Jackson Jonas Silva Costa

CÁLCULO I

EDUFERSA

Jackson Jonas Silva Costa

CÁLCULO I

EdUFERSA

Governo Federal
Ministro de Educação
Aloizio Mercadante Oliva

Universidade Aberta do Brasil
Responsável pela Diretoria da Educação à Distância
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Reitor
José de Arimatea de Matos

Pró-Reitor de Graduação
Augusto Carlos Pavão

Núcleo de Educação à Distância
Coordenadora UAB
Kátia Cilene da Silva

Equipe multidisciplinar
Antônio Charleskson Lopes Pinheiro - Coordenador de Produção de Material Didático
Ulisses de Melo Furtado – Designer Instrucional
Nayra Maria da Costa Lima – Assessora Pedagógica
Celeneh Rocha de Castro - Coordenadora de Formação Continuada
Thiago Henrique Freire de Oliveira – Gerente de Rede
Edinaldo de Queiroz Fonseca Junior – Webdesigner
Adriana Mara Guimarães de Farias – Programadora
Felipe de Araújo Alves – Designer Gráfico
Renato Cássio Arruda Alves – Designer Gráfico
Paulo Victor Maciel de Morais - Diagramador
Marcos Aurélio Oliveira Ribeiro - Diagramador
Ramon Ribeiro Vitorino Rodrigues - Diagramador

Arte da capa
Felipe de Araújo Alves

Equipe administrativa
Rafaela Cristina Alves de Freitas – Assistente em Administração
Iriane Teresa de Araújo – Responsável pelo fomento
Lucas Vinicius Martins Cunha – Estagiário

Equipe de apoio
Marcos Antônio de Oliveira – Revisor Linguístico
Nayra Maria da Costa Lima – Revisor de Didática
Flaviana Moreira de Souza Amorim - Revisor Matemático
Josenildo Ferreira Galdino – Revisor Matemático

Serviços técnicos especializados
Urbanóide Comunicação & Design

Edição
EdUFERSA

Impressão
Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME

Biblioteca Central Orlando Teixeira – BCOT/UFERSA
Setor de Processos Técnicos – Ficha Catalográfica

C837c Costa, Jackson Jonas Silva.

Cálculo I / Jackson Jonas Silva Costa. – Mossoró : EdUFERSA, 2013.
88 p. : il.

ISBN: 978-85-63145-36-9

1. Matemática. 2. Cálculo. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 515.3

Bibliotecário-Documentalista
Mário Gaudêncio – CRB-15/476

http://nead.ufersa.edu.br/

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

Caro aluno (a),

Nesta disciplina estudaremos, basicamente, três conceitos que são fundamentais, denominados de Limites, Derivadas e Integrais. Esses conceitos surgiram com a tentativa de formalizar a ideia de aproximação, com o propósito de criar ferramentas matemáticas para resolver problemas da Física e da própria Matemática. O desenvolvimento do cálculo é atribuído aos pesquisadores Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), que, segundo a história da matemática, chegaram aos mesmos resultados trabalhando de forma independente. Hoje o cálculo é usado como uma ferramenta matemática para conceitos de várias áreas do conhecimento, tais como Economia, Química, Física e na própria Matemática.

Mediante isso, vem a convicção de que o estudo de cálculo é indispensável à formação de um bom professor de matemática, pois esta matéria vai contribuir para a construção do pensamento lógico e organizado. Ao estudar esta disciplina, você fará exercícios de abstração que aumentarão sua capacidade de realizar leituras de outros livros e artigos relacionados à matemática e além disso, sua capacidade de assimilar novos conceitos será amplamente desenvolvida.

Os pré-requisitos básicos para se estudar cálculo são os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental e ensino médio. Portanto, não fique preocupado, muito embora talvez seja necessário, em algum momento, relembrar conteúdos ou, até mesmo, aqueles aos quais não tenha visto ao longo do ensino médio.

O curso de Cálculo I é relativamente simples, porém exige muita dedicação. Você acredita que uma pessoa possa aprender a tocar violão apenas lendo uma apostila sem jamais pegar no instrumento para fazer os exercícios nela propostos? Acredito que não. Da mesma forma, estudar cálculo exige que você invista tempo para entender a teoria e praticar, resolvendo o maior número possível de exercícios.

Seja bem-vindo ao curso de Cálculo!

SOBRE O AUTOR

Meu nome é Jackson Costa. Sou licenciado em Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), mestre em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) e, a partir de agosto de 2010, passei a fazer parte do quadro efetivo de professores da Universidade Federal do Rural do Semi-árido (UFERSA). De lá para cá tenho lecionado as disciplinas Cálculo I, Cálculo II e Geometria Analítica no ensino presencial.

Em 2011, passei a fazer parte do corpo docente do Núcleo de Educação à Distância, da mesma instituição, onde desempenhei as funções de tutor à distância no curso de Licenciatura em Matemática, da UFERSA e, mais precisamente, no pólo de Caraúbas, Rio Grande do Norte. Enquanto tutor, passei a ter um contato mais próximo com os estudantes de Matemática da modalidade ensino à distância, e comecei a perceber inúmeras dificuldades enfrentadas pelos alunos. Com isso, brotou em mim o desejo de passar de tutor a professor conteudista e escrever um material que apresentasse a disciplina de Cálculo I de forma objetiva, atrativa e dinâmica ao aluno e, ao mesmo tempo, de fácil compreensão, facilitando o processo de ensino-aprendizagem.

No segundo semestre de 2011, surgiu a oportunidade de lecionar a disciplina Cálculo I e junto veio a possibilidade de escrever o material desse componente curricular. De prontidão aceitei o convite, e um dos resultados é o material que você está lendo agora. Espero que seja útil à sua formação e, desde já, lhe desejo muito sucesso na matemática e na vida profissional.

Jackson Jonas S. Costa.

SUMÁRIO

UNIDADE III

I

LIMITES DE FUNÇÕES

Nesta unidade, o desenvolvimento do cálculo está intrínseco ao conceito de limites de funções reais. A partir deste conceito, é possível estabelecer formalmente os conceitos de continuidade, derivada e integral de uma função. Por esta razão, o primeiro capítulo deste livro será dedicado ao estudo de limites de funções.

O aluno aplicado, que se dedica, certamente não terá problemas em assimilar o conceito de limites, visto que o mesmo está relacionado à ideia de aproximação, a qual surge em várias situações do cotidiano. Veja os exemplos a seguir:

i) Suponha que você deseja comprar um celular cujo preço de tabela é R$ 299,99. Então naturalmente você se prepara para pagar um valor de R$ 300,00;

ii) Imagine que uma pessoa, cujo nome é João, se pese em uma balança eletrônica e esta venha marcar 65,01 kg. Você acha que seria algum absurdo João dizer que pesa 65 kg?

Bem, como você pode ver nas situações (i) e (ii), a ideia de aproximação é bem presente em nosso convívio.

Objetivos:

- Formalizar a ideia de aproximação por meio do estudo de funções definidas no conjunto dos números reais;
- Facilitar o cálculo de limites por meio de propriedade e teoremas;
- Investigar a continuidade de funções em pontos do domínio.

Introdução

Considere a seguinte situação: uma bolinha de borracha é solta de uma altura de 1m (um metro). Quando a bolinha entra em contato com o chão ela é impulsionada para cima e atinge a altura máxima de $\frac{1}{2}$ m e começa a cair novamente. Quando a bolinha bate no chão pela segunda vez ela sobe até a altura máxima de $\frac{1}{4}$ m, voltando a cair. Suponha que sempre que a bolinha, depois de entrar em contato com o chão, volte a atingir a metade da altura máxima equivalente a anterior. A tabela a seguir relaciona o número de "pulos" da bolinha com a altura máxima que ela atinge.

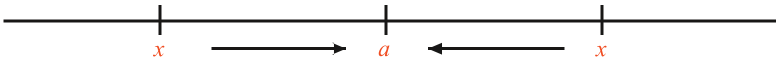
Tabela 1: Altura de uma bolinha em relação ao número de pulos

NÚMERO DE PULOS	ALTURA MÁXIMA (EM METROS)
0	1
1	$\frac{1}{2}=0{,}5$
2	$\frac{1}{4}=0{,}25$
3	$\frac{1}{8}=0{,}125$
4	$\frac{1}{16}=0{,}0625$
5	$\frac{1}{32}=0{,}03125$
6	$\frac{1}{64}=0{,}015625$
7	$\frac{1}{128}=0{,}007$
8	$\frac{1}{256}=0{,}003906$
9	$\frac{1}{512}=0{,}001953$
10	$\frac{1}{1024}=0{,}000976$
$\vdots$	$\vdots$

Observe que à medida que a bolinha vai pulando, sua altura máxima vai se aproximando cada vez mais de 0 (zero). Porém, a altura da bolinha nunca chega a ser zero. Apesar de a bolinha não atingir o estado de repouso (isto é, a bolinha não parar de pular), chega um instante em que a altura máxima está tão próxima de zero que a nossa visão não consegue mais perceber que ela ainda está pulando. No entanto, o que significa próximo para uma pessoa não necessariamente significa o mesmo para outra.

Portanto, tendo em vista que o conceito de aproximação é de fundamental importância para o estudo de limite de funções, estabeleceremos o seguinte: suponha que a é um número real, dizemos que x tende a a, se podemos supor x tão próximo de a quanto desejarmos, porém com $x \neq a$. Usamos a notação "$x \to a$" para indicarmos que "x tende a a".

Figura 1: Valores x se aproximando do número a



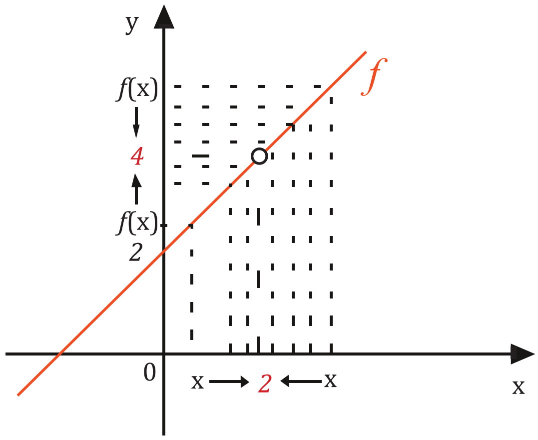
Por exemplo, se dissermos que x tende a 1 ($x \to 1$) então podemos supor x tão próximo de 1 quanto desejarmos, isto é, podemos supor x = 0,9; x = 0,99999; x = 0,999999999; x =0,9999999999999999999. Também podemos supor x = 1,1; x = 1,01; x = 1, 001; x = 1, 00001; x = 1, 000000001.

Agora, considere a função f, definida pela equação f(x)=$\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Observe que f não está definida em x = 2, porém para $x \neq 2$ tem-se que:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

Assim, o comportamento de f(x)=$\dfrac{x^2-4}{x-2}$ é equivalente ao comportamento de x+2 para todo $x\neq 2$. Veja o comportamento de f(x) no gráfico a seguir:

Figura 2: Gráfico da função f(x)=$\dfrac{x^2-4}{x-2}$



Note que à medida que os valores de x vão se aproximando de 2, os valores de f(x) vão se aproximando do número 4. Na linguagem de limites, expressamos esse comportamento da função f dizendo que "o limite de f(x) quando x tende a 2 é igual a 4", e usamos a notação:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

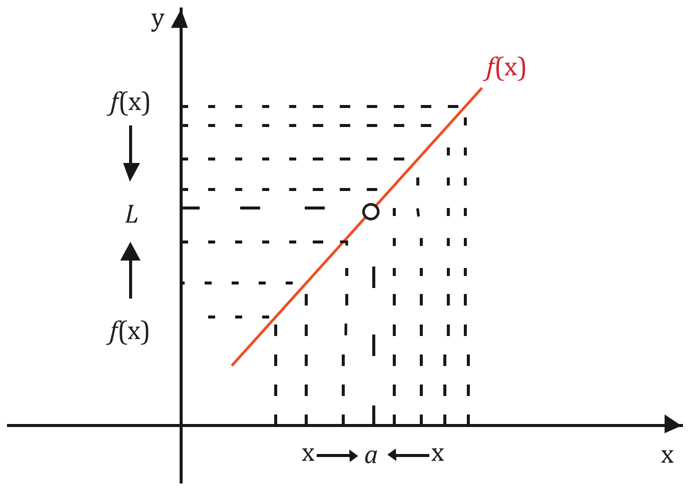
DICA
A seguir, daremos uma definição intuitiva do conceito de limite de uma função. Embora intuitiva, essa definição é muito útil no cálculo de limites. Mas quando se deseja demonstrar resultados abstratos faz-se necessário uma definição mais rigorosa, tal definição será reservada para o final desta unidade.

Definição (definição informal de limites)

Seja f uma função. Dizemos que L é o limite de f(x) quando $x \to a$, se f(x) se aproxima de L quando x se aproxima de a com valores diferentes de a.

Na figura a seguir você pode ver uma interpretação geométrica dessa definição. Observe que à medida que os valores de x ficam próximos de a os valores de f(x) ficam próximos de L.

Figura 3: Interpretação geométrica da definição 1.1.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Considere a função f: R → R, definida pela equação f(x) = 2x. O número 20 é o limite de f(x) quando x tende a 10. De fato, note que:

Tabela 2: Valores de f(x) quando x se aproxima de 10 com valores menores que 10.

x se aproximando de 10 com valores menores que 10	$f(x) = 2x$
9,9	19,8
9,99	19,98
9,999	19,998
9,9999	19,9998
⋮	⋮

Tabela 3: Valores de f(x) quando x se aproxima de 10 com valores maiores que 10.

x se aproximando de 10 com valores maiores que 10	$f(x) = 2x$
9,9	19,8
9,99	19,98
9,999	19,998
9,9999	19,9998
⋮	⋮

Analisando a tabela (2 e 3), você poderá deduzir que quanto mais x fica próximo de 10, mais próximo f(x) fica de 20. Outra forma de deduzir este resultado é através do esboço do gráfico de f.

Notações

Em muitos casos ao invés de escrevermos a frase "o limite de f(x) quando x tende ao número a é L", é comum usarmos uma das notações a seguir:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (lê-se, o limite de $f(x)$; quando x tende ao número a; é L);

$f(x) \to L$, quando $x \to a$ (Lê-se, $f(x)$ tende a L; quando x tende ao número a).

Observação 1.1: Ao investigarmos o limite de uma função "f" quando x tende a um número "a", não estamos interessados em saber qual é o valor de f(a), o que realmente interessa é de que valor f(x) se aproxima quando $x \to a$. Além disso, a função "f" não precisa estar definida em "a" para que exista o limite de f(x) quando $x \to a$. Veja o exemplo a seguir:

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Usando a ideia intuitiva de limites, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 9x}{x}$$

Solução: Note que para $x \neq 0$, tem-se:

$$\frac{x^2 + 9x}{x} = \frac{x(x+9)}{x} = x + 9$$

Assim, quando x se aproxima de 0, porém com valores diferentes de 0, $\frac{x^2+9x}{x} = x + 9$ se aproxima de 9. Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 9x}{x} = 9$$

2. Considere a função f, definida pela equação $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$. Investigue o limite de f(x) quando $x \to 3$.

Solução: Inicialmente, note que f não está definida em x = 3. No entanto, tem-se que:

$\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{x^2-3^2} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$ para todo $x \neq 3$, de onde segue que,

$$f(x) = \frac{1}{x+3}, \text{ para todo } x \neq 3.$$

Por outro lado, com cálculos simples, você poderá verificar que quanto mais x se aproxima de 3 (com $x \neq 3$), tanto mais x+3 se aproxima de 6, e por conseguinte $\frac{1}{x+3}$ se aproxima de $\frac{1}{6}$. Portanto, concluímos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{6}$.

3. Usando a ideia intuitiva de limites, calcule:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

Solução: Observe que, se $x \neq 5$, então

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

Por outro lado, você pode observar que, quando x se aproxima de 5, porém com valores diferentes de 5, $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$ se aproxima de $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}$. Portanto,

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

4. Considere a função f, definida por, f(x)=x^2. Defina a função f':R →R, pela equação

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Em seguida, calcule f'(0),f' (–2) e f'(2).

Solução: Note que,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

para todo h ≠ 0. Com isto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Logo, f'(x) = 2x. Daí,

$$f'(0)=2\cdot 0=0$$

$$f'(-2)=2\cdot(-2)=-4$$

$$f'(2)=2\cdot 2=4$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Considere a função f: R → R, definida pela equação f(x) = 3x. Investigue o limite de f(x) quando x tende a 10.

2. Usando a ideia intuitiva de limites, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x}{x}$$

3. Considere a função f, definida pela equação f(x)= $\frac{x-1}{x^2-1}$. Investigue o limite de f(x) quando x → 1.

4. Considere a função f, definida pela equação f(x)= $\frac{x^3-8}{x-2}$. Investigue o limite de f(x) quando x → 2.

5. Usando a ideia intuitiva de limites, calcule:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}.$$

6. Usando a ideia intuitiva de limites, calcule:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}.$$

Propriedades dos limites

Até aqui fizemos um forte apelo a nossa intuição para calcularmos os limites das funções. Nesta seção, você estudará algumas propriedades que facilitarão bastante o cálculo de limites.

A primeira propriedade que estudaremos diz que o limite de uma função constante é sempre a própria constante, não importa para qual número real x esteja tendendo.

Vejamos:

1ª Propriedade: O limite da constante é a própria constante;

$$\lim_{x\to a} c = c$$

Exemplo 1.1

$$\lim_{x\to 0} 3 = 3, \qquad \lim_{x\to 99} 3 = 3, \qquad \lim_{x\to \pi} 3 = 3$$

2ª Propriedade: Limite da função identidade;

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Exemplo 1.2

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 99} x = 99 \qquad \lim_{x\to \pi} x = \pi$$

3ª Propriedade: O limite da soma é a soma dos limites;

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo 1.3

$$\lim_{x\to 0}(x+3) = 0+3 = 3 \qquad \lim_{x\to 99}(x+3) = 99+3 = 102 \qquad \lim_{x\to \pi}(x+3) = \pi+3$$

4ª Propriedade: O limite da diferença é a diferença dos limites;

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo 1.4

$$\lim_{x\to 0}(x-3) = 0-3 = -3 \qquad \lim_{x\to 99}(x-3) = 99-3 = 96 \qquad \lim_{x\to \pi}(x-3) = \pi-3$$

5ª Propriedade: Regra da Homogeneidade;

$$\lim_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right] = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

Exemplo 1.5

$$\lim_{x\to 2} 3x = 3\cdot \lim_{x\to 2} x = 3\cdot 2 = 6.$$

6ª Propriedade: O limite do produto é o produto dos limites;

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule os limites a seguir:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} (x-3)(x+3)$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi} (x-3)(x+3)$

Solução: (a) Aplicando a regra do produto, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}(x-3)(x+3)=\lim_{x\to 0}(x-3)\cdot\lim_{x\to 0}(x+3)=-3\cdot 3=-9$$

(b) Assim como no item (a) aplicaremos a regra do produto para calcular o limite em questão.

Vejamos:

$$\lim_{x\to \pi}(x-3)(x+3)=\lim_{x\to \pi}(x-3)\cdot\lim_{x\to \pi}(x+3)=(\pi-3)\cdot(\pi+3)=\pi^2-3^2=\pi^2-9$$

7ª Propriedade: O limite do quociente é o quociente dos limites;

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, então:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule os limites a seguir:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x+3}$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x-3}{x+3}$

Solução: (a) Como o limite do denominador é diferente de zero, isto é, $\lim\limits_{x\to 0} (x+3) = 3 \neq 0$, podemos aplicar a regra do quociente. Neste caso obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-3)}{(x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+3)}=\frac{-3}{3}=-1$$

(b) Assim como no item (a) aplicaremos a regra do quociente para calcular o limite em questão.

Observe:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{(x-3)}{(x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to \pi}(x-3)}{\lim\limits_{x\to \pi}(x+3)}=\frac{\pi-3}{\pi+3}$$

Só foi possível aplicar a regra do quociente no denominador $\lim\limits_{x\to\pi} x+3=\pi+3\neq 0$

8ª Propriedade: Regra da potência;

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} (x-3)^6$

Solução: Aplicando a regra da potência, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}(x-3)^6=\left[\lim_{x\to 0}(x-3)\right]^6=(-3)^6=729$$

9ª Propriedade: regra da raiz n-ésima;

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

DICA
Assim, podemos afirmar que o limite pode passar para dentro da raiz.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[6]{x+3}$

Solução: Aplicando a regra da raiz n-ésima (n = 6), obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[6]{x+3}=\sqrt[6]{\lim_{x\to 0}(x+3)}=\sqrt[6]{3}$$

10ª Propriedade: O limite do módulo é o módulo do limite;

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a}f(x)\right|$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}|x-3|$

Solução: Note que:

$$\lim_{x\to 0}|x-3|=\left|\lim_{x\to 0}(x-3)\right|=|-3|=3$$

11ª Propriedade: Se h é uma função tal que f(x) = h(x) para todo x≠ a, então:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a}f(x)\right|$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f a função definida pela equação f(x)=$\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Calcule $\lim_{x\to 3}$f(x).

Solução: Note que não podemos aplicar a regra do quociente, pois quando x → 3, x – 3 → 0. Por outro lado,

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

para todo x ≠ 3. Daí,

$$f(x)=x+3 \quad \forall x\neq 3$$

Assim, aplicando a 11ª Propriedade, obtemos:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

Utilizando as propriedades de limites podemos deduzir a proposição a seguir:

Proposição

Se p(x) é um polinômio e a ∈ R, então $\lim\limits_{x\to a}$ p(x)=p(a).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine:

$$\lim_{x\to 2}(x^5 - x^4 + x^2 + 1).$$

Solução: Segue da Proposição 1.1 que

$$\lim_{x\to 2}\left(x^5 - x^4 + x^2 + 1\right) = 2^5 - 2^4 + 2^2 + 1 = 21$$

Proposição

Sejam p(x) e q(x) polinômios e a ∈ R. Se q(a) ≠ 0, então:

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x + 1}$$

Solução: Segue da Proposição 1.1 que:

$\lim_{x\to 1}\left(x^2 - x + 6\right) = 1^2 - 1 + 6 = 6$ e $\lim_{x\to 1}\left(x^3 - x + 1\right) = 1^3 - 1 + 1 = 1$

Como o limite do denominador é diferente de zero, então pela Proposição 1.2 segue que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x + 1} = \frac{1^2 - 1 + 6}{1^3 - 1 + 1} = 6$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Usando a ideia intuitiva de limites, calcule:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3 + 7x}{x}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3}$

2. Seja f a função definida pela equação f(x) = 3x². Se f′ é a função definida $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ determine f′(x).

DICA
Para resolver essa questão, siga o método utilizado na solução do exercício 4.

3. Determine: $\lim_{x\to 2}(x^3 + x^2 - x + 10)$.

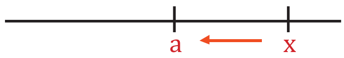
4. Usando as propriedades de limites, determine:

a) $\lim_{x\to -2}\sqrt{2 - 3x}$ b) $\lim_{x\to -4}\left|\frac{x^2 - 16}{x + 4}\right|$ c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x + 1}$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\text{cotg}^2 2x}{\text{cosec}^2 x - 1}$

Limites laterais

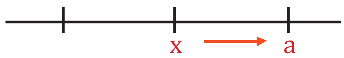
Se a é um número real, dizemos que x tende ao número a pela direita, e denotamos por $x \to a^+$, se $x > a$ e podemos supor x tão próximo de a quanto desejarmos (isto é, x vai se aproximando de a com valores maiores do que a).

Figura 4: x tendendo ao número a pela direita.



De modo análogo, dizemos que x tende ao número a pela esquerda, e denotamos por $x \to a^-$, se $x < a$ e podemos supor x tão próximo de a quanto desejar (isto é, x vai se aproximando de a com valores menores do que a).

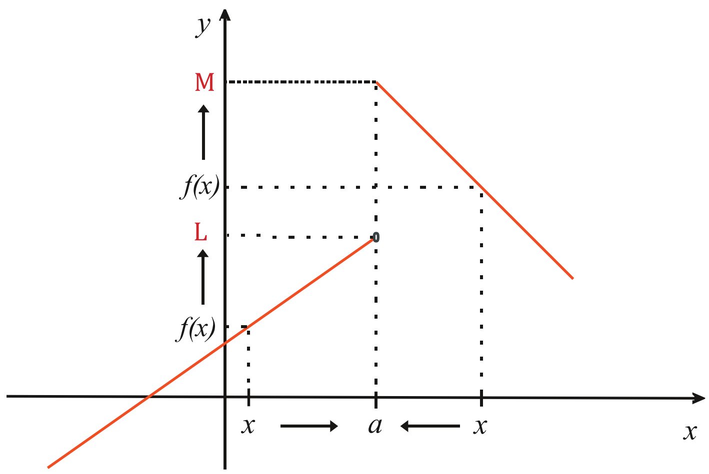
Figura 5: x tendendo ao número a pela esquerda.



Definição (limites laterais)

Seja $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in I$. Dizemos que um número L é o limite lateral à esquerda de f em a, e denotamos por $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, se f(x) tende a L quando $x \to a^-$. Analogamente, dizemos que um número M é o limite lateral à direita de f em a, e denotamos por $\lim_{x \to a^+} f(x) = M$, se f(x) tende a M quando $x \to a^+$.

Figura 6: Interpretação geométrica da definição 1.2.

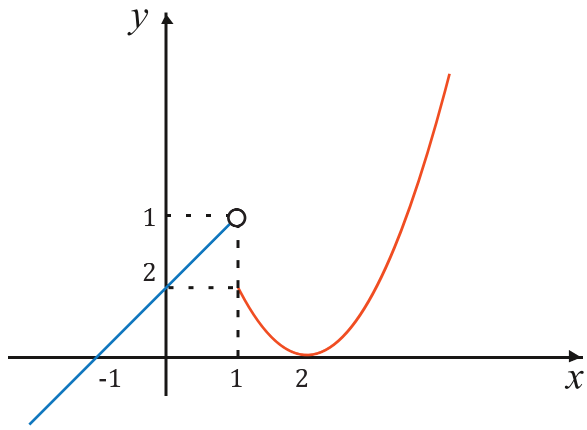


EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1, se\ x<1; \\ (x-2)^2, se\ x \geq 1. \end{cases}$

Determine $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Figura 7: Gráfico da função f(x)= $\begin{cases} x+1, se\ x<1; \\ (x-2)^2, se\ x\geq 1. \end{cases}$



Solução: Note que, se x < 1, então f (x) = x + 1, daí:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x+1) = 1+1 = 2$

Por outro lado, se x > 1, então f(x) = $(x - 2)^2$, de onde segue que:

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x-2)^2 = (1-2)^2 = 1.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$. Olhando para Figura 7, você pode perceber que quando x vai se aproximando de 1 pela esquerda, os valores f(x) vão se aproximando de 2. Assim como à medida que x vai se aproximando de 1 pela direita, os valores f(x) vão se aproximando de 1.

2. Seja f: R → R, a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, se\ x<1 \\ -1, se\ x=1 \\ x+1, se\ x>1 \end{cases}$$

Determine $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

Solução: Note que, se x < 1 temos f(x) = x^2. Além disso, quando x se aproxima de 1, com valores menores do que 1, x^2 também se aproxima de 1. Assim:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x^2 = 1.$$

Por outro lado, se x > 1 temos f(x) = x+1. Perceba que quando x se aproxima de 1, com valores maiores do que 1, x + 1 se aproxima de 2. Assim:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x+1) = 2.$$

Observe que o valor f em x = 1 não interessa no cálculo do limite de f(x) quando

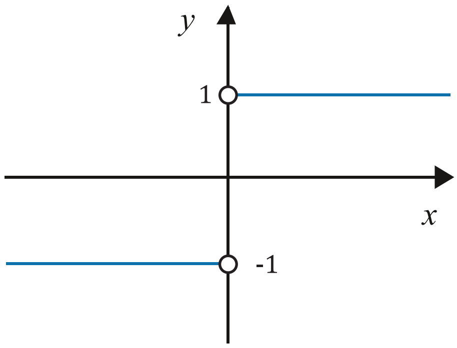
x → 1, pois vimos que $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$, mas f(1) = −1.

3. Considere a função f:R → R definida pela equação

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Determine $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

Figura 8: Gráfico da função $f(x)=\frac{|x|}{x}$



Solução: Pela definição de módulo, se x < 0 tem-se que |x| = –x, daí $\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$, para todo x < 0

Com isto,

$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)$ = -1

Portanto, $\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1$. Por outro lado, pela definição de módulo, se x > 0 então|x| = x, de onde segue que $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$, para todo x > 0.

Daí, $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$

No teorema a seguir, I é um intervalo contido em R, a ∈ I, f : I → R é uma função e L é um número real.

Teorema (existência de limite)

(a) Se $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=L$, então $\lim_{x\to a}f(x)$ existe e é igual a L;

(b) Se $\lim_{x\to a}f(x)=L$, então $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=L$;

(c) Se $\lim_{x\to a^+}f(x)\neq\lim_{x\to a^-}f(x)$, então $\lim_{x\to a}f(x)$ não existe.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2, se\ x\geq 1\\ 2x, se\ x<1.\end{cases}$$

Calcule $\lim_{x\to 1^+}f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-}f(x)$. Com base nos limites laterais e no Teorema 1.1, o que você pode afirmar a respeito de $\lim_{x\to 1}f(x)$?

Solução: Note que se x > 1, então f(x) = x^2, daí

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1.$$

Por outro lado, observe que se x < 1, então f(x) = 2x, com isto,

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2.$

Portanto, $\lim_{x\to 1^+}f(x)=1$ e $\lim_{x\to 1^-}f(x)=2$. f(x) = 2. Visto que os limites laterais de f em 1 são diferentes, segue, do Teorema 1.1, que lim f(x) não existe.

2. Investigue a existência de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

Solução: No exercício resolvido 3, calculamos os limites laterais da função dada por $f(x)=\frac{|x|}{x}$, e chegamos à conclusão que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1.$$

Assim, visto que os limites laterais de f em x = 0 são diferentes, então, pelo item (c) do Teorema 1.1, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ não existe.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f : R → R, a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3, se\ x<2; \\ (x-3)^2, se\ x\geq 2. \end{cases}$$

Determine $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

2. Considere a função f:R → R, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, se\ x<1; \\ 10, se\ x=1; \\ x-1, se\ x<1. \end{cases}$$

Determine $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,

3. Considere a função f: R → R definida pela equação:

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$$

Determine $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

4. Seja f a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, se\ x\geq 3; \\ 3x, se\ x>3. \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$. Com base nos limites laterais e no Teorema 1.1, o que você pode afirmar a respeito de $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

5. Seja f a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, se\ x<1; \\ \sqrt{x^2+3}, se\ x\geq 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Com base nos limites laterais e no Teorema 1.1, o que você pode afirmar a respeito de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

6. Investigue a existência de $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$.

Teorema do confronto

Este teorema dirá que, se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em uma vizinhança de um número real a e, além disso, o limite de g(x) é igual h(x) quando x tende a a, então o limite de f(x) quando x tende ao número a também será o mesmo valor que os limites de g(x) e h(x) quando x tende ao número a.

DICA
Esse teorema é muito útil para o cálculo de limites de funções, ele é chamado de Teorema do confronto, mas também é conhecido como Teorema do Sanduíche.

Teorema (teorema do confronto)

Sejam f, g e h funções definidas em uma vizinhança de um número real a. Se a desigualdade

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

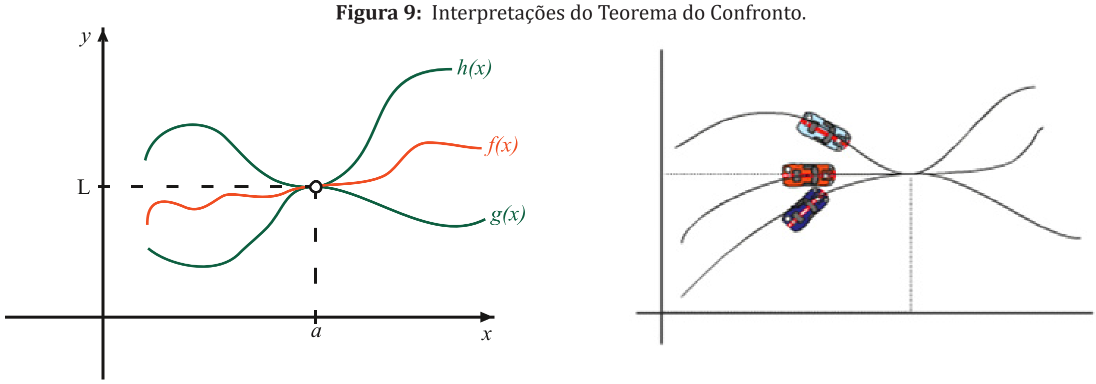
é válida para todo x em uma vizinhança de a, exceto possivelmente para x = a e, além disso,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

então,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Figura 9: Interpretações do Teorema do Confronto.



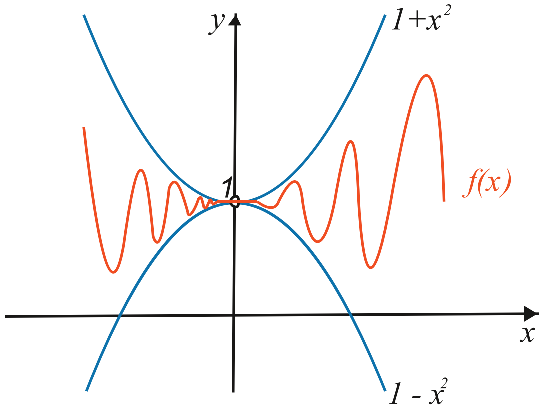
EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f uma função tal que,

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2; \text{ para todo } x \in (-1; 1):$$

Determine $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Figura 10: Interpretação geométrica do comportamento de f(x) no exercício 1 da página 24.



Solução: Note que,

$$\lim_{x\to 0}\left(1-x^2\right)=1\text{, e }\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)=1.$$

Assim, aplicando o Teorema do confronto (ver Teorema 1.2), você pode concluir que $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=1$.

A seguir, aplicaremos o Teorema do confronto (ver Teorema 1.2) para demonstrar um resultado que afirma que se o limite de |f(x)| é zero quando x tende a um número a, então o limite de f(x) também é zero quando x tende a a. Então vejamos:

Proposição

Se $\lim_{x\to 0}\left|f\left(x\right)\right|=0$, então $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=0$.

Demonstração: Note que

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ para todo $x \in Df$. (1.1)

Por outro lado, como, por hipótese, $\lim_{x\to 0}\left|f\left(x\right)\right|=0$, então

$$\lim_{x\to 0} -\left|f\left(x\right)\right| = \lim_{x\to 0}\left|f\left(x\right)\right|=0 \qquad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2), juntamente com o Teorema 1.2, concluímos que $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=0$.

Definição (função limitada)

Dizemos que uma função f é limitada em uma vizinhança de um número real a, se existe um intervalo $I \subset R$ com $a \in I$ e um número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$; para todo $x \in I$:

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. As funções trigonométricas dadas por f(x) = sen x e h(x) = cos x, são funções limitadas. Pois:

$$|\text{sen } x| \le 1 \text{ e } |\cos x| \le 1, \text{ para todo } x \in R.$$

2. A função f, definida por $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ não é limitada em nenhuma vizinhança de 0.

De fato, dado um intervalo $I \in R$, com $0 \in I$, e um número real $M > 0$, se considerarmos um número natural k, suficientemente grande, de modo que $x=\frac{1}{M+k} \in I$, obtemos:

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{\frac{1}{M+k}}\right|=M+k>M.$$

Com isto, f não é limitada em nenhuma vizinhança de 0.

Proposição

Suponha que f,g e h são funções definidas em uma vizinhança de um número real a. Suponha que h é limitada e f(x) = g(x) • h(x); para todo x em uma vizinhança de a.

Se $\lim_{x\to a} g\left(x\right)=0$, então

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)=0.$$

Demonstração: Como, por hipótese, h é limitada, então existe $M > 0$ tal que

$$|h(x)| \leq M;$$

daí, tomando o valor absoluto em ambos os membros da igualdade $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, segue que

$$|f(x)| = |g(x) \bullet h(x)| \leq |g(x)| \bullet M,$$

de onde obtemos,

$$-|g(x)| \bullet M \leq f(x) \leq |g(x)| \bullet M. \qquad (1.3)$$

Por outro lado, como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to a} |g(x)| \cdot M = 0 \text{ e } \lim_{x\to a} -|g(x)| \cdot M = 0 \qquad (1.4)$$

As desigualdades em (1.3) e os limites em (1.4) juntamente com o Teorema 1.2, acarretam em $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Solução: note que,

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e,

$\left|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 1$, para todo $x \neq 0$.

Assim, segue da Proposição 1.4 que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f uma função tal que, $5 - x^3 \leq f(x) \leq 3 + x^3$, para todo $x \in (1; 2)$.

Determine $\lim_{x\to 1} f(x)$.

2. Seja f uma função tal que, $x^2 - 5x + 6 \leq f(x) \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, para todo $x \in (1; 3)$.

Determine $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3. Seja h uma função tal que, $1 + \operatorname{sen} x \leq h(x) \leq \cos x$,

Determine $\lim_{x\to 0} h(x)$.

4. Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \left[x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

5. Se $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in R$, o que podemos afirmar com relação ao $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Limites fundamentais

A proposição a seguir trata de um dos limites mais utilizados no cálculo. Na demonstração dessa proposição utilizaremos o Teorema do confronto (ver Teorema 1.2) e um leve apelo geométrico.

Proposição (Limite trigonométrico fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

Solução: Note que:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

2. Mostre que,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Solução: Inicialmente, multiplicando e dividindo a fração por cos h + 1, que é o conjugado do numerador, obtemos:

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = \frac{\operatorname{sen} h}{(\cos h + 1)} \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Daí,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right] = \frac{0}{1 + 1} \cdot 1 = 0$$

Note que usamos o limite trigonométrico fundamental $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

3. Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{sen} 7x}$$

Solução: Note que $\operatorname{tg} 5x = \frac{\text{sen}5x}{\cos 5x}$, daí $\frac{\text{tg}5x}{\sin 7x} = \frac{\frac{\text{sen}5x}{\cos 5x}}{\text{sen}7x} = \frac{\text{sen}5x}{\sin 7x} \cdot \frac{1}{\cos 5x}$

Agora, observe que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 5x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{-1} = -1$$

por outro lado,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{\text{sen}7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5x}{5x} \cdot \text{sen}5x}{\frac{7x}{7x} \cdot \text{sen}7x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \cdot \frac{\text{sen}5x}{5x}}{7x \cdot \frac{\text{sen}7x}{7x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \frac{\text{sen}5x}{5x}}{7 \cdot \frac{\text{sen}7x}{7x}} = \frac{5}{7} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\text{sen}5x}{5x}}{\frac{\text{sen}7x}{7x}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{7}$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}5x}{\text{sen}7x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}5x}{\text{sen}7x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} \right) = \frac{5}{7} \cdot (-1) = -\frac{5}{7}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^5 x}{x^5}$$

2. Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

3. Calcule:

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\text{tg}3x}{\text{sen}4x}$$

Limites no infinito e assíntotas horizontais

Dizemos que x tende ao infinito (ou x tende a mais infinito), e representamos por $x \to \infty$ (ou $x \to +\infty$), se podemos supor x tão grande quanto desejarmos.

Observação

Vale salientar que o símbolo ∞ não representa um número real, mas apenas um comportamento da variável x. Deste modo, quando escrevemos $x \to +\infty$, o símbolo $+\infty$ é usado para descrever que você poderá atribuir à variável x valores tão grandes quanto você desejar.

De modo análogo, dizemos que x tende a menos infinito, e representamos por $x \to -\infty$, se x é um número negativo e podemos supor $|x|$ tão grande quanto desejarmos.

Definição

Dizemos que um número L é o limite de f(x) quando x tende ao infinito (ou a mais infinito), e representamos por

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se à medida que os valores atribuídos a x vão aumentando, os valores correspondentes

f(x) vão se aproximando do número L.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule o $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Solução: Observe a tabela a seguir:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
10	$\frac{1}{10} = 0,1$
100	$\frac{1}{100} = 0,01$
1000	$\frac{1}{1000} = 0,001$
10000	$\frac{1}{10000} = 0,0001$
$\vdots$	$\vdots$
100.000.000.000.000	$\frac{1}{100.000.000.000.000} = 0,000000000000001$

Tabela 4: Valores de f(x)=1/x quando x assume valores cada vez maiores.

Note que à medida que os valores atribuídos a x vão aumentando, os valores $f(x) = \frac{1}{x}$ ficam cada vez mais próximos de 0. Com base nesses dados, você pode concluir que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Teorema

Se α é um número real maior do que zero e k ≠ 0, então $\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^{\alpha}} = 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-1}{1+7x}$

Solução: Observe que quando x → +∞, tanto o numerador quanto o denominador da fração $\frac{5x-1}{1+7x}$ tendem para +∞. Por outro lado, como vimos na Observação 1.2, o símbolo não é um número real, deste modo não podemos dividir +∞ por +∞. Assim, você terá que encontrar outra alternativa para calcular o limite em questão, uma ideia seria dividir ambos os membros da fração $\frac{5x-1}{1+7x}$ pela variável x. Então faremos isto:

$$\frac{5x-1}{1+7x}=\frac{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{7x}{x}}=\frac{5-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+7}$$

Visto que, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, segue que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{1+7x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+7}=\frac{5-0}{0-7}=\frac{-5}{7}$$

2. Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^5+2x^3-5x+6}{1+7x^2-3x^4+2x^5}$.

Solução: Note que dividindo ambos os membros da fração $\frac{3x^5+2x^3-5x+6}{1+7x^2-3x^4+2x^5}$ por x^5, obtemos:

$$\frac{3x^5+2x^3-5x+6}{1+7x^2-3x^4+2x^5}=\frac{\frac{3x^5}{x^5}+\frac{2x^3}{x^5}-\frac{5x}{x^5}+\frac{6}{x^5}}{\frac{1}{x^5}+\frac{7x^2}{x^5}-\frac{3x^4}{x^5}+\frac{2x^5}{x^5}}=\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{\frac{1}{x^5}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{x}+2}$$

Com isto, segue, do Teorema 1.3, que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+2x^3-5x+6}{1+7x^2-3x^4+2x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{\frac{1}{x^5}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{x}+2}=\frac{3+0-0+0}{0+0-0+2}=\frac{3}{2}$$

INDICAÇÃO DE LEITURA

Leia e aprenda mais sobre este conteúdo abordado até aqui recorrendo à seguinte literatura:

GUIDORIZZI, L. H., Um Curso de Cálculo, vol.1, 5a Edição, Editora LTC, Rio de Janeiro (2008).

Definição

Dizemos que um número L é o limite de f(x) quando x tende a menos infinito, e representamos por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

se à medida que os valores de |x| vão aumentando, com x < 0, os valores correspondentes f(x) vão se aproximando do número L.

Teorema

Se α é um número real maior do que zero e k≠0, então

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^{\alpha}}=0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^2+3x+1}{7x^3-3x^4}$.

Solução: Inicialmente, vamos dividir o numerador e o denominador da fração $\dfrac{x^4-x^2+3x+1}{7x^3-3x^4}$ por x^4. Então vejamos:

$$\frac{x^4-x^2+3x+1}{7x^3-3x^4}=\frac{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{3x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{7x^3}{x^4}-\frac{3x^4}{x^4}}=\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{7}{x}-3}$$

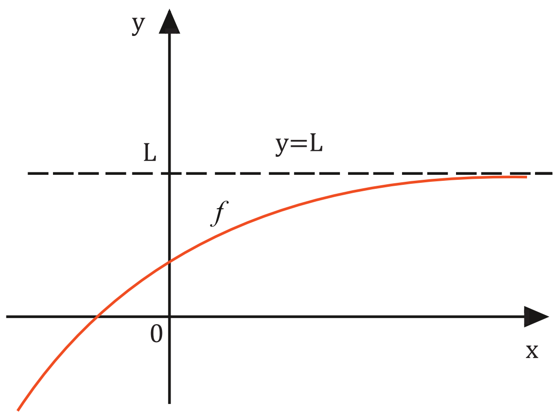
Assim,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2+3x+1}{7x^3-3x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{7}{x}-3}=\frac{1-0+0+0}{0-3}=-\frac{1}{3}$$

Definição (ASSÍNTOTA HORIZONTAL)

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, onde L é um número real, denominamos a reta y = L de "assíntota horizontal" do gráfico de f.

Figura 11: interpretação geométrica da definição de assíntota horizontal.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. A reta y = 1 é uma assíntota horizontal do gráfico da função dada pela equação $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$.

Solução: Veja que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=0+1=1$

Portanto, como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x}=1$, então segue imediatamente da definição (1.6) que a reta y = 1 é uma assíntota horizontal do gráfico da função dada por $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine as assíntotas horizontais da função f definida pela equação $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}-x$.

Solução: Multiplicando e dividindo $\sqrt{x^2+1}-x$ por $\sqrt{x^2+1}+x$ você obterá:

$$\sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

De onde segue que,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{1}}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+0}=0$$

De modo análogo, você pode verificar que $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$. Assim, de acordo com a Definição 1.6, a reta y = 0 é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

2. Determine as assíntotas horizontais da função f definida pela equação:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}.$$

Solução: Multiplicando e dividindo $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$ por $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}$, você obterá:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}=\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}=\frac{x+3-\left(x-5\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}=\frac{8}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}$$

De onde segue que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}=0$$

Assim, de acordo com a Definição, a reta y = 0 é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Por outro lado, a função f não está definida para valores negativos, assim não faz sentido investigar o limite $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x-1}$$

2. Determine:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+3x+1}{1+5x^3-3x^4}$$

3. Determine:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-x+1}{3x^2-2x+5}$$

4. Determine a assíntota horizontal do gráfico da função dada por:

$$f\left(x\right)=\frac{3+2x}{1-5x}$$

5. Determine as assíntotas horizontais da função f definida pela equação:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2}-x$$

6. Determine as assíntotas horizontais da função f definida pela equação:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}$$

Limites infinitos e assíntotas verticais

UN 01

Considere a função f, definida pela equação $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$. Note que f está definida para todo número real diferente de zero. O que dizer a respeito do comportamento dos valores f(x) quando $x \to 0$? Observe a tabela a seguir:

Tabela 5: Valores de $f(x)=1/x^2$ quando x se aproxima de zero.

x negativo	$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$	x positivo	$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$
-1	1	1	1
-0,1	100	0,1	100
-0,01	10000	0,01	10000
-0,001	1000000000	0,001	1000000000

Note que à medida que os valores de x vão se aproximando de zero, os valores de f(x) vão crescendo extraordinariamente. Para simbolizar esse comportamento de $\frac{1}{x^2}$ quando $x \to 0$, usamos a notação:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

Agora, considere a função f, definida pela equação $f\left(x\right)=\frac{1}{x-2}$ observe que f está definida para todo $x \neq 2$. Porém, o que podemos afirmar a respeito do comportamento dos valores f(x) quando $x \to 2$? A fim de responder esta pergunta, analisaremos o que acontece com os valores de f(x) quando $x \to -2$ e $x \to +2$ a partir da tabela a seguir:

Tabela 6: Valores de $f(x)=1/x^2$ quando x tende a dois pela esquerda e pela direita.

$x\to 2^-$	$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$	$x\to 2^+$	$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$
1,9	-10	2,1	10
1,99	-100	2,01	100
1,999	-1000	2,001	1000
1,9999	-10000	2,0001	10000
⋮	⋮	⋮	⋮
1,99999999	-100000000	2,00000001	100000000
⋮	⋮	⋮	⋮

Veja que quando x → 2^-, então $\frac{1}{x-2} \to -\infty$, assim como quando x → 2^+, tem-se que $\frac{1}{x-2} \to \infty$. Representamos este comportamento da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty$$

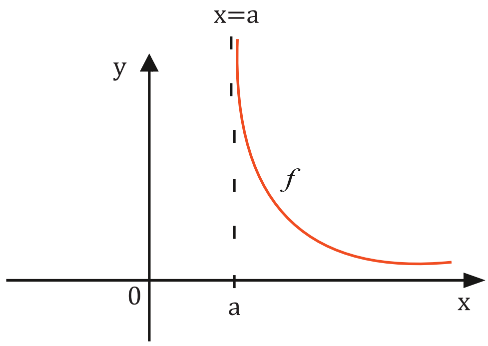
Definição (ASSÍNTOTA VERTICAL)

Seja f uma função. A reta vertical x = a é denominada de uma assíntota vertical do gráfico de f, se ocorrer um dos limites a seguir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

Figura 12: Interpretação geométrica da definição de assíntota vertical.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Verifique que a reta x = 1 é uma assíntota vertical do gráfico da função dada por $f(x) = \frac{2x}{1-x}$

Solução: Dividindo, simultaneamente, o numerador e o denominador da fração $\frac{2x}{1-x}$ por x, obtemos

$$\frac{2x}{1-x} = \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} = \frac{2}{\frac{1}{x} - 1}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{1-x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\frac{1}{x} - 1}$$

Agora, note que se x está próximo de 1 e x < 1, então $\frac{1}{x} - 1 > 0$. Assim, quando $x \to 1^-$ então $\frac{1}{x} - 1 \to 0^+$, daí

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\frac{1}{x} - 1} = +\infty$$

Portanto, como $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{1-x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\frac{1}{x} - 1}$, então $\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\frac{1}{x} - 1} = \infty$, de onde concluímos que a reta x = 1 é uma assíntota vertical do gráfico de f.

EXERCÍCIO PROPOSTO

Nas questões a seguir, calcule os limites e verifique se há assíntotas verticais:

1. $\lim_{x \to 5} \frac{1}{|x-5|}$.

2. $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x}}{x+1}$ e $\lim_{x \to \frac{5}{3}} \frac{x+1}{\sqrt{3x-5}}$.

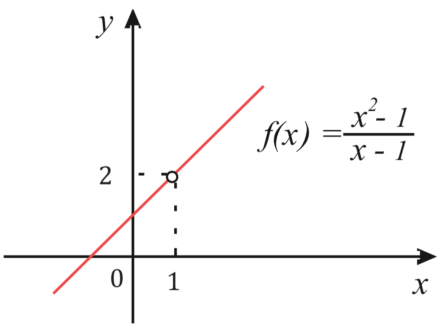
3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg\ x$.

4. $\lim_{x \to 0} cotg\ x$.

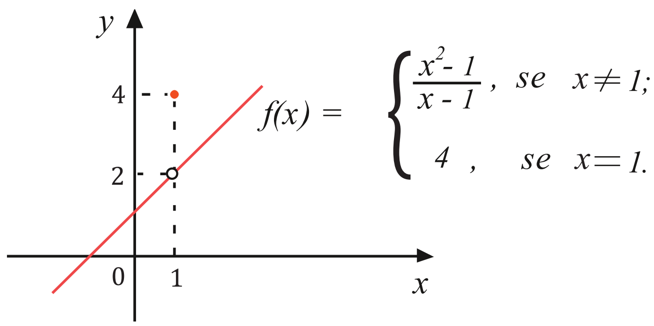
Funções contínuas

Observe os gráficos a seguir:

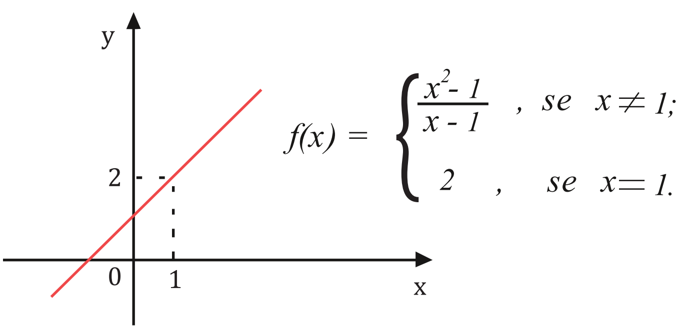
Figura 13: Exemplos gráficos



(a)



(b)



(c)

Observando a figura 13, percebe-se que não é possível construir os gráficos (a) e (b) sem tirar o lápis do papel. Em ambos os casos o problema se encontra em x = 1. Por outro lado, o gráfico (c) pode ser construído sem tirar o lápis do papel intuitivamente, podemos dizer que o gráfico da parte (c) apresenta um comportamento contínuo. Já os gráficos (a) e (b) apresentam uma descontinuidade em x = 1.

De agora em diante, usaremos limites para definirmos a continuidade de função em um ponto. Veja a definição a seguir:

Definição

Seja f: (a; b) → R, uma função. Dizemos que f é contínua em um número c se valem as três condições a seguir:

i) f está definida em c, isto é c ∈ Df;

ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe;

iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(a)$.

Se f não é contínua em c, dizemos que é descontínua em c.

Note que a função que determina o gráfico (a) não está definida para x = 1, por outro lado, a função que determina o gráfico (b) está definida em x = 1, mas

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

De onde segue que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, pois f(1)=4.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Verifique por meio de limites se a função f definida pela equação:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, se\ x < 3 \\ 6, se\ x = 3; \\ 3x - 3, se\ x > 3. \end{cases}$$

é contínua em x = 3.

Solução: Inicialmente, temos que f(3) = 6 e, portanto, a primeira condição da definição 1.8 é satisfeita. Agora, vamos verificar se a segunda condição da definição é satisfeita, isto é, vamos verificar se $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe, para tanto, calcularemos os limites laterais de f à direita e à esquerda de 3. Com efeito,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-}(x+3) = 6,$$

por outro lado,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+}(3x - 3) = 3 \cdot 3 - 3 = 6.$$

Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$, então pelo Teorema 1.1, segue que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Com isto, a segunda condição da definição 1.8 é satisfeita. Além disso, temos que f(3)=6, de onde segue que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

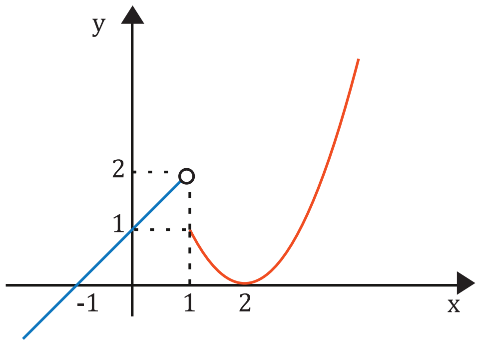
de onde concluímos que a terceira condição da Definição é satisfeita. Portanto, f é contínua em x = 3.

2. Seja f : R → R, a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1), se\ x<1;\\(x-2)^2, se\ x\geq 1.\end{cases}$$

Justifique por meio da Definição 1.8, que f não é contínua em x = 1.

Figura 14: Gráfico da função $f(x)=\begin{cases}(x+1), se\ x<1;\\(x-2)^2, se\ x\geq 1.\end{cases}$



Solução: Note que, se x < 1, então f(x) = x + 1, daí:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2.$

Por outro lado, se x > 1, então f(x) = $(x - 2)^2$, de onde segue que

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)^2=(1-2)^2=(-1)^2=1.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$. Como os limites laterais de f à direita e à esquerda de 1 são distintos, então o limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe, e assim a segunda condição da Definição não é satisfeita, logo f não é contínua em 1.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Verifique por meio de limites se a função f definida pela equação:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, se\ x<5;\\ 10, se\ x=5;\\ 3x-5, se\ x>5.\end{cases}$$

é contínua em x = 5.

2. Seja f : R → R, a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x+3, se\ x<3;\\(x-3)^2, se\ x\geq 3.\end{cases}$$

Justifique por meio da Definição 1.8, que f não é contínua em x = 3.

3. Seja M um número real. Considere a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2}, se\ x\neq 0;\\ M, se\ x=0.\end{cases}$$

Determine o valor de M de modo que a função f seja contínua em 0.

Definição formal de limite

Nesta seção, apresentaremos uma definição de limites mais rigorosa. Para isto, utilizaremos as letras gregas épsilon (ε) e delta (δ). É comum o uso dessas letras quando se deseja representar números reais positivos bem pequenos (tendendo a zero).

Definição (definição formal de limite)

Consideremos um intervalo $I \subset R$ e um número real $a \in I$. Seja f uma função definida em $I \setminus \{a\}$. Diremos que L é o limite de f(x) quando $x \to a$, e denotamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \qquad (1.5)$$

Usando apenas símbolos, podemos expressar a definição formal de limites da seguinte forma:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \qquad (1.6)$$

Observação

Usamos o símbolo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para enfatizarmos que o número real δ está vinculado ao número $\varepsilon > 0$ (isto é, δ depende do número dado). Quando não houver perigo de confusão, escrevemos apenas δ ao invés de (ε).

Observação

Colocamos $|x-a| > 0$ para fazer ênfase que na análise do limite de f(x) quando $x \to a$, o valor de f(a) não interessa, pois estamos interessados apenas nos valores de f(x) quando x está bem próximo de a.

Observação (interpretação geométrica)

Note que:

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta, \text{ e } x \neq a \\ &\Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta, \text{ e } x \neq a \\ &\Leftrightarrow x \in < (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}. \qquad (1.7) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |f(x)-L| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L-\varepsilon < x < L+\varepsilon, \\ &\Leftrightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \qquad (1.8) \end{aligned}$$

Observando a implicação (1.6) e as equivalências (1.7) e (1.8), concluímos que a implicação

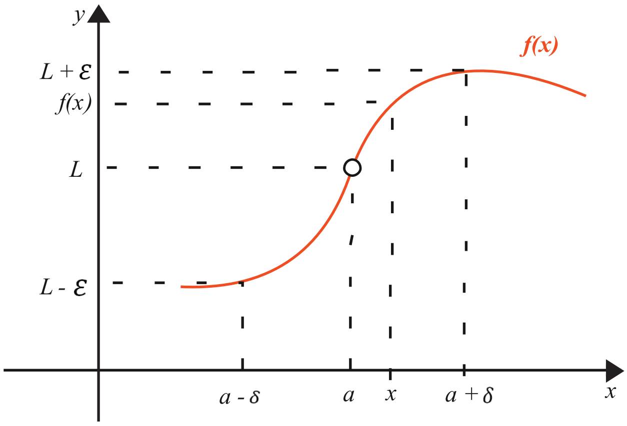
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon. \qquad (1.9)$$

é equivalente a dizer que

$$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon); \text{ sempre que } x \in (a-\delta; a+\delta) \setminus \{a\}.$$

Com isto, tem-se a seguinte interpretação geométrica para $\lim_{x\to a} f(x) = L$:

Figura 15: Interpretação geométrica da definição formal de limites.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Considere a função f: R →R definida pela equação f(x) = 2x – 1. Usando a Definição 1.9, mostre que o limite de f(x) quando x → 2, é 3.

Solução: Inicialmente, note que:

$$|f(x)-3| = |(2x-1)-3| = |2x-4|$$
$$= |2(x-2)| = 2|x-2|, \text{ para todo } x \in R,$$

daí,

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-3| = 2|x-2| < 2\delta, \text{ para todo } x \in R.$$

Deste modo, dado ε > 0, considerando $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, tem-se

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-3| < 2\delta = \varepsilon, \text{ para todo } x \in R.$$

Portanto, tendo em vista a definição 1.9, concluímos que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

Lema 1.1 Se a ∈ R, então dado ε > 0, existe δ > 0 tal que:

$$\delta^2 + 2|a|\delta = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.10)$$

Demonstração: Basta mostrarmos que a equação:

$$x^2 + 2|a|x - \frac{\varepsilon}{2} = 0$$

possui solução real positiva. Para tanto, calculemos o discriminante

$$\Delta = (2|a|)^2 - 4\cdot 1\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 4|a|^2 + 2\varepsilon$$

Desde que $\Delta = 4|a|^2 + 2\varepsilon > 0$, usando a fórmula de Bháskara, concluímos que a equação (1.10) possui duas raízes reais, a saber

$$x_1 = \frac{-2|a| + \sqrt{4|a|^2 + 2\varepsilon}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-2|a| - \sqrt{4|a|^2 + 2\varepsilon}}{2}$$

Note que, x_2 é um número negativo. Por outro lado, como por hipótese ε<0, tem-se

$$\sqrt{4|a|^2 + 2\varepsilon} > \sqrt{4|a|^2} = 2|a|$$

daí, $-2|a| + \sqrt{4|a|^2 + 2\varepsilon} > 0$. Deste modo, concluímos que x_1 é um número real positivo (isto é, $x_1 > 0$). Portanto, considerando $\delta = x_1 > 0$, o lema está demonstrado.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f a função definida pela equação $f(x) = x^2$. Mostre, usando a definição formal de limites, que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, para todo a ∈ R:

Solução: A princípio, note que:

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |(x+a)(x-a)|$$

$$= |x+a|\cdot|x-a| \leq (|x|+|a|)|x-a|. \qquad (1.11)$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular, deduzimos:

$$|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a|. \qquad (1.12)$$

As desigualdades, (1.11) e (1.12), acarretam em:

$$|f(x)-f(a)| \leq (|x-a|+2|a|)\,|x-a|. \qquad (1.13)$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 1.1, existe $\delta > 0$ tal que $\delta^2+2|a|\delta < \varepsilon$, o que implica em:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq (|x-a|+2|a|)\,|x-a|$$

$$<(\delta+2|a|)\cdot\delta = \delta^2 + 2|a|\delta < \varepsilon.$$

Portanto, concluímos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, como queríamos demonstrar.

2. Considere as funções f,g: R → R definidas, respectivamente, pelas equações $f(x) = x$ e $g(x) = k$, onde k é uma constante real. Se a é um número real, então usando a definição formal de limites, demonstre que $\lim_{x\to a} f(x) = a$ e $\lim_{x\to a} g(x) = k$.

Solução: Inicialmente, provemos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Com efeito, observe que $|f(x)-a| = |x-a|$, para todo x ∈ R.

Deste modo, dado $\varepsilon<0$, considerando $\delta=\varepsilon>0$, segue que:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-a| = |x-a| < \delta = \varepsilon$$

Com isto, segue da definição 1.9 que $\lim_{x\to a} f(x) = a$. Agora, demonstraremos que $\lim_{x\to a} g(x) = k$. De fato, note que $|g(x)-k|=|k-k|=0$, para todo x ∈ R.

Assim, dado $\varepsilon<0$, considerando qualquer número $\delta<0$, tem-se

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-k| = |g(x)-k| = 0 < \varepsilon.$$

Portanto, mediante a definição 1.9, concluímos que $\lim_{x\to a} g(x) = k$.

Teorema (unicidade do limite)

Consideremos um intervalo I ⊂ R e um número real a ∈ I. Seja f uma função definida em I\{a}. Se L e M são limites de f(x) quando x → a, então L = M. (este resultado garante que f(x) não pode convergir para dois limites distintos).

Demonstração: Suponha, por absurdo, que L ≠ M. Assim, pela definição 1.9, considerando $\varepsilon = \frac{|L-M|}{2} > 0$, existem $\delta_L>0$ e $\delta_M>0$ tais que

$$0<|x-a|<\delta_L \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{|L-M|}{2}, \text{ e } 0<|x-a|<\delta_M \Rightarrow |f(x)-M| < \frac{|L-M|}{2}$$

Agora, considerando $\delta=\min\{\delta_L,\delta_M\} > 0$, obtemos

$$0<|x-a|<\delta |L-M| = |L-f(x)+f(x)-M| \leq |L-f(x)|+|f(x)-M| < \frac{|L-M|}{2}+\frac{|L-M|}{2} = |L-M|$$

de onde segue que $|L–M| < |L–M|$, o que é um absurdo. Portanto, concluímos que $L = M$, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Considere a função $f : R \to R$ definida pela equação $f(x) = 3x - 2$. Usando a Definição 1.9, mostre que o limite de $f(x)$ quando $x \to 1$, é 1.

2. Considere a função $f : R \to R$ definida pela equação $f(x) = 3x^2$. Usando a definição 1.9, mostre que o limite de $f(x)$ quando $x \to 2$, é 12.

3. Usando a definição formal de limites (isto é, usando ε' se δ's), mostre que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2010x}{x}=2010$$

4. Considere a função $f : R \to R$ definida pela equação $f(x) = |x|$. Usando a definição 1.9, mostre que o limite de $f(x)$ quando $x \to a$, é $|a|$

II

DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS A UMA VARIÁVEL REAL

Nesta unidade, você estudará uma ferramenta poderosa para definir precisamente conceitos abstratos, como os conceitos de velocidade e aceleração instantânea de uma partícula em movimento. Além disso, através dessa ferramenta, veremos como solucionar o problema de definir a reta tangente a uma curva em um ponto arbitrário. Tal ferramenta é conhecida como a "derivada" de uma função.

Objetivos:

- Determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função utilizando o conceito de limites;

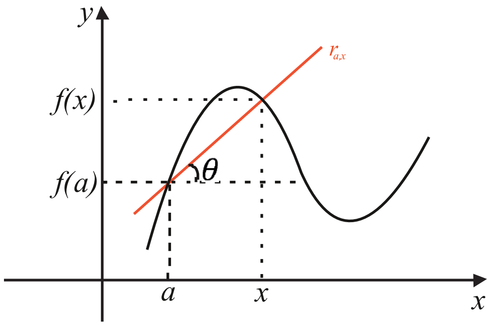
- Calcular derivadas de funções utilizando as regras de derivação;

- Aplicar o Teorema da regra da cadeira para calcular derivadas de funções compostas.

Conceitos e definições

Suponha que I é um intervalo contido em R e que a é um número real pertencente a I. Seja f:I →R uma função. Note que o ponto (a; f(a)) pertence ao gráfico de f, além disso, se x é outro ponto do intervalo I, então o ponto (x; f(x)) também pertence ao gráfico de f. Observe que a reta que passa pelos pontos (a; f(a)) e (x; f(x)) intersecta o gráfico de f em pelo menos dois pontos, essa reta é denominada de reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos (a; f(a)) e (x; f(x)), e para nosso estudo será denotada por $r_{a,x}$.

Figura 16: Reta secante ao gráfico de f.

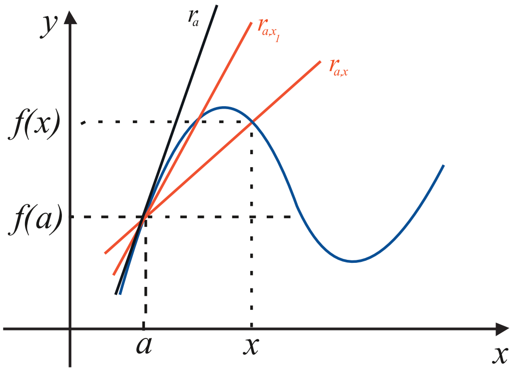


Note que o coeficiente angular[1] da reta secante $r_{a,x}$, que representaremos por $m_{a,x}$, é dado pelo quociente

$$m_{a,x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (2.1)$$

Seria razoável definir a reta tangente ao gráfico de f no ponto (a; f(a)) como sendo a reta que passa pelo ponto (a, f(a)), cujo coeficiente angular, m_a, é obtido através dos coeficientes angulares $m_{a,x}$ fazendo x tender ao número a. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Figura 17: Reta tangente ao gráfico de f.



Definição

Denominamos de reta tangente ao gráfico de f no ponto (a; f(a)) a reta que passa por (a; f(a)) e tem coeficiente angular m_a dado por

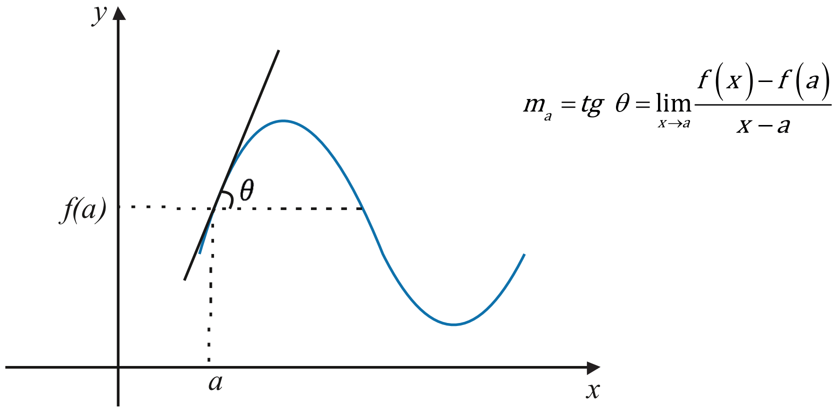
$$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuja equação é dada por

$$y - f(a) = m_a (x - a)$$

[1] O Coeficiente Angular de uma reta é dado pela tangente do ângulo entre esta reta e o eixo horizontal.

Figura 18: Coeficiente angular da reta tangente a curva y=f(x).



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f a função dada pela equação f(x) = x^2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1; f(1)).

Solução: Note que,

$$m_1 \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Com isto, segue da definição 2.1 que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em x = 1 é m_1 = 2. Ainda pela definição 2.1, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1; f(1)) é dada por

$$y-f(1)=m_1\ (x-1),$$

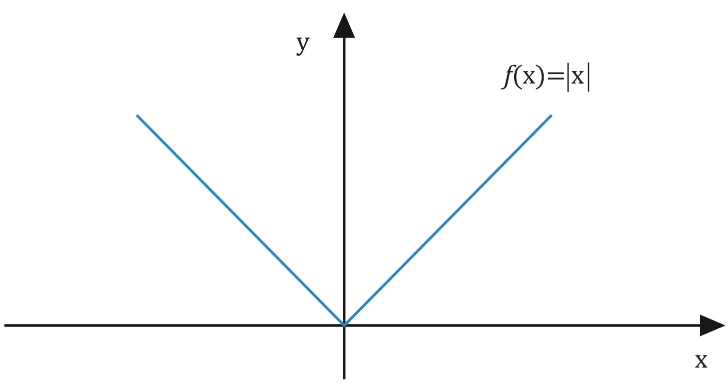
que é equivalente a

$$y-1=2(x-1), \text{ ou ainda } y=2x-1.$$

Observação

Caro aluno, observe que a existência do coeficiente angular m_a está vinculada à existência do limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, portanto, caso este limite não exista, ou não seja finito, dizemos que não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,f(a)).

Figura 19: Gráfico da função modular.



2. Seja f a função modular dada por f(x) = |x|. Existe reta tangente ao gráfico de f no ponto (0; f(0))?

Solução: Note que:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}$$

Porém, como vimos anteriormente, não existe o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

Portanto, segue da Observação 2.1 que não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto (0,f(0)).

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f a função dada pela equação $f(x) = 3x^2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,f(2))$.

2. Seja f a função modular dada por $f(x) = |x-1|$. Existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1; f(1))$?

Definição de derivada

UN 02

No que segue, suponha que f:I → R é uma função, onde I é um intervalo contido em R, e a é um número real pertencente a I.

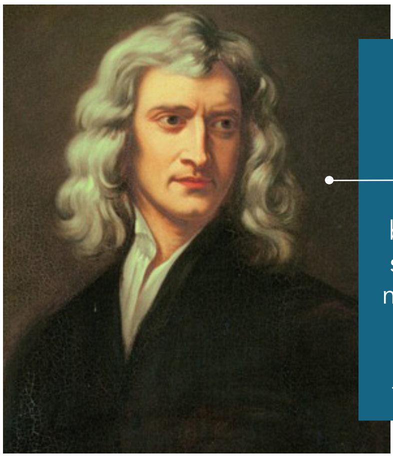
Definição (derivada de f em a)

Dizemos que f é derivável em a se o limite:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

existe e é finito. No caso afirmativo, denominamos o limite de derivada de f em a, e denotamos por f′(a), isto é:

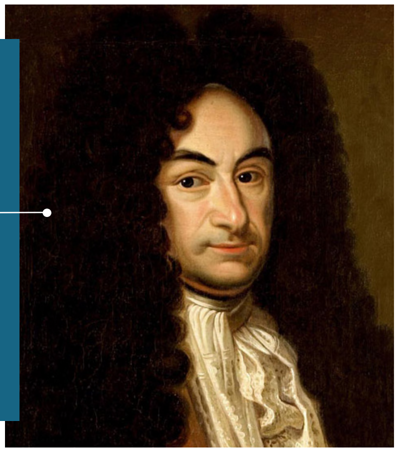
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \qquad (2.2)$$



Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg

Isaac Newton nasceu em Londres, em 1643 e viveu até o ano de 1727. Cientista, químico, físico, mecânico e matemático, trabalhou junto com Leibniz na elaboração do cálculo infinitesimal. Durante sua trajetória, ele descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade.

O conceito de derivada é atribuído aos pesquisadores Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) que, segundo a história da matemática, chegaram aos mesmos resultados trabalhando de forma independente.



Fonte: http://www.biografias-de.com/gottfried-leibniz

Gottfried Leibniz (1646-1716) foi um filósofo e matemático alemão. Estudioso do cálculo integral e do cálculo binário, que seria futuramente importante para o estabelecimento dos programas de computadores. É considerado uma das mentes mais brilhantes da história.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f: R→ R a função definida por f(x) = 2x – 1. f é derivável em 3? Se f é derivável em 3, quem é f'(3)?

Solução: Note que f(3) = 2 • 3 - 1 = 5. Com isto,

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{(2x-1)-5}{x-3}=\frac{2x-6}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x-3}=2, \forall x\neq 3.$$

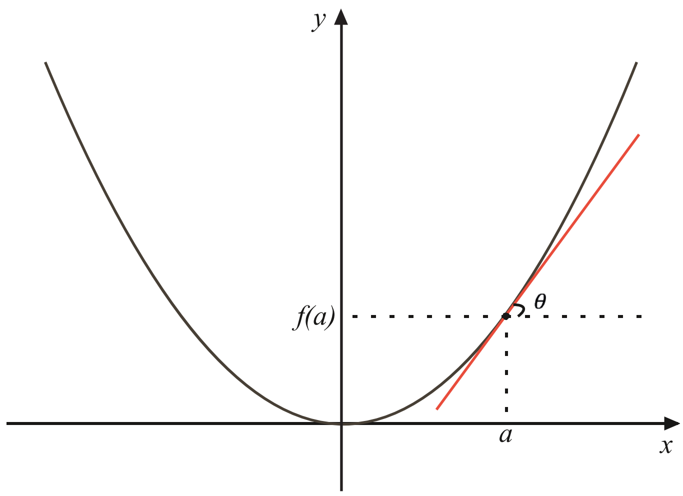
Daí, segue que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}2=2.$$

Portanto, segue da definição 2.2 que f é derivável em 3, e que f’ (3)=2.

2. Seja f: R → R a função definida por f(x) = x². Mostre que f é derivável em qualquer número a ∈ R e determine f' (a).

Figura 20: Reta tangente a parábola no ponto (a ,f(a)).



Solução: Observe que,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=x+a\forall x\neq a$$

Daí,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a.$$

Portanto, segue da definição 2.2 que f é derivável em a e, além disso, f’ (a)=2a.

3. Seja f: (0,+∞) → R, a função definida por $f(x)=\sqrt{x}$. Mostre que f é derivável em todo número a >0, e que $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Solução: Dado um número real a >0, temos:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})},$$ para todo $0 < x \neq a$.

Deste modo, passando ao limite, obtemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Portanto, f é derivável em a, para todo a > 0 e, além disso, f' (a)= $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Observação

Se você considerar h = x − a, então x = a + h. De onde segue que:

$$x \to a \Leftrightarrow h \to 0.$$

Com isto, na definição de f'(a) podemos reescrever o limite, dado na igualdade (2.2), da seguinte forma:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \qquad (2.3)$$

4. Seja f:R→ R a função dada por f(x)= sen x. Mostre que f é derivável em todo número a ∈ R e, além disso,

$$f'(a)= \cos a$$

Solução: Usando a fórmula sen (a+h)=sen a cos h+sen h cos a, obtemos:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h}=\frac{\operatorname{sen} a\cos h+\operatorname{sen} h\cos a-\operatorname{sen} a}{h}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} a(\cosh-1)+\operatorname{sen} h\cos a}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\sin a+\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cos a$$

ou seja,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\operatorname{sen} a+\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cos a, \qquad (2.4)$$

Por outro lado, pela Proposição 1.5 e pelo Exercício Resolvido 2 da página 27, temos que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1 \text{ e } \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0, \qquad (2.5)$$

Usando as igualdades (2.4) e (2.5), você obterá:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos h-1}{h}\operatorname{sen} a+\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cos h\right]$$

$$=0\cdot \operatorname{sen} a+1\cdot\cos a=\cos a.$$

Portanto, pela igualdade (2.3) da Observação 2.2, concluímos que f é derivável em a e, além disso, f' (a)= cos a.

Notações especiais para derivada

Seja f uma função derivável. Se y = f(x), então podemos denotar a derivada de f em relação a variável x com qualquer uma das notações a seguir:

$$f'(x),\, y',\, \frac{d}{dx}f(x),\, \frac{dy}{dx},\, D_x f(x),\, Df(x) \qquad (2.6)$$

o símbolo, $\frac{dy}{dx}$ não representa uma fração do tipo dy dividido por dx, mas sim a derivada de y em relação a variável x.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f: R → R a função definida por f(x) = 3x–1. f é derivável em 5? Se f é derivável em 5, quem é f' (5)?

2. Seja f:R→ R a função definida por f(x) = 5x^2. Mostre que f é derivável em qualquer número a ∈ R e que f'(a) = 10a.

3. Seja f:R→ R a função dada por f(x) = cos x. Mostre que f é derivável em todo número a ∈ R e, além disso,

$$f'(a) = -\text{sen } a.$$

Retas tangentes e retas normais a gráficos de funções

UN 02

Note que segundo a definição 2.1, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto (a,f(a)) é:

$$m_a = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Por outro lado, vimos na definição de derivada que:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Assim, o coeficiente angular m_a é a derivada de f em a, isto é , m_a=f' (a). Com isto, podemos substituir m_a por f' (a)na equação da reta tangente dada na definição 2.1. De onde segue que

$$y-f(a) = f'(a)(x-a) \qquad (2.7)$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de função f no ponto (a,f(a)).

Observação

A equação (2.7) só faz sentido se a função f for derivável em a, pois caso contrário o coeficiente angular f' (a) não estará definido.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f:R→ R a função dada por f(x) = sen x. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Solução: Observe que,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Temos ainda que, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por outro lado, pela igualdade (2.7), a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ é dada por:

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

que é equivalente a

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Da geometria analítica elementar, temos que se uma reta r que passa por um ponto $P(x_0, y_0)$ tem coeficiente angular m_r, então a reta s normal a r que passa pelo ponto $P(x_0; y_0)$ tem coeficiente angular $m_s = -\frac{1}{m_r}$. Deste modo, visto que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto (a; f(a)) é f'(a), então o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f no ponto (a; f(a)) é $-\frac{1}{f'(a)}$. Com isto, a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto (a; f(a)) é dada por:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a). \qquad (2.8)$$

Observação

A equação dada em (2.8) só faz sentido se f' (a)≠0. Perceba que, se f' (a)=0 então a reta normal reduz-se a equação x = a.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f: R→ R a função dada por f(x) = sen x. Determine a equação da reta normal ao gráfico de f nos pontos $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Solução: Sabemos que,

$$f'(a) = \cos a$$

daí, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, usando a igualdade dada em (2.8) a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ é $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x - a)$, ou equivalentemente $y = -\sqrt{2}(x - a) + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por outro lado,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

assim, pela observação 2.4, a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ é $x = \frac{\pi}{2}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f:R→ R a função dada por $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (3,f(3)).

2. Seja f:R→ R a função dada por $f(x) = x^3$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos (0,f(0)) e (1,f(1)).

3. Seja f:R→ R a função dada por f(x) = sen x. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Propriedades das derivadas

UN 02

No que segue, considere f e g funções deriváveis. Assim, valem as seguintes propriedades:

(P1) Regra da Constante

$$\frac{d}{dx}K = 0,$$

para todo K ∈R;

A propriedade (P1) diz que a derivada de qualquer constante K, em relação à variável x, é zero.

Exemplo 2.1

$$\frac{d}{dx}5 = 0, \frac{d}{dx}\frac{2}{3} = 0, \frac{d}{dx}\sqrt{2} = 0, \frac{d}{dx}\pi = 0, \frac{d}{dx}e^{\pi} = 0.$$

(P2) Regra da Potência

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

em particular, fazendo n = 1; obtemos $\frac{d}{dx}x = 1$.

Exemplo 2.2

Da propriedade (P2), segue imediatamente que:

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^7 = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$\frac{d}{dx}x^{\pi} = \pi x^{\pi-1}$$

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

visto que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, segue que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(P3) Regra da Soma

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

Exemplo 2.3

Se $h(x) = x^2+5$, então aplicando a regra da soma para derivação você obterá:

$$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)=\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}5=2x^{2-1}+0=2x$$

(P4) Regra da Diferença

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

Exemplo 2.4

Se $f(x) = x^3-x^2$, então aplicando a regra da diferença para derivação,você obterá

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^3-x^2\right)=\frac{d}{dx}x^3-\frac{d}{dx}x^2=3x^2-2x$$

(P5) Regra do Produto

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Se $f(x)=\left(x^9-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{11}+x^{12}\right)$, então:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\left(x^9-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{11}+x^{12}\right)\right]\\
&=\left(\frac{5}{11}+x^{12}\right)\frac{d}{dx}\left(x^9-\frac{1}{2}\right)+\left(x^9-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{11}+x^{12}\right)\\
&=\left(\frac{5}{11}+x^{12}\right)\left(9x^8-0\right)+\left(x^9-\frac{1}{2}\right)\left(0+12x^{11}\right)\\
&=\left(\frac{5}{11}+x^{12}\right)9x^8+\left(x^9-\frac{1}{2}\right)12x^{11}\\
&=\frac{45x^8}{11}+9x^{20}+12x^{20}-6x^{11}\\
&=21x^{20}-6x^{11}+\frac{45x^8}{11}
\end{aligned}$$

(P6) Regra do Quociente

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f a função dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Determine a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto (1; f(1)).

2. $\frac{d}{dx}10 = ?$, $\quad \frac{d}{dx}\frac{1}{5} = ?$, $\quad \frac{d}{dx}\sqrt{3} = ?$, $\quad \frac{d}{dx}1000\pi = ?$, $\quad \frac{d}{dx}e^{\sqrt{2}} = ?$

3. Usando a propriedade (P2), determine as derivadas a seguir:

$$\frac{d}{dx}x^5 = ?, \quad \frac{d}{dx}x^{1000} = ?, \quad \frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = ?, \quad \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = ?.$$

4. Determine a derivada da função dada por $f(x) = x^5 + x^{\frac{1}{2}}$.

5. Determine a derivada da função dada por $f(x) = x^{10} - x^3$.

6. Determine a derivada da função dada por $f(x) = \left(x^5 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} + x^{11}\right)$.

7. Determine a derivada da função dada por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$.

Derivada de funções trigonométricas

Nesta seção você irá aprender como calcular as derivadas das funções trigonométricas.

Usaremos a definição de derivada para demonstrar regras que simplificarão o cálculo de tais derivadas. Faremos isto na proposição a seguir:

Proposição (regras para derivação de funções trigonométricas)

Valem as seguintes regras de derivação para funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\text{sen } x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen } x$$

$$\frac{d}{dx}\text{tg } x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\text{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \text{tg } x \qquad \frac{d}{dx}\text{cosec } x = -\text{cosec } x \,\text{cotg } x$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f(x) = sen x + cos x. Determine f'(x).

Solução: $f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen } x + \cos x) = \frac{d}{dx}\text{sen } x + \frac{d}{dx}\cos x = \cos x - \text{sen } x$

Portanto, f' (x) = cos x – sen x.

2. Seja $g(x) = sec\ x + tg\ x$. Determine $g'(x)$.

Solução: $g'(x) = \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \frac{d}{dx}\sec x + \frac{d}{dx}\tan x = \sec x \tan x + \sec^2 x$

3. Seja h(x) = cosec x + cotg x. Determine h' (x).

Solução: $h'(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x) = \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x + \frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec}^2 x$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja f(x) = sen x – cos x. Determine f'(x).

2. Seja g(x) = sec x – tgx. Determine g'(x).

3. Seja h(x) = cosec x – cotg x. Determine h' (x).

4. Seja f(x) = sen x · cos x. Determine f'(x).

5. Seja g(x) = sec x · tgx. Determine g'(x).

6. Seja $h(x) = \frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cotg} x}$. Determine h' (x).

Definição de derivada

Proposição (derivada de a^x)

Se $0 < a \neq 1$, então

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

Em particular, se a = e, onde "e" é a constante de Euler (e = 2,718...), então:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

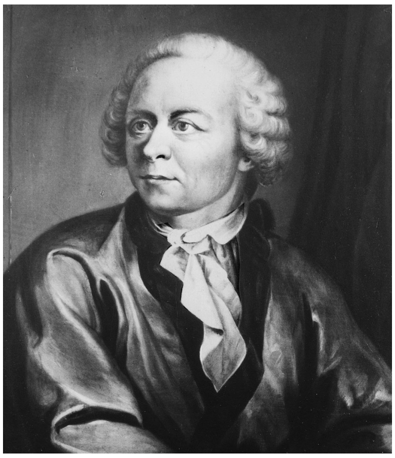
pois $\ln e = \log_e e = 1$.

Assim, segue imediatamente que:

$$\frac{d}{dx}2^x = 2^x$$

$$\frac{d}{dx}\pi^x = \pi^x \cdot \ln \pi$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{3}$$



Fonte: http://www.ega-math.narod.ru/Bell/Euler.htm

Leonhard Paul Euler foi um matemático, nascido em Basileia, França, no dia 15 de abril de 1707 e tendo falecido em São Petersburgo a 18 de setembro de 1783, vítima de um acidente vascular cerebral. Euler foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte da sua vida na Rússia e na Alemanha.

Proposição

Se $0 < a \neq 1$, então

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

Em particular,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine a derivada das funções exponenciais a seguir

$$\frac{d}{dx}3^x = ? \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\right)^x = ? \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}\right)^x = ?$$

2. Determine a derivada das funções exponenciais a seguir:

$$\frac{d}{dx}\log_2 x = ? \qquad \frac{d}{dx}\log_{\sqrt{2}} x = ? \qquad \frac{d}{dx}\log_{\frac{2}{5}} x = ?$$

Regra da cadeia e aplicações

Considere a função h, definida por:

$h(x) = \sqrt{x^2+1}$

Como calcular a derivada de h em x?

Se considerarmos as funções f e g, definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$, então

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2+1} = h(x)$

ou seja, $(f \circ g)(x) = h(x)$. Assim, se você souber como calcular a derivada de $(f \circ g)(x)$,

então você também saberá derivar h(x). A seguir, você verá um teorema que indica uma regra útil para calcular derivadas de funções compostas.

Teorema (regra da cadeia)

Sejam f e g funções tais que, a composição $f \circ g$ está bem definida. Se g é derivável em x e f é derivável em g(x), então $f \circ g$ é derivável em x e, além disso, vale a fórmula

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \bullet g'(x).$$

Exemplo 2.5

Como você pode ter visto no início desta seção, se $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, então $h(x) = (f \circ g)(x)$, onde $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Note que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 2x$. Assim, segue do Teorema 2.1 que:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Portanto, $h' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Outra forma de visualizar a regra da cadeia

Fazendo $y = (f \circ g)(x)$ e $u = g(x)$, no Teorema 2.1, obtemos,

$$(f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ e } g'(x) = \frac{du}{dx}. \qquad (2.9)$$

Além disso, note que $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$, isto é, $y = f(u)$. Deste modo, temos que

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) = f'(g(x)) = \frac{dy}{du}. \qquad (2.10)$$

Do Teorema 2.1 e das igualdades (2.9) e (2.10), segue que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

que é outra forma de visualizar a regra da cadeia para uma função do tipo $y = f(x)$.

Esta notação foi introduzida pelo matemático alemão Gottfried Leibniz.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Se $y = \sqrt{1+x^4}$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução: Note que, fazendo $u = 1+x^4$, você obtém $y = \sqrt{u}$, de onde segue que:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1+x^4\right) = 0 + 4x^3 = 4x^3$$

assim, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}} \cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

2. Se $y = (7+x^{11})^{90}$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução: Considerando $u = 7+x^{11}$, você terá $y = u^{90}$. Assim, aplicando a Regra da cadeia, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 90u^{89}\left(0 + 11x^{10}\right) = 990x^{10}\left(7 + x^{11}\right)^{89}$$

Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = 990x^{10}\left(7+x^{11}\right)^{89}$.

3. Se $y = \text{sen}(2x)$, determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Fazendo $u = 2x$, você obterá $y = \text{sen } u$, daí:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

Portanto, segue que:

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos(2x)$$

4. Se $y = e^{\cos x}$, determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Considerando $u = \cos x$, você obtém $y = e^u$. Como $\frac{d}{du}e^u = e^u$ e $\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen } x$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (-\text{sen } x) = -e^{\cos x}\text{sen } x$$

Portanto, $\frac{dy}{dx} = -e^{\cos x}\text{sen } x$.

5. Se $y = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^3}\right)^7$, determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Usando a regra da cadeia, tem-se que:

$$\frac{dy}{dx} = 7\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^3}\right)^6 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^3}\right)$$

$$= 7\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{x^3\frac{d}{dx}\left(1-\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}x^3}{\left(x^3\right)^2}\right)$$

$$= 7\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{x^3\frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(1-\sqrt{x}\right)3x^2}{x^6}\right)$$

$$= 7\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{\frac{5}{2\sqrt{x}} - 2}{x^4}\right)$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Se $y = \sqrt{x^2+5}$, determine $\frac{dy}{dx}$.

2. Se $y = (x^7 - 2x)^3$, determine $\frac{dy}{dx}$.

3. Se $y = \cos(5x + 1)$, determine $\frac{dy}{dx}$.

4. Se $y = e^{\text{sen } x}$, determine $\frac{dy}{dx}$.

5. Seja $f(x) = \sqrt{x + \text{sen } x}$, determine $\frac{d}{dx}f(x)$.

6. Sabendo que $y = -\ln|\cos x|$. Mostre, usando a regra da cadeia, que a derivada de y em relação à variável x é $y' = \operatorname{tg} x$.

7. Sabendo que $y=\ln|\operatorname{sen} x|$. Mostre, usando a regra da cadeia, que a derivada de y em relação à variável x é $y' = \operatorname{cotg} x$.

8. Calcule a derivada de y em relação à variável x sabendo que $y=\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$.

9. Usando a regra da cadeia, determine as derivadas das funções a seguir:

a) $h(x)= \ln(x^4 + 2012)$, b) $y = \sqrt{\sqrt{3} + \cos t^2}$

10. Determine a equação da **reta tangente** ao gráfico, no ponto de abscissa igual a 1, da função h definida por $h(x) = \ln(x^4 + 2011)$.

11. Determine a equação da **reta normal** ao gráfico, no ponto de abscissa igual a 1, da função g definida por $g(x) = \sqrt{\sqrt{2} + \cos(t^2)}$.

12. Seja $f(x)=\operatorname{sen} x + e^{-x}$. Se $f^{(n)}(x)$ é a derivada de ordem n de f(x), determine:

$$\sum_{n=1}^{101} f^{(n)}(x)$$

13. Se $y = \left(\dfrac{7+\sqrt{x}}{x^5 - 1}\right)^7$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

Lembre-se de que a equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto (p; f(p)) é dada por y - f(p) = f'(p)(x - p) .

Lembre-se de que a equação da reta normal ao gráfico de uma função f no ponto (p; f(p)) é dada por $y - f(p) = -\dfrac{1}{f'(p)}(x-p)$

Derivação implícita

Suponha que $y = f(x)$, isto é, a variável y está em função da variável x. Agora considere as equações:

$$y^2 + xy = 1, \cos(xy) + x^2 y = 3x, y = \frac{x - y^2}{x^3}, \qquad (2.11)$$

essas equações têm algo em comum, em nenhuma delas podemos isolar a variável y em um membro da equação e deixar apenas a variável x no outro membro. Nestes casos dizemos que a variável y é dada implicitamente em função de x. As funções que têm essas propriedades são denominadas de **funções implícitas**.

Nessa seção, veremos um método de determinar derivada de funções implícitas, isto é, veremos como calcular $\frac{dy}{dx}$, onde y é dada implicitamente em função de x. O método que usaremos consiste em calcular a derivada em relação à variável x nos dois membros da equação e, em seguida, isolar $\frac{dy}{dx}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $y^2 + xy = x^3$.

Solução: Aplicando o operador de derivação $\frac{dy}{dx}$, nos dois membros da equação $y^2 + xy = x^3$, você obterá

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 + xy\right) = \frac{d}{dx}x^3. \qquad (2.12)$$

Pela regra da soma no primeiro membro tem-se que $\frac{d}{dx}\left(y^2 + xy\right) = \frac{d}{dx}y^2 + \frac{d}{dx}xy$, além disso, $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ Assim a equação 2.12, é equivalente a:

$$\frac{d}{dx}y^2 + \frac{d}{dx}(xy) = 3x^2. \qquad (2.13)$$

Aplicando a regra da cadeia, você obterá:

$$\frac{d}{dx}y^2 = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + x \cdot \frac{dy}{dx}$$

Com isto, podemos reescrever a equação 2.13 da seguinte forma:

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Colocando $\frac{dy}{dx}$. em evidência, obtém-se:

$$(2y + x)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Agora, dividindo os dois membros da equação por $2y + x$, resulta em

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{(2y + x)}$$

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $\cos(xy) + x^2y = 3x$.

Solução: Derivando ambos os membros em relação a x, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(xy) + x^2y\right) = \frac{d}{dx}(3x)$$

aplicando a regra da soma no primeiro membro, segue que:

$$\frac{d}{dx}\cos(xy) + \frac{d}{dx}(x^2y) = 3, \qquad (2.14)$$

Por outro lado, aplicando respectivamente a regra da cadeia e do produto, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\cos(xy) = -\operatorname{sen}(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = -\operatorname{sen}(xy) \cdot \left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= -y\operatorname{sen}(xy) - x\operatorname{sen}(xy) \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (2.15)$$

e

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = 2xy + x^2\frac{dy}{dx} \qquad (2.16)$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.16) na equação (2.14), obtemos:

$$-y\operatorname{sen}(xy) - x\operatorname{sen}(xy)\frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 3$$

ou ainda

$$-x\operatorname{sen}(xy)\frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy}{dx} = 3 + y\operatorname{sen}(xy) - 2xy$$

Agora, colocando $\frac{dy}{dx}$, em evidência, segue que:

$$\left(x^2 - x\ \operatorname{sen}(xy)\right)\frac{dy}{dx} = 3 - 2xy + y\operatorname{sen}(xy)$$

o que é equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy + y\ \operatorname{sen}(xy)}{x^2 - x\ \operatorname{sen} xy}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Use o método de derivação implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$, sabendo que: $xy = \text{sen}(xy)$.

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $y^3 + xy = x^2$.

3. Calcule $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $\text{sen}(xy) + x^3y = 5x$.

4. Sabendo que y=arc tg x, mostre que: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

Como y=arc tg x, então tg y=x. Derive a última equação pelo método de derivação implícita e finalize usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$.

5. Sabendo que y=arc cotg x, mostre que: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

Como y=arc cotg x, então cotg y=x. Derive a última equação pelo método de derivação implícita e finalize usando a identidade $\text{cosec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$.

6. Sabendo que y=arc sen x, mostre que: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Como y=arc sen x, então sen y=x. Derive a última equação pelo método de derivação implícita e finalize usando a identidade $\cos x = \sqrt{1-\text{sen}^2 x}$.

7. Sabendo que y=arc cos x, mostre que: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Como y=arc cos x, então cos y=x. Derive a última equação pelo método de derivação implícita e finalize usando a identidade $\text{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x}$.

8. Sabendo que y=arc sec x, mostre que: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Como y=arc sec x, então sec y=x. Derive a última equação pelo método de derivação implícita e finalize usando a identidade $\text{tg}\, x = \sqrt{\sec^2 x - 1}$.

9. Sabendo que y=arc cosec x, mostre que: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Como y=arc cosec x, então cosec y=x. Derive a última equação pelo método de derivação implícita e finalize usando a identidade $\text{cotg}\, x = \sqrt{\text{cosec}^2 x - 1}$.

10. Seja f(x)= arc cosec x + arc tg x, determine f'(x).

III APLICAÇÕES DE DERIVADAS E INTRODUÇÃO ÀS INTEGRAIS

Nesta unidade, você estudará algumas aplicações de derivadas em otimização e o conceito de integrais. A partir destas, verá como se define a área de uma região limitada por curva do tipo y=f(x). Neste sentido, veremos como o estudo de cálculo é importante para alunos de um curso de licenciatura em matemática.

Objetivos:

- Estudar e desenvolver problemas de otimizações que, aplicados diariamente, ajudarão a solucionar dificuldades que surgem no nosso cotidiano.
- Definir e calcular área de regiões limitadas por curvas do tipo y=f(x). utilizando o conceito de integrais.

Pontos críticos

No dia-a-dia das pessoas surgem com frequência problemas motivados pelas perguntas a seguir:

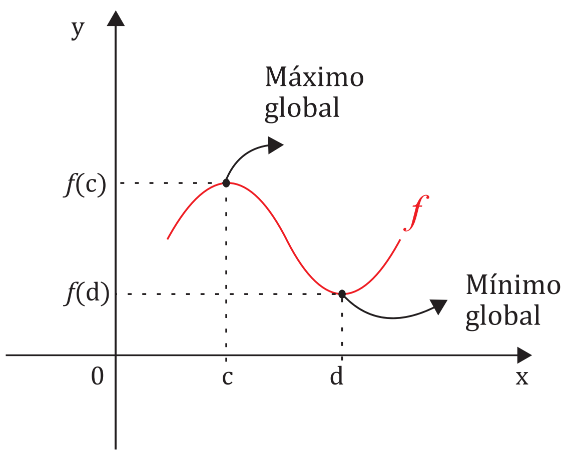
- Como realizar esta atividade com o menor gasto de material, tempo, energia etc?
- Como posso obter mais lucro, maior desempenho, mais espaço?

Para resolver esses problemas, muitos profissionais modelam tais situações por meio de uma função e analisam se há pontos onde tais funções atingem valores máximos ou mínimos. A seguir, você verá uma definição que deixará mais preciso o conceito de máximo e mínimo de funções.

Definição (máximo global e mínimo global)

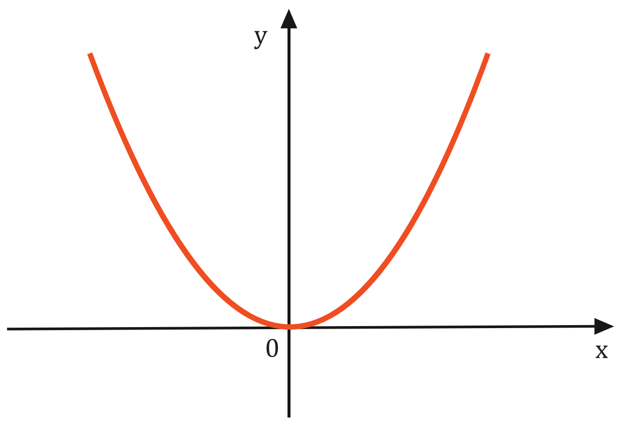
Uma função f tem máximo absoluto em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in Df$. Neste caso, o número f(c) é chamado valor máximo de f em Df . Analogamente, f tem mínimo absoluto em d, se $f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in Df$, e o número f(d) é chamado valor mínimo absoluto de f. Os valores máximos e mínimos absolutos de f são denominados de valores extremos de f.

Figura 21: Interpretação geométrica da definição de máximos e mínimos locais.



Exemplo 3.1 Seja f dada por $f(x)=x^2$. Como $x^2>0$, para todo $x \in R$, então $f(0)=0$ é o valor mínimo absoluto de f. A função f não possui máximo absoluto.

Figura 22: Gráfico da função $f(x)=x^2$



Há casos de funções f que não assumem valores máximos nem mínimos, contudo quando se analisa o comportamento de f(x), em parte do domínio percebe-se que há pontos que se destacam em relação aos demais. Esses casos sugerem uma definição de máximos e mínimos locais, como veremos a seguir.

Definição (máximo local e mínimo local)

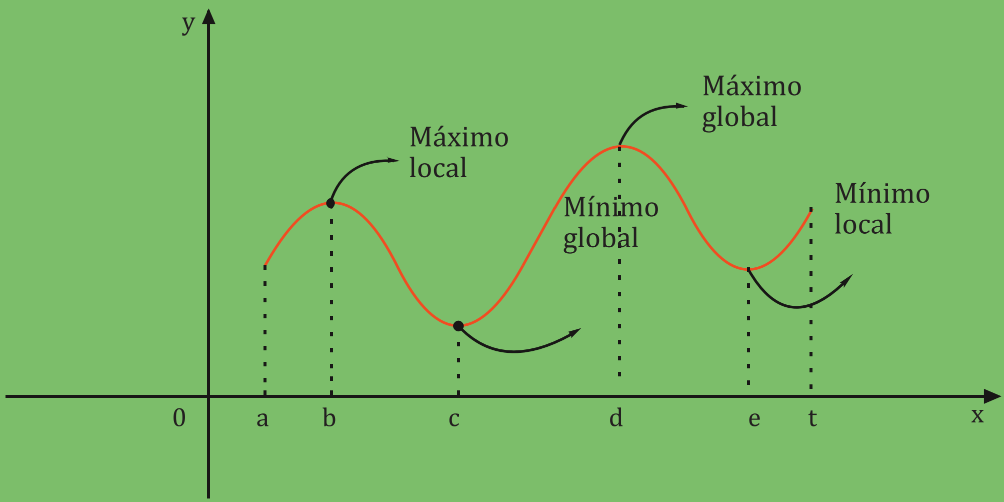
Seja f uma função. Dizemos que f atinge um máximo local em c se existe um intervalo I ∈ Df tal que

$$f(x) \leq f(c);\ \forall x \in I:$$

De modo análogo, dizemos que f atinge um mínimo local em d se existe um intervalo I ∈ Df tal que

$$f(x) \geq f(d);\ \forall x \in I.$$

Figura 23: Representação gráfica de máximos e mínimos locais.



Definição (máximo absoluto e mínimo local)

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado [a; b], então f assume um valor máximo absoluto M e um valor mínimo absoluto m em [a; b]. Isto é, existem c, d ∈ [a; b], tais que

$$f(c) = M = \max\{f(x);\ x \in [a;b]\},$$

$$f(d) = m = \min\{f(x);\ x \in [a;b]\}.$$

Teorema (Fermat)

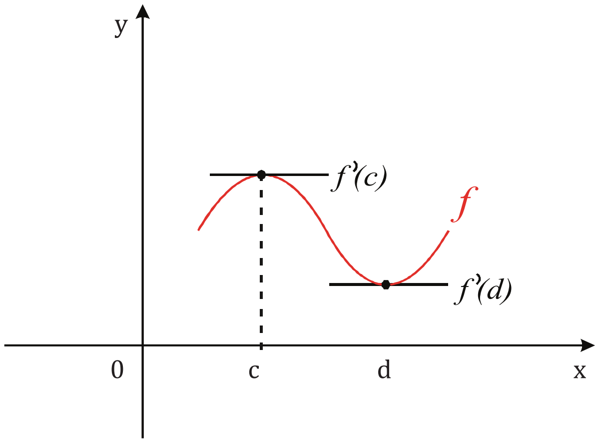
Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se f for derivável em c, então f' (c)=0.

Observação

i) Seja f(x)= |x|. Note que f(0) é mínimo local de f. Porém, f' (0) não existe, pois f não é derivável em 0;

ii) Considere a função dada por $f(x)=x^3$. Tem-se $f'(x)=3x^2$, de onde segue que f' (0)=0. Mas f(0) não é valor mínimo nem máximo de f.

Figura 24: Interpretação geométrica do teorema de Fermat.



Definição (ponto crítico)

Considere um intervalo $I \subset R$ e uma função $f: I \to R$. Dizemos que um ponto $c \in I$ é um ponto crítico de f, se vale uma das assertivas a seguir:

i) $f'(x)=0$;

ii) f não é derivável em c.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os pontos críticos da função f dada por $f(x)=x^2-6x+5$.

Uma função $f: I \to R$ que é crescente (ou decrescente) em I é denominada **monotônica.**

Solução: Para calcular os pontos críticos de f, calculamos a derivada de F e em seguida igualamos a zero. Então vejamos:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2-6x+5\right)=2x-6+0=2x-6$$

assim, $f'(x)=0$ se, e somente se

$$2x-6=0,$$

resolvendo essa última equação obtemos $x = 3$ como solução. Portanto, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = 3$, logo o único ponto crítico de f é 3.

Teste da derivada primeira para funções monótonas

Suponha que f é contínua em [a; b] e derivável em (a; b).

i) Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a; b)$, então f é crescente em [a; b];

ii) Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a; b)$, então f é decrescente em [a; b].

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os pontos críticos de $f(x) = x^3-12x-5$ e identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente.

Solução: Note que

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^3-12x-5\right)=3x^2-12$$

Assim, f' (x)=0 se, e somente se x = –2 ou x = 2. Com isto, –2 e 2 são os pontos críticos de f. Fazendo o estudo do sinal de f' (x), concluímos que:

f' (x)<0, se x ∈(–2; 2);

f' (x)=0, se x = –2 ou x = 2;

f' (x)>0, se x ∈(–∞,–2)U(2,+∞).

Com isto, –2 e 2 são os pontos críticos de f, e pelo Teste da Primeira Derivada para Funções Monótona, concluímos que:

f é crescente em (–∞,2) U(2,+∞) e;

f é decrescente no intervalo (–2; 2).

Teste da primeira derivada para extremos locais

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função contínua f, e que f seja derivável em algum intervalo contendo c, exceto possivelmente em c. Então:

i) Se f' é negativa à esquerda de c e positiva à direita de c, em uma vizinhança de c, então f atinge um mínimo local em c;

ii) Se f'é positiva à esquerda de c e negativa à direita de c, em uma vizinhança de c, então f atinge um máximo local em c;

iii) Se f'não muda de sinal em c então f(c) não é um extremo local de f.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os pontos críticos de f(x)=(x²–3)eˣ. Identifique os intervalos onde f é crescente ou decrescente. Determine os extremos locais e absolutos.

Solução: Inicialmente calculemos a derivada de f:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-3\right)e^x\right]=\frac{d}{dx}x^2-3\cdot e^x+\left(x^2-3\right)\frac{d}{dx}e^x=2xe^x+\left(x^2-3\right)e^x$$

Ou seja

$$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-3\right)$$

Agora, igualando f' (x) a zero, obtemos:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(x^2+2x-3\right)=0$$

Resolvendo a equação, obtemos como solução x = –3 ou x = 1. Portanto, os pontos críticos de f(x) são x = −3 e x = 1. Agora, fazendo o estudo do sinal de f'(x), você pode concluir que:

f' (x)=0 ⇔ x= −3 ou x = 1;

f' (x)<0 ⇔ x ∈ (–3; 1);

f' (x)>0 ⇔ x ∈ (–∞,3) U (1,+∞).

Com isto, f é decrescente no intervalo (–3,1) e é crescente nos intervalos (–∞,3) e (1,+∞). Além disso, visto que f' (x) é positivo à esquerda de –3 e, negativa à direita de –3, segue do teste da primeira derivada para extremos locais que f possui um mínimo local em –3. Temos ainda que f' (x) é negativa à esquerda de 1 e positiva à direita de 1, logo pelo teste da primeira derivada para extremos locais segue que f possui um máximo local em 1.

A seguir apresentaremos um teste prático para classificar um ponto crítico em ponto de máximo ou mínimo local. Veremos que esse teste será viável quando a função em questão admitir derivadas de 1ª e de 2ª ordem.

Teste da segunda derivada para extremos locais

Seja f uma função derivável num intervalo (a; b). Suponha que $c \in (a; b)$, $f'(c)=0$ e que existe $f''(c)$, então:

i) Se $f''(c)>0$, então f(c) é um mínimo relativo em (a; b);

ii) Se $f''(c)<0$, então f(c) é um máximo relativo em (a; b).

iii) Se $f''(c)=0$, nada podemos afirmar.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f uma função definida por $f(x)= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$. Determine os pontos críticos de f e use o teste da segunda derivada para classificá-los pontos de máximo ou mínimo locais.

Solução: Como $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$, então:

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

Assim, para determinarmos os pontos críticos de f, basta resolvermos a equação $f'(x)=0$. Então vejamos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Portanto, os pontos críticos de f são 1 e 3. Agora, calculando a segunda derivada de f obtemos:

$$f''(x) = 2x - 4,$$

de onde segue que:

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2<0, \text{ e}$$

$$f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2>0.$$

Portanto, como $f''(1) <0$, segue o teste da segunda derivada que 1 é um ponto de máximo local. Por outro lado, visto que $f''(3) >0$, segue que 3 é um ponto de mínimo local.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine os pontos críticos da função f dada por $f(x) = x^2-3x+9$.

2. Determine os pontos críticos de $f(x) = x^3+3x^2-24x+5$. Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e globais.

3. Seja $f:(0,2\pi)\to R$, a função definida por equação $f(x)=\text{sen } x$. Determine os pontos críticos de f e identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e absolutos.

4. Seja $f:(0,2\pi)\to R$, a função definida por equação $f(x)=\text{cotg } x$. Determine os pontos críticos de f e identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e absolutos.

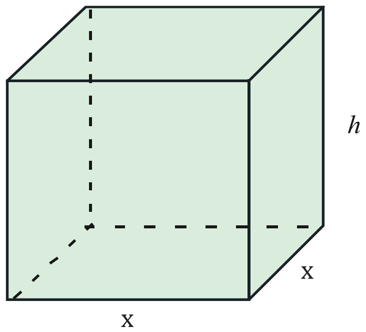
Aplicações de derivadas

Nesta seção serão expostos diversos tipos de problemas que podem ser resolvidos com as aplicações de derivadas. Problemas esses que podem ser encontrados na vida corriqueira, como minimizar custos, maximizar áreas, entre outros.

Aplicação 1

Deseja-se construir uma caixa de base quadrada com um volume L. Quais as dimensões da caixa que minimizam a área da mesma?

Figura 25: Caixa com base quadrada



Solução: Como, por hipótese, a caixa tem base quadrada, então denotando o volume da caixa pela letra V, temos

$$V=x^2 h.$$

Além disso, a caixa deve ter volume L. Assim,

$$x^2 h=L$$

daí tem-se:

$$h=\frac{L}{x^2}$$

Por outro lado, a área da superfície da caixa é dada por

$$A=2x^2+4xh.$$

Agora, substituindo h por $\frac{L}{x^2}$, obtemos:

$$A(x)=2x^2+\frac{4L}{x}$$

Pelo Teorema de Fermat, os pontos onde a área assume valor máximo e mínimo satisfazem a equação A'(x)=0. Note que:

$$A'(x)=4x+\left(-\frac{4L}{x^2}\right)$$

Com isto,

$$4x-\frac{4L}{x^2}=0$$

$$4x=\frac{4L}{x^2} \Leftrightarrow 4L=4x^3$$

Portanto, $L=x^3$, que implica em $x=\sqrt[3]{L}$. Agora, aplicaremos o teste da segunda derivada para verificar se $\sqrt[3]{L}$ é um ponto de mínimo. Note que:

$$A''(x) = 4 + \frac{8L}{x^3} > 0$$

para todo $x \in R$. Portanto, $x = \sqrt[3]{L}$ é ponto de mínimo. Por outro lado, temos:

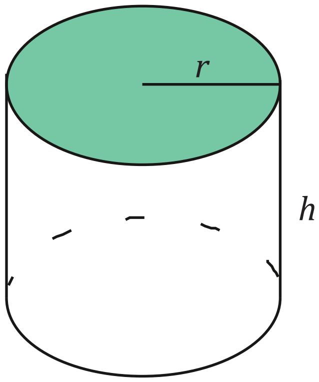
$$h = \frac{L}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$$

Logo, as dimensões da caixa que minimizam a área da mesma são $\sqrt[3]{L}$, $\sqrt[3]{L}$, $\sqrt[3]{L}$.

Aplicação 2

Um fabricante deseja dimensionar um recipiente com formato cilíndrico de volume K. Quais as dimensões desse recipiente para que o fabricante gaste o mínimo de material na fabricação?

Figura 26: Recipiente cilíndrico.



Solução:

O volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

Como, por hipótese, o volume do recipiente é K. Então:

$$\pi r^2 h = K \Rightarrow h = \frac{K}{\pi r^2}$$

A área da superfície cilíndrica é

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Substituindo h por $\frac{K}{\pi r^2}$ na expressão, obtemos a área em função do raio, isto é:

$$A(r) = 2\pi r \frac{K}{\pi r^2} + 2\pi r^2 \Rightarrow A(r) = \frac{2K}{r} + 2\pi r^2$$

Pelo teorema de Fermat, os pontos que minimizam a expressão $A(r) = \frac{2K}{r} + 2\pi r^2$, devem satisfazer a equação $A'(r) = 0$, ou seja

$$\frac{-2K}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow \frac{2K}{r^2} = 4\pi r$$

$$\Rightarrow 2K = 4\pi r^3 \Rightarrow K = 2\pi r^3$$

Agora, substituindo $K = 2\pi r^3$, na expressão $h = \frac{K}{\pi r^2}$, obtemos $h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$. Logo $h = 2r$, onde $r = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$.

Aplicando o teste da segunda derivada para verificar se os pontos são realmente de mínimo, temos:

$$A''(r) = \frac{4K}{r^3} + 4\pi r > 0$$

Logo, pelo teste da segunda derivada $r = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$ é ponto de mínimo. Portanto, para que o gasto de material na construção da lata seja mínimo, o construtor deverá usar como dimensões $r = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$ e $h = 2r$.

Aplicação 3

Uma caixa sem tampa será construída recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha quadrada cuja medida do lado é L cm, e dobrando-se os lados para cima. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha capacidade máxima?

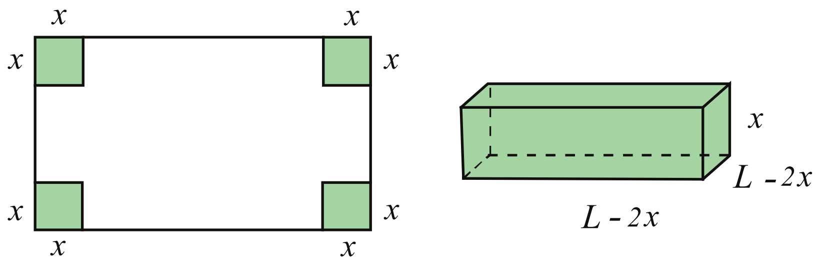


Figura 27: Caixa construída cortando-se quadrados dos cantos

Solução:

Como mostra a figura, os quadrados dos cantos têm x cm de lado. O volume total da caixa vai ser dado por:

$$V(x)=x(L-2x)^2=L^2x-4Lx^2+4x^3$$

Note que:

$$V'(x)=L^2-8Lx+12x^2$$

Com isto,

$$V'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{L}{2} \text{ ou } x=\frac{L}{6}$$

Se $x=\frac{L}{2}$ não dá pra formar a caixa, logo esta possibilidade está descartada. Usaremos o teste da segunda derivada para verificar se $x=\frac{L}{6}$ é ponto de máximo da função volume. Calculando a segunda derivada de V, obtemos:

$$V''(x)=-8L+24x$$

Daí, $V''\left(\frac{L}{6}\right)=-4L<0$, assim, pelo teste da segunda derivada, cortando quadrados de lados $x=\frac{L}{6}$ você obterá uma caixa de volume máximo.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Deseja-se construir uma caixa de base quadrada com um volume 300 ml. Quais as dimensões da caixa que minimizam a área da mesma?

2. Um fabricante deseja dimensionar um recipiente com formato cilíndrico de volume 350 ml. Quais as dimensões desse recipiente para que o fabricante gaste o mínimo de material na fabricação?

3. Uma caixa sem tampa será construída recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha quadrada cuja medida do lado é 50 cm, e dobrando-se os lados para cima. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha capacidade máxima?

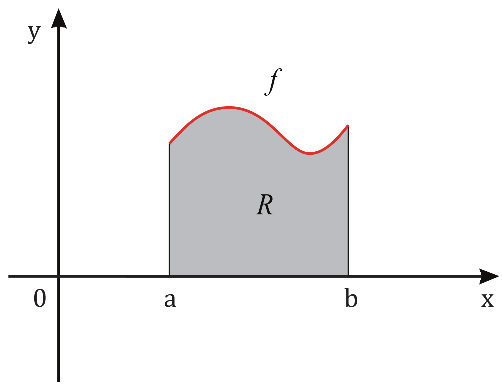
4. Supondo uma empresa com uma receita proveniente da venda de x itens, dada por $r(x)=3x$ e com um custo de produção dado por $C(x)=x^3-6x^2+5x$, onde x representa milhares de unidades. Encontre o nível de produção que maximiza o lucro dessa empresa.

5. Uma empresa fabrica fraldas descartáveis. Estima-se que o custo total c(x) dado em reais para fabricar x pacotes fraldas é dado pela equação $c(x)=150+9x+\frac{x^2}{90}$ e que em uma semana o rendimento total em reais é dado por $r(x)=75x+\frac{x^2}{750}$ onde x é o número de pacotes de fraldas vendidas. Quantos pacotes de fraldas terão que ser fabricados em uma semana para obter um lucro máximo, e qual é esse lucro máximo?

Introdução a integrais de funções

Como calcular a área da região R abaixo do gráfico da função f na figura a seguir?

Figura 28: região abaixo da curva y=f(x) e limitada pelo eixo x.



Na seção abaixo, iniciaremos o estudo de uma ferramenta que tem inúmeras aplicações na matemática. Essa ferramenta é conhecida como integral. Aqui estudaremos as integrais de funções de uma variável real. Aplicaremos essa ferramenta para calcular áreas abaixo de curvas dadas por gráficos de funções, como no caso da Figura 28.

Primitivas e integrais indefinidas

Seja f uma função. Dizemos que uma outra função F é uma primitiva de f se

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in D(f)$.

Exemplo 3.2

A função F dada por $F(x)=x^2$ é uma primitiva para função dada por $f(x)=2x$. De fato, note que:

$$F(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x = f(x)$$

Exemplo 3.3

A função $F(x)=x^3+3x^2-1$ é uma primitiva para função dada por $f(x)=3x^2+6x$. Com efeito, veja que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 - 1) = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 0 = 3x^2 + 6x = f(x)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja F uma primitiva de f. Seja k um número real e G uma função definida por $G(x) = F(x) + k$. Mostre que $G'(x) = f(x)$ (isto é, G também é uma primitiva para f).

Solução: Como, por hipótese, F é uma primitiva para f, então

$$F'(x) = f(x).$$

Assim,

$$G'(x)=\frac{d}{dx}(F(x)+k)=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}k=F(x)+0=f(x)$$

Portanto G' (x)=f(x).

Proposição 3.1

Se F e G são duas primitivas para uma função f, isto é, se

$$F'(x) = G'(x)=f(x)$$

para todo $x \in D(f)$, então existe uma constante k tal que

$$G(x)=F(x)+k.$$

Definição

Seja f: I→ R uma função. O conjunto de todas as primitivas de f é denominado de Integral Indefinida de f é denotado pelo símbolo

$$\int f(x)dx$$

Segue imediatamente da Proposição 3.1 que se F é uma primitiva de f então

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim, para calcular uma integral indefinida de uma função f basta encontrar uma primitiva de f e acrescentar uma constante genérica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f a função dada pela equação f(x) = 2x+1. Determine a integral indefinida de f, isto é determine

$$\int (2x+1)dx.$$

Solução: Note que a função dada por $F(x) = x^2+x$ é uma primitiva para f(x) = 2x+1, pois

$$F'(x)=\frac{d}{dx}(x^2+x)=\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}x=2x+1=f(x)$$

Assim, a integral indefinida de f é F(x) + C, ou seja

$$\int (2x+1)dx=x^2+x+C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

2. Determine

$$\int \cos x \ dx.$$

Solução: Sabemos que $\frac{d}{dx}$ senx = cos x, assim a função F(x) = sen x é uma primitiva para f(x) = cos x. Daí, obtemos que

$$\int \cos x \ dx = \operatorname{sen} x+C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Integrais indefinidas imediatas

No que segue, estabeleceremos uma lista de integrais indefinidas imediatas. Elas serão úteis para calcular integrais que à primeira vista não são triviais.

Note que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{(n+1)\cdot x^{n+1-1}}{n+1}=x^n, \forall n \neq -1$$

Daí,

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \forall n \neq -1 \qquad (3.1)$$

onde C é uma constante arbitrária. Ou seja, a integral de uma potência de x cujo expoente é um número real n diferente de –1 é uma fração cujo numerador é ainda uma potência de x, porém com expoente n+1 e o denominador também é n+1, acrescida de uma constante arbitrária C.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule

$$\int x^2\, dx,\ \int x^3\, dx,\ \int x^{-2}\, dx,\ \int x^{-3}\, dx,$$

Solução:

$$\int x^2 dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+C=\frac{x^3}{3}+C,$$

$$\int x^3 dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C,$$

$$\int x^{-2} dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-x^{-1}+C,$$

$$\int x^{-3} dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{x^{-2}}{2}+C.$$

Vimos como calcular a integral indefinida de x^n com $n \neq -1$. Observe que se substituíssemos $n = -1$ na fórmula dada em (3.1) teríamos zero no denominador, o que é uma indeterminação matemática, logo a fórmula (3.1) não faz sentido para $n = -1$.

Veremos agora quem é a integral indefinida de x^{-1}.

Note que

$$x^{-1}=\frac{1}{x}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}, \forall x>0$$

assim, F(x)= ln x é uma primitiva para $f(x)=\frac{1}{x}$, se daí

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

Se x admite valores negativos, então verifique que

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Também sabemos que

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

ou seja, uma primitiva para e^x é ela mesma. Com isto, concluímos que

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Como vimos no Exercício Resolvido 2 da página 70, temos que

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

por outro lado,

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = -\frac{d}{dx}\cos x = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

de onde segue que

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Mostre que a função dada por $F(x)=2+x^2+4x^5$ é uma primitiva para função dada por $f(x)=2x+20x^4$.

2. Calcule

$$\int x^4 dx, \int x^7 dx, \int x^{-4} dx, \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

Propriedades das integrais indefinidas

Se f e g são duas funções definidas em um intervalo I, então vale a seguinte regra para integral da soma:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Além disso, se k é uma constante, então

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule as integrais a seguir

$$\int (\cos x + \operatorname{sen} x \, dx, \int 10 \cdot \cos x \, dx).$$

Solução: Aplicando a regra da soma, obtemos

$$\int (\cos x + \operatorname{sen} x \, dx) = \int \cos x \; dx + \int \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \operatorname{sen} x + (-\cos x) + C$$

$$= \operatorname{sen} x - \cos x + C$$

Agora, aplicando a regra da constante, segue que

$$\int 10 \cdot \cos x \, dx = 10 \int \cos x \, dx$$
$$= 10 \operatorname{sen} x + C$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as integrais a seguir

$$\int \left(3e^x + 2x\right) dx, \qquad \int \left(\frac{10}{x} + \sec^2 x\right) dx.$$

2. Calcule as integrais a seguir

$$\int (2e^x - 3x) dx, \qquad \int \left(\frac{2}{x} - \operatorname{cosec}^2 x\right) dx.$$

3. Calcule as integrais indefinidas a seguir

$$\int \left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) dx, \qquad \int 5 \cdot \operatorname{sen} x \, dx$$

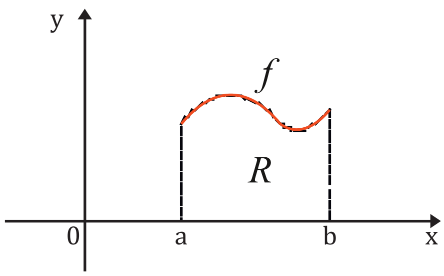
Cálculo de área abaixo de gráficos de funções

Seja f uma função contínua definida em um intervalo [a; b] com f(x) ≥ 0 para todo x ∈[a; b]. A área da região R abaixo do gráfico de f limitada pelo eixo das abscissas e pelas retas x= a e x = b é chamada de integral definida de f de a até b e é denotada pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) dx$$

Na figura a seguir

Figura 29: Região abaixo da curva y=f(x) e limitada pelo eixo x.



a área da região R é dada pela integral definida de f de a até b, isto é:

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx \qquad (1.2)$$

Teorema (Teorema fundamental do cálculo)

Seja f uma função contínua definida em um intervalo [a; b] e F é uma primitiva defem (a; b), então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

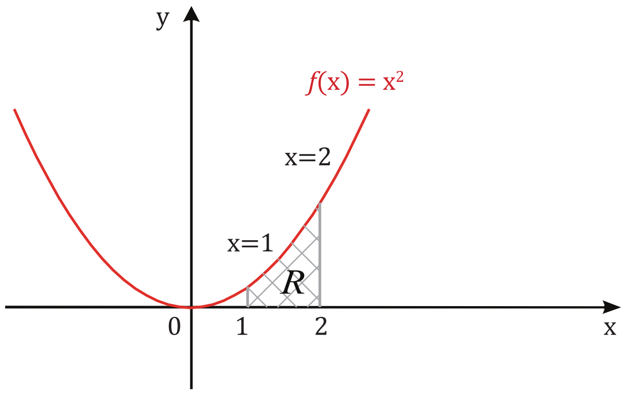
O Teorema fundamental do cálculo, juntamente com a igualdade (1.2), nos diz que se F é uma primitiva de fem (a; b) então a área da região R abaixo do gráfico de f limitada pelo eixo das abscissas e pelas retas x = a e x = b é dada por F(b) − F(a). Ou seja,

$$A(R)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja f a função dada por $f(x) = x^2$. Determine a área da região R abaixo do gráfico de fe limitada pelas retas x = 1 e x = 2.

Figura 30: Região abaixo da curva $y=x^2$ e limitada pelo intervalo (1,2) do eixo x.



Solução: Inicialmente, devemos determinar uma primitiva para $f(x) = x^2$. Note que

$$\int x^2dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+C=\frac{x^3}{3}+C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Considerando C = 0, obtemos a primitiva $F(x) = \frac{x^3}{3}$ para a função f.

Agora, para determinar a área da região R usaremos a fórmula A(R)=F(2)–F(1). Daí,

$$A(R)=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}\text{ u.a.}$$

Portanto, a área da região R é $\frac{7}{3}$ u.a.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule as integrais a seguir

a) $\int_0^1 (3e^x+2x)dx$ b) $\int_0^1 \frac{10}{x}+\sec^2 x\, dx$

2. Calcule as integrais a seguir

a) $\int_{-2}^2 e^x-3x\, dx$ b) $\int_1^e \frac{2}{x}-\operatorname{cosec}^2 x\, dx$

3. Calcule as integrais indefinidas a seguir

a) $\int_0^\pi x^2+\operatorname{sen} x\, dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} 5\cdot\operatorname{sen} x\, dx$

4. Seja f a função dada por $f(x) = x^4$. Determine a área da região R abaixo do gráfico de fe limitada pelas retas x = 1 e x = 2.

Técnicas de integração

Seja f: [a; b] → R uma função contínua. O Teorema fundamental do cálculo nos diz que se F: [a; b]→R é uma primitiva de f, isto é, se

$$F'(x)= f(x),$$

para todo $x \in (a; b)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Deste modo, calcular a integral definida de uma função reduz-se a encontrar uma primitiva para tal função. No entanto, determinar uma primitiva nem sempre é uma tarefa fácil. Por exemplo, calcular as integrais

$$\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1-\frac{x^3}{3}}dx \text{ e } \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx.$$

pode resultar em muito trabalho. Porém, existem técnicas para o cálculo de integrais que, em determinadas situações, podem facilitar bastante o trabalho. De agora em diante, trabalharemos para estabelecer uma das mais usuais. Vejamos:

Suponha que uma integral possa ser escrita sob a forma

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx,$$

e que F seja um primitiva para f, isto é, F' = f. Então, pela Regra da cadeia, tem-se que

$$(F \circ g)' = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

de onde segue que $F \circ g$ é uma primitiva para $(f \circ g) \cdot g'$, daí

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx) = (F \circ g)(x)+C=F(g(x))+C, \qquad (1.3)$$

Fazendo a substituição (ou mudança de variável) $u = g(x)$, obtemos

$$F(g(x))+C = F(u)+C = \int f(u)\, du.) \qquad (1.4)$$

Usando as igualdades (1.3) e (1.4), concluímos que

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx)=\int f(u)\, du$$

Com isto, demonstramos o seguinte resultado:

Proposição

Se g é uma função derivável em um intervalo I e f é uma função definida em g(I), então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du,$$

onde $u = g(x)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule $\int x^2\sqrt{1-\frac{x^3}{3}}dx$.

Solução: Considerando a função g, definida por $g(x)=1-\frac{x^3}{3}$, obtemos g'(x) = $-x^2$. Deste modo, obtemos

$$\int x^2\sqrt{1-\frac{x^3}{3}}dx=-\int\sqrt{g(x)}g'(x)dx \qquad (3.5)$$

Fazendo a substituição u = g(x), segue da Proposição 1.2 que

$$\int\sqrt{g(x)}g'(x)dx=\int\sqrt{u}du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}g(x)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\left(1-\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+C \qquad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6), concluímos que

$$\int x^2\sqrt{1-\frac{x^3}{3}}dx=-\frac{2}{3}\left(1-\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+C,$$

onde C é uma constante real arbitrária.

2. Calcule a integral

$$\int \cos x \cdot e^{\text{senx}}\, dx.$$

Solução: Observe que se você fizer a substituição u = sen x, você obterá $\frac{du}{dx}$ = cos x, ou ainda du = cos x dx. Com isto,

$$\int \cos x \cdot e^{\text{senx}}\, dx = \int e^u\, du = e^u+C=e^{\text{sen}\,x}+C.$$

Portanto,

$$\int \cos x \cdot e^{\text{sen}\,x}\, dx = e^{\text{sen}\,x}+C,$$

Onde C é uma constante arbitrária.

3. Determine

$$\int \text{tg}\, x\, dx.$$

Solução: Sabemos que $\text{tg}\, x=\frac{\text{senx}}{\cos x}$, com isto

$$\int \text{tg}\, x\, dx=\int\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}dx \qquad (3.7)$$

Assim, fazendo a substituição u = cos x, temos du = –sen x dx, ou ainda sen x dx = –du. Com isto,

$$\int\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}dx=\int\frac{-du}{u}=-\int\frac{1}{u}du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C \qquad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8), segue que

$$\int \text{tg}\, x\, dx=-\ln|\cos x|+C$$

onde C é uma constante arbitrária.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, Luiz. Hamilton. **Um Curso de Cálculo**, vol.1, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 635p.

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B., **Cálculo A, funções, limites, derivação e integração**, 6a ed. São Paulo: PEARSON, 2007.

LIMA, E. L., **Curso de Análise**, vol.1, 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

LOUIS L. **O cálculo com geometria analítica**. Vol. 2. 3ª ed. São Paulo: HARBRA ltda 1990. 1174p.

MUNEM, M. A. e FOULIS, D. J. **Cálculo**, vol.1. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

SIMMONS. **Cálculo com geometria Analítica**. Vol. 2. 1ª ed. Makron books 1988.

STEWART, J. **Cálculo**, vol.1, trad 6ª ed. São Paulo: CENGAGE, 2010.1077p.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, vol.1, 11ª ed. São Paulo: PEARSON, 2009.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

EDITORA

EdUFERSA - Editora da Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Campus Leste da UFERSA
Av. Francisco Mota, 572 - Bairro Costa e Silva
Mossoró-RN | CEP: 59.625-900
edufersa@ufersa.edu.br

IMPRESSÃO

Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME
Rua Capitão Lima, 170 - Santo Amaro
Recife-PE | CEP: 50040-080
Telefone: (91) 3061 6411

COMPOSIÇÃO

Formato: 21cm x 29,7cm
Capa: Couchê, plastificada, alceado e grampeado
Papel: Couchê liso
Número de páginas: 88
Tiragem: 400

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-63145-36-9
9 788563 145369

UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ÁRIDO

NEaD
núcleo de educação a distância

PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Ministério da Educação

CAPES

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA