PROJETO Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo I

1

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

Edilson dos Passos Neri Junior
Márcio Lima do Nascimento

Caderno de Exercícios

Cálculo I

1ª edição

Belém-Pa

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2015

REVISÃO
Antonio Helder dos Santos da Costa
João Carlos Fonseca Valente
Manoel Dione de Oliveira Silva
Thales Vinicius Conceição Silva de Jesus

CAPA
Giordanna De Gregoriis

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO
Eduardo Rodrigues Silva
José Alan Foicinha Raiol
Marcelo Sousa de Miranda Júnior

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Neri Júnior, Edilson dos Passos
Nascimento, Marcio Lima do
Caderno de Exercícios: cálculo I / Edilson dos Passos Neri Júnior e Márcio Lima do Nascimento.
- Belém: AEDI/UFPA, 2016

ISBN E-book : 978-85-65054-29-4
ISBN Livro : 978-85-65054-32-4

1. Cálculo diferencial e integral
2. Exercícios de cálculo
3. Projeto Newton

Sumário

INTRODUÇÃO

Este Caderno de Questões – Cálculo I, que faz parte do Projeto Newton, traz a experiência da equipe de elaboração das listas de exercícios, com os professores Marcio Lima do Nascimento e Edilson dos Passos Neri Junior.

O Projeto Newton é um conjunto de ações para que as disciplinas de Cálculo I e Cálculo II sejam ministradas para todos os alunos dos cursos de engenharia da UFPA, com uma turma pela manhã e outra a tarde, com dois professores com experiência no ensino de cálculo diferencial e integral, para um auditório de cerca de 300 alunos mais uma sala remota de 80 alunos. As aulas são filmadas por uma equipe de mídia e comunicação e transmitidas ao vivo no site da UFPA, com possibilidades dos alunos colocarem suas dúvidas usando microfone específico tanto na sala presencial quanto na sala remota. Ou seja, o aluno que não puder assistir a aula presencialmente pode eventualmente assistir de casa. Além disso, as aulas são editadas e ficam disponíveis no repositório da Assessoria de Educação a Distância para quem quiser rever as aulas. Existe um plantão de dúvidas presencial com um equipe de monitores, além de possibilidade de acesso ao projeto pelo Facebook. Os professores que elaboram as listas de exercícios semanais são diferentes do professor que ministra as aulas. O objetivo principal é que as listas tenham uma relação com as aulas ministradas mas também um link com os próximos assuntos e apontar exercícios importantes do livro texto, além de propiciar um banco de questões de cálculo cada vez maior.

A estrutura de cada capítulo tem as mesmas características: 1) Tópicos abordados nos exercícios; 2) Métodos e Técnicas; 3) Enunciado dos Exercícios; 4) Sugestões; 5) Respostas.

A cada semana, as listas eram sempre submetidas ao professor da disciplina para aprovação, antes de ser postado na Plataforma Moodle, em que os alunos tinham um prazo determinado para postar as resoluções dos exercícios.

Foi um trabalho muito interessante e de colaboração com toda a equipe do projeto e participar das reuniões foi também um aprendizado para os autores deste caderno. O objetivo principal foi proporcionar uma discussão mais ampla entre a equipe no que tange aos assuntos abordados durante a semana e o que tem adicional a ser levado em conta, além de elaborarmos exercícios com assuntos que o aluno ainda veria nas próximas aulas, alertando-o para novos assuntos. A seguir faremos algumas considerações sobre o ensino de Cálculo I na UFPA e seus desafios com considerações mais específicas dos autores.

O Projeto Newton na UFPA chegou após cerca de 10 anos de certas mudanças nos projetos pedagógicos, algumas consideradas pelos autores equivocadas que atingiram fortemente os cursos de engenharia da instituição. Alguns cursos tiveram desempenho abaixo do esperado e deixaram a instituição em alerta. Por outro lado, um raciocínio tinha bastante eco na nossa instituição: de que os altos índices de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral tinham origem no excesso de conteúdo dado pelos docentes da matemática e pouca aplicação da matemática nas áreas específicas eram vistas nesta parte básica do curso. De certa forma isso eximia os docentes da responsabilidade pelo fraco desempenho dos alunos. Ouvíamos colegas professores dizerem: esses meninos chegam na universidade com dúvidas em soma e divisão de frações, como podemos falar de derivada e integral? Acreditamos que um(a) professor(a) doutor(a), com experiência em matemática avançada em vários níveis, pode e deve dar uma solução a este problema. Ele(a) é a pessoa mais qualificada para transformar esse aluno e fazê-lo dar um salto e conseguir entender de **operações entre frações** e mais ainda: **operações entre funções**.

Um exemplo mais passível de polêmica foi feito na Engenharia Civil. Na mudança do projeto pedagógico, foram tiradas todas as disciplinas de matemática da grade curricular e criadas apenas duas disciplinas: Matemática Aplicada a Engenharia I e Matemática Aplicada a Engenharia II. Mas como "aplicar " se eu ainda não sei a matemática do cálculo? Ir direto ao computador sem teoria é um outro equívoco. Sabemos que qualquer aluno da China, Síria, Afeganistão, Noruega, Brasil ou qualquer lugar do mundo, deveria fazer um curso de cálculo no mesmo nível de excelência e exigência que um curso de engenharia exige.

No Projeto Newton o aluno tem aula com um professor com experiência no Cálculo, além de toda uma infraestrutura e tecnologia a seu dispor, para que possa estudar e tirar suas dúvidas utilizando todos os recursos de mídia existentes no projeto. De fato, temos as TICs funcionando a favor do aluno e da aprendizagem.

Para dar aula de matemática essencialmente tem que gostar muito de resolver problemas de matemática, sentir prazer com isso e com as descobertas que os alunos fazem. Fazer com que o aluno fique com a impressão de que a matemática é decorar fórmulas é um crime, que ainda muito em voga em muitas escolas por aí.

Segundo Liping Ma, que estudou um número significativo de professores de matemática americanos e chineses, temos que "*compreender a chave para a mudança: independente da sua forma, as interações na sala de aula devem centrar-se na* ***matemática substantiva***" *(Ma, 1999). Na sala de aula centrada no pensamento e debate dos alunos, as crianças dividem-se regularmente em pequenos grupos onde trabalham os problemas em conjunto, enquanto o professor passeia pela sala procurando ouvir questões matemáticas significativas e considerando que tipo de intervenção, se alguma, é apropriada. E quando as crianças se reúnem para comparar suas idéias e soluções, as perguntas do professor facilitam o debate. (Schifter, 1996).* Temos a convicção de que isso pode ser feito com adultos nos cursos de graduação e pode proporcionar descobertas matemáticas . Algumas experiências já estão sendo feitas em outros países e até em universidades estilo Princeton e Caltech. Com o tempo também pode ser realizado no projeto Newton, mesmo com esse número grande de alunos.

Enfim, consideramos que este projeto é certamente inovador, com formato inédito no Brasil e pode gerar grandes resultados no ensino de matemática com auxílio da tecnologia, se toda a equipe estiver comprometida.

Os autores
Dezembro de 2015

Funções

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Operações com funções e intervalos;
- Novas funções a partir de funções conhecidas;
- Problemas envolvendo funções;
- Interpretação gráfica de funções;

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Função e suas propriedades;
- Intervalos e suas propriedades;

Métodos e Técnicas

Modelagem e Interpretação de Problemas utilizando funções

- Em todas as questões citadas tem-se a modelagem de problemas por funções:

Exercícios 1.4 (a),(b) ; 1.6 (a),(c)

- Na questão citada tem-se a interpretação gráfica do problema:

Exercício 1.6 (d),(e),(f)

Operações e Transformações de Funções

- Nas questões citadas efetua-se as operações de funções:

Exercícios 1.4(c) ; 1.8

- Nas questões citadas efetua-se as transformações de funções a partir de funções conhecidas:

Exercícios 1.5 ; 1.6 (b)

Enunciado dos Exercícios

●○○○

1.1 Considere o seguinte intervalo:

$$I = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

(a) Descreva o complementar desse conjunto (ou seja, o espaço todo $\mathbb{R}$ menos esse intervalo). Denote por I^C esse conjunto.

(b) O intervalo $I_1 = (-2, 2)$ está contido em I^C? Justifique.

(c) Descreva $I_1 \cap I^C$.

(d) Para cada intervalo ou união de intervalos nos itens anteriores, verifique se são limitados, abertos ou fechados.

●○○○

1.2 Transforme para a notação de intervalos os seguintes conjuntos:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2x - 1 \geq 0\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} |\ |x - 1| - |x + 2| > x\}$.

●○○○

1.3 Se f e g são duas funções pares, $f + g$ é par? Se f e g são funções ímpares, $f + g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar? Justifique sua resposta.

●○○○

1.4 Um avião voa a uma velocidade de 350 km/h, a uma altitude de 1 km e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.

(a) Expresse a distância horizontal de voo d (em quilômetros) como uma função de t.

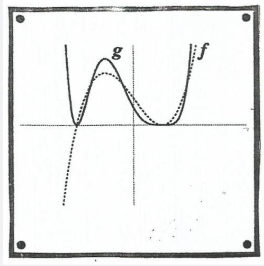
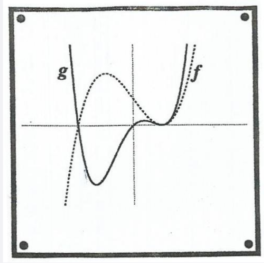
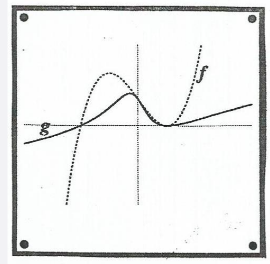
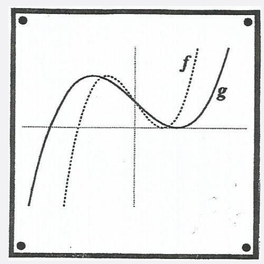
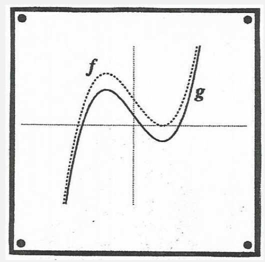
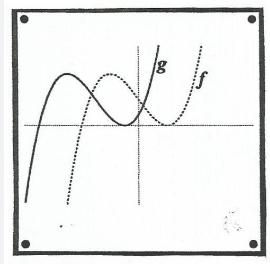
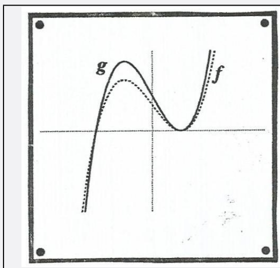
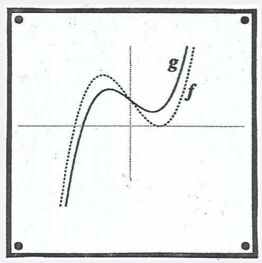
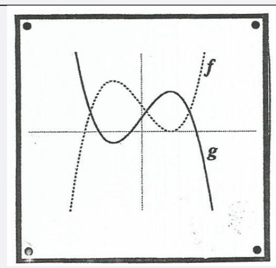
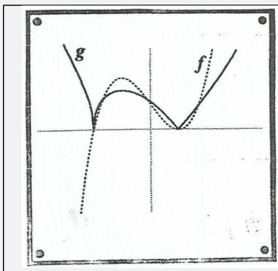
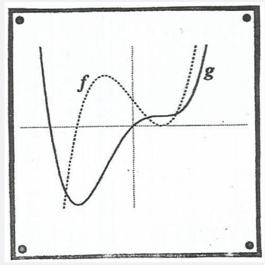
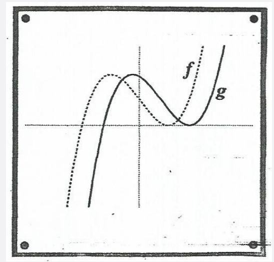
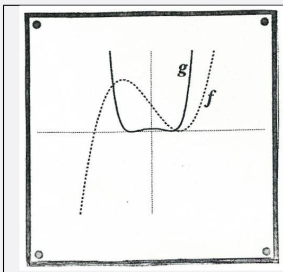
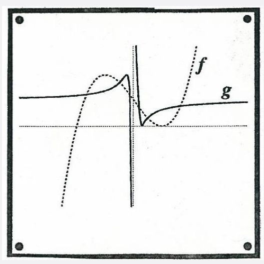
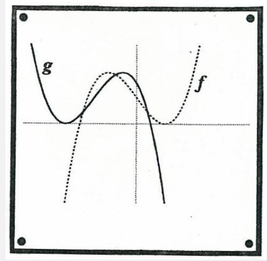
(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.

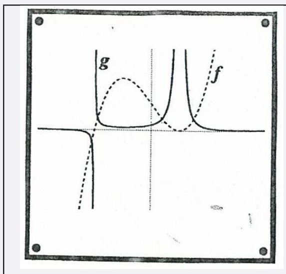
(c) Use a composição de funções para expressar s em função de t.

●●●○

1.5 Nesta questão vamos fazer uma brincadeira da MATEMATECA da USP chamada CAIXA DE FUNÇÕES: temos abaixo 16 funções e 16 gráficos. O objetivo é simplesmente associar cada letra correspondente a uma função à sua caixa contendo o gráfico. Boa Sorte !

A	$g(x) = cf(x), \quad c > 1$	B	$g(x) = cf(x^2), \quad c > 0$
C	$g(x) = \dfrac{f(x)}{1 + cx^2}, \quad c > 0$	D	$g(x) = cf(x)^{-1}, \quad c > 0$
E	$g(x) = f(x) + c, \quad c < 0$	F	$g(x) = c\displaystyle\int_0^x f(t)dt, \quad c > 0$
G	$g(x) = f(x - c), \quad c > 0$	H	$g(x) = f\left(\dfrac{x}{c}\right), \quad c > 1$
I	$g(x) = cxf(x), \quad c > 0$	J	$g(x) = f(x^{-1})$
K	$g(x) = f(x + c), \quad c > 0$	L	$g(x) = cf(x)^2, \quad c > 0$
M	$g(x) = c\sqrt{\lvert f(x)\rvert}, \quad c > 0$	N	$g(x) = cx + f(x), \quad c > 0$
O	$g(x) = c - f(x), \quad c > 0$	P	$g(x) = f(c - x), \quad c < 0$

1	2	3
		
4	5	6
		
7	8	9
		
10	11	12
		
13	14	15
		

16		
		

●●○○

1.6 Modelar um comportamento passo a passo:

No livro Jogos Vorazes o Estado controla totalmente a vida dos cidadãos, ou seja, é uma ditadura. Imagine uma sociedade parecida com essa, onde o Estado controla a riqueza inicial da pessoa quando nasce e a riqueza final desta pessoa quando morre. Ou seja, se o cidadão nasce com uma riqueza familiar de x, ele deve morrer com uma riqueza de $f(x)$, onde f é uma função do intervalo $[0, 1]$ no intervalo $[0, 1]$. Aqui a riqueza é medida em milhão de dólares, de 0 a 1 milhão de dólares de patrimônio. Seria uma espécie de extremo controle da desigualdade social (para o bem ou para o mal). Vejamos alguns casos de riquezas e seus destinos durante a vida:

- $f(0.25) = 0.75$

  (nasce com 250 mil reais e morre com 750 mil);

- $f(0.5) = 1$

  (nasce com 500 mil reais e morre com 1 milhão);

- $f(0.933) = 0.25$

  (nasce com 933 mil reais e morre com 250 mil).

Baseado nessa estória responda as seguintes indagações:

(a) Plote os pontos acima no eixo cartesiano; com isso você perceberá claramente que não se trata de uma função linear do tipo $g(x) = kx$.

(b) Multiple a função $g(x) = kx$ por um fator de redução $(1-x)$ e obtenha a segunda tentativa de função, que chamaremos de f, que pode descrever o modelo acima.

(c) Como é chamada essa função? Baseado nos três pontos dados, esboce o gráfico. Depois obtenha a expressão de f.

(d) Baseado no esboço, em que intervalo a função cresce? Em que intervalo f decresce? Como você interpretaria esses intervalos em termos do modelo?

(e) O que vai acontecer com alguém que nasce com um milhão de dólares?

(f) Neste modelo, existe alguém que nasce e morre com o mesmo patrimônio, ou seja, tem patrimônio fixo? Caso exista, descreva esse ponto com sua imagem.

●●○○

1.7 Baseado no modelo do exercício anterior, responda:

(a) O que acontece com a função f quando x se aproxima de 1?

(b) O que acontece com a função f quando x vai diminuindo para 0, ou seja, se aproxima de 0 pela direita?

●○○○

1.8 Encontre $f+g$, $f-g$ fg e f/g e determine seus domínios.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2$ $\quad$ $g(x) = 3x^2 - 1$;

(b) $f(x) = \sqrt{3-x}$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Sugestões

1.1 Represente na reta cada intervalo.

1.2 Na primeira parte, encontre as raízes e estude o sinal. Na segunda parte, use a definição de módulo e estude o sinal do lado esquerdo da desigualdade.

1.3 Verifique se as funções satisfazem a definição de paridade.

1.4 Represente o problema no sistema cartesiano com o radar na origem.

1.5 Proceda por eliminação observando conceitos de translação, rotação, homotetia, paridade e outras propriedades.

1.6 Plote os pontos e observe o comportamento da função.

1.7 Apenas observe o gráfico do item anterior.

1.8 Estude o sinal de cada termo representando na reta real.

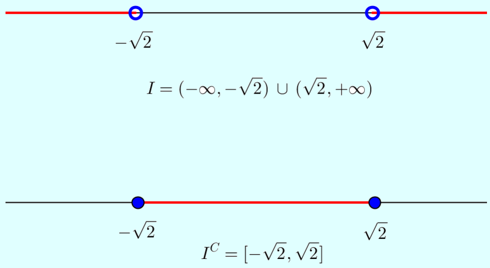
Respostas

1.1 Considere o seguinte intervalo:

$$I = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

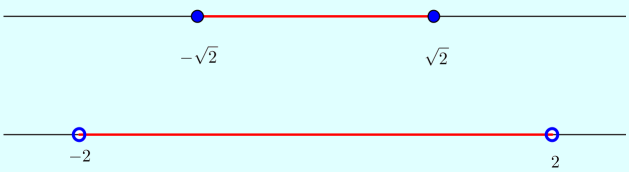
(a) Descreva o complementar desse conjunto (ou seja, o espaço todo $\mathbb{R}$ menos esse intervalo). Denote por I^C esse conjunto.

Solução:



(b) O intervalo $I_1 = (-2, 2)$ está contido em I^C? Justifique.

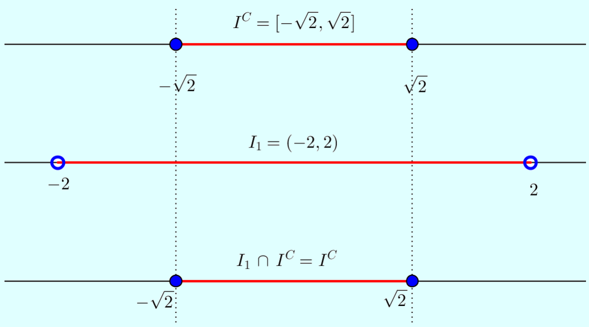
Solução: Sejam $I_1 = (-2, 2)$ e $I^C = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, temos:



Portanto, $I_1 \not\subset I^C$.

(c) Descreva $I_1 \cap I^C$.

Solução:



(d) Para cada intervalo ou união de intervalos nos itens anteriores, verifique se são limitados, abertos ou fechados.

Solução:

– O intervalo I é aberto pois, para todo $x \in I$, temos que $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$. Além disso, I é não limitado, pois não está contido em um intervalo fechado.

– O intervalo I^C é fechado e limitado pois, para todo $x \in I^C$, temos que $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

– O intervalo I_1 é aberto pois, para todo $x \in I_1$, temos que $-2 < x < 2$. Além disso, I_1 é limitado pois, $I_1 \subset [-2, 2]$.

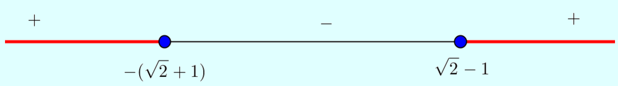
1.2 Transforme para a notação de intervalos os seguintes conjuntos:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2x - 1 \geq 0\}$.

Solução: Temos que $x' = \sqrt{2} - 1$ e $x'' = -(\sqrt{2} + 1)$ são raízes da equação:

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Fazendo o estudo do sinal, temos:



Portanto, para $A = (-\infty, -\sqrt{2} - 1] \cup [\sqrt{2} - 1, +\infty)$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - 1| - |x + 2| > x\}$.

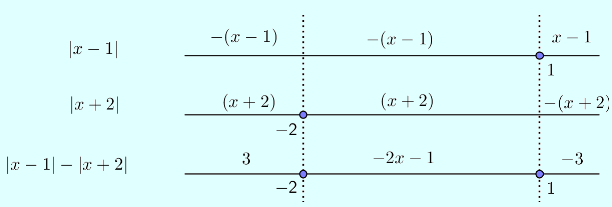
Solução: Temos que:

$$|x - 1| = \begin{cases} (x-1), & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

e

$$|x + 2| = \begin{cases} (x+2), & \text{se } x \geq -2 \\ -(x+2), & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

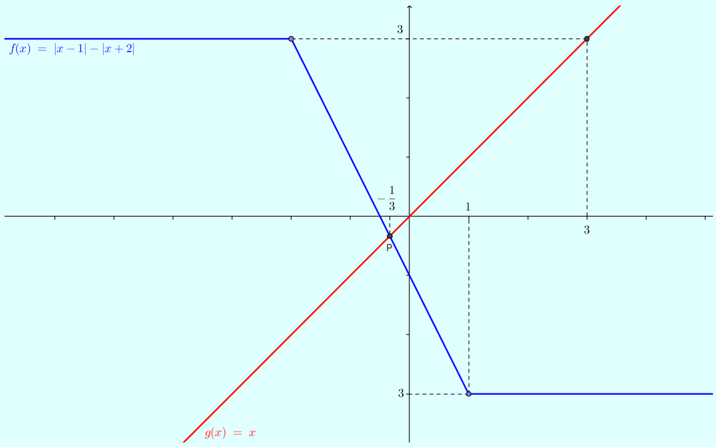
Segue que:



Daí,

$$|x-1|-|x+2| = \begin{cases} 3, & \text{se } x < 2 \\ -2x-1, & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ -3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Sendo $f(x) = |x-1| - |x+2|$ e $g(x) = x$, temos o seguinte gráfico:



Note que $P = \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$ é a interseção entre $f(x)$ e $g(x)$ e que para todo $x < -\dfrac{1}{3}$ temos que $f(x) > g(x)$. Portanto,

$$B = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$$

1.3 Se f e g são duas funções pares, $f+g$ é par? Se f e g são funções ímpares, $f+g$ é ímpar? O que se pode dizer se f for par e g for ímpar? Justifique sua resposta.

Solução: Se f e g são funções pares, então $f+g$ também é par. De fato, como $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$, temos:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

Segue que:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x).$$

Analogamente, se f e g são funções ímpares, então $f+g$ também é ímpar. Como $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$, temos:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

Segue que:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] = -h(x).$$

Finalmente, se f é uma função par e g uma função ímpar, então $f + g$ não é par e nem ímpar. Como $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$, temos:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

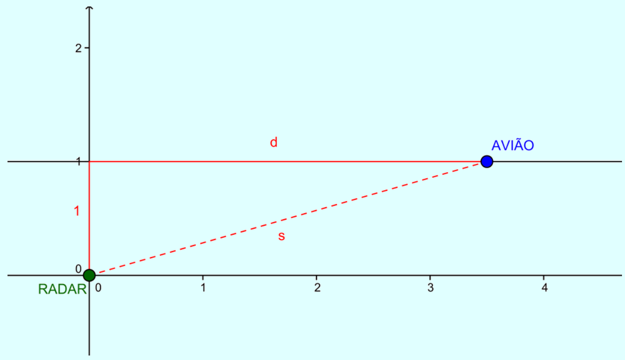
Segue que:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x).$$

1.4 Um avião voa a uma velocidade de 350 km/h, a uma altitude de 1 km e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.

(a) Expresse a distância horizontal de voo d (em quilômetros) como uma função de t.

Solução: Representando graficamente o problema, temos que a reta $y = 1$ representa a trajetória do avião, o ponto $(0,0)$ o radar e o ponto $(d, 1)$ a localização do avião.



Utilizando a fórmula da velocidade média, temos:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow d = vt \Rightarrow d = 350t.$$

(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.

Solução: Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$s^2 = d^2 + 1 \Rightarrow s = \sqrt{d^2 + 1}.$$

(c) Use a composição de funções para expressar s em função de t.

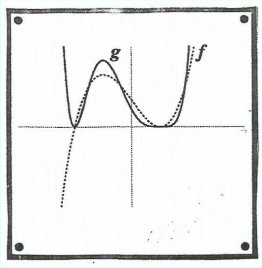
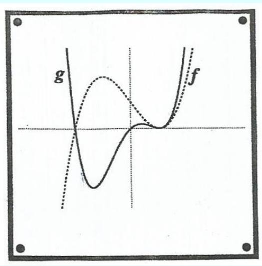
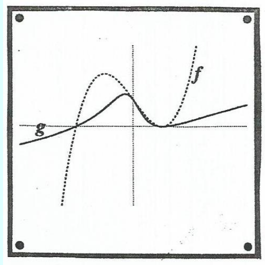
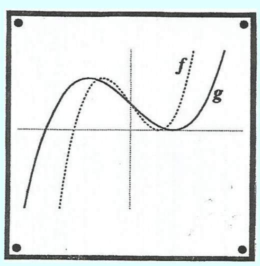
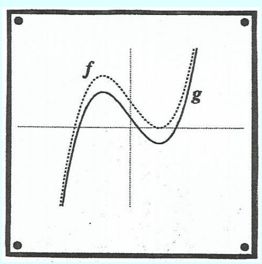
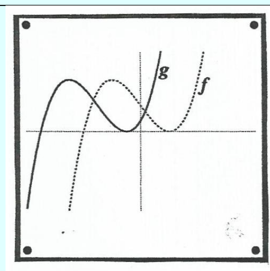
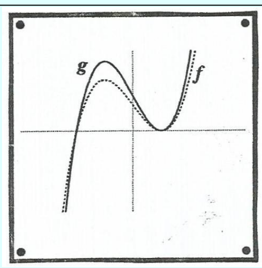
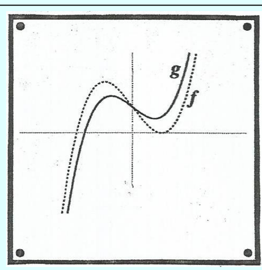
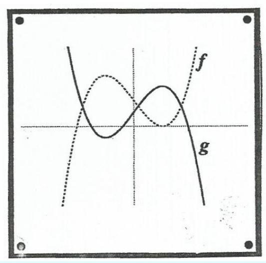
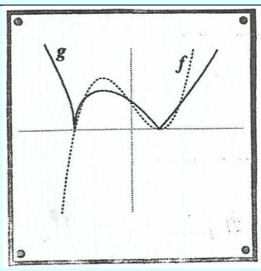
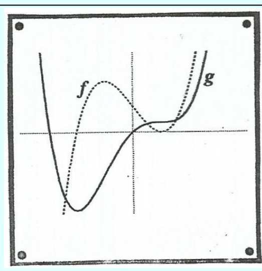
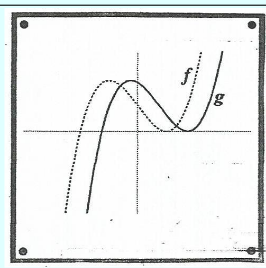
Solução: Fazendo a composição das funções obtidas em (a) e (b), temos:

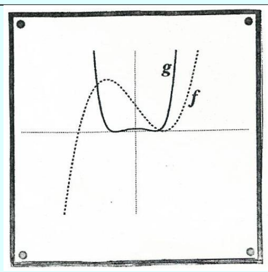
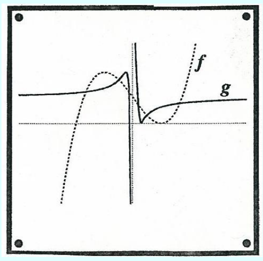
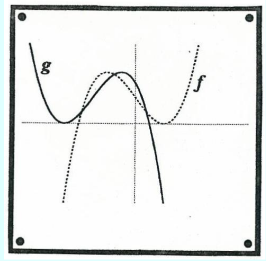
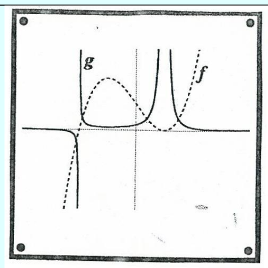
$$s = \sqrt{d^2 + 1} \Rightarrow s = \sqrt{(350t)^2 + 1}.$$

1.5 Nesta questão vamos fazer uma brincadeira da MATEMATECA da USP chamada CAIXA DE FUNÇÕES: temos abaixo 16 funções e 16 gráficos. O objetivo é simplesmente associar cada letra correspondente a uma função à sua caixa contendo o gráfico. Boa Sorte !

A	$g(x) = cf(x), \quad c > 1$	B	$g(x) = cf(x^2), \quad c > 0$
C	$g(x) = \dfrac{f(x)}{1+cx^2}, \quad c > 0$	D	$g(x) = cf(x)^{-1}, \quad c > 0$
E	$g(x) = f(x) + c, \quad c < 0$	F	$g(x) = c\displaystyle\int_0^x f(t)dt, \quad c > 0$
G	$g(x) = f(x-c), \quad c > 0$	H	$g(x) = f\left(\dfrac{x}{c}\right), \quad c > 1$
I	$g(x) = cxf(x), \quad c > 0$	J	$g(x) = f(x^{-1})$
K	$g(x) = f(x+c), \quad c > 0$	L	$g(x) = cf(x)^2, \quad c > 0$

M	$g(x) = c\sqrt{\lvert f(x)\rvert}, \quad c > 0$	N	$g(x) = cx + f(x), \quad c > 0$
O	$g(x) = c - f(x), \quad c > 0$	P	$g(x) = f(c-x), \quad c < 0$

1	2	3
		
4	5	6
		
7	8	9
		
10	11	12
		
13	14	15

		
16		
		

Solução:

Função	Gráfico
A	7
B	13
C	3
D	16
E	5
F	11
G	12
H	4
I	2
J	14
K	6
L	1
M	10
N	8
O	9
P	15

1.6 Modelar um comportamento passo a passo:

No livro Jogos Vorazes o Estado controla totalmente a vida dos cidadãos, ou seja, é uma ditadura.

Imagine uma sociedade parecida com essa, onde o Estado controla a riqueza inicial da pessoa quando nasce e a riqueza final desta pessoa quando morre. Ou seja, se o cidadão nasce com uma riqueza familiar de x, ele deve morrer com uma riqueza de $f(x)$, onde f é uma função do intervalo $[0,1]$ no intervalo $[0,1]$. Aqui a riqueza é medida em milhão de dólares, de 0 a 1 milhão de dólares de patrimônio. Seria uma espécie de extremo controle da desigualdade social (para o bem ou para o mal). Vejamos alguns casos de riquezas e seus destinos durante a vida:

- $f(0.25) = 0.75$

  (nasce com 250 mil reais e morre com 750 mil);
- $f(0.5) = 1$

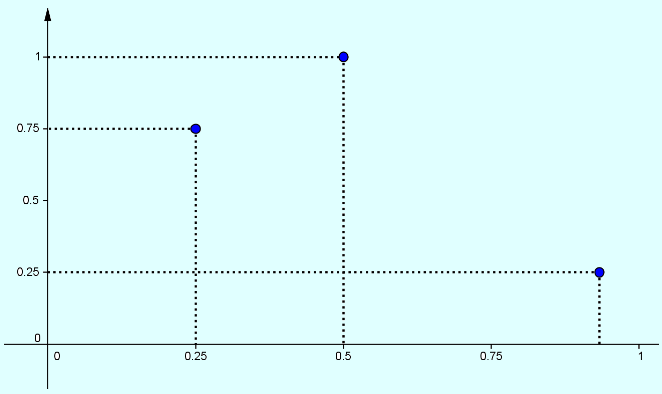
  (nasce com 500 mil reais e morre com 1 milhão);
- $f(0.933) = 0.25$

  (nasce com 933 mil reais e morre com 250 mil)

Baseado nessa estória responda as seguintes indagações:

(a) Plote os pontos acima no eixo cartesiano; com isso você perceberá claramente que não se trata de uma função linear do tipo $g(x) = kx$.

Solução:



(b) Multiple a função $g(x) = kx$ por um fator de redução $(1 - x)$ e obtenha a segunda tentativa de função, que chamaremos de f, que pode descrever o modelo acima.

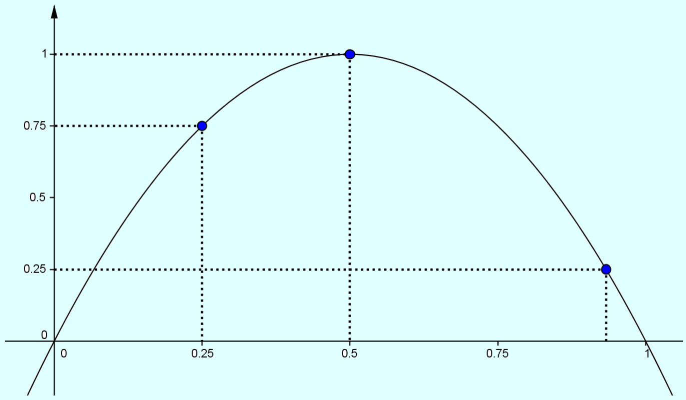
Solução: $f(x) = (1 - x) \cdot g(x) = (1 - x) \cdot kx = k(x - x^2)$.

(c) Como é chamada essa função? Baseado nos três pontos dados, esboce o gráfico. Depois obtenha a expressão de f.

Solução: Função Quadrática. Para obter a expressão de f, utilizamos os pontos dados e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a.0,25^2 + b.0,25 + c & = & 0,75 \\ a.0,5^2 + b.0,5 + c & = & 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sitema acima (sugestão: utilize os números decimais na forma fracionária para facilitar o cálculo), obtemos aproximadamente $a = -4$, $b = 4$, já que pelo item anterior, temos que $c = 0$. Portanto, $f(x) = -4x^2 + 4x$.



(d) Baseado no esboço, em que intervalo a função cresce? Em que intervalo f decresce? Como você interpretaria esses intervalos em termos do modelo?

Solução: Calculando as coordenadas do vértice, obtemos

$$x_v = 0,5 \text{ e } y_v = 1,0.$$

Calculando as raízes da função, obtemos

$$x' = 0,0 \text{ e } x'' = 1,0.$$

Assim, para $x \in (-\infty, 0.5]$, $f(x)$ é crescente. Especificamente para o problema, pessoas que nascerem com riqueza no intervalo $0.0 \leq x \leq 0.5$, ao final da vida, terão um valor maior do que quando nasceram. Além disso, para $x \in [0.5, +\infty)$, $f(x)$ é decrescente. Dessa forma, pessoas que nascerem com riqueza no intervalo $0.5 < x < 1.0$, ao final da vida, terão um valor menor do que quando nasceram.

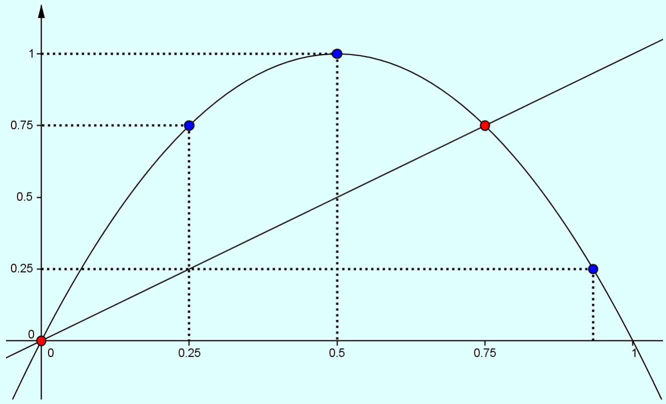
(e) O que vai acontecer com alguém que nasce com um milhão de dólares?

Solução: Pessoas que nasceram com 1 milhão de dólares, ao final da vida terão 0,0 dólares, pois:

$$f(1) = -4.1^2 + 4.1 = 0.$$

(f) Neste modelo, existe alguém que nasce e morre com o mesmo patrimônio, ou seja, tem patrimônio fixo? Caso exista, descreva esse ponto com sua imagem.

Solução: Pessoas que tem seu patrimônio fixo, serão representadas por pontos na forma (x, x), ou seja, pertencem à função $g(x) = x$. Claramente, a função $g(x)$ é uma função afim e intersecta a parábola em dois pontos, conforme o gráfico abaixo:



Neste caso,

$$-4x^2 + 4x = x$$

Assim, temos que as raízes dessa equação são:

$$x' = 0 \ \text{ e } \ x'' = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Portanto, pessoas que nasceram com 0,0 dólares ou 750 mil dólares, possuem patrimônio fixo.

1.7 Baseado no modelo do exercício anterior, responda:

(a) O que acontece com a função f quando x se aproxima de 1?

Solução: Quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de $0,0$.

(b) O que acontece com a função f quando x vai diminuindo para 0, ou seja, se aproxima de 0 pela direita?

Solução: Quando x se aproxima de 0, $f(x)$ se aproxima de $0,0$.

1.8 Encontre $f + g$, $f - g$ fg e f/g e defina seus domínios.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $g(x) = 3x^2 - 1.$

Solução: $f(x) + g(x) = (x^3 + 2x^2) + (3x^2 - 1) = x^3 + 5x^2 - 1$

$$D = \mathbb{R}$$

$f(x) - g(x) = (x^3 + 2x^2) - (3x^2 - 1) = x^3 - x^2 + 1$

$$D = \mathbb{R}$$

$f(x) \times g(x) = (x^3 + 2x^2) \times (3x^2 - 1) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2$

$$D = \mathbb{R}$$

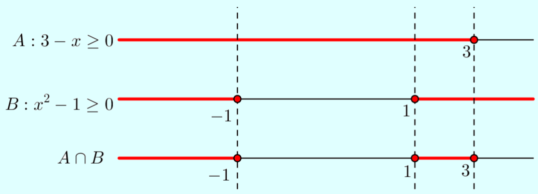
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3 + 2x^2}{3x^2 - 1}$. Temos que $3x^2 - 1 \neq 0$, logo $x \neq \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

(b) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$

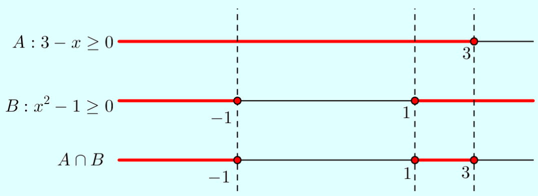
Solução: Temos que para $f(x)$, $3 - x \geq 0$ e para $g(x)$, $x^2 - 1 \geq 0$. Segue que:

$f(x) \pm g(x) = (\sqrt{3 - x}) \pm (\sqrt{x^2 - 1})$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$$

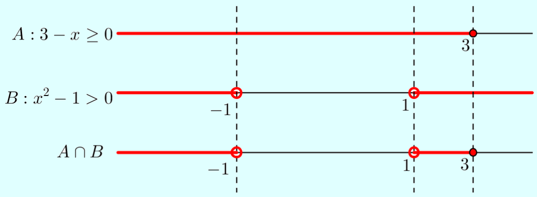
$f(x) \times g(x) = (\sqrt{3 - x}) \times (\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{(3 - x)(x^2 - 1)}$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$$

Especificamente, para a função abaixo, $x^2 - 1 > 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2-1}}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$$

Limite e continuidade

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Cálculo de limite por definição;
- Inclinação da reta tangente por limite;
- Taxa média de crescimento;
- Propriedade de limite e limite no infinito;
- Continuidade de uma função;
- Teorema do Valor Intermediário e do Confronto;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios

- Funções e suas propriedades;
- Limite e suas propriedades;

Métodos e Técnicas

Teorema do Valor Intermediário	• Na questão citada usa-se o Teorema do Valor Intermediário para mostrar o que se pede: **Exercício 2.6(c)**
Propriedades Operatórias de Limite, Limites Laterais e Limite no Infinito	• Na questão citada tem-se o uso das propriedades operatórias de limite: **Exercício 2.7** • Nas questões citadas usa-se limites laterais: **Exercícios 2.8 ; 2.11** • Na questão citada usa-se limite no infinito e suas propriedades para obter as assíntotas verticais: **Exercício 2.9**
Teorema do Confronto	• Na questão citada usa-se o Teorema do Confronto para obter o limite dado: **Exercício 2.10**

●○○○

2.1 Um tanque com capacidade para 1000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P é o ponto $(15,250)$ sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25$ e 30.

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

(c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P. (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos).

●●○○

2.2 Encontre um número δ tal que $|x-2| < \delta$, então $|4x-8| < \epsilon$, onde $\epsilon = 0,1$.

●●○○

2.3

(a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1,0)$.

(i) Usando a Definição 1: $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

(ii) Usando a Equação 2: $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1,0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistiguíveis.

● ○ ○ ○

2.4 O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeterias é mostrada na tabela. (Dados os números de franquias no dia 30 de junho de cada ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002
N	1886	2135	3501	4709	5886

(a) Determine a taxa média de crescimento (em cada ano inclua as unidades)

(i) de 2000 a 2002

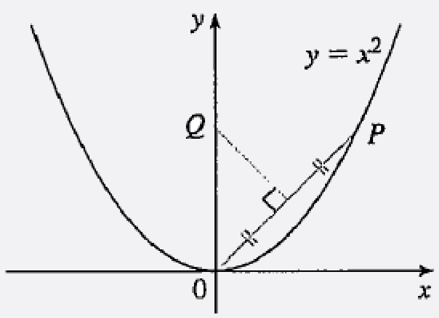
(ii) de 2000 a 2001

(iii) de 1999 a 2000

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?
(c) Dê uma estimativa da taxa de crecimento instantânea em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

● ● ● ○

2.5 A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP e intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.



●●○○

2.6 Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo.)

(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com domínio $[0,1]$ cuja imagem também é $[0,1]$. Localize um ponto fixo de f.

(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com domínio $[0,1]$ e imagem em $[0,1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

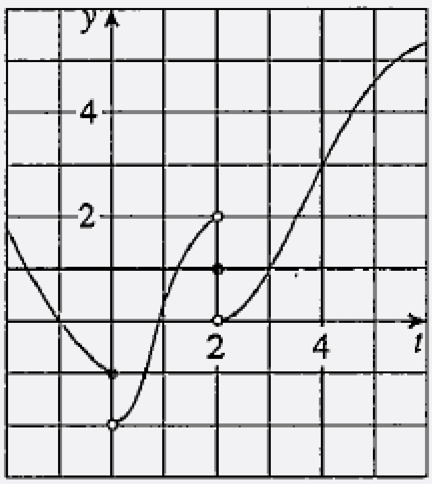
(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para demonstrar que toda função contínua com domínio $[0,1]$ e a imagem $[0,1]$ deve ter um ponto fixo.

●○○○

2.7 Se $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)]$.

●○○○

2.8 Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$;

(b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$;

(c) $\lim_{t \to 0} g(t)$;

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$;

(e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$;

(f) $\lim_{t \to 2} g(t)$;

(g) $g(2)$;

(h) $\lim_{t \to 4} g(t)$.

● ○ ○ ○

2.9 Determine as assíntotas horizontais e verticais da curva

$$f(x) = \frac{2 - x}{(x - 1)^2}.$$

● ○ ○ ○

2.10 Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

● ● ○ ○

2.11 Explique por que a função é descontínua em $x = 1$. Esboce o gráfico da função.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Sugestões

2.1 A partir do gráfico da função, trace uma reta tangente ao ponto P e marque outros dois pontos da reta, para estimar a inclinação da tangente em P.

2.2 Observe que $4x - 8 = 4(x - 2)$.

2.3 Utilize fatoração e expansão ,de modo a eliminar o denominador.

2.4 Estime dois pontos da reta tangente, de modo que a taxa média de variação nesses dois pontos seja igual a inclinação estimada pela média aritmética das taxas médias de variação.

2.5 Defina $M\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$ e $Q(0,a)$, e utilize as duas formas de obter a declividade da reta suporte à QM.

2.6 Analise funções cujo o gráfico intercepta $y = x$ e também funções cujo o gráfico não intercepta $y = x$. No caso da demonstração, defina a função $F(x) = f(x) - x$.

2.7 Observe que $[f(x) + g(x)] + [f(x) - g(x)] = 2f(x)$ e determine os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$.

2.8 Lembre que o limite só existe quando os limites laterais existem e são iguais a ele.

2.9 Verifique em que ponto a função não está definida.

2.10 Aplique o limite nas funções da desigualdade.

2.11 Calcule os limites com $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$.

Respostas

2.1 Um tanque com capacidade para 1000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25$ e 30.

Solução:

(i) $P = (15, 250)$ e $Q = (5, 694)$: $m = \dfrac{694 - 250}{5 - 15} = -44,4.$

(ii) $P = (15, 250)$ e $Q = (10, 444)$: $m = \dfrac{444 - 250}{10 - 15} = -38,8.$

(iii) $P = (15, 250)$ e $Q = (20, 111)$: $m = \dfrac{111 - 250}{20 - 15} = -27,8.$

(iv) $P = (15, 250)$ e $Q = (25, 28)$: $m = \dfrac{28 - 250}{25 - 15} = -22,2.$

(v) $P = (15, 250)$ e $Q = (30, 0)$: $m = \dfrac{0 - 250}{30 - 15} = -16,6....$

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

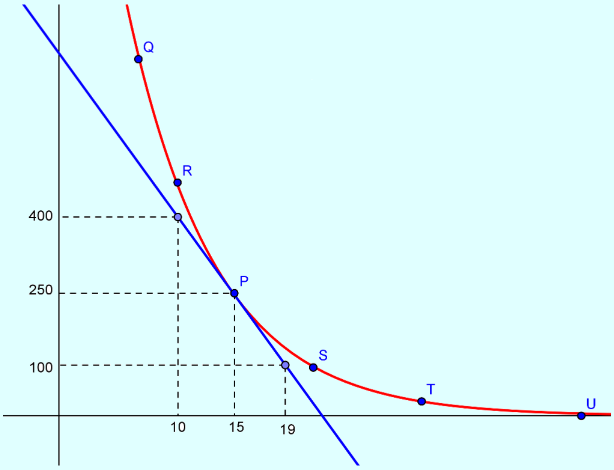
Solução:

$$m = \frac{-38,8 - 27,8}{2} = -33,3$$

(c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P. (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos).

Solução: Seja aproximação do gráfico que passa pelos pontos dados na questão e r a reta tangente ao gráfico de f. Vamos estimar os pontos $(10, 400)$ e $(19, 100)$ em r. Observe que o ângulo de inclinação de r é obtuso (90ř $< x <$ 180ř), portanto a declividade de r será negativa. Calculando a declividade de r, temos:

$$m = -\frac{400 - 100}{19 - 10} = -33,3...$$



2.2 Encontre um número δ tal que $|x-2|<\delta$, então $|4x-8|<\epsilon$, onde $\epsilon=0,1$.

Solução: Note que:

$$|4x-8| = |4.(x-2)| = 4.|x-2| < 0,1 \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{40} = \delta.$$

De fato, tomando $\delta = \dfrac{1}{40}$, temos:

$$|x-2| < \frac{1}{40} \Rightarrow 4.|x-2| < 0,1 \Rightarrow |4x-8| < 0,1 = \epsilon.$$

2.3

(a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1,0)$.

(i) Usando a Definição 1.

Solução: Usando a definição 1, temos:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
m &= \lim_{x\to 1}\frac{x-x^3-0}{x-1}\\
m &= \lim_{x\to 1}\frac{-x(x-1)(x+1)}{x-1}\\
m &= \lim_{x\to 1} -x^2-x\\
m &= -1^2-1=-2.
\end{aligned}$$

(ii) Usando a Equação 2.

Solução: Usando a equação 2, temos:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
m &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)-(1+h)^3-0}{h} \\
m &= \lim_{h\to 0} \frac{-2h-3h^2+h^3}{h} \\
m &= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2-3h+h^2)}{h} \\
m &= \lim_{h\to 0} -2-3h+h^2 \\
m &= -2.
\end{aligned}$$

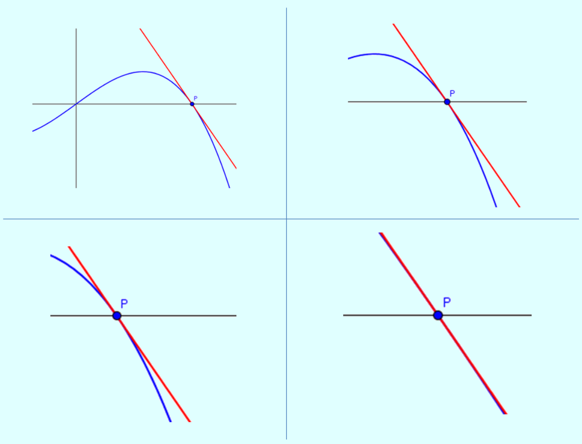
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

Solução:

$$\begin{aligned}
y-y_0 &= m(x-x_0) \\
y-0 &= -2(x-1) \\
y &= -2x+2.
\end{aligned}$$

(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1,0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistiguíveis.

Solução:



2.4 O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeterias é mostrada na tabela. (Dados os números de franquias no dia 30 de junho de cada ano).

Ano	1998	1999	2000	2001	2002
N	1886	2135	3501	4709	5886

(a) Determine a taxa média de crescimento (em cada ano inclua as unidades).

(i) de 2000 a 2002;

(ii) de 2000 a 2001;

(iii) de 1999 a 2000.

Solução:

(i)
$$\frac{N(2002) - N(2000)}{2002 - 2000} = \frac{5886 - 3501}{2} = 1192,5 \text{ franquias/ano}$$

(ii)
$$\frac{N(2001) - N(2000)}{2001 - 2000} = \frac{4709 - 3501}{1} = 1208,0 \text{ franquias/ano}$$

(iii)
$$\frac{N(2000) - N(1999)}{2000 - 1999} = \frac{3501 - 2135}{1} = 1366,0 \text{ franquias/ano}$$

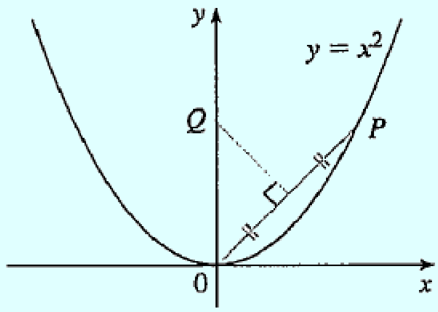
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

Solução:
$$\frac{1208,0 + 1366,0}{2} = 1287,0 \text{ franquias/ano.}$$

(c) Dê uma estimativa da taxa de crecimento instantânea em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

Solução:
$$\frac{4709 - 2135}{2001 - 1999} = \frac{2540}{2} = 1287 \text{ franquias/ano.}$$

2.5 A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP e intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.



Solução: Seja $P(x, x^2)$, $O = (0,0)$, $M\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$ o ponto médio do segmento OP e $Q = (0, a)$.

Calculando a declividade de OP, temos:

$$m = \frac{x^2 - 0}{x - 0} = x.$$

Como QM é perpendicular a OP, temos que o produto das declividades é igual a -1, logo:

$$m = -\frac{1}{x}. \tag{1}$$

Por outro lado, temos que a declividade de QM pode ser calculada da seguinte forma:

$$m = \frac{x^2/2 - a}{x/2 - 0} = \frac{x^2 - 2a}{x} \tag{2}$$

De (1) e (2), temos:

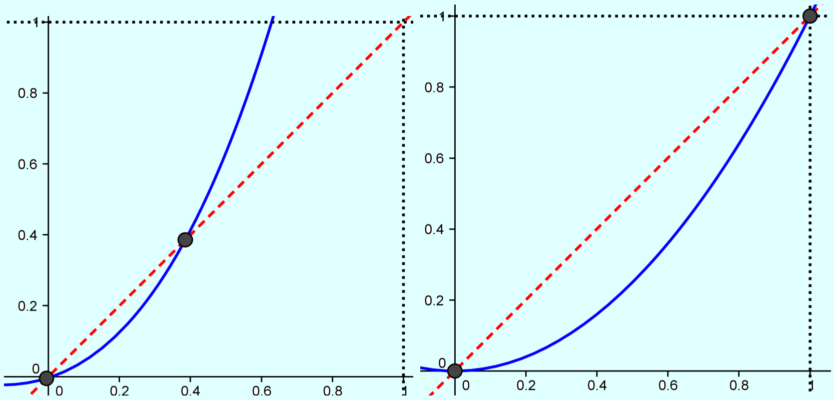
$$-\frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2a}{x} \Rightarrow 2a = x^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Portanto, quando x tende a 0, a tende a $\frac{1}{2}$. Logo a posição limite de Q é $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2.6 Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo).

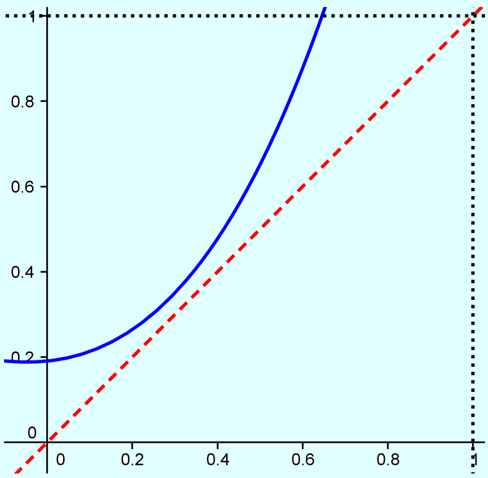
(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com domínio $[0, 1]$ cuja imagem também está em $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f.

Solução: Qualquer gráfico de funções contínuas em $[0, 1]$ que intersectam a função $y = x$ neste intervalo são válidas. O (s) ponto (s) fixo (s) da função são os pontos de intersecção entre as duas funções. Por exemplo:



(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com domínio $[0, 1]$ e imagem em $[0, 1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

Solução: Qualquer gráfico de funções contínuas em $[0, 1]$ que não intersectam a função $y = x$ neste intervalo são válidos. Neste caso, como não há intersecção dos gráficos, neste intervalo não haverá pontos fixos. Portanto, o obstáculo é a reta $y = x$. Por exemplo:



(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para demonstrar que toda função contínua com domínio $[0, 1]$ e a imagem $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.

Solução: Considere f uma função contínua no domínio e imagem em $[0, 1]$ e $F(x) = f(x) - x$. Se $f(0) = 0$, então 0 é um ponto fixo. Da mesma forma, se $f(1) = 1$, temos que 1 é um ponto fixo. Agora, suponha que $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$. Note que $F(0) = f(0) - 0$ é um número positivo e $F(1) = f(1) - 1$ é um número negativo pois, por hipótese, f possui domínio e imagem em $[0, 1]$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um número c em $(0, 1)$ tal que $F(c) = f(c) - c = 0$. Logo $f(c) = c$ e, portanto, f possui um ponto fixo.

2.7 Se $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$.

Solução: Seja $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = 2$ e $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = 1$. Note que:

$$[f(x)+g(x)] + [f(x)-g(x)] = 2f(x)$$

Utilizando as propriedades de limites, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} 2f(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] + [f(x)-g(x)] \\
2\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] + \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] \\
2\lim_{x\to a} f(x) &= 2+1 \\
\lim_{x\to a} f(x) &= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

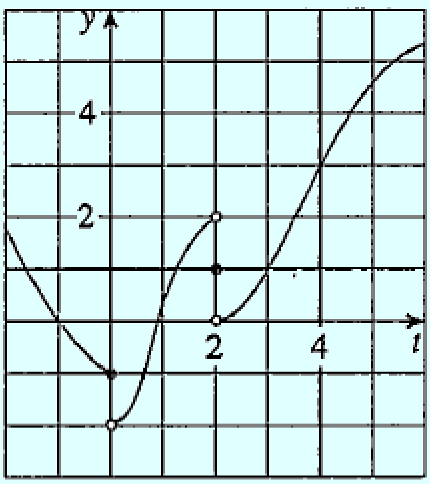
Ainda, utilizando as propriedades de limites, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] &= 2 \\
\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) &= 2 \\
\frac{3}{2} + \lim_{x\to a} g(x) &= 2 \\
\lim_{x\to a} g(x) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

2.8 Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$

(b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$

(c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$

(e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$

(f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$

(h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

Solução:

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t) = -1$

(b) $\lim_{t \to 0^+} g(t) = -2$

(c) $\lim_{t \to 0} g(t) = \nexists$, pois $\lim_{t \to 0^-} g(t) \neq \lim_{t \to 0^+} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t) = 2$

(e) $\lim_{t \to 2^+} g(t) = 0$

(f) $\lim_{t \to 2} g(t) = \nexists$, pois $\lim_{t \to 2^-} g(t) \neq \lim_{t \to 2^+} g(t)$

(g) $g(2) = 1$

(h) $\lim_{t \to 4} g(t) = 3$

2.9 Determine as assíntotas horizontais e verticais da curva

$$f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2}.$$

Solução: Sendo $x \neq 1$, note que:

$$\frac{2-x}{(x-1)^2} = (2-x) \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

Segue que:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} (2-x) \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} (2-x) \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Portanto, $x = 1$ é uma assíntota vertical. Vamos obter a assíntota horizontal. Temos que:

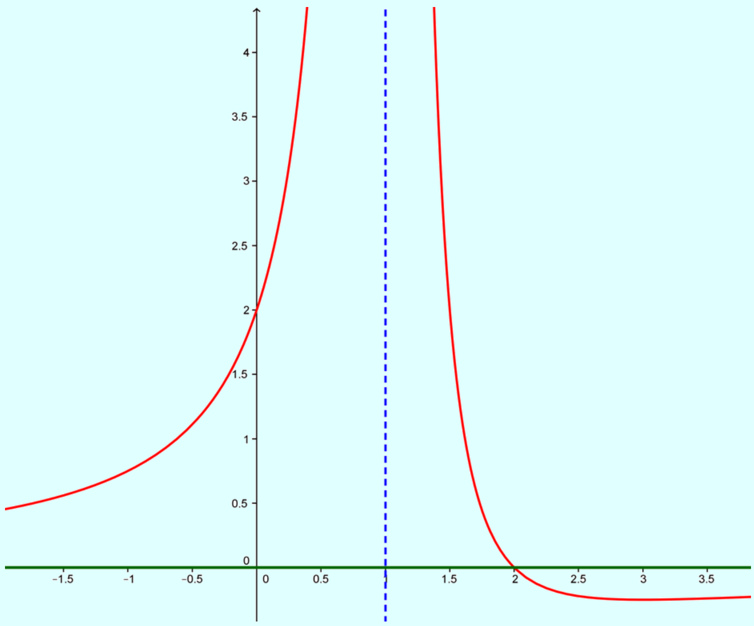
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{(x-1)^2} - \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0 - 0 = 0.$$

Analogamente, temos:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2-x}{(x-1)^2} = 0$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

Graficamente, temos:



2.10 Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Solução: Temos que:

$$4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7 \Rightarrow \lim_{x\to 4} 4x - 9 \leq \lim_{x\to 4} f(x) \leq \lim_{x\to 4} x^2 - 4x + 7$$

Segue que:

$$7 \leq \lim_{x\to 4} f(x) \leq 7$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 7$$

2.11 Explique por que a função é descontínua em $x = 1$. Esboce o gráfico da função.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Solução: Note que:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

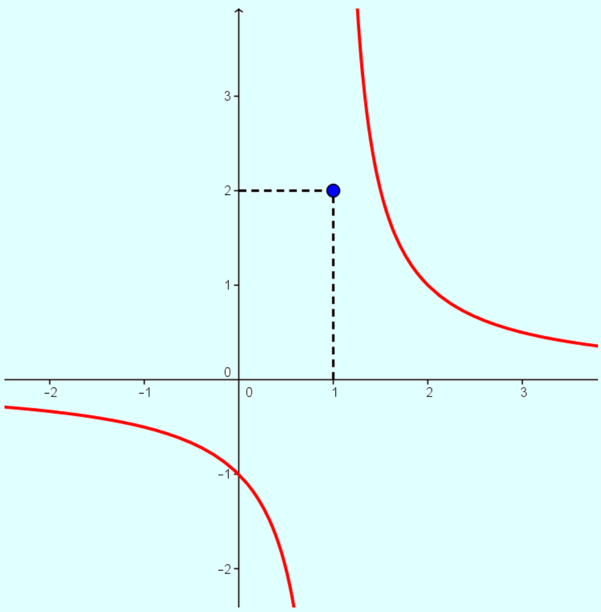
e

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Logo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \nexists$$

Portanto, f é descontínua em $x = 1$.



Derivadas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Definição de derivada;
- Equação da reta tangente e linearização;
- Regras de derivação;
- Primitivação;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Limite e suas propriedades;
- Regra de L'Hospital;
- Regra da cadeia e derivação implícita;
- Primitiva de uma função;

Métodos e Técnicas

Regra de L'Hospital	• Nas questões citadas usa-se a regra de L'Hospital para obter o limite desejado: **Exercícios 3.4 ; 3.11**
Regra da Cadeia	• Nas questões citadas usa-se a regra da cadeia e/ou considera-se y uma função implícita de x: **Exercícios 3.5 ; 3.6 ; 3.7 ; 3.16**
Regra do Quociente e Regra da Potência	• Na questão citada efetua-se a regra do quociente para determinar a diferencial: **Exercício 3.8 (a)** • Na questão citada efetua-se a regra da potência para determinar a diferencial: **Exercício 3.8 (b)**
Primitivação	• Nas questões citadas efetua-se a primitivação para encontrar o valor da função: **Exercícios 3.9 ; 3.10 ; 3.14 ; 3.15**

●●○○

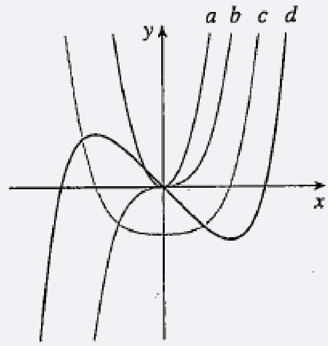
3.1 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

(a) $f(x) = \text{sen}(2x+3)$.

(b) $f(t) = 5t - 9t^2$.

●●○○

3.2 A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



●●●●

3.3 Mostre que a função $f(x) = |2x-8|$ não é diferenciável em 4. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

●●○○

3.4 Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{tg}(5x)}.$$

●●●○

3.5 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ (elipse) no ponto $(1,1)$.

●●●○

3.6 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

(a) $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

(b) $y\text{sen}(x^2) = x\text{sen}(y^2)$

●●●○

3.7

(a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada *Cúbica de Tschirnhausen*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

●○○○

3.8 Calcule a diferencial.

(a) $y = \dfrac{x}{x+1}$;

(b) $y = \sqrt[3]{x}$.

●●○○

3.9 Encontre f.

(a) $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$;

(b) $f''(t) = t - \sqrt{t}$.

●●●○

3.10 Encontre uma função f tal que $f'(x) = x^3$ e tal que a reta $x + y = 0$ seja tangente ao gráfico de f.

●●●○

3.11 Encontre o limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}\right).$$

●●○○

3.12 Calcule Δy e dy para $x = 1$, $\Delta x = 1$, $y = \sqrt{x}$. Em seguida, esboce um gráfico, mostrando os segmentos de reta dx, dy e Δy.

●●○○

3.13 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

(a) $f(x) = x^3$, $a = 1$

(b) $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$

●●○○

3.14 Encontre a primitiva F de $f(x) = 1 - 4\cos(2x)$, tal que $F(\pi) = \pi$.

●●●○

3.15 Em todos os pontos de uma curva $y = f(x)$ tem-se que $y'' = \cos(2x) - \operatorname{sen}(x)$. Obtenha a equação da curva, se esta passa pelo ponto $(0, 1)$ e a reta tangente neste ponto é perpendicular à reta $y - x = 0$.

●●●○

3.16 Derive a função:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Sugestões

3.1 Utilize a identidade do seno da soma de dois arcos. Já para o

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2h) - 1}{h}$$

faça uma mudança de variável, use o conjugado e lembre do limite fundamental.

3.2 Proceda por eliminação, observando o comportamento das funções derivadas polinomiais.

3.3 Calcule os limites laterais na definição de derivada.

3.4 Observe a indeterminação, aplique a regra de L'Hôspital.

3.5 Isole o termo y' e aplique o ponto $(1, 1)$ para determinar a declividade da reta tangente.

3.6 Observe que y é uma função de x.

3.7 Isole o termo y' e aplique o ponto $(1, -2)$ para determinar a declividade da reta tangente.

3.8 Derive usando a notação de Leibniz.

3.9 Lembre que para cada derivada há uma família de primitivas.

3.10 Utilize a reta tangente para obter o ponto de tangência.

3.11 Observe a indeterminação e aplique a Regra de L'Hôspital.

3.12 Apenas use a definição.

3.13 Use diretamente a definição.

3.14 Lembre que para cada derivada há uma familia de primitivas, e utilize o valor da função dado.

3.15 Lembre da relação entre coeficientes de retas perpendiculares para obter a segunda constante.

3.16 Fique atento quanto a utilização da Regra da Cadeia mais de uma vez.

Respostas

3.1 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x+3)$

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}[2(x+h)+3]-\operatorname{sen}(h)}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2x+3+2h)-\operatorname{sen}(2x+3)}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2x+3)\cos(2h)+\operatorname{sen}(2h)\cos(2x+3)-\operatorname{sen}(2x+3)}{h} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2x+3)[\cos(2h)-1]+\operatorname{sen}(2h)\cos(2x+3)}{h}. \qquad (3) \end{aligned}$$

Aplicando o limite na equação (3), temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x+3)[\cos(2h)-1]+\operatorname{sen}(2h)\cos(2x+3)}{h} \\ &= \operatorname{sen}(2x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h}+\cos(2x+3)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h}. \qquad (4) \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h} &= \lim_{u\to 0}\frac{2[\cos(u)-1]}{u} \quad \text{(Faça } u=2h\text{. Veja que quando } h\to 0,\ u\to 0) \\ &= 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{[\cos(u)-1]}{u} \\ &= 2\cdot 0 \qquad (5) \\ &= 0. \qquad (6) \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{sen}(2h)}{2h} \\ &= 2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{2h} \\ &= 2\cdot 1 \\ &= 2. \qquad (7) \end{aligned}$$

Substituindo esses valores (6) e (7) na equação (4), temos:

$$f'(x) = 2\cos(2x + 3).$$

(b) $f(t) = 5t - 9t^2$

Solução: Temos que:

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(t+h) - 9(t+h)^2 - (5t - 9t^2)}{h}$$

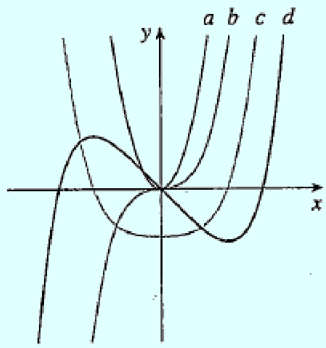
Segue que:

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{5t + 5h - 9t^2 - 18th - 9h^2 - 5t + 9t^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h - 18th - 9h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(5 - 18t + 9h)}{h}$$

Portanto:

$$f'(t) = \lim_{h \to 0}(5 - 18t + 9h) = 5 - 18t.$$

3.2 A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



Solução: Observe que a curva a corresponde ao gráfico de uma função quadrática do tipo $y = ax^2$. Ao derivar esta função obteremos $y' = 2ax$, que corresponde a uma função afim, cujo gráfico é uma reta. Logo, a curva a não pode corresponder a f e a única possibilidade válida é que a represente a curva de f'''. De forma análoga obtemos as demais correspondências: b corresponde ao gráfico de uma função polinomial de grau 3, assim como c corresponde ao gráfico de uma função polinomial de grau 4 e d corresponde ao gráfico de uma função polinomial de grau 5. Assim, temos a seguinte correspondência:

a	f'''
b	f''
c	f'
d	f

3.3 Mostre que a função $f(x) = |2x - 8|$ não é diferenciável em 4. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

Solução: Note que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 8, & \text{se } x \geq 4 \\ -(2x - 8), & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

Vamos calcular as derivadas laterais:

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{(2x - 8) - 0}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} 2 = 2$$

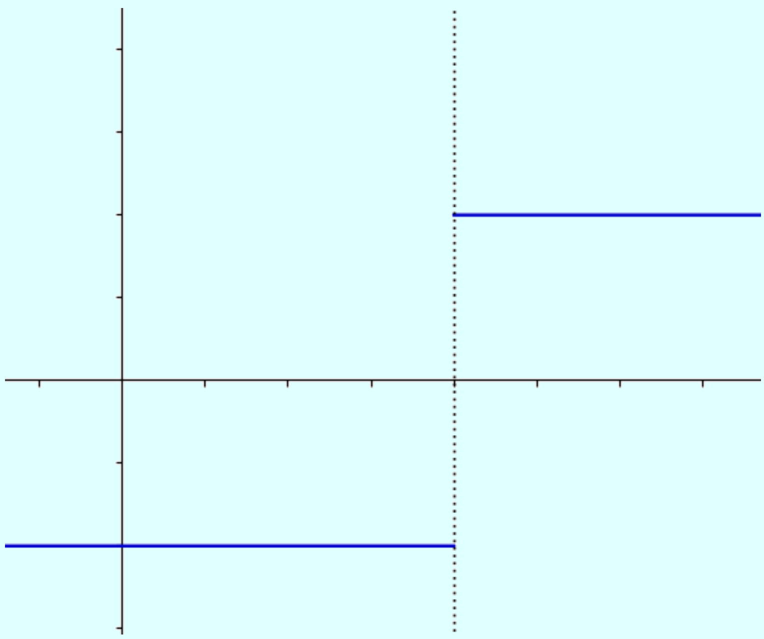
e

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{(-2x + 8) - 0}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} -2 = -2.$$

Como as derivadas laterais são diferentes, logo, não existe derivada de f em $x = 4$. Ainda, a expressão para definir f' é:

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 4 \\ -2, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

Graficamente, temos:



3.4 Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{tg}(5x)}.$$

Solução: Como $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(4x)}{\text{tg}(5x)}$ é uma inderteminação, aplicaremos a regra de L'Hôspital. Segue que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{tg}(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(4x)}{5\sec^2(5x)} = \frac{4}{5},$$

pois $\cos(0) = 1$ e $\sec(0) = \dfrac{1}{\cos(0)} = 1$.

3.5 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ (elipse) no ponto $(1,1)$.

Solução: Derivando em relação a x em ambos os membros de $x^2 + xy + y^2 = 3$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 3 \\ 2x + xy' + y + 2yy' &= 0 \\ y'(x + 2y) &= -2x - y \\ y' &= \frac{-2x - y}{x + 2y}. \end{aligned} \tag{8}$$

Sendo $P(1,1)$, vamos substir o valor de x e y em (8) para encontrar a declividade da reta. Temos:

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y} = \frac{-2.1 - 1}{1 + 2.1} = -1.$$

Segue que:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2.$$

3.6 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

(a) $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$;

Solução: Derivando implicitamente $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$, temos:

$$\begin{aligned} 5y^4y' + 2xy^3 + 3xy^2y' &= y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} \\ 5y^4y' + 3x^2y^2y' - e^{x^2}y' &= -2xy^3 + 2xye^{x^2} \\ y'(5y^4 + 3x^2y^2 - e^{x^2}) &= 2xy(-y^2 + e^{x^2}) \\ y' &= \frac{2xy(-y^2 + e^{x^2})}{(5y^4 + 3x^2y^2 - e^{x^2})}. \end{aligned}$$

(b) $y\text{sen}(x^2) = x\text{sen}(y^2)$.

Solução: Derivando implicitamente $y\text{sen}(x^2) = x\text{sen}(y^2)$, temos:

$$\begin{aligned} y'\text{sen}(x^2) + 2xy\cos(x^2) &= \text{sen}(y^2) + 2xy\cos(y^2)y' \\ y'\text{sen}(x^2) - 2xyy'\cos(y^2) &= \text{sen}(y^2) - 2xy\cos(x^2) \\ y'(\text{sen}(x^2) - 2xy\cos(y^2)) &= \text{sen}(y^2) - 2xy\cos(x^2) \\ y' &= \frac{\text{sen}(y^2) - 2xy\cos(x^2)}{\text{sen}(x^2) - 2xy\cos(y^2)}. \end{aligned}$$

3.7

(a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada *Cúbica de Tschirnhausen*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

Solução: Derivando $y^2 = x^3 + 3x^2$, temos:

$$\begin{aligned} 2yy' &= 3x^2 + 6x \\ y' &= \frac{3x^2 + 6x}{2y} \end{aligned}$$

Substituindo $P = (1, -2)$ em y', temos:

$$y' = \frac{3.1^2 + 6.1}{2.(-2)} = -\frac{9}{4}.$$

Segue que:

$$y - (-2) = -\frac{9}{4}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-9x + 5}{4}.$$

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

Solução: Note que para que uma curva possua uma reta tangente horizontal, o seu coeficiente angular deve ser igual a 0, ou seja, $y' = 0$. Logo:

$$y' = \frac{3x^2 + 6x}{2y} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x' = 0 \ \text{ e } \ x'' = -2.$$

Observe que quando $x = 0$, $y = 0$, o que não convém. Ainda, quando $x = -2$, teremos $y = 2$ e $y = -2$. Assim, os pontos de tangência são $(-2, 2)$ e $(-2, -2)$.

3.8 Calcule a diferencial.

(a) $y = \dfrac{x}{x+1}$;

Solução: Veja que:

$$y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Segue que:

$$dy = \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

(b) $y = \sqrt[3]{x}$.

Solução: Note que:

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

Logo:

$$dy = \frac{dx}{3x^{2/3}}.$$

3.9 Encontre f.

(a) $f''(x) = 6x + \text{sen}x$.

Solução: Para encontrar a primitiva, vamos aplicar o procedimento inverso ao de derivação. Temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x + \text{sen}x \\ f'(x) &= 3x^2 - \cos(x) + C \\ f(x) &= x^3 - \text{sen}x + Cx + D. \end{aligned}$$

(b) $f''(t) = t - \sqrt{t}$.

Solução: De forma análoga ao anterior, temos:

$$\begin{aligned} f''(t) &= t - \sqrt{t} \\ f'(t) &= \frac{t^2}{2} - \frac{2t^{3/2}}{3} + C \\ f(x) &= \frac{t^3}{6} - \frac{4t^{5/2}}{15} + Ct + D. \end{aligned}$$

3.10 Encontre uma função f tal que $f'(x) = x^3$ e tal que a reta $x + y = 0$ seja tangente ao gráfico de f.

Solução: Note que:

$$f'(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

e

$$y = -x \Rightarrow y' = -1$$

Como $x^3 = -1$, temos que $x = -1$ e, consequentemente, $y = 1$. Substituindo as coordenadas de P em $f(x)$, temos:

$$1 = \frac{(-1)^4}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}.$$

Logo:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}.$$

3.11 Encontre o limite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}\right)$$

Solução: Temos que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}\right)$ é um indeterminação. Neste caso, utilizando a Regra L'Hôspital, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - \cos(x)}{1 - \sec^2(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - \cos(x)}{-\operatorname{tg}^2(x)}\right)\end{aligned}$$

A inderteminação permanece no limite anterior, logo, aplicando novamente a Regra de L'Hôspital, temos:

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{tg}(x)\sec^2(x)}\right)$$

Como a indeterminação permanece, aplicaremos novamente a Regra L'Hôspital:

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cos(x)}{2(\sec^2(x)\sec^2(x) + 2\sec^2(x)\operatorname{tg}^2(x))}\right)$$

Como $\cos(0) = 1$, $\text{tg}(0) = 0$ e $\sec(0) = 1$, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \text{sen}x}{x - \text{tg}x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cos(x)}{2(\sec^2(x)\sec^2(x) + 2\sec^2(x)\text{tg}^2(x))}\right)\\ &= -\frac{1}{2.(1.1 + 2.1.0)}\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3.12 Calcule Δy e dy para $x = 1$, $\Delta x = 1$, $y = \sqrt{x}$. Em seguida, esboce um gráfico, mostrando os segmentos de reta dx, dy e Δy.

Solução: Como $x = 1$ e $\Delta x = 1$, temos que:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow \Delta y = f(1 + 1) - f(1) \Rightarrow \Delta y = \sqrt{2} - 1.$$

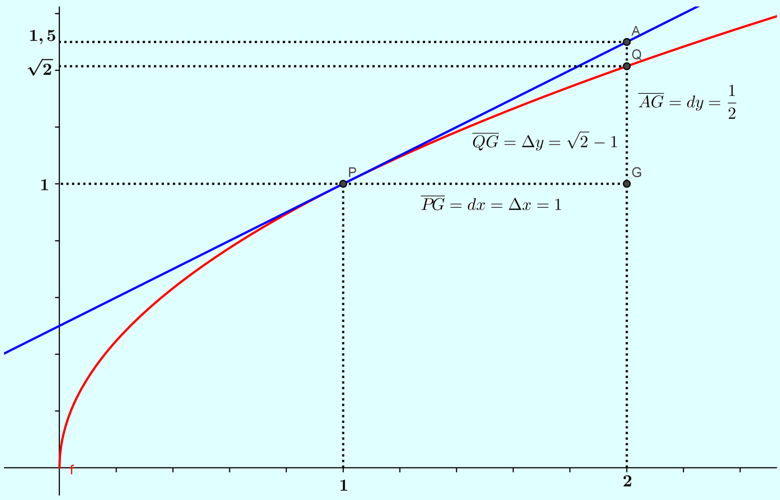
Temos também que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}.$$

A reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $P(1, 1)$ é:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Graficamente:



3.13 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

(a) $f(x) = x^3$, $a = 1$

Solução: Temos que $f'(x) = 3x^2$, então

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ L(x) &= 1 + 3(x-1) \\ L(x) &= 3x - 2. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$

Solução: Temos que $f'(x) = -\text{sen}(x)$, então

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ L(x) &= 0 - 1(x - \pi/2) \\ L(x) &= -x + \pi/2. \end{aligned}$$

3.14 Encontre a primitiva F de $f(x) = 1 - 4\cos(2x)$, tal que $F(\pi) = \pi$.

Solução: Para encontrar a primitiva, precisamos aplicar o processo inverso da derivada.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 4\cos(2x) \\ F(x) &= x + 2\text{sen}(2x) + C \end{aligned}$$

$F(\pi) = \pi$

$$\begin{aligned} \pi &= \pi + 2\text{sen}(2\pi) + C \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$F(x) = x + 2\text{sen}(2x)$$

3.15 Em todos os pontos de uma curva $y = f(x)$ tem-se que $y'' = \cos(2x) - \text{sen}(x)$. Obtenha a equação da curva, se esta passa pelo ponto $(0, 1)$ e a reta tangente neste ponto é perpendicular à reta $y - x = 0$.

Solução: Temos que:

$$y' = \int (\cos(2x) - \text{sen}(x))\ dx = \frac{\text{sen}(2x)}{2} + \cos(x) + k$$

Temos também que:

$$y = \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \cos(x) + k \; dx = \operatorname{sen}(x) - \frac{\cos(2x)}{4} + kx + c$$

Como a curva passa pelo ponto $(0, 1)$, temos que:

$$\operatorname{sen}(0) - \frac{\cos(0)}{4} + k.0 + c = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{4}$$

Como a reta $y = x$ tem coeficiente angular igual a -1 e é tangente no ponto $(0, 1)$, logo $y'(0) = -1$.

$$\frac{\operatorname{sen}(0)}{2} + \cos(0) + k = -1 \Rightarrow k = -2.$$

Assim:

$$y = \operatorname{sen}(x) - \frac{\cos(2x)}{4} - 2x + \frac{5}{4}.$$

3.16 Derive a função:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Solução: Temos:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Utilizando a Regra da Cadeia, temos:

- $(x^2 - 1)' = 2x$
- $(\sqrt{x^2 - 1})' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
- $(x + \sqrt{x^2 - 1})' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Segue que:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Integrais

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Mudança de variável na integral;
- Teorema Fundamental do Cálculo;
- Integração por partes;

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Funções e suas propriedades;
- Regras de Derivação;
- Primitivação;

Métodos e Técnicas

Mudança de variável	• Nas questões citadas efetua-se a mudança de variável para resolver a integral dada: **Exercícios 4.1 ; 4.2 (a) ; 4.3 (b)**
Integração por Partes	• Nas questões citadas efetua-se a integração por partes para resolver a integral dada: **Exercícios 4.6 ; 4.7 ; 4.8**
Teorema Fundamental do Cálculo	• Nas questões citadas utiliza-se o Teorema Fundamental do Cálculo e suas propriedades para o cálculo de integrais definidas: **Exercícios 4.3 ; 4.4 ; 4.5 ; 4.6 (a) ; 4.7**

Enunciado dos Exercícios

●●○○

4.1 Calcule:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx.$$

●●○○

4.2 Calcule a integral indefinida.

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln\ x)}{x}\ dx;$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{3+x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{x^3}\right)\ dx.$

●●○○

4.3 Calcule:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)\ dx;$

(b) $\displaystyle\int_3^{10} \frac{x}{x^2-4}\,dx.$

●○○○

4.4 Se $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ e $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encontre $\displaystyle\int_4^6 f(x)\,dx.$

●●●○

4.5 Calcule:

$$\int_{-2}^{5} |2x-3|\,dx.$$

●●●○

4.6 Calcule:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x\ \ dx;$

(b) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x^3}\ dx.$

●●●○

4.7 Se $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x)\sec(x)\,dx = I$, expresse o valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8(x)\sec(x)\,dx$ em termos de I.

●●○○

4.8 Calcule:

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx.$$

Sugestões

4.1 Faça a mudança $u = 1 + x^4$.

4.2 Observe que $3 + x^2 = 2 + 1 + x^2$.

4.3 Aplique mudança de variáveis com $u = x^2 - 4$.

4.4 Se $c \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4.5 Proceda considerando a definição de função modular e a definição da sugestão anterior.

4.6 Em geral, quando temos uma função polinomial que multiplica uma outra função elementar no integrando, utilizamos integração por partes.

4.7 Use o fato de que $\text{tg}^m(x) = \text{tg}^{m-2}(x)\text{tg}^2(x)$ para $m \geq 2$ natural. Também, que $\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ e aplique uma integração por partes em $\int_0^{\pi/4} \text{tg}^8(x)\sec(x)dx$ considerando $u = \text{tg}^7(x)$.

4.8 Aplique integração por partes duas vezes, na primeira delas, use $u = \ln x$.

Respostas

4.1 Calcule:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx.$$

Solução: Fazendo $u = 1 + x^4$, temos que $\dfrac{du}{4} = x^3\ dx$. Segue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{4} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \frac{1}{4}\int u^{-1/2}du \\
&= \frac{1}{4}\frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} + k \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{u} + k \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + k
\end{aligned}$$

4.2 Calcule a integral indefinida.

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln\ x)}{x}\ dx.$

Solução: Temos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\ln\ x)}{x}\ dx$$

Fazendo $u = \ln\ x$, temos que:

$$du = \frac{dx}{x}$$

Substituindo u na integral, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}(\ln\ x)}{x}\ dx &= \int \operatorname{sen} u\ du \\
&= -\cos\ u + k \\
&= -\cos(\ln\ x) + k.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^3}\right)\, dx.$

Solução: Temos:

$$\int \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^3}\right)\, dx$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{3+x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^3} &= \frac{2+1+x^2}{1+x^2} + \frac{1}{x} \\
&= \frac{2}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \\
&= \frac{2}{x^2+1} + 1 + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{3+x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^3}\right) &= \int \left(\frac{2}{x^2+1} + 1 + \frac{1}{x}\right)\, dx \\
&= \int \frac{2}{x^2+1}\, dx + \int 1\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx \\
&= 2\text{arctg}(x) + x + \ln(x) + k.
\end{aligned}$$

4.3 Calcule:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)\, dx;$

Solução: Temos:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)\, dx &= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx - 4\int_1^2 \frac{1}{x^3}\, dx \\
&= \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^2 - 4.\left.\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right|_1^2 \\
&= \left.-\frac{1}{x}\right|_1^2 + \left.\frac{2}{x^2}\right|_1^2 \\
&= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 2 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_3^{10} \frac{x}{x^2-4}\,dx.$

Solução: Fazendo $u = x^2 - 4$, temos que $du = 2x\,dx$. Além disso, quando $x = 3$, $u = 5$ e, quando $x = 10$, $u = 96$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\int_3^{10} \frac{x}{x^2-4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_5^{96} \frac{1}{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(u)\Big]_5^{96} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln 96 - \ln 5\Big).
\end{aligned}$$

4.4 Se $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ e $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encontre $\displaystyle\int_4^6 f(x)\,dx$.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx \\
10 &= 7 + \int_4^6 f(x)\,dx \\
\int_4^6 f(x)\,dx &= 3.
\end{aligned}$$

4.5 Calcule:

$$\int_{-2}^{5} |2x-3|\,dx.$$

Solução: Temos:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{,se } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & \text{,se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Segue que:

$$\int_{-2}^{5} |2x-3|\,dx = \int_{-2}^{\frac{3}{2}} -2x+3\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{5} 2x-3\,dx = \Big[-x^2+3x\Big]_{-2}^{\frac{3}{2}} + \Big[x^2-3x\Big]_{\frac{3}{2}}^{5} = \frac{49}{2}.$$

4.6 Calcule:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x \; dx;$

Solução: Fazendo $u = x \;\Rightarrow\; du = dx$ e $dv = \cos(x)\,dx \;\Rightarrow\; v = \operatorname{sen}(x)$. Temos:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x \; dx &= \Big[x.\operatorname{sen}(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\; dx \\ &= \Big[x.\operatorname{sen}(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi} + \Big[\cos(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} + 1.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x^3}\; dx.$

Solução: Fazendo $u = (\ln x)^2 \;\Rightarrow\; du = \dfrac{2\ln x}{x}$ e $dv = \dfrac{dx}{x^3} \;\Rightarrow\; v = -\dfrac{1}{2x^2}$. Temos:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^3}\; dx = -\frac{(\ln x)^2}{2x^2} + \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

Fazendo $u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{x}$ e $dv = \frac{1}{x^3} \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{2x^2}$. Segue:

$$\begin{aligned} &= -\frac{(\ln x)^2}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3} dx \\ &= \frac{(\ln x)^2 - \ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2x^2} + C \\ &= \frac{(\ln x)^2 - \ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.\end{aligned}$$

4.7 Se $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x)\sec(x)\,dx = I$, expresse o valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8(x)\sec(x)\,dx$ em termos de I.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8(x)\sec(x)\,dx &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x).\sec(x).\operatorname{tg}^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x).\sec(x).(\sec^2(x) - 1)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x).\sec^3(x)\,dx - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x).\sec(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6(x).\sec^3(x)\,dx - I \qquad (9)\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}(x).\mathrm{tg}^7(x).\sec(x)\,dx$$

Fazendo $u = \mathrm{tg}^7(x) \Rightarrow du = 7\mathrm{tg}^6(x)\sec^2(x)$ e $dv = \mathrm{tg}(x).\sec(x)\,dx \Rightarrow v = \sec(x)$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx &= \Big[\mathrm{tg}^7(x).\sec(x)\Big]_0^{\pi/4} - 7\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^6(x).\sec^3(x)\,dx \\
7\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^6(x).\sec^3(x)\,dx &= \Big[\mathrm{tg}^7(x).\sec(x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx \\
\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^6(x).\sec^3(x)\,dx &= \frac{\Big[\mathrm{tg}^7(x).\sec(x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx}{7} \qquad (10)
\end{aligned}$$

De (9) e (10), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^6(x).\sec^3(x)\,dx - I \\
7\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx &= \Big[\mathrm{tg}^7(x).\sec(x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx - 7I \\
8\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx &= \Big[\mathrm{tg}^7(x).\sec(x)\Big]_0^{\pi/4} - 7I \\
\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^8(x)\sec(x)\,dx &= \frac{\sqrt{2} - 7I}{8}
\end{aligned}$$

4.8 Calcule:

$$\int \mathrm{sen}(\ln x)\ dx.$$

Solução: Fazendo $u = \ln x \Rightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$. Segue que:

$$\int \mathrm{sen}(\ln x)\ dx = \int e^u.\mathrm{sen}(u)\,du$$

Integrando por partes, temos:

$$\int e^u.\mathrm{sen}(u)\,du = e^u.\mathrm{sen}(u) - \int e^u.\cos(u)\,dw$$

Integrando novamente por partes, temos:

$$\begin{aligned}
\int e^u.\text{sen}(u)\,du &= e^u.\text{sen}(u) - \int e^u.\cos(u)\,dw \\
\int e^u.\text{sen}(u)\,du &= e^u.\text{sen}(u) - \left[e^u.\cos(u) + \int e^u.\text{sen}(u)\,du\right] \\
2\int e^u.\text{sen}(u)\,du &= e^u.(\text{sen}(u) - \cos(u)) + C \\
\int e^u.\text{sen}(u)\,du &= \frac{e^u}{2}\Big(\text{sen}(u) - \cos(u)\Big) + C \\
&= \frac{e^{\ln x}}{2}\Big(\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\Big) + C \\
&= \frac{x}{2}\Big(\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\Big) + C
\end{aligned}$$

Aplicações

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Taxas relacionadas;
- Primitivas de funções polinomiais;
- Gráfico de uma função por derivada;
- Máximos e Mínimos;
- Teorema de Rolle;
- Área de regiões limitadas por curvas;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Limite no Infinito;
- Regras de Derivação;
- Primitivação;
- Teorema Fundamental do Cálculo;

Métodos e Técnicas

Regra da Cadeia	• Na questão citada, efetua-se a regra da cadeia na função distância a qual é dada implicitamente: **Exercício 5.3** • Na questão citada, efetua-se a regra da cadeia na função área a qual é dada implicitamente: **Exercício 5.5**
Teorema de Rolle	• Na questão citada usa-se o Teorema de Rolle para obter o valor pedido: **Exercício 5.14**
Limite no Infinito, Teste Crescente/Decrescente e Teste da Segunda Derivada	• Nas questões citadas efetua-se o teste da segunda derivada para obter os valores máximos ou mínimos de uma função: **Exercícios 5.9 ; 5.10 ; 5.12** • Na questão citada usa-se limite no infinito, o teste crescente/decrescente e o teste da segunda derivada para esboçar o gráfico de uma função: **Exercício 5.11**

Primitivação
e
Teorema Fundamental
do Cálculo

- Na questão citada efetua-se a primitivação para encontrar a função posição:

Exercício 5.4

- Nas questões citadas efetua-se o Teorema Fundamental do Cálculo para obter a área da região delimitada por duas curvas:

Exercícios 5.14 ; 5.15 ; 5.16 ; 5.17

●○○○ **5.1** O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.

(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

●●○○ **5.2** Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto, de água a uma taxa de 0,1 m^3/s. O vértice está a 15 m do topo e o raio do topo é de 10 m. Com que velocidade o nível h de água está subindo no instante em que $h = 5m$?

●○○○ **5.3** Uma partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem neste instante?

●●○○ **5.4** Encontre a função posição de uma partícula, dado: $a(t) = t^2 - 4t + 6$, $s(0) = 0$ e $s(1) = 20$.

●●○○ **5.5** Uma mancha de óleo em um lago está cercada por uma barreira de contenção circular flutuante. À medida que a barreira é encolhida, a área circular da mancha diminui por bombeamento. Se o raio da barreira está sendo encolhido a uma taxa de 8 metros por minuto, a que taxa estará diminuindo a área da mancha quando essa área tiver um diâmetro de 200 m?

●●○○ **5.6** O Estrôncio-90 tem uma meia vida de 28 dias.

(a) Uma amostra tem a massa de 50 mg inicialmente. Encontre a fórmula para a massa restante após t dias.

(b) Encontre a massa remanescente depois de 40 dias.

(c) Quanto tempo a amostra leva para decair para uma massa de 2 mg?

(d) Esboce o gráfico da função massa.

●●○○

5.7 Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa de crescimento relativa constante. A contagem de bactérias foi de 400 após 2 horas e 25600 após 6 horas.

(a) Qual a taxa de crescimento relativa? Expresse sua resposta como uma porcentagem.

(b) Qual foi o tamanho inicial da cultura?

(c) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.

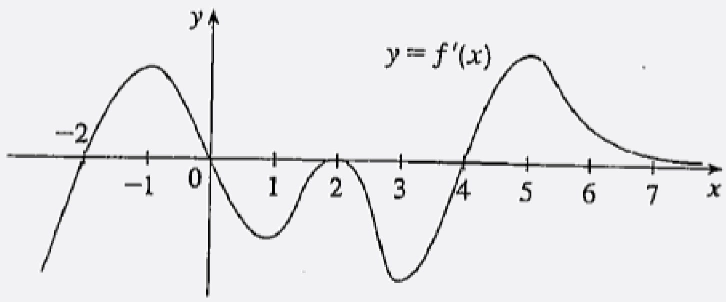
(d) Encontre o número de células após 4,5 horas.

(e) Encontre a taxa de crescimento depois de 4,5 horas.

(f) Quando a população atingirá 50000?

●●●○

5.8 A figura mostra o gráfico da derivada de f' de uma função f.



(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Esboce o gráfico f''.

(d) Esboce o gráfico de f.

●●○○

5.9 Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula:

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0000679T^3.$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade mínima.

●●○○

5.10 Durante a tosse há um decréscimo no raio da traquéia de uma pessoa. Suponha que o raio normal da traquéia seja R cm e que durante a tosse o raio seja de r cm, onde R é uma constante e r é uma variável. Podemos mostrar que a velocidade do ar através da traquéia é uma função de r e se $V(r)$ cm/s for essa velocidade, então

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

onde k é uma constante positiva e r está em $\left[\frac{1}{2}R, R\right]$. Determine o raio da traquéia durante a tosse, para o qual a velocidade do ar através da traquéia seja máxima.

●●●○

5.11 Esboce o gráfico das funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

●●○○

5.12 A Cia CMN Ltda. produz um determinado produto e vende-o com um lucro total dado por $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida. Determine o lucro máximo e a produção que maximiza o lucro. Esboce o gráfico desta função.

●○○○

5.13 Verifique se as funções abaixo satisfazem as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

(a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

(b) $f(x) = \cos(2x), \quad \left[\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$

●●○○

5.14 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

(a) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

(b) $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$

●●●○

5.15 Existe uma reta que passa pela origem e que divide a região delimitada pela parábola $y = x - x^2$ e o eixo x em duas regiões de áreas iguais. Calcule o coeficiente angular desta reta.

●●●○

5.16 Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 \ln(x)$ e $y = 4\ln(x)$.

●●●○

5.17 A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leq 8$ em duas partes. Encontre a área de ambas as partes.

Sugestões

5.1 Lembre da fórmula da área do disco e de diferenciais.

5.2 Esboce uma figura que represente o problema e relacione o raio com a altura usando semelhança de triângulos.

5.3 Esboce uma figura que represente o problema e use o Teorema de Pitágoras para relacionar as variáveis.

5.4 Utilize as condições iniciais nas primitivas.

5.5 Lembre da área do disco.

5.6 Lembre que se $m(t)$ é a massa do Estrôncio-90 (em mg) que resta após t dias, então $\dfrac{dm}{dt} = km$ e, $m(0) = 50$.

5.7 Lembre que se $Q(t)$ é a quantidade de bactérias de uma cultura no instante t, em horas, temos que: $\dfrac{dQ}{dt} = kQ$.

5.8 Observe, além dos intervalos onde f' é positiva e negativa, os pontos críticos de f para o esboço de f e f''.

5.9 Determine o ponto crítico observando a restrição no domínio.

5.10 Use o teste da segunda derivada observando o sinal das constantes.

5.11 Utilize os testes da primeira e segunda derivada.

5.12 Use o teste da segunda derivada.

5.13 Funções polinomiais e a função cosseno são contínuas em todo $\mathbb{R}$.

5.14 Observe a ordem das funções no integrando.

5.15 Esboce a região e defina $g(x) = mx$. E, utilize os pontos onde as curvas interceptam-se nos limites de integração da integral desejada.

5.16 Determine os pontos onde as curvas interceptam-se e observe que função supera qual, no intervalo encontrado.

5.17 Use o cálculo de área entre curvas observando a simetria dos gráficos com relação ao eixo y.

Respostas

5.1 O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.

Solução: Temos que $A = \pi r^2$. Segue que:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 2\pi r \\ dA &= 2\pi r dr \\ dA &= 2.\pi.24.0,2 \\ dA &= 9,6\pi. \end{aligned}$$

(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

Solução: Temos que o erro relativo é:

$$\frac{dA}{A} = \frac{9,6\pi}{\pi.24^2} = \frac{9,6\pi}{576\pi} = 0,016$$

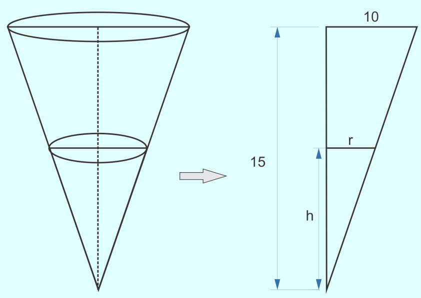
Dessa forma, o erro percentual é$= 1,6\%$.

5.2 Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto, de água a uma taxa de 0,1 m^3/s. O vértice está a 15 m do topo e o raio do topo é de 10 m. Com que velocidade o nível h de água está subindo no instante em que $h = 5m$?

Solução: Temos que o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \tag{11}$$

Vamos expressar r em função de h. De acordo com a figura e utilizando a semelhança de triângulos, temos:



$$\frac{r}{10} = \frac{h}{15} \Rightarrow r = \frac{2}{3}h \tag{12}$$

Substituindo (12) em (11) e derivando em função de t (pois o volume e a altura variam de acordo com o tempo), temos:

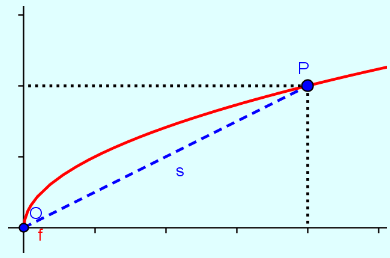
$$V = \frac{4\pi}{27}h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}. \tag{13}$$

Como $\dfrac{dV}{dt} = 0,1$ e para $h = 5$, temos:

$$0,1 = \frac{4\pi}{9}.5^2.\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0,9}{100\pi}.$$

5.3 Uma partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4,2)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem neste instante?

Solução: Seja s a distância do ponto $P = (x,y)$ à origem, sabendo que $x = x(t)$ e $y = y(t)$.



Temos:

$$d^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 \Rightarrow s^2 = x^2 + y^2.$$

Derivando a equação anterior, temos:

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Ainda, temos:

- A distância s do ponto $(4,2)$ à origem é igual a $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
- $y = \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{dx}{dt}$;
- Para o ponto $(4,2)$, temos que $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{2\sqrt{4}} = \dfrac{3}{4}$.

Substituindo os valores anteriores na equação da distância, temos:

$$2.2\sqrt{5}\frac{ds}{dt} = 2\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{27\sqrt{5}}{20}.$$

5.4 Encontre a função posição de uma partícula, dado: $a(t) = t^2 - 4t + 6$, $s(0) = 0$ e $s(1) = 20$.

Solução: Temos que $a(t) = v'(t)$ e $v(t) = s'(t)$. Segue que:

$$v(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 6t + k$$

e

$$s(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 3t^2 + kt + c.$$

Como $s(0) = 0$, temos que $c = 0$. Logo:

$$s(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 3t^2 + kt.$$

Ainda, como $s(1) = 20$, temos:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 3t^2 + kt \\ 20 &= = \frac{1^4}{12} - \frac{2.1^3}{3} + 3.1^2 + k.1 \\ k &= \frac{211}{12}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$s(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 3t^2 + \frac{211t}{12}.$$

5.5 Uma mancha de óleo em um lago está cercada por uma barreira de contenção circular flutuante. À medida que a barreira é encolhida, a área circular da mancha diminui por bombeamento. Se o raio da barreira está sendo encolhido a uma taxa de 8 metros por minuto, a que taxa estará diminuindo a área da mancha quando essa área tiver um diâmetro de 200 m?

Solução: Temos que $A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$, $\frac{dr}{dt} = -8$ e $r = 100$. Segue que:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2.\pi.100.8 = -1600\pi \text{ m}^2/\text{min}.$$

5.6 O Estrôncio-90 tem uma meia vida de 28 dias.

(a) Uma amostra tem a massa de 50 mg inicialmente. Encontre a fórmula para a massa restante após t dias.

Solução: Seja $m(t)$ a massa de Estrôncio-90 (em mg) que resta após t dias, então $\dfrac{dm}{dt} = km$ e, $m(0) = 50$. Segue que:

$$m(t) = m(0)e^{kt} \;\Rightarrow\; m(t) = 50e^{kt}.$$

Temos que:

$$50e^{28k} = 25 \;\Rightarrow e^{28k} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 28k = -\ln(2) \;\Rightarrow\; k = \frac{-\ln(2)}{28}$$

Segue que:

$$m(t) = 50e^{kt} = 50e^{\frac{-\ln(2)}{28}t} \;\Rightarrow\; m(t) = 50.2^{-t/28}.$$

(b) Encontre a massa remanescente depois de 40 dias.

Solução:

$$m(t) = 50.2^{-t/28} \;\Rightarrow\; m(40) = 50.2^{-40/28} \;\Rightarrow\; m(40) = 18,685 \text{ mg}.$$

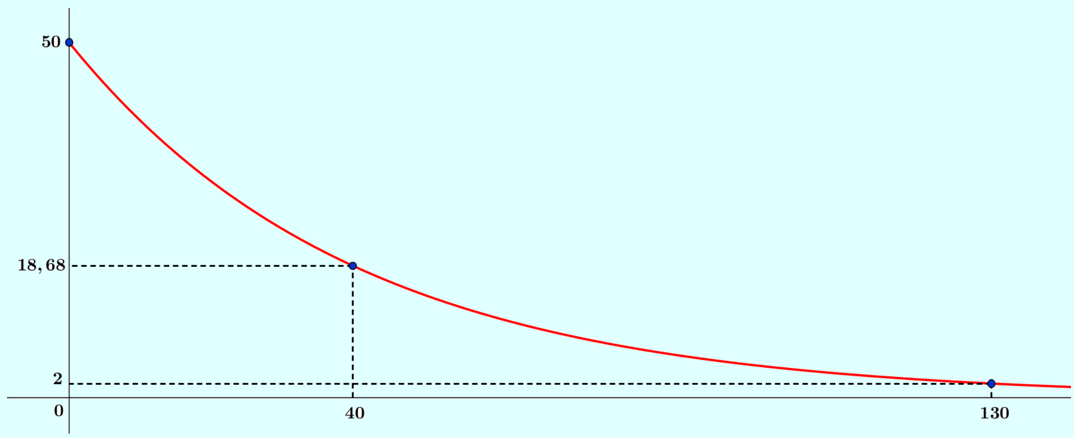
(c) Quanto tempo a amostra leva para decair para uma massa de 2 mg?

Solução:

$$m(t) = 50.2^{-t/28} \;\Rightarrow\; 2 = 50.2^{-t/28} \;\Rightarrow\; \frac{-\ln(25)}{\ln(2)} = -\frac{t}{28} \;\Rightarrow\; t = 130 \text{ dias}.$$

(d) Esboce o gráfico da função massa.

Solução:



5.7 Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa de crescimento relativa constante. A contagem de bactérias foi de 400 após 2 horas e 25600 após 6 horas.

(a) Qual a taxa de crescimento relativa? Expresse sua resposta como uma porcentagem.

Solução: Seja $Q(t)$ a quantidade de bactérias de uma cultura no instante t, em horas. Temos que:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{Q} = k.dt$$

Segue que:

$$Q(t) = Q(0).e^{kt}$$

Então:

$$\begin{aligned} 400 &= Q(0).e^{2k} \\ 25600 &= Q(0).e^{6k} \end{aligned}$$

Dividindo as equações anteriores, temos:

$$\frac{25600}{400} = e^{4k} \;\Rightarrow\; e^{4k} = 64.$$

Logaritmando ambos os lados da equação anterior, temos:

$$4k = \ln(64) \;\Rightarrow\; k = 1,04.$$

Portanto, a taxa de crescimento é de aproximandamente 104%.

(b) Qual foi o tamanho inicial da cultura?

Solução:

$$Q(t) = Q(0).e^{1,04t} \;\Rightarrow\; 400 = Q(0).e^{2.1,04} \;\Rightarrow\; Q(0) = 50.$$

(c) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.

Solução:

$$Q(t) = Q(0).e^{kt} \;\Rightarrow\; Q(t) = 50.e^{1,04t}.$$

(d) Encontre o número de células após 4,5 horas.

Solução:

$$Q(t) = 50.e^{1,04t} \;\Rightarrow\; Q(4,5) = 50.e^{1,04.4,5} \;\Rightarrow\; Q(4,5) = 5388.$$

(e) Encontre a taxa de crescimento depois de 4,5 horas.

Solução:

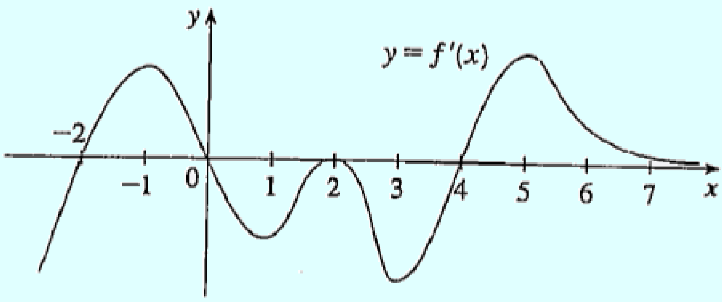
$$Q(t) = 50.e^{1,04t} \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} = 52.e^{1,04t} \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} = 52.e^{1,04.4,5} \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} = 5604.$$

(f) Quando a população atingirá 50000?

Solução:

$$50000 = 50.e^{1,04t} \;\Rightarrow\; 1,04t = \ln(1000) \;\Rightarrow\; t = 6,6.$$

5.8 A figura mostra o gráfico da derivada de f' de uma função f.



(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?

Solução:

Intervalo	**Sinal de f'**	**Classificação de f**
$(-\infty,-2)$	$-$	Decrescente
$(-2,0)$	$+$	Crescente
$(0,2)$	$-$	Decrescente
$(2,4)$	$-$	Decrescente
$(4,+\infty)$	$+$	Crescente

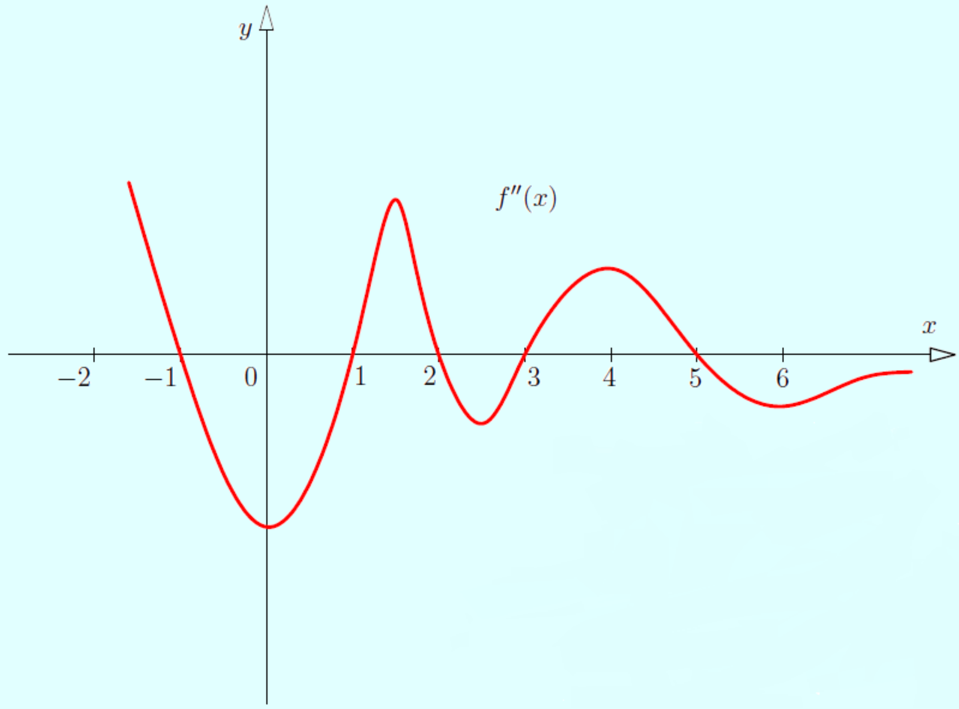
(b) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

Solução:

Números Críticos (c)	**Mudança do sinal de f'**	**Classificação de** $f(c)$
-2	$- \to +$	Mínimo local
0	$+ \to -$	Máximo local
4	$- \to +$	Mínimo local

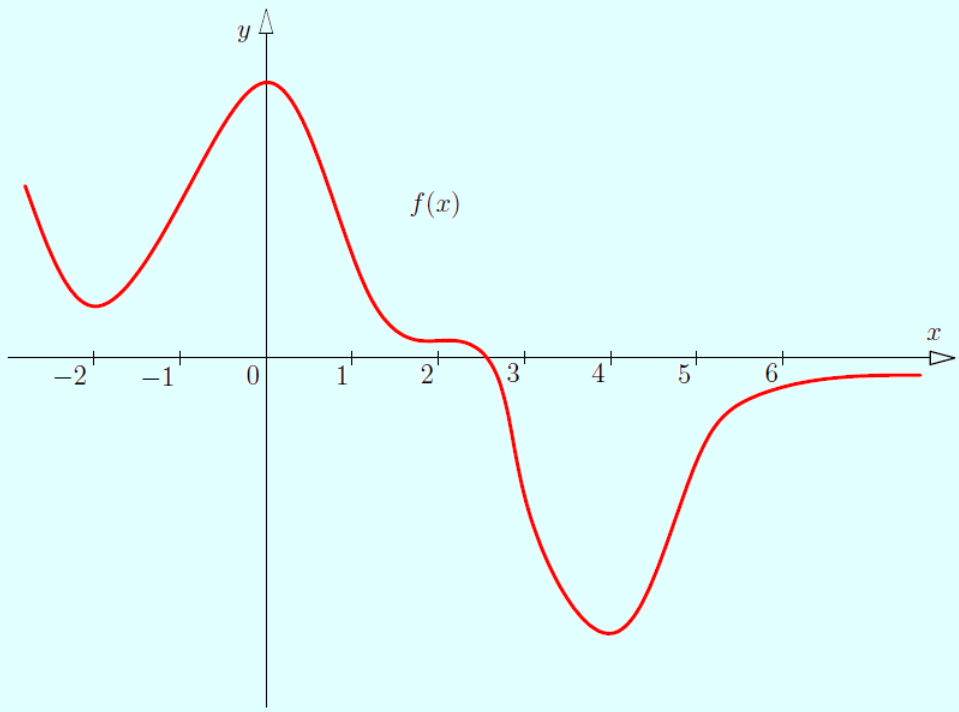
(c) Esboce o gráfico f''.

Solução:



(d) Esboce o gráfico de f.

Solução:



5.9 Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula:

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0000679T^3.$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

Solução: Para a função $V = 999,87 - 0,06426T + 0,0000679T^3$, de 0°C a 30°C, não teremos um valor imediato de T em que a densidade seja máxima, então, buscaremos a partir do volume de água. Segue que:

$$V' = -0,06426 + 0,0002030T^2$$

Para encontrarmos a temperatura que minimiza o volume de água, fazemos $V' = 0$. Temos:

$$-0,06426 + 0,0002030T^2 = 0 \Rightarrow T^2 = \frac{0,06426}{0,0002030} \Rightarrow T \approx 17,7°C.$$

Pelo teste da segunda derivada, temos:

$$V'' = 0,000406T$$

Neste caso V'' é positiva para $T > 0$. Logo, 17,7°C é um mínimo local. Este valor é um mínimo absoluto, pois $V(0) = 999,87$, $V(17,7) = 999,109$ e $V(30) = 999,775$. Então, como a densidade é inversamente proporcional ao volume, quando $T \approx 17,7°C$ a densidade é máxima.

5.10 Durante a tosse há um decréscimo no raio da traquéia de uma pessoa. Suponha que o raio normal da traquéia seja R cm e que durante a tosse o raio seja de r cm, onde R é uma constante e r é uma variável. Podemos mostrar que a velocidade do ar através da traquéia é uma função de r e se $V(r)$ cm/s for essa velocidade, então

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

onde k é uma constante positiva e r está em $\left[\frac{1}{2}R, R\right]$. Determine o raio da traquéia durante a tosse, para o qual a velocidade do ar através da traquéia seja máxima.

Solução: Temos:

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

Para determinar o raio da traquéia que maximiza a velocidade do ar, fazemos $V'(r) = 0$:

$$V'(r) = 2rkR - 3kr^2 \Rightarrow V'(r) = kr(2R - 3r) = 0.$$

Segue que:

$$kr(2R - 3r) = 0 \;\Rightarrow\; r = 0 \text{ ou } r = \frac{2R}{3}.$$

Fazendo $V''(r)$, temos:

$$V''(r) = 2kR - 6kr$$

Calculando $V''(2R/3)$, temos:

$$V''(2R/3) = 2kR - 4kR \;\Rightarrow\; V''(2R/3) = -2kR$$

Como $V''(2R/3) < 0$, pois k e R são valores positivos, temos que $\dfrac{2R}{3}$ maximiza a velocidade do ar.

5.11 Esboce o gráfico das funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Solução: Temos:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

I. Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

II. Interseção no eixo x: $\dfrac{x^2}{x+1} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

III. Interseção no eixo y: $f(0) = \dfrac{0^2}{0+1} = 0$.

IV. Assíntotas horizontais: não há, pois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$

V. Assíntotas verticias: $x = -1$, pois:

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$

VI. Assíntotas oblíquas: $y = x$, pois

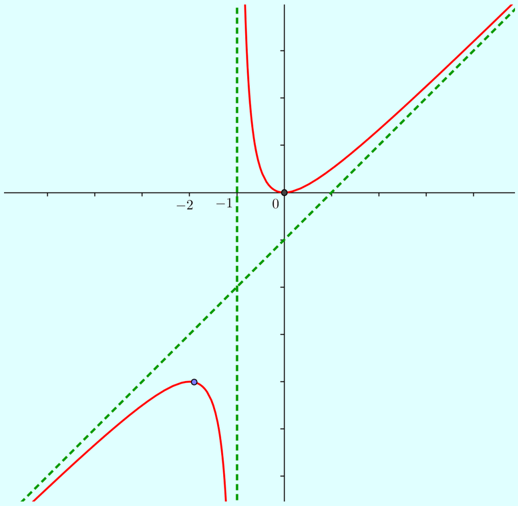
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x - \frac{x}{x+1} \;\Rightarrow\; f(x) - x = \frac{x}{x+1} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \to 0 \text{ (quando } x \to \pm\infty)$$

VII. Intervalos de crescimento e decrescimento: $f'(x) > 0$ ($f(x)$ é crescente) para $(-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ ($f(x)$ é decrescente) para $(-2, 0)$.

VIII. Máximos e mínimos locais: $x = 0$, $x = -2$ (raízes de $f'(x) = 0$) e $x = -1$ ($f'(x)$ não existe) são pontos críticos. Usando o teste da segunda derivada, temos que tanto para $f'(0)$ e $f'(-2)$, $f''(0)$ e $f'(-2)$ serão diferentes de 0. Ainda, $f''(0) > 0$ e $f'(-2) < 0$, então $f(0)$ é um mínimo local e $f(-2)$ é um máximo local.

IX. Concavidade e Ponto de Inflexão: Pelo estudo do sinal da segunda derivada, temos que no intervalo $(-\infty, -1)$, $f''(x)$ é negativa, logo neste intervalo $f(x)$ é côncava para baixo. Além disso, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$ é positiva, logo neste intervalo $f(x)$ é côncava para cima. Os pontos de inflexão serão $x = -1$ e $x = 0$.

X. Esboço do gráfico:



(b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

Solução: Temos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(\sqrt{x^2 - 4})(x^2 - 4)}$$

I. Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$.

II. Interseção com o eixo x: $\sqrt{x^2 - 4} = 0$, temos que $x = -2$ ou $x = 2$.

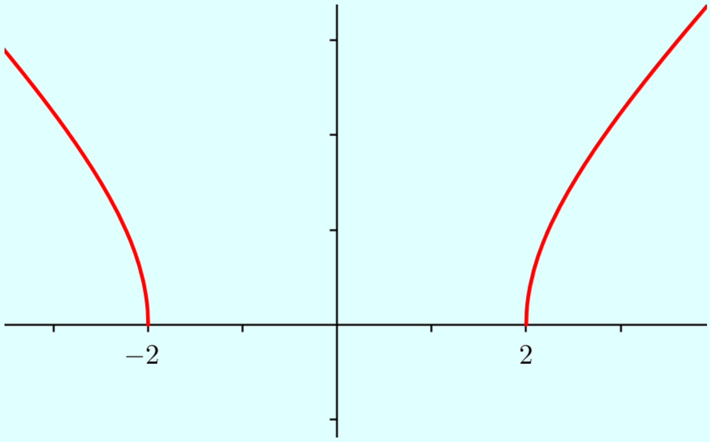
III. Interseção com o eixo y: não há, pois $f(0)$ não existe, já que $x = 0$ não pertence ao domínio da função.

IV. Simetria: o gráfico de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo y, pois f é uma função par ($\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$).

V. Intervalos de crescimento e decrescimento: $f'(x) > 0$ ($f(x)$ é crescente) para $(2, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ ($f(x)$ é decrescente) para $(-\infty, -2)$. Observe que os intervalos $(-2, 0)$ e $(0, 2)$ não estão em D_f.

VI. Concavidade: $f(x)$ é côncava para baixo, pois $f''(x) < 0$ em todo o seu domínio.

VII. Esboço do gráfico:



5.12 A Cia CMN Ltda. produz um determinado produto e vende-o com um lucro total dado por $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida. Determine o lucro máximo e a produção que maximiza o lucro. Esboce o gráfico desta função.

Solução: Temos que:

$$L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$$

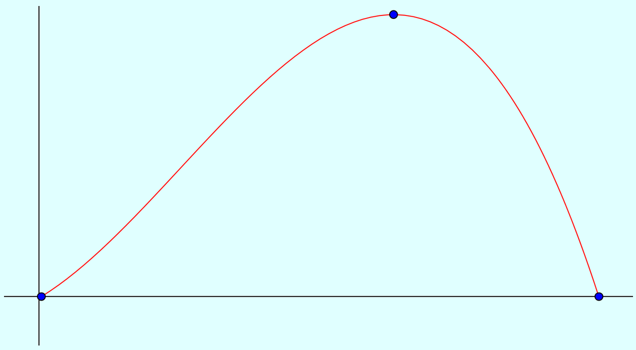
Para encontrar a produção que maximiza o lucro, fazemos $L'(q) = 0$:

$$-3q^2 + 24q + 60 = 0 \;\Rightarrow\; q = 10 \text{ ou } q = -2 \text{ (não convém)}$$

Pelo teste da segunda derivada, temos que:

$$L''(q) = -6q + 24 \;\Rightarrow\; L''(10) = -36 < 0$$

Portanto, $q = 10$ maximiza o lucro e $L(10) = 796$. O esboço do gráfico:



5.13 Verifique se as funções abaixo satisfazem as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

(a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1,3]$

Solução: Para $f(x) = 5 - 12x + 3x^2 \quad [1,3]$ temos:

1. $f(x)$ é contínua no intervalo $[1,3]$, pois é uma função polinomial.
2. $f(x)$ é derivável $(1,3)$, pois é uma função polinomial e $f'(x) = -12 + 6x$.
3. $f(1) = f(3) - 4$

Temos:

$$f'(c) = 0 \;\Rightarrow\; c = 2.$$

(b) $f(x) = \cos(2x), \quad \left[\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$

Solução: Para $f(x) = \cos(2x) \quad [\pi/8, 7\pi/8]$ temos:

1. $f(x)$ é contínua no intervalo $[\pi/8, 7\pi/8]$.
2. $f(x)$ é derivável no intervalo $(\pi/8, 7\pi/8)$ e $f'(x) = -2\text{sen}(2x)$
3. $f(\pi/8) = f(7\pi/8) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

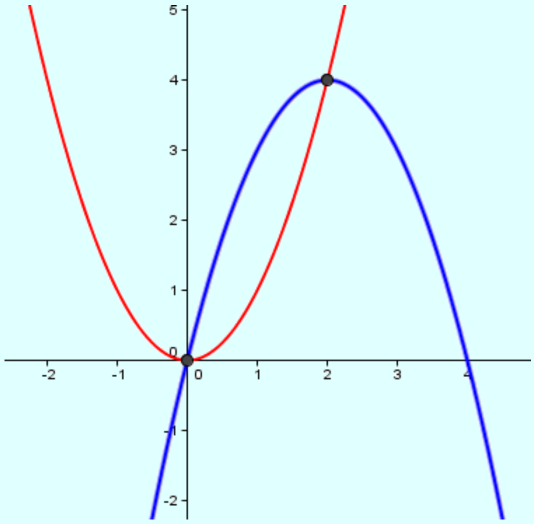
Temos:

$$-2\text{sen}(2x) = 0 \;\Rightarrow\; \text{sen}(2x) = \text{sen}(\pi) \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2}.$$

5.14 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

(a) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

Solução: Graficamente temos:

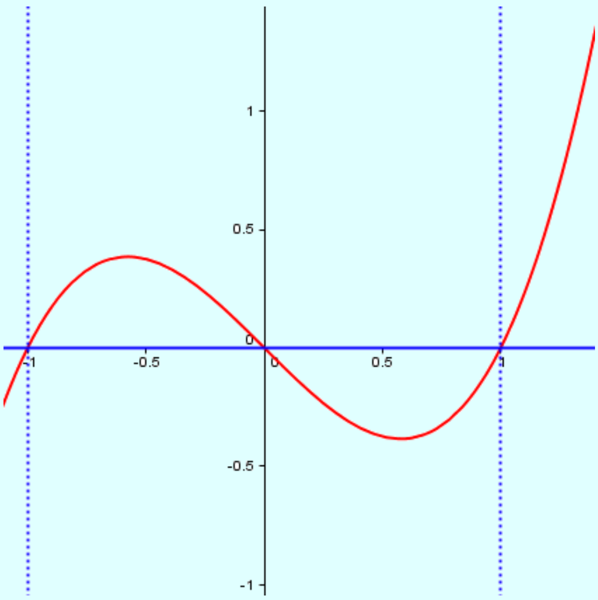


Temos que os pontos de interseção entre as curvas ocorrem quando $x = 0$ e $x = 2$, na equação $x^2 = 4x - x^2$. Assim:

$$A = \int_0^2 (4x - x^2) - x^2\, dx = \int_0^2 4x - 2x^2\, dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ u.A}$$

(b) $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$

Solução: Graficamente temos:



Temos que os pontos de interseção de $y = x^3 - x$ com $y = 0$ ocorrem quando $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Segue que:

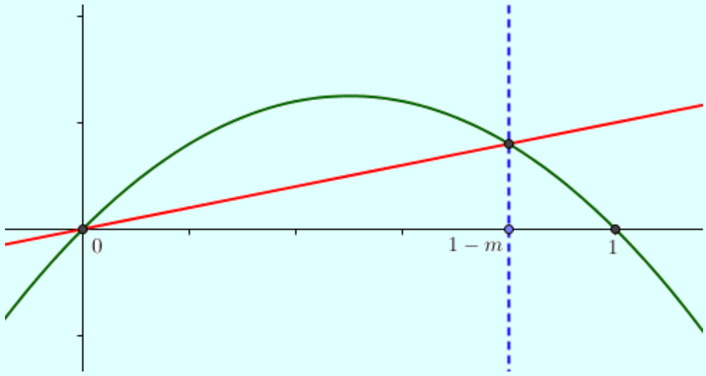
$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) - 0\, dx + \int_0^1 0 - (x^3 - x)\, dx = \int_{-1}^0 x^3 - x\, dx + \int_0^1 -x^3 + x\, dx$$

Então:

$$A = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

5.15 Existe uma reta que passa pela origem e que divide a região delimitada pela parábola $y = x - x^2$ e o eixo x em duas regiões de áreas iguais. Calcule o coeficiente angular desta reta.

Solução: Graficamente, temos a seguinte situação:



Seja $f(x) = x - x^2$ e $y = mx$. Como as raízes de $f(x)$ são $x = 0$ e $x = 1$, temos:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x - x^2\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Vamos calcular o ponto de interseção entre $f(x)$ e $g(x)$:

$$x - x^2 = mx \;\Rightarrow\; x - mx - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x' = 0 \text{ e } x'' = 1 - m.$$

Assim:

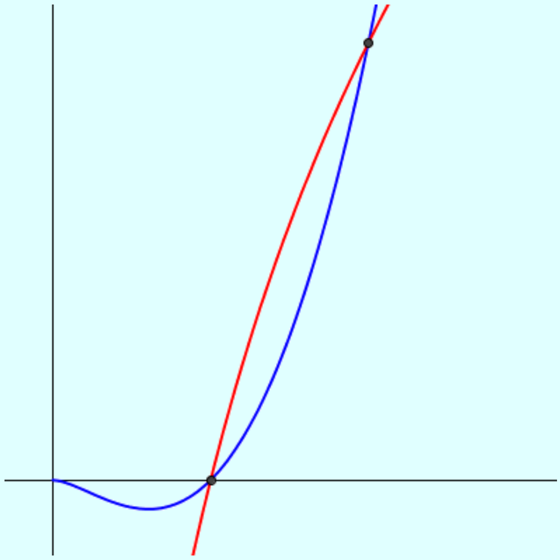
$$\int_0^{1-m} x - x^2 - mx\, dx = \int_0^{1-m} (1-m)x - x^2\, dx = \left[\frac{(1-m)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1-m} = \frac{(1-m)^3}{6}.$$

Como as áreas são iguais e fazendo as devidas manipulações algébricas (simplificações e racionalização) então:

$$\frac{(1-m)^3}{6} = \frac{1}{12} \;\Rightarrow\; m = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2}.$$

5.16 Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2\ln(x)$ e $y = 4\ln(x)$.

Solução: Graficamente, temos:



Calculando a área entre as curvas, no intervalo de $[1,2]$ (1 e 2 são os pontos de interseção), temos:

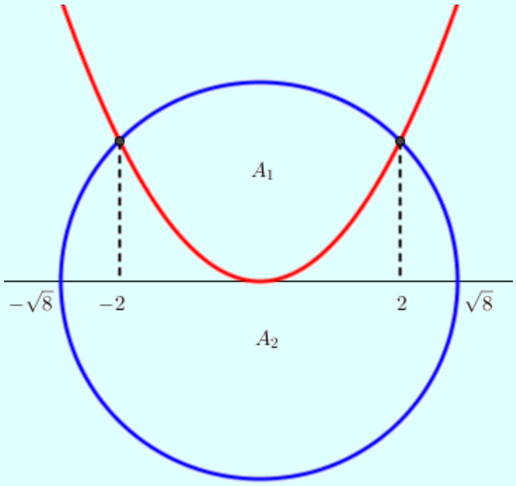
$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^2 (4\ln x) - (x^2 \ln x)dx \\
&= \int_1^2 (4\ln x)dx - \int_1^2 (x^2 \ln x)dx \\
&= 4\,[\ln x - x]_1^2 - \left[\frac{x^3 \ln x}{x} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= 8\ln 2 - 4 - \frac{8\ln 2}{3} + \frac{7}{9} \\
&= \frac{48\ln 2 - 29}{9}.
\end{aligned}
$$

5.17 A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leq 8$ em duas partes. Encontre a área de ambas as partes.

Solução: Para calcular a interseção entre as curvas, fazemos:

$$\frac{x^2}{2} = \sqrt{8 - x^2} \;\Rightarrow\; x = \pm 2.$$

Graficamente, temos:



Para calcular A_1, fazemos:

$$A_1 = \int_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\, dx.$$

Como os curvas são simétricas em relação ao eixo y, temos:

$$A_1 = \int_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\, dx = 2.\left[\int_{0}^{2} \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\, dx\right].$$

Segue que:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2.\left[\int_{0}^{2} \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\, dx\right] \\ &= 2.\left[\int_{0}^{2} \sqrt{8-x^2}\, dx - \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}\, dx\right] \\ &= 2.\left[\underbrace{\int_{0}^{2} \sqrt{8-x^2}\, dx}_{(*)} - \frac{4}{3}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Vamos resolver separadamente (*). Fazendo $x = \sqrt{8}\text{sen}(\theta) \Rightarrow dx = \sqrt{8}\cos(\theta)\,d\theta$ (para $x = 0$, $\theta = 0$ e para $x = 2$, $\theta = \pi/4$), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{8 - x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{8 - (\sqrt{8}\text{sen}(\theta))^2}\,\sqrt{8}\cos(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} 8\cos^2(\theta)\,d\theta \\
&= 8\int_0^{\pi/4} \cos^2(\theta)\,d\theta \\
&= 8.\left[\frac{\text{sen}(2\theta) + 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/4} \\
&= 2 + \pi.
\end{aligned}$$

Substituindo (*) em (14), temos:

$$A_1 = 2.\left[2 + \pi - \frac{4}{3}\right] = \frac{4 + 6\pi}{3}$$

Como o círculo tem raio igual a $\sqrt{8}$, sua área (A_C) será igual 8π. Assim:

$$A_2 = A_C - A_1 = 8\pi - \frac{4 + 6\pi}{3} = \frac{18\pi - 4}{3}.$$