



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E  
TECNOLOGIAS

PRODUTO EDUCACIONAL

**DINAMICIDADE E TAXA DE VARIAÇÃO DE  
FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL: um  
GeoGebraBook.**

**RENATA FEUSER SILVEIRA**

JOINVILLE, SC  
2017

**Instituição de Ensino:** UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA  
**Programa:** ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS  
**Nível:** MESTRADO PROFISSIONAL  
**Área de Concentração:** Ensino de Matemática  
**Linha de Pesquisa:** Tecnologias Educacionais

**Título:** Dinamicidade e taxa de variação de funções reais de uma variável: um GeoGebraBook

**Autora:** Renata Feuser Silveira

**Orientadora:** Ivanete Zuchi Siple

**Data (defesa):** 03/07/2017

**Produto Educacional:** GeoGebraBook

**Nível de ensino:** Ensino Superior

**Área de Conhecimento:** Matemática

**Tema:** Derivadas e taxa de variação de funções reais de uma variável

**Resumo do Produto Educacional:**

O produto educacional é um GeoGebraBook, que permite criar uma espécie de livro on-line no GeoGebra, contendo objetos de aprendizagem de derivadas e taxa de variação de funções reais de uma variável com o objetivo de propor uma abordagem dinâmica para esses conteúdos.

**Biblioteca Universitária UDESC:** <http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria>

**Publicação Associada:** [Dinamicidade no ensino de Cálculo: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra]

**URL:** <http://www.cct.udesc.br/?id=1636>

| Arquivo     | *Descrição     | Formato   |                  |
|-------------|----------------|-----------|------------------|
| 0012017.pdf | Texto completo | Adobe PDF | Visualizar/abrir |

**Licença de uso:**



Esse trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

## APRESENTAÇÃO

Caro Colega Professor(a),

Esse produto educacional <sup>1</sup> é fruto do desenvolvimento da pesquisa intitulada “Dinamicidade no Ensino de Cálculo: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra” <sup>2</sup> realizada no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade Estado de Santa Catarina (UDESC), sob a orientação da Profa. Dra. Ivanete Zuchi Siple.

O objetivo desse produto educacional é oferecer uma proposta dinâmica para ensinar cálculo, tendo como alvo Professores de Cálculo I e Professores de Matemática que queiram inserir noções de Cálculo para o Ensino Médio.

O objetivo desse produto educacional é propor uma abordagem dinâmica para o ensino de taxa de variação de funções reais de uma variável real mediada pelas potencialidades do software GeoGebra.

O produto educacional é um GeoGebraBook que permite criar uma espécie de livro on-line no próprio GeoGebra<sup>3</sup> possibilitando inserir imagens, textos, objetos de aprendizagem (OAs <sup>4</sup>) desenvolvidos no GeoGebra, slides, vídeos, links, questionários e gifs. A implementação deste GeoGebraBook foi realizada por Raiane Lemke<sup>5</sup>.

Nesse GeoGebraBook, denominado “Dinamicidade e taxa de variação de Funções reais de uma variável” <sup>6</sup> são abordados alguns tópicos de derivada explorando as potencialidades de alguns registros de representação, de simulação e de interações dinâmicas presentes no GeoGebra.

O GeoGebraBook é disponibilizado on-line e para ter acesso basta clicar no link do produto educacional ou pesquisar pelo nome do produto no próprio site do GeoGebra. Assim, o professor/usuário ao acessar o livro encontrará uma página inicial e poderá se direcionar ao

---

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://ggbm.at/aZvy94me>> Acesso em: 03 jun. 2017.

<sup>2</sup> Título da dissertação, ou seja, é um documento a parte, para mais detalhes sobre o desenvolvimento dessa pesquisa e sua fundamentação teórica, basta acessar a dissertação.

<sup>3</sup> É um aplicativo de geometria dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 31 mai. 2017.

<sup>4</sup> “Qualquer recurso como maquetes, imagens, fotos, vídeos, animações, simulações, arquivos de texto, páginas de internet, quando utilizados como recursos que auxiliam processos de ensino e aprendizagem (SANTOS, 2007).

<sup>5</sup> Mestranda do PPGECDT que implementou meu GeoGebraBook.

<sup>6</sup> Dentro do GeoGebraBook abreviamos parte do título, funções reais de uma variável (F1V), devido a limitação de caracteres.

capítulo desejado, também, poderá salvar os arquivos e utilizá-los de modo off-line. A forma de utilizar/explorar os recursos não precisa ser realizada de maneira linear, o usuário pode escolher tal forma em função dos seus respectivos interesse e objetivo. Em termos de implementação, o produto foi apresentado em 12 capítulos:

Capítulo 1 – Apresentação.

Capítulo 2 – Derivadas: introdução.

Capítulo 3 – Derivadas: interpretação Geométrica.

Capítulo 4 – Taxa de variação.

Capítulo 5 – Taxa de variação – esfera.

Capítulo 6 – Taxa de variação – cilindro.

Capítulo 7 – Taxa de variação – cone.

Capítulo 8 – Taxa de variação – escada.

Capítulo 9 – Conexões com o Ensino Médio.

Capítulo 10 – Sugestão de avaliação.

Capítulo 11 – Manual.

Capítulo 12 – Deixe sua opinião.

A seguir será explicada a disposição de cada capítulo dando destaque ao capítulo 5 – taxa de variação: esfera, visto que, a proposta dos outros capítulos envolvendo os objetos de aprendizagem cilindro e cone são similares.

Espera-se que esse material possa trazer contribuições para a sua prática docente.

Renata Feuser Silveira

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Tela inicial do GeoGebraBook: “Dinamicidade e taxa de variação de F1V” ..... | 7  |
| Figura 2 – Opção de compartilhar .....  | 8  |
| Figura 3 – Ícone de detalhes .....  | 8  |
| Figura 4 – Acesso para baixar materiais.....  | 9  |
| Figura 5 – Destaque das setas.....  | 9  |
| Figura 6 – Itens do capítulo da apresentação.....                                       | 10 |
| Figura 7 – Introdução a derivadas .....   | 12 |
| Figura 8 – Calculadora de derivadas .....   | 12 |
| Figura 9 – Interpretação geométrica da derivada .....                                   | 13 |
| Figura 10 – OA “Reta tangente”.....   | 13 |
| Figura 11 – Capítulo Taxa de variação.....  | 14 |
| Figura 12 – OA “Taxa média de variação” .....   | 15 |
| Figura 13 – OA “Taxa instantânea de variação” .....                                     | 15 |
| Figura 14 – Capítulo de taxa de variação: esfera.....                                   | 16 |
| Figura 15 – Imagens de balões esféricos .....   | 17 |
| Figura 16 – Mais imagens de balões esféricos .....                                      | 17 |
| Figura 17 – Opções de gráfico $V(t)$ na situação do balão esférico.....                 | 18 |
| Figura 18 – OA “balão esférico”: tela inicial .....                                     | 19 |
| Figura 19 – OA “balão Esférico” no instante $t=12s$ . ....                              | 19 |
| Figura 20 – OA “balão esférico” com a senha habilitada.....                             | 20 |
| Figura 21 – Capítulo de taxa de variação: cilindro.....                                 | 21 |
| Figura 22 – Imagens de cilindros .....  | 22 |
| Figura 23– Opções de gráfico $V(t)$ na situação cilindro.....                           | 23 |
| Figura 24 – OA “cilindro” .....   | 24 |
| Figura 25 – OA “cone” .....   | 25 |
| Figura 26 – Capítulo taxa de variação: escada .....                                     | 26 |
| Figura 27 – OA “escada” .....   | 27 |
| Figura 28 – Capítulo conexões no Ensino Médio .....                                     | 28 |
| Figura 29 – Capítulo conexões com o Ensino Médio: continuação .....                     | 28 |
| Figura 30 – OA “Número do calçado .....   | 29 |
| Figura 31 – Tiro de meta (ponto de máximo).....   | 30 |
| Figura 32 – OA volume da esfera.....  | 31 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 33 – Capítulo Sugestões de avaliação ..... | 31 |
| Figura 34 – Capítulo “deixe sua opinião” .....    | 32 |

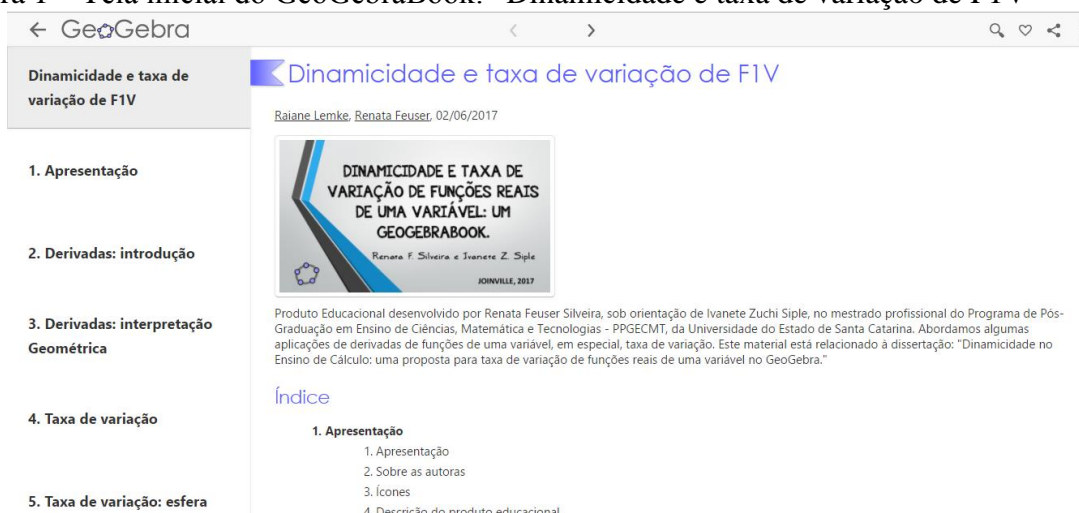
## **LISTA DE QUADROS**

|   |    |
|---|----|
| Quadro 1 – Alguns ícones da página inicial .....              | 7  |
| Quadro 2 – Explicação dos ícones do produto educacional ..... | 10 |

## INFORMAÇÕES

Clicando no link<sup>7</sup> do produto educacional, na tela inicial, aparecerá o título, uma capa, uma sucinta descrição e o índice do mesmo, conforme ilustra a Figura 1:







Figura 1 – Tela inicial do GeoGebraBook: “Dinamicidade e taxa de variação de F1V”



Fonte: Produção própria, 2017.

Os ícones que aparecem no canto superior da página são explicados no quadro 1:

Quadro 1 – Alguns ícones da página inicial

| Ícone   | Explicação  |
|---|---|
|  | Clicando na lupa, o usuário será direcionado para a página de busca de materiais do GeoGebra.                     |
|  | Clicando no coração, o usuário estará favoritando materiais.  |
|  | Serve para compartilhar materiais (Figura 2).   |
|  | Exibe mais detalhes do material e outras opções, por exemplo, compartilhar e baixar materiais (Figura 3).         |
|  | Este ícone esconde ou exhibe o sumário.   |
|  | Ao clicar em GeoGebra, o usuário será direcionado a página inicial do GeoGebra ou à página inicial do seu perfil. |

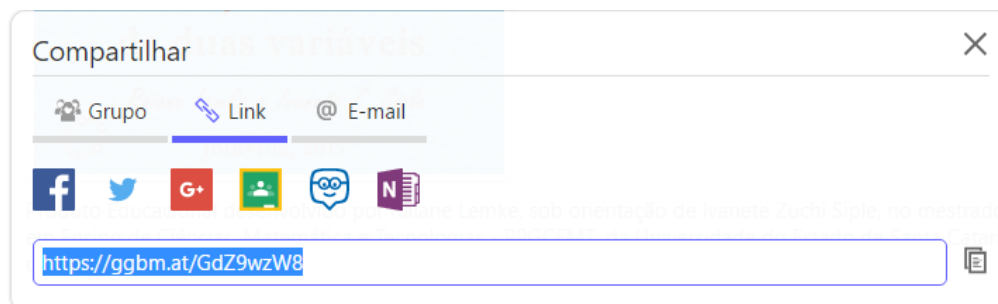
Fonte: Produção própria, 2017.

<sup>7</sup> Disponível em: <<https://ggbm.at/aZvy94me>> Acesso em: 03 jun. 2017.



A Figura 2 mostra as opções de compartilhar em um grupo do GeoGebra, compartilhar em redes sociais e por e-mail.

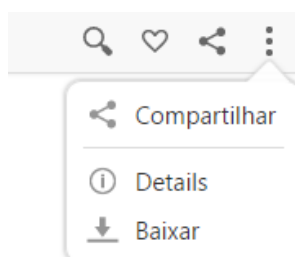
Figura 2 – Opção de compartilhar



Fonte: Produção própria, 2017.

Ao clicar em detalhes é possível visualizar ou escrever comentários sobre os materiais, podem ser lidas as palavras-chave e visto o número de visitas do material, conforme ilustração da Figura 3.

Figura 3 – Ícone de detalhes

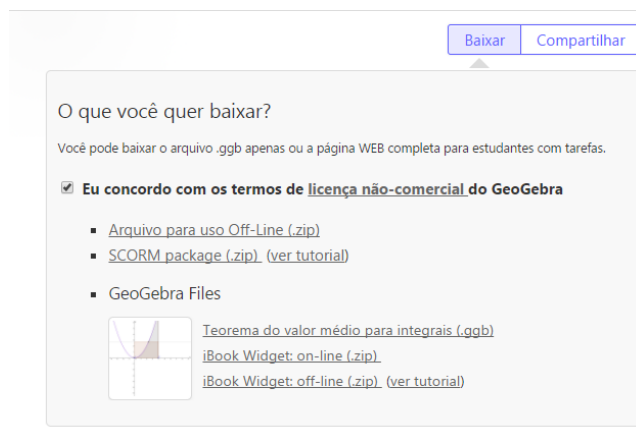


Fonte: Produção própria, 2017.

Caso o usuário queira poderá baixar materiais do GeoGebra, basta concordar com os termos de licença não-comercial. Assim, o material escolhido será salvo em um arquivo de formato zipado gerando um arquivo em html<sup>8</sup>. A Figura 4 mostra o campo que o usuário deverá acessar para baixar os materiais.

<sup>8</sup> Hyper Text Markup Language.

Figura 4 – Acesso para baixar materiais



Fonte: Produção própria, 2017.

As setas destacadas em vermelho (vide Figura 5) direcionam à seção anterior e à próxima seção.

Figura 5 – Destaque das setas



Fonte: Produção própria, 2017.

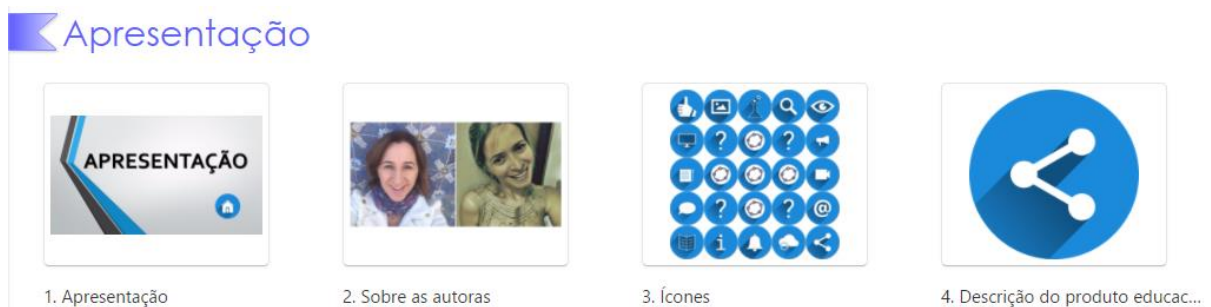
Tendo uma conta no GeoGebra qualquer professor/usuário poderá criar um GeoGebraBook, como já relatado na apresentação, ele permite que você organize seus próprios *applets* do GeoGebra e/ou seus materiais em livros on-line dinâmicos e interativos para aprendizagem e ensino em diversos níveis de ensino. A seguir tem-se a descrição, realizada em capítulos, desse GeoGebraBook.

## CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO

O capítulo 1 descreve uma breve apresentação do produto educacional, incluindo a autoria, a explicação dos ícones utilizados e a descrição desse produto educacional, em pdf, disponível no próprio produto.

A Figura 6 ilustra a tela inicial do capítulo de apresentação no GeoGebraBook. O professor/usuário pode clicar no ícone que quiser, ou seguir a sequência proposta.

Figura 6 – Itens do capítulo da apresentação











Fonte: Produção própria, 2017.

No quadro 2 apresenta-se alguns dos ícones do produto educacional (primeira coluna) e a explicação dos mesmos (segunda coluna).

Quadro 2 – Explicação dos ícones do produto educacional

| Ícone | Explicação   |
|-------|--|
|       | <b>Objetivos:</b> apresenta os objetivos de cada capítulo.   |
|       | <b>Definições:</b> traz o conteúdo matemático (definições, conceitos e exemplos).  |
|       | <b>Exercícios:</b> atividades propostas para serem resolvidas no ambiente do lápis e do papel. Têm-se algumas questões de múltipla escolha que são corrigidas pelo próprio GeoGebraBook. As questões abertas não têm um feedback automático. Em alguns casos a sugestão é resolver primeiro no lápis e papel, para depois confrontar com o ambiente computacional. |
|       | <b>Perguntas:</b> indica que há perguntas ou questionamentos. Sugere-se que o professor faça essas perguntas para a sua turma e que dê um tempo para pensarem nas respostas. O objetivo é introduzir ou discutir o assunto em questão e despertar o interesse.   |
|       | <b>Imagens:</b> imagens para serem observadas. São imagens que vão estar relacionadas à um determinado conteúdo matemático.  |

|  |  |
|--|--|
|   | <b>Para saber mais:</b> indica a opção de saber mais sobre o assunto em questão. Fica a critério de o professor usar isso em sala de aula ou indicar para os alunos olharem depois.        |
|   | <b>Vídeos:</b> vídeos sobre o conteúdo, ou sobre curiosidades.   |
|   | <b>Situação problema:</b> indica sugestão de situação problema para ser resolvida em classe ou extraclasse.  |
|   | <b>GeoGebra:</b> apresenta objetos de aprendizagem (OAs) feitos no GeoGebra ou instruções de como utilizar o GeoGebra para determinado conteúdo.   |
|   | <b>Atividades computacionais:</b> sugestões de atividades para serem resolvidas no ambiente computacional, usando o próprio GeoGebra ou os OAs. Podem ser feitas em classe ou extraclasse. |
|   | <b>Outros questionamentos e simulações no GeoGebra:</b> aparece depois da situação problema, com outros questionamentos e simulações que podem ser discutidos em classe ou extraclasse.    |
|   | <b>Comentários:</b> comentários sobre alguma atividade ou situação problema.   |
|  | <b>Materiais:</b> slides em PowerPoint ou arquivos em pdf sobre o conteúdo em questão.   |

Fonte: Produção própria, 2017.

## CAPÍTULO 2 – DERIVADAS: INTRODUÇÃO

Esse capítulo tem o objetivo definir e calcular derivadas. Assim sendo, tem-se a definição de derivada, informações sobre as notações de derivadas, uma tabela de derivadas<sup>9</sup>, em pdf. Um *applet* de cálculo de derivada (Figura 8) implementado no GeoGebra. Um pouco da história do Cálculo Diferencial e Integral e da história do Cálculo (vídeos do YouTube, um abordando “a história do Cálculo<sup>10</sup>” e o outro o “nascimento do Cálculo<sup>11</sup>”). E ainda, um breve relato da história da regra da cadeia e sua fórmula.

Na Figura 7 tem-se um registro de como aparece a tela inicial, do capítulo derivadas: introdução, no GeoGebraBook.

<sup>9</sup> Disponível em: <<https://goo.gl/scXU5x>>. Acesso em 09 jun. 2017.

<sup>10</sup> Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=P9\\_qaUfKKx8](https://www.youtube.com/watch?v=P9_qaUfKKx8)>. Acesso em: 09 jun. 2017.

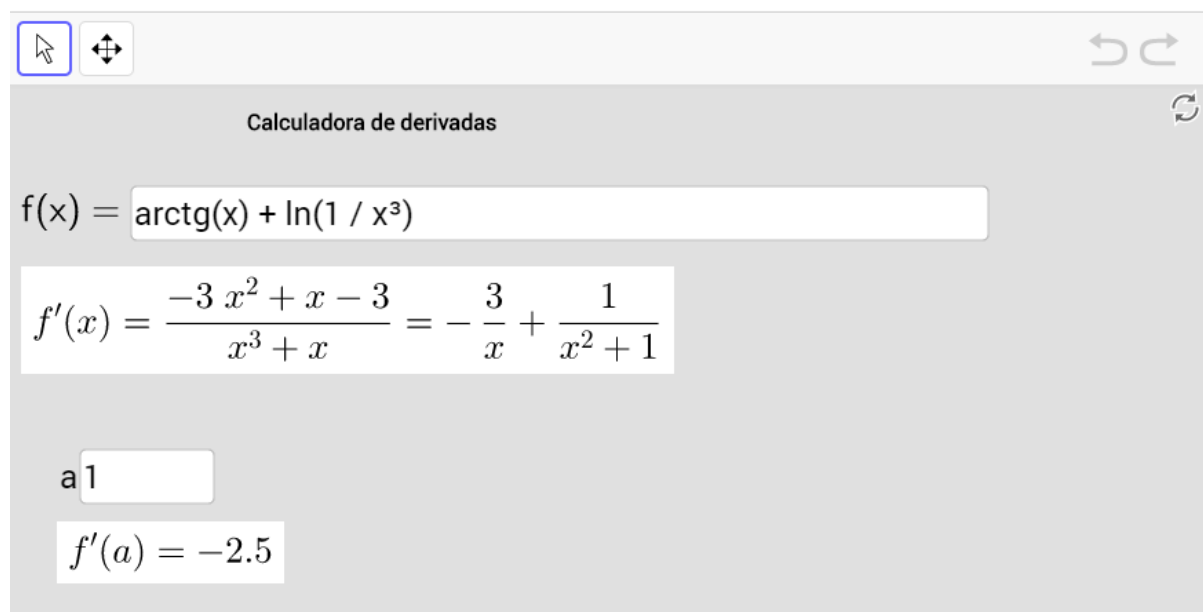
<sup>11</sup> Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=CCYmzyVAXzA>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

Figura 7 – Introdução a derivadas



A Figura 8 ilustra uma calculadora de derivadas, o usuário pode digitar a função real de uma variável no campo de entrada  $f(x)$ . É recomendável colocar parênteses para assegurar que o GeoGebra interprete corretamente a função, principalmente em se tratando de funções racionais. Por exemplo, a função  $f(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{\cos(x^4)}$  pode ser digitada como  $(\ln(x^2+2))/(\cos(x^4))$ . Na resolução, dependendo da função derivada, aparecerá na primeira igualdade a derivada com denominador comum, já na segunda igualdade, se tivermos, por exemplo, uma soma de funções, aparecerá sem o denominador em comum. Além disso, o usuário pode escolher um valor para a abscissa calculando a derivada nesse ponto.

Figura 8 – Calculadora de derivadas



Fonte: Produção própria, 2017.

## CAPÍTULO 3 – DERIVADAS: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Tendo como objetivo a interpretação geométrica da derivada é apresentado nesse capítulo um pouco do conteúdo da reta tangente, editado no próprio GeoGebraBook, um objeto de aprendizagem “reta tangente” (Figura 10) desenvolvido no GeoGebra e alguns exemplos de gráficos, inseridos no GeoGebraBook.

A Figura 9 apresenta a tela inicial desse capítulo.

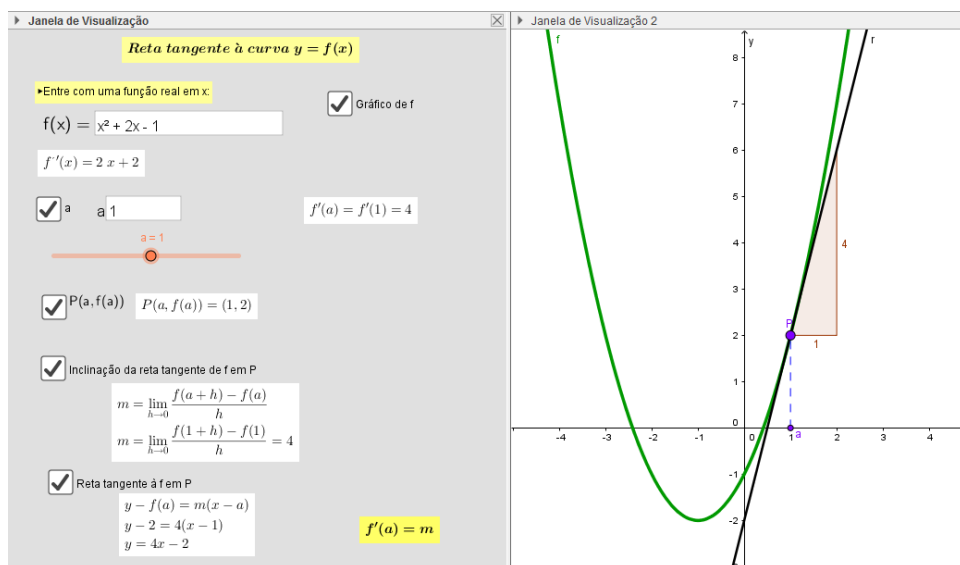
Figura 9 – Interpretação geométrica da derivada



Fonte: Produção própria, 2017.

A Figura 4 ilustra o OA “Reta tangente” desenvolvido para explorar a interpretação geométrica da derivada. Nesse OA o usuário entra com uma determinada função (algebricamente), podendo observar a representação gráfica desta função, bem como a função derivada. Pode simular a equação da reta tangente à  $f$  num determinado ponto  $P$ , verificando a inclinação desta reta à  $f$  neste ponto, que é dinâmico.

Figura 10 – OA “Reta tangente”



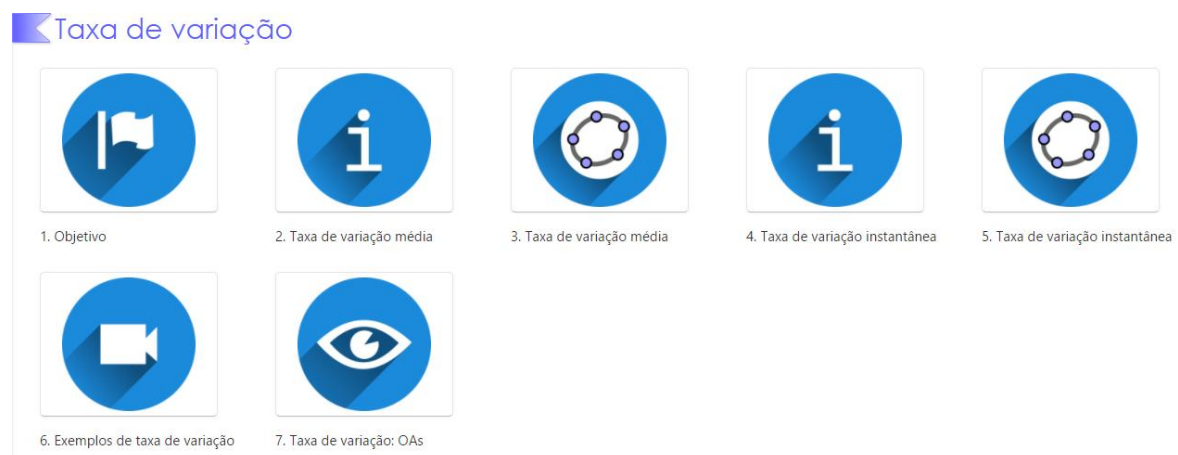
Fonte: Produção própria, 2017.

## CAPÍTULO 4 – TAXA DE VARIAÇÃO

Objetivando diferenciar a taxa de variação média e taxa de variação instantânea, resolver alguns exercícios envolvendo taxa de variação de funções reais de uma variável, o capítulo 4, traz a fórmula da taxa de variação média e instantânea, um objeto de aprendizagem “Taxa média de variação” (Figura 12), um objeto de aprendizagem “Taxa de variação instantânea” (Figura 13), ambos, desenvolvido no GeoGebra. Também, há um arquivo em PowerPoint com alguns exemplos resolvidos e comentados de autoria da pesquisadora. E ainda, links de objetos de aprendizagem de outros usuários do GeoGebra.

Na Figura 11 tem-se um registro de como aparece a tela inicial, do capítulo de taxa de variação, no GeoGebraBook.

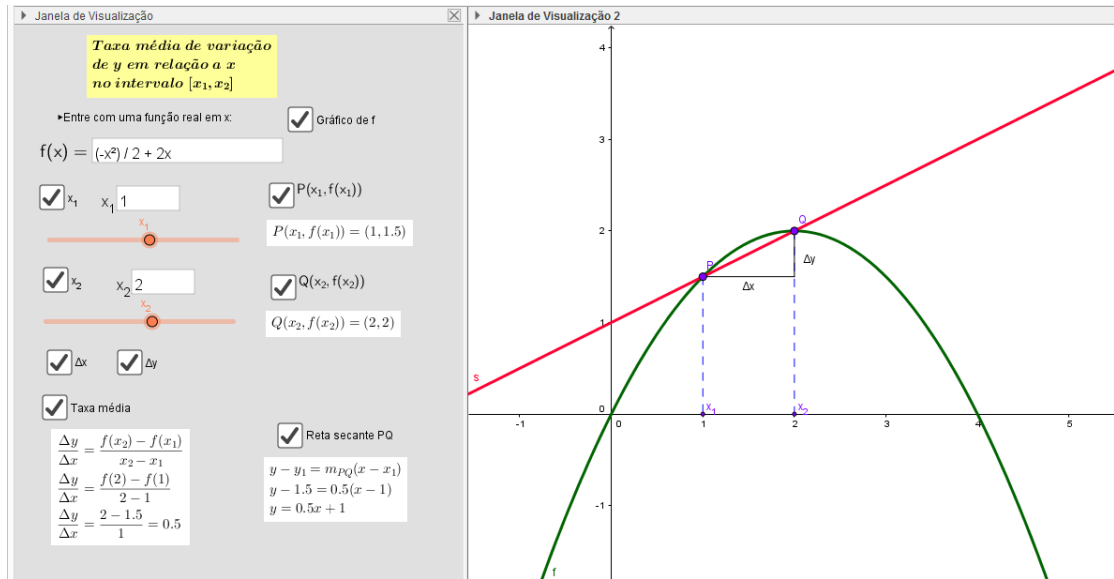
Figura 11 – Capítulo Taxa de variação



Fonte: Produção própria, 2017.

A Figura 12 ilustra o objeto de aprendizagem “Taxa média de variação” que representa (algébrica e graficamente) a reta secante ao gráfico da função passando por dois pontos selecionados pelo usuário. O usuário pode entrar com qualquer função de uma variável real e selecionar dois pontos pertencentes ao gráfico da função. O objeto de aprendizagem proporciona explorar que a inclinação dessa reta secante é igual a taxa média de variação de  $y$  em relação a  $x$  num dado intervalo. A dinamicidade também se faz presente, pois é possível alterar a função bem como os pontos sobre o seu gráfico.

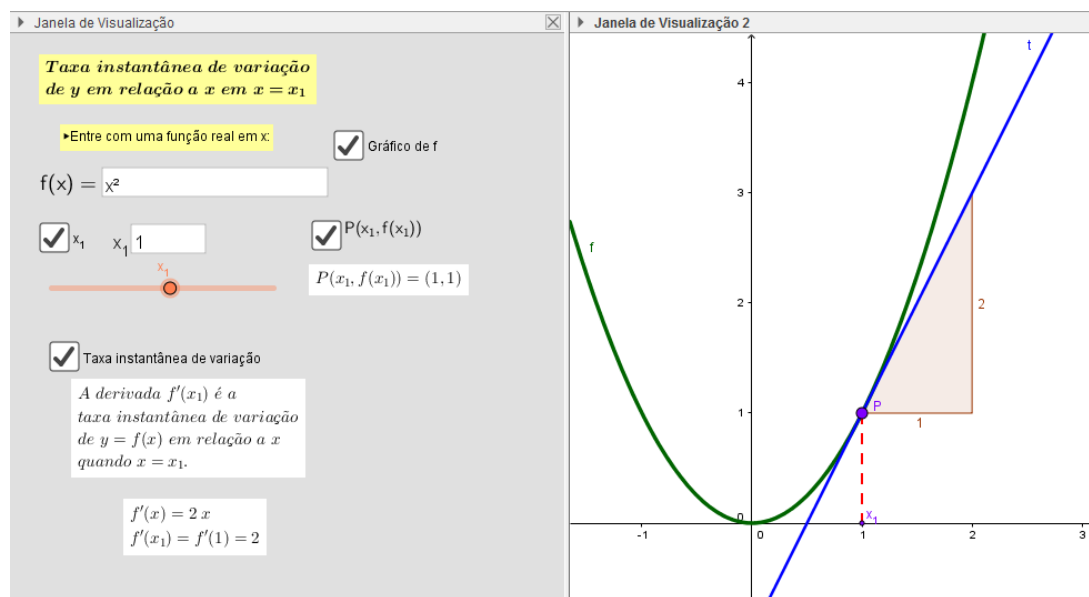
Figura 12 – OA “Taxa média de variação”



Fonte: Produção própria, 2017.

A ilustração da Figura 13 mostra o objeto de aprendizagem “Taxa de variação instantânea”. Esse objeto de aprendizagem retrata algébrica e graficamente a taxa instantânea de variação de y em relação a x num ponto. O usuário pode digitar qualquer função de uma variável real e selecionar qualquer ponto que passa pelo gráfico da função digitada. O usuário pode notar que a derivada da função aplicada no ponto é igual a taxa instantânea de variação de y em relação a x nesse ponto, que por sua vez também é a inclinação da reta tangente.

Figura 13 – OA “Taxa instantânea de variação”



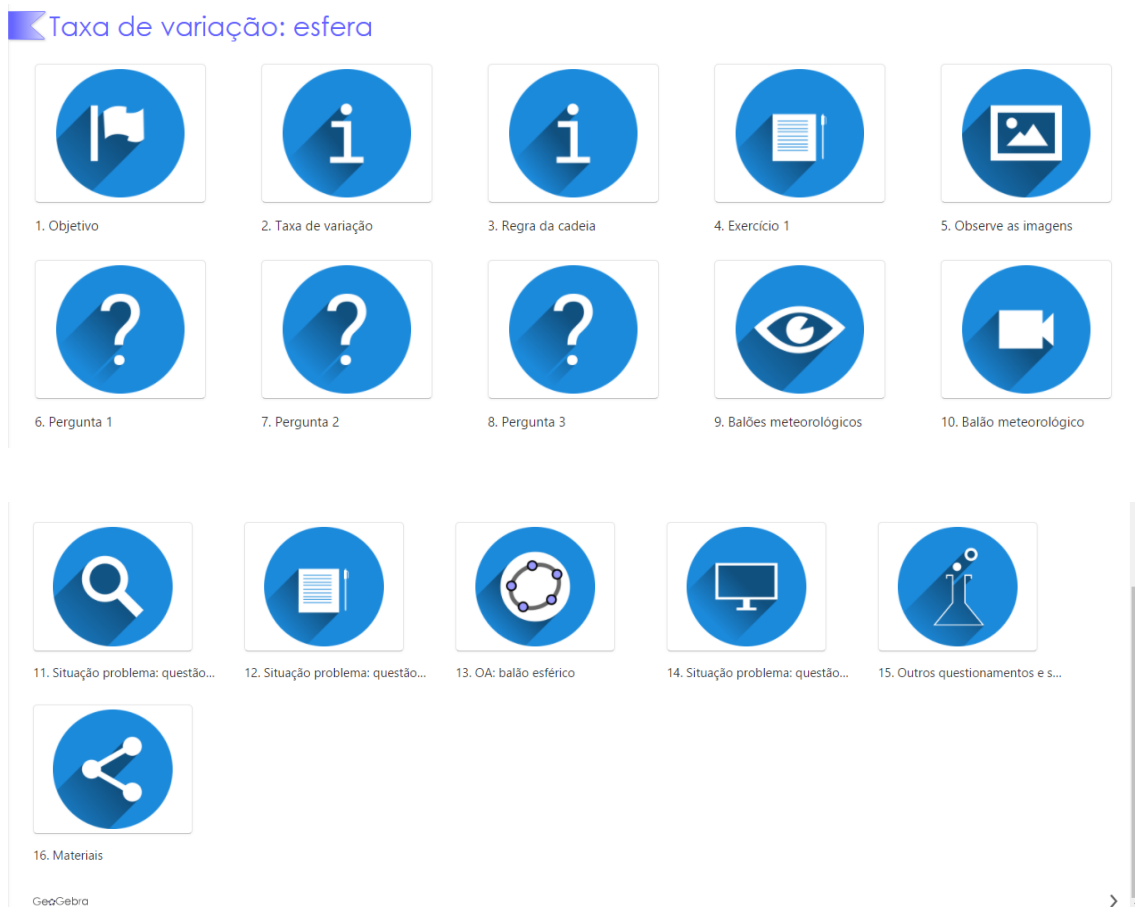
Fonte: Produção própria, 2017.



## CAPÍTULO 5 – TAXA DE VARIAÇÃO: ESFERA

O capítulo 5 traz uma proposta de atividade que tem como objetivo utilizar a regra da cadeia na resolução de problemas de taxa de variação envolvendo uma esfera e explorar o aspecto dinâmico do conceito de taxa de variação. A Figura 14 ilustra a tela inicial desse capítulo.

Figura 14 – Capítulo de taxa de variação: esfera

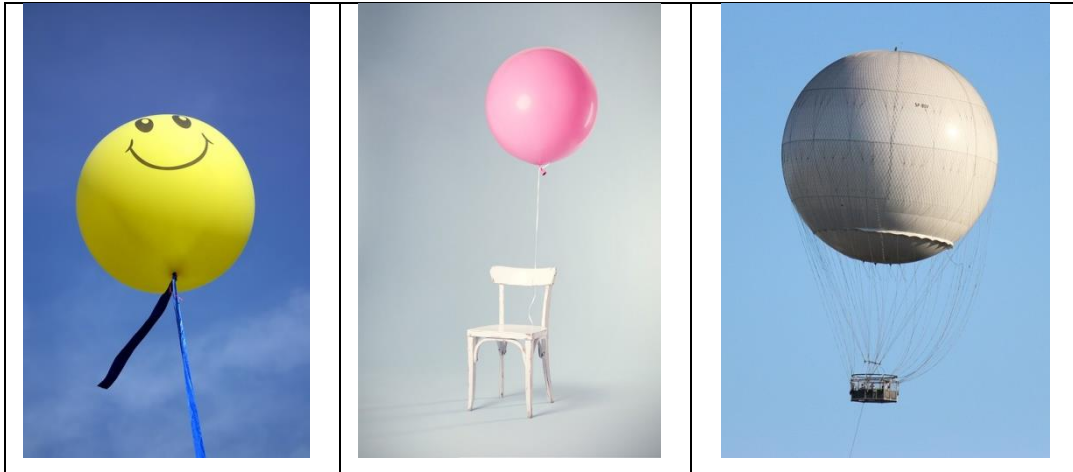


Fonte: Produção própria, 2017.

A proposta dessa atividade será descrita passo a passo. Inicialmente são apresentados os objetivos do conteúdo e as noções de taxa de variação e regra da cadeia. Na sequência é proposto um exercício que tem como objetivo determinar numericamente o valor da taxa de variação do volume de uma esfera quando seu raio é alterado (a resolução dessa questão é apresentada em arquivo do PowerPoint).

Para explorar a situação problema proposta sugere-se a observação de imagens de objetos esféricos, apresentando-se algumas imagens de balões esféricos, conforme ilustrado nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Imagens de balões esféricos



Fontes: <https://goo.gl/zwoQB6>; <https://goo.gl/oxOMvb> e <https://goo.gl/sYg0Wz>. Acesso em: 26 mai. 2017.

Figura 16 – Mais imagens de balões esféricos



Fontes: <https://goo.gl/i9pfyE> e <https://goo.gl/K1bBHI>. Acesso em: 26 mai. 2017.

São realizados questionamentos sobre as semelhanças das figuras apresentadas. É questionado se há relação entre um balão meteorológico e o cálculo diferencial. Pergunta-se o que é um balão meteorológico e quais são suas utilidades. Para auxiliar nessa questão traz-se referências sobre balões meteorológicos<sup>12</sup> em formato de texto e vídeos<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> Disponível em: <<https://goo.gl/XD6eAW>>. Acesso em: 15 maio. 2017.

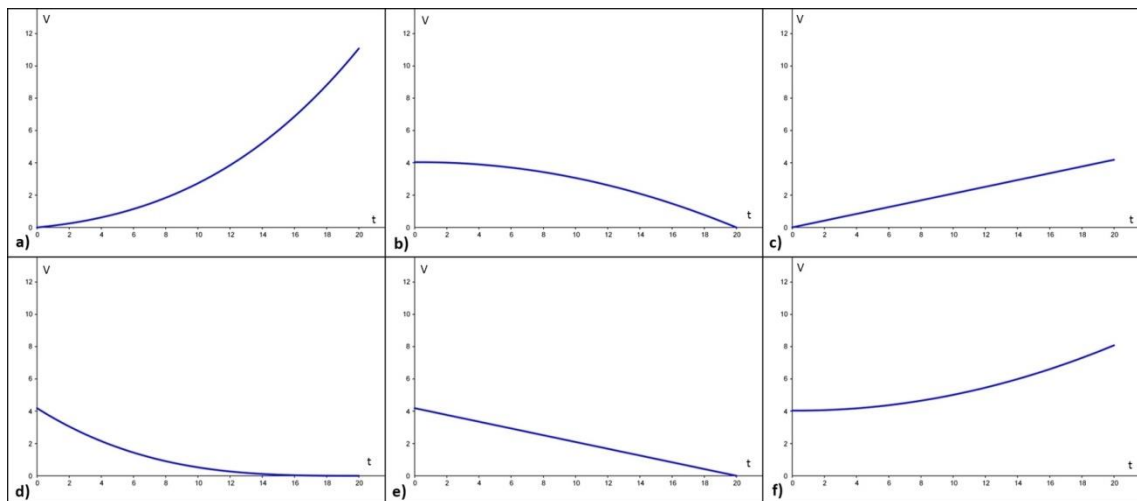
<sup>13</sup> Disponível em: <<https://youtu.be/OUmQEUnTD4Y>> e <<https://youtu.be/ZoCWbIFsJrY>>. Acesso em: 20 mai. 2017.

Propôs-se a resolução da seguinte situação problema: Suponha que no instante  $t = 0$  s um balão meteorológico, de formato esférico com raio igual a 1 metro, está esvaziando devido à um defeito de fabricação.

Sendo que o seu raio diminui a uma taxa de  $0.05$  m/s, determine:

- A taxa de variação do volume do balão no instante  $t=0$ s;
- A taxa de variação do volume do balão no instante  $t=12$ s;
- Qual o gráfico representa melhor a variação do volume do balão em relação ao tempo, mostrando as seguintes alternativas (vide Figura 17):

Figura 17 – Opções de gráfico  $V(t)$  na situação do balão esférico



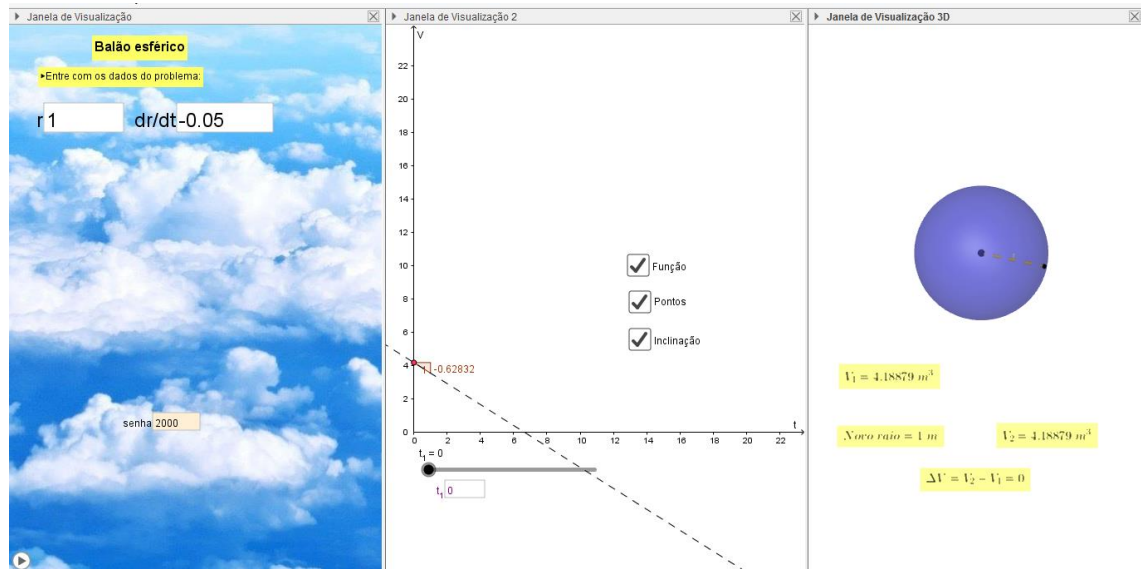
Fonte: Produção própria, 2017.

Sugere-se que esta situação problema seja resolvida primeiramente no ambiente do lápis e do papel, para depois as respostas serem confrontadas no ambiente computacional com o OA balão esférico.

A Figura 18 ilustra a tela inicial desse objeto de aprendizagem. Na janela de álgebra o usuário pode entrar com os dados do problema, o raio e a taxa de variação do raio. No OA não há unidades de medidas, então cabe ao usuário entrar com elas, se entrar com  $dr/dt$  em m/s então o raio deve ser em metros ou, por exemplo, se  $dh/dt = -0,5$  cm/s, então se deve entrar com o raio em centímetros. Na janela bidimensional, tem-se a opção de ocultar ou exibir os pontos e o gráfico do volume pelo tempo, bem como ocultar ou exibir a taxa de inclinação em determinado instante. É possível arrastar o controle deslizante  $t$  e observar as mudanças que ocorrem, ou então se pode entrar com o instante desejado no campo de entrada “ $t$ ”, ou ainda, pode-se clicar no ícone de play, que vai mostrar a animação. Na janela de visualização tridimensional tem-se a representação da esfera inicial e da esfera com o passar do tempo.

Além disso, têm-se os valores do volume da esfera inicial, o novo raio, o volume da nova esfera e a diferença entre os volumes da esfera inicial e da esfera nova.

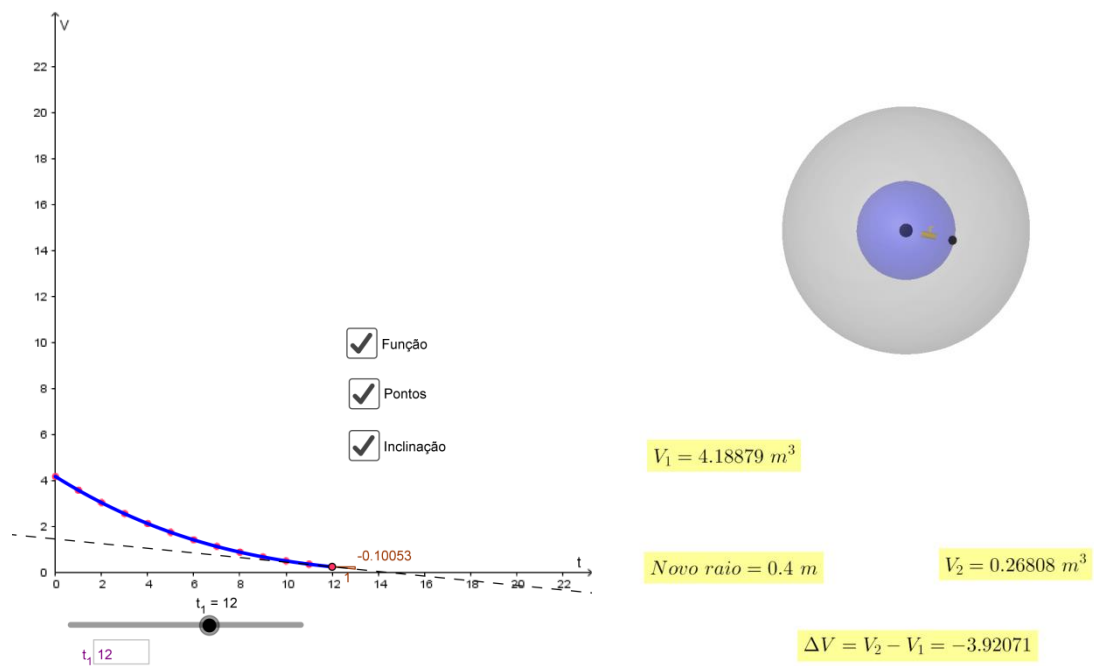
Figura 18 – OA “balão esférico”: tela inicial



Fonte: Produção própria, 2017.

A Figura 19 ilustra o OA do balão esférico quando  $t=12\text{s}$ .

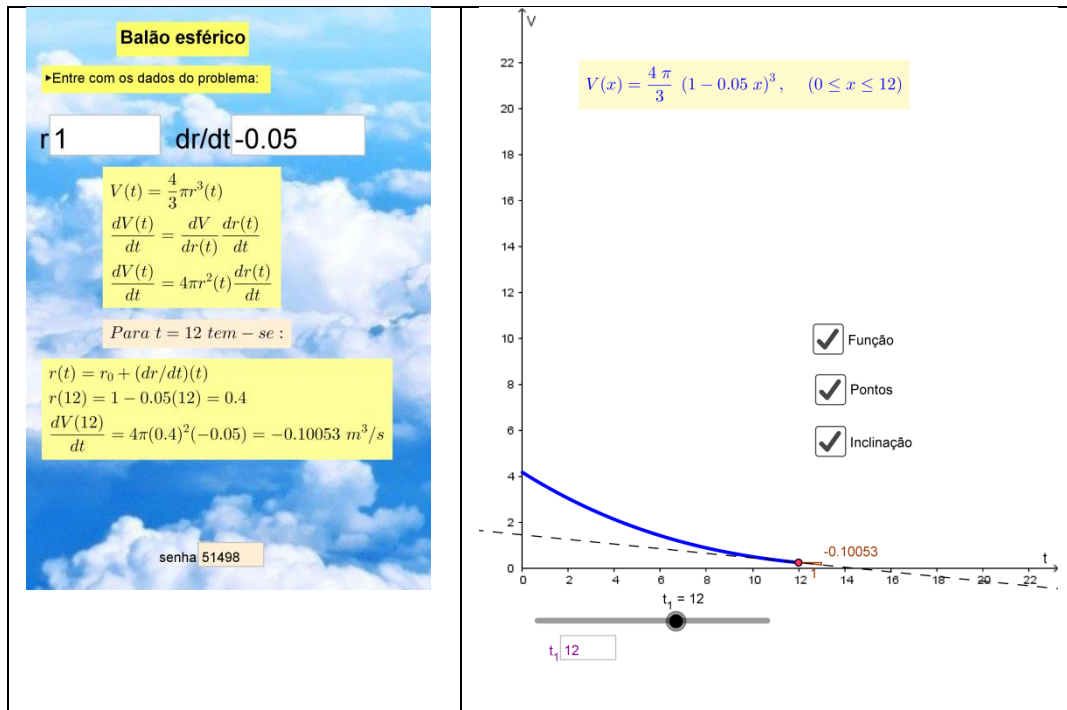
Figura 19 – OA “balão Esférico” no instante  $t=12\text{s}$ .



Fonte: Produção própria, 2017.

Também é possível digitar no campo de entrada “senha”, o número **51498**, que vai mostrar outros itens, tais como a resolução algébrica e a lei da função do volume pelo tempo, conforme Figura 20.

Figura 20 – OA “balão esférico” com a senha habilitada



Fonte: Produção própria, 2017.

Depois de utilizar o OA “balão esférico”, propõe-se algumas questões:

“Entre com os dados do problema do balão meteorológico no objeto e explore a variação do volume do ar em relação ao tempo.

a) Qual é o comportamento gráfico da variação do volume em relação ao tempo? Qual é a lei da função  $V(t)$ ?

b) A representação gráfica ilustrada pelo objeto é a mesma que você encontrou no ambiente lápis e papel?

c) Caso a sua representação gráfica, na questão 2, tenha sido diferente aponte as diferenças, discutindo o que te levou ao equívoco.

d) Você consegue explicar a representação gráfica apresentada pelo objeto de aprendizagem?”

Sugere-se ainda outros questionamentos e simulações que podem ser feitas no OA “balão esférico”:

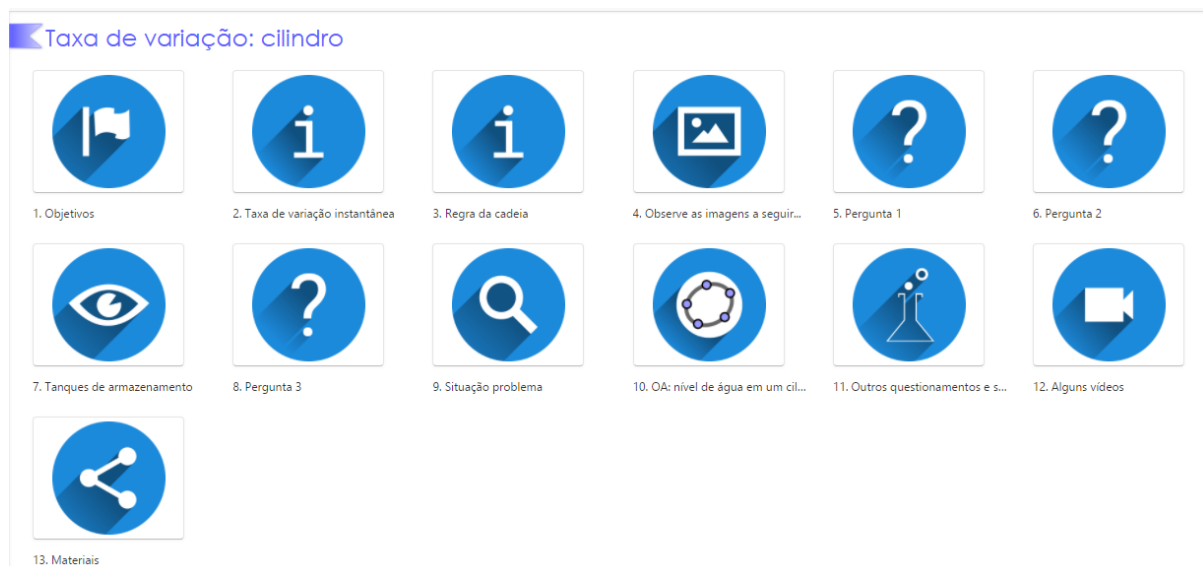
- Imagine que inicialmente (em  $t=0s$ ), um balão meteorológico tem 0.1 m de raio e está enchendo. Sabendo que a taxa de aumento do raio desse balão nesse instante é de 0.05 m/s como será o gráfico que representa a variação do volume do balão em relação ao tempo? Neste caso qual é a lei da função  $V(t)$ ?
- Suponha que no instante  $t=0s$  um balão meteorológico, de formato esférico com raio igual a 2 metros, está esvaziando devido à um defeito de fabricação. Sendo que o seu raio diminui a uma taxa de 0.1 m/s, quanto tempo o balão levará para esvaziar completamente? Justifique.
- Na situação do balão meteorológico o que representam  $dr/dt$  e  $dV/dt$ ? Quais variáveis influenciam a variação do volume do balão? Justifique.

Em materiais, encontra-se slides em PowerPoint com a sequência aqui apresentada.

## CAPÍTULO 6 – TAXA DE VARIAÇÃO: CILINDRO

Ao clicar no capítulo 6 tem-se uma proposta de atividade que tem como objetivo utilizar a regra da cadeia na resolução de problemas de taxa de variação envolvendo um cilindro e explorar o aspecto dinâmico do conceito de taxa de variação. A Figura 21 ilustra a tela inicial desse capítulo.

Figura 21 – Capítulo de taxa de variação: cilindro



Fonte: Produção própria, 2017.



São apresentados os objetivos do conteúdo e as noções de taxa de variação e regra da cadeia. Na sequência é proposto um exercício que tem como objetivo determinar numericamente o valor da taxa de variação do volume de um cilindro quando seu raio é alterado (a resolução dessa questão é apresentada em arquivo do PowerPoint).

Para explorar a situação problema proposta sugere-se a observação de imagens de objetos cilíndricos (tanques de armazenamento), apresentando-se algumas imagens de cilindros, conforme ilustrado na Figura 22.

Figura 22 – Imagens de cilindros



Fontes: Acervo da autora, 2017.

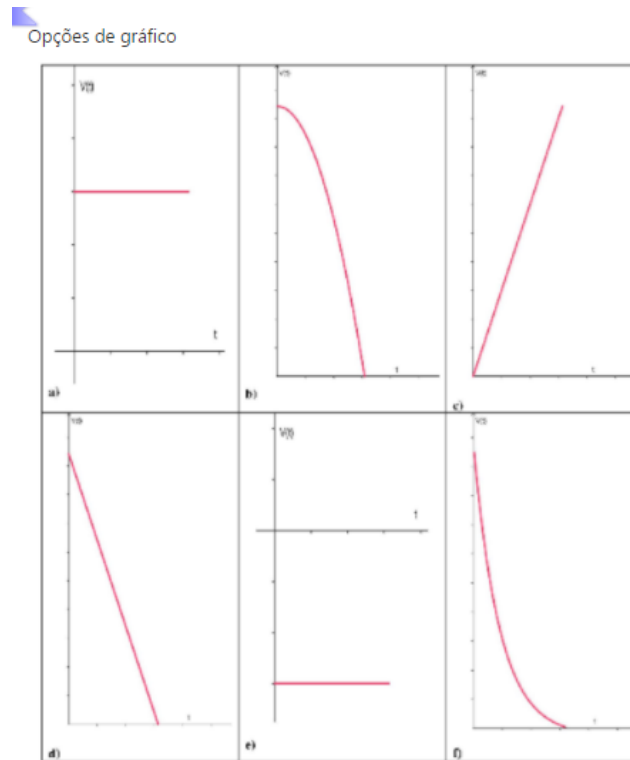
São realizados questionamentos sobre as semelhanças das figuras apresentadas. É questionado se há relação entre um tanque de armazenamento e o cálculo diferencial. Pergunta-se o que é um tanque de armazenamento? Como é sua construção? Qual é a sua finalidade? Quais são seus formatos? Como classificar um tanque? Como é sua utilização? Quais são suas dimensões? Para auxiliar nessa questão traz-se referências sobre tanques de armazenamentos<sup>14</sup>.

Propõe-se a resolução da seguinte situação problema: A taxa de variação do volume da água em um tanque cilíndrico está relacionada à taxa de variação no nível de água do tanque. Um tanque cilíndrico reto, inicialmente cheio de água, tem raio igual a 1 m e altura igual a 3 m. Sabendo que a taxa do nível (altura) da água dentro deste tanque diminui a  $3/\pi$  m/min,

<sup>14</sup> Disponível em: <[http://www.reformadoraalves.com.br/index\\_arquivos/Page1490.htm](http://www.reformadoraalves.com.br/index_arquivos/Page1490.htm)>. Acesso em: 24 fev. 2017.

determine qual gráfico (vide Figura 23) representa melhor a variação do volume da água em relação ao tempo: (justifique sua escolha).

Figura 23– Opções de gráfico  $V(t)$  na situação cilindro



Fonte: Produção própria, 2017.

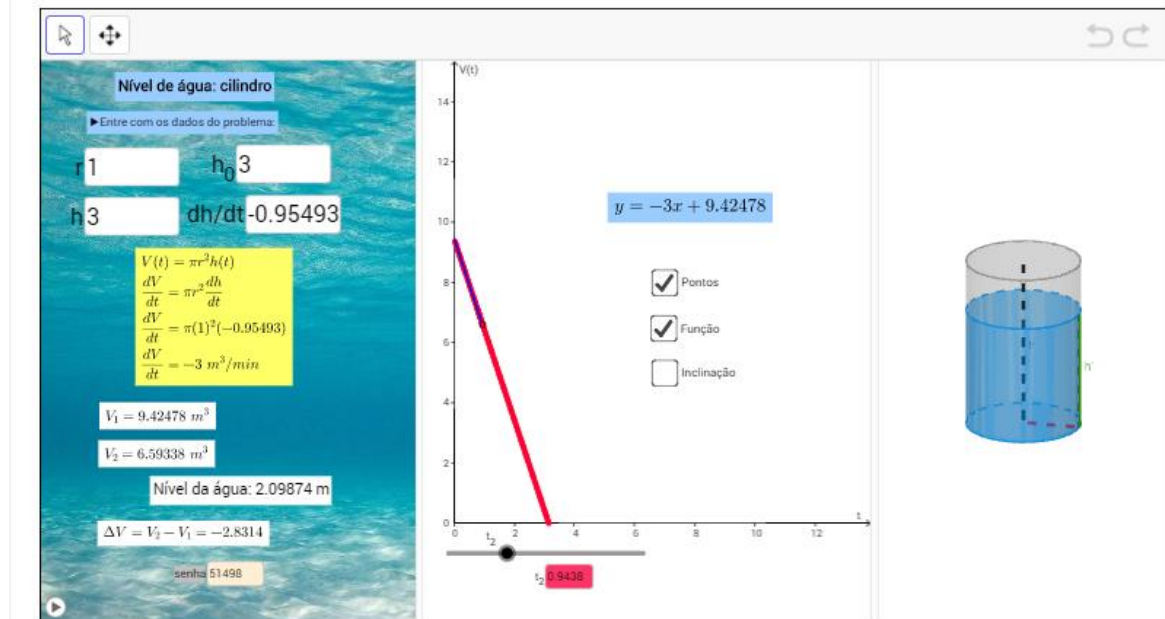
Sugere-se que esta situação problema seja resolvida primeiramente no ambiente do lápis e do papel, para depois as respostas serem confrontadas no ambiente computacional com o OA “cilindro”.

A Figura 24 ilustra objeto de aprendizagem “cilindro”. Na janela de álgebra o usuário entra com os dados do problema, o raio e a altura do cilindro, digita também a taxa de variação da altura e  $h_0$  que é a altura inicial da água, também temos a resolução algébrica da situação (digitar no campo de entrada “senha”, o número **51498**, que aparecerá itens, tais como a resolução algébrica e a lei da função do volume pelo tempo). Na janela gráfica o usuário pode arrastar o controle deslizante do tempo e observar as mudanças que ocorrem. Na janela gráfica temos a representação, a partir de alguns pontos, da função do volume pelo tempo. Já na janela 3D temos a representação do tanque cilíndrico e da água que está variando.



Figura 24 – OA “cilindro”

OA: nível de água em um cilindro



Fonte: Produção própria, 2017.

Depois de utilizar o OA “cilindro”, propõe-se algumas questões:

“a) Um tanque cilíndrico reto, inicialmente cheio de água, tem raio igual a 1 m e altura igual a 3 m. Sabendo que a taxa do nível (altura) da água dentro deste tanque diminui a  $3/\pi$  m/min, determine a taxa de variação do volume da água deste tanque. Depois de 2 minutos, qual será, aproximadamente, a quantidade de água neste tanque? Depois de quanto tempo o tanque esvaziará completamente? Se o nível de água estivesse inicialmente em 2.5 metros, qual seria a taxa de variação do volume de água desse tanque? Por quê?

b) Qual será a taxa de variação do volume de água se a taxa do nível da água dentro do tanque diminui a  $4/\pi$  m/min? (Considere o tanque cheio,  $r = 1$  m e  $h = 3$  m)

c) Qual será a taxa de variação do volume, quando a taxa do nível de água diminui a  $3/\pi$  m/min, se o tanque estiver completamente cheio e tiver  $r = 3$  m e  $h = 1$  m?

d) Caso o tanque esteja inicialmente vazio, e tenha as dimensões  $r = 2$  m e  $h = 5$  m, sendo que a altura cresce à uma taxa de  $3/\pi$  m/min, qual será taxa de variação do volume da água? Nessa situação, qual é o comportamento do gráfico a variação do volume da água em relação ao tempo? Quanto tempo o tanque levará para encher completamente? “

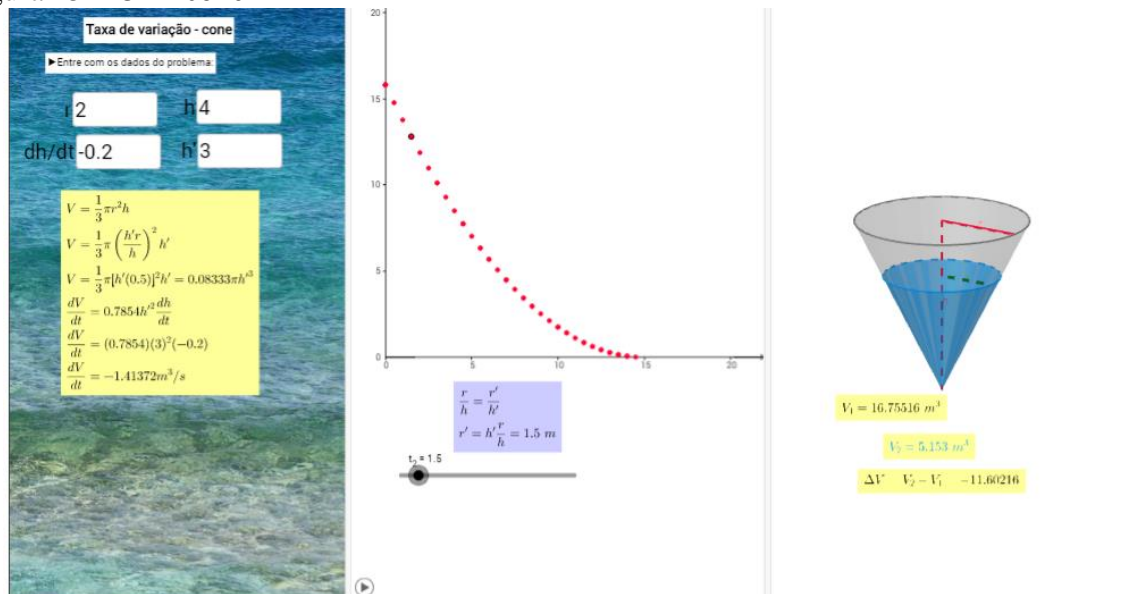
Como curiosidade, traz-se dois vídeos envolvendo a temática do cilindro, clicando em vídeos o professor/usuário poderá acessar os vídeos: “Modelo do Vazamento de um tanque”<sup>15</sup> e “Oficina de construção de cisterna de placas para armazenamento de água das chuvas”<sup>16</sup>. Em materiais, encontra-se slides em PowerPoint com a sequência aqui apresentada.

## CAPÍTULO 7 – TAXA DE VARIAÇÃO: CONE

A proposta desse capítulo é semelhante aos capítulos 5 e 6, a diferença é no formato do objeto, ou seja, é explorado a taxa de variação com o objeto de aprendizagem “cone”. Para tanto, ilustraremos apenas o objeto de aprendizagem “cone”.

Conforme ilustra a Figura 25, na janela de álgebra, o usuário entra com os dados do problema, o raio e a altura do cone, digita também a taxa de variação da altura e  $h'$  que é a altura inicial da água, também temos a resolução algébrica da situação. Na janela gráfica o usuário pode arrastar o controle deslizante do tempo e observar as mudanças que ocorrem. Na janela gráfica temos a representação, a partir de alguns pontos, da função do volume pelo tempo. Já na janela 3D temos a representação gráfica do tanque cônico e da água que está variando, bem como os valores do volume inicial e final.

Figura 25 – OA “cone”



Fonte: Produção própria, 2017.

<sup>15</sup> Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=KyeHOudqAes>>. Acesso em 05 jun. 2017.

<sup>16</sup> Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=mim\\_r6bH0E8](https://www.youtube.com/watch?v=mim_r6bH0E8)>. Acesso em 05 jun. 2017.

## CAPÍTULO 8 – TAXA DE VARIAÇÃO: ESCADA

A proposta de atividade do capítulo 8 tem como objetivo utilizar a regra da cadeia na resolução de problema de taxa de variação envolvendo uma escada e explorar o aspecto dinâmico do conceito de taxa de variação. Para tanto, esse capítulo apresenta uma situação problema editada dentro do GeoGebraBook e um objeto de aprendizagem (Figura 26) adaptado de BRZEZINSKI<sup>17</sup> (2016). A Figura 26 ilustra a tela inicial desse capítulo no GeoGebraBook.

Figura 26 – Capítulo taxa de variação: escada

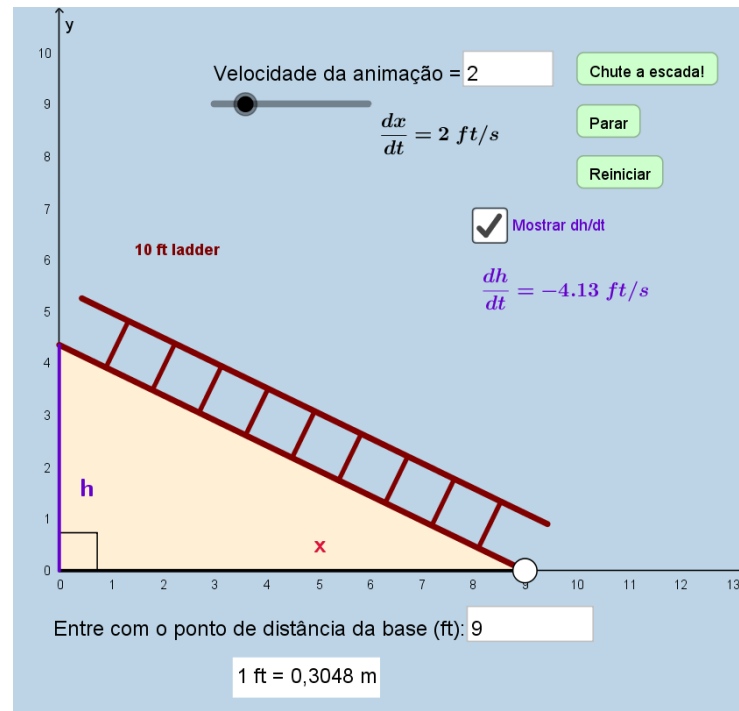


Fonte: Produção própria, 2017.

A Figura 27 ilustra o objeto de aprendizagem da escada, nele o usuário pode modificar a velocidade da animação, arrastando o controle deslizante ou entrando com o valor desejado. Há 3 botões nos quais o usuário pode chutar a escada, ou seja, a escada vai se movimentar, podendo ser parada no botão parar. Ao clicar no botão reiniciar, a construção será reiniciada. O valor da taxa de variação pode ser exibida ou ocultada. Foi utilizado a unidade de medida do OA original, ou seja, a unidade de medida de pé (ft),  $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ metros}$ , pois modificar a escala para metros seria muito trabalhoso. O usuário pode entrar com o ponto de distância da base no respectivo campo de entrada. Assim, tem-se a representação gráfica da situação, sendo que a escada tem comprimento fixo de 10 ft.

<sup>17</sup> BRZEZINSKI, Tim. **Falling Ladder!!!** (2016). Disponível em: <<https://ggbm.at/ffAEhyNk>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

Figura 27 – OA “escada”



Fonte: Adaptado de Brzezinski, 2017.

## CAPÍTULO 9 – CONEXÕES COM O ENSINO MÉDIO

O objetivo desse capítulo é fazer conexões do Cálculo entre o Ensino Superior e o Ensino Médio, para tanto, é apresentado um pouco da história da numeração dos calçados com uma proposta de atividade e um objeto de aprendizagem desenvolvido no GeoGebra (Figura 30) com o intuito de trabalhar a taxa de variação constante. Também, há uma atividade e um objeto de aprendizagem desenvolvido no GeoGebra, abordando o tema tiro de meta (Figura 31) para trabalhar a taxa de variação não constante. Foi inserido ilustrações, no GeoGebraBook, representando as duas situações de taxa de variação constante e não constante. Apresentado uma calculadora para cálculo do volume da esfera (Figura 32), desenvolvida no GeoGebra. E ainda, dois trabalhos, em pdf, mencionando sobre o assunto Cálculo no Ensino Médio e duas propostas de atividades de outros usuários do GeoGebra.

As Figuras 28 e 29 apresentam o registro de como aparece a tela inicial do capítulo de conexões com o Ensino Médio no GeoGebraBook. Ficando a critério do professor/usuário clicar no ícone desejado ou seguir a sequência proposta.

Figura 28 – Capítulo conexões no Ensino Médio



Fonte: Produção própria, 2017.

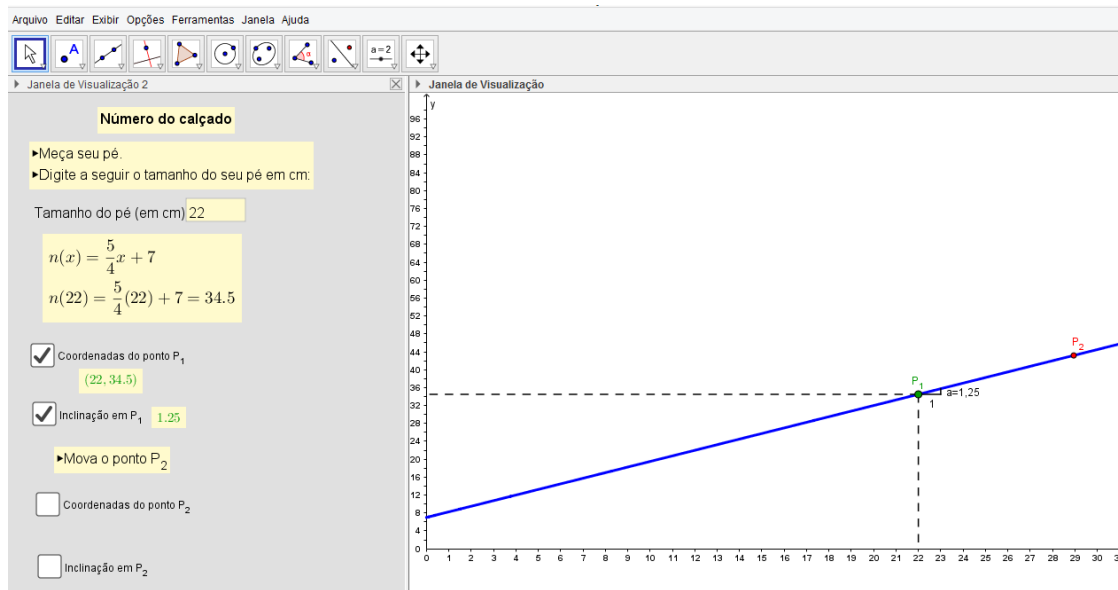
Figura 29 – Capítulo conexões com o Ensino Médio: continuação



Fonte: Produção própria, 2017.

Na Figura 30, na janela de álgebra, o usuário pode inserir a medida do tamanho do pé dele (em centímetros). O OA, a partir da função  $n(x) = \frac{5}{4}x + 7$ , retorna o número do calçado de forma decimal, aí para saber o número exato que o usuário calça é só procurar pelo número inteiro mais próximo. Na janela de álgebra também é possível exibir ou ocultar as coordenadas do ponto  $(x, n(x))$  e o valor da inclinação ao gráfico da função  $n$  nesse ponto. Além disso, na parte algébrica também podem ser exibidas ou ocultas as coordenadas de um outro ponto e a inclinação. Na janela gráfica o usuário pode observar o gráfico da função que descreve o número do calçado em relação ao tamanho do pé e dois pontos pertencentes à esse gráfico. É possível mover os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

Figura 30 – OA “Número do calçado



Fonte: Produção própria, 2017.

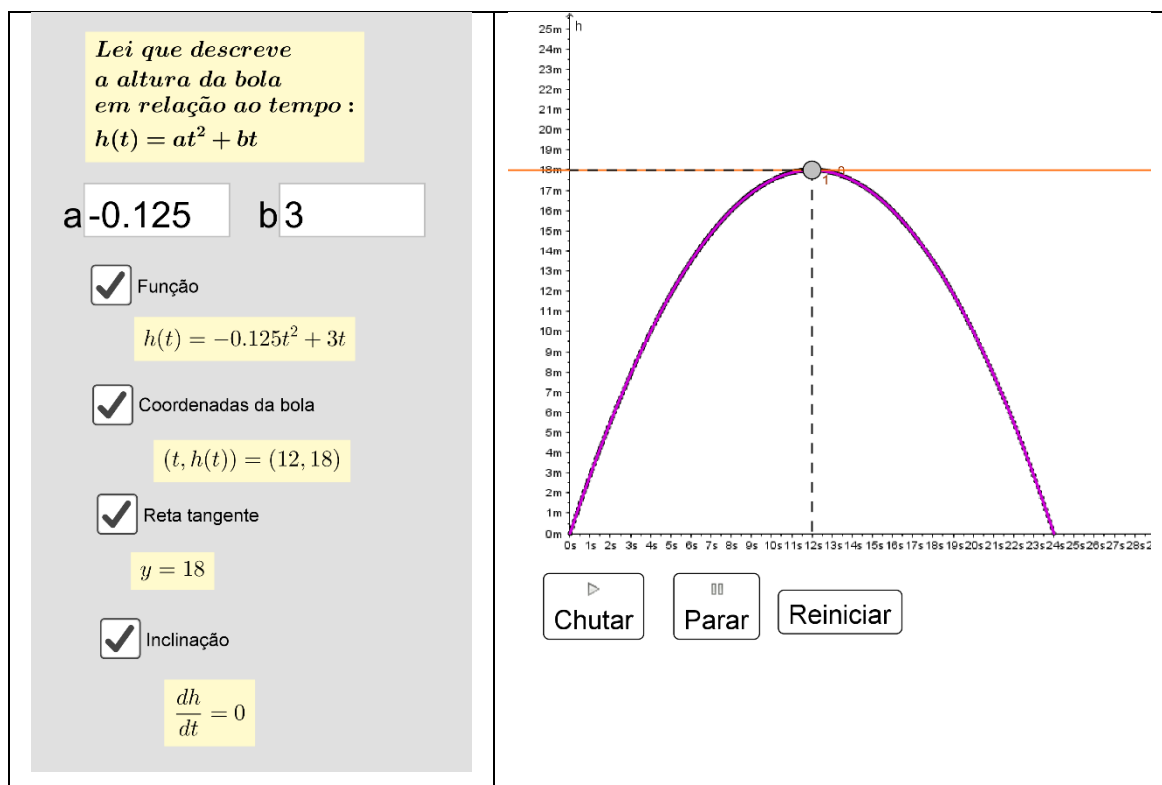
Para o caso do número do calçado, não importam os valores iniciais, mas sim a relação entre a variação de  $x$  e a de  $n$ . Ora, neste caso a taxa de variação cresceu constantemente. No entanto, também, pode-se ter casos em que algo cresce cada vez mais rapidamente: cresce à taxa crescente; ou cresce cada vez mais lentamente: cresce à taxa decrescente. Será discutido estes dois casos a seguir, também pensando em situações que possam ser trabalhadas no Ensino Médio.

Imagine a seguinte situação: Em um jogo de futebol, o goleiro da seleção brasileira cobra o tiro de meta lançando a bola numa trajetória que corresponde à função  $h(t) = -\frac{t^2}{8} + 3t$ , onde  $t$  é o tempo em segundos e  $h$  é a altura atingida pela bola em metros. Com esta situação pode-se explorar alguns conceitos de Cálculo, como por exemplo, o que representa a taxa de variação da altura pelo tempo? Fisicamente,  $\frac{dh}{dt}$  é a velocidade instantânea. Neste caso a taxa de variação não é constante. Quando  $0 \leq t < 12$ , a altura cresce cada vez mais lentamente até atingir o valor máximo pois está sob ação da gravidade, ou seja, a altura cresce a uma taxa decrescente, a velocidade a cada instante  $\left(\frac{dh}{dt}\right)$  vai diminuindo. Já em  $t = 12$  tem-se a altura máxima que a bola atinge, uma vez que  $\frac{dh}{dt} = 0$ , ou seja, a velocidade nesse instante é zero. Depois disso, para  $12 < t \leq 24$ , a bola começa a descer devido à gravidade e a altura decresce mais rapidamente com uma taxa de variação crescente, isto é,  $\frac{dh}{dt}$  vai

aumentando. Assim, ao avaliar o comportamento da taxa, tem-se a taxa da variação (derivada segunda).

Para a situação citada anteriormente (tiro de meta) há o objeto de aprendizagem “tiro de meta”, ilustrado na Figura 31. O usuário poderá entrar com os dados na caixa de valores de “a” e “b”, como, por exemplo,  $a=-0.125$  e  $b=3$  e observar a situação para quando a trajetória da bola é descrita pela função  $h(t) = -\frac{t^2}{8} + 3t$ . Tem-se a representação algébrica e gráfica da função que descreve a trajetória da bola, as coordenadas da bola, a reta tangente à trajetória em dado ponto e a inclinação dessa reta tangente. A Figura 31 mostra o caso para quando a inclinação é nula, ou seja, a velocidade naquele instante é zero e a bola atingiu a altura máxima.

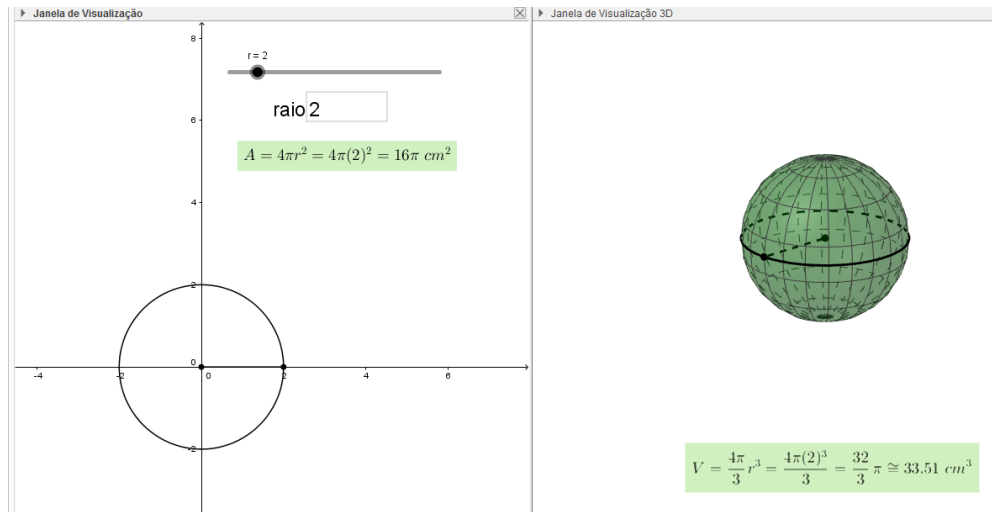
Figura 31 – Tiro de meta (ponto de máximo)



Fonte: Produção própria, 2017.

A Figura 32 ilustra o objeto de aprendizagem “volume da esfera”, com ele o usuário poderá entrar com os dados do raio na caixa de entrada de valores e observar o comportamento da esfera, tanto algébrica quanto geometricamente, também é possível observar a área da esfera. Sendo que, o usuário pode arrastar o controle deslizante  $r$  e observar as mudanças que ocorrem.

Figura 32 – OA volume da esfera



Fonte: Produção própria, 2017.

## CAPÍTULO 10 – SUGESTÃO DE AVALIAÇÃO

O capítulo de sugestão de avaliação foi criado pensando em propor para os professores algumas avaliações a serem realizadas, como um trabalho e uma avaliação no ambiente computacional, ambas envolvendo questões abordadas nesse produto educacional. Na Figura 33 tem-se um registro de como aparece a tela inicial do capítulo sugestões de avaliação no GeoGebraBook.

Figura 33 – Capítulo Sugestões de avaliação



Fonte: Produção própria, 2017.

Os dois ícones contém sugestões de algumas questões que podem ser utilizadas em um trabalho extraclasse e questões para uma possível avaliação computacional.



## CAPÍTULO 11 – MANUAL

No capítulo 11 têm-se arquivos em pdf de manuais, basta clicar naquele que se desejar: manual sucinto do GeoGebra, manual do produto educacional e dicas de como criar um GeoGebraBook.

## CAPÍTULO 12 – DEIXE SUA OPINIÃO

Espaço em aberto para os usuários deixarem sugestões, críticas e demais comentários. A Figura 34 ilustra a tela desse capítulo.

Figura 34 – Capítulo “deixe sua opinião”

The image shows a web form titled "Deixe sua opinião" (Leave your opinion) with a megaphone icon. Below the icon is the text "1. Opinião". To the right, a larger window titled "Dinamicidade e taxa de variação de F1V" displays the following content:

Dinamicidade e taxa de variação de F1V

Link do GeoGebraBook: <https://ggbm.at/rjJ3gktr>

\*Obrigatório

Espaço para deixar comentários, sugestões e/ou críticas sobre o produto educacional "Dinamicidade e taxa de variação de funções reais de uma variável: um GeoGebraBook" \*

Sua resposta

ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Fonte: Produção própria, 2017.

Destacamos que o produto educacional, na versão on-line, não é algo fechado, pois poderá passar por implementações de melhorias, atualizações e modificações, em função de contribuições de usuários que colocam em prática as nossas sugestões propostas, lembrando inclusive que há um campo no próprio produto educacional no qual o professor ou o estudante podem compartilhar experiências sobre seu uso.

## REFERÊNCIAS

BRZEZINSKI, Tim. **Falling Ladder!!!**, 2016. Disponível em: <<https://ggbm.at/ffAEhyNk>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

SANTOS, Luciane Mulazani. **Produção de significados para objetos de aprendizagem:** de autores e leitores para a educação matemática. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

Site do GeoGebra. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 07 jun. 2017.