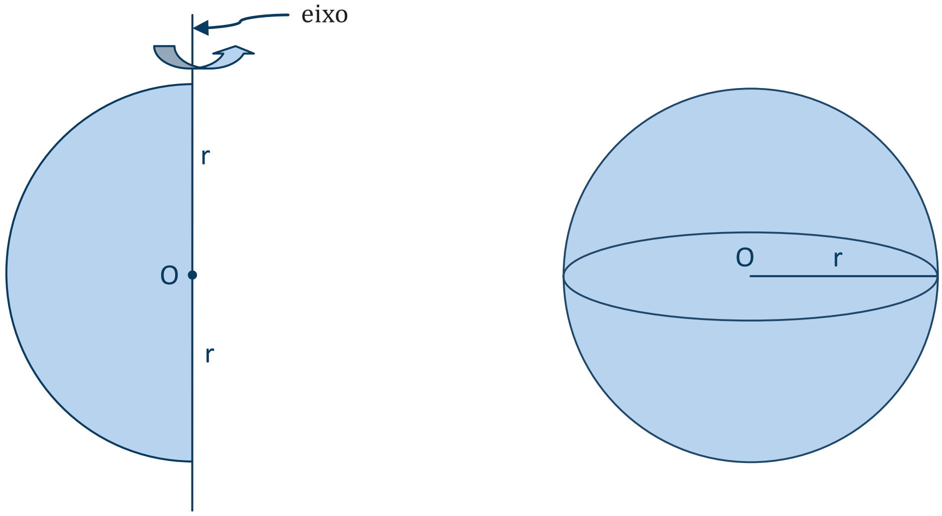
- Conceituar, classificar e destacar os elementos de uma esfera;
- Calcular área e volume da esfera;
- Apresentar relações desenvolvidas a partir de sólidos inscritos em outros;
- Aplicar conceitos em situações que envolvam interdisciplinaridade e contextualização.

Esfera

Esfera: conceito, elementos e secção

Conceito

Dados um ponto O e um número real positivo r, chamamos de esfera de centro O e raio r, o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a O é menor ou igual a r. Isto é, $S=\{x;d(x,O)\leq r\}$.

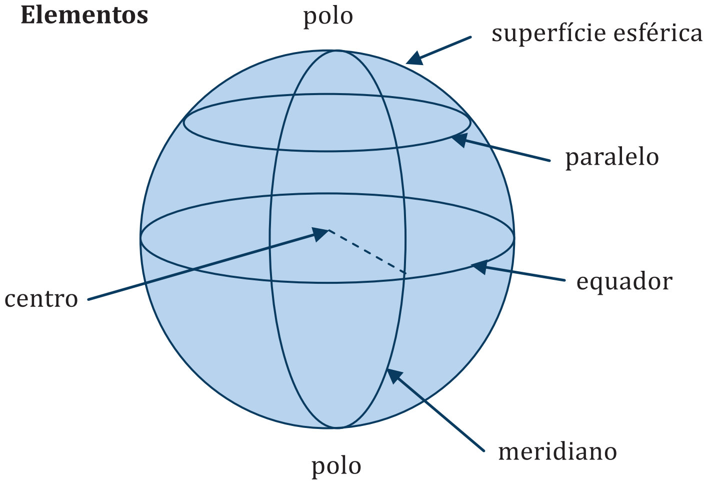


Observação:

1. *Esfera é o sólido obtido pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro;*

2. *A esfera é um sólido limitado por uma superfície esférica, formada por todos os pontos pertencentes a essa superfície e ao seu interior.*

Elementos

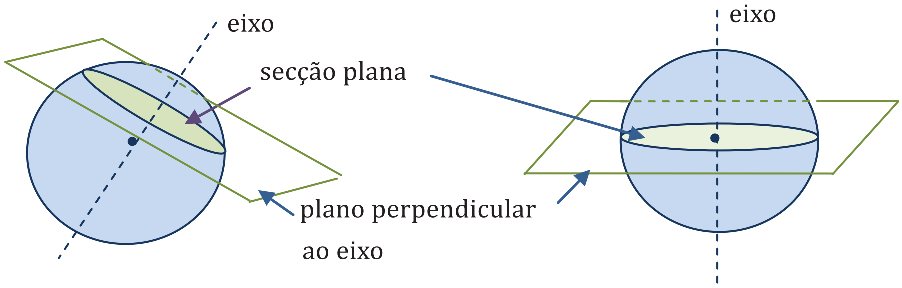


FIQUE DE OLHO!
A partir da observação 1, podemos afirmar que a esfera é um sólido de revolução.

Centro da esfera (O): é o ponto que fica no centro da esfera;
Eixo (e): é a reta que passa pelo centro da esfera;
Raio (r): é a distância do centro da esfera a qualquer ponto da superfície esférica;
Superfície esférica: é o conjunto dos pontos do espaço tais que a distância deles ao centro O seja igual ao raio r (ex.: se você pensar em uma laranja, sua superfície esférica seria a casca da laranja);
Polos: são as interseções da superfície com o eixo;

Secção

Secção plana: é qualquer círculo obtido pela intersecção de um plano perpendicular a uma reta que passe pelo centro da esfera. Se o plano passar pelo centro da esfera, obtemos como secção um círculo máximo da esfera;



Equador: é a circunferência de uma secção plana que contém o centro (O) e é perpendicular ao eixo (e);
Paralelo: é a circunferência de uma secção plana perpendicular ao eixo (e);
Meridiano: é a circunferência da secção determinada por um plano que contém o eixo (e).

Área da superfície esférica

A área da superfície esférica de raio r é dada por:

$$A=4\pi r^2$$

SAIBA MAIS

Você encontrará a demonstração dessa fórmula acessando o link abaixo:

<http://www2.unemat.br/eugenio/arquivos/esfera.pdf>

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine a área da superfície de uma esfera de raio 10 cm.

Solução:

Sendo r = 10 cm e π = 3,14, temos que:
$A=4\pi.10^2=400.3,14=1256cm^2$.

2. Calcule o valor do raio (r) de uma esfera sabendo-se que a área da superfície esférica (A) é $16\pi cm^2$.

Solução:

Como a área da superfície esférica é $16\pi cm^2$, temos:

$$4\pi r^2 = A = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r^2 = \frac{16\pi}{4\pi} = 4 \Rightarrow r = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2cm.$$

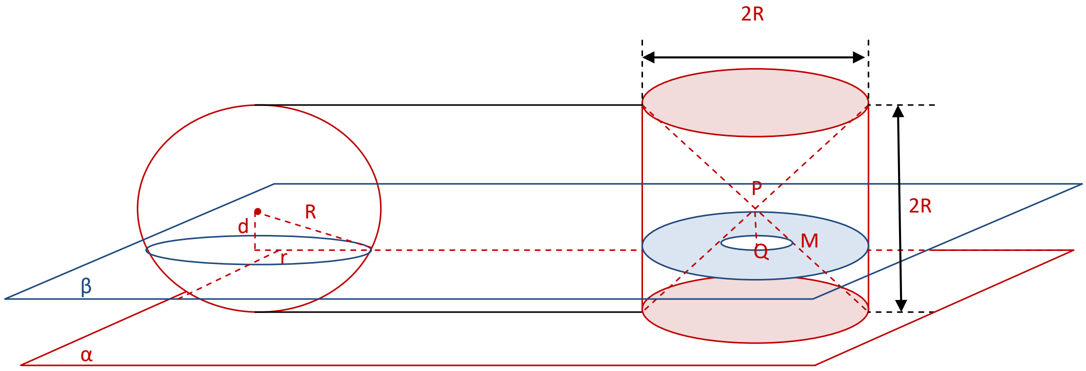
Volume da esfera

Considere um cilindro equilátero de diâmetro da base 2R (logo altura 2R) e P o ponto médio do eixo do cilindro. Tomemos dois cones tendo como base as do cilindro e P como vértice comum. Chamemos de S o sólido que é obtido tirando do cilindro equilátero os dois cones descritos acima.

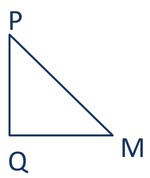
O volume do sólido S corresponde a:

$$volume\ de\ S = \underbrace{\pi R^2 .2R}_{cilindro} - \underbrace{2.\frac{1}{3}\pi R^2 .R}_{2\,cones} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Consideremos agora, apoiados em um plano α, esse sólido S e uma esfera E de raio R, como mostra a figura abaixo:



Observe que:



ΔPQM é isósceles, pois o cilindro é equilátero. Logo temos: $(\overline{PQ}) = d \Rightarrow (\overline{QM}) = d$

Seja β um plano paralelo a α, tal que a intersecção do plano β com a esfera S seja um círculo de raio r (secção). Se d é a distância do centro da esfera ao plano β, temos:

$$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$$

Assim, a área da secção é dada por:

$$\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2).$$

Além disso, β também secciona o sólido S e essa secção será uma coroa circular de raios R e d (já que, ΔPQM é isósceles). Portanto, a área desta coroa circular é dada por:

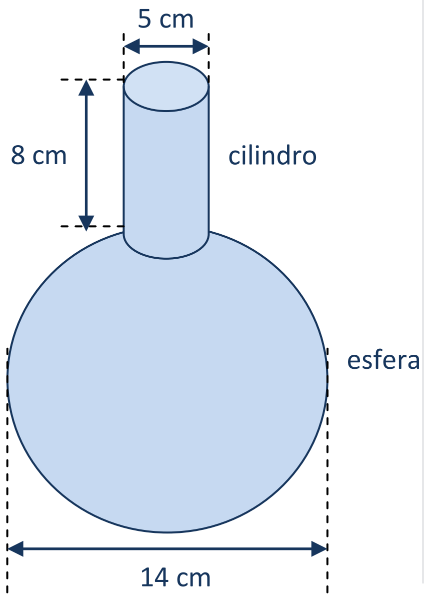
área da coroa$= \pi R^2 - \pi d_2 = \pi(R^2 - d^2) =$área da secção esférica.

Como as áreas das secções são iguais, concluímos pelo princípio de Cavalieri, que a esfera E tem o mesmo volume que o sólido S. Logo, o volume da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Qual a capacidade em ml, do recipiente abaixo?



Solução

O volume do cilindro com r = 2,5 cm e h = 8 cm é dado por:

$V_C = \pi r^2 h = \pi(2,5)^2.8 = 50\pi cm^3$

O volume da esfera de raio R = 7 cm é:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 7^3 = \frac{1372}{3}\pi\ cm^3$$

Portanto, o volume da vasilha é dado por:

$$V = V_C + V_E = 50\pi + \frac{1372}{3}\pi = \frac{1522}{3}\pi\ cm^3$$

Considerando π = 3,14, temos V≅1593 cm^3. Como 1 cm^3=1ml, então V≅1593 ml.

2. Pensando na Terra como uma esfera de raio 6.370 km. Encontre a área da superfície da esfera e a coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície total.

Solução:
A área da superfície de uma esfera é dada por $A=4\pi r^2$, logo,

$$A=4\pi(6370)^2=4.3,14.40576900=509645864\ km^2.$$

A superfície coberta por água é $A_{água} = \frac{3}{4}A$, logo:

$$A_{água} = \frac{3}{4}A = \frac{3}{4}.509645864 = 382234398\, km^2.$$

3. Dada uma esfera onde seu volume coincide com a área da sua superfície, encontre a medida do raio.

Solução:

Sendo $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$ e $A=4\pi.r^2$, temos que:

$$\frac{4}{3}\pi.r^3 = 4\pi.r^2 \Rightarrow 4\pi r^3 = 3.4\pi.r^2 \Rightarrow \frac{r^3}{r^2} = \frac{3.4\pi}{4\pi} \Rightarrow r = 3.$$

4. Dada uma esfera de $25\pi cm^2$ de superfície, quanto devemos aumentar o raio, para que a área passe a ser de $64\pi cm^2$.

Solução:
Como a área da superfície de uma esfera de raio r é dada por $A=4\pi.r^2$, temos que:

$$4\pi.r^2 = 25\pi \Rightarrow r^2 = \frac{25\pi}{4\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow r = \frac{5}{4}cm.$$

Seja x o valor que deverá ser aumentando ao raio r da esfera anterior, para obtermos uma esfera de raio r+x, onde sua área passa a ser $64\pi cm^2$. Assim:

$$4\pi.(r+x)^2 = 64\pi \Rightarrow (r+x)^2 = \frac{64\pi}{4\pi} \Rightarrow (r+x)^2 = 16 \Rightarrow r+x = \sqrt{16}$$

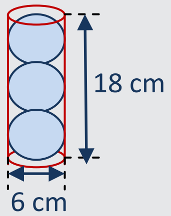
$$\Rightarrow r+x = 4 \Rightarrow x = 4-r \Rightarrow x = 4-\frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{16-5}{4} = \frac{11}{4}.$$

Logo, o raio deve ser aumentado de $\frac{11}{4}cm$, para que a área passe a ser $64\pi cm^2$.

5. Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades. Supondo-se que as bolas têm raio 3 cm e tangenciam as paredes internas da embalagem, qual o volume do espaço interno dessa embalagem que não é ocupado pelas bolas?

Solução:

Como as bolas (esferas) são tangentes ao cilindro, concluímos que o raio da base do cilindro também é 3 cm. Sua altura é dada por seis vezes o raio das bolas, isto é, h=6.3=18 cm. Veja figura abaixo:



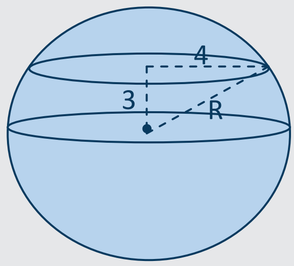
Logo, o volume do espaço interno dessa embalagem que não é ocupado pelas bolas é dado pelo volume do cilindro menos três vezes o volume da bola, isto é:

$$V = V_C - 3V_E \Rightarrow V = A_b.h - 3.\frac{4}{3}\pi.r^3$$

$$\Rightarrow V = \pi.3^2.18 - 3\frac{4}{3}\pi.3^3 = 162\pi - 108\pi = 54\pi\, cm^3.$$

6. Calcule a área da superfície e o volume da esfera de raio R, onde essa foi seccionada a 3 cm do centro e o raio da secção é 4 cm.

Solução:



Considerando o triângulo retângulo ao lado, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$R^2=3^2+4^2 \Rightarrow R^2=25 \Rightarrow R=\sqrt{25}=5 \text{ cm}.$$

Logo a área e o volume da esfera são dados por:

$$A=4\pi.R^2=4\pi.5^2=100\pi cm^2$$

e

$$V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.5^3 = \frac{500}{3}\pi\, cm^3.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja 400π m^2, a área da superfície de uma esfera. Calcule o volume desta esfera e o volume de um cilindro de 8 m de altura que tem o mesmo raio da esfera.

2. Seja 256π $m^{2,}$ o volume de uma esfera. Calcule a área de sua superfície e a área e volume de um cilindro equilátero que possui o mesmo raio da esfera.

3. A intersecção de um plano com uma esfera é um círculo (secção) de 16π dm^2 de área. Sabendo-se que o plano dista 3 dm do centro da esfera, calcule o volume da esfera.

4. Dada uma esfera de 2 cm de raio . Calcule:

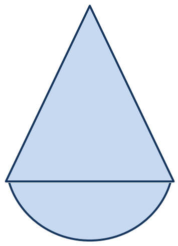
a) o seu volume;
b) a área da sua superfície;
c) o raio da secção da esfera por um plano situado a 1 cm do centro.

5. A seção de uma esfera por um plano que passa pelo centro tem área igual a 12π cm^2. Determine:

a) o raio da esfera;
b) o volume da esfera;
c) a área da superfície esférica.

6. Dada uma laranja (esfera) de 8 cm de diâmetro, encontre o volume de cada gomo desta laranja, sabendo que ela foi dividida em 12 gomos iguais.

7. Uma boia serve para orientar os navios na entrada de um porto. Essa boia é formada por um hemisfério de 2 cm de diâmetro e por um cone que tem 80 cm de altura. Qual o volume dela?

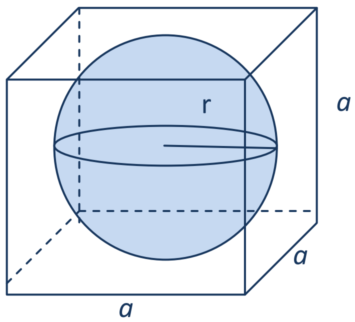


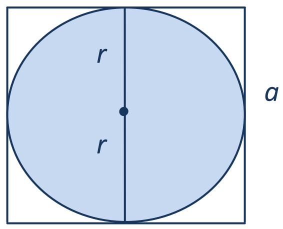
Inscrição e circunscrição de sólidos

Esfera e cubo

Esfera Inscrita em Cubo

Considere uma esfera de raio r inscrita em um cubo cujas arestas medem a. Existe uma relação entre as medidas das arestas do cubo e do raio da esfera. Como a superfície esférica intersecta o cubo em seis pontos, localizados nos centros das faces, temos três pares de pontos diametralmente opostos.



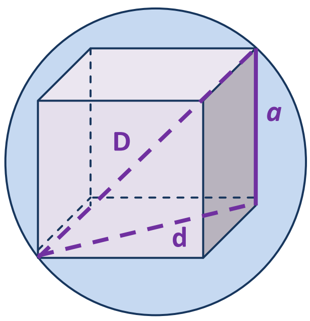


A segunda figura nos mostra a interseção de um plano, paralelo a duas faces do cone passando pelo centro da esfera (que é o mesmo do cone), com o cone. Assim, vemos claramente que a medida de cada aresta do cubo é igual ao dobro da medida do raio da esfera. Isto é,

$$a = 2r \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

Esfera Circunscrita em Cubo

Considere uma esfera de raio r circunscrita em um cubo cujas arestas medem a. Observe que os vértices do cubo pertencem a superfície esférica.



Assim, a medida da diagonal do cubo (D) é igual ao dobro da medida do raio da esfera. Como $d^2=2a^2$, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$D^2= d^2+a^2 \Rightarrow D^2= 2a^2+a^2 \Rightarrow D=a\sqrt{3}$, mas, sendo D=2r, temos que $2r=a\sqrt{3}$, logo: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo:
Uma esfera está inscrita em um cubo cujo volume é igual a 64 dm^3. Calcule o volume da esfera.

Solução:
Como o volume do cubo é dado por a^3, onde a é a aresta do cubo, temos que:

$$a^3=64 \Rightarrow a=\sqrt[3]{64} \Rightarrow a=4 \text{ dm}.$$

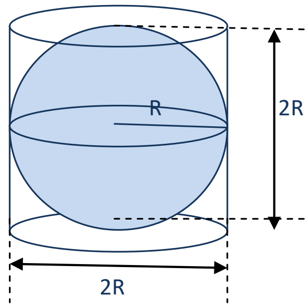
Sendo $r=\frac{a}{2}$ onde r é o raio da esfera, temos que $r = 2\ dm$, e portanto o volume da esfera será:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi 2^3=\frac{32}{3}\pi\, dm^3.$$

Esfera e cilindro

Esfera Inscrita em Cilindro

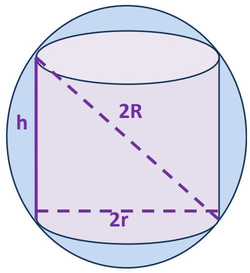
Considere uma esfera de raio R inscrita em um cilindro reto de altura h e raio da base r.



Como a esfera intersecta as bases do cilindro nos seus centros, e o círculo máximo da esfera é congruente as bases do cilindro, então r=R e h=2R, ou seja, o cilindro é equilátero.

Esfera Circunscrita em Cilindro

Considere um cilindro reto de altura h e raio da base r inscrito numa esfera de raio R. Observe a figura a seguir:



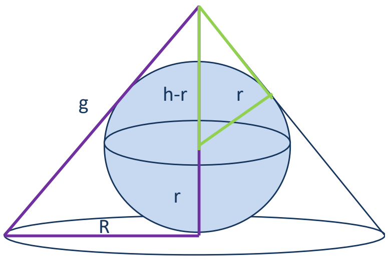
No triângulo retângulo (destacado na figura) de catetos medindo h e 2r e hipotenusa medindo 2R, podemos escrever:

$$(2R)^2=(2r)^2+h^2 \Rightarrow 4R^2=4r^2+h^2.$$

Esfera e cone reto

Esfera Inscrita em Cone Reto

Considere uma esfera de raio r inscrita em um cone de raio R e altura h. Seja g a medida da geratriz do cone.

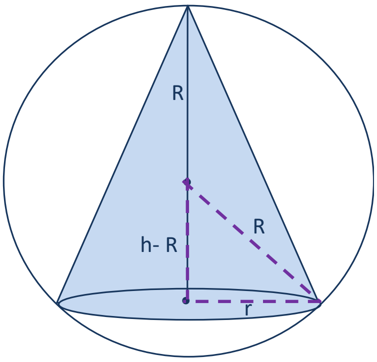


Observando a figura podemos, por meio de uma semelhança de triângulos, estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{r}{R}=\frac{h-r}{g}.$$

Esfera Circunscrita em Cone Reto

Considere uma esfera de raio R, circunscrevendo um cone de raio r e altura h.



No triângulo retângulo em destaque, podemos escrever $R^2=r^2+(h-R)^2$.

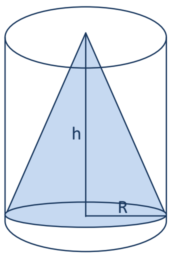
Se o cone é equilátero, temos que $h=\frac{3}{2}R$ Logo, pela relação anterior:

$$R^2=r^2+\left(\frac{3}{2}R-R\right)^2 \Rightarrow R^2=r^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2-\frac{R^2}{4}=r^2 \Rightarrow r=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Cilindro e cone retos

Cone Inscrito em Cilindro

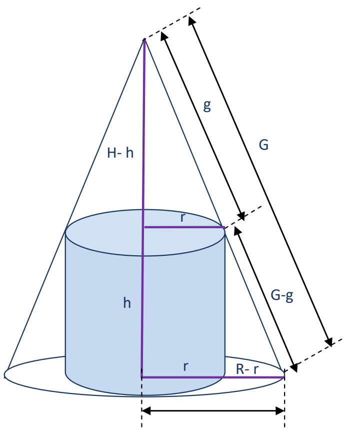
Considere um cilindro de altura h e raio da base R. Inscrevendo-se nele um cone reto, temos a seguinte figura:



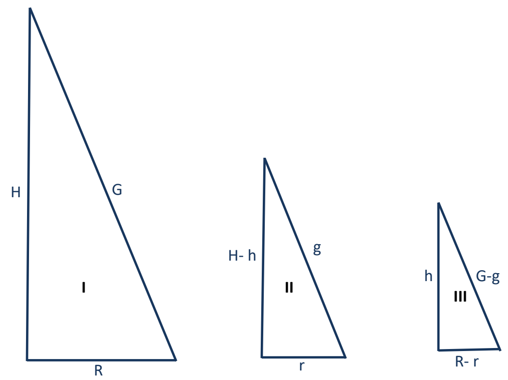
Note que o vértice do cone coincido com o centro de uma das bases do cilindro, e a base do cone coincide com a outra base do cilindro. Assim, os raios das bases do cone e do cilindro são iguais, da mesma forma que as medidas das alturas.

Cone Circunscrito em Cilindro Reto

Considere um cilindro reto, com raio da base r e altura h, inscrito em um cone reto de raio da base R e altura H.



Considerando os triângulos semelhantes abaixo, temos as seguintes proporções:



De I e II, temos:

$$\frac{r}{R}=\frac{g}{G}=\frac{H-h}{H}.$$

De II e III, temos:

$$\frac{r}{R-r}=\frac{g}{G-g}=\frac{H-h}{h}.$$

De I e III, temos:

$$\frac{R-r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{G-g}{G}.$$

INDICAÇÃO DE LEITURA

Aprofunde seus conhecimentos adquiridos até o momento recorrendo e estudando a seguinte leitura complementar:

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria euclidiana espacial. Vol. 7. 5 ed. São Paulo: Editara Atual, 2005.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Uma esfera, cuja área da superfície mede $192\pi cm^2$, circunscreve um cubo. Calcule o volume desse cubo.

Solução:

Seja R, a medida do raio da esfera. Temos então que:

$$4\pi R^2=192\pi \Rightarrow R^2=\frac{192\pi}{4\pi}=48 \Rightarrow R=4\sqrt{3}$$

Sendo a a medida das arestas do cubo, e como a medida da diagonal do cubo (D) é igual ao dobro da medida do raio da esfera, temos:

$$a\sqrt{3}=2R \Rightarrow a\sqrt{3}=2.4\sqrt{3} \Rightarrow a=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=8\,cm$$

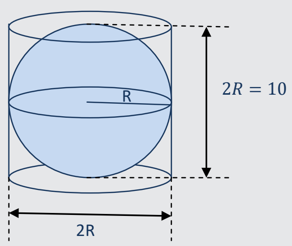
Portanto, o volume do cubo é dado por:

$$V=a^3=8^3=512\ cm^3$$

2. Uma esfera está inscrita em um cilindro cuja altura mede 10 cm. Calcule o volume compreendido entre o cilindro e a esfera.

Solução:

Se a altura do cilindro mede 10 cm, então o raio da base desse cilindro e o raio da esfera medem 5 cm. Assim, o volume compreendido entre ambos é igual a:

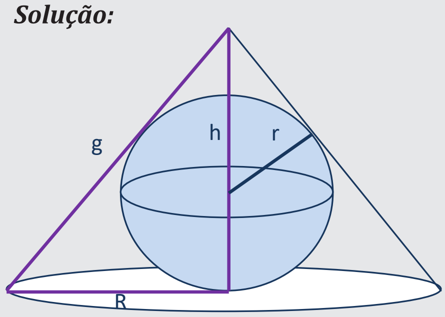


$$V=V_{cilindro}-V_{esfera}=\pi R^2.h-\frac{4}{3}\pi R^3=\pi.5^2.10-\frac{4}{3}\pi 5^3 \Rightarrow$$

$$V=250\pi-\frac{500}{3}\pi=\frac{750\pi-500\pi}{3}=\frac{250\pi}{3}cm^3.$$

3. Em um cone equilátero, cujo volume é igual a $72\pi\sqrt{3}$ cm^3, inscreve-se uma esfera. Calcule a área da superfície dessa esfera.

Solução:



Em um cone equilátero, a medida da geratriz é igual ao dobro da medida do raio, então, g=2R. Seja h a altura do cone, assim:

$$g^2=R^2+h^2 \Rightarrow (2R)^2=R^2+h^2$$
$$\Rightarrow h^2=3R^2 \Rightarrow h=R\sqrt{3}.$$

Como o volume do cone é dado por $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h$, temos que:

$$\frac{1}{3}\pi R^2.h=72\pi\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2.R\sqrt{3}=72\pi\sqrt{3} \Rightarrow \pi\sqrt{3}R^3=216\pi\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R^3=\frac{216\pi\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}} \Rightarrow R^3=216 \Rightarrow R=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3 3^3}=6\,cm.$$

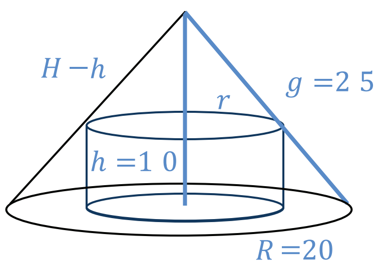
Assim, sendo $h=R\sqrt{3}$, temos $h=6\sqrt{3}$. Mas, como $\frac{r}{R}=\frac{h-r}{g}$ e g=2R, temos

$$\frac{r}{R}=\frac{h-r}{2R} \Rightarrow 2r=h-r \Rightarrow r=\frac{h}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}.$$

Portanto a área da superfície esférica é igual a $A=4\pi r^2=4\pi(2\sqrt{3})^2=4\pi.4.3=48\pi$ cm^2.

4. Se um cilindro cuja altura mede 10 cm está inscrito em cone reto cuja geratriz mede 25 cm e com raio da base medindo 20 cm, calcule o volume desse cilindro.

Solução:



Seja H a altura do cone, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$g^2=R^2+H^2 \Rightarrow 25^2=20^2+H^2$$
$$\Rightarrow H^2=625-400=225 \Rightarrow H=15 \text{ cm}.$$

Por meio de uma semelhança, temos:

$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H} \Rightarrow \frac{r}{20}=\frac{15-10}{15} \Rightarrow \frac{r}{20}=\frac{5}{15}$$
$$\Rightarrow \frac{r}{20}=\frac{1}{3} \Rightarrow r=\frac{20}{3}cm.$$

Portanto, o volume do cilindro é dado por:

$$V=A_b.h \Rightarrow V=\pi.r^2.h \Rightarrow V=\pi.\left(\frac{20}{3}\right)^2.10=\frac{4000\pi}{9}cm^3.$$

SAIBA MAIS

Para você obter mais conhecimentos e ver trabalhos e experiências (coleções, fotos, artigos) relacionados aos conteúdos abordados neste material, acesse o site do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), da Universidade Federal Fluminense (UFF).

<www.uff.br/leg>

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Uma esfera está inscrita em um cubo, cujo volume é igual a 64 dm^3. Calcule o volume dela.

2. Em uma esfera, está inscrito um cilindro reto cuja altura mede 20 cm e cujo raio da base mede 8 cm. Calcule a área da superfície dessa esfera.

3. Uma esfera está inscrita em um cone reto cuja altura mede 8 cm e cujo raio da base mede 6 cm. Calcule o volume dessa esfera.

4. Um cone equilátero está inscrito em uma esfera cujo volume mede 288π m^3. Calcule a área lateral desse cone.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; BARRETO, Claudio Xavier. **Matemática aula por aula.** Vol. Único Ensino médio. São Paulo: FTD, 2000.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Curso de Matemática** Volume Único. 2 ed. São Paulo: Moderna, 1998.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 1995.

ANOTAÇÕES

EDITORA

EDUFERSA - Editora da Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Campus Leste da UFERSA
Av. Francisco Mota, 572 - Bairro Costa e Silva
Mossoró-RN | CEP: 59.625-900
edufersa@ufersa.edu.br

IMPRESSÃO

Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME
Rua Capitão Lima, 170 - Santo Amaro
Recife-PE | CEP: 50040-080
Telefone: (91) 3061 6411

COMPOSIÇÃO

Formato: 21cm x 29,7cm
Capa: Couchê, plastificada, alceado e grampeado
Papel: Couchê liso
Número de páginas: 104
Tiragem: 400

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-63145-40-6

9 788563 145406

UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ÁRIDO

NEAD
núcleo de educação a distância

PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

CAPES

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA