Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Luciano Moura Cavalcante

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Luciano Moura Cavalcante

3ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo
Bibliotecária – CRB-3 / 623

C376c Cavalcante, Luciano Moura
Cálculo diferencial e integral II / Luciano Moura Cavalcante. 3. ed. ___ Fortaleza : EdUECE, 2015.

113 p. ; il. (Matemática)

ISBN: 978-85-7826-392-8

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral II. I. Título.

CDD: 515

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

O Cálculo Diferencial e Integral tem sua origem no século XVII, quando dois ilustres e famosos personagens Isaac Newton e Gottfried Leibniz iniciaram estudos de seus rudimentos. Nem Newton nem Leibniz obtiveram inicialmente grande sucesso em explicar a lógica de seus novos conceitos, mas tanto Newton quanto Leibniz possuíam forte evidência de que seus métodos continham alguma verdade essencial. Com a sua descoberta, Newton conseguia explicar o movimento planetário, e Leibniz tinha expressado suas descobertas em uma notação tão inteligente que, mesmo se ninguém entendia exatamente por que, elas conduziam automaticamente a resultados corretos.

Do final do século XVII ao inicio do século XIX o cálculo se desenvolveu com base na notação e conceituação de Leibniz, e inspiração e aplicação no projeto de explicar o mundo físico iniciado por Newton.

Neste livro de Cálculo Diferencial e Integral II, destinado a alunos que já tiveram os primeiros contatos com a conceituação de Leibniz e as aplicações decorrentes dos estudos de Newton ao cursarem o Cálculo Diferencial e Integral I, daremos continuidade aos estudos de derivação de novas funções, como as funções exponenciais e logarítmicas como também as funções trigonométricas.

Neste texto daremos muita ênfase ao estudo da integração, fortalecendo a sua conceituação, apresentando novas e variadas formas de aplicação como também novas técnicas de resolução de integrais.

O autor

Capítulo 1

Aplicações da Integral Definida

Objetivos

- Estudar aplicações da integral definida
- Calcular área entre duas curvas
- Determinar volume de sólidos
- Calcular comprimento de arcos de curvas.

1. Apresentação

Neste primeiro capítulo, dando continuidade ao que estudamos no Cálculo Diferencial e Integral I, estudaremos mais algumas aplicações da integral definida, quando trabalharemos no cálculo de área entre duas curvas, veremos três métodos de cálculo de volumes de sólidos, e encontraremos uma integral que nos permite determinar o comprimento do arco de uma curva plana.

2. Área entre duas curvas

A integral definida de uma função contínua em um intervalo fechado, foi definida no Cálculo I, como a área sob uma curva. Então já sabemos que se f(x) é uma função contínua em um intervalo fechado [a, b], e se f(x) $> 0 \ \forall \ x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área da região do plano limitada pelo eixo x, a curva y = f(x) e as retas x = a e x = b, que denominamos de área sob a curva f(x) no intervalo [a, b].

Quando a função for f(x) $< 0 \ \forall \ x \in [a, b]$, então a área sob a curva será dada por $A = -\int_a^b f(x)dx$, pois o valor da integral é negativo, para todo x no intervalo.

Veja no gráfico as duas situações.

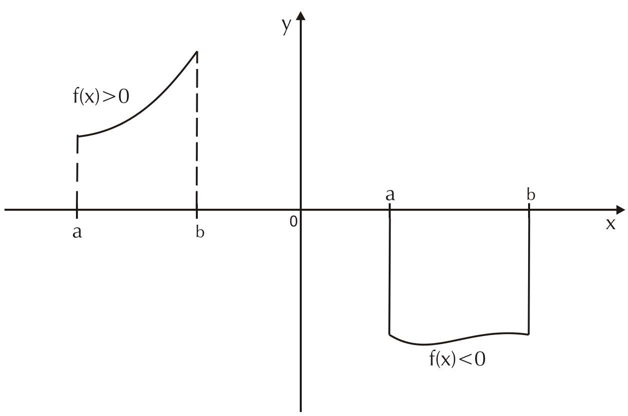

Figura 1 – Área sob uma curva, para f(x) > 0 e f(x) < 0.

Lembre-se que o Teorema Fundamental do Cálculo estudado no Cálculo I diz que : Se f(x) é uma função contínua em um intervalo fechado [a, b] , então

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \mid_a^b = F(b) - F(a)$, onde F(x) é a primitiva da f(x) .

Agora estudaremos a área entre duas curvas, que é a área da região do plano delimitada por duas curvas e duas retas. Para isso, vamos definir duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo fechado [a, b], de modo que $g(x) > f(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$. A área entre essas duas curvas é a área da região limitada acima pela curva g(x), abaixo pela f(x) e lateralmente pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Na figura, temos uma situação onde $g(x) > f(x) > 0$, onde a área entre f e g pode ser vista como a área sob a g(x) menos a área sob a f(x).

$$\text{Assim, } A = A_g - A_f = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

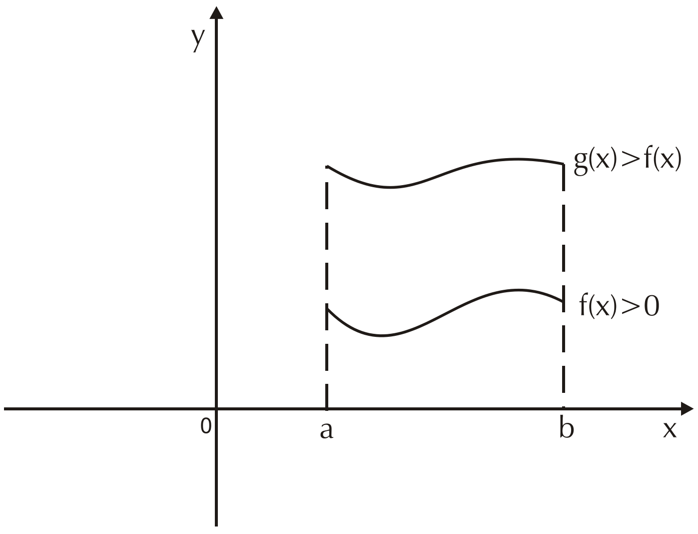

Figura 2 – Área entre duas curvas, para g(x) > f(x) > 0

Agora vejamos outras situações que podem ocorrer, mas sempre considerando-se que $g(x) > f(x)$.

A função g(x) está acima do eixo x e a f(x) está abaixo, $\forall\ x \in [a, b]$, ou seja, $g(x) > 0 > f(x)$.

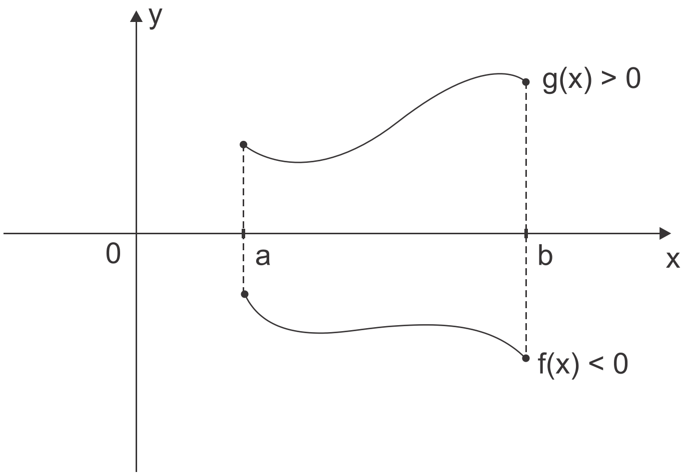

Figura 3 – Área entre duas curvas, para g(x) > 0 > f(x).

Pelo fato de f(x) estar abaixo do eixo x, temos que sua integral será negativa, e na figura observamos que a área entre a f e a g será $A = A_g + A_f$, portanto,

$$A = \int_a^b g(x)dx + [- \int_a^b f(x)dx] = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

2. As duas funções se encontram abaixo do eixo x, ou seja $0 > g(x) > f(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$.

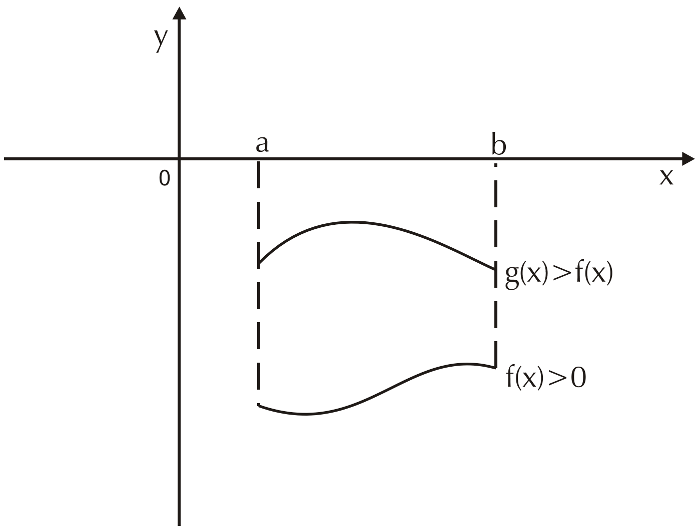

Figura 4 – Área entre duas curvas, para 0 > g(x) > f(x).

Na figura, vemos que a área entre a f e a g é dada pela área sob a f(x) menos a área sob a g(x) , de modo que :

$$A = A_f - A_g = [-\int_a^b f(x)\,dx] - [-\int_a^b g(x)\,dx] = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Pelos três casos analisados, verificamos que não importa a posição relativa do gráfico das duas funções com relação aos eixos coordenados. Para se determinar a área entre duas curvas é necessário apenas que se identifique o intervalo de definição e a posição de uma função com relação à outra, que, em geral , não é uma tarefa fácil, uma vez que teríamos de construir os gráficoa de f(x) e g(x) e observar a posição de uma com relação à outra, ou provar algebricamente que uma função é maior que a outra no intervalo.

Quando o gráfico de duas funções f(x) e g(x) se interceptam em dois ou mais pontos, elas delimitam uma região fechada entre dois pontos de interseção consecutivos e se esses pontos têm abscissas $x = a$ b $x = b$, e $g(x) > f(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$, então a área dessa região será $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$

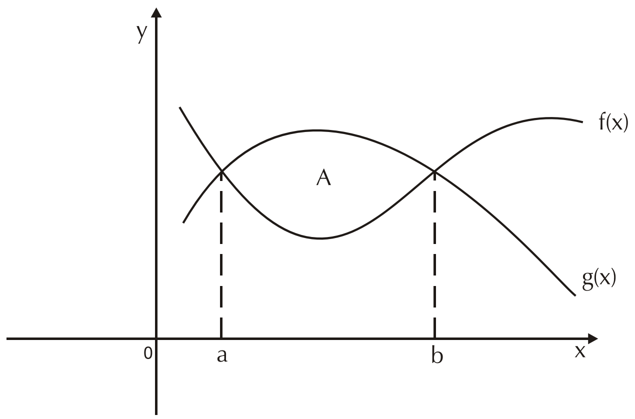

Figura 5 – Área delimitada por dois pontos consecutivos de interseção.

Uma outra situação que devemos admitir, e temos que observar quando determinamos a área entre duas curvas em um intervalo [a, b], é a possibilidade da existência de um ou mais pontos de interseção das duas curvas no interior do intervalo [a, b]. Nesse caso, devemos determinar as abscissas desses pontos de interseção e calcular a área por partes.

Suponhamos o caso em que as duas curvas f(x) e g(x) se interceptem em um ponto de abscissa $x = c \in (a, b)$, de maneira que $g(x) > f(x)$, $\forall\ x \in [a, c)$ e $f(x) > g(x)$, $\forall\ x \in (c, b]$.

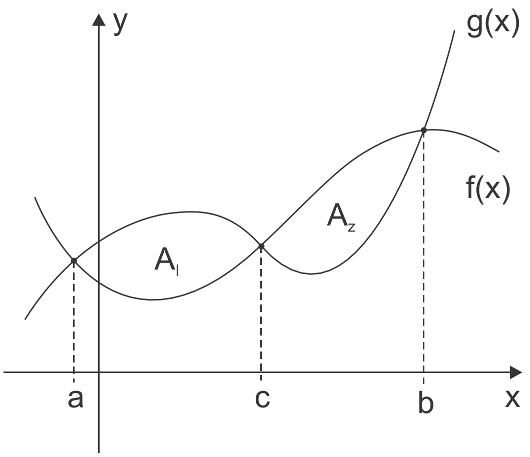

Figura 6 - Área entre f(x) e g(x) com um ponto de interseção no interior do intervalo [a, b].

A área entre as duas curvas y = f(x) e g(x) desde x = a até x = b será a soma de duas áreas, onde A_1 é a área de a até c, e A_2 é a área de c até b.

$A = A_1 + A_2 = \int_a^c [g(x) - f(x)\,]dx + \int_c^b [f(x) - g(x)\,]dx$.

Exemplo 1:

Encontre a área entre as curvas $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = x + 1$ de $x = 0$ a $x = 2$.

Solução:

Primeiro observe que no intervalo [0, 2], as duas funções não se interceptam. Fazendo $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 3 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$.

Essa equação do segundo grau tem $\Delta < 0$, logo não tem raízes reais, portanto as duas funções não se igualam para nenhum x real.

Tomando um valor de $x \in (0, 2)$, por **Exemplo** $x = 1$, verifica-se por substituição nas duas funções que $f(x) > g(x)$.

Daí concluímos que a área desejada é $A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx \quad \Rightarrow$

$$A = \int_0^2 [x^2 + 3 - (x+1)\,]dx = \int_0^2 [x^2 + 3 - x - 1]\ dx = \int_0^2 [x^2 - x + 2]\ dx =$$

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2.2 - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 2.0\right) = \frac{8}{3} - 2 + 4 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

Exemplo 2:

Determine a área da região do plano limitada pela reta $y = x + 2$ e pela parábola $f(x) = x^2 - x - 1$.

Solução:

Para que exista uma região limitada pela reta e a parábola, é necessário que elas se interceptem em dois pontos, e para verificar se isso é verdade façamos $f(x) = y \Rightarrow x^2 - x - 1 = x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Essa equação, tem duas soluções $x = -1$ e $x = 3$, que serão os limites de integração.

Resta saber qual das duas funções é maior dentro desse intervalo $[-1, 3]$, e para isso você pode observar que a parábola tendo a concavidade voltada para cima, a reta deve estar acima dela para corta-la em dois pontos. Então, $y > f(x)$.

A área será portanto $A = \int_{-1}^{3} [y - f(x)]\,dx = \int_{-1}^{3} [x + 2 - (x^2 - x - 1)]\,dx =$

$\int_{-1}^{3} [x + 2 - x^2 + x + 1]\,dx = \int_{-1}^{3} [3 + 2x - x^2]\,dx = \left(3x + 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3} =$

$3.3 + 3^2 - \frac{3^3}{3} - \left[3.(-1) + (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right] = 9 + 9 - 9 + 3 - 1$

$- \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$.

Sempre que uma parábola de concavidade para cima for cortada por uma reta, a reta estará acima da parábola no interior do intervalo de interseção, e se a concavidade for para baixo a reta estará abaixo da parábola.

Exemplo 3:

Encontre a área da região limitada pelas curvas $f(x) = \text{sen}\, x$ $g(x) = \cos x$, entre dois pontos de interseção consecutivos.

Solução:

Primeiramente devemos verificar onde as duas curvas se interceptam, e para isso fazemos $f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen}\, x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen} x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg}\, x = 1$.

Dois pontos consecutivos onde $\text{tg}\, x = 1$, podem ser em $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$, que serão os limites de integração.

Agora precisamos saber qual das duas funções é maior dentro desse intervalo, e para isso podemos tomar como valor de teste $x = \pi$, que pertence ao intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Como $\operatorname{sen}\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$, então sen x > cos x em todos os pontos desse intervalo.

Portanto, a área deseja é $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [senx - \cos x]dx =$

$[-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\cos\frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} - [-\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}] =$

$= -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

3. Volume de sólidos

A integral definida foi deduzida como a área de uma região do plano sob uma curva, usando-se uma aproximação dessa área a partir de uma soma de áreas de retângulos. Agora vamos estudar como calcular o volume de um sólido usando a integral.

Primeiramente trabalharemos dois casos particulares de volume de sólidos de revolução, que são sólidos obtidos pela rotação de uma região plana em torno de um eixo fixo, em seguida faremos a forma geral.

3.1 Método do disco circular

Seja $y = f(x)$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$, tal que $f(x) > 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Se a área sob f(x) for rotacionada em torno do eixo x, ela gera um sólido compacto cujo volume será V, e o eixo x é chamado eixo de revolução.

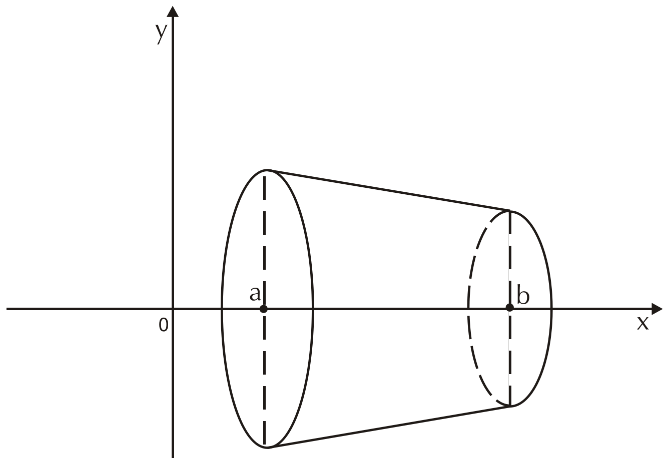

Figura 7 – Volume de um sólido de revolução.

Para determinar o volume desse sólido, vamos tomar uma partição do intervalo [a, b] em n partes, de modo que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Da mesma forma como foi feito no cálculo da área sob uma curva, vamos tomar retângulos tendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ como base e $f(x_i)$ como altura, onde $i = 1, 2, \ldots, n$. Veja que cada um dos retângulos, quando rotacionado em torno do eixo, gera um disco circular, que é uma pequena parte do sólido, isto é, um elemento de partição do sólido total, e se ΔV_i é o volume do i-ésimo disco então $\Delta V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x_i$.

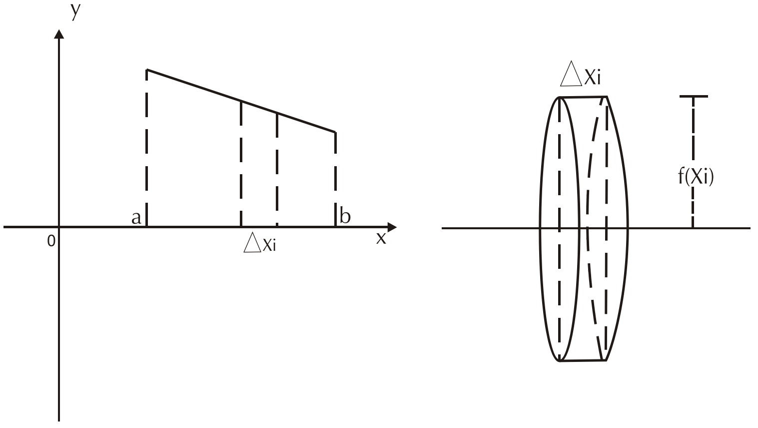

Figura 8 – Método do disco circular.

O volume do sólido pode ser expresso por $V \cong \sum_{i=1}^{n} \pi . f(x_i)^2 . \Delta x_i$.

Se fizermos o número n de elementos da partição tender para $+\infty$,

então $\Delta x_i \rightarrow 0$, e o volume será $V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi . f(x_i)^2 . \Delta x_i =$

$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi . f(x_i)^2 . \Delta x_i$ ou $V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

A área da secção de corte nesse caso é de um círculo de raio igual a f(x) , para todo x no intervalo.

Exemplo:

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-x, da região limitada pela função $f(x) = x^2$, o eixo-x e a reta $x = 2$.

Solução:

Veja no gráfico que, como a função passa pela origem, então a área que será rotacionada é a área sob a função f(x), desde $x = 0$, até $x = 2$.

Então, V = $\pi . \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi . [\frac{x^5}{5}]_0^2 =$

$\pi .(\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}) = \frac{32\pi}{5}$.

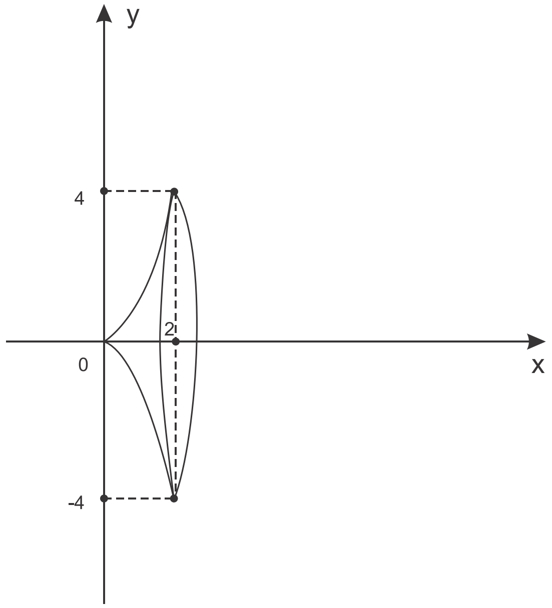

Figura 9 – Volume gerado pela rotação de $f(x) = x^2$, dx x = 0 a x = 2.

3.2 Método do anel circular

Esse método do anel é uma conseqüência direta do método anterior, com a diferença que agora rotacionaremos uma área entre duas curvas para gerar um sólido oco. Sejam f(x) e g(x) duas funções contínuas em um intervalo fechado [a, b], com a condição de $g(x) > f(x)$, $\forall$ $x \in [a, b]$. O volume do sólido gerado quando rotacionamos a área entre as duas curvas é igual ao volume gerado pela rotação da área sob g(x) menos o volume gerado pela rotação da área sob f(x), logo:

$$V = \pi . \int_a^b g(x)^2 dx - \pi . \int_a^b f(x)^2 \, dx = \pi . \int_a^b [g(x)^2 - f(x)^2] \, dx.$$

Observe que quando impusemos a condição de $g(x) > f(x)$, quisemos dizer que o volume V é igual ao volume gerado pela área sob a função mais distante do eixo de rotação, menos o volume gerado pela área sob a função que está mais próxima, e é isso o que ocorre, mesmo quando essa condição não é satisfeita.

Observe que a área da secção de corte nesse caso é de uma coroa circular cujos raios são $R = g(x)$ e $r = f(x)$, por isso, a área é $\pi(R^2 - r^2) = \pi(g(x)^2 - f(x)^2)$.

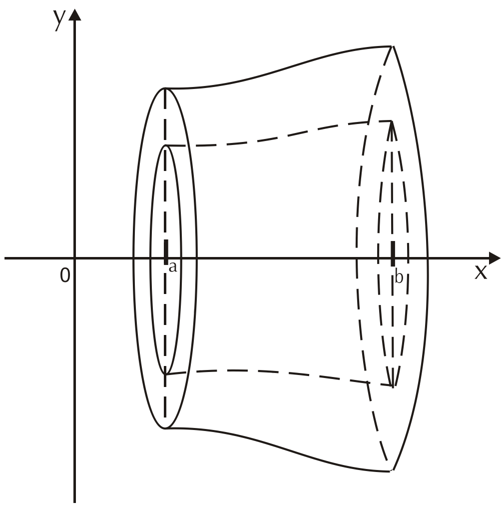

Figura 10 – Volume pelo método do anel circular.

Exemplo 1: Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da área entre as curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$ em torno do eixo x.

Solução:

As duas curvas se interceptam quando $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Como nesse intervalo a reta $y = x$ está acima da parábola $y = x^2$ e consequentemente mais distante do eixo, então :

$$V = \pi \cdot \int_0^1 [g(x)^2 - f(x)^2]dx = \pi \cdot \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2]\,dx =$$

$$\pi \cdot \int_0^1 [x^2 - x^4]\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \cdot \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5}\right] =$$

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] \cdot \pi = \frac{2\pi}{15}.$$

Exemplo 2:

Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da área compreendida pelas curvas $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x^2$.

Solução:

Fazendo f(x) = g(x) $\Rightarrow$ $x^3 = -x^2$ $\Rightarrow$ $x^3 + x^2 = 0$ $\Rightarrow$ $x^2(x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Nesse intervalo as duas funções são negativas, ambas estão portanto abaixo do eixo x, mas $-x^2 < x^3$, logo $-x^2$ está mais afastada do eixo de rotação.

Veja que, f($-\frac{1}{2}$) = $-\frac{1}{8}$ e g($-\frac{1}{2}$) = $1\frac{1}{4}$), portanto:

$$V = \pi \,.\, \int_{-1}^{0} [(-x^2)^2 - (x^3)^2]dx = \pi \,.\, \int_{-1}^{0} [x^4 - x^6]\,dx =$$

$$\pi \,.\, [\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}]_{-1}^{0} \Rightarrow$$

$$V = \pi \,.\, [0 - \frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^7}{7}] = \pi \,.\, [\frac{1}{5} - \frac{1}{7}] = \frac{2\pi}{35}.$$

3.3 Método das secções planas

Os dois métodos para cálculo de volumes estudados anteriormente, são usados quando temos sólidos obtidos pela rotação em torno de um eixo fixo que é o eixo - x.

Nos dois casos podemos observar que, se dermos um corte com um plano perpendicular ao eixo em ambos os sólidos, as secções de corte são figuras planas, onde:

No método do disco a secção é um círculo de raio f(x) , de modo que para todo x entre a e b a área da secção é dada por $A(x) = \pi \,.\, f(x)^2$.

No método do anel a secção de corte é uma coroa circular, cuja área para todo x em [a, b] é dada por $A(x) = \pi \,.\, g(x)^2 - \pi \,.\, f(x)^2 = \pi \,.\, [g(x)^2 - f(x)^2]$.

Veja que em ambos os casos, as áreas são os integrandos que permitem encontrar o volume dos sólidos. O cálculo de volumes por integração pode agora ser expandido para outros sólidos com características semelhantes, que definimos em seguida.

Seja S um sólido compreendido entre dois planos perpendiculares ao eixo x, em x = a e x = b. Se a área de cada secção plana de S perpendicular ao eixo x pode ser expressa como uma função contínua A(x), $\forall$ x $\in$ [a, b], então o volume desse sólido será $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

Exemplo:

Use o método das secções planas paralelas para mostrar que o volume de uma pirâmide com base quadrada de lado a e altura h é $V = \frac{1}{3}.a^2.h$.

Solução:

Primeiro, tomemos a figura dessa pirâmide com sua altura sobre o eixo x, tendo uma extremidade em x = 0 e outra em x = h. Assim todo corte com um plano perpendicular ao eixo terá um quadrado como secção de corte.

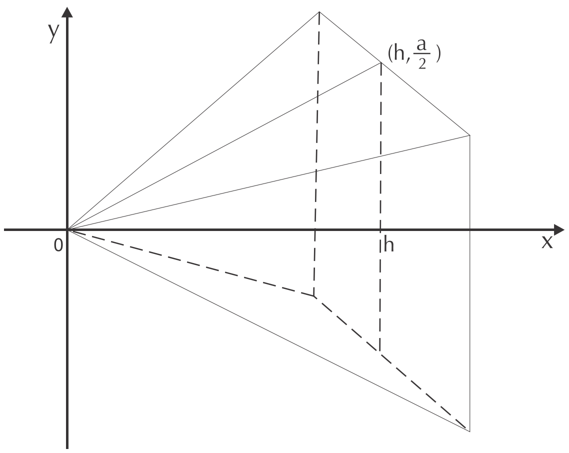

Figura 11 – Método das seções planas paralelas. (volume da pirâmide).

A interseção da face superior da pirâmide com o plano xy é um segmento cuja reta suporte passa pela origem e pelo ponto $(h, \frac{a}{2})$, e tem coeficiente angular $m = \frac{\frac{a}{2}}{h}$ ou $m = \frac{a}{2h}$.

Como essa reta suporte passa pela origem, sua equação é

$$y = m.x \Rightarrow y = \frac{a}{2h}.x.$$

Para todo x, a secção é um quadrado cujo lado é 2y, portanto

$$A(x) = (2y)^2 \Rightarrow A(x) = (2.\frac{a}{2h}.x)^2 \Rightarrow$$

$$A(x) = 4.\frac{a^2}{4h^2}.x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{a^2}{h^2}.x^2.$$

Se V = $\int_a^b A(x)dx$, então V = $\int_0^h \frac{a^2}{h^2}.x^2\,dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h \Rightarrow$

V = $\frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \Rightarrow$ V = $\frac{1}{3}.a^2.h.$

O volume da pirâmide é igual a um terço da área da base vezes a altura.

4. Comprimento de Arco

Outra aplicação para a integral definida, que estudaremos agora, é uma forma de calcular o comprimento do arco de uma curva plana. Para isso, tomemos uma função y = f(x) definida e contínua em um intervalo fechado [a, b]. Se tomarmos uma partição de [a, b] de modo que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, então os elementos dessa partição determinam sobre a curva uma seqüência de pontos, $P_0(x_0, f(x_0))$;

$P_1(x_1, f(x_1))$; .. ; $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$; $P_i(x_i, f(x_i))$; .. ; $P_n(x_n, f(x_n))$, conforme a figura.

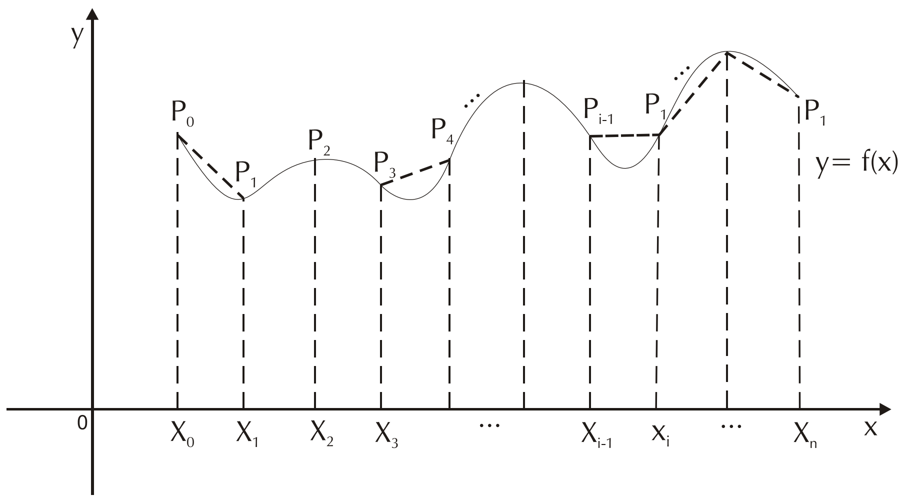

Figura 12 – Comprimento de um arco de curva.

O comprimento da curva pode ser aproximado pelo somatório das medidas dos n segmentos de reta que ligam essa seqüência de pontos, e para isso basta que saibamos expressar de uma forma genérica o comprimento desses segmentos.

Tomemos então dois pontos consecutivos dessa seqüência, que representamos por $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $P_i(x_i, f(x_i))$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos que :

$$\overline{P_{I-1}P_I} = d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^{\ 2}}$$

Como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, então $\overline{P_{I-1}P_I} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^{\ 2}}$

$$\Rightarrow \overline{P_{I-1}P_I} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^{\ 2}} \ .$$

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^{\ 2}}{(\Delta x_i)^2}} . \Delta x_i$$

$$\overline{P_{I-1}P_I} = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1})^{\ 2}}{(\Delta x_i)^2}} \ .$$

$$\Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2} \ . \ \Delta x_i$$

O Teorema do Valor Médio para derivadas diz que: Se f(x) é uma função contínua e diferenciável em um intervalo fechado [a, b], então existe um c no interior desse intervalo tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Com base nesse teorema, podemos afirmar que para todo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe um $\overline{x_i}$ tal que $f'(\overline{x_i}) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$, e dessa forma concluímos que :

$$\overline{P_{I-1}P_I} = \sqrt{1 + f(\overline{x_i})^2} \ . \ \Delta x_i \quad , \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Como cada segmento tem essa medida, então o comprimento do arco da curva desde A(a, f(a)) até B(b, f(b)) é dado por:

$$L \cong \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f(\overline{x_i})^2} \ . \ \Delta x_i \ .$$

Fazendo o número n de elementos da partição tender para $+\infty$, teremos Δx_i tendendo a zero, portanto:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\overline{x_i})^2} . \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f(\overline{x_i})^2} . \Delta x_i \Rightarrow$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f(x)^2} \ dx.$$

Exemplo:

Calcule o comprimento da curva $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ no intervalo $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

Se $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, então $f'(x) = \frac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.\sqrt{x} \quad \Rightarrow$

$f'(x)^2 = \frac{9}{4}.x \quad \Rightarrow$

$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{9}{4}.x = \frac{4+9x}{4}$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{4+9x}{4}}\,dx = \frac{1}{2}.\int_0^2 \sqrt{4+9x}\,dx .$$

Fazendo $u = 4 + 9x$, temos que $du = 9dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{9}$, de modo que

$$L = \frac{1}{2}.\int_4^{22} \sqrt{u}\,\frac{du}{9} = \frac{1}{18}.\int_4^{22} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{18}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_4^{2} = \frac{1}{27}.(22^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

Portanto, $L = \frac{1}{27}.(22\sqrt{22} - 8)$.

Síntese do capítulo

Foram estudadas nesta unidade, algumas aplicações da integral definida, onde estabelecemos integrais que nos permitem calcular:

1. Área entre duas curvas: $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

2. Volume de sólidos pelo método do disco: $V = \pi . \int_a^b f(x)^2\,dx$

3. Volume de sólidos pelo método do anel: $V = \pi . \int_a^b [g(x)^2 - f(x)^2]\,dx$

4. Volume pelo método das secções planas: $V = \int_a^b A(x)\,dx$

5. Comprimento de arco: $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Atividades de avaliação

1. Encontre a medida da área da região :

a) limitada pela parábola $y = x^2 - 4x$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 2$.

b) limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

c) limitada pela parábola $y = -x^2$ e a reta $y = -4$.

d) limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x^2 = 18 - y$.

e) limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x^4$.

f) limitada por $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

g) limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

2. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$ é rotacionada em torno do eixo x.

3. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2$, o eixo y e a reta $y = 9$.

4. A área da região limitada pela curva $y^2 = x^3$, a reta $y = 8$ e o eixo y é rotacionada em torno do eixo x . Determine o volume do sólido obtido.

5. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região limitada pelas:

a) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

b) $y = x^2$ e $y = x^3$

c) $y = x^2$ e $y = x$

d) $y = x^3$ e $y = x$.

6. Um tanque esférico cujo raio interno mede 5 m contém gasolina. Determine o volume de gasolina contida no tanque, sabendo que o nível do combustível está a 2 m do fundo.

7. Através de um sólido de forma esférica com raio de 6 cm é feito um buraco com raio de 2 cm e o eixo do buraco é um diâmetro da esfera. Encontre o volume da parte restante do sólido.

8. Encontre o comprimento do arco da curva $9y^2 = 4x^3$, desde a origem até o ponto de abscissa 2 .

9. Determine o comprimento do arco da curva $y = \dfrac{x^4 + 2x^{-2}}{8}$ do ponto de abscissa 1 ao ponto de abscissa 2.

10. Encontre o comprimento total da hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Referências

ANTON, Howard; **Cálculo, um novo Horizonte**; Vol I; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha; 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

ÁVILA, Geraldo; **Cálculo;** Vol. I; 6ª Ed.; LTC; 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz; **Um Curso de Cálculo;** Vol. I; 5ª Ed.;

LTC. 2001.

STEWART, James; **Cálculo;** Vol. I; São Paulo; Pioneira; 2002.

THOMAS, George; **Cálculo,** Vol. I; Pearson; São Paulo; 2003.

LEITHOLD , Louis; **O Cálculo com Geometria Analítica;** Vol. I; 3ª Ed.; Harbra; São Paulo. 1995.

Capítulo 2

Funções Exponenciais e Funções Logaritmicas

Objetivos

- Definir as funções logaritmo e exponencial
- Estudar a derivada do logaritmo e da exponencial
- Calcular integrais envolvendo o logaritmo e a exponencial
- Usar a exponencial para estudar as leis de crescimento e decaimento.

1. Apresentação

Nessa unidade iremos definir a função logaritmo natural como a área sob uma curva, observar as suas propriedades e estudar a sua derivada e seu gráfico. Em seguida, definiremos a exponencial natural como a função inversa do logaritmo, analisaremos suas propriedades, estudaremos sua derivada e integral .

Concluiremos essa unidade, estudando as funções logaritmo e exponencial em uma base qualquer $0 < a \neq 1$.

2. Função Logaritmo Natural

Ao estudarmos a integração como uma operação inversa da derivação, observamos uma propriedade que nos permitiu derivar uma função da forma $f(x) = x^n$, onde foi dito que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, para todo n real diferente de -1.

Para se calcular a integral da função $g(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, é necessário que encontremos uma função cuja derivada seja igual a $g(x) = \frac{1}{x}$.

Essa função pode ser definida como sendo $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, que é uma função contínua e diferenciável para todo x real positivo. A função assim definida pode ser interpretada geometricamente como a área sob a curva $g(t) = \frac{1}{t}$ em um intervalo fechado $[1, x]$, e que satisfaz às seguintes propriedades:

1. Para $x = 1$, temos que $f(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$, logo f(x) corta o eixo x no ponto $(0, 1)$.

2. Para todo $x > 1$, temos $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ que é a área sob a curva $\frac{1}{t}$ de $t = 1$ até $t = x$, logo $f(x) > 0$ e cresce à medida que x tender para $+\infty$.

Para $0 < x < 1$, $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$, onde $\int_x^1 \frac{1}{t}dt > 0$ representa a área sob a curva $\frac{1}{t}$ desde $t = x$ até $t = 1$. Assim,

$f(x) < 0$ e tende para $-\infty$, à medida que x tender para zero, pois o valor da área dada por $\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ tende para $+\infty$.

Definimos a função logaritmo natural como $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \ln x$, onde $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

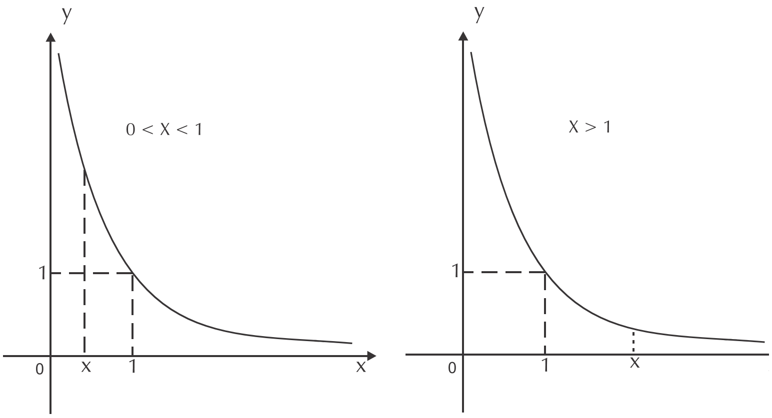

Figura 13 - Para $0 < x < \pi \square = \int_x^1 f(t)\,dt$ e $X > l \Rightarrow A = \int_1^x f(t)\,dt$

2.1 Derivada

A função $f(x) = \ln x$ da maneira como foi definida, para todo x real positivo, é tal que $f'(x) = D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) = \frac{1}{x}$.

Se $u(x)$ é uma função diferenciável e extritamente positiva para todo x do seu domínio, então a composta $f(u(x)) = \ln(u(x))$ é diferenciável, e sua derivada de acordo com a regra da cadeia é $f'(x) = \frac{1}{u(x)}.u'(x)$ ou $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

É importante observar que, na composição de f(x) = ln (u(x)), u(x) > 0 , pois o domínio da função logaritmo é $R_+ - \{0\}$.

Exemplo:

Encontre a derivada da função $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 4)$.

Solução:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+5x+4}.(2x+5) \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}.$$

2.2 Propriedades

Mostraremos agora que a função logaritmo natural definida dessa forma, satisfaz a todas as propriedades do logaritmo que conhecemos na Álgebra.

1. ln 1 = 0

De fato, $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$, pois o limite superior da integral é igual ao limite inferior

2. ln (a.b) = ln a + ln b

Sabemos que a derivada da função $f(x) = \ln x$ é $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Tomemos agora a função $g(x) = \ln(ax)$. A sua derivada é $g'(x) = \frac{1}{ax}.a \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$. Se $g'(x) = f'(x)$, então, por integração, $g(x) = f(x) + k \Rightarrow \ln(ax) = \ln x + k$. como o elemento 1 pertence ao domínio das duas funções, então $\ln(a.1) = \ln 1 + k \Rightarrow k = \ln a$.

Portanto, temos que $\ln(a.x) = \ln a + \ln x$, em particular, se $x = b$, temos que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, para todo a e b positivos.

3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Para verificar essa propriedade, podemos usar a propriedade anterior fazendo $\frac{a}{b}.b = a \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}.b\right) = \ln a \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b = \ln a \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

4. Se a é um número positivo qualquer e r é um número natural, então $\ln a^r = r.\ln a$.

Pela terceira propriedade, podemos verificar que

$\ln a^r = \ln(a.\ a.\ a.\ ...a) = \ln a + \ln a + \ ...\ \ln a = r.\ \ln a.$

2.3 Gráfico

Para traçar o gráfico da função $f(x) = \ln x$, vamos observar que :

1. O domínio dessa função é R_+^*, logo ela está definida apenas para valores de x extritamente positivo.

2. Como $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, então f(x) é crescente para todo x de seu domínio.

3. Como $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, então f(x) tem concavidade voltada

para baixo, para todo x do domínio.

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, logo f(x) tem apenas uma raiz em x = 1, cortando o eixo x no ponto (1 , 0) .

5. O valor de f(x) tende para $+\infty$ quando x tender para $+\infty$, e f(x) tende para $-\infty$, quando x tender para zero.

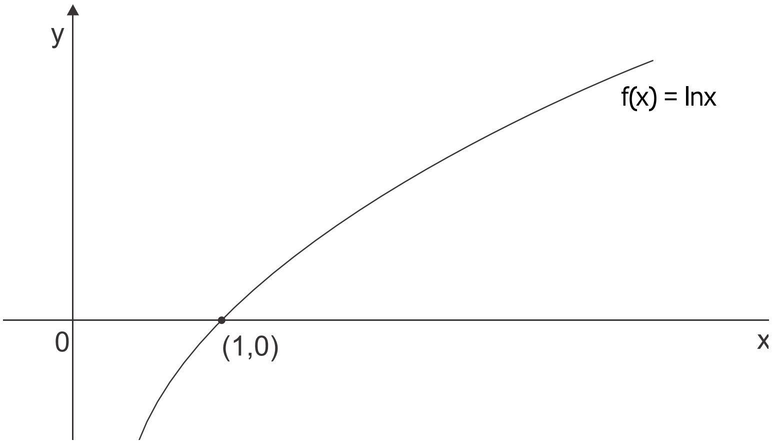

Figura 14 - Gráfica da função Logaritmo Natural

2.4 Diferenciação Logarítmica

Devido às propriedades, a função logarítmica pode ser usada para auxiliar no cálculo da derivada de outras funções, cuja derivação apresenta dificuldades.

Tomemos por **exemplo** a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Para aplicar a função logarítmica a ambos os membros , devemos fazer $|y| = \left|\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+1}}\right| \Rightarrow \ln|y| = \ln\dfrac{|\sqrt{x+2}|}{|\sqrt[3]{x+1}|} \Rightarrow$

$$\ln|y| = \ln|x+2|^{\frac{1}{2}} - \ln|x+1|^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}.\ln|x+2| - \frac{1}{3}.\ln|x+3|.$$

Derivando com relação a x, temos :

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{3(x+1)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+1}}.\left[\frac{3x+3-2x-4}{6(x+2)(x+1)}\right] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+1}}.\frac{x-1}{6(x+2)(x+1)}.$$

Vejamos um outro **exemplo** de aplicação da diferenciação logarítmica.

Para derivar a função $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, façamos $|y| = |x^{\sqrt{x}}| \Rightarrow$

$\ln|y| = \ln|x|^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = \sqrt{x}.\ln|x| \Rightarrow \dfrac{1}{y}.\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\ln x + \sqrt{x}.\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y.\left[\dfrac{\ln|x|}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}}.\left[\dfrac{\ln|x|+2}{2\sqrt{x}}\right].$

2.5 O número *e*

Vimos que a função $f(x) = \ln x$, definida em R_+^* , é estritamente crescente, cortando o eixo x no ponto (1 , 0) e tendo R como conjunto imagem. Assim, podemos afirmar que existe um único $x \in R_+^*$, tal que $\ln x = 1$. O valor do x que satisfaz a essa condição é aproximadamente 2,7182818 (com sete casas decimais) e ele é representado pela letra **e**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler.

Portanto, $f(e) = \ln e = 1$.

O número **e** pode ser obtido como $\lim\limits_{n \to 0} (1+n)^{1/n} = \lim\limits_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$.

3. Função Exponencial Natural

Como a função logaritmo natural é crescente em todo o seu domínio, então ela admite uma inversa, que também é uma função crescente. A função exponencial natural é essa inversa, de modo que seu domínio é R, conjunto imagem do logaritmo natural , enquanto que seu conjunto imagem é R_+^* , por ser o domínio da função logarítmica.

A função exponencial natural tem o número **e** como base, e é assim definida :

$$g : R \to R_+^*$$
$$x \mapsto g(x) = e^x \text{, de modo que } y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x.$$

De outra forma, podemos dizer que : $\ln(e^x) = x$ ou $e^{\ln x} = x$.

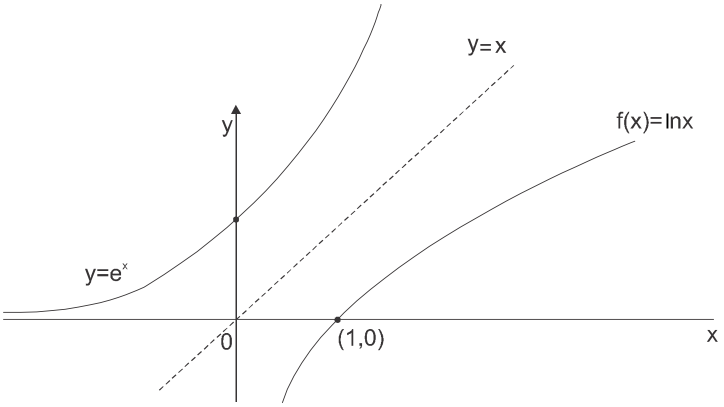

Figura 15 - Gráficos de $y = e^x$ e $f(x) = \ln x$ em um mesmo sistema.

3.1 Derivada

Para determinar a derivada da função $g(x) = e^x$ tomemos a igualdade $\ln(e^x) = x$, e derivemos com relação a x .

Pela regra da cadeia, temos que $\frac{1}{e^x} . D_x(e^x) = 1 \Rightarrow D_x(e^x) = e^x$.

Portanto, a derivada de e^x é a própria e^x.

Para uma função composta $f(x) = e^{u(x)}$, onde $u(x)$ é uma função diferenciável qualquer, temos que $f'(x) = e^{u(x)} . u'(x)$.

Sendo $e \cong 2{,}7182 > 0$, então $e^x > 0$, o que nos permite deduzir que a função $g(x) = e^x$ tem seu gráfico localizado acima do eixo x.

3.2 Propriedades

1. $e^0 = 1$

Se $0 = \ln 1$, então $e^0 = e^{\ln 1} \Rightarrow e^0 = 1$, pois $e^{\ln 1} = 1$.

2. Se x e y são números reais quaisquer, então $e^x . e^y = e^{x+y}$

Suponha que $e^x = a > 0$ e $e^y = b > 0$. Isso implica dizer que $\ln e^x = \ln a$ e $\ln e^y = \ln b \Rightarrow x = \ln a$ e $y = \ln b \Rightarrow$ $x+y = \ln a + \ln b \Rightarrow x + y = \ln(a.b) \Rightarrow e^{x+y} = e^{\ln(a.b)} \Rightarrow$ $e^{x+y} = a.b \Rightarrow e^{x+y} = e^x . e^y$.

3. Se x e y são números reais quaisquer, então $e^x : e^y = e^{x-y}$

A verificação dessa propriedade é semelhante á verificação da propriedade anterior.

A diferença é que no lugar de tomarmos soma, tomamos $x - y = \ln a - \ln b \Rightarrow x - y = \ln \dfrac{a}{b} \Rightarrow e^{x-y} = e^{\ln\frac{a}{b}} \Rightarrow$ $e^{x-y} = a : b \Rightarrow e^{x-y} = e^x : e^y$.

4. $(e^x)^y = e^{x.y}$

Se $x = e^{\ln x}$, então $(e^x)^y = e^{\ln(e^x)^y} \Rightarrow (e^x)^y = e^{y.\ln e^x}$ $\Rightarrow (e^x)^y = e^{x.y.\ln e} \Rightarrow (e^x)^y = e^{x.y}$, pois $\ln e = 1$.

Se a é um número real positivo e diferente de 1, então $a^x = e^{x.\ln a}$.

É fácil de se verificar que, se $a^x = e^{\ln a^x}$ então $a^x = e^{x.\ln a}$.

4. A Função Exponencial na base a > 0

Na propriedade 5 da função $f(x) = e^x$, verificamos que $a^x = e^{x.\ln a}$, para todo 0 < a 1. Assim, para todo a com essa condição, podemos definir uma função

$f: R \to R$

$x \mapsto f(x) = a^x$, onde $a^x = e^{x.\ln a}$, a que chamamos de função exponencial na base a .

Na verdade , como 0 < a 1, $f(x) = a^x$ define uma família de funções, pois para todo a temos uma função diferente , com as mesmas características.

Como exemplo, podemos citar $f(x) = 3^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ como funções que pertencem a essa família.

4.1 Derivada

Para se calcular a derivada de uma função pertencente a essa família $f(x) = a^x$, devemos apenas lembrar que $f(x) = a^x = e^{x.\ln a}$, o que pela regra da cadeia resulta em $f'(x) = D_x(a^x) = D_x(e^{x.\ln a}) =$ $e^{x.\ln a}.\ln a = a^x.\ln a$.

Consequentemente, se $f(x) = a^{u(x)}$, onde $u(x)$ é uma função diferenciável , temos que $f'(x) = a^{u(x)}.\ln a.\, u'(x)$.

Veja, como se calcula a derivada das funções:

a) $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x.\ln 2$

b) $f(x) = 5^{-x} \Rightarrow f'(x) = 5^{-x}.\ln 5.(-1) = -5^{-x}.\ln 5.$

c) $f(x) = 4^{x^2+5x} \Rightarrow f'(x) = 4^{x^2+5x}.\ln 4.(2x+5).$

No item (b) tomamos $f(x) = 5^{-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, o que pode ser generalizado sempre que se tenha $a = \frac{1}{b}$, escrevendo a função na forma $f(x) = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$.

Sobre a derivada da função exponencial , po demos ainda observar que :

Se $f(x) = a^x$ com a > 1 , então $f'(x) = a^x.\ln a > 0$, pois $a^x > 0$ e $\ln a > 0$.

Se $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$, então $f'(x) = a^x . \ln a < 0$, pois $a^x > 0$ e $\ln a < 0$.

4.2 Integração

Quando tratamos da função $f(x) = e^x$ falamos de sua derivada, mas não de sua integral . Agora que temos a família completa das funções exponenciais, podemos verificar que:

$$D_x(e^x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^x dx = e^x + k$$

$$D_x(a^x) = a^x . \ln a \quad \Rightarrow \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$$

Essas são as duas formas para se integrar funções exponenciais.

Exemplo:

Calcule:

a) $\int x.e^{x^2+4} dx$.

$u = x^2 + 4 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{du}{2}$.

Então $\int x.e^{x^2+4}dx = \int e^{x^2+4}.xdx = \int e^u.\dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}.\int e^u du =$
$\dfrac{1}{2}.e^u + k = \dfrac{1}{2}.e^{x^2+4} + k$

b) $\int \cos x.e^{5senx}dx$.

$u = 5 \text{ sen } x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 5 \cos x \Rightarrow du = 5 \cos x \, dx \Rightarrow$
$\cos x \, dx = \dfrac{du}{5}$

$$\int \cos x.e^{5senx}dx = \int .e^{5senx} \cos xdx = \int e^u.\frac{du}{5} = \frac{1}{5}.\int e^u du = \frac{1}{5}.e^u + k = \frac{e^{5senx}}{5} + k$$

c) $\int 6^{tgx}.\sec^2 xdx$.

$u = tg\, x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$

$$\int 6^{tgx}.\sec^2 xdx = \int 6^u du = \frac{6^u}{\ln 6} + k = \frac{6^{tgx}}{\ln 6} + k .$$

4.3 Gráfico

O gráfico de cada uma das funções que constituem a família das exponenciais tem forma semelhante, visto que todas as funções dessa família tem características comuns.

O gráfico de cada uma, será traçado com base na análise dessas características.

Tomemos a forma geral $f(x) = a^x$.

Se $a > 0$, então $a^x > 0$, $\forall\ x \in R$, logo, o gráfico de f(x) não corta o eixo x, estando totalmente acima do eixo x .

Como $a^0 = 1$, então, toda função exponencial passa pelo ponto $(0, 1)$.

Como $a^x > 0$, $\forall\ x \in R$, então não existe $x \in R$ tal que $f(x) = 0$, logo essa família de funções não possui raízes.

Se $f'(x) = a^x . \ln a$, então :

Para $a > 1$, temos $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f(x) é estritamente crescente.

Para $0 < a < 1$, temos $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ f(x) é estritamente decrescente.

$f''(x) = a^x (\ln a)^2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0, \ \forall\ x \in R \quad \Rightarrow \quad$ f(x) é sempre côncava para cima.

Quando x tender para $+\infty$, teremos a^x tendendo para $+\infty$, se $a > 1$; e tendendo para 0, se $0 < a < 1$.

Quando x tender para $-\infty$, teremos a^x tendendo para 0, se $a > 1$; e tendendo para $+\infty$, se $0 < a < 1$.

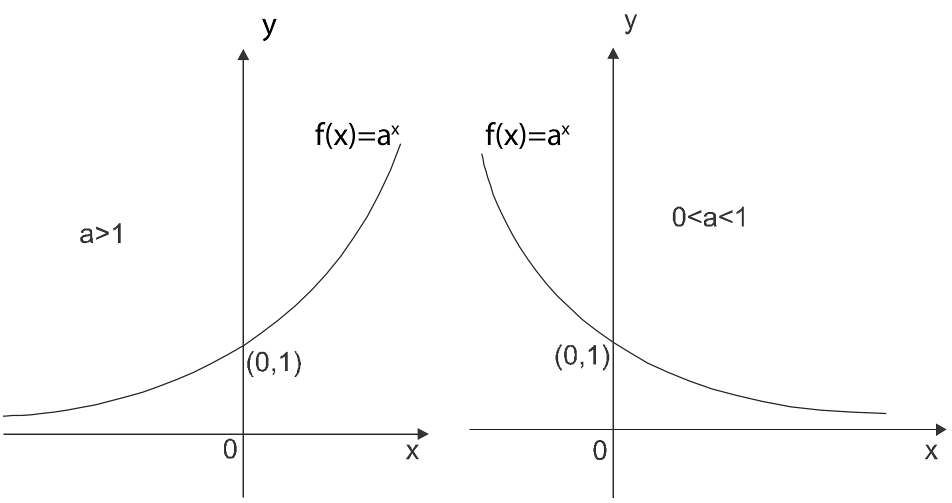

Figura 16 - Gráfico de $f(x) = a^x$, para a > t e para 0 < a < 1.

5. A Função Logaritmo na base a

A função logaritmo natural foi definida como a área sob uma curva, e em seguida definimos a função exponencial natural como sua função inversa. Com base na exponencial natural , verificamos que era possível definir uma função exponencial tendo como base o número real a, com a condição de $0 < a \neq 1$.

Como todas as funções da família $f(x) = a^x$ são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes no domínio R, então todas elas são inversíveis, ou seja, qualquer função da forma $f(x) = a^x$ admite uma inversa, cujo domínio é R_+^* , tendo R como conjunto imagem.

Assim, definimos a função logaritmo na base a, como $f: R_+^* \to R$

$x \to f(x) = \log_a$ de tal modo que $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Existe uma relação direta entre o logaritmo na base a e o logaritmo natural , pois se

$$y = \log_a x \quad \Rightarrow \quad x = a^y, \text{ então } \ln x = \ln a^y \quad \Rightarrow$$

$$y \cdot \ln a = \ln x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \Rightarrow \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

> A relação $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ é chamada de mudança de base, da base a para a base natural , e de forma mais geral , usa-se a relação $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ quando se deseja uma mudança da base a para uma outra base b .

A função logarítmica na base a tem as mesmas propriedades da função logaritmo natural , ou seja :

$\ln 1 = 0. \Rightarrow \log_a^1 = 0$

$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y. \Rightarrow \log_a(x - y) = \log_a x + \log_a y$

$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y. \Rightarrow \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\ln x^r = r. \ln x. \Rightarrow \log_a x^r = n. \log_a x$

5.1 Derivada

Como já sabemos calcular a derivada da função logaritmo natural, podemos usar a fórmula da mudança de base para determinar a derivada de uma função logarítmica qualquer na base a.

Dessa forma, temos que:

$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a} . \ln x \quad \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln a} . \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x.\ln a}$.

Para uma função composta $f(x) = \log_a [u(x)]$, onde $u(x)$ é uma função diferenciável na variável x, a sua derivada é

$$f'(x) = \frac{1}{u(x).\ln a}.u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x).\ln a}.$$

Exemplo:

Encontre a derivada da função :

a) $f(x) = \log_{10} \dfrac{x^2 + 4x}{x^3 - 1}$

Para facilitar o trabalho, façamos $f(x) = \log_{10}(x^2 + 4x) - \log_{10}(x^3 - 1)$.

Aplicando a forma da derivada, temos que $f'(x) = \dfrac{2x+4}{(x^2+4x).\ln 10} - \dfrac{3x^2}{(x^3-1).\ln 10}$.

6. Leis de crescimento e decaimento

Das funções que estudamos nessa unidade, a que é mais utilizada é a exponencial natural , pois muitos modelos matemáticos em todos os campos do conhecimento envolvem essa função. Apresentaremos agora, modelos conhecidos como " leis de crescimento e decaimento " , que ocorrem quando a taxa de variação, isto é , a derivada de uma determinada quantidade com relação ao tempo é diretamente proporcional à quantidade presente em cada instante.

Podemos citar como **Exemplos**:

- A taxa de variação de uma população é diretamente proporcional à população no decorrer do tempo.
- A velocidade de uma reação química é diretamente proporcional à quantidade de substância presente em cada momento.
- A velocidade com que a radioatividade de um elemento decai é diretamente proporcional à radioatividade em cada instante.

Para verificar o que ocorre em tais situações, suponhamos que y seja o número de unidades de uma grandeza que varia a uma taxa diretamente proporcional à quantidade presente em cada momento . Então, a taxa de variação de y sendo diretamente proporcional a y, temos que :

$\frac{dy}{dt}$ = k . y, onde k é uma constante chamada de constante de proporcionalidade.

A equação obtida é uma equação diferencial com variáveis separáveis, que separando as variáveis temos,

$$\frac{dy}{y} = k.dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k.dx \Rightarrow \ln|y| = k.x + c_0 \Rightarrow$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kx + c_0} \Rightarrow |y| = e^{kx} . e^{c_0} .$$

Como e^{c_0} é constante positiva, fazendo $e^{c_0} = C$, temos que

$y = C e^{kx}$.

Omitimos as barras do módulo porque y é positivo, visto que e^{kx} é também positivo.

Exemplo:

A população de uma cidade era de 20.000 habitantes em 1960 , passando para 80.000 , segundo o senso de 2000. Sabendo que o crescimento populacional é diretamente proporcional à população, faça uma estimativa de sua população para o ano de 2020.

Solução:

Para solucionar esse problema, construimos uma tabela com os dados, onde a população é representada por P e o tempo, dado em anos, é representado por t.

Nessa tabela estabelecemos a data zero como 1960 , consequentemente o ano 2000 é t = 40 e o ano de 2020 é t = 60.

Tempo em anos (t)	0	40	60
População (P)	20000	80000	P

Sendo a taxa de variação de P com relação a t diretamente proporcional a P , então $\frac{dP}{dt} = k . P \Rightarrow P = C . e^{kt}$, onde usando os dados da tabela temos que :

Se $P = 20000$ para $t = 0$, então $20000 = C . e^{k.0} \Rightarrow$

$C = 20000$, pois $e^{k.0} = 1$.

Temos agora que $P = 20000. e^{k.t}$.

Se $P = 80000$ quando $t = 40$, então $80000 = 20000.\,e^{k.40} \Rightarrow$

$$e^{40k} = \frac{80000}{20000} \Rightarrow e^{40k} = 4 \Rightarrow \ln e^{40k} = \ln 4 \Rightarrow 40k = \ln 4 \Rightarrow$$

$$k = \frac{\ln 4}{40} \Rightarrow k = \frac{1{,}3863}{40} \Rightarrow k = 0{,}03465736.$$

Agora, tendo a forma completa da função, ou seja, $P = 20000.\,e^{0{,}03465736.t}$ obtida a partir dos dados iniciais, podemos encontrar o valor de P no ano desejado, fazendo na função $t = 60$.

$$P = 20000.\,e^{0{,}03465736.t} \Rightarrow P = 20000.\,e^{0{,}03465736.\,60} \Rightarrow P = 160000.$$

Portanto, a população da cidade é estimada em 160.000 habitantes para o ano de 2020.

Síntese do capítulo

Neste terceiro capítulo estudamos as funções logarítmica e exponencial, começando pelas funções logaritmo natural e exponencial na base e. Definimos essas funções, verificamos suas propriedades, e estudamos suas derivadas, como também as integrais delas resultantes. Em seguida estudamos o logaritmo e a exponencial definidas em uma base qualquer $a > 0$, onde trabalhamos as derivadas e integrais. Concluímos a unidade com uma aplicação prática da função exponencial nas leis de crescimento e decaimento.

Atividades de avaliação

1. Encontre a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = \ln(x + 3)$

b) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - x}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x-5}}{x+7}$

d) $f(x) = \log_2(x^3 + 8)$

e) $f(x) = e^{x-9}$

f) $f(x) = 3^{4x+7}$

g) f(x) = $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+6}{x-9}}$

h) f(x) = $\log_5 \sqrt[3]{x^2+7x}$

i) f(x) = $e^{\sqrt{3x-8}}$

j) f(x) = $7^{\ln\sqrt{x-5}}$

2. Encontre a equação da reta tangente à curva y = ln $\sqrt{5-x^2}$, no ponto A(2 , 0).

3. Ache a equação da reta normal à curva y = e^{4x-1} no ponto de abscissa x = 0.

4. Em uma promoção da loja Alfa, ficou determinado que se S(n) for o número de vendas adicionais diárias resultantes da promoção, e n for o número de dias decorridos desde o início da promoção, então

S(n) = $\dfrac{1000}{\sqrt{3^n}}$. Determine a taxa segundo a qual as vendas estarão variando, no quarto e no décimo dias após o término da promoção.

5. A taxa de decaimento do elemento rádio é proporcional à quantidade presente em qualquer momento. Se houver 100 mg de rádio hoje, e sua meia--vida é de 1600 anos, que quantidade teremos daqui a 300 anos ?

6. O crescimento do número de coelhos em uma ilha é diretamente proporcional á quantidade presente. Se existem hoje 2000 coelhos na ilha, e sabe-se que esse número dobra a cada 6 meses, em quanto tempo esse número ultrapassará os 30000 ?

7. Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+7}$

b) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-6}$

c) $\displaystyle\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x+1}dx$

e) $\int \frac{dx}{x.\ln x}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})}$

g) $\int_4^5 \frac{xdx}{4-x^2}$

h) $\int e^{3x-4} dx$

i) $\int_1^e \frac{dx}{x}$

j) $\int x.e^{x^2+3} dx$

l) $\int_1^e \frac{dx}{x.(\ln x)^2}$

m) $\int 5^{nx} dx$

n) $\int 9^{5x-3} dx$

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo Horizonte**; Vol I; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha; 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo;** Vol. I; 6ª Ed.; LTC; 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo;** Vol. I; 5ª Ed.; LTC. 2001 .

STEWART, James. **Cálculo;** Vol. I; São Paulo; Pioneira; 2002 .

THOMAS, George. **Cálculo,** Vol. I; Pearson; São Paulo; 2003.

Capítulo 3

Funções Trigonométricas

Objetivos

- Conhecer as funções trigonométricas
- Estudar a derivada das funções trigonométricas
- Determinar integrais de funções trigonométricas
- Conhecer técnicas que permitem calcular integrais de potências de funções trigonométricas

1. Apresentação

Nesta terceira unidade, admitiremos ter o conhecimento das funções básicas seno e cosseno para definir as demais funções trigonométricas, tangente, cotangente, secante e cossecante.

Estudaremos em seguida as suas derivadas e principalmente as suas integrais, onde apresentaremos também algumas técnicas para cálculo de integrais que envolvam potências de funções trigonométricas.

2. Funções Trigonométricas

No Cálculo I já estudamos as funções seno e cosseno, quando foram apresentadas suas derivadas. Agora trataremos de definir as demais funções trigonométricas, estudando suas derivadas e também a integração dessas funções.

Primeiramente, devemos lembrar que as funções seno e cosseno são definidas e contínuas em todo o conjunto dos números reais, tendo como imagem o conjunto fechado $[-1, 1]$.

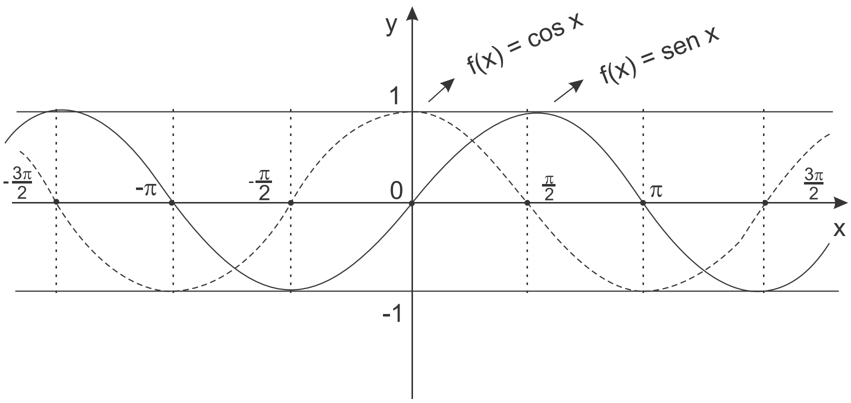

Figura 17 - As funções seno e cosseno.

A partir dessas duas funções, é que definiremos a seguir as funções tangente, cecante, cotangente e cossecante.

- Função Tangente

$$f: R - \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow R, \quad \text{para todo } k \text{ inteiro.}$$

$$x \mapsto f(x) = \mathrm{tg}\, x = \frac{senx}{\cos x}$$

Veja que essa função não é definida para valores de x múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, pois para esses valores de x, temos que $\cos x = 0$.

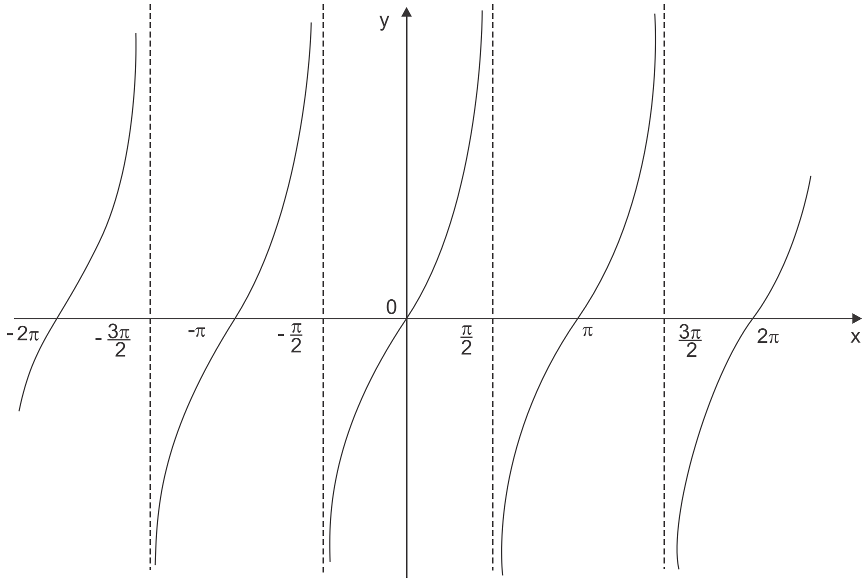

Figura 18 - A função tangente.

- Função Secante

$$f: R - \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow R, \text{ para todo } k \text{ inteiro}$$

$$x \mapsto f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Observe que o conjunto imagem dessa função não contém valores de $y \in (-1, 1)$, pois sendo $-1 \leq \cos x \leq 1$, então $\frac{1}{\cos x} \geq 1$ quando $0 < \cos x \leq 1$, e quando $-1 \leq \cos x < 0$ teremos que $\frac{1}{\cos x} \leq -1$.

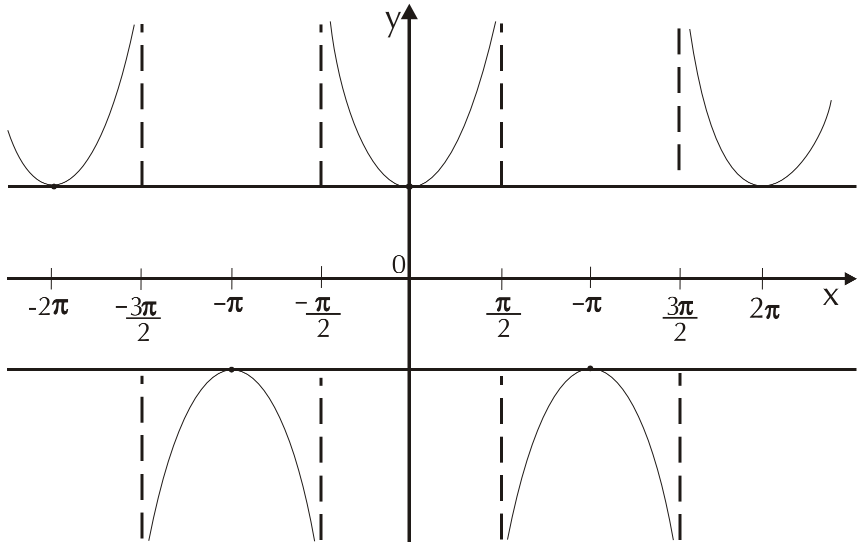

Figura 19 - A função secante.

- Função Cotangente

$f : R - \{ x = k\pi \} \rightarrow R,$ para todo valor de k inteiro

$$x \mapsto f(x) = \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

A função não é definida para valores de $x = k\pi$, pois $\operatorname{sen} k\pi = 0$ para todo valor de k inteiro.

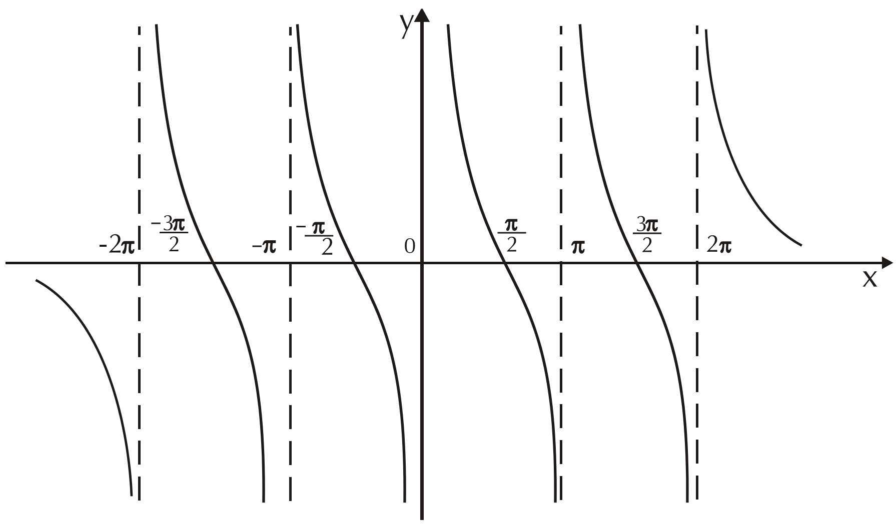

Figura 20 - A função cotangente.

- Função Cossecante

$f: R - \{x = k\pi\} \rightarrow R$, para todo valor de k inteiro

$$x \mapsto f(x) = \text{cossec } x = \frac{1}{senx}.$$

Veja que a função cossecante tem o mesmo conjunto imagem da função secante, e a justificativa para esse fato é semelhante, dado que, assim como o cosseno, a função seno é limitada pelo intervalo [- 1 , 1] .

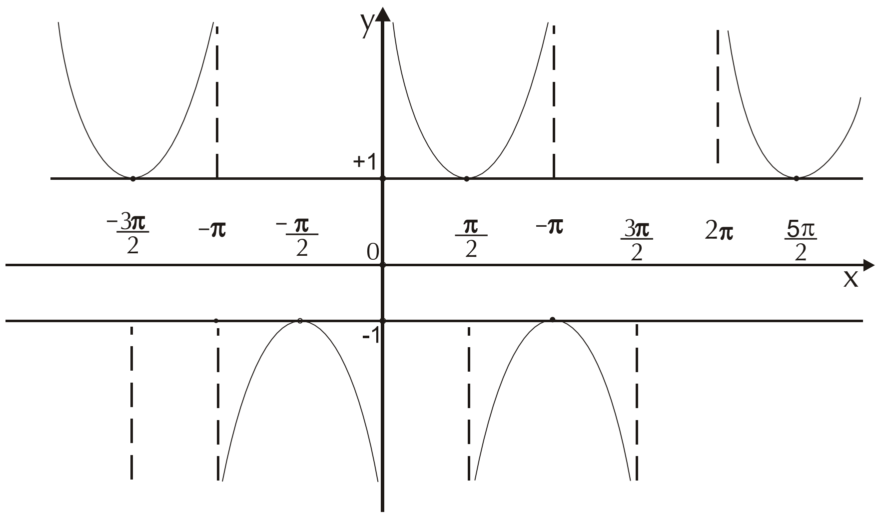

Figura 21 - A função cossecante.

3. Derivadas

Como já sabemos que D_x(sen x) = cos x e que D_x(cos x) = - sen x, então podemos encontrar as derivadas das demais funções trigonométricas, pois estas são definidas a partir do seno e cosseno.

3.1 Derivada da Tangente

$$f(x) = tg\,x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{senx}{\cos x}$$

$$\text{Então,} f'(x) = \frac{(senx)'.\cos x - senx.(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x.\cos x - senx(-senx)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x.$$

Portanto, $D_x(\text{tg } x) = \sec^2 x$, e se $u(x)$ é uma função diferenciável, então, pela regra da cadeia $D_x[\text{tg}(u(x))] = \sec^2[u(x)] . u'(x)$.

Veja por **exemplo** que a derivada da função $f(x) = \text{tg}(x^2 - 5x)$ é

$f'(x) = \sec^2(x^2 - 5x).(2x - 5)$ ou

$f'(x) = (2x - 5).\sec^2(x^2 - 5x)$.

3.2 Derivada da Secante

$f(x) = \sec x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow f(x) = (\cos x)^{-1}$.

Então, $f'(x) = (-1).(\cos x)^{-2}.(\cos x)' = -\dfrac{-senx}{(\cos)^2} = \dfrac{senx}{(\cos x).(\cos x)} =$

$\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{senx}{\cos x} = \sec x . \text{tg } x$.

Portanto, $D_x(\sec x) = \sec x . \text{tg } x$ e na derivação da função composta temos que, se

$f(x) = \sec[u(x)]$, então $f'(x) = \sec[u(x)].\text{tg}[u(x)].u'(x)$.

Por **exemplo**, a derivada da função $f(x) = \sec[e^x]$ é:

$f'(x) = \text{cec}[e^x].\text{tg}[e^x].e^x$

3. 3 Derivada da Cotangente

$f(x) = \text{cotg } x \Rightarrow f(x) = \dfrac{\cos x}{senx}$.

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'.senx - \cos x(senx)'}{(senx)^2} = -\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{(senx)^2}$$

$$= -\frac{1}{(senx)^2} = -\left(\frac{1}{senx}\right)^2 = -\text{cossec}^2 x$$

Portanto, $D_x(\cot gx) = -\text{cossec}^2 x$, e para a derivação de uma função composta $D_x[\text{cotg}(u(x))] = -\text{cossec}^2[u(x)].u'(x)$.

A derivada da função $f(x) = \text{cotg}\sqrt{x+1}$ é:

$$f'(x) = -\text{cossec}^2\sqrt{x+1} . \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = -\frac{\cos\sec^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}.$$

3.4 Derivada da cossecante

f(x) = cossec x $\Rightarrow$ f(x) = $\frac{1}{senx}$ $\Rightarrow$

f(x) = $(\text{sen } x)^{-1}$. $f'(x) = (-1).(\text{sen } x)^{-2}.(\text{sen } x)'$ =

$- \frac{1}{(senx)^2}.\cos x = -\frac{1}{senx}.\frac{\cos x}{senx}$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ = - cossec x . cotg x .

Se f(x)=cossec[u(x)], então f´(x)= - cossec[u(x)] . cotg[u(x)] . u´(x). Por **exemplo**, a derivada da função f(x) = cossec [$x^3 + 6x^2 + 9$] é:

$f'(x)$ = - cossec [$x^3 + 6x^2 + 9$] . cotg [$x^3 + 6x^2 + 9$] . ($3x^2 + 12x$) .

4. Integração

Para estudar a integração das funções trigonométricas, começaremos apresentando aquelas integrais imediatas, que são obtidas diretamente das derivadas dessas funções.

- D_x(sen x) = cos x $\Leftrightarrow$ $\int \cos x dx$ = sen x + k
- D_x(cos x) = - sen x $\Leftrightarrow$ $\int senx dx$ = - cos x + k
- D_x(tg x) = $\sec^2 x$ $\Leftrightarrow$ $\int \sec^2 x dx$ = tg x + k
- D_x(sec x) = sec x . tg x $\Leftrightarrow$ $\int \sec x.tgx dx$ = sec x + k
- D_x(cotg x) = - cossec^2 x $\Leftrightarrow$ $\int \cos\sec^2 x dx$ = - cotg x + k
- D_x(cossec x) = - cossec x . cotg x $\Leftrightarrow$ $\int \cos\sec x.\cot gx dx$ = - cossec x + k

4.1 Integração de tg x, sec x, cotg x e cossec x

Essas funções são todas obtidas do seno e do cosseno, e por isso, assim como foi feito no cálculo de suas derivadas, para encontrar suas integrais é necessário que usemos do mesmo artifício.

$$\int tgx dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} senx dx$$

Fazendo u = cos x, temos que $\frac{du}{dx}$ = - sen x $\Rightarrow$ du = - sen x dx

Então $\int tgx dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u} du$ = - ln | u | + k = - ln | cos x | + k =
ln | cos x | $^{-1}$ + k = ln | $\frac{1}{\cos x}$ | + k = ln | sec x | + k .

$\int \sec x dx$

Para determinar essa integral usaremos um artifício, multiplicando e dividindo seu integrando por sec x + tg x .

Assim, $\int \sec x dx = \int \sec x . \frac{\sec x + tgx}{\sec x + tgx} dx = \int \frac{(\sec^2 x + \sec x . tgx) dx}{\sec x + tgx}$.

Fazendo agora u = sec x + tg x, temos du = (sec ^{2} x + sec x . tg x) dx

Portanto, $\int \sec x dx = \int \frac{du}{u}$ = ln | u | + k =

ln | sec x + tg x | + k .

$\int \cot gx dx = \int \frac{\cos x}{senx} dx = \int \frac{1}{senx} \cos x dx$.

Fazendo u = sen x, temos du = cos x dx, logo

$\int \cot gx dx = \frac{1}{u} du$ = ln | u | + k = ln | sen x | + k =

ln | $\frac{1}{senx}$ | $^{-1}$ + k = - ln | cossec x | + k .

$\int \cos \sec x dx$

Para essa integral usaremos artifício semelhante ao usado na integral da secante, multiplicando o integrando por cossec x - cotg x .

Então

$\int \cos \sec x dx = \int \cos \sec x . \frac{\cos \sec x - \cot gx}{\cos \sec x - \cot gx} dx$ =

$\int \frac{(\cos \sec^2 x - \cos \sec x . \cot gx) dx}{\cos \sec x - \cot gx}$.

Fazendo u = cossec x - cotg x, temos

du = (- cossec x .cotg x + cossec ^{2} x) dx .

Portanto, $\int \operatorname{cossec} x dx = \int \frac{du}{u}$ = ln | u | + k = ln | cossec x - cotg x |+ k.

4.2 Integração de Potências de Seno e Cosseno

Sabemos calcular a derivada das funções seno e cosseno, e agora iremos determinar integrais da forma $\int sen^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ ou $\int sen^n x.\cos^m x dx$, onde n e m são números naturais. Esse tipo de integral deve ser estudado em dois casos :

1^0 Caso: n é um número natural impar.

Sendo n ímpar, podemos fazer sen ^{n} x = sen $^{n-1}$ x . sen x onde sen $^{n-1}$ x é uma potência par de sen x, que pode ser transformada em uma potência de cosseno, para em seguida ser feita uma simples mudança de variável . O mesmo processo é usado se a potência for de cosseno.

Vejamos como se procede, no seguinte **exemplo**:

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x.\cos x dx = \int (\cos^2 x)^2.\cos x dx =$$

$$\int (1 - sen^2 x)^2 \cos x dx \ .$$

Se fizermos agora u = sen x, temos que du = cos x . dx o que implica dizer que:

$$\int \cos^5 x dx = \int (1-u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - 2.\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k \ .$$

Portanto , $\int \cos^5 x dx$ = sen x - $\frac{2}{3}$. sen ^{3} x + $\frac{1}{5}$. sen ^{5} x + k .

2 ^{0} Caso: n é um número natural par.

Nesse caso, usaremos as seguintes relações trigonométricas;

sen ^{2} x = $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ ou cos ^{2} x = $\frac{1 + \cos 2x}{2}$, conforme a necessidade.

Convém aqui relembrar duas integrais conhecidas

$\int senkx dx$ = - $\frac{\cos kx}{k}$ + C e $\int \cos kx dx$ = $\frac{senkx}{k}$ + C .

Tomemos como **exemplo**:

$$\int sen^4 x dx = \int (sen^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}.\int (1-2.\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}.\int dx - \frac{1}{4}.2.\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}.\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}.x + C_1 - \frac{1}{2}.\frac{sen 2x}{2} + C_2 + \frac{1}{4}.\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}.x + C_1 - \frac{1}{2}.\frac{sen 2x}{2} + C_2 + \frac{1}{8}.\int dx + \frac{1}{8}.\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}.x + C_1 - \frac{1}{2}.\frac{sen 2x}{2} + C_2 + \frac{1}{8}.x + C_3 + \frac{1}{8}.\frac{sen 4x}{4} + C_4 =$$

$$= \frac{3}{8}.x - \frac{1}{4}.sen 2x + \frac{1}{32}.sen 4x + C.$$

No caso de $\int sen^n x.\cos^m x dx$, se pelo menos uma das potências for impar, devemos usar o primeiro caso, e se as duas forem pares usamos o segundo caso.

4.3 Integração de Potências de tg x; sec x; cotg x e cossec x

Para calcular integrais que envolvem potências de tangente, cotangente, secante e cossecante, devemos lembrar de duas identidades trigonométricas importantes que são : $tg^2 x + 1 = sec^2 x$ e $cotg^2 x + 1 = cossec^2 x$. Devemos lembrar também das integrais envolvendo essas funções e analisar caso a caso.

Caso 1:

$\int tg^n x dx$ ou $\int cotg^n x dx$, onde n é um inteiro positivo.

Devemos fazer, no caso da tangente,

$tg^n x = tg^{n-2} x . tg^2 x = tg^{n-2} x .(sec^2 x - 1)$.

Exemplo: $\int tg^3 x dx = \int tgx\, tg\, x dx = \int tgx.(\sec^2 x - 1)dx =$

$$= \int tgx.\sec^2 x dx - \int tgx dx.$$

A segunda integral já é nossa conhecida, e na primeira fazendo $u = tg\, x$, temos que $du = \sec^2 x\, dx$.

Então, $\int tg^3 x dx = \int u du - \int tg x dx = \frac{u^2}{2} - \ln|\sec x| + k = \frac{1}{2}.tg^2 x - \ln|\sec x| + k$

Quando a potência for de cotangente, devemos observar que a relação dessa função com a cossecante é a mesma da tangente com a secante.

Caso 2: $\int \sec^n x dx$ ou $\int \operatorname{cossec}^n x dx$, onde n é inteiro positivo par.

Se o caso for de secante, deveremos fazer $\sec^n x = \sec^{n-2} x \,.\, \sec^2 x$, e transformar $\sec^{n-2} x$ em tangente.

Exemplo: $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x.\sec^2 x dx = \int (1 + tg^2 x).\sec^2 x dx = \int \sec^2 x dx + \int tg^2 x.\sec^2 x dx$.

A primeira integral é imediata, e na segunda fazendo $u = tg\, x$, temos $du = \sec^2 x\, dx$

Portanto, $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x dx + \int u^2 du =$

$tg\, x + \frac{u^3}{3} + k = tg\, x + \frac{1}{3} tg^3 x + k$

Síntese do capítulo

Neste capítulo estudamos as funções trigonométricas, onde vimos a derivação e a integração envolvendo essa família de funções.

Partindo das funções seno e cosseno, que já conhecíamos do Cálculo Diferencial e Integral I, usamos o conhecimento do logaritmo para obter as integrais da tangente, cotangente, secante e cossecante.

Concluímos o capítulo estudando técnicas de integração para potências das funções seno e cosseno, e também para a integração de potências das demais funções.

Atividades de avaliação

1. Encontre a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = \text{sen}\,(x^2 + 4x)$

b) $f(x) = \cos\,(e^{x-3})$

c) $f(x) = \text{sen}^2\,(3x - 8)$

d) $f(x) = \text{tg}\,(2 + \ln x)$

e) $f(x) = \sec^3\,(\sqrt{x})$

f) $f(x) = \ln(\text{cotg}\,\sqrt{x})$

g) $f(x) = e^{\text{cossec}x + \text{cotg}\,x}$

h) $f(x) = \sec^2(2^{3x})$

i) $f(x) = \log_3(1 + \text{tg}\,x)$

j) $f(x) = \dfrac{tg3x}{\cot g3x}$

l) $f(x) = \ln(\sec x - \text{tg}\,x)$

m) $f(x) = 5^{\text{cossec}\,x}$

n) $f(x) = \sec(4^{1+3x})$

2. Calcule:

a) $\int \cos 5x dx$

b) $\int sen^5 x dx$

c) $\int tg3x dx$

d) $\int x.\sec x^2 x dx$

e) $\int sen^4 x dx$

f) $\int tg^4 x dx$

g) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$

h) $\int_0^{\pi} sen^2 x dx$

i) $\int x.\cot g^2 x^2 x dx$

j) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot g^3 x dx$

3. Encontre a área da região do plano limitada pela curva $y = tg^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = sen^2 x$ o eixo x e a reta $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, Um Novo Horizonte;** Vol I; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha; 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo;** Vol. I; 5ª Ed. ; LTC. 2001 .

STEWART, James. **Cálculo;** Vol. I; São Paulo; Pioneira; 2002 .

THOMAS, George. **Cálculo,** Vol. I; Pearson ; São Paulo; 2003.

LEITHOLD , Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica;** Vol. I; 3ª Ed.; Harbra; São Paulo. 1995.

Capítulo 4

Funções Trigonométricas Inversas

Objetivos

- Apresentar as funções trigonométricas inversas
- Estudar as suas derivadas
- Conhecer as integrais que resultam em funções trigonométricas inveras.

1. Apresentação

Nesta unidade estudaremos as inversas das funções trigonométricas, suas derivadas e integrais que resultam em funções trigonométricas inversas. Essas funções são muito importantes, principalmente no processo de técnicas de resolução de integrais.

2. Funções trigonométricas inversas

Uma família de funções que devemos conhecer por sua aplicabilidade, principalmente quando estudarmos a técnica de integração por substituição trigonométrica, é a família das trigonométricas inversas, que são as funções definidas como inversas das funções trigonométricas.

Sabemos que para uma função ter uma inversa, é necessário que ela seja bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora, o que não ocorre com nenhuma das funções trigonométricas, que são periódicas e portanto, não são injetivas. Para contornar esse problema, vamos definir cada uma das seis funções trigonométricas restritas a intervalos onde elas sejam bijetivas, e consequentemente seus gráficos sejam curvas estritamente crescentes ou decrescentes.

3. Função inversa do seno

Para que a função seno admita uma inversa, ela será definida no domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e contradomínio $[-1, 1]$ que é também seu conjunto imagem. Definida dessa forma, a função seno admite uma inversa, que é a função arcseno, cujo domínio é o intervalo $[-1, 1]$, de modo que se

$y = \text{arcsen } x$ então $x = \text{sen } y$.

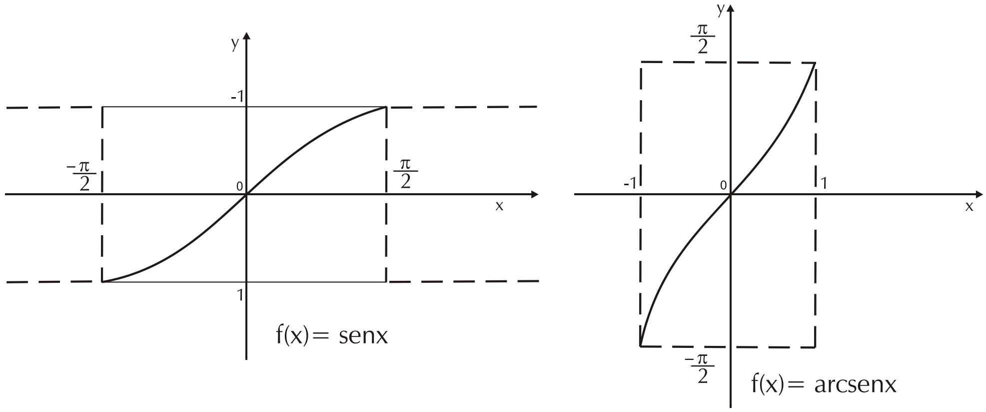

Figura 22 - Gráfico do seno e da inversa arcseno

Podemos também observar que sen(arcsen x) = x, para todo x em [- 1 , 1] ; e que arcsen(sen y) = y, para todo y em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3.1 Derivada da função arcseno

Tomemos a igualdade x = sen y, onde y = arcsen x , e derivemos com relação à variável x . Assim, pela regra da cadeia, teremos

$$1 = \cos y \,.\, D_x(y) \quad \Rightarrow \quad D_x(y) = \frac{1}{\cos y}.$$

Mas $sen^2 y + \cos^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos y = \sqrt{1 - sen^2 y}$, para todo y em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Portanto, $D_x(\text{arcsen } x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}}$. $\Rightarrow$ $D_x(\text{arcsen } x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$D_x(\text{arcsen } u(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - u(x)^2}} . u'(x)$$

Esse resultado, nos leva a uma integral imediata bastante interessante e útil , que é : $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsenx + k.$

Exemplo: Encontre a derivada da função $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{x}$.

Solução: $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^{2}}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{2.\sqrt{x-x^{2}}}$.

4. Função inversa do cosseno

Para que a função arccosseno seja definida é necessário que a função cosseno sofra uma restrição de domínio conveniente, de modo que ela se torne bijetiva. Com esse objetivo, devemos defini-la no domínio $[0, \pi]$, onde ela é monótona decrescente, e tendo o intervalo $[-1, 1]$ como contradomínio e conjunto imagem.

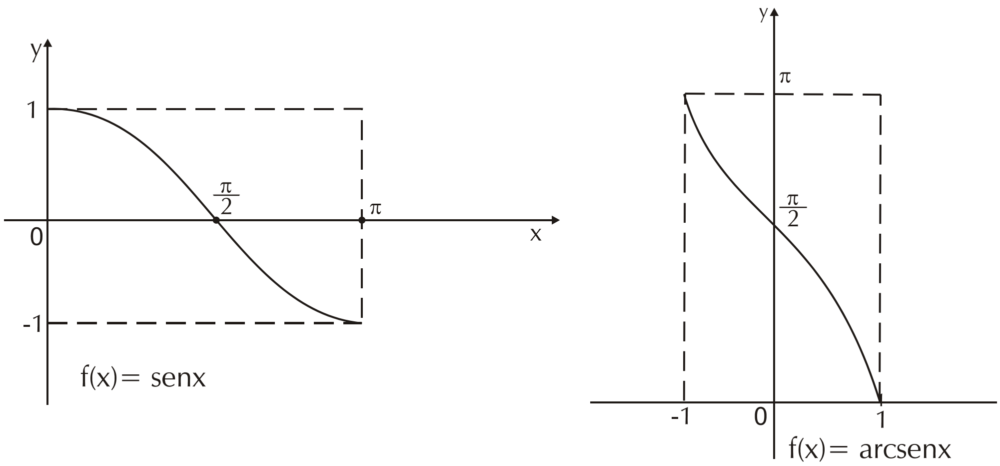

Figura 23 - A função cosseno e sua inversa.

A sua inversa é a função arccos x com domínio $[-1, 1]$ e contradomínio $[0, \pi]$, de modo que $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$.

4.1 Derivada da função arccosseno

Para encontrar a derivada do arccosseno, utilizaremos o mesmo argumento do arcseno, derivando $x = \cos y$ com relação à variável x .

Assim, $1 = -\text{sen}\, y \,.\, D_x(y) \Rightarrow D_x(y) = -\dfrac{1}{seny} \Rightarrow$

$D_x(\text{arcos}\, x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \Rightarrow D_x(\text{arcos}\, x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e

$D_x(\text{arcos}\, u(x)) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}.u'(x)$.

Exemplo:

Encontre a derivada de $f(x) = \text{arccos}(x^2)$.

Solução:

$f(x) = \text{arccos}(x^2) \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}.2x = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

> Não temos integral imediata para a derivada do arccosseno, pois a derivada do arccosseno é menos a derivada do arcseno.

5. Função inversa da tangente

A função tangente definida no intervalo aberto $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e contradomínio R é inversível, porque nesse intervalo é monótona crescente.

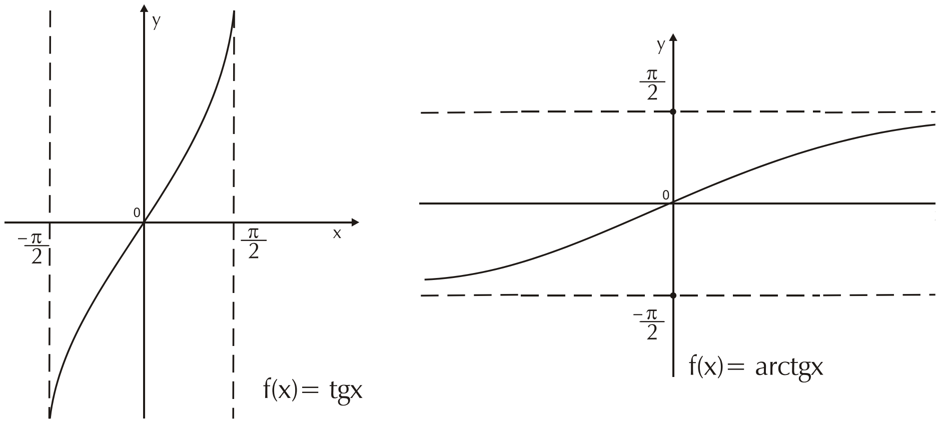

Figura 24 - Gráfico de um arco de f(x) = tgx e de sua inversa.

A sua inversa é a função $f(x) = \text{arctg}\, x$ definida dos reais em $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, de modo que $y = \text{arctg}\, x \Leftrightarrow x = \text{tg}\, y$.

5.1 Derivada da função arctangente

Derivando $x = tg\, y$ com relação à variável x, temos

$1 = \sec^2 y \, . \, D_x(y) \Rightarrow D_x(y) = \dfrac{1}{\sec^2 y} \Rightarrow D_x(\text{arctg}\, x) = \dfrac{1}{1+tg^2 y}$

$\Rightarrow D_x(\text{arctg}\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. $D_x(\text{arctg}\, u(x)) = \dfrac{1}{1+u(x)^2} . u'(x)$.

Como consequencia, temos que $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + k$.

Exemplo:

Calcule a derivada de $f(x) = \text{arctg}(x^2 + 3)$.

Solução:

$f(x) = \text{arctg}(x^2 + 3) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+(x^2+3)^2}(2x) =$

$\dfrac{2x}{1+x^4+6x^2+9} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^4+6x^2+10}$.

6. Função inversa da cotangente

Para que a função cotangente possa admitir uma inversa, é suficiente que ela seja definida do intervalo $(0, \pi)$ em R. Assim ela é estritamente crescente admitindo uma inversa, que chamamos de arccotangente, definida de R em $(0, \pi)$, de modo que $y = \text{arccotg}\, x \Leftrightarrow x = \text{cotg}\, y$.

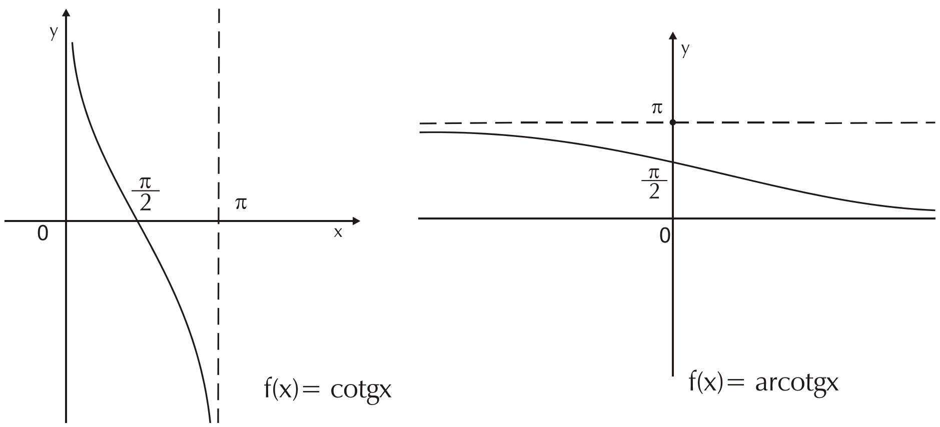

Figura 25 - Gráfico de f(x) = cotgx e de sua inversa.

6.1 Derivada da função arccotangente

Derivando x = cotg y com relação à variável x, temos que

$$1 = -\operatorname{cossec}^2 y \,.\, D_x(y) \Rightarrow \quad D_x(y) = -\frac{1}{\operatorname{cos\,sec}^2 y} \quad \Rightarrow$$

$$D_x(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1+\cot g^2 y} \quad \Rightarrow D_x(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{e}$$

$$D_x(\operatorname{arccotg} u(x)) = -\frac{1}{1+u(x)^2}.u'(x)\ .$$

7. Função inversa da secante

Para chegarmos à definição da função inversa da secante, vamos considerar que a função secante esteja definida no intervalo $[\,0\,,\ \frac{\pi}{2}\,)$ onde ela é estritamente crescente, tendo o intervalo $[\,1\,,+\infty\,)$ como conjunto contradomínio. Assim, sua inversa é a função arcsecante, tal que

$$y = \operatorname{arcsec} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sec y\ .$$

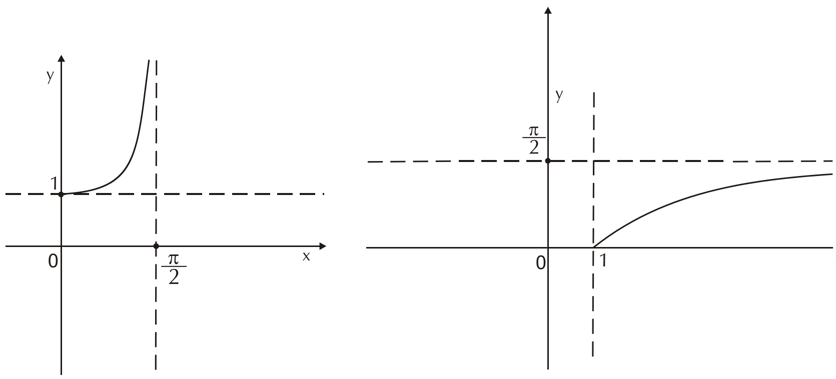

Figura 26 - Gráfico da função secante e de sua inversa.

7.1 Derivada da função arcsecante

Derivando a equação x = sec y com relação à variável x, temos

$$1 = \sec y.\ \operatorname{tg} y.D_x(y)$$

$$\Rightarrow D_x(y) = \frac{1}{\sec y.tgy} \quad \Rightarrow D_x(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{\sec y.\sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$\Rightarrow D_x(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}} \ \text{e}\ D_x(\operatorname{arcsec} u(x)) = \frac{1}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}.u'(x)$$

Como conseqüência, temos que $\displaystyle\int \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec} x + k\ .$

Exemplo:

Encontre a derivada da função f(x) = arcsec $\sqrt{x+1}$.

Solução:

f(x) = arcsec $\sqrt{x+1}$ $\Rightarrow$ f´(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}.\sqrt{(\sqrt{x+1})^2-1}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow$ f´(x) = $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1-1}}$. $\Rightarrow$ f´(x) = $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

8. Função inversa da cossecante

Para que possamos definir uma inversa para a função cossecante, devemos defini-la no domínio (0 , $\dfrac{\pi}{2}$] tendo como conjunto imagem o intervalo [1 , + ∞) , de modo que a sua inversa é a função arccossecante, tal que y = arccossec x $\Leftrightarrow$ x = cossec y .

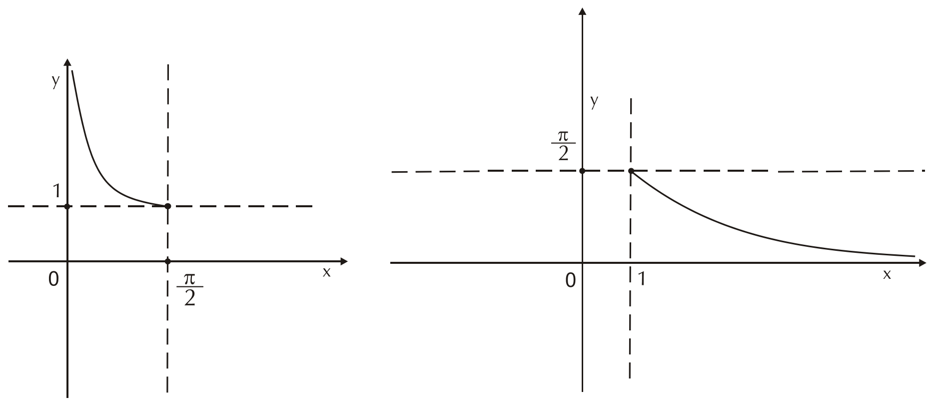

Figura 27 -

8.1 Derivada da função arccossecante

Derivando x = cossec y com relação a x, temos que

1 = - cossec y . cotg y . D_x(y) $\Rightarrow$ D_x(y) = - $\dfrac{1}{\cos\sec y.\cot gy}$ $\Rightarrow$

D_x(arccossec x) = - $\dfrac{1}{\cos\sec y.\sqrt{\cos\sec^2 y-1}}$ $\Rightarrow$ D_x(arccossec x) =

- $\dfrac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$ e D_x(arccossec u(x)) = - $\dfrac{1}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}.u(\,x)$.

Observe que tomamos as integrais imediatas apenas nas derivadas de arcseno, arctangente e arcsecante, pois as demais têm derivadas semelhantes.

Síntese do capítulo

Neste capítulo definimos e estudamos as funções trigonométricas inversas, calculamos suas derivadas, e principalmente, obtivemos integrais que resultam em funções dessa família, que têm muita aplicabilidade nas técnicas de integração. São elas :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx + k$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + k .$$

$$\int \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}} dx = \text{arcsec } x + k .$$

Atividades de avaliação

1. Encontre a derivada de cada uma das funções abaixo :

a) f(x) = arcsen(2x)

b) f(x) = arccos $\frac{x}{2}$

c) f(x) = arctg $\sqrt{x+3}$

d) f(x) = arcsec (x^2 – 5x)

e) f(x) = arccotg e^x

f) f(x) = arcsen (1 + $\sqrt{x}$)

g) f(x) = arccossec $\sqrt[3]{x^2-4}$

2. Calcule :

a) $\int \frac{dx}{x^2+36}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

d) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$

e) $\int \frac{5dx}{x.\sqrt{x^2-25}}$

f) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo Horizonte;** Vol I; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha; 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo;** Vol. I; 6ª Ed. ; LTC ; 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo; Vol. I**; 5ª Ed. ; LTC. 2001 .

STEWART, James. **Cálculo;** Vol. I; São Paulo; Pioneira; 2002 .

THOMAS, George. **Cálculo,** Vol. I; Pearson ; São Paulo; 2003.

LEITHOLD , Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica;** Vol. I; 3ª Ed.; Harbra; São Paulo. 1995.

Capítulo 5

Técnicas de Integração

Objetivos

- Estudar as técnicas de integração
- Resolver integrais por partes
- Resolver integrais por substituição trigonométrica
- Resolver integrais por frações parciais.

1. Apresentação

Neste capítulo apresentaremos técnicas de integração que nos permitirão calcular integrais indefinidas que não podemos determinar usando os métodos já conhecidos.

Essas técnicas são de três formas, que chamaremos de integração por partes, integração por substituição trigonométrica e integração por frações parciais.

2. Técnicas de integração

2.1 Integração por partes

Essa técnica de integração é uma conseqüência da regra de derivação de um produto de duas funções. Quando estudamos as regras de derivação, vimos que, se u (x) e v (x) são duas funções diferenciáveis na variável x, então a derivada do produto de u por v é dada por: $\frac{d(u.v)}{dx}=\frac{du}{dx}.v+u.\frac{dv}{dx}$, que na forma diferencial podemos escrever $d(u.v)=v.du+u.dv \Rightarrow$ $u.dv=d(u.v)-v.du \Rightarrow \int u.dv=\int d(u.v)-\int v.du$.

Como $\int d(u.v)=u.v$, então $\int u.dv=u.v-\int v.du$.

Essa igualdade nos permite trocar uma integral , no caso $\int u.dv$, por outra possivelmente mais simples de ser solucionada.

Exemplo 1:

Calcular $\int x.e^x dx$.

Solução:

Primeiramente, façamos u = x $\Rightarrow$ du = dx ; e dv = $e^x dx$ $\Rightarrow$ v = $\int e^x dx$ = e^x

Como $\int u.dv = u.v - \int v.du$, então $\int x.e^x dx$ = x.e^x - $\int e^x dx$ =

= x.e^x - e^x + k

Vejamos agora se, na mesma integral tivéssemos feito u = e^x $\Rightarrow$ du = e^x.dx e dv = x.dx $\Rightarrow$ v = $\int x dx = \dfrac{x^2}{2}$.

Teríamos que $\int x.e^x dx$ = $e^x.\dfrac{x^2}{2}$ - $\int \dfrac{x^2}{2}.e^x dx$.

Veja que a integral que obtivemos é mais complicada do que a integral que queríamos resolver. Portanto, é muito importante essa escolha inicial do que seja u e dv, para se chegar à solução.

Exemplo 2:

Calcule $\int x.\cos x dx$.

Solução:

Tomemos u = x $\Rightarrow$ du = dx e dv = cos xdx $\Rightarrow$ v = $\int \cos x dx$ = sen x.

Então $\int x.\cos x dx$ = x . sen x - $\int sen x dx$ = x . sen x - (- cos x) + k .

Portanto $\int x.\cos x dx$ = x . sen x + cos x + k.

Exemplo 3:

Calcule $\int arctg x dx$.

Solução:

Nesse caso não temos opção de escolha, devendo se fazer u = arctg x e dv = dx, resultando que du = $\dfrac{dx}{1+x^2}$ e v = x .

Então, $\int arctg x dx$ = x . arctg x - $\int x.\dfrac{dx}{1+x^2}$ = $\int .\dfrac{xdx}{1+x^2}$.

Para resolver essa segunda integral , podemos fazer t = 1 + x^2 $\Rightarrow$ dt = 2xdx $\Rightarrow$ xdx = $\dfrac{dt}{2}$.

Dessa forma, temos que $\int arctgxdx$ = x . arctg x - $\int \frac{2dt}{t}$ =

x . arctg x - $\frac{1}{2}$. $\int \frac{dt}{t}$ = x . arctg x - $\frac{1}{2}$. ln | t | + k =

x . arctg x - $\frac{1}{2}$. ln | 1 + x ^{2} | + k .

Pode acontecer que determinada integral exija repetidas aplicações da integração por partes, como exemplificamos em seguida.

Calcular $\int x^2e^xdx$.

Tomando u = x ^{2} e dv = e ^{x} dx, temos que du = 2xdx e

v = $\int e^xdx$ = e ^{x}.

Assim, $\int x^2e^xdx$ = x ^{2} . e ^{x} - $\int e^x.2xdx$ = x ^{2} . e ^{x} - 2. $\int e^x.xdx$.

Essa integral que encontramos deve também ser resolvida por partes, e já foi resolvida no **exemplo 1**.

Portanto, $\int x^2e^xdx$ = x ^{2} . e ^{x} - 2. [x.e^x - e^x + k] =

= e ^{x} [x ^{2} – 2x + 2] + k .

Veja um outro **exemplo** de como calcular $\int e^x \cos xdx$.

Seja u = e ^{x} e dv = cos x dx, o que implica em du = e ^{x} dx e v = sen x.

$\int e^x \cos xdx$ = e ^{x} . sen x - $\int senx.e^xdx$.

Essa integral encontrada é semelhante à primeira, sendo também por partes.

Aplicando o método novamente, façamos $\overline{u}$ = e ^{x} e d$\overline{v}$ = sen xdx de onde teremos d$\overline{u}$ = e ^{x} dx e $\overline{v}$ = - cos x .

Então: $\int e^x \cos xdx$ = e ^{x} . sen x - [e ^{x} (- cos x) - $\int (-\cos x).e^xdx$]

$\Rightarrow$ $\int e^x \cos xdx$ = e ^{x} . sen x + e ^{x} . cos x - $\int e^x \cos xdx$.

Veja que essa integral encontrada é a mesma do primeiro membro da igualdade e portanto, 2 . $\int e^x \cos xdx$ = e ^{x} . sen x + e ^{x} . cos x + k = e ^{x} (sen x + cos x) + k $\Rightarrow$ $\int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(sen\ x + \cos x)$

Para o cálculo de uma integral definida, devemos lembrar que a integração por partes é feita da mesma forma, prevalecendo os limites da integral dada.

Dessa forma, $\int_a^b u.dv = u.v|_a^b - \int_a^b v.du$, que se resolve conforme o

Exemplo:

Calcule $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)dx$.

Antes de começar a resolver a integral , podemos fazer uma mudança de variável , tomando t = x + 2 $\Rightarrow$ dt = dx.

Assim, temos que $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)dx = \int_{1}^{4} \ln t dt$.

Agora aplicamos a integração por partes, com u = ln t e dv = dt, implicando que du = $\frac{1}{t}dt$ e v = t .

Portanto, $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)dx = \int_{1}^{4} \ln t dt = t.\ln t \Big|_1^4 - \int_{1}^{4} t.\frac{dt}{t} =$

$= 4.\ln 4 - 1.\ln 1 - \int_{1}^{4} dt = 4.\ln 4 - \ln 1 - t\Big|_1^4 = 4.\ln 4 - (4-1)$
$= 4.\ln 4 - 3.$

Lembrete : ln 1 = 0.

3. Integração por substituição trigonométrica

Essa técnica é usada sempre que temos no integrando um radical da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$; ou $\sqrt{a^2 + x^2}$; ou ainda $\sqrt{x^2 - a^2}$, onde a é uma constante positiva.

A técnica consiste em eliminar esses radicais com uma substituição da variável x por uma função trigonométrica conveniente, e por isso temos que verificar três casos.

Caso I: O integrando contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Nesse caso, devemos fazer x = a.sen $\theta \Rightarrow$ dx = a.cos θ dθ e

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2.sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} =$

$\sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a.\cos\theta.$

Com essa substituição, conseguimos eliminar o radical e passamos a trabalhar com integral trigonométrica.

Exemplo:

Calcular $\int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Veja que $a^2 = 4 \Rightarrow$ a = 2, logo devemos fazer x = 2.sen $\theta \Rightarrow$ dx = 2.cos θ dθ e $\sqrt{4 - x^2}$ = 2.cos θ.

Então $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2sen\theta.2.\cos\theta d\theta}{2.\cos\theta} = 2.\int sen\theta d\theta =$

$2.(-\cos\theta) + k = -2.\cos\theta + k$.

A integral está resolvida, mas a **solução** está na variável θ e devemos apresenta-la na variável x .

Mas da mudança de variável sabemos que $\sqrt{4-x^2} = 2.\cos\theta$, por isso temos que $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = -\sqrt{4-x^2} + k$.

Quando a integral for definida, ao fazer a mudança de variável devemos mudar também os limites de integração, não sendo necessário portanto fazer a volta para a variável inicial x .

Exemplo:

Calcule $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$.

Solução:

Temos $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$.

Então $x = 4.sen\,\theta \Rightarrow dx = 4.\cos\theta.d\theta$ e $\sqrt{16-x^2} = 4.\cos\theta$.

Para a mudança dos limites, $x = 0 \Rightarrow 4.sen\,\theta = 0 \Rightarrow$

$sen\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e $x = 4 \Rightarrow 4.sen\,\theta = 4 \Rightarrow$

$sen\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

Assim, $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4.\cos\theta.4\cos\theta d\theta = 16.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = =$

$16.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta d\theta}{2} = 8.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 8.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta =$

$8.\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}} + 8.\frac{sen 2\theta}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8.\frac{\pi}{2} + 4.(sen\,\pi - sen\,0) =$

$= 4\pi + 4.(0 - 0) = 4\pi$.

Caso II : Integrais envolvendo radicais da forma $\sqrt{a^2+x^2}$.

Para eliminar esse tipo de radical , devemos fazer $x = a.tg\,\theta \Rightarrow dx = a.\sec^2\theta d\theta$ e $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tg^2\theta} = \sqrt{a^2(1+tg^2\theta)} =$

$\sqrt{a^2.\sec^2\theta} = a.\sec\theta$.

Exemplo:

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

Solução:

Temos que $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$.

$x = 3.\,tg\,\theta \Rightarrow dx = 3.\sec^2\theta\, d\theta$ e $\sqrt{9+x^2} = 3.\sec\theta$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta d\theta}{3\sec\theta} = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + tg\,\theta| + k =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + k = \ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right| + k.$$

Calcule $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ d. Fazendo $x = tg\,\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$ e $\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$.

Para x = 0, temos que $tg\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e $tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg\theta.\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\theta.\sec\theta d\theta = \sec\theta \,|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\sec\frac{\pi}{4} - \sec 0 = \sqrt{2} - 1.$$

Caso III: O integrando tem um radical da forma $\sqrt{x^2-a^2}$.

Se fizermos $x = a.\sec\theta$, temos que $dx = a.\sec\theta.\,tg\,\theta\, d\theta$ e

$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2.\sec^2\theta - a} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} =$

$\sqrt{a^2.tg^2\theta} = a.\,tg\,\theta$.

Exemplo:

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

$x = 5.\sec\theta \Rightarrow dx = 5.\sec\theta.\,tg\,\theta\, d\theta$ e $\sqrt{x^2-25} = 5.tg\,\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \int \frac{5.\sec\theta.tg\theta d\theta}{5.tg\theta} = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + tg\,\theta| +$$

$$k = \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + k = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + k.$$

4. Integração por frações parciais

Essa técnica é destinada a resolver integrais cujo integrando contém um quociente da forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde P(x) e Q(x) são polinômios tais que o grau de P seja menor que o grau de Q , e Q é não-identicamente nulo.

A técnica consiste no desdobramento do quociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ em uma soma de frações parciais, que possam ser integradas.

O desdobramento do quociente se baseia no processo da soma de frações, admitindo-se que o polinômio Q(x) seja o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações parciais. Portanto, para se obter os denominadores das frações parciais é necessário que se faça a fatoração de Q(x). Como sabemos, todo polinômio de grau n > 2 , pode ser fatorado como o produto de polinômios de grau um e/ou dois. Por isso, analizaremos quatro situações.

Caso 1: O polinômio Q(x) é fatorado como produto de polinômios de grau um, sem multiplicidade, ou repetição.

Exemplo:

Calcular $\int \dfrac{2 \quad 4}{x \quad x}\, dx$

Solução:

Primeiramente tomamos o denominador $Q(x) = x^3 - x$ e fatoramos obtendo $Q(x) = x.(x-1).(x+1)$, o que implica que teremos três frações parciais no desdobramento.

Então, $\dfrac{2x+4}{x^3 - x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1} =$

$$\frac{A.(x-1).(x+1) + Bx.(x+1) + Cx.(x-1)}{x.(x-1).(x+1)} =$$

$$\frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x^3 - x}$$

Como a primeira e essa última frações são iguais e têm mesmo denominador, então seus numeradores são iguais, logo:

$$2x + 4 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 2 \\ A = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B + C = 4 \\ B - C = 2 \end{cases} \Rightarrow 2B = 6 \Rightarrow B = 3 \text{ e } C = 4 - 3 = 1.$$

Portanto, $\dfrac{2x+4}{x^3-x} = \dfrac{-4}{x} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow$

$$\int \frac{2x+4}{x^3-x}.dx = \int \frac{-4}{x}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$-4.\int \frac{1}{x}dx + 3.\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$-4.\ln|x| + 3.\ln|x-1| + \ln|x+1| + k.$$

Caso 2: O polinômio Q(x) é fatorado como o produto de polinômios de primeiro grau com multiplicidades. A multiplicidade é o número de vezes que um polinômio se repete na fatoração de Q(x). Por **exemplo**, se $Q(x) = x^2.(x+2)^3.(x-5)$, então x tem multiplicidade 2, x + 2 tem multiplicidade 3 e x – 5 não tem multiplicidade.

Exemplo:

Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^4-2x^3}dx$

Solução:

$Q(x) = x^4 - 2x^3 \Rightarrow Q(x) = x^3(x-2)$.

O fator x^3 será considerado como o produto x . x . x e dizemos ser um polinômio de grau um, com multiplicidade três. Isso se deve ao fato de que temos de considerar todas as possibilidades de divisibilidade de Q(x) para se obter as frações parciais. Assim,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^4-2x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} =$$

$$\frac{A(x^3-2x^2)+B(x^2-2x)+C(x-2)+Dx^3}{x^4-2x^3}$$

Duas frações iguais com mesmo denominador, implica em numeradores iguais, logo

$$x^2 - 3x + 2 = Ax^3 - 2Ax^2 + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C + Dx^3 \Rightarrow$$

$x^2 - 3x + 2 = (A + D)x^3 - (2A - B)x^2 - (2B - C)x - 2C \Rightarrow$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ -2A + B = 1 \\ 2B - C = 3 \\ -2C = 2 \Rightarrow C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \\ -2A + B = 1 \\ 2B + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \\ -2A + B = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ -2A + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = D = 0.$$

Portanto, $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 2x^3} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{-1}{x^3} dx = \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + k.$

Caso 3: O polinômio $Q(x)$ é fatorado como produto de polinômios de grau um e dois, sem multiplicidades. A diferença desse caso para os anteriores, é que, se uma fração parcial tiver no denominador um polinômio de grau dois, então seu numerador poderá ser um polinômio de grau um, ou constante.

Exemplo:

Calcular $\int \frac{x + 2}{x^3 + x} dx$.

$Q(x) = x^3 + x \Rightarrow Q(x) = x(x^2 + 1).$

Temos então, $\frac{x + 2}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x^3 + x} \Rightarrow$

$x + 2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \Rightarrow x + 2 = (A + B)x^2 + Cx + A$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow B = -2.$$

$$\int \frac{x + 2}{x^3 + x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$2\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} 2x dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

A primeira e a terceira integrais são imediatas. Para a segunda, fazendo $u = x^2 + 1$, temos que $du = 2xdx$

.

Portanto, $\int \frac{x+2}{x^3+x}dx = 2 . \ln|x| - \int \frac{1}{u}du + \text{arctg } x =$

$\ln|x|^2 - \ln|u| + \text{arctg } x + k = \ln x^2 - \ln|x^2+1| + \text{arctg } x + k =$

$\ln \frac{x^2}{x^2+1} + \text{arctg } x + k.$

Caso 4: Quando a fatoração de $Q(x)$ apresentar multiplicidades para polinômios de grau dois, o procedimento é o mesmo do segundo caso, apresentando como denominadores das frações parciais todas as possibilidades de divisores para $Q(x)$.

Exemplo:

Calcule $\int \frac{x+2}{x(x^2+1)^2}dx$.

Nessa integral $Q(x)$ já está expresso como produto de um polinômio de grau um sem multiplicidade, e um de grau dois com multiplicidade dois, portanto,

$$\frac{x+2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{A(x^4+2x^2+1) + Bx^2(x^2+1) + Cx(x^2+1) + Dx^2 + Ex}{x(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$x + 2 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex \Rightarrow$

$x + 2 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A \quad \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=1 \\ A=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad A = 2 ; B = -2 ; C = 0 ; D = -2$ e $E = 1$.

Então, $\int \frac{x+2}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-2x}{x^2+1}dx + \int \frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}dx =$

$2 . \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2+1}2xdx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}2xdx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$.

Temos agora quatro integrais.

A primeira delas é imediata. Para a segunda e terceira podemos fazer $u = x^2 + 1$, pois $du = 2xdx$. Para a última devemos fazer $x = tg\,\theta$, com $dx = sec^2\,\theta\, d\,\theta$.

$$\int \frac{x+2}{x(x^2+1)^2}dx = 2 . \ln|x| - \int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{u^2}du + = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(tg^2\theta+1)^2}$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|u| - \int u^{-2}du + \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^2} =$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|x^2+1| - \frac{u^{-1}}{-1} + \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} =$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|x^2+1| + \frac{1}{u} + \int \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta =$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} . \int d\theta + \frac{1}{2} . \int \cos 2\theta d\theta$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} . \theta + \frac{1}{2} . \frac{sen 2\theta}{2} + k$$

$$= 2 . \ln|x| - \ln|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\text{arctg}\, x + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,(2\,\text{arctg} x) + k .$$

Síntese do capítulo

Estudamos neste capítulo três técnicas, que ampliam nossos conhecimentos na resolução de integrais.

Integração por partes, que se baseia na regra de derivação do produto de duas funções.

Integração por substituição trigonométrica, que é utilizada na resolução de integrais que envolvam radicais da forma $\sqrt{a^2-x^2}$; $\sqrt{a^2+x^2}$ e $\sqrt{x^2-a^2}$, onde a é uma constante positiva.

Integração por frações parciais, que nos permite solucionar integrais cujo integrando tem a forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios.

Atividades de avaliação

1. Calcule as seguintes integrais, utilizando a técnica de integração por partes :

a) $\int \ln x dx$

b) $\int x^2 \ln x dx$

c) $\int x.e^{2x} dx$

d) $\int x \sec^2 x dx$

e) $\int arctgx dx$

f) $\int x sen x dx$

g) $\int e^x \cos x dx$

h) $\int \sec^3 x dx$

2. Calcule, usando a técnica de substituição trigonométrica :

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{36 - x^2}}$

b) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$

c) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

e) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

f) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{(9x^2-4)^{3/2}}$

h) $\int \sqrt{9+x^2}\,dx$

3. Calcule, usando o método das frações parciais:

a) $\int \frac{(2x \quad 3)dx}{}$

b) $\int \frac{dx}{x^3-4x}$

c) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$

d) $\int \frac{(x+2)dx}{x^3+x^2}$

e) $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+2)^2}$

f) $\int \frac{xdx}{(x+3)^3}$

g) $\int \frac{dx}{x^3+x}$

h) $\int \frac{dx}{16x^4-1}$

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo Horizonte;** Vol I; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha; 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo;** Vol. I; 6ª Ed. ; LTC ; 1995.

STEWART, James. **Cálculo;** Vol. I; São Paulo; Pioneira; 2002 .

THOMAS, George. **Cálculo,** Vol. I**;** Pearson ; São Paulo; 2003.

LEITHOLD , Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica;** Vol. I; 3ª Ed. Harbra; São Paulo. 1995.

Capítulo 6

Coordenadas Polares

Objetivos

- Conhecer o sistema de Coordenadas Polares.
- Aprender a fazer mudanças de coordenadas.
- Conhecer algumas curvas polares.
- Calcular área de regiões no plano polar.

1. Apresentação

Neste capítulo iremos apresentar um novo sistema de coordenadas, diferente do sistema que temos trabalhado até agora, que é o sistema cartesiano. O sistema que trabalharemos é chamado de sistema de coordenadas polares, por se tratar de um sistema que tem um ponto como referencial , juntamente com uma semi-reta.

2. Coordenadas Polares

Para definir as coordenadas polares, tomemos uma semi-reta horizontal orientada da esquerda para a direita, que chamaremos de eixo polar, e cuja origem O será o polo.

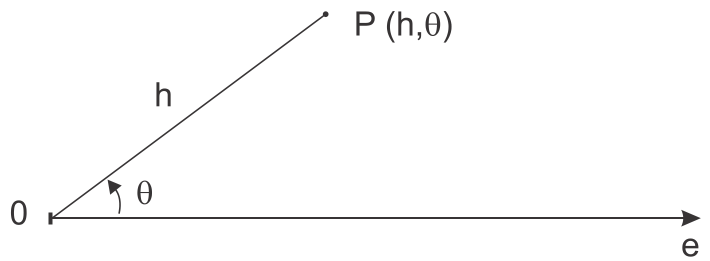

Figura 28 - Um ponto no plano polar.

Esse sistema de referencial nos permite identificar todos os pontos do plano por meio de sua associação a um par ordenado polar (r, θ) onde r nos dá a distância orientada desde P até o polo O, e θ é a medida do ângulo orientado desde o eixo polar até o raio polar r.

Na trigonometria, um ângulo θ é considerado positivo quando medido no sentido anti-horário e negativo quando medido no sentido horário. Portanto, o ângulo associado a um ponto P não é único. Por exemplo, o ponto $P(5, \frac{\pi}{3})$, que mostramos na figura, pode também ser representado por $P(5, -\frac{5\pi}{3})$.

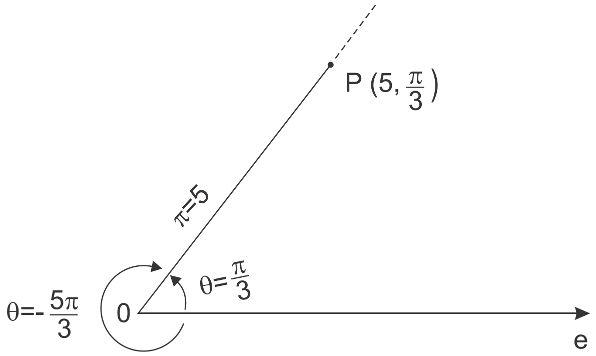

Figura 29 - Ângulo de um Ponto P no plano polar.

Há situações em que necessitamos que r seja negativo. por isso, podemos identificar o mesmo ponto $P(5, \frac{\pi}{3})$ tomando o prolongamento do raio polar r no sentido do polo, obtendo um novo ângulo $\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ e representar o mesmo ponto por $P(-5, \frac{4\pi}{3})$, onde o sinal negativo indica que a medida de r foi tomada no sentido contrario ao da abertura do ângulo.

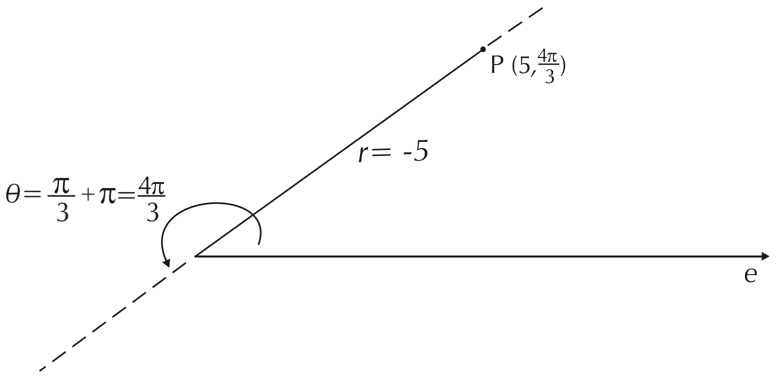

Figura 30 - Segunda forma para o mesmo ponto.

3. Relação entre as Coordenadas Polares e as Cartesianas

Para fazer uma relação do sistema polar com o sistema de coordenadas cartesianas, coloquemos em um mesmo plano os dois sistemas de modo que o polo coincida com a origem do sistema cartesiano. e o eixo polar coincidindo com o eixo x positivo.

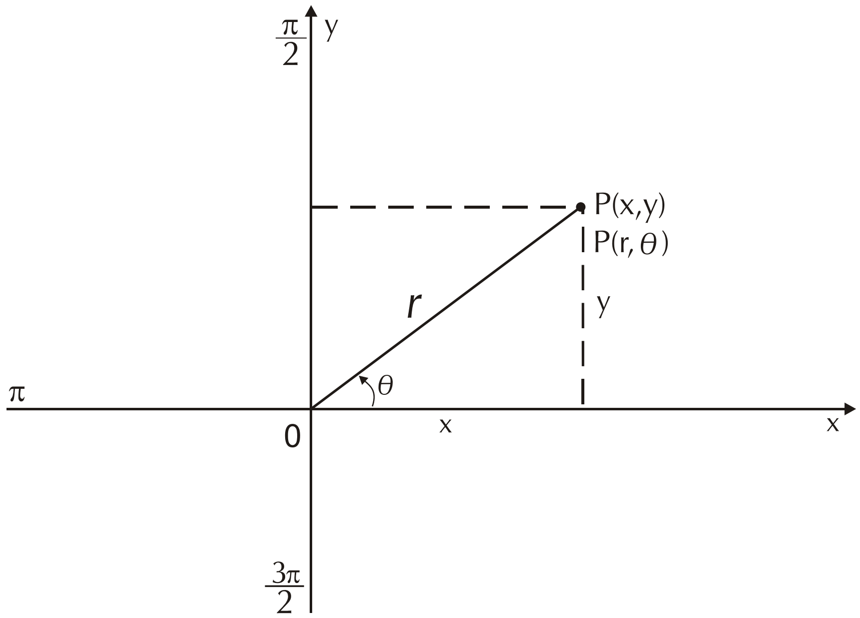

Figura 31 - um ponto P na forma cartesiana e polar.

No sistema polar consideramos os eixos auxiliares $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$ para uma melhor orientação no traçado de curvas.

Na figura, observa-se que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ sen\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.sen\theta \end{cases}$.

Essas são as relações básicas de mudança de um sistema para o outro, mas é fácil de se observar também na figura que $x^2 + y^2 = r^2$.

Com essas relações podemos escrever equações cartesianas em polares e vice-versa.

Vejamos alguns exemplos:

1) No sistema cartesiano, a equação $x = k$, com k constante é uma reta perpendicular ao eixo x. No sistema polar teremos $r.\cos\theta = k$, como uma reta perpendicular ao eixo polar. Da mesma forma, $r.sen\theta = k$ é uma reta paralela ao eixo polar.
2) A equação $y = m.x$ é de uma reta no sistema cartesiano passando pela origem.

No sistema polar teremos r.sen θ = m. r.cos θ $\Rightarrow$ $\dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta}$ = m $\Rightarrow$ tg θ = m $\Rightarrow$ θ = arctg m $\Rightarrow$ θ = k é uma reta passando pelo polo.

3) No plano cartesiano a equação $x^2 + y^2 = a^2$ é de uma circunferência centrada na origem do sistema e raio a. Como $x^2 + y^2 = r^2$, então $r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$ é a equação de uma circunferência centrada no polo e raio r.

4) A equação cartesiana $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ é de uma circunferência centrada no ponto (a, 0) sobre o eixo x, contendo a origem do sistema.

Mas, $(x - a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r^2 = 2.a.r\cos\theta \Rightarrow r = 2.a\cos\theta$ é a equação polar da circunferência que tem o centro em (a, 0) passando pelo polo, e cujo centro estará no eixo polar se a > 0 e no eixo π se a < 0.

A equação $r = 2.a\,\text{sen}\,\theta$ é de uma circunferência de centro $(a, \frac{\pi}{2})$ se $a > 0$ e centro $(a, \frac{3\pi}{2})$ se $a < 0$.

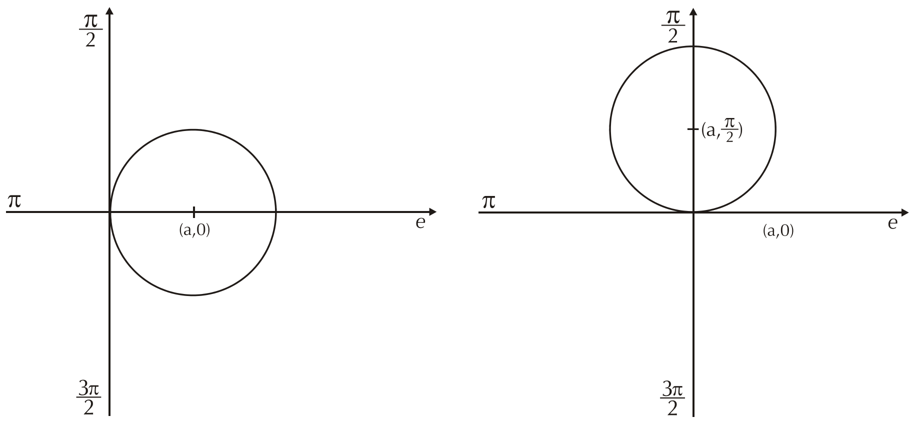

Figura 32 - Circunferências r = 2a cosθ e r = 2a senθ.

4. Gráficos de Curvas Polares

Para se traçar o gráfico de uma curva polar $r = f(\theta)$ é conveniente que se faça algumas observações:

1) Verificar se o polo está sobre o gráfico, fazendo $r = 0$.

2) Determinar os pontos onde r assume seus valores máximo e mínimo, valores esses que ocorrem na maioria das vezes quando as funções seno e cosseno são iguais a 1 , - 1 ou 0.

3) Como as funções trigonométricas são periódicas, é conveniente que analisemos a existência de simetrias:

Com relação ao eixo polar - os pontos (r, θ) e $(r, -\theta)$ pertencem ao gráfico, no caso da função cosseno, pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

Com relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$ - os pontos (r, θ) e $(-r, -\theta)$ pertencem ao gráfico, no caso da função seno, pois $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$.

5. Famílias de Curvas Polares

O sistema de coordenadas cartesianas é o mais utilizado porque é o sistema de coordenadas onde podemos melhor representar a maioria das curvas. Mas existem algumas famílias de curvas que no sistema cartesiano não são tão simples de ser trabalhadas como no sistema polar. Como exemplo, citamos as seguintes famílias:

5.1 Limaçons

A família das limaçons tem equação geral $r = a \pm b.\cos\theta$ ou $r = a \pm b \operatorname{sen}\theta$, onde a e b são constantes positivas. A relação entre essas constantes caracterizam três subfamílias de limaçons, que exemplificaremos a seguir:

a) $a = b$ (cardióide)

Exemplo: $r = 4 + 4\cos\theta$

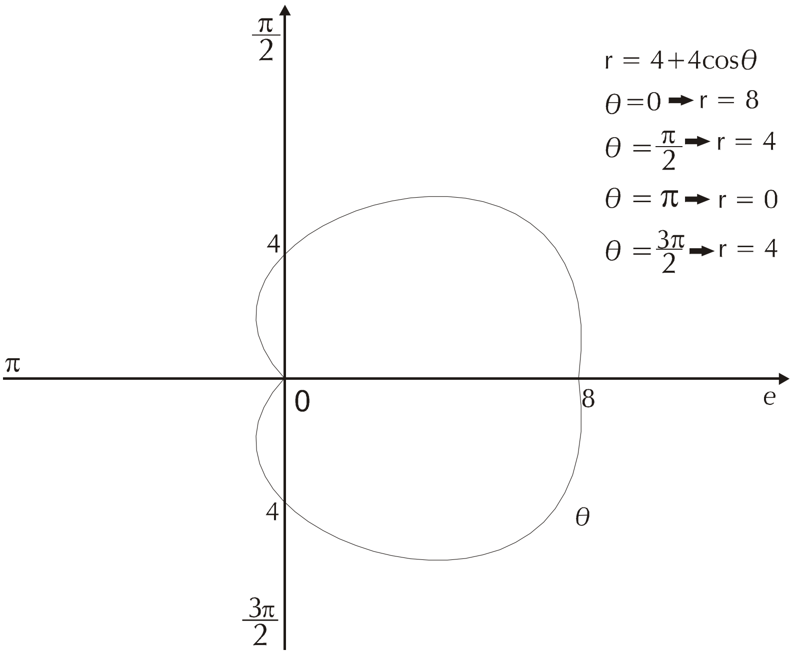

Figura 33 - Gráfico da cardióide r = 4 + 4 cos□.

b) a > b (limaçon sem laço)

Exemplo: $r = 4 + 2\cos\theta$

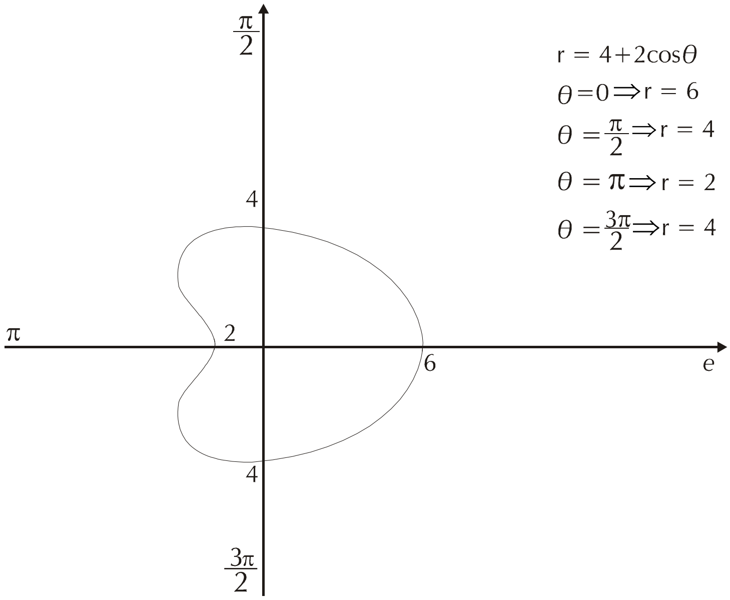

Figura 34 - Gráfico da limaçon sem laço.

c) a < b (limaçon com laço)

Exemplo: $r = 2 + 4\cos\theta$.

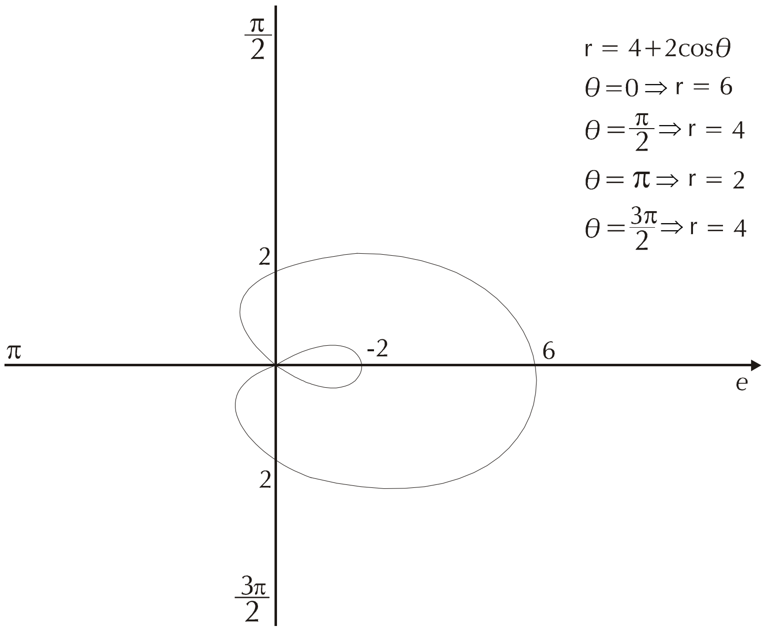

Figura 35 - Gráfico da limaço com laço.

5.1 Rosáceas

A família das rosáceas tem equação geral $r = a.\cos(n\theta)$ ou $r = a.\text{sen}(n\theta)$, onde a é uma constante real positiva e n é um número natural maior do que 1, pois para $n = 1$ temos um caso de circunferência já analisado.

O número de pétalas de uma rosácea depende do valor de n, pois:

Para n par, a rosácea terá 2n pétalas.

Para n ímpar, a rosácea tem n pétalas.

Exemplo: $r = 4.\cos 2\theta$.

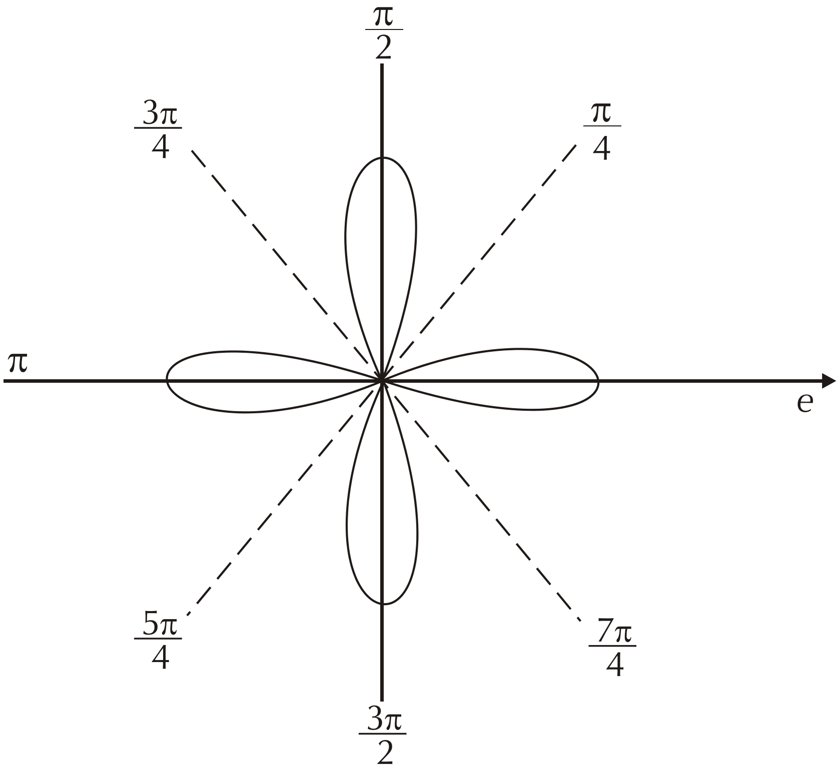

Figura 36 - Gráfico da rosácea com quatro pétalas.

6. Área de Regiões no Plano Polar

Seja $r = f(\theta)$ uma curva polar definida e contínua em um intervalo variando desde $\theta = \alpha$ até $\theta = \beta$.

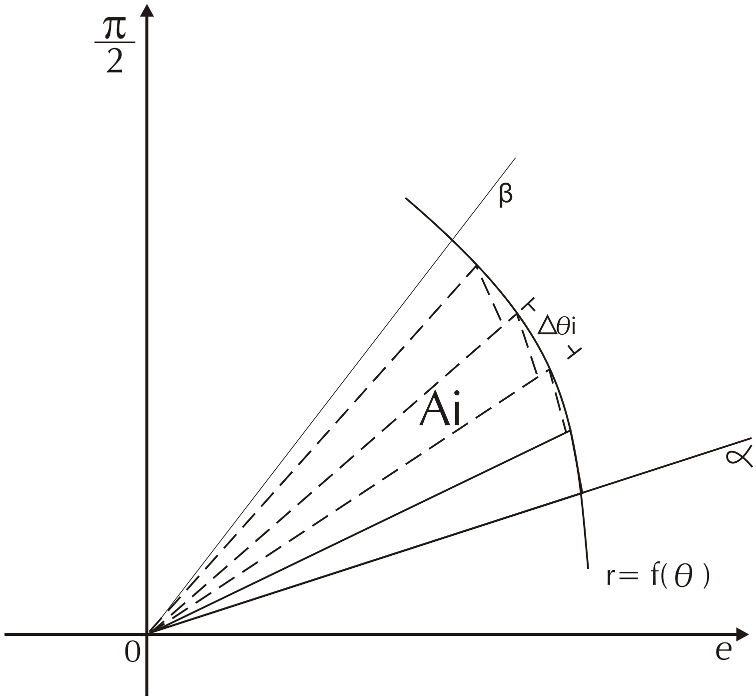

Figura 37 -

Podemos definir a área de uma região R no plano polar, limitada pela curva r = f(θ) e as retas $\theta = \alpha$ até $\theta = \beta$, que pode ser aproximada pela soma das áreas de n setores circulares., conforme temos na figura.

O setor circular típico tem raio $r_i = f(\theta_i)$ e ângulo central $\Delta\theta_i$, e sua área é dada por $A_i = \frac{1}{2} . f(\theta_i)^2 . \Delta\theta_i$.

Assim podemos afirmar que a área da região R é :

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}.f(\theta_i)^2.\Delta\theta_i \ .$$

Se fizermos o número n de partições tender para + ∞ , então $\Delta\theta_i$ tenderá para zero, portanto :

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}.f(\theta_i)^2.\Delta\theta_i \quad \Rightarrow \quad A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 \, d\theta \ .$$

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo Horizonte;** Vol I; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha. 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

ÁVILA, Geraldo; **Cálculo.** Vol. I; 6ª Ed. ; LTC ; 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo;** Vol. I; 5ª Ed. ; LTC. 2001 .

STEWART, James; **Cálculo.** Vol. I; São Paulo; Pioneira; 2002 .

THOMAS, George. **Cálculo,** Vol. I; Pearson ; São Paulo; 2003.

LEITHOLD , Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica;** Vol. I; 3ª Ed. ; Harbra; São Paulo. 1995.

Capítulo 7

Sequências e séries

Objetivos

- Definir seqüências
- Estudar a convergência de seqüências
- Definir séries infinitas
- Estudar a convergência de séries infinitas.

1. Apresentação

Nesta unidade sete definiremos seqüências numéricas, onde estuda-remos convergência com propriedades e critérios de convergência. Também trabalharemos com séries infinitas, analisando suas diversas formas e critérios de convergência.

2. Sequências

Podemos definir informalmente uma seqüência como uma lista ordenada de coisas, tais como, as letras do alfabeto, os meses do ano ou os dias da semana. Neste capítulo iremos estudar sequências numéricas infinitas, ou seja, seqüências cujos elementos são números reais.

Uma seqüência é definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos naturais sem o zero, ou seja, $N^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, e cuja imagem é constituída por números reais $a_n = f(n)$. Representamos uma seqüência por $\{f(n)\}$ ou $\{a_n\}$.

Exempos de seqüências:

$$\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$\{b_n\} = \{\frac{n}{n+1}\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

$$\{c_n\} = \{n^2\} = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$

3. Convergência

Uma seqüência $\{ a_n \}$ é dita convergente para um número L se, para todo número positivo ε existe um número inteiro positivo N tal que, para todo n > N temos que $| a_n - L | < \varepsilon$.

Esse número L deve ser único, e se ele não existir, dizemos que a seqüência é divergente.

Essa definição de convergência é equivalente à definição de limites no infinito, e isso nos permite dizer que se $\{ a_n \}$ é uma seqüência convergente para L, então $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

Veja como **Exemplo**:

- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, então a seqüência $\{ \frac{1}{n} \}$ converge para 0.
- Se $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, então toda sequencia da forma $\{ a^{1/n} \}$ converge para 1, pois $\lim\limits_{n \to \infty} a^{1/n} = a^0 = 1$.
- A seqüência $\{ \sqrt{n} \}$ diverge pois $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty$.
- A seqüência $\{ (-1)^{n+1} (\frac{n-1}{n}) \}$ é também divergente, pois

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^{n+1} (\frac{n-1}{n}) = \lim_{n \to \infty} (-1)^{n+1} (1 - \frac{1}{n}) .$$

Esse limite não existe, pois quando n tende para ∞, $\frac{1}{n}$ tende para 0 e $(-1)^{n+1}$ faz com que o sinal da seqüência fique alternando em 1 e – 1 .

4. Propriedades da convergência

Sejam $\{ a_n \}$ e $\{ b_n \}$ duas seqüências tais que a primeira converge para A e a segunda para B, e k uma constante real.

1. Se $\{ c_n \}$ é uma seqüência tal que $c_n = a_n + b_n$, então $\{ c_n \}$ converge para $A + B$, pois $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) =$

$$\lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = A + B .$$

2. Se $\{c_n\}$ é uma seqüência tal que $c_n = a_n - b_n$, então $\{c_n\}$ converge para A - B, pois $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$.

3. Se $c_n = k$, então $\{c_n\} = \{k\}$ é uma seqüência constante que converge para k, pois $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} k = k$.

4. Se $c_n = k \cdot a_n$, então a seqüência $\{c_n\} = \{k \cdot a_n\}$ converge para k.A, pois $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot c_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} c_n = k \cdot A$.

5. Se $c_n = a_n \cdot b_n$, então a seqüência $\{c_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ converge para A. B, pois $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A.B$

6. Se $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, então a seqüência $\{c_n\} = \{\dfrac{a_n}{b_n}\}$ converge para $\dfrac{A}{B}$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, se $B \neq 0$.

5. Séries Infinitas

Para definir as séries infinitas tomemos uma seqüência $\{a_n\}$, e a partir dela vamos tomar uma nova seqüência $\{S_n\}$ somando os sucessivos elementos de $\{a_n\}$, de modo que :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

.

.

.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$

A seqüência $\{ S_n \}$ obtida dessa maneira é chamada de série infinita, e é denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$

Os números $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ são chamados de termos da série infinita, e os números $S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_n$ são chamados de somas parciais.

De outra forma podemos dizer que, se $\{ a_n \} = a_1, a_2, a_3, ...,$ $a_n...$ é uma seqüência infinita, então existe a ela associada uma série infinita $\{ S_n \} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Tomemos como exemplo a seqüência $\{ a_n \} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}$ ..... $\{ S_n \} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

As somas parciais dessa série são tais que :

$$S_1 = 1 = 2 - 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

.

.

.

$$S_n = S_{n-1} + S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que $\frac{1}{2^{n-1}} \to 0$, o que implica que $\{ S_n \} \to 2$.

De modo geral , podemos afirmar que para uma série $\{ S_n \}$, se a seqüência de suas somas parciais tem um limite S quando $n \to \infty$, então a série também converge para o mesmo S.

Vejamos se a série $\{S_n\} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ... + \frac{3}{10^n} + ...$ converge.

A sua seqüência de somas parciais é $S_1 = 0{,}3$, $S_2 = 0{,}33$,

$S_3 = 0{,}333$; .... , $S_n = 0{,}333333....$, que é uma dízima periódica.

Então $S_n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Portanto, a série converge para $S = \frac{1}{3}$.

Os dois exemplos que apresentamos são de uma classe de séries infinitas conhecidas como séries geométricas que definimos a seguir.

6. Séries Geométricas

Uma série é geométrica quando cada termo é obtido a partir de seu termo precedente multiplicando-se pelo mesmo número r.

A forma geral de uma série geométrica é:

$$\{S_n\} = a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + ... + a.r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$$

onde dizemos que a é o primeiro termo da série e r é a razão.

Para verificar se uma série geométrica converge ou diverge, façamos :

$$S_n = a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + ... + a.r^{n-1} \quad \text{e}$$

$$r.S_n = a.r + a.r^2 + a.r^3 + a.r^4 + ... + a.r^n.$$

Subtraindo a segunda da primeira igualdade, temos que

$S_n - r.S_n = a - a.r^n \Rightarrow S_n(1 - r) = a.(1 - r^n) \Rightarrow$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, sempre que $r \neq 1$.

Se $|r| < 1$, quando $n \to \infty$, portanto a série S_n converge para

$S = \frac{a}{1-r}$. então $|r^n| \to 0$

Se $|r| > 1$, então $|r^n| \to \infty$, logo a série diverge.

Para $r = 1$, a enésima soma parcial da série é :

$S_n = a + a.1 + a.1^2 + a.1^3 + \ldots + a.1^n = n.a$, e a série diverge quando $n \to \infty$.

Verifique o que ocorre com a série quando $r = -1$.

Exemplo 1:

Verifique se a série $\{S_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{\pi})^n$ converge.

$$S_n = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot (\frac{2}{\pi})^2 + \ldots + \frac{2}{\pi} \cdot (\frac{2}{\pi})^{n-1} + \ldots$$ é

uma série geométrica com $a = \frac{2}{\pi}$ e $r = \frac{2}{\pi} < 1$, logo ela converge para

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{\pi}}{1-\frac{2}{\pi}} = \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{\pi-2}{\pi}} = \frac{2}{\pi-2}.$$

Exemplo 2:

Expresse a dízima periódica 5,232323.... como a razão de dois números inteiros.

$$5{,}232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \ldots =$$

$$= 5 + \frac{23}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \ldots\right)$$

Assim, a série que aparece na sua composição é geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{100} < 1$

Então, $5{,}232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 5 + \frac{23}{100} \cdot \frac{1}{0{,}9} = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{9}$.

7. Propriedades da convergência

1. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são duas séries convergentes para A e B, respectivamente, então a série $\sum (a_n + b_n)$ converge para A + B.

2. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são duas séries convergentes para A e B , respectivamente, então a série $\sum (a_n - b_n)$ converge para A - B .

3. Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge, então tanto $\sum (a_n + b_n)$ como $\sum (a_n - b_n)$ divergem.

4. $\sum k.a_n$ = k . $\sum a_n$, para todo k real .

5. Se $\sum a_n$ converge, então $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

6. Se $\sum a_n$ diverge, então $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ não existe ou é diferente de zero.

7. Uma série $\sum a_n$ de termos não negativos converge se suas somas parciais são limitadas superiormente.

8. Testes de convergência

A grande dificuldade no estudo das séries infinitas é verificar se uma determinada série é convergente ou divergente. Apresentamos agora alguns testes que nos permitem dizer com segurança se uma série converge, mas não determinam o valor de S para o qual a série converge.

8.1 O Teste da Integral

Seja $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ uma seqüência de termos positivos. Se f(x) é uma função contínua e decrescente com valores positivos para todo $x \geq 1$, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ... , $f(n) = a_n$, então a série $\sum a_n$ será convergente se existir $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b f(x)dx$. Se o limite não existir, a série é divergente.

Exemplo:

Use o teste da integral para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge se p $\leq$ 1 e converge se p > 1 .

Solução:

Tomemos a função f(x) = $\frac{1}{x^p}$, de modo que $\lim_{b \to \infty} \int_1^b f(x)dx$ =

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p}$$

.

- Se p = 1 , a integral não existe, logo a série diverge.
- Se p < 1, $\lim_{b \to \infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p}$ = + ∞ , pois $b^{1-p} \to +\infty$ e a série diverge.
- Se p > 1, $b^{1-p} \to 0$, o que implica que $\lim_{b \to \infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p}$ = - $\frac{1}{1-p}$ e a série converge.

8.2 O Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Se $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ = p, então:

- A série converge se p < 1
- A série diverge se p > 0
- Nada se pode afirmar se p = 1.

Exemplo:

Aplique o teste da razão para verificar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$ converge.

Solução:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+1}{3^n}} = \frac{2.2^n+1}{3.3^n} \cdot \frac{3^n}{2^n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2.2^n+1}{2^n+1} .$$

Dividindo numerador e denominador por 2^n , temos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2.2^n+1}{2^n}}{\frac{2^n+1}{2^n}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}} .$$

Quando n $\to \infty$, então $\frac{1}{2^n} \to 0$, logo $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{3} < 1$, portanto a série converge.

Esse resultado mostra apenas que a série em questão converge, mas não dá o valor de convergência da série. Para verificar o valor de convergência da série, façamos :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

Essas duas séries são do tipo geométrica, a primeira com a = r = $\frac{2}{3}$, e a segunda com a = r = $\frac{1}{3}$.

Portanto, $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} .$$

Síntese do capítulo

Estudamos nesse capítulo as sequencias e as séries infinitas, onde analisamos propriedades de convergência para as sequências, fizemos um estudo das séries geométricas e apresentamos o teste da integral e o teste da razão como critérios para determinar a convergência de séries infinitas.

Atividades de avaliação

1. Encontre os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n!}$

c) $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

d) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

2. Encontre o termo geral das sequencias :

a) 1 , - 1 , 1 , - 1 , ...

b) 0 , 3 , 8 , 15 , 24 , ...

c) 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , ...

d) 2 , 6 , 10 , 14 , 18 , ...

e) 1 , $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{24}$, ...

f) 0 , - $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$, - $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{4}{5}$, ...

3. Verifique quais das seqüências convergem ou divergem. Em caso de convergir, determine o limite da seqüência :

a) $a_n = 3 + (0{,}1)^n$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

c) $a_n = \dfrac{1+2n}{1-2n}$

d) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

e) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$

f) $a_n = \dfrac{n^2}{3n-5}$

4. Escreva os primeiros quatro termos da série:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{5^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2^n} + \dfrac{2}{3^n} \right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{10^n}$

5. Verifique quais das séries convergem e quais divergem. Para as convergentes, calcule sua soma:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5} \right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n - 1}{9^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n}$

6. Expresse cada uma das dízimas, como uma razão de dois inteiros :

a) 0,45454545....

b) 36,418418418....

c) 3,47474747 ...

d) 2,354444444 ...

7. Use o teste da integral para verificar quais das seguintes séries convergem:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3+e^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})}$

8. Use o teste da razão para verificar se as séries abaixo convergem :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.\ln n}{3^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo Horizonte;** Vol II; Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha; 6ª Ed. Porto Alegre; Bookman. 2000.

STEWART, James. **Cálculo;** Vol. II; São Paulo; Pioneira; 2002 .

THOMAS, George. **Cálculo,** Vol. II; Pearson ; São Paulo; 2003.

LEITHOLD , Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica;** Vol. II; 3ª Ed.; Harbra; São Paulo. 1995.

Sobre o autor

Luciano Moura Cavalcante: Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1975) e especialização em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1977). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará e Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática, atuando principalmente no seguinte tema: matemática.

Matemática

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78263-92-8

LUMEN AD VIAM

Universidade Estadual do Ceará

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CAPES