Antônia Jocivania Pinheiro
Paulo César Linhares da Silva

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

EDUFERSA

Antônia Jocivania Pinheiro
Paulo César Linhares da Silva

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

EDUFERSA

Conselho Editorial da EdUFERSA

Mário Gaudêncio, Me.

Walter Martins Rodrigues, Dr.

Francisco Franciné Maia Júnior, Dr.

Rafael Castelo Guedes Martins, Me.

Keina Cristina S. Sousa, Me.

Antonio Ronaldo Gomes Garcia, Dr.

Auristela Crisanto da Cunha, Dr.

Janilson Pinheiro de Assis, Dr.

Luís Cesar de Aquino Lemos Filho, Dr.

Rodrigo Silva da Costa, Dr.

Valquíria Melo Souza Correia, Me.

Governo Federal
Ministro de Educação
Cid Ferreira Gomes

Universidade Aberta do Brasil
Responsável pela Diretoria da Educação a Distância
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Reitor
José de Arimatea de Matos

Pró-Reitor de Graduação
Augusto Carlos Pavão

Núcleo de Educação a Distância
Coordenadora UAB
Valdenize Lopes do Nascimento

Equipe multidisciplinar
Antônio Charleskson Lopes Pinheiro – Diretor de Produção de Material Didático
Ulisses de Melo Furtado – Designer Instrucional
Gerlândia Joca de Castro – Assessora Pedagógica
Ângelo Gustavo Mendes Costa – Assessor Pedagógico
Francisca Monteiro da Silva Perez – Assessora Pedagógica
Adriana Mara Guimarães de Farias – Programadora
Camilla Moreira Uchoa – Webdesigner
Thiago Henrique Rossato – Programador
Felipe Yuri Silva – Suporte de Informática
Jéssica de Oliveira Fernandes – Comunicação e Marketing
Ramon Ribeiro Vitorino Rodrigues – Diretor de Arte
Mikael Oliveira de Meneses – Diagramador
Alberto de Oliveira Lima – Diagramador
José Antonio da Silva – Diagramador

Arte da capa
Felipe de Araújo Alves

Equipe administrativa
Rafaela Cristina Alves de Freitas – Assistente em Administração
Iriane Teresa de Araújo – Assessora de fomento
Bruno Layson Ferreira Leão – Estagiário
Thayssa Teixeira Lira – Estagiária
Paulo Augusto Nogueira Pereira – Estagiário
Antônio Romário Bezerra Nogueira - Estagiário

Equipe de apoio
Nayra Maria da Costa Lima – Revisão Didática
Alvaneide Maria de Morais Moura – Revisão Didática
Jéssica de Oliveira Fernandes – Revisão Linguística
Márcio Vinicius Barreto da Silva – Revisão Linguística
Ceres Germana Braga Morais - Revisão Conceitual
Camilla Moreira Uchoa - Revisão Conceitual

Serviços técnicos especializados
Life Tecnologia e Consultoria

Edição
EdUFERSA

Impressão
Gráfica São Mateus

© 2016 by NEaD/UFERSA - Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, do NEaD/UFERSA. O conteúdo da obra é de exclusiva responsabilidade dos autores.

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)
Editora Universitária (EdUFERSA)

P654i Pinheiro, Antônia Jocivania.
Introdução à álgebra linear / Antônia Jocivania Pinheiro, Paulo César Linhares da Silva. – Mossoró : EdUFERSA, 2016.
100 p. : il.

ISBN: 978-85-5757-019-1

1. Álgebra linear. 2. Matemática. 3. Cálculo. I. Silva, Paulo César Linhares da. Título.

UFERSA/EDUFERSA CDD 512.5

Bibliotecário-Documentalista
Mário Gaudêncio, Bib. Me. (CRB-15/476)

BY NC SA

http://nead.ufersa.edu.br/

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

Caríssimo discente,

Estamos iniciando uma disciplina que é de fundamental importância para todos aqueles que estudam Matemática. Este curso de Introdução à Álgebra Linear é base para outras disciplinas mais avançadas do curso de Licenciatura em Matemática, como por exemplo, Cálculo III e Álgebra Abstrata.

Vale a pena ressaltarmos aqui que, para um melhor aproveitamento dessa disciplina, é aconselhável que o discente tenha cursado Geometria Analítica, já que faremos uma extensão de alguns conceitos vistos na disciplina como: vetores, espaço vetorial e base.

É muito importante que o discente procure tirar o maior proveito possível de todos os conteúdos vistos durante o decorrer da disciplina, pois como já dissemos será a base para o aprendizado de vários conhecimentos que serão essenciais para a formação de um licenciando em matemática.

No mais, estamos à disposição de todos sempre buscando contribuir com um aprendizado que venha a colaborar de forma efetiva principalmente para aqueles que irão atuar na área do ensino da matemática.

Bons estudos.

Os autores.

SOBRE OS AUTORES

ANTÔNIA JOCIVANIA PINHEIRO

Graduada em Matemática e Mestre em Matemática, na área de geometria, pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Atualmente, é professora do Departamento de Ciências Exatas e Naturais (DCEN) da Universidade Federal Rural do Semi-Àrido -UFERSA.

Durante a graduação foi bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por quatro anos seguidos, e participou dos Encontros Universitários de Iniciação à Pesquisa com os temas abaixo:

1. XXIV Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. "Construção de Caratheodory das Medidas de Hausdorff". 2005.
2. XXV Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. "A Fórmula do Fluxo para Superfície com bordo em R3". 2006.
3. XXVI Encontro Universitário de Iniciação à Pesquisa. "Teorema de Alexandrov". 2007

Com o sucesso do trabalho apresentado neste último encontro, foi convidada pelo orientador, o Professor Antônio Gervasio Colares (currículo Lattes: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?metodo=apresentar&id=K4783217H9>), a desenvolver uma monografia com o título "Superfícies de Curvatura Media Constante em R3". Com mais dois anos de dedicação, agora no mestrado, desenvolveu um novo trabalho (dissertação de mestrado) que tem como título "Hipersuperfície com r-ésima curvatura média constante positiva imersa em MxR".

PAULO CÉSAR LINHARES

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e mestre em Computação, com ênfase na área de combinatória analítica, com formação pela mesma instituição. Como professor da disciplina e com apoio de toda a equipe que compõe o Núcleo de Educação a Distância (NEaD), tem-se como objetivo contribuir para o seu sucesso profissional dos alunos e também para o sucesso do nosso curso.

De início, queremos saudar e parabeniza-lo por tomar a decisão de fazer o curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA). O nosso desejo é que todos que iniciarem o curso perseverem e cheguem à sua conclusão, e que também se sintam, ao final do curso, satisfeitos com o que aprenderam e que, principalmente, esse aprendizado seja bastante útil na vida profissional de todos.

SUMÁRIO

UNIDADE I

UNIDADE II

I

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Nesta unidade trabalharemos com algumas ferramentas para o estudo de uma estrutura chamada Espaço Vetorial: as matrizes, suas operações e propriedades. Aprenderemos a calcular determinantes e, finalmente, aplicaremos esse conhecimento para discutir e resolver sistemas de equações lineares. Muitos dos principais problemas da física, engenharia, química e, é claro, da matemática, recaem (ou procuramos fazer com que recaiam) num sistema de equações lineares.

Objetivos

- Conhecer os tipos de matrizes e operacionalizar com elas;
- Aplicar o conceito de matrizes em situações reais;
- Conceituar determinantes e descrever suas propriedades;
- Definir e classificar sistemas lineares;
- Resolver sistemas lineares usando o método de Gauss-Jordan;
- Resolver sistemas lineares usando o método do escalonamento;
- Apresentar a Regra de Cramer.

Matrizes

Introdução

Consideremos o conjunto de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da EaD, ligados ao polo GCN, cursando a disciplina Introdução à Álgebra Linear. Digamos que sejam 5 alunos. Ao longo do semestre, eles farão duas avaliações *online* e duas presenciais, num total de quatro notas parciais. Representaremos esses dados na tabela abaixo:

TABELA 1: Notas de alunos do polo de GCN

Alunos	AO1	AO2	AP1	AP2
Aline	4,5	6,2	7,0	5,5
Bárbara	7,2	6,8	8,0	10,0
Charles	8,0	7,5	5,9	7,2
Davi	9,2	8,5	7,0	8,0
Eliana	6,8	7,2	6,8	7,5

Para calcular a nota final de um determinado aluno, digamos, o Charles, basta atentarmos para a linha correspondente (8,0; 7,5; 5,9; 7,2); por outro lado, se estivermos interessados em calcular a média da turma na segunda avaliação online, devemos olhar para a coluna correspondente (6,2; 6,8; 7,5; 8,5; 7,2). Também podemos ir diretamente ao local da tabela em que se encontra, por exemplo, a nota de Charles na segunda avaliação presencial (7,2).

Vejamos agora, a definição formal de matrizes.

Definição: Uma matriz real A de ordem m X n (m *por* n) é uma tabela de mn números reais, dispostos em m linhas e n colunas, onde m e n são números inteiros positivos.

Uma matriz real de m linhas e n colunas pode ser representada por $A_{m\times n}(\mathbb{R})$. Neste curso, como só trabalharemos com matrizes reais, usaremos a notação simplificada $A_{m\times n}$, que se lê "matriz A m por n". Também podemos escrever $A = (a_{ij})$; onde $i \in \{1,2,...,m\}$ é o índice de linha e $j \in \{1,2,...,n\}$ é o índice de coluna do termo genérico da matriz. Ou ainda,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

SAIBA MAIS

Estrutura matemática é um conjunto no qual são definidas operações. As propriedades dessas operações "estruturam" o conjunto. Talvez você já tenha ouvido falar em alguma das principais estruturas matemáticas, como grupo, anel e corpo. Você estudará essas estruturas nas disciplinas de álgebra.

O conjunto de todas as matrizes reais "m por n" é representado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Os elementos de uma matriz são limitados por parênteses, colchetes ou barras duplas.

Exemplo 1

i. Uma matriz 2 × 3: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{7} & 6 \end{pmatrix}$

ii. Uma matriz 3 × 1: $\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

iii. Uma matriz 3 × 3: $\begin{Vmatrix} 4 & 13 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 8 & 7 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$

Exemplo 2

Os dados da Tabela 1 representam as notas dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da EaD e podem ser apresentados na matriz dada a seguir:

$$\begin{pmatrix} 4,5 & 6,2 & 7,0 & 5,5 \\ 7,2 & 6,8 & 8,0 & 10,0 \\ 8,0 & 7,5 & 5,9 & 7,2 \\ 9,2 & 8,5 & 7,0 & 8,0 \\ 6,8 & 7,2 & 6,8 & 7,5 \end{pmatrix},$$

onde cada elemento a_{ij} dessa matriz é a nota obtida pelo aluno de número *i* na avaliação *j*. Por exemplo, o elemento a_{24} é a nota (10,0) obtida pelo aluno que está na segunda posição (Bárbara) na quarta avaliação (segunda avaliação presencial).

Podemos também representar os elementos de uma matriz por fórmulas, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 3

Seja $A \in M_{2\times 3}$, $A = (a_{ij})$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2, se\ i = j \\ i + j, se\ i \neq j \end{cases}.$$

A matriz A é, portanto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2^2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tipos de matrizes

Primeiramente definiremos os tipos de matrizes dados de acordo com o número de linhas e colunas. Seja $A_{m\times n} = (a_{ij})$, esta matriz pode ser:

Matriz Linha

Definição: Quando m=1, chamamos a matriz $A_{1\times n}$ de matriz linha:

A=$(a_1\ \ a_2 \dots a_n)$.

Observação: A matriz linha é denominada vetor linha (ou simplesmente, vetor), assim

A = $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Matriz Coluna

Definição: Quando $n = 1$, chamamos a matriz $A_{m\times 1}$ de matriz coluna:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Observação: A matriz coluna pode ser denominada vetor coluna.

Matriz Quadrada

Definição: Chamamos de matriz quadrada a matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas, isto é, $m = n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dizemos que a matriz acima é uma matriz quadrada de ordem n, e escrevemos apenas A_n.

Destacamos numa matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$ os seguintes elementos:

- diagonal principal é formada pelos termos a_{ii}, ou seja, pelos termos onde os índices de linha e de coluna são iguais.

- diagonal secundária é formada pelos termos a_{ij}, onde $i + j = n + 1$.

Exemplo: Destacamos a diagonal principal e a secundária na matriz $A_{3\times 3}$ a seguir:

Diagonal Secundária

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal

Matrizes Quadradas Especiais

Dada uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$, dizemos que A é uma matriz:

- triangular superior, quando $a_{ij} = 0$ se $i > j$, ou seja, possui todos os elementos abaixo da diagonal principal nulos.

Exemplo: A matriz abaixo é uma matriz quadrada de ordem 4 chamada matriz triangular superior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

➢ triangular inferior, quando $a_{ij} = 0$ se $i < j$, ou seja, possui todos os elementos acima da diagonal principal nulos.

Exemplo: A matriz abaixo é uma matriz quadrada de ordem 3 chamada matriz triangular inferior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

➢ diagonal, quando $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, ou seja, possui todos os elementos fora da diagonal principal nulos.

Observação: Uma matriz diagonal é, ao mesmo tempo, triangular superior e triangular inferior.

Exemplo: A matriz abaixo é uma matriz quadrada de ordem 4 chamada matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

➢escalar, quando $a_{ij} = \begin{cases} k, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$ onde k é um real qualquer. Isto é, uma matriz escalar é diagonal e possui todos os elementos da diagonal principal iguais a um certo escalar k.

Observação: Uma matriz escalar onde temos $k = 1$ é chamada matriz identidade. E é representada por I_n, ou simplesmente, I.

Exemplo: A matriz abaixo é uma matriz quadrada de ordem 4 chamada matriz escalar:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Igualdade entre Matrizes

Definição: Dadas as matrizes $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, dizemos que $A = (a_{ij})$ é igual a $B = (b_{ij})$, denotamos por $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplo: Para determinar $x,\ y\ e\ z$ sabendo que as matrizes $\begin{pmatrix} 5 & z^2 \\ y+3 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 81 \\ 2 & \frac{x}{z} \end{pmatrix}$ são iguais, devemos, usando a definição, resolver as seguintes equações:

$$\begin{cases} z^2 = 81 \Rightarrow z = \sqrt{81} \Rightarrow z = 9 \\ y + 3 = 2 \Rightarrow y = 2 - 3 \Rightarrow y = -1 \\ 3 = \dfrac{x}{z} \Rightarrow x = 3z = 3 \cdot 9 \Rightarrow x = 27 \end{cases}.$$

Matriz Oposta

Definição: Dada a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, dizemos que a matriz $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é oposta de A se $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Ou seja, os elementos da matriz oposta de A são os elementos opostos aos elementos de A. Representamos a oposta de A por $-A$.

Exemplo: A matriz oposta de $A = \begin{pmatrix} 2 & 27 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ é $-A = \begin{pmatrix} -2 & -27 & -9 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

Matriz Transposta

Definição: Dada a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, dizemos que a matriz $B = (b_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ é transposta de A se $b_{ji} = a_{ij}$ para todo $i \in \{1,2,...,m\}$ e todo $j \in \{1,2,...,n\}$. Representamos a transposta de A por A^t.

Observação: Note que para obter a transposta de uma matriz A, basta escrever as linhas de A como sendo as colunas da nova matriz ou, equivalentemente, escrever as colunas de A como as linhas da nova matriz.

Exemplo: A seguir temos a matriz A e sua transposta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{7} & 6 \end{pmatrix} \text{ é } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{7} \\ \frac{2}{3} & 6 \end{pmatrix}$$

Propriedades

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ quaisquer e $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

$(T1)$ $(A^t)^t = A$.

$(T2)$ $(A + B)^t = A^t + B^t$

$(T3)$ $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

$(T4)$ $(AB)^t = B^t . A^t$

Matriz Simétrica

Definição: Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica se $A = A^t$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ é simétrica, já que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} = A$.

Matriz Antissimétrica

Definição: Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ é antissimétrica se $A = -A^t$, isto é, $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i = j \\ -a_{ji}, se\ i \neq j \end{cases}$.

Exemplo: A matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 7\\ 3 & -7 & 0\end{pmatrix}$ é antissimétrica, já que $A^t=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -7\\ -3 & 7 & 0\end{pmatrix}=-A.$

Observação: Note que, todos os elementos da diagonal principal de uma matriz antissimétrica são, necessariamente, iguais a zero.

Operações com matrizes

Adição

Vamos considerar novamente, o exemplo dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do polo GCN que cursam a disciplina Introdução à Álgebra Linear, onde a matriz, referente à nota desses alunos, foi vista no exemplo 2 do tópico *introdução*. Cada aluno tem seu nome associado a um número (o número da linha) e cada prova também é associada a um número (o número da coluna). Assim, como vimos anteriormente temos a matriz abaixo:

$$N=\begin{pmatrix}4{,}5 & 6{,}2 & 7{,}0 & 5{,}5\\ 7{,}2 & 6{,}8 & 8{,}0 & 10{,}0\\ 8{,}0 & 7{,}5 & 5{,}9 & 7{,}2\\ 9{,}2 & 8{,}5 & 7{,}0 & 8{,}0\\ 6{,}8 & 7{,}2 & 6{,}8 & 7{,}5\end{pmatrix}.$$

Supondo que as provas tenham sido submetidas a uma recorreção, temos abaixo as alterações que deverão ser feitas nas notas:

$$R=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0\\ -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0\\ 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0\\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0\\ 1{,}0 & 0{,}0 & -0{,}3 & 0{,}0\end{pmatrix}.$$

Logo, as notas corrigidas, N_C, dos alunos serão dadas pela soma da matriz N com a matriz R, isto é, a matriz N_C é formada pelas somas de cada nota (na matriz N) com seu fator de correção (elementos correspondentes, na matriz R):

$$N_C=N+R=\begin{pmatrix}4{,}5 & 6{,}2 & 7{,}0 & 5{,}5\\ 7{,}2 & 6{,}8 & 8{,}0 & 10{,}0\\ 8{,}0 & 7{,}5 & 5{,}9 & 7{,}2\\ 9{,}2 & 8{,}5 & 7{,}0 & 8{,}0\\ 6{,}8 & 7{,}2 & 6{,}8 & 7{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0\\ -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0\\ 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0\\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0\\ 1{,}0 & 0{,}0 & -0{,}3 & 0{,}0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}5+0{,}5 & 6{,}2+(-0{,}5) & 7{,}0+0{,}0 & 5{,}5+0{,}0\\ 7{,}2+(-0{,}2) & 6{,}8+0{,}0 & 8{,}0+0{,}0 & 10{,}0+0{,}0\\ 8{,}0+0{,}0 & 7{,}5+0{,}5 & 5{,}9+0{,}0 & 7{,}2+0{,}0\\ 9{,}2+0{,}0 & 8{,}5+0{,}0 & 7{,}0+0{,}0 & 8{,}0+0{,}0\\ 6{,}8+1{,}0 & 7{,}2+0{,}0 & 6{,}8+(-0{,}3) & 7{,}5+0{,}0\end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$N_C=\begin{pmatrix}5{,}0 & 5{,}7 & 7{,}0 & 5{,}5\\ 7{,}0 & 6{,}8 & 8{,}0 & 10{,}0\\ 8{,}0 & 9{,}2 & 7{,}8 & 8{,}0\\ 8{,}5 & 7{,}2 & 5{,}9 & 7{,}0\\ 6{,}5 & 7{,}2 & 8{,}0 & 7{,}5\end{pmatrix}.$$

Definição: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, definimos por $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, a matriz soma de A e B, representada por $A + B$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $\forall j \in \{1,2,...,n\}$. Isto é, cada elemento de $A + B$ é a soma dos elementos correspondentes das matrizes A e B.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -7 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ a matriz soma de A por B é dada por:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & -7 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+11 & (-1)+0 & 7+(-7) \\ (-3)+13 & 0+8 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 0 \\ 10 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observação: A diferença de A e B, indicada por A - B, é a soma de A com a matriz oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -7 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ a diferença de A por B é dada por:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 & 7 \\ -13 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-11) & (-1)+0 & 7+7 \\ (-3)+(-13) & 0+(-8) & 4+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 14 \\ -16 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriedades

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ quaisquer, vale as seguintes propriedades:

(A1) *Comutativa:* $A + B = B + A$

(A2) *Associativa:* $(A + B) + C = A + (B + C)$

(A3) *Existência do elemento neutro:* Existe $O \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + O = A$.

(A4) *Existência do elemento oposto:* Existe $(-A) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + (-A) = O$.

(A5) *Soma de transpostas:* $(A + B)^t = A^t + B^t$

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Voltando à nossa tabela de notas dos alunos do polo GCN, suponhamos que, para facilitar o cálculo das médias, queiramos trabalhar numa escala de 0 a 100 (em vez de 0 a 10). Para isso, cada nota deverá ser multiplicada por 10. Assim, as notas dos alunos passarão a ser:

$$\begin{pmatrix} 50 & 57 & 70 & 55 \\ 70 & 68 & 80 & 100 \\ 80 & 92 & 78 & 80 \\ 85 & 72 & 59 & 70 \\ 65 & 72 & 80 & 75 \end{pmatrix}.$$

Na verdade, o que fizemos foi:

$$10.N_C = \begin{pmatrix} 10.5,0 & 10.5,7 & 10.7,0 & 10.5,5 \\ 10.7,0 & 10.6,8 & 10.8,0 & 10.10,0 \\ 10.8,0 & 10.9,2 & 10.7,8 & 10.8,0 \\ 10.8,5 & 10.7,2 & 10.5,9 & 10.7,0 \\ 10.6,5 & 10.7,2 & 10.8,0 & 10.7,5 \end{pmatrix}.$$

Definição: Dada a matriz $A = (a_{ij})$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos por $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, a matriz produto de A por α, representada por αA, tal que $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2,..., m\}$ e $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$. Isto é, cada elemento de αA é o produto de α pelos elementos correspondentes da matriz A.

Exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 11 & 4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ temos que

i. $$-3A=-3.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-3).2 & (-3).(-3) \\ (-3).(-1) & (-3).0 \\ (-3).7 & (-3).4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 0 \\ -21 & -12 \end{pmatrix}.$$

ii. $$2A-\frac{1}{2}B=2.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 11 & 4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{6}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{11}{2} & -\frac{4}{2} \\ -\frac{12}{2} & \frac{6}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{11}{2} & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+(-3) & (-6)+1 \\ (-2)+\left(-\frac{11}{2}\right) & 0+(-2) \\ 14+(-6) & 8+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -\frac{15}{2} & -2 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Propriedades

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, vale as seguintes propriedades:

$(M1)$ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

$(M2)$ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$(M3)$ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$(M4)$ $1.A = A$

$(M5)$ $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

Exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, vamos calcular $2.\left(2A^t-\frac{1}{2}B\right)^t$. Para isso, vamos usar as propriedades vistas anteriormente:

$$2.\left(2A^t+\left(-\frac{1}{2}B\right)\right)^t \overset{(A5)}{=} 2.\left(\left(2A^t\right)^t+\left(-\frac{1}{2}B\right)^t\right) \overset{(M5)}{=} 2.\left(2\left(A^t\right)^t-\frac{1}{2}(B)^t\right)$$

$$\overset{(T1)}{=} 2.\left(2A-\frac{1}{2}B^t\right) \overset{(M3)}{=} 2.(2A)-2.\left(\frac{1}{2}B^t\right) \overset{(M1)}{=} 4A-B^t=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8-4 & 4-(-2)\\ 0-0 & (-4)-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 0 & -10\end{pmatrix}.$$

Produto de matrizes

Considerando, novamente, o exemplo dos alunos da Introdução à Álgebra Linear, temos a seguinte matriz, na qual fornece as notas dos alunos numa escala de 0 a 100:

$$N_C=\begin{pmatrix}50 & 57 & 70 & 55\\ 70 & 68 & 80 & 100\\ 80 & 92 & 78 & 80\\ 85 & 72 & 59 & 70\\ 65 & 72 & 80 & 75\end{pmatrix}.$$

Lembrando que as duas primeiras colunas indicam as notas das avaliações online, e as duas últimas, as notas das avaliações presenciais dos alunos Aline, Bárbara, Charles, Davi e Eliana, nessa ordem.

Supondo que as avaliações online tenham, cada uma, peso 2, isto é, cada uma colabora com $\frac{2}{10}$ (ou 20%) da nota final. Enquanto cada avaliação presencial terá peso 3, ou seja, representará $\frac{3}{10}$ (ou 30%) da nota final. Então, a nota final de cada aluno será dada por:

$$N_F=\frac{2.A_{O1}+2.A_{O2}+3.A_{P1}+3.A_{P2}}{10}=\frac{2}{10}A_{O1}+\frac{2}{10}A_{O2}+\frac{3}{10}A_{P1}+\frac{3}{10}A_{P2}.$$

Seja P a matriz coluna dada pelos pesos das notas na ordem que aparece acima, isto é:

$$P=\begin{pmatrix}2/10\\ 2/10\\ 3/10\\ 3/10\end{pmatrix}.$$

Logo, em vez de escrever uma expressão para cada um dos 5 alunos, basta efetuarmos a seguinte operação:

$$N_C.P=\begin{pmatrix}50 & 57 & 70 & 55\\ 70 & 68 & 80 & 100\\ 80 & 92 & 78 & 80\\ 85 & 72 & 59 & 70\\ 65 & 72 & 80 & 75\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2/10\\ 2/10\\ 3/10\\ 3/10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{10.50}+\frac{2}{10.57}+\frac{3}{10.70}+\frac{3}{10.55}\\ \frac{2}{10.70}+\frac{2}{10.68}+\frac{3}{10.80}+\frac{3}{10.100}\\ \frac{2}{10.80}+\frac{2}{10.80}+\frac{3}{10.59}+\frac{3}{10.72}\\ \frac{2}{10.92}+\frac{2}{10.85}+\frac{3}{10.70}+\frac{3}{10.80}\\ \frac{2}{10.78}+\frac{2}{10.72}+\frac{3}{10.65}+\frac{3}{10.75}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58{,}9\\ 81{,}6\\ 71{,}3\\ 80{,}4\\ 72\end{pmatrix}$$

Note que para fazer a operação acima, devemos ter o número de colunas da primeira matriz igual ao número de linhas da segunda, ou equivalentemente, o número de termos em cada linha da primeira é igual ao número de termos de cada coluna da segunda. Dessa forma, podemos multiplicar os pares de elementos, simultaneamente, uma linha da primeira matriz e uma coluna da segunda e, depois, somamos os produtos obtidos. Esse elemento obtido estará na posição *ij* da matriz resultante, onde *i* é o número referente à linha da primeira matriz e *j* é o número referente à coluna da segunda. Por exemplo, $a_{41} = 80{,}4$, pois esse elemento foi o resultado da operação feita com a linha 4 da primeira matriz com a coluna 1 da segunda matriz.

Definição: Dadas as matrizes $A = (a_{ik}) \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{kj}) \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$, definimos por matriz produto de A e B, a matriz $A.B = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n.$$

Observação: O somatório anterior está dizendo que o elemento *ij* do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da *i*-ésima linha de *A* pelos elementos correspondentes da *j*-ésima coluna de *B*. Isto é,

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} & \underline{\cdots} & \underline{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

Ou seja, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$.

Exemplo: Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. O produto dessas matrizes é dado por:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+(-1).0+7.5 & 2.5+(-1).0+7.1 & 2.0+(-1).3+7.4 \\ (-3).1+0.0+4.5 & (-3).5+0.0+4.1 & (-3).0+0.3+4.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 17 & 25 \\ 17 & -11 & 16 \end{pmatrix}.$$

Propriedades

($P1$) $(A.B).C = A.(B.C)$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{R}), C \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$;

($P2$) $A.(B + C) = A.B + A.C$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$;

($P3$) $(A + B) . C = A.C + B.C$, $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$;

($P4$) $\alpha(A.B) = (\alpha A) . B = A.(\alpha B)$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$;

($P5$) Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $I_m.A = A.I_n = A$;

($P6$) $(AB)^t = B^t . A^t$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, B $\in M_{n \times p}(\mathbb{R})$;

($P7$) O produto matricial não é, em geral, comutativo.

Exemplos

i. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Note que,

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 12 \end{pmatrix} \text{ e } B.A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Concluímos, então, desse exemplo, que a propriedade comutativa não vale para produto de matrizes.

ii. Dadas as matrizes quadradas A e B, vamos verificar se vale a igualdade

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

Temos pelas propriedades anteriores que:

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= (A+B)(A+(-B)) \overbrace{=}^{P2} (A+B).A + (A+B)(-B) \\ &\overbrace{=}^{P3} A.A + B.A + A.(-B) + B.(-B) \overbrace{=}^{P4} A^2 + B.A - A.B - B^2\end{aligned}$$

Concluímos, então que a igualdade vale se, e somente se, $B.A - A.B = 0$, ou seja, se, e somente se, $A.B = B.A$. Como o produto de matrizes não é comutativo, a conclusão é que a igualdade não vale para matrizes em geral.

Observação: A igualdade $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ só vale se as matrizes A e B forem comutativas, isto é, se valer $A.B = B.A$.

Inversão de matrizes

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n, dizemos que B é a matriz inversa de A, denotada por $B = A^{-1}$, se $A.B = B.A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Se a matriz A possui inversa, dizemos que A é inversível ou não singular. Caso contrário, dizemos que A é não inversível ou singular.

Exemplo: Determine, caso exista, a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Seja $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ a matriz inversa de A, assim,

$$AB = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+5z & 2y+5t \\ x+3z & y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos então,

$$\begin{cases} 2x+5z=1 \\ x+3z=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2y+5t=0 \\ y+3t=1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$, $y = -5$, $z = -1$ e $t=2$.

Observação: Quando definirmos determinantes, veremos que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$, onde $det\ (A)$ é o determinante da matriz A e $adj(A)$ é a matriz adjunta de A, definidos posteriormente.

Propriedades

($I1$) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então $(A^{-1})^{-1} = A$;

($I2$) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;

($I3$) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Matriz Ortogonal

Definição: Dada uma matriz $A \in M_n$ (R), inversível, dizemos que A é ortogonal, se $A^{-1} = A^t$.

Observação: Note que, $A^{-1} = A^t \Leftrightarrow AA^{-1} = AA^t \Leftrightarrow I = AA^t$, assim para verificar se uma matriz A é ortogonal, basta multiplicar A por A^t e observar se o produto é a identidade.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é ortogonal, já que,

$$AA^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})$ em cada caso:

a) A é do tipo 2 × 3 e $a_{ij} = \begin{cases} i + j, se\ i = j \\ i - 2j, se\ i \neq j \end{cases}$

b) A é quadrada de ordem 4 e $a_{ij} = \begin{cases} -i, se\ i < j \\ i - j, se\ i = j \\ 2j, se\ i > j \end{cases}$

c) A é quadrada de terceira ordem e $a_{ij} = i - 2j + 4$.

2. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 9 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 9 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se for possível calcule:

a) $2C - D$

b) $A.B - B.A$

c) $(2D^t - 3E)^t$

3. Calcule o valor de x, sabendo-se que $A^t = A$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x - 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Verifique quais dos itens abaixo são verdadeiros ou falsos:

a) $(-A^t) = -A^t$

b) $(A + B)^t = B^t + A^t$

c) Se $A.B = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$

d) $(k_1 A) . (k_2 B) = (k_1 k_2)\ A. B,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

e) $(-A) . (-B) = -(A.B)$

f) Se A e B são matrizes simétricas, então $A.B = B.A$

g) Se $A . B = 0$, então $B . A = 0$

5. Sabendo-se que , $A.B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e $A.C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, calcule $A.(B+C)$, $B^t\,A^t$, $C^t\,A^t$ e $(ABA)C$.

6. Se $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$, ache B de modo que $B^2 = A$, onde $B^2 = B.B$.

7. Dadas as matrizes $A = (x \;\; 4 \; -2)$ e $B = (2 \; -3 \;\; 5)$, encontre o valor de x sabendo que $A.B^t = 0$.

8. Se $AB = BA$ e p é um inteiro positivo, mostre que $(AB)^p = A^p B^p$.

9. Determine x e y para que a matriz $\begin{pmatrix}2 & 4 & 2x-y\\ x+y & 3 & 0\\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix}$ seja simétrica.

10. Determine as matrizes X e Y tais que $\begin{cases}2X+Y=A\\ X-2Y=B\end{cases}$, onde $A=\begin{pmatrix}9 & 4 & 2\\ 6 & 12 & 11\end{pmatrix}$ e $A=\begin{pmatrix}-8 & 7 & -9\\ -12 & -19 & -2\end{pmatrix}$

11. Calcule o valor de k para que a matriz $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & k\end{pmatrix}$ não tenha inversa.

12. Determine os valores de x e y para que as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -9 & 5\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}x & -1\\ 3 & y\end{pmatrix}$ comutem.

13. Sejam A, B e C inversíveis, determine X em cada equação.

a) $A\,X\,B = C$

b) $AB = CX$

c) $(AX)^{-1}B = BC$

d) $[(AX)^{-1}\,B]^t = C$

14. Quais as condições de k para que a matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & k\end{pmatrix}$ seja inversível.

Determinantes

Definição de determinante

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, isto é, $A \in M_n$ (R). Definimos o determinante de A, representado por $det\, A$ ou $|A|$, da seguinte forma:

- Se $n = 1$, ou seja, $A = (a_{11})$ então $det\, A = a_{11}$.

- Se $n > 1$ então $A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{-i,-j})$, onde i é uma linha qualquer fixada de A e $A_{-i,-j}$ é a matriz quadrada de ordem n-1 obtida a partir de A, com a retirada da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Observe como é simples de calcular o determinante de uma matriz. Vamos calcular para $n = 2$ e $n = 3$:

- n=2: Temos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e seu determinante, considerando a primeira linha, isto é, i =1, é dado por:

$$detA = (-1)^{1+1}a_{11}det(A_{-1,-1}) + (-1)^{1+2}a_{12}det(A_{-1,-2}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- n=3: Temos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e seu determinante, considerando a primeira linha, isto é, i = 1, é dado por:

$$detA = (-1)^{1+1}a_{11}det(A_{-1,-1}) + (-1)^{1+2}a_{12}det(A_{-1,-2}) + (-1)^{1+3}a_{13}det(A_{-1,-3}) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Observação: A definição de determinante também pode ser feita fixando uma coluna j ao invés de uma linha. Assim, teríamos $det\ A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{-i,-j})$.

Exemplo 1: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, temos:

$$detA = (-1)^{1+1}.2.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}.1.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}.4.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2.(2.5-0.1) - 1.(0.5-3.1) + 4(0.0-3.2)$$
$$= 2.10 - (-3) + 4.(-6) = 20 + 3 - 24 = -1.$$

SAIBA MAIS

Determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada um valor real. Essa função, além de atuar na solução de sistemas de equações lineares, permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0.

Exemplo2: Vamos determinar o valor de x sabendo que $det\begin{pmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & -2 & x \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix} = 8$. Com efeito,

$$8 = det\begin{pmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & -2 & x \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}3\begin{pmatrix} -2 & x \\ -1 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}x\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 3(-2x - x) - 2(x - 2x)$$

$$+x(-1 - 2(-2)) = 3(-x) - 2(-x) + x(3) = -3x + 2x + 3x = 2x \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4.$$

DICA

Note que o determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Esses produtos se chamam, respectivamente, *termo principal e termo secundário* da matriz.

Propriedades dos determinantes

Sejam $A, B \in M_n$ (R), temos:

($D1$) Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A são nulos, então $det\ A = 0$.

($D2$) $det\ A = det\ A^t$.

($D3$) Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de A por uma constante k, o determinante fica multiplicado por k.

($D4$) Quando trocamos duas linhas (ou colunas) de A, o determinante troca de sinal.

($D5$) Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $detA = 0$.

($D6$) Se escrevemos cada elemento de uma linha (ou coluna) de A como soma de 2 parcelas, então $detA$ é a soma de dois determinantes de ordem n, cada um considerando como elemento daquela linha (ou coluna) uma das parcelas, e repetindo as demais linhas (ou colunas)

($D7$) O determinante de A não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

($D8$) $det\ (A\ .B) = det\ A\ .\ det\ B$.

($D9$) O determinante de uma matriz triangular é o seu termo principal.

($D10$) Se A é inversível, então $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$.

($D11$) Se $A \in M_n$ (R) é ortogonal, então $detA = \pm 1$.

Concluímos da propriedade (D10) que:

Teorema: Seja $A \in M_n$ (R).

$$A \text{ é inversível} \Leftrightarrow detA \neq 0.$$

27

Exemplo 1: Para calcular o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, note que se somarmos a segunda linha à terceira, obteremos a matriz

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Logo, pela propriedade (D7) o determinante dessas duas matrizes é o mesmo. Portanto,

$$detA=det\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(-1)^{3+1}.0.det\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}+(-1)^{3+2}.0.det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}+(-1)^{3+3}.1.det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=1.1-2.(-2)=1+4=5$$

Observação: Note que, no exemplo anterior, para calcularmos o determinante aplicamos a fórmula fixando a terceira linha para reduzir as contas, já que a mesma contém dois zeros.

Exemplo 2: Determine x para que a matriz $A=\begin{pmatrix}x & 1\\ 20-x & x\end{pmatrix}$ seja inversível.

Sabemos da propriedade ($D10$), que A é inversível se, e somente se, $detA \neq 0$. Logo, devemos ter

$$x^2-(20-x)\neq 0 \Leftrightarrow x^2+x-20\neq 0.$$

Mas, note que, $x^2+x-20=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-20)}}{2.1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{81}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}\Leftrightarrow x=4\ ou\ x=-5.$

Portanto,

$$x^2-(20-x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4\ e\ x\neq -5.$$

Matriz adjunta e matriz inversa

Definição 1: Seja $A \in M_n$ (R). Chamamos de matriz dos cofatores de A a matriz $\bar{A}=(\overline{a_{ij}}) \in M_{n-1}$ (R), tal que

$$(\overline{a_{ij}}) = (-1)^{i+j}\ det(A_{-i,-j})$$

onde $A_{-i,-j}$ é a matriz quadrada de ordem n - 1 obtida a partir de A, com a retirada da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Exemplo 1: Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, temos que a matriz $A_{-2,-3}$ é dada por:

$$A_{-2,-3}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}}\\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}}\\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$$

Exemplo 2: Determine a matriz dos cofatores da matriz$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix}$. Temos, por definição, que a matriz dos cofatores é dada por $\bar{A}=(\overline{a_{ij}})$, onde $\overline{a_{ij}}=(-1)^{i+j}\ det\ (A_{-i,-j})$, logo:

$$\overline{a_{11}} = (-1)^{1+1} det(A_{-1,-1}) = det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 5-24 = -19$$

$$\overline{a_{12}} = (-1)^{1+2} det(A_{-1,-2}) = -1.det\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -(-15-4) = 19$$

$$\overline{a_{13}} = (-1)^{1+3} det(A_{-1,-3}) = det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = -18-1 = -19$$

$$\overline{a_{21}} = (-1)^{2+1} det(A_{-2,-1}) = -1.det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = -(5-0) = -5$$

$$\overline{a_{22}} = (-1)^{2+2} det(A_{-2,-2}) = det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (10-0) = 10$$

$$\overline{a_{23}} = (-1)^{2+3} det(A_{-2,-3}) = -1.det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = -(12-1) = -11$$

$$\overline{a_{31}} = (-1)^{3+1} det(A_{-3,-1}) = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (4-0) = 4$$

$$\overline{a_{32}} = (-1)^{3+2} det(A_{-3,-2}) = -1.det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = -(8-0) = -8$$

$$\overline{a_{33}} = (-1)^{3+3} det(A_{-3,-3}) = det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (2+3) = 5$$

Portanto,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Definição 2: Seja A ∈ M_n (R). Chamamos de matriz adjunta de *A*, denotamos por *adjA*, a transposta da matriz dos cofatores de *A*. Assim,

$$adjA = (\bar{A})^t.$$

Exemplo 3: Determine a matriz adjunta da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Temos, por definição, que *adjA* = $(\bar{A})^t$. Sabemos, do exemplo anterior, que

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$adjA = \left(\overline{A}\right)^t = \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1: Toda matriz $A \in M_n$ (R) satisfaz $A.adjA = (detA)\, I_n$.

Demonstração: Seja $A = (a_{ij})$ e $adjA = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = \bar{a}_{ji} = (-1)^{j+i} det(A_{-j,-i})$. Assim, $A.adjA = (c_{ij})$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.\bar{a}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.(-1)^{j+k} det(A_{-j,-k}) = \begin{cases} detA, \; se \; i = j \\ 0, \; se \; i \neq j \end{cases}$$

logo, usando a propriedade de matriz temos:

$$A.adjA = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} detA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & detA & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & detA \end{pmatrix} = (detA)I_n.$$

Teorema 2: Toda matriz $A \in M_n$ (R) inversível satisfaz $A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA.$

Demonstração: Seja A = (aij) uma matriz quadrada de ordem n, inversível. Assim $detA \neq 0$. Temos pela propriedade de determinante ($D9$) que:

$$det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{detA},$$

Logo, pelo teorema 1:

$$A.adjA = (detA)I_n \Rightarrow A.\left(\frac{1}{detA}.adjA\right) = I_n \Rightarrow A^{-1}.\left[A.\left(\frac{1}{detA}.adjA\right)\right] = A^{-1}.I_n \Rightarrow \left(A^{-1}.A\right).\left(\frac{1}{detA}.adjA\right) = A^{-1}$$

$$\Rightarrow (I_n).\left(\frac{1}{detA}.adjA\right) = A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{detA}.\left[(adjA).I_n\right] = A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{detA}.adjA = A^{-1}.$$

Concluímos então que:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA.$$

Observação: O teorema 2 nos fornece outro método para calcular uma matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA$$

Exemplo 4: Determine, caso exista, a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$.

Como $detA$ = 6.4 - 11.2 = 2 ≠ 0, temos que a matriz A é inversível, isto é, existe a matriz A^{-1}. Logo, sendo

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA$$

temos,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} det\left(A_{-1,-1}\right) & (-1)^{1+2} det\left(A_{-1,-2}\right) \\ (-1)^{2+1} det\left(A_{-2,-1}\right) & (-1)^{2+2} det\left(A_{-2,-2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } adjA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5: Determine a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

A matriz adjunta dessa matriz já foi calculada no exemplo 3. Logo, como:

$$detA = 2.det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1.det\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + 0.det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 2.(-19) - (-19) + 0 = -38 + 19 = -19$$

temos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA = \frac{1}{-19}.\begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{pmatrix}.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 8 \\ 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 8 & 12 & -3 \end{pmatrix}$ calcule os seguintes determinantes:

   a) $det\,(A + B)$

   b) $det\,(AB)$

   c) $det\,(B^t\ A^t)$

   d) $det\,(2A - 5C + B)$

   e) $det\,[A(C)^t]$

2. Encontre os determinantes abaixo, sabendo que $det\,(A) = -2$.

   a) $\det\,(A^t)$

   b) $det\,(2A)$

   c) $det\,(A^3)$

   d) $det\,(A^{-1})$

3. Resolva as equações.

   a) $det\begin{pmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{pmatrix} = -128$

   b) $det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 39$

   c) $det\begin{pmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix} = -7$

4. Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis. Resolva as equações matriciais, onde a X é a variável.

   a) $ABX = C$

   b) $CAX^t = C$

   c) $AX^2\,C = AXBC$

   d) $CX + 2B = 3B$

5. Encontre todos os valores de x para os quais a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$ tem inversa.

6. Mostre que, se $A^t = A^{-1}$, então $detA = \pm 1$.

7. Seja A uma matriz quadrada, de ordem n. Mostre que A é inversível se, e somente se, $A^t A$ é inversível.

8. Dadas as matrizes A e P quadradas, de ordem n, onde P é inversível, mostre que $det\,(P^{-1} AP) = detA$.

9. Responda verdadeiro ou falso e justifique sua resposta.

a) Se $A^2 = -2A^2$, então $(I - A^2)^{-1} = I - 2A^2$;

b) Se $A^t = -A^2$ e $detA \neq 0$, então determinante de A é -1.

c) Se $B = AA^t A^{-1}$, então $detA = detB$.

d) $det(A + B) = detA + detB$

10. Calcule os determinantes abaixo, usando as propriedades de determinantes, sabendo que $detA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 10$

a) $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

b) $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$

c) $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{5} & \frac{e}{5} & \frac{f}{5} \\ g & h & i \end{pmatrix}$

d) $det \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

e) $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$

f) $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g+d & h+e & i+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Sistemas de equações lineares

Introdução

Para que estudar sistemas lineares? Essa é uma pergunta feita com frequência pelos alunos. Por isso, considere o problema abaixo como motivação:

A nutricionista Márcia estabeleceu uma dieta diária contendo 25 unidades de vitamina A, 20 unidades de vitamina B, 10 unidades de vitamina C, 5 unidades de vitamina D e 8 unidades de vitamina E. Essas vitaminas estão contidas em quantidades variadas em cinco alimentos que vamos chamar de A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5. O quadro seguinte fornece o número de unidades das vitaminas A, B, C, D e E em cada unidade desses cinco alimentos.

TABELA 2: Número de unidades das vitaminas A, B, C, D e E por unidade de cada alimento.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A	0	1	4	4	3
B	2	1	0	3	2
C	1	1	0	2	0
D	0	0	0	1	1
E	0	0	0	4	0

Como calcular as quantidades dos cinco alimentos que devem ser incluídas na dieta diária, para obter os teores desejados de vitamina?

Veja como fica o problema:

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 o número de unidades dos alimentos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, respectivamente, de uma dieta diária. O teor de 25 unidades de vitamina A pode ser expresso pela seguinte equação:

$$0.x_1 + 1.x_2 + 4.x_3 + 4.x_4 + 3.x_5 = 25 \Rightarrow x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 25.$$

Analogamente, podemos expressar os teores das vitaminas B, C, D e E, respectivamente, pelas equações:

$2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 20$

$x_1 + x_2 + 2x_4 = 10$

$x_4 + x_5 = 5$

$4x_4 = 8$

Devemos então, encontrar os valores x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 que satisfaçam o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 20 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 10 \\ x_4 + x_5 = 5 \\ 4x_4 = 8 \end{cases}.$$

Encontramos com muita frequência problemas dessa natureza. Suas soluções dependem de entendermos como resolver um sistema de equações lineares.

Sistemas e matrizes

É comum encontrar problemas em várias áreas da Ciência e que recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Definição 1: Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

em que a_1, a_2, ..., a_n e b são constantes reais.

Definição 2: Um *sistema de equações lineares* ou simplesmente *sistema linear* é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \;\; = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para i, k = 1, 2, ..., m e j = 1, 2, ..., n.

Usando o produto de matrizes que definimos anteriormente, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

ou, $AX = B$, onde

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. A matriz A é chamada matriz do sistema linear ou

matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

Exemplo 1: São sistemas de equações lineares:

i. $\begin{cases} 2x - 5y = 5 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y - 5z = 8 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2a - 8b = 0 \\ a + 5b = 9 \\ a + b = 5 \end{cases}$

Exemplo 2: Os sistemas de equações lineares do exemplo anterior podem ser escritos como as equações matriciais abaixo:

i. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

Operações elementares

Para encontrar a solução de um sistema linear, podemos substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. Isso é feito aplicando sucessivamente uma série de operações que não alteram a solução do sistema sobre as equações. Essas operações são as seguintes:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Essas operações são chamadas de operações elementares. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear, somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de matriz ampliada do sistema, ou seja, a matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Usando essas operações, podemos construir um algoritmo para encontrar solução de sistemas de equações lineares da seguinte forma:

Exemplo: Dado o sistema $\begin{cases} x + 3z = -8 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$

i. Quando queremos permutar, por exemplo, a 2ª equação com a 3ª, escrevemos:

$\begin{cases} x + 3z = -8 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \to L_{23} \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$ e o sistema resultante será $\begin{cases} x + 3z = -8 \\ 2x - 4y = -4 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$

ii. Quando queremos multiplicar a 2ª equação, por exemplo, por $\frac{1}{2}$, escrevemos:

$\begin{cases} x + 3z = -8 \\ 2x - 4y = -4 \quad \to L_2\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$ e o sistema resultante será $\begin{cases} x + 3z = -8 \\ x - 2y = -2 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$

iii. Quando queremos substituir a 1ª equação, por exemplo, pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por (-1), escrevemos:

$$\begin{cases} x+3z=-8 \\ x-2y=-2 \rightarrow L_2 = L_2 + L_1(-1) \\ 3x-2y-5z=26 \end{cases} \text{ e o sistema resultante será } \begin{cases} x+3z=-8 \\ -2y-3z=6 \\ 3x-2y-5z=26 \end{cases}$$

Observação: Depois que aprender a solucionar um sistema linear, você poderá verificar que todos os sistemas do exemplo anterior são equivalentes, isto é, têm a mesma solução. Analogamente, podemos dizer que a aplicação de qualquer operação elementar sobre um sistema de equações lineares produz um sistema linear equivalente. Essa afirmação justifica-se pelo fato de que uma operação elementar sempre adiciona um mesmo valor em ambos os membros de uma equação do sistema dado.

Baseado nesse fato, construiremos um algoritmo para encontrar soluções de sistemas de equações lineares. Esse algoritmo está descrito abaixo:

Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan é dado pelas duas afirmações abaixo:

➢Considere a matriz ampliada do sistema. Transformamos, por meio de operações elementares, a matriz do sistema na matriz identidade;

➢Transformada a matriz do sistema na matriz identidade, a matriz dos termos independentes ficará transformada na solução do sistema.

Isto é, dada a matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right),$$

devemos aplicar as operações elementares de tal modo que a matriz anterior se transforme na matriz abaixo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_n \end{array}\right)$$

onde $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ será a solução do sistema.

SAIBA MAIS

Note que, para aplicar esse método, a matriz do sistema deve ser quadrada, já que devemos transformá-la na matriz identidade.

Exemplo: Considere o sistema do exemplo anterior, $\begin{cases} x+3z=-8 \\ 3x-2y-5z=26 \\ 2x-4y=-4 \end{cases}$

Solução: A matriz ampliada desse sistema é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Logo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right) \to L_{23} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right) \to \left(\frac{1}{2}\right)L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right) \to L_2 = L_2 + (-1)L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right) \to L_3 = 3L_1 - L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 14 & 2 \end{array}\right) \to L_3 = L_2 + L_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_1 = 11L_1 - 3L_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & -112 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_2 = 11L_2 + 3L_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & -112 \\ 0 & -22 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_1 = \frac{L_1}{11}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & -22 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_2 = -\frac{L_2}{11} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & 1 & 0 & -90/11 \\ 0 & 0 & 11 & 8 \end{array}\right) \to L_3 = \frac{L_3}{11}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & 1 & 0 & -90/11 \\ 0 & 0 & 1 & 8/11 \end{array}\right)$$

Portanto, pelo método de Gauss-Jordan, a solução do sistema é $x = -\dfrac{112}{11}$, $y = -\dfrac{90}{11}$ e $z = \dfrac{8}{11}$

Observação: Note que a matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -112/11 \\ 0 & 1 & 0 & -90/11 \\ 0 & 0 & 1 & 8/11 \end{array}\right)$ é a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{cases} 1x+0y+0z = -\dfrac{112}{11} \\ 0x+1y+0z = -\dfrac{90}{11} \\ 0x+0y+1z = \dfrac{8}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{112}{11} \\ y = -\dfrac{90}{11} \\ z = \dfrac{8}{11} \end{cases}$$

Classificação de um sistema linear quanto à solução

Um sistema linear pode não ter solução. Mas, se tiver solução, poderá ser uma ou mais de uma. Podemos, então, classificar um sistema linear quanto à existência e quantidade de soluções em três tipos:

- Compatível (ou possível) e determinado: quando possui uma única solução.
- Compatível e indeterminado: quando possui mais de uma solução.
- Incompatível (ou impossível): quando não possui solução.

Exemplo: Note que:

i. O sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ possui uma única solução, $x = 0$ e $y = 1$;

ii. O sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ possui mais de uma solução, no caso:

1ª solução: $x = 0$ e $y = 1$;

2ª solução: $x = 1$ e $y = 0$;

3ª solução: $x=\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{2}$;

4ª solução: $x=\frac{1}{4}$ e $y=\frac{3}{4}$;

Essas são algumas das soluções. Nesse exemplo, existem infinitas soluções;

iii. O sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ não possui solução (Já que, a soma de dois números reais é única).

SAIBA MAIS

Veja que, de acordo com as definições sobre classificação de um sistema, no exemplo ao lado o item *(i)* é compatível e determinado, o item *(ii)* é compatível e indeterminado e o item (iii) é incompatível .

Sistemas lineares homogêneos

Definição: Dizemos que um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações que o compõem são iguais a zero.

Exemplo: $\begin{cases} x \quad\; -z=0 \\ \quad y-2z=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$

Um sistema linear homogêneo em n incógnitas sempre admite a solução

$$\underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{n\,elementos}$$

chamada solução trivial. Concluímos, então, que um sistema linear homogêneo é sempre compatível. Assim, quando for determinado, possuirá somente a solução trivial. E quando for indeterminado, possuirá outras soluções, além da trivial, chamadas soluções não-triviais.

SAIBA MAIS

A solução trivial também é conhecida como solução nula ou ainda solução imprópria.

Soluções de um sistema de equações lineares

Definição: Uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

i. Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) devem aparecer abaixo das linhas não nulas;

ii. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a 1;

iii. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula deve aparecer à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.

iv. Se uma coluna contém um primeiro elemento não nulo de uma linha, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Importante: Dizemos que uma matriz está na forma escalonada se satisfaz as propriedades (*i*) e (*iii*), mas não necessariamente (*ii*) e (*iv*).

Exemplo 1: As matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

são escalonadas reduzidas, enquanto

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são escalonadas, mas não são escalonadas reduzidas.

Importante: Esse método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz ampliada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada, também é conhecido como método de Gauss-Jordan. Nesse caso, o método vale para qualquer matriz, não apenas para matriz quadrada.

Exemplo 2: Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 28 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ \quad\quad 4y + z = 13 \end{cases}$$

temos que sua matriz ampliada é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{array}\right).$$

Como o primeiro elemento é 1, devemos obter zeros na primeira coluna, da segunda linha em diante. Note que, nesse caso, como o elemento da terceira linha já é zero, precisamos apenas obter zero na segunda linha. Para isso, vamos substituir a segunda linha pela soma da mesma com a primeira linha multiplicada por -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{array}\right) \to L_2 = L_2 + (-2)L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

Passemos, agora, para a segunda coluna (não usaremos mais a primeira linha - ela está pronta). Queremos obter zero abaixo da segunda linha. Para isso, multiplicamos a segunda linha por 4 e somamos à terceira:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{array}\right) \to L_3 = L_3 + 4L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 0 & -43 & -215 \end{array}\right)$$

Temos então a matriz escalonada. Logo, o sistema associado a ela é:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 28 \\ \quad -y - 11z = -57 \\ \qquad -43z = -215 \end{cases}$$

Obtemos, da terceira equação, $z = \dfrac{-215}{-43} \Rightarrow z = 5$

Substituindo esse valor na segunda, teremos: $-y - 11.5 = -57 \Rightarrow -y = -57 + 55 \Rightarrow y = 2.$

Finalmente, substituindo $y = 2$ e $z = 5$ na primeira equação ficamos com:

$$x + 2.2 + 5.5 = 28 \Rightarrow x = 28 - 4 - 25 \Rightarrow x = -1$$

Logo, o conjunto solução é {(-1, 2, 5)}. Podemos classificar o sistema como compatível e determinado.

Regra de Cramer

Mostraremos agora outro método de resolução de sistemas de equações lineares. Usaremos, neste método, o cálculo da inversa de uma matriz e determinantes. O mesmo é conhecido como *Regra de Cramer.*

Observação: Esse método só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Suponha que desejamos resolver o sistema linear de n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema na forma matricial, Obtemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou, $A. X = B$, onde

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Supondo que $det\,(A) \neq 0$, temos que a matriz A possui inversa A^{-1}. Assim, multiplicando a equação $A\,.\,X = B$ por A^{-1} e, isolando X, temos:

$$A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B \Rightarrow (A^{-1}.A).X = A^{-1}.B \Rightarrow I_n.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$$

Mas, sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA$, logo $X = \frac{1}{detA}.(adjA).B$. Na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

para, $(\overline{a_{ij}}) = (-1)^{i+j}\ det\,(A_{-i,-j})$ onde $A_{-i,-j}$ é a matriz quadrada de ordem n-1 obtida a partir de A, com a retirada da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Observação: A matriz *adjA* foi definida anteriormente.

Portanto,

$$x_1 = \frac{\overline{a_{11}}.b_1 + \overline{a_{21}}.b_2 + \dots + \overline{a_{n1}}.b_n}{detA}$$

Porém, note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz obtida de A substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes:

$$det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = b_1.\overline{a_{11}} + b_2.\overline{a_{21}} + \dots + b_n.\overline{a_{n1}}.$$

Concluímos então que

$$x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}.$$

Analogamente, obtemos:

$$x_i = \frac{det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \overbrace{b_1}^{i-\acute{e}sima\ coluna} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}},\ para\ i = 1,2,\dots,n.$$

Note que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes ($det\, A \neq 0$), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Lembre-se de que esse método somente se aplica a um sistema linear de n equações e n incógnitas e quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo.

Exemplo 1: Dado o sistema

$$\begin{cases} x+2y-3z=-15 \\ 2x-y+z=10 \\ 3x \quad -z=1 \end{cases}.$$

Como $det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=2\neq 0$, podemos encontrar a solução desse sistema usando a regra de Cramer. Assim,

$$x=\frac{det\begin{pmatrix} -15 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}=\frac{4}{2}=2,\quad y=\frac{det\begin{pmatrix} 1 & -15 & -3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$z=\frac{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -15 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}=\frac{10}{2}=5.$$

Portanto, a única solução do sistema é (2 , -1 , 5).

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Classificar e resolver os sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 2x+8y-4z=24 \\ 4x+2y+2z=16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y+3z=8 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 2x+5y+3z=-12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+8y=34 \\ 10x+16y=50 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+4y=16 \\ 5x-2y=4 \\ 10x-4y=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x-4y-2z=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6x+2y+4z=0 \\ -9x-3y-6z=0 \end{cases}$

2. Resolva o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x+y+7z=b_1 \\ x+3y+2z=b_2 \\ 5x+3y+4z=b_3 \end{cases}$ para:

a) b_1 = 16, b_2 = -5 e b_3 = 11

b) b_1 = 25, b_2 = -11 e $b3$ = -5

c) b_1 = 3, b_2 = 5 e b_3 = -5

3. Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&5\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} e\, D=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&2&-4\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

4. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+2z=8\\ -x-2y+3z=1\\ 3x-7y+4z=10\end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+2y+2z=0\\ -2x+5y+2z=1\\ 8x+y+4z=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases} -y+3z=1\\ 3x+6y-3z=-2\\ 6x+6y+3z=5\end{cases}$

5. Resolva os sistemas lineares, usando a regra de Cramer.

a) $\begin{cases} 5x+8y=34\\ 10x+16y=50\end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y-5z=8\\ 2x-4y-2z=-4\\ x-2y-3z=-4\end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3z=-8\\ 2x-4y=-4\\ 3x-2y-5z=26\end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z=10\\ 3x+4y+6z=23\\ 3x+2y+3z=10\end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x-3y-7z=-5\\ 4x-y-z=2\\ -2x+4y+8z=10\end{cases}$

f) $\begin{cases} x-y=0\\ 2y+4z=6\\ x+y+4z=6\end{cases}$

6. Seja $A=\begin{pmatrix}1&0&5\\1&1&1\\0&1&-4\end{pmatrix}$

a) Encontre a solução geral do sistema $(A + 4I_3)$ X = 0;

b) Encontre a solução geral do sistema $(A - 2I_3)$ X = 0.

II

ESPAÇO VETORIAL, TRANSFORMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÃO

Nesta unidade vamos estudar os aspectos relacionados com uma estrutura chamada Espaço Vetorial. Nela veremos conjuntos linearmente independentes (LI) e linearmente dependentes (LD). Definimos base e dimensão de um espaço vetorial. Estudamos o conceito de transformação linear e aprendemos a determinar o núcleo e a imagem da mesma.

Objetivos

- Definir e estudar alguns dos principais exemplos dessa estrutura.
- Identificar entre os conjuntos numéricos conhecidos os que são espaços vetoriais.
- Apresentar o conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial.
- Apresentar os conceitos de dependência linear e independência linear.
- Estudar os conceitos de base e dimensão de um espaço vetorial.
- Estudar o conceito de transformação linear.
- Determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear.
- Apresentar o teorema da dimensão, algumas consequências e exemplos.

Espaço Vetorial

UN 02

Definição de espaço vetorial

Definição: Dizemos que um conjunto, não vazio, V, munido das operações de adição (associa a cada par $u, v \in V$, o elemento $u + v \in V$) e multiplicação por escalar (que associa a cada par $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$, o elemento $\alpha v \in V$) é um espaço vetorial se, gozar das oito propriedades abaixo:

Quaisquer que sejam $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Em relação à adição:

(A_1) *associatividade*: $(u + v) + w = u + (v + w)$

(A_2) *comutatividade:* $u + v = v + u$

(A_3) *Existência de vetor nulo*: $\exists 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$

(A_4) *Existência de inverso aditivo ou simétrico:* $\exists(-u) \in V$ tal que $u + (-u) = 0$

Em relação à multiplicação por escalar:

(M_1) *Distributividade com relação à adição de vetores*: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

(M_2) *Distributividade com relação à adição de escalar:* $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

(M_3) *Associatividade*: $(\alpha.\beta)\,u = \alpha.(\beta u)$

(M_4) *Existência do elemento neutro*: $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1.u = u$

SAIBA MAIS

Observe que, no lado esquerdo de (M_2), o símbolo "+" é uma soma de escalares em R, e no lado direito, é uma soma de vetores em V. Observamos também que no lado esquerdo de (M_3) temos primeiramente um produto entre escalares α e β e depois o produto do escalar $\alpha\beta$ pelo vetor u. São produtos diferentes, nos quais, usamos o mesmo símbolo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. $\mathbb{R}_n$ é um espaço vetorial, com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

Com efeito, dados $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos:

$$
\begin{aligned}
(A_1)\,(u+v)+w &= \left((u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)\right)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)\\
&= (u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)\\
&= \left((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2,\ldots,(u_n+v_n)+w_n\right)\\
&\overbrace{=}^{(*)} \left(u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2),\ldots,u_n+(v_n+w_n)\right)\\
&= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+\left((v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n)\right)\\
&= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+\left((v_1,v_2,\ldots,v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)\right)\\
&= u+(v+w)
\end{aligned}
$$

(*) Usamos nesta igualdade a associatividade dos números reais.

$$\begin{aligned}(A_2)\ \ u+v &= (u_1,u_2,\dots,u_n)+(v_1,v_2,\dots,v_n)\\ &= (u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)\\ &\overset{(*)}{\triangleq} (v_1+u_1,v_2+u_2,\dots,v_n+u_n)\\ &= (v_1,v_2,\dots,v_n)+(u_1,u_2,\dots,u_n)\\ &= v+u\end{aligned}$$

(*) Usamos a comutatividade dos números reais.

(A_3) $\exists 0=(0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}u+0 &= (u_1,u_2,\dots,u_n)+(0,0,\dots,0)=(u_1+0,u_2+0,\dots,u_n+0)\\ &= (u_1,u_2,\dots,u_n)=u\end{aligned}$$

(A_4) $\exists(-u)=(-u_1,-u_2,\dots,-u_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}u+(-u) &= (u_1,u_2,\dots,u_n)+(-u_1,-u_2,\dots,-u_n)\\ &= \big(u_1+(-u_1),u_2+(-u_2),\dots,u_n+(-u_n)\big)\\ &= (u_1-u_1,u_2-u_2,\dots,u_n-u_n)=(0,0,\dots,0)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M_1)\ \alpha(u+v) &= \alpha\big((u_1,u_2,\dots,u_n)+(v_1,v_2,\dots,v_n)\big)\\ &= \alpha(u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)\\ &= \big(\alpha(u_1+v_1),\alpha(u_2+v_2),\dots,\alpha(u_n+v_n)\big)\\ &\overset{(*)}{\triangleq} (\alpha u_1+\alpha v_1,\alpha u_2+\alpha v_2,\dots,\alpha u_n+\alpha v_n)\\ &= (\alpha u_1,\alpha u_2,\dots,\alpha u_n)+(\alpha v_1,\alpha v_2,\dots,\alpha v_n)\\ &= \alpha(u_1,u_2,\dots,u_n)+\alpha(v_1,v_2,\dots,v_n)\\ &= \alpha u+\alpha v\end{aligned}$$

(*) Usamos a distributividade dos números reais.

$$\begin{aligned}(M_2)\ (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)\,(u_1,u_2,\dots,u_n)=((\alpha+\beta)u_1,(\alpha+\beta)u_2,\dots,(\alpha+\beta)u_n)\\ &\overset{(*)}{\triangleq} (\alpha u_1+\beta u_1,\alpha u_2+\beta u_2,\dots,\alpha u_n+\beta u_n)\\ &= (\alpha u_1,\alpha u_2,\dots,\alpha u_n)+(\beta u_1,\beta u_2,\dots,\beta u_n)\\ &= \alpha(u_1,u_2,\dots,u_n)+\beta(u_1,u_2,\dots,u_n)\\ &= \alpha u+\beta u\end{aligned}$$

(*) Usamos a distributividade dos números reais.

$$\begin{aligned}(M_3)\ (\alpha.\beta)u &= (\alpha.\beta)(u_1,u_2,\dots,u_n)=\big((\alpha.\beta)u_1,(\alpha.\beta)u_2,\dots,(\alpha.\beta)u_n\big)\\ &\overset{(*)}{\triangleq} \big(\alpha.(\beta u_1),\alpha.(\beta u_2),\dots,\alpha.(\beta u_n)\big)\\ &= \alpha(\beta u_1,\beta u_2,\dots,\beta u_n)=\alpha[\beta(u_1,u_2,\dots,u_n)]\\ &= \alpha.(\beta u)\end{aligned}$$

(*)Usamos a associatividade dos números reais.

(M_4) $\exists 1\in\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}1.u &= 1.(u_1,u_2,\dots,u_n)=(1.u_1,1.u_2,\dots,1.u_n)\\ &= (u_1,u_2,\dots,u_n)=u\end{aligned}$$

SAIBA MAIS

As operações de adição e multiplicação por escalar dadas neste exemplo são denominadas operações usuais no R^n. Existem outras operações de adição e de multiplicação por escalar que podem ser feitas com os elementos de R^n e escalares, na verdade, podem ser criadas infinitas operações, só depende da nossa criatividade. Estas novas operações poderão, ou não, fornecer novos espaços vetoriais. *Pelo exemplo 1*, fazendo *n*=2, temos que o R^2 é um espaço vetorial com as operações usuais, mas, no *exemplo 4,* o conjunto R^2 não é um espaço vetorial com as operações definidas.

2. O conjunto de todas as matrizes reais “2 por 2”, $M_{2\times 2}$ (R), é um espaço vetorial se a adição vetorial é definida pela adição matricial e a multiplicação vetorial por escalar é definida pela multiplicação matricial por escalar.

Com efeito, dados $u=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}$ e $w=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}$ em $M_{2\times 2}$ (R) e $\alpha,\beta\in$ R quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}(A_1)\ \ (u+v)+w &= \left(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22}\end{pmatrix}\\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{11}+w_{11} & v_{12}+w_{12} \\ v_{21}+w_{21} & v_{22}+w_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}\right)\\
&= u+(v+w)\end{aligned}$$

SAIBA MAIS

Não especificamos na definição de um espaço vetorial a natureza dos vetores, nem das operações. Qualquer tipo de objeto pode ser um vetor, como por exemplo, uma matriz, como podemos ver neste exemplo, ou um polinômio ou até mesmo um número real. As operações de adição e multiplicação por um escalar podem não ter relação alguma com as operações usuais em R^2 e R^3 , por exemplo. A única exigência é que as dez propriedades de espaço vetorial sejam satisfeitas.

(*) Usamos nesta igualdade a associatividade dos números reais.

$$\begin{aligned}(A_2)\ \ u+v &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22}\end{pmatrix}\\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} \\ v_{21}+u_{21} & v_{22}+u_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}\\
&= v+u\end{aligned}$$

(*) Usamos a comutatividade dos números reais.

(A_3) $\exists 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$u+0=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11}+0 & u_{12}+0 \\ u_{21}+0 & u_{22}+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}=u$$

(A_4) $\exists(-u)=\begin{pmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22}\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned}u+(-u) &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} u_{11}+(-u_{11}) & u_{12}+(-u_{12}) \\ u_{21}+(-u_{21}) & u_{22}+(-u_{22})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} u_{11}-u_{11} & u_{12}-u_{12} \\ u_{21}-u_{21} & u_{22}-u_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M_1)\ \ \alpha(u+v) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}\right)\\
&= \alpha\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_{11}+v_{11}) & \alpha(u_{12}+v_{12}) \\ \alpha(u_{21}+v_{21}) & \alpha(u_{22}+v_{22})\end{pmatrix}\\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \alpha u_{11}+\alpha v_{11} & \alpha u_{12}+\alpha v_{12} \\ \alpha u_{21}+\alpha v_{21} & \alpha u_{22}+\alpha v_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \alpha u_{11} & \alpha u_{12} \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha v_{11} & \alpha v_{12} \\ \alpha v_{21} & \alpha v_{22}\end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}\\
&= \alpha u+\alpha v\end{aligned}$$

(*) Usamos a distributividade dos números reais.

$$
\begin{aligned}
(M_2)\ (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)u_{11} & (\alpha+\beta)u_{12} \\ (\alpha+\beta)u_{21} & (\alpha+\beta)u_{22} \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \alpha u_{11}+\beta u_{11} & \alpha u_{12}+\beta u_{12} \\ \alpha u_{21}+\beta u_{21} & \alpha u_{22}+\beta u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha u_{11} & \alpha u_{12} \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta u_{11} & \beta u_{12} \\ \beta u_{21} & \beta u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \alpha u + \beta u
\end{aligned}
$$

(*) Usamos também a distributividade dos números reais.

$$
\begin{aligned}
(M_3)\ (\alpha.\beta)u &= (\alpha.\beta)\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha.\beta)u_{11} & (\alpha.\beta)u_{12} \\ (\alpha.\beta)u_{21} & (\alpha.\beta)u_{22} \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \alpha.(\beta u_{11}) & \alpha.(\beta u_{12}) \\ \alpha.(\beta u_{21}) & \alpha.(\beta u_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} \beta u_{11} & \beta u_{12} \\ \beta u_{21} & \beta u_{22} \end{pmatrix} = \alpha\left(\beta \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\right) \\
&= \alpha.(\beta u)
\end{aligned}
$$

(*) Usamos a associatividade dos números reais.

(M_4) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$
\begin{aligned}
1.u &= 1.\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.u_{11} & 1.u_{12} \\ 1.u_{21} & 1.u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = u
\end{aligned}
$$

3. O conjunto de todas as matrizes reais "m por n", $M_{m\times n}$ (R), é um espaço vetorial. Usando também adição matricial e a multiplicação matricial por escalar, segue análogo ao exemplo anterior, basta substituir, por exemplo, $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$

por u = $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}$.

4. O conjunto $R^2 = \{(x, y) \in R^2;\ x, y \in R\}$ não é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas abaixo:

- $(x, y) + (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y})$
- $\alpha\,(x, y) = (\alpha x, y)$

Com efeito, como a adição definida é a usual, ela verifica as quatro propriedades da adição. Vamos testar as propriedades relativas à multiplicação. Em particular, vamos testar a propriedade (M_2):

$$
\begin{aligned}
(M_2)\ (\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)(u_1,u_2) &= ((\alpha+\beta)u_1,u_2) \\
&\overset{(*)}{=} (\alpha u_1+\beta u_1,u_2) \\
&= (\alpha u_1,u_2)+(\beta u_1,0) \\
&\neq \alpha u+\beta u
\end{aligned}
$$

5. O conjunto $V = \{(x, x^2);\ x \in R\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas abaixo:

- $(x, x^2) + (\tilde{x}, \tilde{x}^2) = (x + \tilde{x}, (x + \tilde{x})^2)$
- $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^2\ x^2)$

Com efeito, dados $u = (u_1, {u_1}^2)$, $v = (v_1, {v_1}^2)$ e $w = (w_1, {w_1}^2)$ em V e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos:

$$
\begin{aligned}
(A_1)\ \ (u+v)+w &= \left((u_1,{u_1}^2)+(v_1,{v_1}^2)\right)+(w_1,{w_1}^2)\\
&= (u_1+v_1,(u_1+v_1)^2)+(w_1,{w_1}^2)\\
&= \left((u_1+v_1)+w_1,\left((u_1+v_1)+w_1\right)^2\right)\\
&\overset{(*)}{=} \left(u_1+(v_1+w_1),\left(u_1+(v_1+w_1)\right)^2\right)\\
&= (u_1,{u_1}^2)+(v_1+w_1,(v_1+w_1)^2)\\
&= (u_1,{u_1}^2)+\left((v_1,{v_1}^2)+(w_1,{w_1}^2)\right) = u+(v+w)
\end{aligned}
$$

(*) Usamos a associatividade dos números reais.

$$
\begin{aligned}
(A_2)\ \ u+v &= (u_1,{u_1}^2)+(v_1,{v_1}^2) = (u_1+v_1,(u_1+v_1)^2)\\
&\overset{(*)}{=} (v_1+u_1,(v_1+u_1)^2) = (v_1,{v_1}^2)+(u_1,{u_1}^2)\\
&= v+u
\end{aligned}
$$

(*) Usamos a comutatividade dos números reais.

$$
\begin{aligned}
&(A_3)\ \exists 0 = (0,0^2) = (0,0) \in V \text{ tal que}\\
&\quad u+0 = (u_1,{u_1}^2)+(0,0) = (u_1+0,(u_1+0)^2)\\
&\qquad = (u_1,{u_1}^2) = u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A_4)\ \exists(-u) = (-u_1,(-u_1)^2) \in V \text{ tal que}\\
&\quad u+(-u) = (u_1,{u_1}^2)+(-u_1,(-u_1)^2)\\
&\qquad = \left(u_1+(-u_1),\left(u_1+(-u_1)\right)^2\right)\\
&\qquad = (u_1-u_1,(u_1-u_1)^2) = (0,0) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(M_1)\ \alpha(u+v) &= \alpha\left((u_1,{u_1}^2)+(v_1,{v_1}^2)\right)\\
&= \alpha(u_1+v_1,(u_1+v_1)^2)\\
&= (\alpha(u_1+v_1),\alpha^2(u_1+v_1)^2)\\
&= \left(\alpha(u_1+v_1),\left(\alpha(u_1+v_1)\right)^2\right)\\
&\overset{(*)}{=} (\alpha u_1+\alpha v_1,(\alpha u_1+\alpha v_1)^2)\\
&= (\alpha u_1,(\alpha u_1)^2)+(\alpha v_1,(\alpha v_1)^2)\\
&= \left(\alpha u_1,\alpha^2{u_1}^2\right)+(\alpha v_1,\alpha^2{v_1}^2)\\
&= \alpha(u_1,{u_1}^2)+\alpha(v_1,{v_1}^2)\\
&= \alpha u+\alpha v
\end{aligned}
$$

(*) Usamos a distributividade dos números reais.

$$
\begin{aligned}
(M_2)\ (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)(u_1,{u_1}^2) = \left((\alpha+\beta)u_1,(\alpha+\beta)^2{u_1}^2\right)\\
&= \left((\alpha+\beta)u_1,\left((\alpha+\beta)u_1\right)^2\right)\\
&\overset{(*)}{=} (\alpha u_1+\beta u_1,(\alpha u_1+\beta u_1)^2)\\
&= (\alpha u_1,(\alpha u_1)^2)+(\beta u_1,(\beta u_1)^2)\\
&= \left(\alpha u_1,\alpha^2{u_1}^2\right)+\left(\beta u_1,\beta^2{u_1}^2\right)\\
&= \alpha(u_1,{u_1}^2)+\beta(u_1,{u_1}^2)\\
&= \alpha u+\beta u
\end{aligned}
$$

(*) Usamos também a distributividade dos números reais.

$$
\begin{aligned}
(M_3)\ (\alpha.\beta)u &= (\alpha.\beta)(u_1,{u_1}^2) = \left((\alpha.\beta)u_1,(\alpha.\beta)^2{u_1}^2\right) = \left((\alpha.\beta)u_1,\left((\alpha.\beta)u_1\right)^2\right)\\
&\overset{(*)}{=} \left(\alpha.(\beta u_1),\left(\alpha.(\beta u_1)\right)^2\right) = (\alpha.(\beta u_1),\alpha^2(\beta u_1)^2)\\
&= \alpha(\beta u_1,(\beta u_1)^2) = \alpha(\beta u_1,\beta^2{u_1}^2) = \alpha[\beta(u_1,{u_1}^2)]\\
&= \alpha.(\beta u)
\end{aligned}
$$

(*) Usamos a associatividade dos números reais.

(M_4) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$1.u = 1.(u_1, u_1{}^2) = (1.u_1, 1^2.u_1{}^2)$$
$$= (u_1, u_1{}^2) = u$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

Determine quais dos conjuntos abaixo são espaços vetoriais com as operações dadas. Para os que não são, liste todas as propriedades que falham.

1. O conjunto R^3 com as operações:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } \alpha(x, y, z) = (\alpha x, y, z)$$

2. O conjunto R^3 com as operações:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } \alpha(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

3. O conjunto R^2 com as operações:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } \alpha(x, y) = (2\alpha x, 2\alpha y)$$

4. O conjunto $\{(x, 0); x \in R\}$ com as operações usuais do R^2.

5. O conjunto $\{(x, y) \in R^2; x \geq 0\}$ com as operações usuais do R^2.

6. O conjunto $\{(x, x, \ldots, x) \in R^n\}$ com as operações usuais do R^n.

7. O conjunto R^2 com as operações:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \text{ e } \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

8. O conjunto $\left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \in M_{2\times2}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$ com a adição matricial e multiplicação matricial por escalar.

9. O conjunto $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_{2\times2}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$ com a adição matricial e multiplicação matricial por escalar.

10. O conjunto $\left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} \in M_{2\times2}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$ com a adição matricial e multiplicação matricial por escalar.

11. O conjunto $\{(1, y); y \in R\}$ com as operações:

$$(1, y) + (1, y') = (1, y + y') \text{ e } \alpha(1, y) = (1, \alpha y)$$

12. O conjunto de todos os polinômios da forma $ax + b$ com as operações:

$$(a_0 x + b_0) + (a_1 x + b_1) = (a_0 + a_1)x + (b_0 + b_1) \text{ e } \alpha(a_0 x + b0) = (\alpha a_0)x + (\alpha b_0)$$

13. O conjunto $\{x \in R; x \geq 0\}$ com as operações

$$x + y = xy \text{ e } \alpha x = x^{\alpha}$$

Propriedades dos espaços vetoriais

Seja V um espaço vetorial sobre R. Dados u, v e w em V e α em R, provaremos as seguintes propriedades:

P_1) O elemento neutro 0 em V é único.

P_2) O elemento oposto $-u \in V$ de um vetor $u \in V$ é único.

P_3) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$ (lei do cancelamento).

P_4) Para qualquer escalar $\alpha \in$ R e $0 \in V$, temos $\alpha.\ 0 = 0$.

P_5) Para $0 \in$ R e qualquer vetor $u \in V$, temos $0.\ u = 0$.

P_6) Se $\alpha.\ u = 0$, onde $\alpha \in$ R e $u \in V$, então $\alpha = 0$ ou $u = 0$.

P_7) Para qualquer escalar $\alpha \in$ R e qualquer vetor $u \in V$, temos $(-\alpha).\ u = \alpha.\ (-u) = -\alpha.u$.

Demonstração:

P_1) Suponha existir outro elemento neutro $\bar{0}$ em V. Mostraremos que $\bar{0} = 0$. Como $\bar{0}$ é um elemento neutro de V, temos que para qualquer $v \in V$, $v + \bar{0} = v$, logo em particular para $0 \in V$ temos,

$$0 + \bar{0} = 0,$$

Portanto,

$$\bar{0} \overset{(*)}{\triangleq} \bar{0} + 0 \overset{(**)}{\triangleq} 0 + \bar{0} \overset{(***)}{\triangleq} 0.$$

(*) Esta igualdade é satisfeita pela propriedade (A_3) da definição de espaço vetorial, já que 0 é elemento neutro em V.

(**) Esta igualdade é satisfeita por (A_2).

(***) Esta igualdade também é satisfeita por (A_3), já que $\bar{0}$ é elemento neutro em V.

P_2) Suponhamos que v seja outro elemento inverso aditivo do elemento $u \in V$. Assim, $u + v = 0$. Logo,

$$v \overset{(A_3)}{\triangleq} v + 0 \overset{(A_4)}{\triangleq} v + \big(u + (-u)\big) \overset{(A_1)}{\triangleq} (v + u) + (-u) \overset{(A_2)}{\triangleq} (u + v) + (-u)$$
$$\overset{hip.}{\triangleq} 0 + (-u) \overset{(A_2)}{\triangleq} (-u) + 0 \overset{(A_3)}{\triangleq} -u.$$

Logo o elemento oposto $-u \in V$ de um vetor $u \in V$ é único.

P_3) Dados $u + w = v + w$, temos:

$$(u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \overset{(A_1)}{\Rightarrow} u + \big(w + (-w)\big) = v + \big(w + (-w)\big)$$
$$\overset{(A_4)}{\Rightarrow} u + 0 = v + 0 \overset{(A_3)}{\Rightarrow} u = v$$

SAIBA MAIS

Na última seção listamos alguns exemplos de espaços vetoriais e é bastante claro que existe apenas um elemento neutro em cada um, mas existem vários outros espaços vetoriais que ainda não conhecemos. Provamos então, nesta primeira propriedade que a existência de um único elemento neutro é um fato que decorre apenas da definição de espaço vetorial (e, portanto, vale em qualquer um).

P_4) Dado $\alpha \in$ R qualquer, temos:

$$\alpha.0 \overset{(A_3)}{=} \alpha.(0+0) \overset{(M_1)}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

Logo,

$$\alpha.0 + (-\alpha.0) = (\alpha.0+\alpha.0) + (-\alpha.0) \underset{(A_1)}{\overset{(A_4)}{\Rightarrow}} 0 = \alpha.0 + \big(\alpha.0 + (-\alpha.0)\big)$$

$$\overset{(A_4)}{\Rightarrow} 0 = \alpha.0 + 0 \overset{(A_3)}{\Rightarrow} 0 = \alpha.0$$

P_5) Dado $u \in V$ qualquer, como 0 é o elemento neutro da adição, temos 0 = 0 + 0, logo:

$$0.u = (0+0).u \overset{(M_2)}{=} 0.u + 0.u \Rightarrow 0.u + (-0.u) = (0.u + 0.u) + (-0.u)$$

$$\underset{(A_1)}{\overset{(A_4)}{\Rightarrow}} 0 = 0.u + \big(0.u + (-0.u)\big) \overset{(A_4)}{\Rightarrow} 0 = 0.u + 0 \overset{(A_3)}{\Rightarrow} 0 = 0.u$$

P_6) Dado $\alpha \in$ R e $u \in V$, suponhamos que α . u = 0 com $\alpha \neq 0$. Então devemos mostrar que u=0. Como $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in$ R, tal que α^{-1} α = 1, logo:

$$u \overset{(M_4)}{=} 1.u = (\alpha^{-1}\alpha).u \overset{(M_3)}{=} \alpha^{-1}(\alpha.u) \overset{hip.}{=} \alpha^{-1}.0 \overset{(P_4)}{=} 0.$$

P_7) Dado $\alpha \in$ R e $u \in V$, temos:

$$\alpha.u + \alpha.(-u) \overset{(M_1)}{=} \alpha.\big(u + (-u)\big) \overset{(A_4)}{=} \alpha.0 \overset{(P_4)}{=} 0,$$

logo,

$$(-\alpha.u) + \big(\alpha.u + \alpha.(-u)\big) = (-\alpha.u) + 0$$

$$\underset{(A_3)}{\overset{(A_1)}{\Rightarrow}} \big((-\alpha.u) + \alpha.u\big) + \alpha.(-u) = -\alpha.u$$

$$\overset{(A_2)}{\Rightarrow} \big(\alpha.u + (-\alpha.u)\big) + \alpha.(-u) = -\alpha.u$$

$$\overset{(A_4)}{\Rightarrow} 0 + \alpha.(-u) = -\alpha.u \overset{(A_2)}{\Rightarrow} \alpha.(-u) + 0 = -\alpha.u$$

$$\overset{(A_3)}{\Rightarrow} \alpha.(-u) = -\alpha.u$$

Além disso, temos

$$\alpha.u + (-\alpha).u \overset{(M_2)}{=} \big(\alpha + (-\alpha)\big).u \overset{(A_4)}{=} 0.u \overset{(P_5)}{=} 0$$

Logo,

$$(-\alpha.u) + (\alpha.u + (-\alpha).u) = (-\alpha.u) + 0$$

$$\underset{(A_3)}{\overset{(A_1)}{\Rightarrow}} \big((-\alpha.u) + \alpha.u\big) + (-\alpha).u = -\alpha.u$$

$$\overset{(A_2)}{\Rightarrow} \big(\alpha.u + (-\alpha.u)\big) + (-\alpha).u = -\alpha.u$$

$$\overset{(A_4)}{\Rightarrow} 0 + (-\alpha).u = -\alpha.u \overset{(A_2)}{\Rightarrow} (-\alpha).u + 0 = -\alpha.u$$

$$\overset{(A_3)}{\Rightarrow} (-\alpha).u = -\alpha.u$$

Demonstradas essas propriedades, podemos concluir que grande parte das contas que fazemos com vetores de R^2 e R^3 são válidas em qualquer espaço vetorial.

Subespaço vetorial

Definição: Dado um espaço vetorial V, dizemos que um subconjunto S de V é um subespaço vetorial de V se S for um espaço vetorial com respeito as mesmas operações que tornam V um espaço vetorial.

Observações:

i. Uma consequência imediata dessa definição é que um subespaço vetorial S deve ser não vazio, já que uma das condições que devem ser satisfeitas para que S seja um subespaço vetorial de V é a existência em S de um elemento neutro para a adição de vetores: com isso, obrigatoriamente $0 \in S$.

ii. Concluímos também da definição que para verificar se um dado subconjunto S de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V, deve-se verificar se as operações de adição e multiplicação por escalar estão bem definidas em S, e se elas satisfazem a todas as condições dadas na definição de espaço vetorial.

iii. Todas as propriedades listadas na definição de espaço vetorial serão automaticamente "herdadas" pelo conjunto S, se S conter o vetor nulo, se a adição em S estiver bem definida (ou seja, se a soma de dois elementos quaisquer de S for também um elemento de S), e se o mesmo se verificar para a multiplicação por escalar.

Na verdade, a última observação nos traz o seguinte resultado:

Um subconjunto S de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V, se forem satisfeitas as seguintes condições:

$SV1$) O vetor nulo está em S, isto é, $0 \in S$.

$SV2$) Se $u, v \in S$, então $u + v \in S$.

$SV3$) Se $u \in S$, então $\alpha u \in S$ para todo $\alpha \in \mathrm{R}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Dado um espaço vetorial V qualquer, os subconjuntos $\{0\}$(conjunto cujo único elemento é o vetor nulo) e V são subespaços vetoriais de V.

Com efeito, temos que $0 \in \{0\}$ e além disso, dados $u, v \in \{0\}$ temos $u = v = 0$, e portanto $u + v = 0 + 0 = 0 \in \{0\}$. Agora, dado $u \in \{0\}$ temos que $u = 0$, logo, para todo $\alpha \in \mathrm{R}$, ficamos com $\alpha u = \alpha 0 = 0 \in \{0\}$. Concluímos então que $\{0\}$ é um subespaço vetorial de V. Já o subconjunto V, não há o que fazer, ele é obviamente um espaço vetorial com respeito às mesmas operações.

2. Considere o espaço vetorial $V = \mathrm{R}^3$ e o subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3;\ z = x + y\}$ de V. Verificaremos que S é um subespaço vetorial de V. Com efeito,

i. O vetor $(0, 0, 0)$ pertence a S, já que $0 + 0 = 0$.

ii. Dados $u = (x, y, z)$ e $v = (x', y', z')$ em S, temos que $\begin{cases} x + y = z \\ x' + y' = z' \end{cases}$, logo:

$u + v = (x + x', y + y', z + z')$ pertence a S, já que $(x + x') + (y + y') = (x + y) + (x' + y') = z + z'$.

iii. Dados $u = (x, y, z)$ em S, temos que $x + y = z$. Logo, para todo $\alpha \in \mathrm{R}$, $\alpha u = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ pertence a S, já que $\alpha x + \alpha y = \alpha (x + y) = \alpha z$.

Concluímos então que S é um subespaço vetorial de V.

SAIBA MAIS

Por serem os subespaços mais simples do espaço vetorial V, $\{0\}$ e V são chamados subespaços triviais de V.

3. Dado o conjunto $F(\mathrm{R}) = \{f; f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}\}$, temos que o subconjunto $C(\mathrm{R}) = \{f \in F(\mathrm{R});$ f é contínua $\} \subset F(\mathrm{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathrm{R})$. Com efeito,

   i. a função nula $f_0(x) = 0$ é uma função constante, e, portanto continua logo $f_0 \in C(\mathrm{R})$.

   ii. Dadas as funções $f, g \in C(\mathrm{R})$, temos que $f + g \in C(\mathrm{R})$, já que, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e soma de funções continuas é uma função continua.

   iii. Dada $f \in C(\mathrm{R})$, temos que, para todo $\alpha \in \mathrm{R}$, $\alpha f \in C(\mathrm{R})$, já que $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e f é contínua.

4. O subconjunto $K = \{f \in F(\mathrm{R}); f(x) = f(-x)\}$ das funções pares é também um subespaço vetorial de $F(\mathrm{R})$. De fato,

i . a função nula $f_0(x) = 0$, para todo $x \in \mathrm{R}$, satisfaz $f_0(x) = 0 = f_0(-x)$, logo $f_0 \in K$.

ii. Dadas $f, g \in K$, temos $\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ g(x) = g(-x) \end{cases}$. Logo,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$, portanto, $f + g$ é uma função par, assim, $f + g \in K$.

iii. Dada $f \in K$, temos $f(x) = f(-x)$. Logo, para todo $\alpha \in R$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x)$

portanto, αf é uma função par, isto é, $\alpha f \in K$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Nos itens abaixo verifique se o conjunto S dado é subespaço vetorial dos conjuntos apresentados com relação às operações de adição e multiplicação usuais.

   a) $S = \{(x, y): x + 3y = 0\}$; $\mathbb{R}^2$
   b) $S = \{(x, x^2): x \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{R}^2$
   c) $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: c = a + b \text{ e } d = 0\right\}$; $M(2,2)$
   d) $S = \left\{\begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix}: a, b \in \mathbb{R}\right\}$; $M(2,2)$
   e) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$; $\mathbb{R}^4$

2. Seja $S = \left\{\begin{bmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{bmatrix}: a, b \in \mathrm{R}\right\}$ um subespaço de $M(2,2)$, pergunta-se:

   a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S$?

   b) Qual o valor de k para que $\begin{bmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ pertença a S?

3. Seja W o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$, prove que W é um subespaço vetorial de $M_{n \times n}$.

4. Seja F o conjunto de todas as funções que satisfazem a equação diferencial $f'' + f = 0$, verifique que F é um subespaço vetorial de F, onde $F = \{f; f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}\}$.

5. Seja W o conjunto de todas as matrizes 2×2 com determinante igual a zero, W é um subespaço de $M_{2 \times 2}$.

Combinação linear

Definição: Dado um espaço vetorial V, dizemos que um vetor $w \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tal que w possa ser escrito como $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$.

Observação: Se o vetor w for combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dizemos que w é gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

SAIBA MAIS

O vetor nulo é gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$, quaisquer que sejam estes vetores. Basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, e teremos $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Considere $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$ em P_2.

a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

Solução: Devemos encontrar α, β e γ reais, tais que $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$, ou seja:

$$5t^2 - 5t + 7 = \alpha(t^2 - 2t + 1) + \beta(t + 2) + \gamma(2t^2 - t) \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 5t + 7 = \alpha t^2 - 2\alpha t + \alpha + \beta t + 2\beta + 2\gamma t^2 - \gamma t \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 5t + 7 = (\alpha + 2\gamma)\, t^2 + (-2\alpha + \beta - \gamma)\, t + \alpha + 2\beta.$$

Logo, para que esta igualdade ocorra, devemos ter:

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 5 \quad (I) \\ -2\alpha + \beta - \gamma = -5 \quad (II) \\ \alpha + 2\beta = 7 \quad (III) \end{cases}$$

Fazendo (I)-(III), obtemos:

$$2\gamma - 2\beta = 5 - 7 \Rightarrow 2(\gamma - \beta) = -2 \Rightarrow \gamma - \beta = -1.$$

Como $\gamma - \beta = -1 \Rightarrow \beta - \gamma = 1$, substituindo esta expressão em (II) temos:

$$-2\alpha + 1 = -5 \Rightarrow -2\alpha = -5 - 1 \Rightarrow -2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 3.$$

Substituindo $\alpha = 3$ em (I) e (III), obtemos $\gamma = 1$ e $\beta = 2$. Portanto, $p = 3\, p_1 + 2p_2 + p_3$.

b) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

Solução: Verificaremos se existem α e β reais, tais que $p_1 = \alpha p_2 + \beta p_3$, ou seja:

$$t^2 - 2t + 1 = \alpha\,(t + 2) + \beta(2t^2 - t) \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 2t + 1 = \alpha t + 2\alpha + 2\beta t^2 - \beta t \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 2t + 1 = 2\beta t^2 + (\alpha - \beta)t + 2\alpha.$$

Obtemos então:

$$\begin{cases} 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{2} \\ \alpha - \beta = -2 \quad (II) \\ 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, temos que $\alpha - \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \neq 2$, logo (II) não é satisfeito, assim p_1 não pode ser escrito como combinação linear de p_2 e p_3.

2. No espaço vetorial $M(2,2)$, escrever $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Devemos encontrar α, β e γ reais, tais que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} &= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta & 2\beta \\ 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ 2\gamma & \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 2\beta - \gamma \\ \alpha + 2\gamma & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \quad (I) \\ \alpha + 2\gamma = 0 \quad (II) \\ 2\beta - \gamma = 8 \; (III) \\ \alpha + \beta + \gamma = 5 \; (IV) \end{cases}$$

Fazendo (II) - (I) obtemos $2\gamma + \beta = -1$, somando esta equação com $2.(III)$, isto é, com $4\beta - 2\gamma = 16$, ficamos com $5\beta = 15 \Rightarrow \beta = 3$, e, portanto, $\alpha - 3 = 1 \Rightarrow \alpha = 4$ e $4 + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2$.

Concluímos, então, que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Subespaços gerados

Teorema 1: Dado um espaço vetorial V, se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores de V, então o conjunto $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{R}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Prova: Como efeito,

i. O vetor nulo pertence a S, já que, podemos escrever $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$.

ii. Dados u e v em S, digamos $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ com $\alpha_i, \beta_i \in$ R, temos que:

$$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \end{aligned}$$

onde $\alpha_i + \beta_i \in$ R. Assim $u + v$ é também combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, logo, $u + v \in S$.

iii. Dados u em S, digamos $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, com $\alpha_i \in$ R, e $k \in$ R temos que:

$ku = k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = (k\alpha_1) v_1 + (k\alpha_2) v_2 + \cdots + (k\alpha_n v_n$

onde $k\alpha_i \in$ R, logo ku é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v^n$, portanto, $ku \in S$.

Concluímos, então, que S é subespaço vetorial de V.

Observação: Este subespaço vetorial é chamado subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ou ainda subespaço gerado pelo conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Denotamos este subespaço por S=[v_1,v_2,...,v_n].

Teorema 2: Sejam v_1, v_2, ..., v_n, w vetores de um espaço vetorial V, onde w é combinação linear de v_1, v_2, ..., v_n. Então, [v_1,v_2,...,v_n,w]=[v_1,v_2,...,v_n].

Observação: Concluímos deste teorema que um subespaço pode ser gerado por uma infinidade de vetores, entretanto existe um número mínimo de vetores para gerá-lo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, onde $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,2,0)$ e $\overrightarrow{v_3} = (1,3,-1)$.

Determine:

a) O subespaço gerado por A;

Solução: Verificaremos primeiramente se um dos vetores é combinação linear dos outros dois, analisemos então, se existem α e β reais, tais que $\overrightarrow{v_3} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}$. Com efeito,

$$(1,3,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,0) = (\alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -1 \; e \; \beta = 2,$$

assim,

$$\overrightarrow{v_3} = -\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}.$$

Temos então que $[A] = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}] = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = \{\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, este é o conjunto dos pontos do plano que passa pela origem (0,0,0) e tem $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ como vetores diretores.

b) O valor de k para que o vetor $(3, -1, k) \in [A]$.

Solução: Note que,

$$(3,-1,k) \in [A] \Leftrightarrow (3,-1,k) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,0)$$
$$\Leftrightarrow (3,-1,k) = (\alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 3 \; (I) \\ \alpha+2\beta = -1 \; (II) \\ \alpha = k \;\; (III) \end{cases}$$

Fazendo (II) - (I), obtemos $\beta = -4$. Substituindo este valor em (I), temos que $\alpha = 7$, logo $k = 7$.

2. Dado o subespaço $W = \{A \in M_2\ (\mathrm{R})\ \ /\ A = A^t\}$ de M_2 (R), verifique que W é gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Dado uma matriz qualquer $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ em W, temos que $A = A^t$, isto é, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Concluímos, então, pela igualdade de matrizes que $b = c$.

Portanto, toda matriz de W é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Logo podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, W é gerado pelas matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Verifique que $M_{23} = [A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}]$, onde $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Seja $\wp_2 = \{ax_2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Verifique se $r(x) = 6x^2 - 4x + 1$ pertence ao $[p(x), q(x)]$, onde $p(x) = x^2 - x + 1$ e $q(x) = -3x^2 + x + 2$.

3. Verifique se C pertence ao conjunto gerado $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde C é dado por:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

4. Verifique se $s(x)$ pertence ao $[p(x), q(x), r(x)]$, onde $p(x) = -2x + 1$, $q(x) = -x^2 + x$ e $r(x) = x^2 + 3x - 2$, com $s(x)$ dado por:

   a) $s(x) = -x^2 - 5x + 3$ b) $s(x) = x^2 + x + 1$

5. M_{22} é gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

6. M_{22} é gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Dependência e independência linear

Definição: Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores de um espaço vetorial V. Dizemos que esses vetores são linearmente independentes (LI) se a única solução da equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

for a trivial, isto é, α_1=α_2=⋯=α_n=0. Em outras palavras, os vetores v_1,v_2,…,v_n são linearmente independentes se nenhum deles for combinação linear dos outros. Caso contrário, dizemos que os vetores são linearmente dependentes(LD).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD:

   A={(0, 1, 1,), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 3,)}

Solução: Considere a equação:

$\alpha(0, 1, 1,) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, 1) + \delta(1, 2, 3,) = (0, 0, 0).$

Dizemos que o conjunto A é LI, se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, caso contrário, A é LD. Dada a equação acima temos que

$$(\beta + \gamma + \delta, \alpha + \beta + 2\delta, \alpha + \gamma + 3\delta) = (0{,}0{,}0) \Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 0 \ \ (I) \\ \alpha + \beta + 2\delta = 0 \ \ (II). \\ \alpha + \gamma + 3\delta = 0 \ (III) \end{cases}$$

Logo, fazendo (II)-(I), obtemos $\alpha - \gamma + \delta = 0$, somando esta equação a (III), ficaremos com $2\alpha + 4\delta = 0 \Rightarrow \alpha = -2\delta$. Substituindo este valor em (II) e (III), respectivamente, obtemos: $\beta = 0$ e $\gamma = -\delta$. Portanto, para todo δ real temos que $\alpha = -2\delta$, $\beta = 0$ e $\gamma = -\delta$ é solução para o sistema. Concluímos, então, que A é LD.

b) B={(1,1,1)}

Solução: A única solução para a equação α (1, 1, 1,) = (0, 0, 0) é α = 0, logo B é LI.

2. Responda os itens abaixo justificando sua resposta.

a) Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem LI, serão os vetores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{u}+\vec{w}$ também LI?

Solução: Para que os vetores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{u}+\vec{w}$ sejam LI, a única solução de $\alpha(\vec{u}+\vec{v})+\beta(\vec{v}+\vec{w})+\gamma(\vec{u}+\vec{w})$ = (0, 0, 0), deve ser $\alpha=\beta=\gamma=0$. Note que:

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{u}+\vec{v})+\beta(\vec{v}+\vec{w})+\gamma(\vec{u}+\vec{w}) &= (0,0,0)\\ \Rightarrow \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}+\beta\vec{w}+\gamma\vec{u}+\gamma\vec{w} &= (0,0,0)\\ \Rightarrow (\alpha+\gamma)\vec{u}+(\alpha+\beta)\vec{v}+(\beta+\gamma)\vec{w} &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Como os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI, temos $\begin{cases}\alpha+\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-\gamma\ (I)\\ \alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta\ (II)\\ \beta+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\beta\ (III)\end{cases}$.

Temos, então, das equações (I) e (II) que $\gamma=\beta$ e a equação (III) nos dá $\gamma=-\beta$, portanto $\gamma=\beta=0$, logo $\alpha=\gamma=\beta=0$. Concluimos então que os vetores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{u}+\vec{w}$ são LI.

b) Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem LI, serão os vetores $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ e $\vec{u}-\vec{w}$ também LI?

Solução: Para que os vetores $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ e $\vec{u}-\vec{w}$ sejam LI, a única solução de $\alpha(\vec{u}-\vec{v})+\beta(\vec{v}-\vec{w})+\gamma(\vec{u}-\vec{w})$ = (0, 0, 0), deve ser $\alpha=\beta=\gamma=0$. Note que:

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{u}-\vec{v})+\beta(\vec{v}-\vec{w})+\gamma(\vec{u}-\vec{w}) &= (0,0,0)\\ \Rightarrow \alpha\vec{u}-\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}-\beta\vec{w}+\gamma\vec{u}-\gamma\vec{w} &= (0,0,0)\\ \Rightarrow (\alpha+\gamma)\vec{u}+(-\alpha+\beta)\vec{v}+(-\beta-\gamma)\vec{w} &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Como os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI, temos $\begin{cases}\alpha+\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-\gamma\ (I)\\ -\alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta\ (II)\\ -\beta-\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\beta\ (III)\end{cases}$.

Concluímos, então, que para todo β real, temos que $\alpha=\beta$ e $\gamma=-\beta$ é solução para o sistema. Portanto, os vetores $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ e $\vec{u}$ - w são LD.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD:

a) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 6\\ -12 & -9\end{bmatrix}\right\} \subset M_{22}$
b) $\{(2,-1),(1,3)\} \subset \mathbb{R}^2$
c) $\{(-1,-2,0,3),(2,-1,0,0),(1,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$
d) $\{-x^2+2x+1,\ 3x^2-x+2, 7x^2-4x+3\} \subset \wp_2$
e) $\{x^2+x+1,\ 3x^2-x+1, -x^2+3x+1\} \subset \wp_2$
f) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right\} \subset M_{22}$
g) $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}\right\} \subset M_{22}$
h) $\{2x, -x^2+x,\ x^3+1, x^3-x^2+2\} \subset \wp_3$
i) $\{1-2x, -x^3+x^2+3x, 2x^3+x^2+1, 3x^3+2x+3\} \subset \wp_3$

2. Determine o valor de k para que:

a) A = {(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)} seja LI;

b) $A = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}\right\}$ seja LD.

Base de um espaço vetorial

Agora, queremos determinar, dentro de um espaço vetorial V, um conjunto finito de vetores de cardinalidade mínima tal que qualquer outro vetor de V seja combinação linear deles. Um conjunto de vetores desse tipo é chamado de base de V.

Definição: Um conjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é uma base do espaço vetorial V se A é LI e A gera V.

Propriedades:

P1) Se $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto de vetores que gera um espaço vetorial V então A contém uma base de V.

P2) Se $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto de vetores que gera um espaço vetorial V então qualquer conjunto com mais de n vetores de V é LD. (Concluímos, então, que, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores.)

P3) Qualquer base de um espaço vetorial possui o mesmo número de elementos. Este número é chamado de dimensão do espaço vetorial V, e denotado por *dim V*.

P4) Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são vetores LI de um espaço vetorial V e $w \in V$ não é combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$, então os vetores $v_1, v_2, ..., v_n, w$, também são LI.

P5) Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

P6) Se $dim\ V = n$ então qualquer conjunto de n vetores LI forma uma base de V.

P7) Dada uma base $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial V, cada vetor de V é escrito de forma única como combinação linear dos vetores de A.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Sejam os vetores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Mostre que o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

Solução: Para provar que B é LI, deve-se mostrar que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ admite somente a solução trivial, isto é, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Com efeito,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Rightarrow a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Logo, B é LI.

Para mostrar que B gera o $\mathbb{R}^3$, deve-se mostrar que qualquer vetor $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores de B. Note que:

$$\vec{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \Leftrightarrow$$
$$(x,y,z) = a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = x \\ 2a_1 + a_2 = y \\ 3a_1 + a_2 + a_3 = z \end{cases}.$$

Como $a_1 = x$, temos da segunda equação que $a_2 = y - 2x$. E, portanto, da terceira equação obtemos $a_3 = z - 3x - y + 2x = -x - y + z$. Assim,

$$(x, y, z) = x(1, 2, 3) + (y - 2x)(0,1,2) + (-x - y + z)(0, 0, 1).$$

Então, como B é LI e gera o R^3, concluímos que B é uma base para o R^3.

2. Sendo $\vec{v_1} = (1, 2) \in R^2$, determine $\vec{v_2} \in R^2$ tal que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ seja base de R^2.

Solução: Seja $\vec{v_2} = (a,b)$, onde a, b $\in$ R. Para que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ seja base de R^2, devemos ter $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ LI, isto é, $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = 0$ admite somente a solução trivial. Assim,

$$\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = 0 \Rightarrow \alpha(1,2) + \beta(a,b) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a\beta = 0 \\ 2\alpha + b\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} -2\alpha - 2a\beta = 0 \\ \ \ 2\alpha + b\beta = 0 \end{cases},$$

Somando, membro a membro, as equações acima obtemos $\beta(-2a + b) = 0$. Como devemos ter $\beta = 0$, para que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ seja LI, obrigatoriamente $-2a + b \neq 0$, assim:

$$2a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (a, 2a) \Rightarrow (a, b) \neq a(1, 2) \Rightarrow \vec{v_2} \neq a\vec{v_1}.$$

Portanto, qualquer vetor $\vec{v_2}$ em R^2 tal que $\vec{v_2} \neq a\vec{v_1}$ para todo $a \in$ R, gera uma base de R^2 juntamente com $\vec{v_1}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine para quais valores de k o conjunto $A = \{(1, k), (k, 4)\}$ seja base do R^2.

2. Seja $B = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 1)\} \subset R^3$.

   a) Mostre que B não é base do R^3.

   b) Determine uma base do R^3 que possua dois elementos de B.

3. Determine se o conjunto B é uma base para o espaço vetorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1,1,-1), (2,-1,0), (3,2,0)\}$

   b) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1,0,1), (0,-1,2), (-2,1,-4)\}$

   c) $V = \mathbb{R}^4, B = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,3), (0,0,0,5)\}$

   d) $V = M_{22}, B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

   e) $V = M_{22}, B = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right\}$

   f) $V = M_{22}, B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

   g) $V = M_{22}, B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

   h) $V = \wp_2, B = \{-x^2 + x, x + 1, x\}$

   i) $V = \wp_2, B = \{-x^2 + x, -x^2 + 1, -x + 1\}$

   j) $V = \wp_2, B = \{3x^2 + 2x + 1, 1\}$

Transformações Lineares

Definição de transformação linear

Estudaremos agora, um tipo especial de função, conhecida como, transformações lineares. O seu domínio e contradomínio são espaços vetoriais.

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais. Dizemos que $T : V \to W$ é uma transformação linear se satisfaz as seguintes condições:

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

$\forall\, u, v \in V, \forall\, \alpha \in$ R.

Ou seja, uma transformação linear é uma função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar. Quando o domínio e o contradomínio de uma transformação linear T, coincidem dizemos que T é um operador linear.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dadas as transformações abaixo, verifique quais são lineares.

a) A simetria em relação a origem no R^3, T : R$^3 \to$ R^3 tal que $T(\vec{v}) = -\vec{v}$.

Solução: Dados $u, v \in$ R^3, temos que

- $T(\vec{u}+\vec{v}) = -(\vec{u}+\vec{v}) = -\vec{u}-\vec{v} = -\vec{u}+(-\vec{v}) = T(\vec{u})+T(\vec{v})$
- $T(\alpha\vec{u}) = -\alpha\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}), \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Portanto, T é linear.

b) A translação no plano T : R$^2 \to$ R^2 dado por $T(x, y) = (x + k_1, y + k_2)$, onde $k_1, k_2 \in$ R*.

Solução: Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos:

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + k_1, y_1 + y_2 + k_2)$$

e

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1 + k_1, y_1 + k_2) + (x_2 + k_1, y_2 + k_2) = (x_1 + x_2 + 2k_1, y_1 + y_2 + 2k_2)$$

Assim $T(\vec{u}+\vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Portanto, T não é linear.

2. Dada uma transformação linear $T : V \to W$, verifique que:

a) $T(0) = 0$

Com efeito, seja $\vec{v}$ um vetor qualquer em V, então $T(0) = T(0.\vec{v})$, mas sendo T uma transformação linear temos que $T(0.\vec{v}) = 0.\, T(\vec{v})$, portanto:

$T(0) = T(0.\vec{v}) = 0.\, T(\vec{v}) = 0$.

b) $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$

Sendo $-\vec{v} = (-1).\vec{v}$ e T uma transformação linear, temos que $T(-\vec{v}) = T((-1).\vec{v}) = (-1).\,T(\vec{v}) = -T(\vec{v})$.

c) $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$

Sendo $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1).\,\vec{v}$ e T uma transformação linear, temos que $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u} + (-1).\,\vec{v}) = T(\vec{u}) + T((-1).\,\vec{v}) = T(\vec{u}) + (-1)\,T(\vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$.

3. Dada a transformação linear $T: \mathrm{R}^2 \to \wp_2$, tal que $T(1, 1) = x^2 - 3x + 2$ e $T(2, 3) = -x^2 + 1$, encontre $T(-1, 2)$ e $T(a, b)$.

Primeiramente verificaremos que $B = \{(1, 1), (2, 3)\}$ é uma base para R^2. Com efeito, para provar que B é LI, deve-se mostrar que $a_1\,(1,1) + a_2\,(2, 3) = (0, 0)$ admite somente a solução trivial, isto é, $a_1 = a_2 = 0$. De fato,

$$a_1(1,1) + a_2(2,3) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_2 \\ a_1 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -3a_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow -2a_2 = -3a_2 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Logo, B é LI.

Para mostrar que B gera o R^2, deve-se mostrar que qualquer vetor $\vec{v} = (x, y) \in \mathrm{R}^2$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores de B. Note que:

$$(x,y) = a_1(1,1) + a_2(2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ a_1 + 3a_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 2a_2 = -x \\ a_1 + 3a_2 = y \end{cases}$$
$$\Rightarrow -a_1 - 2a_2 + a_1 + 3a_2 = -x + y \Rightarrow a_2 = y - x,$$

substituindo este valor na equação $a_1 + 2a_2 = x$, obtemos:

$$a_1 + 2(y - x) = x \Rightarrow a_1 = x - 2y + 2x \Rightarrow a_1 = 3x - 2y.$$

Portanto, qualquer vetor $(x, y) \in \mathrm{R}^2$ pode ser escrito como:

$$(x, y) = (3x - 2y)\,(1, 1) + (y - x)\,(2, 3)$$

Provamos, então, que $B = \{(1, 1), (2, 3)\}$ é uma base para R^2. Logo, com isso, temos que o vetor $(-1, 2)$ pode ser escrito na base B, isto é,

$$(-1, 2) = (3.(-1) - 2.2)\,(1, 1) + (2 - (-1))\,(2, 3) = -7.\,(1, 1) + 3.\,(2,3)$$

portanto, sendo T uma transformação linear temos:

$$T(-1, 2) = T(-7.\,(1, 1) + 3.(2,3)) = -7.\,T(1, 1) + 3.T(2,3)$$
$$= -7.\,(x^2 - 3x + 2) + 3.\,(-x^2 + 1) = -10x^2 + 21x - 11.$$

Analogamente, temos que: $(a, b) = (3a - 2b)\,(1, 1) + (b - a)\,(2, 3)$, logo:

$$\begin{aligned} T(a,b) &= T\big((3a - 2b)(1,1) + (b-a)(2,3)\big) \\ &= (3a - 2b)T(1,1) + (b-a)T(2,3) \\ &= (3a-2b)(x^2 - 3x + 2) + (b-a)(-x^2 + 1) \\ &= (3a-2b)x^2 - 3(3a-2b)x + 2(3a-2b) - (b-a)x^2 \\ &+ (b-a) = \big(3a - 2b - (b-a)\big)x^2 - 3(3a-2b)x + 5a - 3b \\ &= (4a - 3b)x^2 + (6b - 9a)x + 5a - 3b \end{aligned}$$

4. Dada a transformação linear $T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, tal que $T(1, -1) = (3, 2, -2)$ e $T(-1,2) = (1, -1, 3)$, determine $T(x, y)$.

Seja $B = \{(1, -1), (-1, 2)\}$, verificaremos que B é uma base para R^2. Com efeito, dados $a_1, a_2 \in \mathrm{R}$, tal que $a_1 (1, -1) + a_2 (-1, 2) = (0, 0)$ temos,

$$a_1(1,-1) + a_2(-1,2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \\ -a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2a_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_2 = a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Logo, B é LI.

Devemos mostrar agora que qualquer vetor $v = (x, y) \in \mathrm{R}^2$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores de B. Note que:

$$(x,y) = a_1(1,-1) + a_2(-1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = x \\ -a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_1 - a_2 + (-a_1 + 2a_2) = x + y \Rightarrow a_2 = x + y,$$

substituindo este valor na equação $a_1 - a_2 = x$, obtemos:

$$a1 - (x + y) = x \Rightarrow a_1 = x + x + y \Rightarrow a_1 = 2x + y.$$

Portanto, B gera R^2. Logo, B é uma base para R^2. Assim,

$$(x, y) = (2x + y)(1, -1) + (x + y)(-1, 2),$$

temos, então, que:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\big((2x+y)(1,-1) + (x+y)(-1,2)\big) \\ &= (2x+y)T(1,-1) + (x+y)T(-1,2) \\ &= (2x+y)(3,2,-2) + (x+y)(1,-1,3) \\ &= \big(3(2x+y) + (x+y), 2(2x+y) - (x+y), -2(2x+y) \\ &+ 3(x+y)\big) = (7x+4y, 3x+y, -x+y). \end{aligned}$$

Logo, $T(x,y) = (7x+4y, 3x+y, -x+y)$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Dadas as transformações abaixo, verifique quais são lineares.

   a) A projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy, ou seja, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x,y,0)$.
   b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T(x,y) = (|x|, y)$
   c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (x+y, x-y, 0)$
   d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4; T(x,y) = (y,x,y,x)$
   e) $T: M_{22} \to \mathbb{R}; T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

2. Dada a transformação linear $T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (1, 2, -1)$ e $T(0, 1) = (3, 0, 4)$, encontre $T(5, 2)$ e $T(a, b)$.

3. Dada a transformação linear $T: \mathrm{R}^2 \to \wp_2$ tal que $T(1, 0) = -2x + 1$ e $T(3, -1) = 2x^2 + x$, encontre $T(-7, 9)$ e $T(a, b)$.

4. Dado o operador linear $T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (3, -2)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$, determine $T(x, y)$. (Obs.: Um operador linear T é uma transformação linear de um espaço vetorial V nele mesmo, isto é, $T: V \to V$)

5. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3,4)$.

a) Determinar $T(x, y, z)$.

b) Determinar $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (-3, -2)$.

c) Determinar $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (0, 0)$.

6. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(1, 0, 0) = (0, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 0, 3)$. Determinar $T(x, y, z)$.

Núcleo de uma transformação linear

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais e $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado *núcleo* de T e denotado por $ker(T)$. Em símbolos temos,

$$ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

SAIBA MAIS

o termo *ker* é proveniente do inglês *"kernel"* que significa núcleo.

Teorema 1: O núcleo de uma transformação linear $T: V \to W$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Sejam v_1 e v_2 vetores em $ker(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $T(v_1) = T(v_2) = 0$. Logo,

$$\begin{cases} T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0 \\ T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha . 0 = 0 \end{cases}.$$

Concluímos, então, que $v_1 + v_2 \in ker(T)$ e $\alpha v_1 \in ker(T)$. E como T é uma transformação linear, temos que $T(0) = 0$, assim $0 \in ker(T)$, portanto $ker(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Teorema 2: Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se, e somente se, $ker(T) = \{0\}$.

Demonstração: Seja T injetora, provaremos que $ker(T) = \{0\}$. Para isso, dado v um vetor de $ker(T)$, temos que $T(v) = 0$. Sendo T uma transformação linear, temos que $T(0) = 0$, mas como T é injetora, temos que $v = 0$. Portanto, o único elemento do núcleo é o vetor nulo, isto é, $ker(T) = \{0\}$. Seja agora $ker(T) = \{0\}$, provaremos que T é injetora. Então, dados $v_1, v_2 \in V$ com $T(v_1) = T(v_2)$, temos que $T(v_1) - T(v_2) = 0$, sendo T uma transformação linear, obtemos $T(v_1 - v_2) = 0$, assim $v_1 - v_2 \in ker(T)$, mas como $ker(T) = \{0\}$, então $v_1 - v_2 = 0$, o que implica que $v_1 = v_2$. Provamos que dados $v_1, v_2 \in V$ com $T(v_1) = T(v_2)$, então $v_1 = v_2$. Portanto, T é injetora.

SAIBA MAIS

Uma função $T: V \to W$ é injetora se $\forall v_1, v_2 \in V$, com $v_1 \neq v_2$ implica que $T(v_1) \neq T(v_2)$. Ou se $\forall v_1, v_2 \in V$ com $T(v_1) = T(v_2)$ implica que $v_1 = v_2$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Encontre o núcleo da transformação linear $T: \wp_1 \to \mathbb{R}$ definida por $T(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$.

Solução: Dado $p(x) \in \wp_1$, temos que $p(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, assim:

$$T\big(p(x)\big) = \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]\Bigg|_0^1$$
$$= \left(\frac{a}{2} + b\right) - \left(a.\frac{0}{2} + b.0\right) = \frac{a}{2} + b.$$

Logo,

$$ker(T) = \{p(x) \in \wp_1 : T(p(x)) = 0\} = \left\{p(x) \in \wp_1 : \tfrac{a}{2} + b = 0\right\}$$
$$= \left\{p(x) \in \wp_1 : b = -\frac{a}{2}\right\} = \left\{ax - \frac{a}{2}, a \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Encontre o núcleo da transformação linear $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = A^T$.

Solução: Note que:

$ker(T) = \{A \in M_{22} : T(A) = 0\} = \{A \in M_{22} : A^T = 0\}$,

mas $A^T = 0 \Rightarrow A = (A_T)^T = (0)^T = 0$, logo, $ker(T) = \{0\}$.

3. Encontre o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + y + 8z)$.

Solução: Sendo $ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = 0\}$, temos que:

$ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0, 0)\}$

Logo, dizemos que $(x, y, z) \in ker(T)$, se, e somente se,

$$(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0' \end{cases}$$

somando membro a membro as equações temos que, $4x + 12z = 0 \Rightarrow x = -3z$. Substituindo este valor na equação $x - y + 4z = 0$, obtemos:

$$-3z - y + 4z = 0 \Rightarrow y = z.$$

Portanto, qualquer $(x, y, z) \in ker(T)$ é dado por: $(x, y, z) = (-3z, z, z)$. Assim

$ker(T) = \{(-3z, z, z): z \in \mathbb{R}\} = \{z(-3, 1, 1): z \in \mathbb{R}\} = [(-3, 1, 1)]$.

4. Verifique que a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \wp_1$ definida por $T(a, b) = (a + b)x + a$ é injetora.

Solução: Pelo teorema 2, temos que T é injetora se, e somente se, $ker(T) = \{(0,0)\}$. Note que,

$ker(T) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : T(a, b) = 0\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a + b)x + a = 0\}$

$= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a + b) = 0 \text{ e } a = 0\} =$

$= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0 \text{ e } a = 0\} = \{(0, 0)\}$

Portanto, T é injetora.

Imagem de uma transformação linear

Definição: O conjunto imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é formado por todos os pontos $w \in W$ que são imagens de algum vetor $v \in V$. Isto é,

$$Im(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algum } v \in V\} = \{T(v) \in W : v \in V\}.$$

Observação: Se $Im(T) = W$, então T é sobrejetora.

SAIBA MAIS

Uma função $T : V \to W$ é sobrejetora se $\forall w \in W$, existir pelo menos um $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. A imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de W.

Solução: Sejam w_1 e w_2 vetores de $Im(T)$ e $\alpha \in$ R. Vamos mostrar que $w_1 + w_2$ e αw_1 pertencem a $Im(T)$. Para isto, devemos mostrar que existem vetores u e v em V tais que $T(u) = w_1 + w_2$ e $T(v) = \alpha w_1$.

Como $w_1, w_2 \in Im(T)$, existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Fazendo $u = v_1 + v_2$ e $v = \alpha v_1$, temos:

$T(u) = T(v_1 + v_2) = \mathrm{T}(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$

e

$T(v) = T(\alpha v_1) = \alpha.T(v_1) = \alpha w_1$.

Portanto, $Im\ (T)$ é subespaço vetorial de W.

2. Encontre a imagem da transformação linear $T : \wp_1 \to$ R definida por $T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\, dx$.

Solução: Como para todo $a \in$ R, existe $p(x) = a \in \wp_1$ tal que $T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\, dx = \int_0^1 a dx = [ax]\,|_0^1 = a - 0 = a$, temos que R $\subset Im(T)$, mas pela definição de $Im(T)$, temos que $Im(T) \subset$ R, portanto $Im(T) =$ R.

3. Encontre a imagem da transformação linear $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Solução: Como para toda matriz A no contradominio M_{22}, existe uma matriz $B = A^{\mathrm{T}}$ no dominio M_{22}, tal que $T(A^{\mathrm{T}}) = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, temos que $M_{22} \subset Im(T)$, mas pela definição de $Im(T)$ temos $Im(T) \subset M_{22}$, portanto $Im(T) = M_{22}$.

4. Dada a transformação linear T: R$^2 \to$ R^2 definida por $T(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$, verifique se o vetor (5,3) pertence ao conjunto $Im(T)$.

Solução: Verificaremos se existe $(x, y) \in$ R^2 tal que $T(x, y) = (5, 3)$, isto é, precisamos verificar se o sistema $(x - 2y, 2x + 3y) = (5, 3)$ tem solução. Com efeito,

$$(x - 2y, 2x + 3y) = (5,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -10 \\ \quad 2x + 3y = 3 \end{cases},$$

somando membro a membro as duas equações temos que: $7y = -7 \Rightarrow y = -1$.

Substituindo $y = -1$ na equação $x - 2y = 5$, obtemos: $x - 2(-1) = 5 \Rightarrow$

$x = 3$. Portanto, o sistema admite solução e, então, conclui-se que $(5, 3) \in Im(T)$.

SAIBA MAIS

Este teorema também é conhecido por Teorema do Posto, onde:
$nulidade\ (T) + posto\ (T) = dim\ V$
sendo,
$nulidade\ (T) = dim\ ker\ (T)$ e $posto\ (T) = dim\ Im\ (T)$.

Teorema da dimensão

Teorema 1: Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, onde V é um espaço de dimensão finita, então

$dim\ ker\ (T) + dim\ Im\ (T) = dim\ V$.

Omitiremos a demonstração deste teorema, ela pode ser encontrada com facilidade em vários livros de Álgebra Linear.

Teorema 2: Se $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora e $dim\ V = dim\ W$, então T transforma base em base, ou seja, se $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é base de V, então o conjunto $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ é base de W.

Demonstração: Sendo $dim\ V = dim\ W = n$, basta mostrar que $T\ (B)$ é LI. Ou seja, dada a igualdade $c_1 . T(v_1) + c_2 . T(v_2) + ... + c_n$.T(v_n) = 0, devemos provar que $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Com efeito, pela linearidade de T, temos que

$$T\ (c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + ... + c_n . v_n) = c_1 . T(v_1) + c_2 . T(v_2) + ... + c_n . T(v_n) = 0$$

Sendo T injetora, temos que $c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + ... + c_n . v_n = 0$, mas como B é base, B é LI e, portanto, $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Logo, $T(B)$ é base de W.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja $T : V \to W$ é uma transformação linear com $dim\ V = dim\ W = n$, verifique que T será injetora se, e somente se, T for sobrejetora.

   Solução: Assumindo T injetora, temos que $ker(T) = \{0\}$, logo $dim\ ker(T)=0$. Assim, pelo teorema 1, obtemos:

   $$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V \Rightarrow 0 + dim\ Im\ (T) = n \Rightarrow dim\ Im(T) = \mathrm{n} = dim\ W,$$

   Concluimos, então, que $Im(T) = W$ e, portanto, T é sobrejetora.

   Reciprocamente, assumindo T sobrejetora temos $Im(T) = W$, isto é, $dim\ Im(T) = dim\ W = n$, assim pelo teorema 1,

   $$dimker(T) + dimIm(T) = dim\ V \Rightarrow dimker(T) + n = n \Rightarrow dimker(T) = 0,$$

   assim, $ker(T) = \{0\}$, e portanto T é injetora.

2. Encontre o posto e a nulidade das transformações lineares abaixo:

   a) $T : \wp_2 \to \wp_3$, onde $T(p(x)) = xp(x)$.

   Solução: Dado $p(x) \in \wp_2$, temos que $p\ (\mathrm{x}) = ax^2 + bx + c$, assim $T\ (p\ (x)\ ) = T(ax^2 + bx + c) = x. (ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Portanto,

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{p(x) \in \wp_2 : T(p(x)) = 0\} \\ &= \{ax^2 + bx + c : ax^3 + bx^2 + cx = 0\} \\ &= \{ax^2 + bx + c : a = b = c = 0\} = \{0\}, \end{aligned}$$

Concluimos, então, que $nulidade(T) = dim\ ker(T) = 0$.

O teorema da dimensão garante que:

$$\begin{aligned} dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ \wp_2 \Rightarrow posto(T) \\ = dim\ Im(T) = 3 - 0 = 3. \end{aligned}$$

SAIBA MAIS

Sendo $\{1, x, x^2\}$ base canônica de $\wp_2$, temos que $dim\ \wp_2 = 3$.

2. $T : W \to \wp_2$, onde $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (c - a)\,x^2 + (b - c)\,x + (a - b)$ e W é o espaço vetorial formado pelas matrizes simétricas 2×2.

Solução: Sendo $ker\ (T) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in W : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = 0\right\}$, temos que:

$$\begin{aligned} ker\ (T) &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in W : (c-a)x^2 + (b-c)x + (a-b) = 0\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in W : (c-a) = (b-c) = (a-b) = 0\right\} \\ &- \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in W : a - b = c\right\} - \left\{\begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix}\right\} - ger\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para o núcleo de T, por isso $nulidade(T) = dim\ ker(T) = 1$.

O teorema da dimensão garante que $dim\ ker\ (T) + dim\ Im(T) = dim\ W \Rightarrow posto(T) = dim\ Im(T) = dim\ W - dim\ ker\ (T)$. Logo, para encontrarmos o $posto(T)$, devemos saber $dim\ W$. Para isso, dada uma matriz qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ de W, temos $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo W é gerado pelo conjunto $G = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$. Para que G seja uma base para W, devemos verificar se G é LI. Para isso, considere:

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Temos, então, que $a = b = c = 0$, logo G é LI e, portanto, G é uma base para W. Concluímos que $dimW = 3$. Assim:

$$Posto(T) = dim\ Im(T) = dim\ W - dim\ ker\ (T) = 3 - 1 = 2.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o núcleo e a imagem das transformações lineares:

   a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

   b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$

   c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

   d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - 3y, x - z, z - x)$

   e) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$

2. Dado o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (3x + y, 4x + 2y)$, verifique:

   a) Quais dos vetores $(1, -2)$, $(2, -3)$ e $(-3, 6)$ pertencem a $ker\,(T)$?

   b) Quais dos vetores $(2, 4)$, $(-\frac{1}{2}, -1)$ e $(-1, 3)$ pertencem a $Im\,(T)$?

3. Dada a transformação linear $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, verifique:

   a) Quais das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ pertencem a $ker\,(T)$?

   b) Quais das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ pertencem a $Im\,(T)$?

   c) Descreva $ker\,(T)$ e $Im\,(T)$.

4. Dada a transformação linear $T: \wp_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (c - b, b + a)$, verifique:

a) Quais dos polinômios $x + 1$, $-x^2 + x$ e $-x^2 + x + 1$ pertencem a $ker\,(T)$?

b) Quais dos vetores $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ pertencem a $Im(T)$?

c) Descreva $ker\,(T)$ e $Im(T)$.

5. Encontre a nulidade e o posto de T, onde:

   a) $T: M_{22} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, c - d)$.

   b) $T: \wp_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = (p(0), p(1))$.

   c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$.

   d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$.

   e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - 3y, x - z, z - x)$.

   f) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$.

6. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

   a) Determine $T(x, y)$.

   b) Determine $ker(T)$ e $Im(T)$.

   c) T é injetora? E sobrejetora?

7. Determine o núcleo e a imagem do operador linear $T : \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ definido por

$T\,(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$.

8. Seja $T : \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^2$ a transformação linear tal que $T(e_1) = (1, 2)$, $\mathrm{T}(e_2) = (0, 1)$ e $T(\mathrm{e}_3) = (-1, 3)$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de R^3.

III

AUTOVALORES, AUTOVETORES, DIAGONALIZAÇÃO E ESPAÇO COM PRODUTO INTERNO

Nesta unidade vamos estudar os aspectos relacionados com Autovalores, Autovetores, Diagonalização e Espaço com Produto Interno.

Objetivos

• Definir e exemplificar os conceitos de autovalor e autovetor de um operador;
• Aplicar os conceitos de autovalores e autovetores para diagonalizar operadores;
• Compreender se um operador linear é diagonalizável;
• Definir produto interno;
• Reconhecer um produto interno a partir da definição;
• Estudar os principais tipos de produto interno;
• Operar com o produto interno para a solução de problemas envolvendo espaços vetoriais;
• Operar com o produto interno para o estudo de problemas de ortogonalidade e perpendicularidade.

Autovalores e Autovetores

Definição

Definição: Dado um espaço vetorial V e uma transformação linear $T{:}V \to V$, dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor associado ao autovetor $v \in V$ se, λ e v satisfazem $T(v) = \lambda v$.

SAIBA MAIS

Neste caso, $T(v)$ e v tem a mesma direção, isto é, $T(v)$ e v são paralelos.

Exemplo 1: Seja $T{:}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (y,x)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Para que um número real λ seja um autovalor de T tem que existir um vetor não-nulo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = \lambda(x,y)$, isto é, $(y,x) = \lambda(x,y)$, assim:

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Rightarrow y = \lambda(\lambda y) \Rightarrow y\left(1-\lambda^2\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } \lambda = \pm 1$$

Se $y = 0$, temos $x = 0$, mas o vetor $(x,y) \neq (0,0)$. Logo, $\lambda = \pm 1$ e, portanto, para $\lambda_1 = 1$ obtemos $(x,y) = (x,x) = x(1,1)$, assim $v_1 = (1,1)$. Analogamente, para $\lambda_2 = -1$ obtemos $(x,y) = (x,-x) = x(1,-1)$, assim $v_2 = (1,-1)$. Concluimos, então, que v_1 é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ e v_2 é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Teorema 1: Seja v um autovetor associado a um autovalor λ da transformação linear $T{:}V \to V$, qualquer vetor $w = \alpha v$ $(\alpha \neq 0)$ também é autovetor de T associado a λ.

Demonstração: Com efeito, sendo $w = \alpha v$ e T uma transformação linear temos que $T(w) = T(\alpha v) = \alpha T(v)$, como v é um autovetor associado ao autovalor λ, isto é, $T(v) = \lambda v$, obtemos $T(w) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v) = \lambda w$, logo $w = \alpha v$ também é autovetor de T associado a λ.

SAIBA MAIS

No exemplo 1, usamos o seguinte resultado: se v é autovetor associado a um autovalor λ, então αv também o é. Este resultado está provado no teorema.

Exemplo 2: Considere a transformação linear $T{:}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x + y, x + 3y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Para encontrarmos os autovetores e autovalores de T, devemos resolver a equação $T(x,y) = \lambda(x,y)$, que neste caso é $(3x + y, x + 3y) = \lambda(x,y)$. Esta equação resulta no sistema

$$\begin{cases} 3x + y = \lambda x \Rightarrow (3-\lambda)x + y = 0 & (I) \\ x + 3y = \lambda y \Rightarrow x + (3-\lambda)y = 0 & (II) \end{cases}.$$

De (II) temos que $x = -(3 - \lambda)y = (\lambda - 3)y$, substituindo em (I) obtemos $(3 - \lambda)(\lambda - 3)y + y = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 6\lambda + 8)y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.

Consideremos os casos $y = 0$ ou $y \neq 0$.

i. Se $y = 0$, então temos da equação (II) que $x = 0$. Logo não nos interessa, já que os autovetores são vetores não-nulos.

ii. Se $y \neq 0$, então $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ e portanto $\lambda_1 = 2$ ou $\lambda_2 = 4$. Agora, para $\lambda_1 = 2$, temos de (I) que $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$. Concluímos, então, que, para o autovalor $\lambda_1 = 2$, os autovetores associados são do tipo $(x,-x)$, $x \neq 0$. Analogamente, para oautovalor $\lambda_2 = 4$, obtemos $y = x$, e, portanto, os autovetores associados são do tipo (x,x), $x \neq 0$.

Teorema 2: Se λ é um autovalor de um operador linear $T{:}V \to V$, então, o conjunto $V_\lambda = \{v \in V{:}T(v) = \lambda v\}$ é um subespaço vetorial de V, associado ao autovalor λ.

Demonstração: Com efeito, dados $v, w \in V_\lambda$, temos que $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \lambda w$. Então, para qualquer escalar $\alpha \in R$,

$$T(v + w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w) \Rightarrow v + w \in V_\lambda$$

e

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v) \Rightarrow \alpha v \in V_\lambda, \forall \alpha \in R.$$

Portanto, V_λ é um subespaço vetorial de V.

Observação: A imagem $T(V_\lambda)$ do subespaço V_λ está contida em V_λ, isto é, V_λ é invariante sob T. O subespaço V_λ é chamado autoespaço de T associado a λ e é formado por autovetores associados a λ e pelo vetor nulo.

Exemplo 3: Considerando o *exemplo 2*, temos os seguintes autoespaços, respectivamente:

$$V_{\lambda_1 = 2} =\{(x,y) \in R^2{:}y = -x\} \text{ e } V_{\lambda_2 = 4}) = \{(x,y) \in R^2{:}y = x\}.$$

SAIBA MAIS

Temos, então, pelo exemplo 3 que as retas $V_{\lambda = 2}$ e $V_{\lambda = 4}$ são invariante sob T.

Polinômio característico

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, dizemos que λ é autovalor associado ao autovetor v de A, se λ e v forem, respectivamente, o autovalor e autovetor da transformação linear $T{:}R^n \to R^n$, cuja matriz associada é a matriz A, em relação à base canônica, isto é, $T(v) = Av$. Assim, um autovalor $\lambda \in R$ e um autovetor $v \in R^n$ de A são soluções da equação $Av = \lambda v$,$v \neq 0$. Sendo $I{:}R^n \to R^n$ a matriz identidade, temos que $Av = \lambda v$ equivale a $Av = (\lambda I)v$, ou ainda, $(A - \lambda I)v = 0$. Para que esse sistema homogêneo admita soluções não-nulas, deve-se ter:

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

A equação $det(A - \lambda I) = 0$ é denominada equação característica de T ou da matriz A. Suas raízes são exatamente os autovalores de T ou de A. A expressão $det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado polinômio característico. Uma vez determinado os autovalores, os autovetores associados podem ser determinados resolvendo a equação $(A - \lambda I)v = 0$ para cada autovalor λ.

Exemplo 1: Para encontrar todos os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ do exemplo 2 da seção anterior, devemos determinar todas as soluções λ da equação $det(A - \lambda I) = 0$. Como

$$det(A - \lambda I) = det\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

temos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Para encontrar os autovetores associados precisamos resolver a equação $(A - \lambda I)$ $v = 0$, assim:

Para $\lambda_1 = 2$, temos $\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x \Rightarrow v_1 = (x, -x)$

Para $\lambda_2 = 4$, temos $\begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow v_2 = (x, x).$

Exemplo 2: Encontre os autovalores e os correspondentes autoespaços da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução: O polinômio característico é $det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 2 + (-\lambda)^2 (4 - \lambda) - (-5)(-\lambda) = 2 + 4$

$\lambda^2 - \lambda^3 - 5\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$, fatorado temos, $det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 (2 - \lambda)$. Logo $det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 (2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Como $\lambda = 1$ é uma raiz de multiplicidade dois, vamos nomear os autovalores por $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Para encontrar os autovetores associados precisamos resolver a equação $(A - \lambda I)v = 0$, assim:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, temos

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \Rightarrow x = y \\ -y + z = 0 \Rightarrow z = y \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Como $x = y$ e $z = y$ satisfaz a terceira equação, temos que os autovetores são do tipo (y,y,y), portanto o autoespaço associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é dado por:

$(\mathbb{R}^3)_{\lambda_1 = \lambda_2 = 1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\} = ger(1,1,1)$, ou seja, é o subespaço gerado pelo vetor (1,1,1).

Para $\lambda_3 = 2$, temos

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{y}{2} \\ -2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

Como $x = \dfrac{y}{2}$ e $z = 2y$, satisfaz a terceira equação temos que os autovetores são do tipo $\left(\dfrac{y}{2}, y, 2y\right)$, portanto o autoespaço associado a $\lambda_3 = 2$ é dado por:

$(\mathbb{R}^3)_{\lambda_3 = 2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \dfrac{y}{2} e\, z = 2y\right\} = \left\{\left(\dfrac{y}{2}, y, 2y\right)\right\} = \left\{\dfrac{y}{2}(1,2,4)\right\} = ger(1,2,4)$, ou seja, é o subespaço gerado pelo vetor (1,2,4).

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determinar os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

a) T(x,y) = (x + 2y,-x + 4y);

b) T(x,y) = (y,-x);

c) T(x,y,z) = (x + y,y,z);

d) T(x,y,z) = (x, -2 –y, 2x + y + 2z).

2. Encontre todos os autovalores e autovetores das matrizes abaixo:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. Quais são os autovalores e autovetores da matriz identidade?

4. Mostre que se u e v são autovetores de uma transformação linear associada a λ, então αu - βv é também autovetor associado ao mesmo λ.

5. Determine o operador linear $T(x,y)$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autovetores $u = (y, -y)$ e $v = (0,y)$, respectivamente.

6. Seja $T:V \to V$ um operador linear não-inversível. Os vetores não-nulos do núcleo de T são autovetores? Em caso afirmativo, determine o autovalor associado e, em caso negativo, justifique.

7. Determine os autovalores da matriz $\begin{pmatrix} -16 & 10 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$, caso existam.

8. Prove o teorema a seguir: Seja A uma matriz n x n e λ um escalar, os seguintes enunciados são equivalentes:

a) λ é um autovalor d e A.

b) $(A - \lambda I)x = 0$ tem uma solução não trivial.

c) Nuc$(A - \lambda I) \neq \{0\}$

d) $det(A - \lambda I) = 0$

9. Sejam u e v vetores linearmente independentes de R^2, prove que o vetor $|u|v + |v|u$ está contido na bissetriz do ângulo formado por u e v.

10. Para cada par de vetores u = (x,y) e v = (x',y') em R^2, defina a seguinte função; u.v = 2xx' –xy'-x'y+2yy'. Prove que isto define um produto interno no espaço vetorial R^2.

Diagonalização de operadores

Dado um operador T:V → V, sabemos que a cada base B de V corresponde uma matriz [T]B que representa T na base B. Será que existe uma base em V, de modo que a representação matricial de T seja a mais simples possível?

A resposta para esta pergunta está no processo chamado de diagonalização de operadores. A diagonalização de $[T]_B$ é o processo que nos permite encontrar uma matriz diagonal $[T]_{B1}$. A nova base B_1 é uma base formada de autovetores. Vale a pena ressaltar que nem sempre é possível a diagonalização de um operador. Estes fatos nos levam a seguinte definição:

Definição: Um operador $T{:}V \to V$ é diagonalizável se existe uma base de V formada de autovetores de T.

Existe também uma definição de operador diagonalizável equivalente à definição anterior, vejamos:

Definição: Uma matriz quadrada A é diagonalizável se existir uma matriz inversível *P* tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal. A matriz P é uma matriz formada a partir dos autovetores da matriz A. Diz-se, nesse caso, que a matriz P diagonaliza A, ou que P é a matriz diagonalizadora.

DICA

Para diagonalizar um operador, primeiramente, deve-se encontrar os seus autovalores e autovetor!

De modo geral as definições acima podem ser entendidas como: um operador linear T:V→V é diagonalizável se existe uma base de V formada de autovetores.

Exemplo 1: Determinar uma matriz P que diagonaliza a matriz A dada a seguir, e em seguida calcular $P^{-1}AP$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solução: O primeiro passo será encontrar os autovalores da matriz A, para isto, devemos resolver a equação det(A - λI) = 0. Os autovetores são os seguintes:

V_1= (1,0,-1) associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$

V_2 = (1,1,1) associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$

V_3 = (1,-2,1) associado ao autovalor $\lambda_3 = 6$

Como todos os autovalores são distintos, então o conjunto B = $\{V_1,V_2,V_3\}$ é uma base de autovetores de R^3, e portanto a matriz P, dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

DICA
As colunas de P são formadas por autovetores.

Diagonaliza a matriz A.

De posse da matriz P, agora vamos encontrar o matriz D, tal que D = $P^{-1}AP$. Para encontrar a inversa de P, pode-se utilizar os métodos estudados na unidade I.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = D$$

DICA
Observe que a diagonal principal de D é formada por autovetores.

Propriedade: Dado um operador linear T em R^3 que admite uma base formada por autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 distintos, associados aos autovetores V_1, V_2 e V_3, respectivamente, então a matriz de T na base formada por B={V_1, V_2, V_3} é da forma:

$T(V_1) = \lambda_1 V_1 = \lambda_1 V_1 + 0V_2 + 0V_3$

$T(V_2) = \lambda_2 V_2 = 0V_1 + \lambda_2 V_2 + 0V_3$

$T(V_3) = \lambda_3 V_3 = 0V_1 + 0V_2 + \lambda_3 V_3$

A representação matricial do operador T na base B é dada por:

$[T]B = \begin{pmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 3 \end{pmatrix}$. Essa é a matriz que diagonaliza operador T na base B costuma ser representada da forma [T]B por D.

DICA

A matriz D que diagonaliza T é constituída dos autovalores de T dispostos na diagonal principal.

Base de Autovetores

Como dissemos, anteriormente, é necessário termos uma base formada por autovetores para que seja possível diagonalizar um operador $T:V \rightarrow V$. Para que seja possível encontrar um base formada por autovetores é necessário, como já vimos antes, resolvermos a equação matricial $[T-\lambda I]v=0$, onde v é um vetor pertencente ao espaço V, na verdade este vetor é desconhecido, mas quando a equação dada for resolvida para λ, os v serão os elementos da base de autovetores para o operador T.

Vejamos alguns resultados que nos ajudam a encontrar uma base de autovetores.

1ª Propriedade: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Demonstração: Faremos uma demonstração para λ_1 e λ_2 distintos. A prova para o caso de n vetores é similar.

Sejam $T(v_1)=\lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. De posse desta hipótese agora tome a combinação linear abaixo:

(1) $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$

Aplique a transformação linear T a equação (1), e utilize a linearidade de T, com isso temos:

$a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = 0$, ou de modo equivalente,

(2) $a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 = 0$

Multiplicando a equação por λ_1, temos:

(3) $a1\lambda1\ v1 + a2\ \lambda1v2 = 0$

Subtraindo a equação (3) de (2), temos:

$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 =0$

Mas, por hipótese temos $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$

Logo, temos $a_2 = 0$.

Substituindo $a_2 = 0$ na equação (1) e sabendo que $v_1 \neq 0$, temos:

$a_1 = 0$

Logo, concluímos que os vetores $\{v_1, v_2\}$ são linearmente independentes.

2ª Propriedade: Sempre que tivermos um operador linear $T{:}V \to V$, com $V=R^2$ e $\lambda_2 \neq \lambda_1$, o conjunto formado pelos autovetores associados será uma base do R^2. Este fato vale em geral, isto é, se $T{:}V \to V$ é linear, e o espaço V tem dimensão n e existem n autovalores distintos, então o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V. (Lembrando que este resultado nos permite construir uma base composta de n autovetores em um espaço de dimensão n)

Exemplo: Seja o operador linear T(x,y) = (-3x-5y, 2y), encontre uma base de autovetores para T.

Solução: A matriz de T escrita na base canônica de R^2 é dada por:

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A equação característica de T é:

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6=0$,

cujas raízes, são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=-3$ e esses são os autovalores de T. Como $\lambda_2 \neq \lambda_1$, os correspondentes autovetores formam uma base para R^2.

Os autovetores são encontrados resolvendo-se o sistema linear e homogêneo abaixo:

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obteremos:

Para λ_1= 2 os vetores v_1 = x(1,-1)

Para λ_2=-3 os vetores v_2 = x(-1,0)

Logo, o conjunto formado pelos vetores B={(1,-1);(-1,0)} é uma base de R^2.

Definição: Duas matrizes A e B são ditas similares (semelhantes), se existir uma matriz inversível M, tal que $A=M^{-1}.B.M$. O conceito de matriz semelhante define uma relação de equivalência .

1. (Propriedade da Reflexividade) Toda matriz A é semelhante a si mesma;
2. (Propriedade da Simetria) Se A é semelhante a B implica B é semelhante a A;
3. (Propriedade da Transitividade) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C implica que A é semelhante a C.

Demonstração

1) Considere $A=I^{-1} AI$, ou seja, A é semelhante a A.

2) Se $A=M^{-1} BM$, então $B=N^{-1} AN$, com $N=M^{-1}$, ou seja, se A é semelhante a B implica B semelhante a A.

3) Se $A=M^{-1}BM$ e $B=N^{-1}CN$, então $A=P^{-1}CP$ com P=NM, isto é, se A é semelhante a B e B é semelhante a C implica A semelhante a C.

Teorema: Sejam A e B matrizes n x n. Se B é similar a A, então as duas matrizes têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmo autovalores.

Demonstração: Sejam $p_A(x)$ e $p_B(x)$ os polinômios característicos de A e B, respectivamente. Se B é similar a A, então existe uma matriz não similar S tal que

$B= S^{-1}.A.S$. Logo,

$$p_B(x)=\det(B-\lambda I)$$

$$p_B(x)=\det(S^{-1}.A.S-\lambda I)$$

$$p_B(x)=\det(S^{-1}(A-\lambda I)S)$$

$$p_B(x)=\det(S^{-1})\det(A-\lambda I)\det(S)$$

$$p_a(x)=p_b(x)$$

Os autovalores de uma matriz são as raízes do polinômio característico. Como as duas matrizes têm o mesmo polinômio característico, elas devem ter os mesmos autovalores.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Encontre uma base de autovetores para os operadores a seguir.

a) T(x,y) =(x,y);

b) T(x,y) =(x+y,x-y);

c) T(x,y,z) =(x,y, x+/z);

d) T(x,y,z) =(x+y, y-z, z-x).

2. Encontre todos os autovalores e autovetores do operador T(x,y,z)=(x+y+z, 2y+z, 2y+3z).

3. Determine uma matriz P que diagonaliza A e calcule que $P^{-1}AP$.

$$a) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad b) A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação $D{:}P \to P$, onde P é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n.

Diagonalização de matrizes simétricas

Nosso objetivo é diagonalizarmos uma matriz simétrica A. Uma matriz A de ordem n é dita simétrica se $A=A^T$. Ao impormos esta condição sob a matriz A, obtemos a seguinte conclusão $a_{ij} = a_{ji}$, para i,j pertencente ao conjunto {1,2,...,n}. Para diagonalizarmos a matriz A necessitamos de um resultado preliminar. Vejamos a seguir:

Propriedade: A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

Demonstração: Faremos aqui uma demonstração para uma matriz simétrica de ordem 2. Para isto, considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é:

$$Det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} p-\lambda & r \\ r & q-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Isto é:

(p-λ)(q-λ)-r2=0

Ou ainda:

pq-λp-λq+λ2-r2=0

λ2-(p+q)λ+(pq-r2)=0

O discriminante dessa equação do 2ª grau em λ é:

Δ = (p+q)2 – 4(pq-r2) = p2 +2pq+q2 -4pq+4r2 = (p-q)2 +4r2

Exemplo: Seja o operador linear simétrico $T{:}R^2 \to R^2$ definido pela matriz simétrica $A=\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$, verifique se esse operador pode ser diagonalizado.

Solução: Para que a matriz A possa ser diagonalizada é preciso encontrar uma base formada de autovetores.

A equação característica de A é dada por $det\left(A-\lambda I\right)=\begin{bmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & -3-\lambda \end{bmatrix}=0$

Isto é:

$(4-\lambda)(-3-\lambda) - 144 = 0$

Ou

$$\lambda^2 - \lambda - 156 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, acabamos por concluir que as raízes dessa equação é $\lambda_1 = -12$ e $\lambda_2 = 13$. Como os autores são reais e distintos, então teremos uma base formada por autovetores.

A matriz $A=\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ escrita na forma diagonal é a matriz dada por, $D=\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$, perceba que a diagonal principal desta matriz é formada pelos autovalores $\lambda_1 = -12$ e $\lambda_2 = 13$ de acordo com a 1ª propriedade estudada na seção anterior.

Exemplo: Verifique se a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, encontre os autovalores da matriz A.

Solução: Os autovalores da matriz A são dados pela equação det(A-λI)=0, o que nos remete a:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=0,$$

$$\left(1-\lambda\right)^2+4=0,$$

$$\lambda_1=1+2i, \quad \lambda_2=1-2i$$

Logo, os autovalores da matriz A não são reais.

Processo de diagonalização
1º passo: Encontrar a matriz do operador em uma base.
2º passo: Encontrar os autovalores da matriz resolvendo a equação det(A-λI)=0
3º passo: Encontrar uma base formada por autovetores associado a cada autovalor encontrado. Se todos os autovalores encontrados forem distintos e de mesma quantidade que a dimensão do espaço, então a matriz diagonal terá na sua diagonal principal esses autovalores. Caso contrário deverá ser analisado o sistema (A-λI)v=0

Espaço com produto interno

Neste tópico estudaremos a noção de produto interno em espaços vetoriais. Esta noção, como veremos a seguir, generaliza a noção de produto escalar em R^2 e em R^3 e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo definir vários conceitos de caráter geométrico previamente estudados em R^2 e em R^3.

Definição de produto interno

Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função que associa a cada par de vetores u e v em V um número real, denotado por u.v, que satisfaz as seguintes condições:

Para quaisquer vetores u, v em V e um número real k qualquer,

1) v.v ≥ 0;

2) v.v =0 se, e somente se, v=0;

3) u.v=v.u

4) (u+v).w= u.w+v.w

5) (Ku).v= k(u.v)

DICA

Um espaço vetorial com produto interno é chamado, abreviadamente, de espaço com produto interno.

Podemos definir diferentes produtos internos num mesmo espaço vetorial. Vejamos alguns deles:

O espaço vetorial R^n

O produto interno padrão (também chamado produto interno usual) em Rn é o produto escalar x.y = $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Dado um vetor w com elementos positivos, também podemos definir um produto interno em R^n por x.y =

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i w_i$, os elementos wi são chamados de pesos.

O espaço vetorial R^{mxn}

Dados A, B em $R^{m \times n}$, podemos definir um produto interno por A.B = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

Espaço vetorial C[a,b]

Podemos definir um produto interno em C[a,b] por f.g = $\int_a^b f(x)g(x)dx$;

Se w(x) é um função positiva contínua em [a,b], então f.g = $\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$;

Também define um produto interno em C[a,b]. A função w(x) é chamada de função peso. Logo, é possível definir vários produtos internos em C[a,b].

Exemplo: Considere as funções f(x)=1 e g(x)=x, calcule o produto interno entre essas funções para x no intervalo [-1,1].

Solução: Sabemos que um produto interno para funções é do tipo $\int_a^b f(x)g(x)dx$. Logo, temos:

$$f(x\,g(x)=\int_{-1}^{1}1.xdx=\int_{-1}^{1}xdx=\frac{x^{2}}{2}\Big|_{-1}^{+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Como o produto interno é zero, podemos concluir que as funções f e g são ortogonais no intervalo [-1,1].

Exemplo: Sejam u=(x_1, x_2) e v=(y_1, y_2) vetores em R^2, verifique que a função definida por u.v = x_1 y_1 + x_2 y_2 define um produto escalar em R^2.

Solução: Note que u.u = x_1 x_1+ y_1 y_1 = $x1^2$ + $y1^2$ ≥0, logo é satisfeita a condição 1 e 2. O produto escalar de u.u só será zero se o vetor u for zero. Veja também que u.v = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 =v.u, assim a condição 3 é satisfeita.

Se u=(x_1, x_2) , v=(y_1, y_2) e w=(z_1, z_2), então:

(u+v)w= (x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2 = (x_1 z_1 + x_2 z_2) + (y_1 z_1+ y_2 z_2) = u.w + v.w, logo a condição 4 é satisfeita.

E por fim temos,

(ku).v = (k x_1)y_1 + (kx_2)y_2 = k(x_1 x_1+ y_1 y_1) =k(u.v)

Dessa forma, u.v = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 denota um produto interno em R^2.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Dados u =(a,b) e v=(c,d) em R^2, verifique se a função definida por u.v = a.c – 2 a.d + 4bd e defina um produto interno em R^2.

2. Sejam os vetores v_1=(x_1,y_1) e v_2=(x_2, y_2) de V=R^2, verifique quais funções $f{:}V\ x\ V \rightarrow R$ definidas abaixo são produtos internos em V.

a) f(v_1,v_2)=2x_1x_2 + 3y_1y_2;

b) f(v_1,v_2)=4x_1x_2;

c) f(v_1,v_2)= x_1y_2 + x_1y_1;

d) f(v_1,v_2)=x_1x_2 + y_1y_2 +1.

3. No espaço V= P2 consideremos o produto interno $f(t)g(t)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calcule f(t).g(t) e |f(t)| para f(t)=t^2 – 2t e g(t)=t+3.

4. Seja V=R^3 com o produto interno usual, determine um vetor u pertencente a R^3 ortogonal aos vetores u_1=(1,1,2), u_2=(5,1,3) e u_3=(2,-2,-3).

5. Determine o valor de m para que os vetores u=(1,m,-3) e v=(m-2, 2,4) sejam ortogonais em relação ao produto interno usual do R^3.

6. Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores u=(1,1,1) e v=(2,3,1).

7. Construa a partir do vetor u=(-1,-2,-1) um base ortornal de R3 relativamente ao produto interno usual.

8. Verifique a desigualdade de Cauchy quando se tem os vetores u=(2,1,-1) e v=(1,1,1).

Espaços Vetoriais Normados

A palavra norma em matemática tem seu próprio significado que é independente de um produto interno e seu uso deve ser mostrado aqui.

Definição: Um espaço vetorial V é dito um espaço vetorial normado se, para cada vetor v em V, é associado um número real, |v|, chamado norma de v, satisfazendo as condições a seguir.

i) $|v| \geq 0$ com igualdade se e, somente, se v=0.

ii) $|\alpha v| = |\alpha||v|$ para qualquer escalar α.

iii) $|v + w| \leq |u| + |w|$ para todo v, w ε V (Esta condição é chamada de desigualdade triangular)

DICA
Esta definição é tão importante quanto a definição de produto interno.

Definição: Sejam u e v vetores em R^2 ou R^3, a distância entre u e v é definida como o número $|u - v|$.

Fato decorrente da definição de norma: Se V é um espaço de produto interno, então a equação $|v| = \sqrt{v.v}$, para todo v ε V, define a norma em V.

Tipos diferentes de normas: É possível definir várias normas diferentes em um espaço vetorial dado. Por exemplo, em R^n poderíamos definir

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Para todo x =$(x_1, ..., x_n)$, é facilmente verificado que $|.|_1$ define uma norma em R^n. Outra norma importante é a norma em R^n, a norma uniforme ou norma infinita, que é definida por

$$|x|_\infty = máx_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

De modo mais geral, podemos definir uma norma em R^n por

$$|x|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Isto para um número real p≥1, em particular se p=2, temos a norma euclidiana.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Sejam x e y vetores em um espaço vetorial com produto interno, mostre que, se x e y são perpendiculares então a distância em entre eles é dado por $\sqrt{|x|^2 + |y|^2}$.

2. Em C(-π,π) com o produto interno definido por $f.g = \int_a^b f(x)g(x)dx$ mostre que cos(mx) e sen(nx) são ortogonais e ambos são vetores ortogonais.

3. Mostre que em qualquer espaço vetorial com uma norma temos $|-v| = |v|$.

4. Mostre que $d: R \times R \rightarrow R$, definida por $d(x,y)=(x-y)^2$, não é uma métrica.

Desigualdade de Cauchy- Schwarz

Se u e v são dois vetores quaisquer em um espaço de produto interno V, então $|u.v| \leq |u|.|v|$, a igualdade é válida se e, somente, se os vetores u e v são linearmente dependentes.

Demonstração: Se v=0, então $|u.v| = 0 = |u|.|v|$. Se v≠0, então seja p a projeção ortogonal de u em v. Como p é ortogonal a u −p, segue-se pelo teorema de Pitágoras que

$$|p|^2 + |u - p|^2 = |u|^2$$

Logo,

$$\frac{(u.v)^2}{|v|^2} = |p|^2 = |u|^2 - |u-p|^2$$

E, portanto,

$$(u.v)^2 = |u|^2\,|v|^2 - |u - p|^2\,|v|^2 \leq |u|^2\,|v|^2$$

Então

$$|u.v| \leq |u|.|v|$$

Uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwartz é que se u e v forem vetores não nulos, então

$$-1 \leq \frac{u.v}{|u||v|} \leq 1$$

E, portanto, há um único ângulo ϴ em [0,π], tal que

$\cos\theta = \dfrac{u.v}{|u||v|}$, que define o ângulo entre dois vetores entre dois vetores não nulos.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Seja V um espaço vetorial euclidiano e u e v dois vetores contidos em V, determinar o cosseno do ângulo entre os vetores u e v, sabendo-se que $|u| = 4$, $|v| = 8$ e $|u+v| = 5\sqrt{5}$.

2. Seja o produto interno usual no R^3 e no R^4, determinar o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

   a) u=(2,1,-5) e v=(5,0,2)

   b) u=(1,0,0,1) e v=(-2,-4,-1,0)

   c) u=(2,3,3) e v=(-4,-6,-6)

3. Consideremos o produto interno usual. Determinar a componente c do vetor v=(3,c,-6) de modo que o comprimento do vetor v seja 8.

4. Prove a desigualdade triangular: dados dois vetores u e v em um espaço vetorial V, então $|u + v| \leq |u| + |v|$.

5. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz: Dados os vetores u e v em um espaço vetorial V, então $|u.v| \leq |u|.|v|$.

Dica: Utilize o fato $(u+\alpha v).(u+\alpha v) \geq 0$, e desenvolva esta desigualdade e faça um estudo dos discriminantes da equação do segundo grau.

Relação entre produto interno e norma

Muitas vezes é bastante útil saber que um produto interno sobre um espaço vetorial é determinado por outra função, a chamada forma quadrática determinada pelo produto interno. Para defini-la, indiquemos que a raiz quadrada positiva de u.u por $|u|=\sqrt{u.u}$, é denominada norma de u em relação ao produto interno, note que pela primeira condição da definição de produto interno este número $|u|=\sqrt{u.u}$ está bem definido.

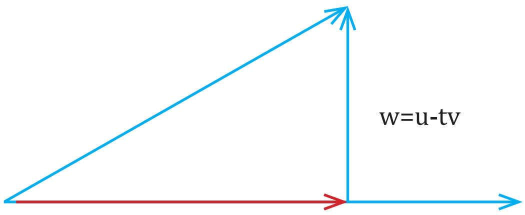
$$u.v=\frac{1}{4}|u+v|^2-\frac{1}{4}|u-v|^2$$

Aplicação: Se tivermos um vetor u de coordenadas u=(a,b), então a sua norma é dada por $|u|=\sqrt{a.a+b.b}=\sqrt{a^2+b^2}$, esta norma também representa o comprimento do vetor u. Este fato nos permite generalizar a ideia de comprimento de um vetor para um espaço de dimensão n. Vejamos, considere u um vetor de R^n.

Então u=(x_1, ... x_2), o comprimento de u é dado por:

$$|u|=\sqrt{u.u}=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

FIGURA 1: Projeção ortogonal de um vetor u na direção de um vetor v



Considere dois vetores u e v em R2, dispostos como na figura 1 acima, nosso intuito é responder a seguinte pergunta: Como determinar a projeção ortogonal do vetor u na direção do vetor v? Para responder esta pergunta utilizaremos o conceito de produto interno apresentado nesta unidade.

Para efeito de notação iremos representar a projeção ortogonal do vetor u na direção do vetor v por Proj(u,v), esta projeção pode ser interpretada geometricamente como o comprimento da sombra que o vetor u faz sobre o vetor v. Percebemos também pela construção feita que os vetores Proj(u,v) e v são Linearmente dependentes. Por isso, temos Proj(u,v)= t v, onde t é um parâmetro real.

Para determinarmos a Proj(u,v)=tv é necessário encontrarmos o valor de t, já que o vetor v já é conhecido. Então, considere os seguintes fatos:

Fato 1: u = w + tv,, w=u-tv

Fato 2: Os vetores w e v são perpendiculares, logo w.v=0

De posse destes fatos, temos:

$$w.v=0$$

$$(u-tv)v=0$$

$$u.v-t.v.v=0$$

$$u.v=t|v|^2$$

$$t=\frac{u.v}{|v|^2}$$

Logo, temos que o vetor projeção de u na direção de v é dado por, $Proj(u,v)=\left(\frac{u.v}{|v|^2}\right)v$. A pergunta inicial fala acerca do compriemento do vetor projeção. O comprimento do vetor projeção é dado por:

$$|Proj(u,v)|=\left|\left(\frac{u.v}{|v|^2}\right)v\right|=\left|\frac{u.v}{|v|^2}\right||v|=\frac{|u.v|}{|v|^2}|v|=\frac{|u.v|}{|v|}$$

Por fim, temos que a projeção do vetor u na direção do vetor v é dada pela seguinte fórmula:

$$|Proj(u,v)|=\frac{|u.v|}{|v|}$$

Exemplo: Encontre a projeção do vetor u=(1,2,1) na direção do vetor v=(1,1,1).

Solução: De acordo com os resultados encontrados, temos

$$|Proj(u,v)|=\frac{|u.v|}{|v|}=\frac{|(1,2,1).(1,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Encontre a projeção do vetor u=(1,2,2) na direção do vetor v+w, onde v=(1,0,0) e w=(-1,-3,2).

2. Encontre o vetor projeção de v=(1,0,9) na direção de w=(0,1,1)

3. Prove que se u e v são vetores de um espaço vetorial euclidiano, então:

   a) Se u-v é perpendicular a u+v, então |u|=|v|.

   b) Se u é perpendicular a v, então $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.

4. Prove que, se temos n vetores perpendiculares dois a dois, então esses vetores são linearmente independentes.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

O processo de Gram-shimidt é um método para ortogonalização de um conjunto de vetores em um espaço com produto interno, normalmente o espaço Euclidiano Rn. O processo de Gram Schmidt recebe um conjunto finito, linearmente independente de vetores {v1, ..., vn} e retorna um conjunto ortogonal {u1, ..., un} que gera o mesmo subespaço S inicial. Este processo baseia-se inicialmente na ideia de projetar ortogonalmente um vetor v na direção de outro vetor u, e, em seguida, criar um novo vetor vetor w como sendo a diferença entre um vetor da base e a projeção calculada.

O processo ocorre da seguinte forma:

1º passo: Projeta-se o vetor v ortogonalmente sobre u, ou seja, $Proj(u,v)=\left(\frac{v.u}{|v|^2}\right)v$

2º passo: Escolha $u_1=v_1$

3º passo: Faça $u_2 = v_2 - proj(v_2, u_1)$

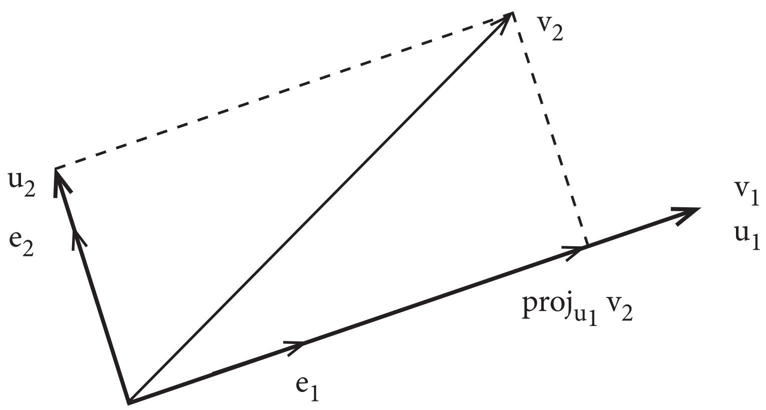
4º passo: Faça $u_3 = v_3 - proj(v_3, u_1) - proj(v_3, u_2)$

Deste modo o k-ésimo vetor é dado por:

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} proj(vk, uj)$$

A base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ encontrada é ortogonal mas não ortonormal, para que os vetores normalizados basta que façamos a divisão de cada um dos vetores por seus respectivos comprimentos, formando uma base de vetores ortonormais $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Ver figura abaixo.

FIGURA 2: Divisão de cada um dos vetores por seus respectivos comprimentos, formando uma base de vetores ortonormais $\{e_1, \ldots, e_n\}$.



Exemplo: Seja $B=\{v_1 = (1,1,1), v_2= (0,1,1), v_3 =(0,0,1)\}$ uma base em R^3, os vetores contidos nesta base constituem uma base não-ortogonal em relação ao produto interno usual. Utilize o processo de ortogonalização de Gram Schmidt para obter uma base ortonormal.

Solução: Como primeiro passo vamos escolher um dos três vetores da base dada para ser o primeiro vetor da base ortonormal. Temos v1= (1,1,1). Em seguida, vamos tornar o vetor escolhido unitário, ou seja, vamos multiplicá-lo pelo inverso do seu comprimento,

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

O segundo passo é construirmos um vetor w_2 que seja perpendicular a w_1.

$$z_2 = v_2 - proj(v_2, w_1)w_1 = v_2 - (v_2, w_1)w_1$$

$$z_2 = (0,1,1) - (0,1,1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z_2 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

O vetor z_2 deve ser normalizado, para isso façamos $w_2 = \frac{1}{|z_2|} z_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

O terceiro e último passo é construirmos um vetor w_3, ortogonal a w_1 e w_2 simultaneamente.

$z_3 = v_3 - proj(v_3, w_2)w_2 - proj(v_3, w_1)w_1$

$$z_3 = (0,0,1) - (0,0,1).\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - (0,0,1).\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z_3 = (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z_3 = (0,0,1) - \left(-\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Para finalizarmos o processo basta normalizar o vetor z_3.

Para isto, faça $w_3 = \frac{1}{|z_3|}z_3 = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Logo, a base ortonormal obtida pelo processo de ortogonalização de Gram Schmidt é:

$$B_1 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Consideremos as seguintes bases do R^2 e do R^3.

   a) B={(3,4),(1,2)}

   b) B={(1,0,0),(0,1,1),(0,1,2)}

   c) B={(1,0,1), (1,0,-1),(0,3,4)}

Ortonormalize essas bases pelo processo de Gram-Shmidt, segundo o produto interno usual.

2. Qual é a base ortonormal de R^3 obtida pelo processo de Gram-Scmidt a partir da base {u,v,w}, onde u=(2,6,3), v=(-5,6,24) e w=(9,-1,-4)?

3. Para todo número natural n, prove que a norma do vetor v=(n,n+1,n(n+1)) é um número natural inteiro.

4. Encontre uma base ortonromal aplicadndo o processo de orotogonalização de Gram-Schmidt para os vetores abaixo.

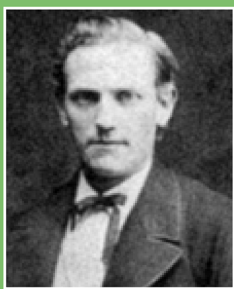
   a) u=(3,0,0), v=(-1,3,0) e w=(2,-5,1)

   b) u=(-1,1,0), v=(5,0,0) e w=(2,-2,3)

Pequena biografia de Jørgen Pedersen Gram

Jørgen Pedersen Gram (Nustrup, 27 de Junho de 1850 – Copenhagen, 29 de Abril de 1916) foi um atuário e matemático dinamarquês que nasceu em Nustrup, no Ducado de Schleswig, Dinamarca e morreu aos 65 anos em Copenhagen, Dinamarca.

Entre seus trabalhos importantes inclui o *On series expansions determined by the methods of least squares* e *Investigations of the number of primes less than a given number. O processo que leva o seu nome, Processo de Gram-Schmidt, foi publicado pela primeira vez em* 1883.



<https://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%B8rgen_Pedersen_Gram>

Para os teóricos sua principal fama se deve à série Função zeta de Riemann (a função exata de Bernhard Riemann em Função de contagem de números primos). Ao invés de usar uma série de logarítimos integrais, a função de Gram usa logarítimos de força e a função zeta de integros positivos. Foi recentemente substituída pela fórmula de Srinivasa Ramanujan que usa diretamente os Números de Bernoulli ao invés da função zeta.

Gram foi o primeiro matemático a providenciar uma teoria sistemática de desenvolvimento de frequência de curvas, mostrando que o erro de curva da simetria Gaussiana era apenas um caso especial de uma classe geral de frequência de curvas.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%B8rgen_Pedersen_Gram

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

EDITORA

EdUFERSA - Editora da Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Campus Leste da UFERSA
Av. Francisco Mota, 572 - Bairro Costa e Silva
Mossoró-RN | CEP: 59.625-900
edufersa@ufersa.edu.br

IMPRESSÃO

Gráfica São Mateus Ltda - ME
Rua Da Areia | 530 | Centro
João Pessoa/PB | CEP: 58010-640
Telefone: (83) 3241-7000

COMPOSIÇÃO

Formato: 21cm x 29,7cm
Capa: Couchê, plastificada, alceado e grampeado
Papel: Couchê liso
Número de páginas: 100
Tiragem: 400

Agência Brasileira do ISBN
ISBN: 978-85-5757-019-1

9 788557 570191

UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ÁRIDO

NEaD
núcleo de educação a distância

PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

CAPES

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA