Matemática

Matemática Elementar II

Trigonometria e Números Complexos

Cleiton Batista Vasconcelos
Manoel Américo Rocha

EdUECE

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Matemática

Matemática Elementar II

Trigonometria e Números Complexos

Cleiton Batista Vasconcelos Manoel
Américo Rocha

2ª edição
Revista
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo
Bibliotecária – CRB-3 / 623

V331m Vasconcelos, Cleiton Batista
Matemática elementar II : trigonometria e números complexos / Cleiton Batista Vasconcelos / Manoel Américo Rocha 2. ed. revisada. Fortaleza: EdUECE, 2015.

127 p. (Matemática)

ISBN: 978-85-7826-398-0

1. Matemática elementar. 3. Trigonometria. 3 . Números complexos I . Rocha , Manoel Américo. II. Título.

CDD: 516

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

Estas notas foram escritas para servirem de suporte para uma disciplina introdutória sobre o tema Trigonometria e Números Complexos de um Curso de Licenciatura em Matemática, com quatro horas semanais, durante um semestre.

Assim, e por isso, não se pretende abordar com profundidade todos os conteúdos: o estudo das funções secante e cossecante, por exemplo, foi feito de forma bem superficial, bem como não foram trabalhadas as funções inversas arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente.

Apesar disso, além de apresentar os conteúdos básicos dos dois temas e estabelecer a relação entre eles, elas pretendem introduzir os alunos no campo das demonstrações matemáticas, mostrando sua importância na construção de um conhecimento mais sólido.

As notas também têm a pretensão de mostrar a importância da História da Ma temática para a compreensão por parte dos alunos da evolução de um conceito até sua consolidação. Isso ocorre sobretudo, quando abordamos os números complexos.

O livro encontra-se dividido em cinco Unidades. Na primeira, abordamos as ra- zões trigonométricas de um ângulo agudo, enunciando e demonstrando a identidade fundamental da trigonometria e determinando fórmulas para calcular o seno da soma de dois ângulos agudos e o seno da diferença entre dois ângulos agudos em função das razões trigonométricas (seno e cosseno) desses ângulos. Na Unidade 2, introduzimos o círculo trigonométrico (ou circunferência trigonométrica) para estender as razões trigonométricas aos ângulos entre 0^o e 360^o, mostrando que, com estas definições, ainda valem as relações determinadas na unidade anterior. Concluímos essa Unidade enunciando e demonstrando as conhecidas leis do seno e do cosseno. Na Unidade 3, estudamos as funções trigonométricas, como funções reais de uma variável real, determinando seus domínios e imagens e fornecendo subsídios para a construção dos gráficos dessas funções. As duas últimas unidades são destinadas aos Números Complexos e encontram-se recheadas de informações históricas. Na Unidade 4, introduzimos os Números Complexos como números que podem ser escritos na forma $a + bi$, sendo a e b números reais, estendemos as operações fundamentais ao nosso novo campo numérico, definimos a norma e o conjugado de um número complexo e estabelecemos a relação entre elas.

Finalmente, na Unidade 5, apresentamos a interpretação geométrica de um número complexo e, a partir de sua forma polar, estabelecemos a relação entre trigonometria e números complexos.

Em todas as Unidades podem ser encontrados exercícios resolvidos e exercícios propostos que visam servir para os alunos fixarem os conceitos estudados.

Boa leitura

Os Autores

Capítulo 1

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Introdução

Nesta Unidade iniciaremos nosso estudo de trigonometria a partir de uma experiência na qual você poderá determinar as razões trigonométricas de um ângulo dado. Antes, entretanto, apresentaremos algumas informações históricas sobre a trigonometria. Após essa experiência, definiremos as razões seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo qualquer e estabeleceremos, as relações entre elas, redefiniremos as razões trigonométricas em função dos elementos de um triângulo retângulo — cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa — e mostraremos a identidade fundamental da trigonometria. Em seguida, calcularemos as razões trigonométricas de alguns ângulos particulares, iniciando a construção de nossa tabela trigonométrica. Finalmente, enunciaremos e demonstraremos as fórmulas de adição e de subtração, para o caso de ângulos agudos.

1. Um pouco de história

De origem grega, a palavra trigonometria significa medida de triângulos. Mais precisamente, medida das partes (elementos) de um triângulo.

TRI + GONO + METRIA

Três + ângulos + medida

A Trigonometria estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Historicamente, na sua origem, a trigonometria aparece associada a problemas de astronomia, agrimensura e navegação. Por isso, nessa época era dada muito mais atenção à Trigonometria esférica do que à plana.

Um grande nome da história da Trigonometria foi Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) – cognominado de Pai da Trigonometria – a quem se atribui a divisão da circunferência em 360 partes, a atribuição do nome "arco de um grau" a cada parte em que a circunferência ficou dividida e a divisão de cada arco de 1 grau em 60 partes, obtendo o arco de 1 minuto. Também se atribui a Hiparco a construção da primeira "tabela trigonométrica" com os valores das cordas de ângulos de 0º a 180º.

Outro nome associado à história da trigonometria foi Ptolomeu (séc. II), que também construiu uma "tabela trigonométrica" com cordas para arcos de 0º a 180º, crescendo de meio em meio grau. Na sua obra, Almagesto, Ptolomeu reuniu os conhecimentos existentes sobre astronomia e trigonometria.

A Viète (séc. XVI) deve-se a aplicação da Trigonometria a problemas algébricos e a Euler (séc. XVIII) a introdução dos conceitos de seno, cosseno e tangente como números e as notações atualmente utilizadas.

Foi Roberval, em 1635, quem primeiro traçou um esboço de uma curva do seno, dando assim um tratamento funcional à Trigonometria. Mas, foi o estudo dos movimentos periódicos, realizados no século XIX por Fourier, que proporcionou a ligação entre a Trigonometria e a Análise.

Atualmente, a Trigonometria aparece aplicada a problemas de mecânica, eletricidade, música, engenharia, medicina e muitos outros campos.

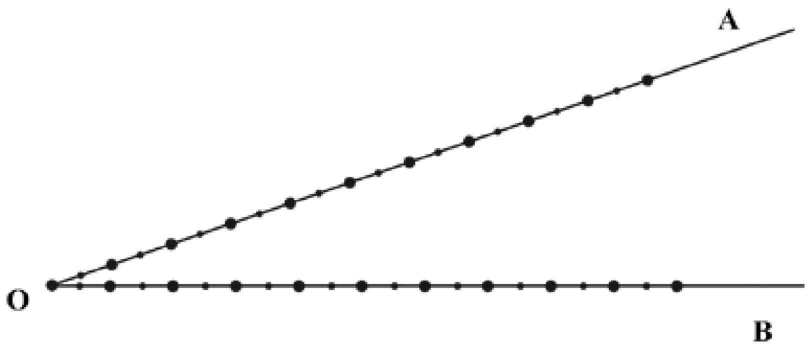
2. Pra começar... que tal uma experiência?

Vamos iniciar nosso estudo de trigonometria com uma experiência.

Você vai verificar na prática alguns dos resultados que estudaremos a seguir. Entretanto, é importante mencionarmos que o que faremos aqui não se trata de uma demonstração. Trata-se, apenas, de uma verificação empírica de um resultado e, como tal, pode não fornecer valores precisos. Mas teremos uma boa aproximação.

Observemos o ângulo agudo $\angle AOB$, a seguir, cujos lados encontram-se graduados de 0,5 em 0,5 centímetro.

Saiba Mais:
Existem muitas notações para representar um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Entre elas, $A\hat{O}B$, $\hat{O}$, $\angle AOB$. Usaremos, na maioria das vezes, a notação $\angle AOB$.



Agora, faça o que é pedido:

1. Escolha dois pontos A_1 e A_2 na semirreta $\overrightarrow{AO}$.
2. Meça, com uma régua graduada em centímetros, os segmentos OA_1 e OA_2 e anote os resultados. (Se não dispuser de uma régua, a partir da graduação dada, dê uma aproximação para estas medidas).
3. Trace por A_1 e A_2, retas perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{OB}$, determinando neste lado os pontos B_1 e B_2.
4. Meça, com a mesma régua graduada em centímetros, os segmentos OB_1 e OB_2 e anote os resultados. (Novamente, se não dispuser de uma régua, a partir da graduação dada, dê uma aproximação para estas medidas).

É claro que, como os pontos A_1 e A_2 são distintos, as medidas encontradas para os segmentos OA_1 e OA_2 são diferentes. O mesmo ocorrendo para as medidas $\overline{OB_1}$ e $\overline{OB_2}$.

Agora, antes de fazer o que pediremos, arrisque um palpite. Os valores que você encontrará nos itens 5 e 6, a seguir, serão iguais ou diferentes?

Não prossiga sem antes dar seu palpite.

5. Divida $\overline{OB_1}$, o valor encontrado para OB_1, pelo valor $\overline{OA_1}$, encontrado para OA_1, e anote o resultado.
6. Divida o valor encontrado $\overline{OB_2}$ pelo valor $\overline{OA_1}$ e anote o resultado.
7. Os resultados obtidos em 5 e 6 foram iguais ou foram diferentes? Anote a diferença, se houver.
8. Meça, ainda com a mesma régua, os segmentos A_1B_1 e A_2B_2 e anote os resultados.
9. Divida o valor encontrado para a medida $\overline{A_1B_1}$ pelo encontrado para a medida $\overline{OA_1}$ e anote o resultado.
10. Agora você vai dividir o valor encontrado para a medida $\overline{A_2B_2}$ pelo valor encontrado para a medida $\overline{OA_1}$. Mas antes, você vai arriscar outro palpite. O valor que você vai encontrar agora será igual ao ou diferente do valor encontrado no item 9?
11. Divida e compare os resultados.

E aí? Suas conjecturas se confirmaram? Você acertou ou errou?

Glossário:
Conjectura: suposição, palpite, previsão.
Uma conjectura matemática pode ou não ser fundamentada na verdade matemática. Uma conjectura que se mostra ser verdadeira transforma-se em um teorema ou proposição.

12. Você ainda pode continuar com essa experiência dividindo as medidas $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ pelas medidas $\overline{BO_1}$ e $\overline{BO_2}$, respectivamente, e verificando se os resultados encontrados são iguais ou diferentes.

Conclusão:

Mesmo podendo ter obtido valores diferentes para os resultados nas três situações apresentadas, a matemática nos diz que eles devem ser iguais. Exatamente iguais. Ou seja:

- $\dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \ldots = \dfrac{\overline{OB_i}}{\overline{OA_i}}$
- $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \ldots = \dfrac{\overline{A_iB_i}}{\overline{OA_i}}$
- $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \ldots = \dfrac{\overline{A_iB_i}}{\overline{OB_i}}$

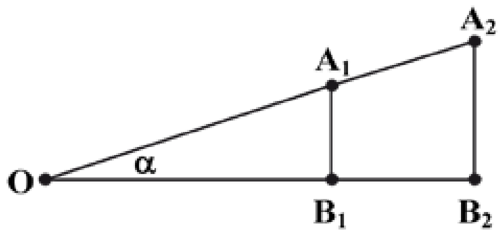
quaisquer que sejam os pontos A_i e B_i, obtidos como A_1 e B_1 foram obtidos. Qualquer diferença encontrada é resultante da imperfeição de suas medições.

Surpreso? Assim é a Matemática!

Saiba Mais:
Os resultados obtidos por meio de medições são sempre valores aproximados, não devendo, portanto, serem utilizados em situações nas quais se necessita de valores exatos.

3. Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Na experiência anterior, quando traçamos os segmentos A1B1 e A2B2, obtivemos os triângulos OA1B1 e OA2B2, retângulos em B1 e B2, respectivamente.



Desde que os ângulos dos dois triângulos são congruentes, pois, $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$, $\angle OB_1A_1 = \angle OB_2A_2$ (pois, ambos são retos) e $\angle OA_1B_1 = \angle OA_2B_2$ (ambos medem $90^o - \alpha$), os triângulos são semelhantes e, portanto, as razões $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}, \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}}, \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}, \dfrac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}}, \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$ e $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}}$ dependem, exclusivamente, do ângulo α, não dependendo dos comprimentos de cada segmento, em particular.

Podemos, portanto, definir para um ângulo agudo α, na situação da figura anterior, as razões trigonométricas "seno de α", "cosseno de α" e "tangente de α" que serão indicadas, respectivamente, por sen(α), cos(α) e tg(α), como segue:

Definição: *Dado um ângulo agudo α, na situação da figura anterior, as razões trigonométricas "seno de α" (senα), "cosseno de α" (cosα) e "tangente de α (tgα) são definidas por:*

$$\text{sen}\alpha=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}},\cos\alpha=\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}\text{ e } \text{tg}\alpha=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$$

Note que, de acordo com estas definições, vale a seguinte proposição:

Proposição: *Se α é um ângulo agudo, então tgα =* $\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Prova: *De fato, usando a mesma notação anterior, temos que:*

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}}{\dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}=\text{tg}\alpha.$$

3.1. Razões trigonométricas e os elementos de um triângulo retângulo

Em qualquer triângulo OAB, retângulo em $\angle$B, os lados OB e AB são ditos adjacentes ao ângulo reto e são chamados de **catetos**. O lado AB é o maior dos lados, é dito oposto ao ângulo reto e é chamado de **hipotenusa**.

Saiba Mais:
Em um triângulo retângulo, os catetos são os dois lados menores e a hipotenusa é o lado maior.

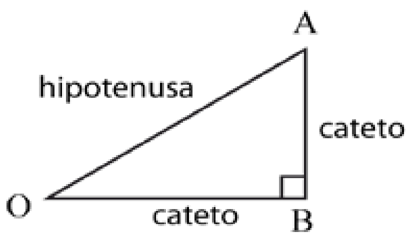


Figura 1.a

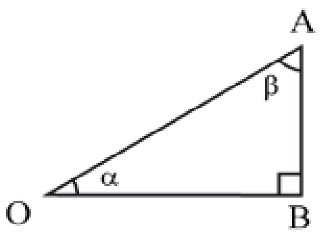


Figura 1.b

Denotando por α e β os ângulos agudos do triângulo OAB, retângulo em $\angle B$, como na Figura 1.b, anterior, o cateto AB é dito oposto ao ângulo α e o cateto OB é dito adjacente ao ângulo α. De maneira semelhante, dizemos que AB é adjacente ao ângulo β e OB é oposto ao ângulo β.

Assim, para o ângulo agudo α do triângulo OAB, retângulo em $\angle B$, como na Figura 1.b, podemos redefinir as razões trigonométricas como segue:

Definição: *Se α é um ângulo agudo do triângulo OAB, retângulo em $\angle B$, então*

$$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}.$$

De maneira semelhante, temos para o ângulo β as seguintes razões trigonométricas:

$$\text{sen}\beta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}};$$

$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}};$$

$$\text{tg}\beta = \frac{\text{cateto } \textit{oposto} \text{ ao ângulo } \beta}{\text{cateto } \textit{adjacente} \text{ ao ângulo } \beta} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}.$$

Note que, de acordo com as redefinições anteriores, temos a seguinte proposição:

Proposição: *Se α e β são os ângulos agudos de um triângulo retângulo, então*

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \text{sen}\beta \text{ e } \text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\beta}.$$

Saiba Mais:
A razão $\frac{1}{tg\beta}$ também é chamada de cotange de β e é indicada por cotgβ.

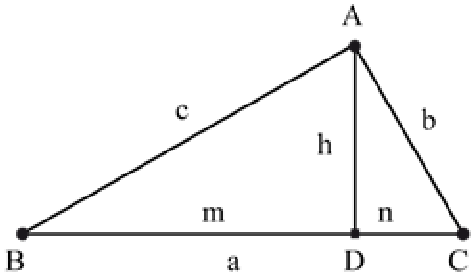
Mais ainda, como para todo ângulo agudo α sempre é possível construirmos um triângulo retângulo com ângulos agudos α e $90^o - \alpha$, de acordo com a proposição anterior, temos que:

Proposição: *Se α é um ângulo agudo, então senα = cos(90^o - α).*

4. Identidade fundamental da trigonometria

Chamamos de identidade fundamental da trigonometria a uma relação entre as razões seno e cosseno de um ângulo agudo α, que pode ser obtida a partir das relações métricas que envolvem os lados de um triângulo retângulo. Mais precisamente, a partir do teorema de Pitágoras.

4.1. Relações métricas no triângulo retângulo



Consideremos o triângulo ABC, retângulo em ∠A, cujos lados AB, BC e CA medem, respectivamente, c, a e b e tal que a altura AD, relativa à hipotenusa, mede h e divide o lado BC em dois segmentos, BD e DC de comprimentos m e n, respectivamente.

A primeira relação métrica que podemos obter é:

(1): $a = m + n$.

Da figura anterior, podemos, facilmente, perceber que os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes e que, portanto, valem as seguintes igualdades:

$$(2): \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \therefore b^2 = am$$

$$(3): \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \therefore c^2 = an$$

$$(4): \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \therefore h^2 = am$$

e, finalmente, a mais conhecida de todas, o teorema de Pitágoras:

(5): $a^2 = b^2 + c^2$.

Atividades de avaliação

Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que abordem ou verifiquem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 01 de exercícios.

4.2. Identidade fundamental da trigonometria

A identidade conhecida como identidade fundamental da trigonometria, afirma que, para qualquer ângulo agudo α vale a igualdade

$$\mathbf{(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1.}$$

De fato, tomando como α o ângulo $\angle B$, na figura anterior, temos que $sen\alpha = \dfrac{b}{\alpha}$ e $cos\alpha = \dfrac{c}{\alpha}$.

Da igualdade (5), ou seja, do teorema de Pitágoras, temos que

$$(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

provando a proposição:

> **Proposição:** Identidade fundamental da trigonometria
>
> Se α é um ângulo agudo qualquer, então $\mathbf{(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1}$.

Anote:
Notação: As potências $(sen\alpha)^2$, $(cos\alpha)^2$, $(tg\alpha)^2$, etc., geralmente, são indicadas por $sen^2\alpha$, $cos^2\alpha$, $tg^2\alpha$, respectivamente. Em geral, $sen\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$,... significam $(sen\alpha)$, $(cos\alpha)$, $(tg\alpha)$,...

5. Alguns ângulos especiais

Usaremos essa seção para calcular as razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Inicialmente, lembraremos que se α e β são os ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\alpha = 90^\circ - \beta$. Além disso, como já sabemos

$$\mathbf{sen\alpha = cos\beta \text{ e } cos\alpha = sen\beta.}$$

Assim, para os ângulos de 30º, 60º e 45º, vamos ter as seguintes igualdades:

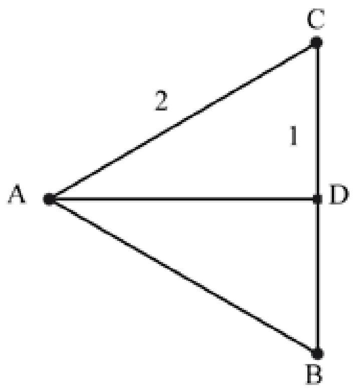
- $sen(30^\circ) = cos(90^\circ - 30^\circ) = cos(60^\circ)$,
- $cos(30^\circ) = sen(90^\circ - 30^\circ) = sen(60^\circ)$,
- $sen(45^\circ) = cos(90^\circ - 45^\circ) = cos(45^\circ)$,

e, portanto, basta determinarmos sen(30º), cos(30º) e sen(45º).

Na realidade, veremos que vale o que consta da seguinte tabela.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

5.1. As razões trigonométricas de 30º



Consideremos o triângulo equilátero ABC, de lados medindo 2 unidades. Note que a medida "2 unidades" não vai influenciar de forma alguma nos valores encontrados. Poderíamos ter tomado um triângulo equilátero de lado com qualquer medida. Não faria diferença. A escolha pelas 2 unidades foi somente para facilitar as contas.

A altura relativa ao lado BC determina, neste lado, um ponto D que divide o lado em dois segmentos congruentes, BD e DC, ambos medindo 1 unidade. Essa mesma altura também é bissetriz do ângulo A, dividindo-o em dois ângulos congruentes de 30º.

Assim, temos que $\text{sen}(30°)=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$.

Podemos calcular o cosseno de 30º de duas maneiras distintas: uma delas usando a identidade fundamental da trigonometria e a outra usando a definição de cosseno de um ângulo agudo. Vejamos como isso pode ser feito.

Modo 01:

Como $\text{sen}^2(30°) + \cos^2(30°) = 1$, temos que $\cos^2(30°) = 1 - \text{sen}^2(30°)$.

E, assim, $\cos^2(30°) = 1\text{-sen}^2(30°) = 1\text{-}(\frac{1}{2})^2$.

Isto nos dá $\cos^2(30°) = \frac{3}{4}$ E, assim, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Modo 02:

Usando o teorema de Pitágoras, podemos determinar que a altura de um triângulo equilátero de lado m é $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. Como estamos trabalhando com um triângulo equilátero de lado 2, temos que sua altura é $\sqrt{3}$ e, portanto,

$$\cos(30^\circ) = \frac{m\sqrt{3}}{2}.$$

Para calcularmos a tangente de 30º, basta lembrarmos que $tg(30^\circ) = \frac{sen(30^\circ)}{\cos(30^\circ)}$ e, assim, temos

$$tg(30^\circ) = \frac{sen(30^\circ)}{\cos(30^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5.2. As razões trigonométricas de 60º

Para calcularmos as razão trigonométricas — seno e cosseno — de 60º, lembramos que 60º = 90º – 30º e, assim, temos:

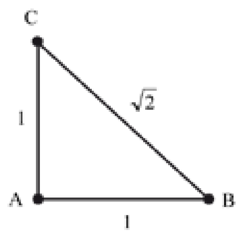
- $sen(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; e
- $\cos(60^\circ) = se(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

e, desde que $tg(60^\circ) = \frac{sen(60^\circ)}{\cos(60^\circ)}$, teremos:

- $tg(60^\circ) = \frac{sen(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

5.3. As razões trigonométricas de 45º

Consideremos o triângulo isósceles ABC, retângulo em A, cujos catetos medem 1 unidade, conforme a figura a seguir. Novamente, a medida “1 unidade” não vai influenciar de forma alguma nos valores encontrados.



Como sabemos, os ângulos agudos do triângulo ABC são congruentes e medem 45º cada um, e sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$.

Assim, usando as definições de seno, cosseno e tangente, temos que

- $\text{sen}(45^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos(45^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\text{tg}(45^\circ) = \dfrac{\text{sen}(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = 1$.

Pare e Pense!

Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 02 de exercícios.

6. Fórmula de adição e fórmula de subtração

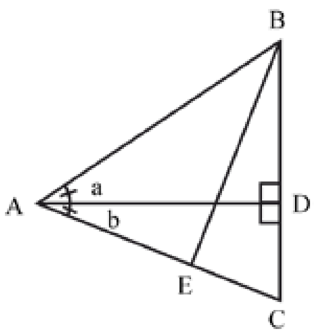


Figura 1

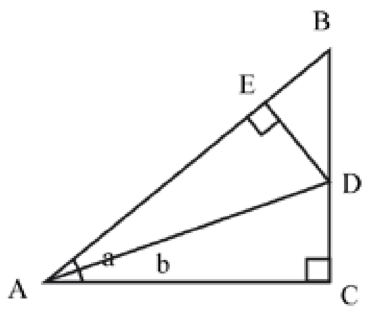


Figura 2

Vamos utilizar as figuras 1 e 2 anteriores para mostrar que se a e b são ângulos agudos, tais que a + b e a – b são, ainda, ângulos agudos, então valem as duas igualdades seguintes:

- sen(a + b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a); e
- sen(a– b) = sen(a).cos(b) – sen(b).cos(a).

Estes resultados nos serão úteis na ampliação de nossa tabela trigonométrica.

6.1. Calculando sen(a + b)

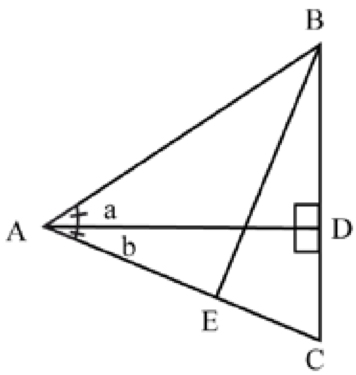


Figura 1

Na figura 1, suponhamos que os triângulos ABD e ACD sejam retângulos em D e que a e b sejam, respectivamente, as medidas dos ângulos ∠BAD e ∠DAC, em graus. Suponhamos, ainda, que o lado AB meça 1 unidade e que BE seja a altura do triângulo ABC, relativa ao lado AC.

Vamos mostrar a igualdade sen(a + b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a) (I) calculando a área S do triângulo ABC de duas maneiras distintas.

Como a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura relativa a essa base, temos inicialmente que:

$$S = \frac{\overline{AC}.\overline{BE}}{2} .$$

E como, de acordo com a figura 1, $\text{sen}(\ a + b\ ) = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \overline{BE}$, temos que:

$$2S = \overline{AC}\ \text{sen}(a + b).\ (II)$$

Por outro lado, a área S do triângulo ABC também pode ser calculada como a soma das áreas dos triângulos ABD e ACD. Neste caso, temos que:

$$S = \frac{\overline{AD}.\overline{BD}}{2} + \frac{\overline{AD}.\overline{CD}}{2} .$$

E como $\overline{BD} = \text{sen}(a)$ e, $\overline{AD} = \cos(a)$, temos

$$2S = \overline{AD}\ \text{sen}(a) + \overline{CD}\ \cos(a).\ (III)$$

Igualando os resultados obtidos em (II) e (III), teremos

$$\overline{AC}\ \text{sen}(a + b\ ) = \overline{AD}\ \text{sen}(a) + \overline{CD}\ \cos(a).$$

E, dividindo ambos os membros por $\overline{AC}$, obtemos

$$\text{sen}\ (a + b) = \frac{\overline{AD}}{\overline{Ac}}\ \text{sen}(a) + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\ \cos(a),$$

ou seja,

sen(a + b) = sen(a) cos(b) + sen(b) cos(a).

Provando a seguinte proposição:

Proposição: *Se a e b são ângulos agudos tais que $0^o < a+b < 90^o$, então*

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a).$$

Fazendo a = b, na proposição anterior, temos o seguinte corolário:

Corolário: *Se a é um ângulo agudo tal que $0^o < a < 45^o$, então*

$$\text{sen}(2a) = 2\text{sen}(a)\cos(a).$$

6.2. Calculando sen(a - b)

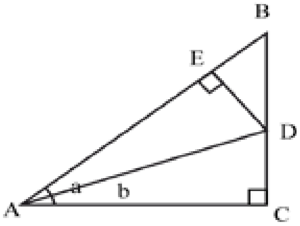


Figura 2

Na figura 2, suponhamos que o triângulo ABC seja retângulo em ∠ C e que ângulos ∠ BAC e ∠ DAC meçam, a e b graus, respectivamente. Suponhamos, ainda, que DE seja perpendicular a AB e que AB meça 1 unidade.

Vamos mostrar a igualdade

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$$

calculando a área do triângulo ABD de duas maneiras diferentes.

Inicialmente, temos que a área S, do triângulo ABD, pode ser calculada por:

$$S = \frac{\overline{AB}\,.\,\overline{DE}}{2}.$$

E, desde que $\overline{AB} = 1$ e $\overline{DE} = \overline{AD}\,\text{sen}(a - b)$, temos

$$2S = \overline{AD}\,\text{sen}(a - b). \text{ (i)}$$

Por outro lado, temos

$$2S = \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BC}}{2} - \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{DC}}{2},$$

ou seja,

$$2S = \overline{AC}\,.\,\overline{BC} - \overline{AC}\,.\,\overline{DC}. \text{ (ii)}$$

De (i) e (ii), temos que

$$\overline{AD}\ \text{sen}(a - b) = \overline{AD}\ .\ \overline{BC} - \overline{AC}\ .\ \overline{DC}$$

o que nos dá

$$\text{sen}(a - b) - \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\ .\ \overline{BC} - \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}\ .\ \overline{AC},$$

ou, ainda,

$$\text{sen}(a – b) = \text{sen}(a).\cos(b) – \text{sen}(b).\cos(a).$$

Provando a seguinte proposição:

Proposição: *Se a e b são ângulos agudos, tais que a – b também é um ângulo agudo, então*

$$\text{sen}(a – b) = \text{sen}(a).\cos(b) – \text{sen}(b).\cos(a).$$

Pare e Pense!

Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 03 de exercícios.

Síntese do Capítulo 1

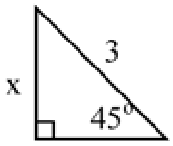
Nesta Unidade você aprendeu a...

- A origem e um pouco da história da trigonometria.
- Como definir as razões trigonométricas — seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante — de um ângulo agudo.
- A relacionar as razões trigonométricas de um ângulo agudo com os lados de um triângulo retângulo.
- A relação entre as razões trigonométricas de um ângulo e as de seu complemento.
- Identidade Fundamental da Trigonometria.
- Determinar, diretamente, as razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.
- Fórmula de adição de dois ângulos agudos, cuja soma ainda é um ângulo agudo.

- Fórmula de subtração entre dois ângulos agudos cuja diferença entre o maior e o menor é, ainda, um ângulo agudo.

Atividades de avaliação

1. Determine o valor de x, na figura ao lado, sabendo que $\text{sen}(45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Solução

Sabemos que $\text{sen}(45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Por outro lado, pela figura, temos que $\text{sen}(45^\circ) = \dfrac{x}{3}$.

Assim, devemos ter:

$$\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore x = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Observemos que o valor de x poderia ser determinado sem usar trigonometria. Basta notarmos que, como um dos ângulos agudos do triângulo, na figura, mede 45°, o outro também deve medir 45° (pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°) e, consequentemente, o triângulo da figura é isósceles.

Assim, o outro lado também mede x. Usando o teorema de Pitágoras, teremos:

$$x^2 + x^2 = 3^2 \therefore 2x^2 = 9 \therefore x = \sqrt{\frac{9}{2}} \therefore x = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2. Dado um ângulo agudo θ, as inversas das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de θ são chamadas, respectivamente, de cossecante, secante e cotangente de θ e são denotadas por $\text{cossec}\theta$, $\sec\theta$ e $\text{cotg}\theta$. Determine sec(30°), cossec(30°) e cotg(30°).

Solução

De acordo com as informações do enunciado do problema, temos que:

- $\sec(30°) = \dfrac{1}{\cos(30°)} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;

- $\text{cossec}(30°) = \dfrac{1}{\text{sen}(30°)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{1} = 2$;

- $\text{cotg}(30°) = \dfrac{\cos(30°)}{\text{sen}(30°)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

3. Sabendo que θ é um ângulo agudo tal que sen$\theta = \dfrac{1}{4}$, determine as demais razões trigonométricas de θ.

Solução

As razões trigonométricas de θ procuradas são cosθ, tgθ, secθ, cossecθ e cotgθ.

Da identidade fundamental da trigonometria, temos que $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ e, assim,

$$\cos^2\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{14}$$

Como tg$\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$, temos que

tg$\theta = \dfrac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

As demais razões trigonométricas de θ são:

- cossec$\theta = 4$;

- sec$\theta = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$; e

- cotg$\theta = \dfrac{15}{\sqrt{15}} = \dfrac{15\sqrt{15}}{15} = \sqrt{15}$.

4. Mostre que, se α é um ângulo agudo, então $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$.

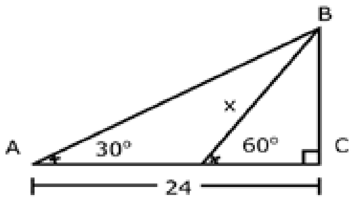
Solução

Temos que $tg^2\alpha = \dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ e, consequentemente, temos a igualdade

$$1 + tg^2\alpha = 1 + \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

Assim, $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$, mostrando a igualdade.

5. Determine o valor de x, na figura a seguir.



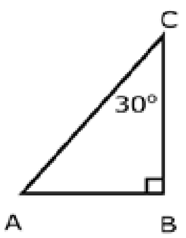
Solução

De acordo com a figura, $tg30° = \dfrac{\overline{BC}}{24}$ e, desde que $tg30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, teremos $\overline{BC} = 8\sqrt{3}$.

Por outro lado, da figura, temos que $sen(60°) = \dfrac{\overline{BC}}{x}$ e, desde que $sen(60°) = \dfrac{3}{2}$, teremos $x = 16$.

6. Uma escada de 12 metros de comprimento encontra-se apoiada em uma parede, formando com esta parede um ângulo de 30°. A que altura do chão encontra-se o topo da escada?

Solução



A figura ao lado ilustra nossa situação-problema.

Nela o segmento AC representa a escada e os segmentos AB e BC representam o chão e a parede, respectivamente.

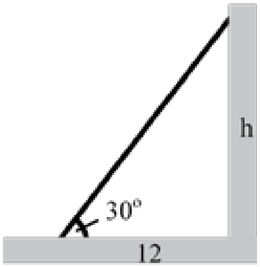
O problema nos pede o comprimento de BC e como a escada possui 12 metros de comprimento, temos que $\overline{AC} = 12$.

Da figura, temos que $\cos(30°) = \frac{\overline{BC}}{12}$. Desde que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$.

7. Qual a altura de uma árvore que projeta uma sombra de 12 metros, quando os raios do Sol formam ângulos de 30º com o solo?

Solução

A figura ao lado reproduz nossa situação problema.



Nestas condições, temos que

tg30º = $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{12}$. Assim, h = $4\sqrt{3}$ m.

8. Uma identidade é uma equação que, assim como a equação $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, é verdadeira para quaisquer valores que se atribua à variável ou às variáveis. Verifique se as seguintes igualdades são identidades.

a) $\frac{\cos x}{1 + \text{sen} x} = \frac{1 - \text{sen} x}{\cos x}$ b) $\frac{\sec x}{\text{tg} x + \text{cotg} x} = \text{sen} x$

Solução

a) Para verificarmos se determinada igualdade é ou não uma identidade, podemos seguir o caminho inverso e verificarmos se chegamos a uma igualdade verdadeira. O processo é mais ou menos o seguinte:

1. Se vale a igualdade $\frac{\cos x}{1 + \text{sen} x} = \frac{1 - \text{sen} x}{\cos x}$, então deve valer a igual dade $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$.

2. Se vale a igualdade $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, então deve valer a igualdade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

3. Como vale a igualdade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então deve valer a igualdade $\frac{\cos x}{1 + \text{sen} x} = \frac{1 - \text{sen} x}{\cos x}$.

De fato, seguindo o caminho inverso teremos:

4. Como $sen^2x + cos^2x = 1$, temos que $cos^2x = 1 - sen^2x$.

5. De $cos^2x = 1 - sen^2x$, temos que $cos^2x = (1 - senx)(1 + senx)$.

6. Desta última igualdade, temos $\frac{\cos x}{1 + \text{senx}} = \frac{1 - \text{senx}}{\cos x}$.

Mostrando o Resultado

9. Usaremos a fórmula $sen(a - b) = sen(a).cos(b) - sen(b).cos(a)$ para calcular as razões trigonométricas de 15º.

Solução

Inicialmente, temos que

$sen(15^o) = sen(45^o - 30^o) = sen(45^o).cos(30^o) - sen(30^o).cos(45^o)$,

e assim,

$sen(15^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Usando os valores aproximados 2,45 e 1,41 para $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$, respectivamente, temos que $sen(15^o) = 0{,}625 - 0{,}353 = 0{,}272$.

Como, $sen^2(15^o) + cos^2(15^o) = 1$, temos que $cos(15^o) = 0{,}962$ e, consequentemente, $tg(15^o) = 3{,}537$.

10. Usando a fórmula $sen(a + b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a)$, calcularemos as razões trigonométricas de 75º.

Solução

Temos que

$sen(75^o) = sen(45^o + 30^o) = sen(45^o).cos(30^o) + sen(30^o).cos(45^o)$.

Ou seja,

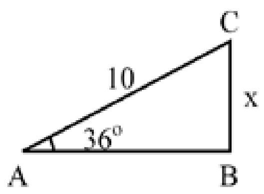
$\text{sen}(75^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2}$.

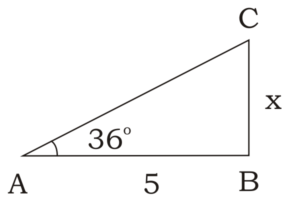
Fazendo, novamente, $\sqrt{6} = 2{,}45$ e $\sqrt{2} = 1{,}41$, obemos $sen(75^o) = 0{,}978$ e, usando a igualdade $sen^2 75^o + cos^2 75^o = 1$, teremos $cos(75^o) = 0{,}21$ e $tg(75^o) = 4{,}66$.

Atividades de avaliação

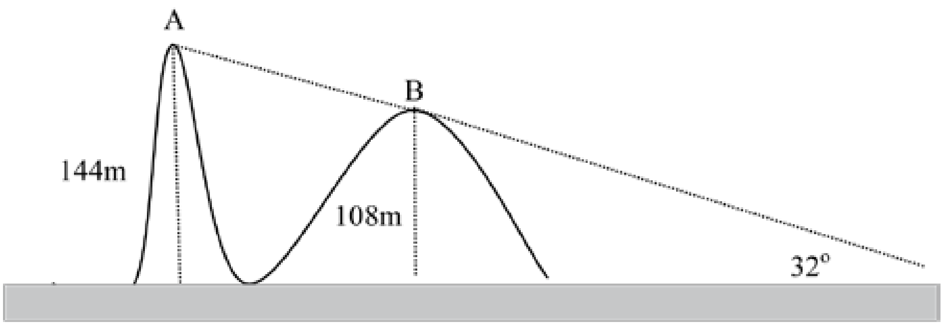
1. Com o auxílio de uma régua, um transferidor e uma máquina de calcular, calcule um valor aproximado para o seno, o cosseno e a tangente de 35º.

2. Usando os valores aproximados sen36º = 0,58 e cos36º = 0,80, calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a) 

b) 

3. Um teleférico deve unir dois pontos A e B de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária, um engenheiro mediu as aturas dos morros em relação ao chão (plano horizontal), obtendo 108m e 144m. Em seguida, mediu o ângulo que a reta $\overrightarrow{AB}$ forma com a horizontal, obtendo 32º. Calcule a distância entre A e B, sabendo que sen32º = 0,52; cos32º = 0,84 e tg32º = 0,62.



4. Um avião se eleva a um ângulo de 10o do solo. Quando se encontra a uma altitude de 1,5 km, a que distância está do ponto de início da elevação? (Use tg10o = 0,18)

5. Para medir a largura de um rio, um homem escolhe três pontos A, B e C, sendo A e B na mesma margem e distantes 100m um do outro, e C na outra margem. Calcule a largura aproximada do rio, sabendo que o triângulo ABC é retângulo em B, o ângulo CAB mede 66º e que tg(66º) = 2,25 (valor aproximado).

6. Sabendo que $\cos(30^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, determine a medida do maior cateto de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 6cm e um dos ângulos agudos mede 60^o.

7. Um triângulo retângulo é tal que seus lados medem 1, 2 e $\sqrt{5}$ centímetros. Determine as razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente – de seu maior ângulo agudo. Consulte uma tabela trigonométrica e determine um valor aproximado desse ângulo.

8. Um triângulo retângulo é tal que seus catetos medem 2 e 4 centímetros. Determine as razões trigonométricas de seus dois ângulos agudos.

9. Em um triângulo retângulo, as medidas da hipotenusa e de um dos catetos são, respectivamente, 3 e $\sqrt{2}$ centímetros. Determine as razões trigonométricas do maior ângulo agudo desse triângulo.

10. Determine:

a) $\sec(60^o)$, $\operatorname{cossec}(60^o)$ e $\operatorname{cotg}(60^o)$.

b) $\sec(45^o)$, $\operatorname{cossec}(45^o)$ e $\operatorname{cotg}(45^o)$.

11. Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $\dfrac{\cot(30^o)\ .\ \sec(45^o)}{\operatorname{cotg}(45^o)\ .\ \sec(60^o)}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}(30^o) + \operatorname{cotg}(45^o)}{\operatorname{cotg}(60^o) + \sec(30^o)}$

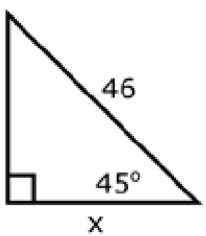
12. Mostre que, se α é um ângulo agudo, então $\operatorname{cossec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$.

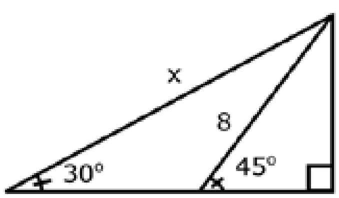
13. Sabendo que β é um ângulo agudo tal que $\operatorname{tg}\beta = 1$, determine as outras razões trigonométricas de β. Sugestão: Utilize a igualdade do exercício anterior para determinar $\operatorname{sen}\beta$.

14. Verifique se a igualdade $\sec x = \operatorname{cossec} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$ é verdadeira para todo ângulo agudo x.

15. Se α é um ângulo agudo tal que $\sec\alpha = 7$, determine o valor de $\operatorname{cotg}\alpha$.

16. Determine o valor de x, nas figuras a seguir:

a) 

b) 

17. Ao se aproximar de um castelo, um príncipe vê a princesa na janela de uma das torres, sob um ângulo de visão de 30°. Quando o príncipe se encontra a apenas 50 metros da torre, seu ângulo de visão é de 45°. Se o príncipe mede 1,80m, a que altura do chão, aproximadamente, a janela se encontra?

18. Seja x um ângulo agudo tal que $\sec^2 x + \operatorname{tg} x = 1$. Determine o valor de tgx.

19. Uma pessoa deseja subir uma rampa de comprimento d, que forma um ângulo de 30° com o solo. Após subir a rampa, essa pessoa estará a 1m do chão. Qual o comprimento da rampa?

Referências

BONGIOVANNI, Domenico, e outros. **Matemática e vida**. 2º Grau, vol. 2. São Paulo: Ática, 1993.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARMO, Manfredo Perdigão do, e outros. **Trigonometria. Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1992. Coleção do Professor de Matemática.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. único. São Paulo: Ática, 2004.

HARIKI, Seiji, e outros. **Curso de Matemática**, vol. 1. São Paulo: Harbra, 1979.

Capítulo 2

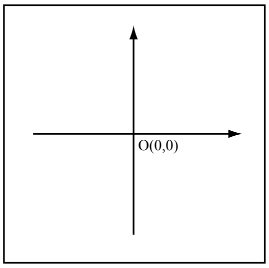
A trigonometria da primeira volta

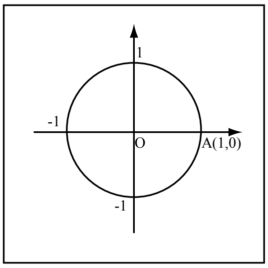
Introdução

Até agora, definimos as razões trigonométricas — seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante — de um ângulo agudo, ou seja, de um ângulo com medida entre 0^0 e 90^0. Iniciaremos esta unidade definindo a circunferência trigonométrica ou círculo trigonométrico para, em seguida, estender as razões trigonométricas a todos os ângulos da primeira volta, ou seja, ângulos α, tais que $0^0 \leq \alpha \leq 360^0$, incluindo os ângulos de 0^0 e 90^0. Por fim, enunciaremos, demonstraremos e exemplificaremos dois resultados da maior importância para a Matemática, em geral, e para a Trigonometria, em particular: a lei dos senos e a lei dos cossenos.

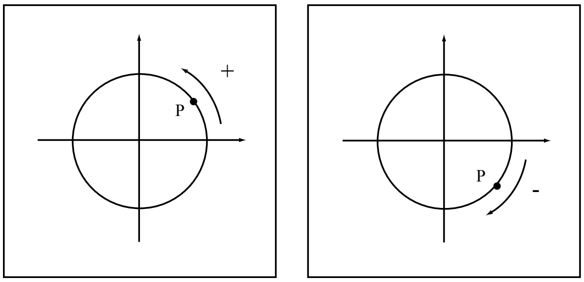
1. A circunferência trigonométrica ou o círculo trigonométrico

Consideremos no plano um sistema coordenado de eixos cartesianos ortogonais com origem no ponto O, de coordenadas (0,0), e tracemos uma circunferência de raio 1 e centro na origem do sistema de eixos coordenados. Consideremos, ainda, o ponto A, de coordenadas (1,0).

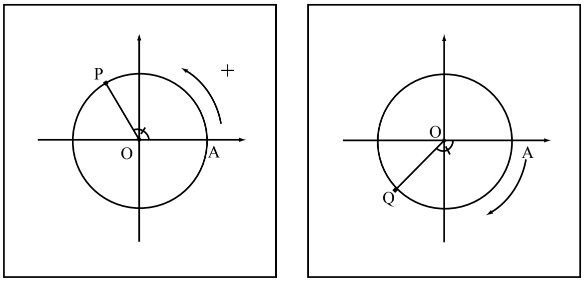




Um ponto P, de coordenadas (x,y), sobre a circunferência pode percorrê-la, partindo de A, em dois sentidos: o horário e o anti-horário. Escolhido um dos sentidos de percurso para ser o positivo e o outro para ser o negativo, dizemos que temos uma circunferência orientada. Convenciona-se que o sentido anti-horário é o positivo, enquanto o sentido horário é o negativo.



O ângulo ∠AOP, determinado por P ao se deslocar sobre a circunferência, partindo de A, no sentido positivo de percurso, é dito um ângulo orientado e mede de 0^0 a 360^0 (uma volta completa). Se P parte de A no sentido negativo de percurso, até chegar novamente em A, ele determina ângulos negativos que medem entre 0^0 e -360^0.



O ângulo ∠AOP na figura anterior é um ângulo positivo e mede 120^0, ou melhor, $+120^0$, enquanto o ângulo ∠AOQ é negativo e mede -135^0.

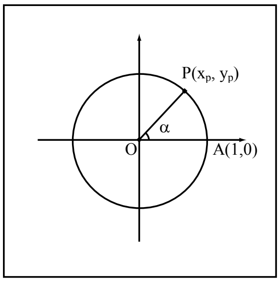
Essa circunferência orientada, em questão, será chamada de **circunferência trigonométrica** ou, como é mais comum, de **círculo trigonométrico.**

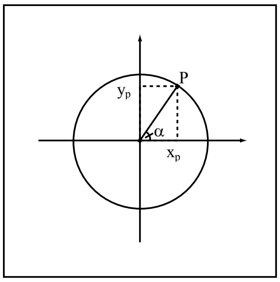
Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 01 de exercícios.

2. Estendendo as funções trigonométricas aos ângulos da primeira volta

Chamaremos de ângulo da primeira volta qualquer ângulo positivo com medida entre 0^0 e 360^0.

Qualquer ângulo α da primeira volta, medido a partir do raio OA, correspondente ao ponto A de coordenadas (1,0), determina no círculo trigonométrico um ponto P, de coordenadas (x_p, y_p) tais que, se α é um ângulo agudo, temos $x_p = \cos\alpha$ e $y_p = \text{sen}\alpha$.





De fato, de acordo com as figuras anteriores, temos

- $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{y_P}{1} = y_P$,
- $\cos(\alpha) = \dfrac{x_P}{1} = x_P$, e
- $\text{tg}\ (\alpha) = \dfrac{x_P}{y_P}$.

Assim, vamos tentar estender as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, aos ângulos da primeira volta, como segue:

Definição: *Seja α um ângulo com medida entre 0º e 360º (inclusive), definimos as razões trigonométricas seno de α (senα), cosseno de α (cosα) e tangente de α (tgα) da seguinte forma:*

- $\text{sen}(\alpha)$ é a ordenada do ponto P determinado no círculo trigonométrico pelo lado $\overrightarrow{OP}$ de α, sendo α = ∠AOP;
- $\cos(\alpha)$ é a abscissa do ponto P determinado no círculo trigonométrico pelo lado $\overrightarrow{OP}$ de α, sendo α = ∠AOP;
- tg(α) é o quociente entre a ordenada e a abscissa do ponto P determinado no círculo trigonométrico pelo lado $\overrightarrow{OP}$ de α, sendo α = ∠AOP.

Para que as definições estejam de acordo com o que pretendemos, elas devem coincidir para o caso de ângulos agudos e, no caso geral, devem satisfazer as igualdades $\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Atenção:
Note que esse quociente nem sempre existe, conforme veremos na página seguinte.

Com relação à coincidência das definições para o caso de ângulos agudos, a observação logo após as figuras nos garante que as definições coincidem. As duas igualdades serão formalizadas e demonstradas nas proposições seguintes:

Proposição: *Se α é um ângulo tal que $0^o \leq \alpha \leq 360^o$, então $tg\alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$.*

Prova:

De fato, temos que se α é o ângulo $\angle AOP$, em que A é o ponto de coordenadas (1,0) e P é o ponto de coordenadas (x_p, y_p), determinado por um dos lados de α no círculo trigonométrico, então, por definição $sen\alpha = y_p$ e $cos\alpha = x_p$ e $tg\alpha = y_p/x_p$ e, consequentemente, $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$. Provando o resultado.

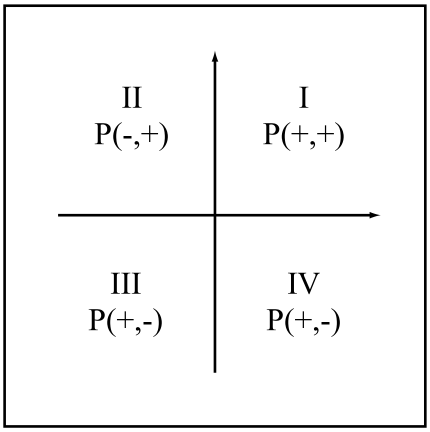
Proposição: *Se a é um ângulo tal que $0^o \leq \alpha \leq 360^o$, então $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.*

Prova:

De fato, temos que se α é o ângulo $\angle AOP$, em que A é o ponto de coordenadas (1,0) e P é o ponto de coordenadas (x_p, y_p), determinado por um dos lados de α no círculo trigonométrico, então, por definição, $sen\alpha = y_p$, $cos\alpha = x_p$ e, assim, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = y_p^{\ 2} + x_p^{\ 2}$.

Desde que o ponto $P(x_p, y_p)$ pertence ao círculo unitário, temos que $1 = r^2 = (y_p)^2 + (x_p)^2$. Consequentemente, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Provando o resultado.

3. Estudando o sinal do seno e do cosseno de um ângulo da primeira volta



Quando dotamos um plano de um sistema coordenado de eixos cartesianos ortogonais, estamos dividindo o plano em quatro regiões chamadas de quadrantes. Assim, temos os quadrantes I, II, III e IV, conforme a figura ao lado.

Cada ponto P do plano possui abscissas e ordenadas negativas ou positivas de acordo com o quadrante no qual se encontra. A figura ao lado, pretende nos mostrar a variação desses sinais.

Como as razões trigonométricas dos ângulos da primeira volta estão definidas pelas abscissas e pelas ordenadas dos pontos P que o ângulo determina com o círculo trigonométrico, teremos senos, cossenos e tangentes positivos ou negativos de acordo com o quadrante no qual esteja contido o lado $\overrightarrow{OP}$ do ângulo $\angle AOP$.

Vamos agora determinar o sinal do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo, de acordo com o quadrante no qual este ângulo se encontra.

Inicialmente é importante observarmos que vale o seguinte:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0º	0	1	0
90º	1	0	??
180º	0	-1	0
270º	-1	0	??
360º	0	1	0

e, consequentemente, a tangente de 90^0 e a de 270^0 não estão definidas, para esses ângulos, pois teríamos uma divisão por zero a qual nos levaria a uma indeterminação. Diremos, simplesmente, que tais ângulos não possuem tangente ou que as tangentes desses ângulos não existe. Para os demais ângulos da primeira volta, vale o que se encontra na tabela a seguir:

Quadrante	Sinal do Seno	Sinal do Cosseno	Sinal da Tangente
I	+	+	+
II	+	—	—
III	—	—	+
IV	—	+	—

Pare e pense!

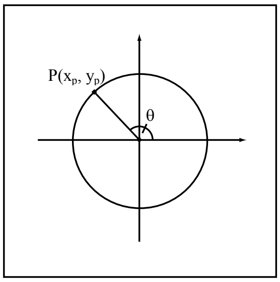
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 02 de exercícios.

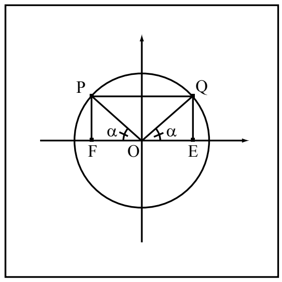
4. Fórmulas de redução ao primeiro quadrante

As razões trigonométricas de um ângulo do segundo, do terceiro ou do quarto quadrantes podem ser obtidas em função das razões de ângulos no primeiro quadrante, conforme veremos a seguir.

Reduzindo do segundo para o primeiro quadrante

Notemos, inicialmente, que se θ é um ângulo do segundo quadrante, então $90^0 < \theta < 180^0$ e, assim, existe um ângulo α no primeiro quadrante tal que $\theta = 180^0 - \alpha$, conforme se percebe na primeira figura a seguir.





O ângulo θ, no segundo quadrante, determina um ponto P, de coordenadas (x_P, y_P), na circunferência trigonométrica, tal que $x_P = \cos(\theta)$ e $y_P = \text{sen}(\theta)$.

Nosso objetivo é, tomando esse ângulo α no primeiro quadrante, verificarmos a relação entre as razões trigonométricas de α e as de θ.

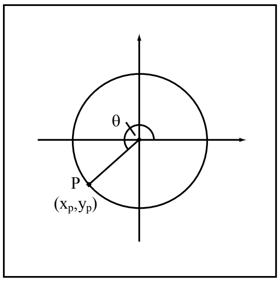
Traçando por P uma paralela ao eixo-x, obtemos no círculo trigonométrico um ponto Q, de coordenadas (x_q, y_q), com $y_p = y_q$ e $x_p = -x_q$. De fato, os triângulos POF e QOE são congruentes, uma vez que $\overline{OP} = \overline{OQ}$, pois são raios da circunferência; $\overline{PF} = \overline{QE}$, pois $y_p = y_q$; e $\overline{OF} = \overline{OE}$, o que pode ser constatado pelo teorema de Pitágoras. Assim, o, ângulo, $\angle$EOQ e α são congruentes, levando-nos à seguinte proposição:

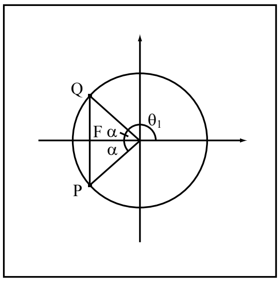
Proposição: *Se θ é um ângulo no segundo quadrante, então existe um ângulo α, no primeiro quadrante, tal que $\theta = 180^0 - \alpha$ e valem as seguintes igualdades:*

- $\text{sen}(\theta) = \text{sen}\ (180° - \alpha) = \text{sen}\ (\alpha)$;
- $\cos(\theta) = \cos\ (180° - \alpha) = -\cos\ (\alpha)$.

Reduzindo do terceiro para o primeiro quadrante

Todo ângulo θ do terceiro quadrante é tal que $180^0 < \theta < 270^0$. Assim, existe um ângulo α no primeiro quadrante tal que $\theta = 180^0 + \alpha$.





De acordo com as definições das razões trigonométricas de θ, temos que $\text{sen}(\theta) = y_p$ e $\cos(\theta) = x_p$. Ao traçarmos por P uma paralela ao eixo-y, obtemos um ponto Q, no círculo unitário, de coordenadas (x_q, y_q), no segundo quadrante e com $x_q = x_p$ e $y_q = -y_p$ (os triângulos POF e QOF são congruentes, uma vez que são retângulos e possuem dois lados correspondentes de mesma medida).

Determinamos, agora, um ângulo θ_1, no segundo quadrante, para o qual vale a igualdade $\theta_1 = 180^0 - \alpha$. Além disso, temos que $\text{sen}(\theta_1) = y_q$ e $\cos(\theta_1) = x_q$.

Conforme vimos no caso anterior, temos que

- $y_q = \text{sen}\theta_1 = \text{sen}(180^0 - \alpha) = \text{sen}\alpha$; e
- $x_q = \cos\theta_1 = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.

e, assim, teremos as igualdades:

- $\text{sen}\theta = \text{sen}(180^0 + \alpha) = y_p = -y_q = -\text{sen}\alpha$; e
- $\cos\theta = \cos(180^0 + \alpha) = x_p = x_q = -\cos\alpha$.

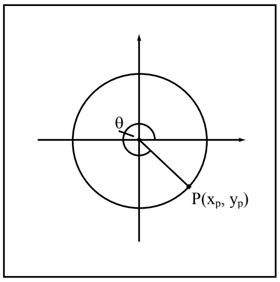
Logo, vale a seguinte proposição

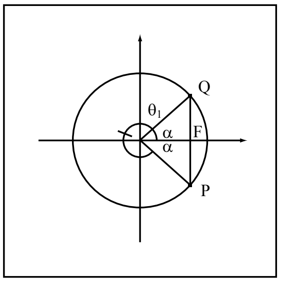
Proposição: *Se θ é um ângulo no terceiro quadrante, então existe um ângulo α, no primeiro quadrante, tal que $\theta = 180^0 + \alpha$ e valem as seguintes igualdades:*

- $\text{sen}\ (\theta) = \text{sen}\ (180° + \alpha) = -\ \text{sen}\ (\alpha)$;
- $\cos\ (\theta) = \cos\ (180° + \alpha) = -\ \cos\ (\alpha)$.

Reduzindo do quarto para o primeiro quadrante

Se θ é um ângulo do quarto quadrante, então $270^o < \theta < 360^o$ e, portanto, existe um ângulo θ no primeiro quadrante tal que $\theta = 360^o - \alpha$.





De acordo com as definições das razões trigonométricas de θ, temos que $\text{sen}(\theta) = y_p$ e $\cos(\theta) = x_p$. A perpendicular ao eixo-x passando por P determina, no círculo unitário, um ponto Q, de coordenadas (x_q, y_q), no primeiro quadrante e com $x_q = x_p$ e $y_q = - y_p$ (os triângulos POF e QOF são congruentes, uma vez que são retângulos e possuem dois lados correspondentes de mesma medida).

Determinamos, agora, um ângulo α, no primeiro quadrante, para o qual $\text{sen}(360^o - \alpha) = -\text{sen}\alpha$ e $\cos(360^o - \alpha) = \cos\alpha$, provando a proposição:

Proposição: *Se θ é um ângulo no terceiro quadrante, então existe um ângulo α, no primeiro quadrante, tal que $\theta = 360^o - \alpha$ e valem as seguintes igualdades:*

- $\text{sen}(\theta) = \text{sen}\ (180^o - \alpha) = \text{sen}\ (\alpha)$;
- $\cos\ (\theta) = \cos\ (360^o - \alpha) = -\cos\ (\alpha)$.

Resumindo...

Se α é um ângulo no primeiro quadrante, valem as seguintes igualdades:

(1) Do segundo para o primeiro quadrante:

- $\text{sen}(180^o - \alpha) = \text{sen}\alpha$
- $\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$.

(2) Do terceiro para o primeiro quadrante:

- $\text{sen}(180^o + \alpha) = -\text{sen}\alpha$
- $\cos(180^o + \alpha) = -\cos\alpha$.

(3) Do quarto para o primeiro quadrante:

- $\text{sen}(360^0 - \alpha) = -\text{sen}\alpha$
- $\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$.

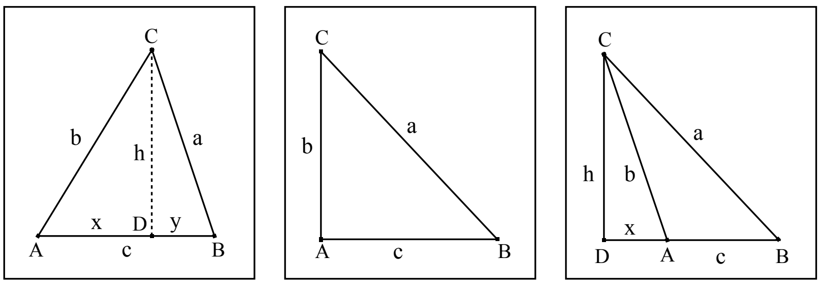
Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 03 de exercícios.

5. Lei dos senos e lei dos cossenos

Agora que já conhecemos as razões trigonométricas dos ângulos obtusos, podemos enunciar e demonstrar as leis do seno e do cosseno. Elas se aplicam a triângulos quaisquer, sejam eles retângulos, acutângulos ou obtusângulos.

5.1. Lei dos cossenos

Consideremos o triângulo ABC, cujos lados BC, AB e AC medem, respectivamente, a, b e c. Denotemos os ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ deste triângulo por A, B e C, respectivamente, conforme as figuras a seguir:



Anote:
A recíproca da proposição condicional "Se p, então q." é a proposição condicional "Se q, então p." obtida quando se permuta a hipótese pela tese ou conclusão, na proposição original.

Sabemos que, nestas condições, o triângulo ABC é retângulo em $\angle A$ se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$. Isto é o que afirmam o teorema de Pitágoras e sua recíproca.

Vamos mostrar que nos demais casos temos as igualdades:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$;
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$;
- $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$.

Observemos, inicialmente, que no caso em que os ângulos $\angle A$, $\angle B$ ou $\angle C$ forem retângulos, uma vez que $\cos 90^0 = 0$, teremos uma das igualdades:

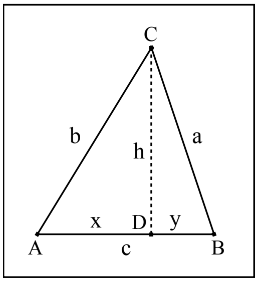
- $a^2 = b^2 + c^2$
- $b^2 = a^2 + c^2$
- $c^2 = b^2 + a^2$,

ou seja, o teorema de Pitágoras, como já sabíamos.

Estudaremos os outros dois casos — triângulos acutângulos e triângulos obtusângulos — separadamente.

Caso 1: O triângulo é acutângulo

Neste caso, para o ângulo $\angle A$ da figura ao lado, temos que:



$$\mathbf{a^2 = y^2 + h^2, (I)}$$

em que $c = x + y$.

Tirando o valor de y e substituindo em (I), termos $a^2 = (c - x)^2 + h^2$, ou seja,

$$\mathbf{a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2. (II)}$$

Do triângulo ADC, da figura, temos que $b^2 = x^2 + h^2$, ou seja, $x^2 = b^2 - h^2$, valor que, substituído em (II), nos permite obter

$$\mathbf{a^2 = c^2 - 2cx + b^2 - h^2 + h^2.}$$

O que nos dá:

$$\mathbf{a^2 = c^2 + b^2 - 2cx. (III)}$$

Ainda do triângulo ABC, temos que $\cos A = \frac{x}{b}$, o que nos dá $x = b\cos A$.

Logo, substituindo esse valor em (III), concluímos que

$$\mathbf{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A,}$$

o que prova a seguinte proposição

Proposição: *Denotando por ∠A, ∠B e ∠C os ângulos de um triângulo acutângulo ABC, com lados AB, BC e AC medindo, respectivamente, c, a e b, então valem as três igualdades seguintes:*

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$,

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$,

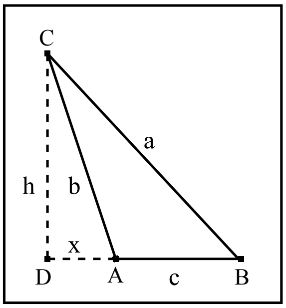
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Note que só provamos uma das três igualdades da proposição anterior. As outras duas podem ser demonstradas de maneira análoga ao que fizemos, apenas considerando as outras duas alturas do triângulo ABC.

Caso 2: O triângulo é obtusângulo

Para o ângulo $\angle A$ da figura ao lado, temos que:

$$\mathbf{a^2 = h^2 + (c + x)^{2t}, \ (I)}$$



$$\mathbf{b^2 = x^2 + h^2. \ (II)}$$

Desenvolvendo (I) e substituindo neste desenvolvimento o valor de x^2 obtido em (II), temos que

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + b^2 - h^2$$

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \ (III).}$$

Como se percebe da figura, $\cos(180^0 - A) = \frac{x}{b}$ e, consequentemente, $x = b\cos(180^0 - A) = -b\cos A$. Substituindo esse valor de x em (III), obtemos

$$\mathbf{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A}$$

o que mostra a seguinte proposição:

Proposição: *Denotando por A, B e C os ângulos de um triângulo ABC, obtusângulo em A, com lados AB, BC e AC medindo, respectivamente, c, a e b, então valem as três igualdades seguintes:*

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Como no caso anterior, provamos apenas uma das três igualdades da proposição. As outras duas podem ser provadas de maneira inteiramente análoga.

Os dois casos mostrados anteriormente, nos permitem concluir a proposição conhecida como **Lei dos cossenos**.

Proposição – Lei dos cossenos: *Denotando por A, B e C os ângulos de um triângulo ABC com lados AB, BC e AC medindo, respectivamente, c, a e b, então valem as três igualdades seguintes:*

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A,$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B,$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$

5.2. Lei dos senos

A lei dos senos afirma que, em qualquer triângulo ABC, denotando por $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ os seus ângulos e por AB, BC e AC os seus lados e supondo, ainda que os lados meçam, respectivamente, c, a e b, valem as três igualdades seguintes:

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}.$$

Saiba Mais:
A igualdade dupla $\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$ é usada para significar as três igualdades $\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b}$, $\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}C}{c}$ e $\frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$.

Observe, inicialmente, que se o triângulo for retângulo em A, por exemplo, então teremos senA = 1 e as igualdades são decorrentes da definição de seno dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$.

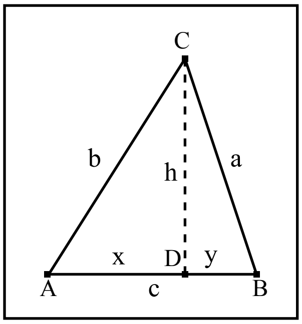
Assim como no caso anterior, podemos dividir a demonstração em dois casos: o dos triângulos acutângulos e o dos triângulos obtusângulos.

Caso 1: O triângulo é acutângulo

Para o ângulo $\angle A$, da figura ao lado, temos que sen$A = \frac{h}{b}$, donde se conclui que h = bsenA. Temos, também, que sen$B = \frac{h}{a}$, o que nos dá que h = asenB.

Assim, temos bsenA = asenB, ou melhor,

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b}.$$



Trabalhando com u, a altura do triângulo relativa a $\overline{AC}$, teríamos que u = asenC e u = csenA, o que nos daria asenC = csenA e, consequentemete,

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}C}{c},$$

provando a seguinte proposição:

Proposição: *Denotando por A, B e C os ângulos de um triângulo acutângulo ABC, com lados AB, BC e AC medindo, respectivamente, c, a e b, então valem as três igualdades seguintes:*

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}.$$

Caso 2: O triângulo é obtusângulo

Para o ângulo A da figura ao lado, temos que senB = $\frac{h}{a}$ e sen(180^0 – A) = $\frac{h}{b}$, o que nos dá asenB = h e bsen(180^0 – A) = h. Assim, podemos concluir que asenB = bsen(180^0 – A) e, desde que sen(180^0 – A) = senA, teremos

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b}.$$

Tomando a altura do triângulo ABC relativa a BC, concluiremos que $\frac{\text{sen}C}{c} = \frac{\text{sen}B}{b}$, provando a proposição

Proposição: *Denotando por A, B e C os ângulos de um triângulo ABC, obtusângulo em A, com lados AB, BC e AC medindo, respectivamente, c, a e b, então valem as três igualdades seguintes:*

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}.$$

Os dois casos mostrados anteriormente, nos permitem concluir a proposição conhecida como **Lei dos senos**.

Proposição – Lei dos senos: *Denotando por A, B e C os ângulos de um triângulo ABC com lados* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ *medindo, respectivamente, c, a e b, então valem as três igualdades seguintes:*

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}.$$

Pare e pense!

Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 04 de exercícios.

Síntese do Capítulo 2

Nesta Unidade você aprendeu a...

1. A importância do círculo trigonométrico ou circunferência trigonométrica na extensão das funções trigonométricas aos ângulos da primeira volta, ou seja, aos ângulos α, tais que $0^o \leq \alpha \leq 360^o$.
2. Como estender as funções trigonométricas aos ângulos da primeira volta.
3. A determinar as razões trigonométricas de um ângulo da primeira volta em função das razões trigonométricas de um ângulo agudo, a partir das fórmulas de redução ao primeiro quadrante.
4. Como enunciar e demonstrar a lei dos senos e a lei dos cossenos e como utilizá-las na resolução de problemas.

Texto Complementar

Adição e subtração de arcos

Nesta Leitura vamos mostrar que a igualdade

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$$

que, como já vimos na Unidade anterior, é verdadeira para o caso de ângulos agudos a e b, tais que a + b também é um ângulo agudo, se generaliza para arcos quaisquer.

Na realidade, mostraremos que valem as seguintes relações:

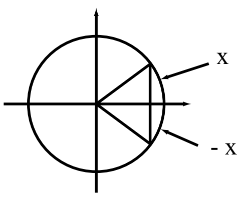
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$;
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$;
- $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$;
- $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$.

Iniciaremos nosso trabalho mostrando a igualdade

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b) ,$$

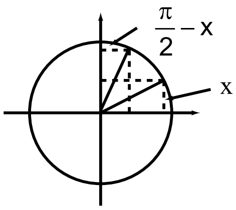
a partir do Teorema de Pitágoras para, em seguida, deduzirmos as outras três relações, observando que

- $\begin{cases} \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{cases}$



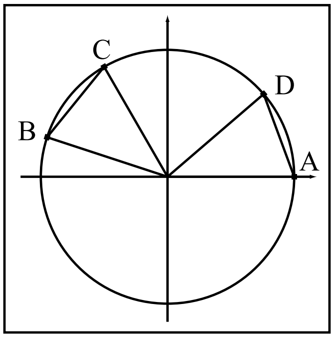
e que

- $\begin{cases} \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}(x) \end{cases}$.



Por fim, mostraremos que $\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg}(a) + \text{tg}(b)}{1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)}$, deixando a cargo do leitor mostrar que $\text{tg}(a - b) = \dfrac{\text{tg}(a) - \text{tg}(b)}{1 + \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)}$

Cos(a – b)



Para atingirmos nosso propósito, nos basearemos na figura ao lado.

Nela, os pontos A, B, C e D são tais que valem as seguintes relações:

- $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}$; e
- $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$.

e, da congruência dos arcos $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{BC}$, temos que os segmentos AD e BC são congruentes.

Sejam a e b, respectivamente, as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$. Nestas condições, temos que $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = a - b$.

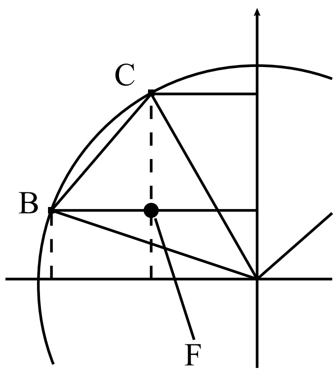


Figura 01

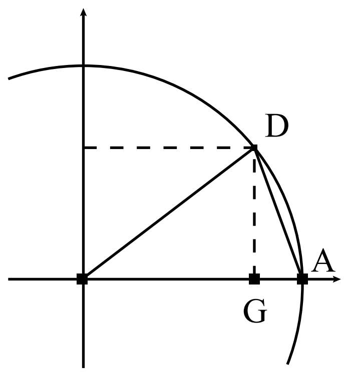


Figura 02

Da figura 01, anterior, temos que $\overline{BC}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{BF}^2$, o que nos dá:

- $\overline{BC}^2 = (\text{senb} - \text{sena})^2 + (\text{cosa} - \text{cosb})^2$
- $\overline{BC}^2 = (\text{sen}^2 b - 2\text{senb sena} + \text{sen}^2 a) + (\cos^2 a - 2\text{cosa cosb} + \cos^2 b)$
- $\overline{BC}^2 = (\text{sen}^2 a + \cos^2 a) + (\text{sen}^2 b + \cos^2 b) - 2\text{senb sena} - 2\text{cosa cosb}$
- $\overline{BC}^2 = 1 + 1 - 2\,(\text{cosa cosb} + \text{sena senb})$
- $\overline{BC}^2 = 2 - 2\,(\text{cosa cosb} + \text{sena senb})$.

Da figura 02, anterior, temos que $\overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{DG}^2$, o que nos dá:

- $\overline{AD}^2 = (1 - \cos(a - b))^2 + \text{sen}^2(a - b)$
- $\overline{AD}^2 = (1 - 2\cos(a - b) + \cos^2(a - b)) + \text{sen}^2(a - b)$
- $\overline{AD}^2 = (1 - 2\cos(a - b)) + (\cos^2(a - b) + \text{sen}^2(a - b))$
- $\overline{AD}^2 = 2 - 2\cos(a - b).$

e como $\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2$, temos que

$$2 - 2\cos(a - b) = 2 - 2(\cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b),$$

o que nos dá:

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$$

Cos(a + b)

Podemos escrever cos(a + b) como cos(a – (-b)) e assim, do que foi mostrado anteriormente, temos que

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(-b).$$

Desde que $\text{sen}(-b) = -\text{sen}(b)$ e $\cos(-b) = \cos b$, a igualdade anterior nos dá

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b).$$

Sen(a + b)

No início desta leitura, vimos que $\text{sen}\,x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Assim temos que:

- $\text{sen}(a + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a + b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$
- $\text{sen}(a + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(b) + \text{sen}(\frac{\pi}{2} - a)\,\text{sen}(b)$
- $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(\frac{\pi}{2} - a)\,\text{sen}(b).$

Vimos, também, que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ e, consequentemente, a igualdade anterior nos fornece:

Sen(a – b)

Vamos usar a igualdade anterior para mostrar a igualdade $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$.

Temos que

- $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a + (-b)) = \operatorname{sen}(a)\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos(a)$, e, desde que $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$ e $\cos(-b) = \cos(b)$, a igualdade anterior fica

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a).$$

Tg(a + b)

Como $\operatorname{tg}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, teremos

- $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}$.

Dividindo o numerador e o denominador da fração anterior por $\cos(a)\cos(b)$, teremos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \dfrac{\operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}},$$

ou, ainda,

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)}.$$

Atividades de avaliação

Lista 01

1. Um ponto P, na circunferência trigonométrica, possui coordenadas (x, y), tais que x = $\frac{1}{2}$. Quantos e quais são os possíveis valores de y?

Solução

Sabemos que a circunferência trigonométrica (ou círculo trigonométrico) é uma circunferência unitária, isto é, uma circunferência de raio 1. Assim, como P está na circunferência trigonométrica, suas coordenadas (x, y) devem ser tais que $x^2 + y^2 = 1$. E como x = $\frac{1}{2}$, devemos ter

$$y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \;\therefore\; = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Portanto y pode assumir os valores $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Determine os possíveis valores de x, sabendo que o ponto Q, de coordenadas $\left(x\,,\ \frac{1}{3}\right)$, pertence à circunferência trigonométrica.

3. Um ponto P, na circunferência trigonométrica, possui coordenadas (x, y) com $x \geq \frac{1}{2}$. Determine os possíveis valores de y.

4. Um ponto Q, na circunferência trigonométrica, possui coordenadas (x, y) com $y \leq \frac{1}{2}$. Determine os possíveis valores de x.

5. Um ponto P, no círculo trigonométrico, determina um ângulo positivo de 120º. Determine os sinais das coordenadas de P.

Solução

Como P determina um ângulo de 120º no círculo trigonométrico e como 90º $\leq$ 120º $\leq$ 180º, temos que P é um ponto no segundo quadrante. Assim, sua abscissa é negativa e sua ordenada é positiva.

6. Um ponto Q, no círculo trigonométrico, determina um ângulo negativo de 120º. Determine os sinais das coordenadas de Q.

7. Um ponto R, no círculo trigonométrico, determina um ângulo positivo de 270º. Determine os sinais das coordenadas de R.

8. Um ângulo α, da primeira volta, é tal que suas coordenadas e as coordenadas de - α são iguais. Quais são os possíveis valores de α?

Solução

Observe que os ângulos de 180º e -180º são, ambos, representados pelo ponto P, de coordenadas (-1, 0). Assim, α = 180º é um ângulo com essa propriedade. Na primeira volta, ou seja, para ângulos com medida entre 0º e 360º, existem ainda dois outros ângulos com essa propriedade. Determine-os.

Lista 02

1. Determine os valores do ângulo α, com 0º α 360º, tais que $\text{sen}(\alpha) = 0$ e $\cos(\alpha) = 1$.

Solução

O ponto P, correspondente ao ângulo α, é o ponto de coordenadas (1, 0). Portanto, devemos ter α = 0º ou α = 360º.

2. Determine os valores de α, com 0º α 360º, tais que:

a) $\text{sen}\alpha = 0$ e $\cos\alpha = -1$

b) $\text{sen}\alpha = -1$ e $\cos\alpha = 0$

c) $\text{sen}\alpha = 1$ e $\cos\alpha = 0$

3. Determine os valores de α, com 0º α 360º, tais que:

a) $\text{sen}\alpha = 1$ e $\cos\alpha = -1$

b) $\text{sen}\alpha = -1$ e $\cos\alpha = 1$

4. Como você mostraria, usando as coordenadas (x, y) do ponto P que determina o ângulo de 45º, que $\text{sen}(45°) = \cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

5. Um ângulo da primeira volta é tal que seu seno é positivo e seu cosseno é negativo. Determine os possíveis valores de α .

6. Diga o sinal da tangente dos seguintes ângulos:

a) 130º

b) 65º

c) 245º

d) 289º

7. Um ângulo α , da primeira volta, possui tangente positiva. Em quais quadrantes o ângulo α pode se encontrar?

Lista 03

1. Para calcularmos as razões trigonométricas de 120º, basta observarmos que 120º = 180º – 60º e, assim, temos que

- $\text{sen}(120°) = \text{sen}(180° - 60°) = \text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\cos(120°) = \cos(180° - 60°) = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}$;
- $\text{tg}\,(120°) = \dfrac{\text{sen}(120°)}{\cos(120°)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.

2. As funções trigonométricas do ângulo de 210º podem ser obtidas se observarmos que 210º = 180º + 30º e utilizarmos as fórmulas de redução do terceiro para o primeiro quadrante. Assim:

- $\text{sen}(210°) = \text{sen}(180° + 30°) = -\text{sen}(30°) = -\dfrac{1}{2}$;
- $\cos(210°) = \cos(180° + 30°) = -\cos(30°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\text{tg}\,(210°) = \dfrac{\text{sen}(210°)}{\cos(210°)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. As funções trigonométricas do ângulo de 315º podem ser obtidas se observarmos que 315º = 360º – 45º e utilizarmos as fórmulas de redução do quarto para o primeiro quadrante. Assim:

- $\text{sen}(315^\circ) = \text{sen}(360^\circ - 45^\circ) = -\text{sen}(45^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos(315^\circ) = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\text{tg}\,(315^\circ) = \dfrac{\text{sen}(315^\circ)}{\cos(315^\circ)} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -1$.

4. Determine as funções trigonométricas do ângulo de:

a) 150º

b) 105º

5. Determine um ângulo da primeira volta, no segundo quadrante, que possua o mesmo seno que o ângulo de 50º.

6. Determine um ângulo da primeira volta, no terceiro quadrante, que possua, em módulo, o mesmo cosseno que um ângulo de 80º.

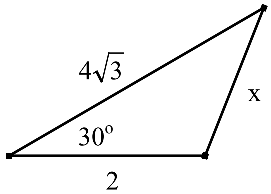
Lista 04

1. Mostrar a afirmação feita no início da apresentação da lei dos senos: "se o triângulo for retângulo em A, por exemplo, então teremos sen(A) = 1 e as igualdades $\left(\dfrac{\text{sen}A}{a} = \dfrac{\text{sen}B}{b} = \dfrac{\text{sen}C}{c}\right)$ são decorrentes da definição de seno dos ângulos B e C".

2. De maneira semelhante ao que fizemos na leitura complementar, mostre que $\text{tg}(a - b) = \dfrac{\text{tg}(a) - \text{tg}(b)}{1 + \text{tg}(a)\,.\,\text{tg}(b)}$.

3. Calcule as medidas das diagonais de um paralelogramo, sabendo dois lados consecutivos medem 6 cm e $2\sqrt{3}$ cm e cada ângulo agudo mede 30º.

4. Use a lei dos cossenos para determinar o valor de x na figura ao lado.



5. A diagonal BD de um paralelogramo ABCD divide o ângulo ∠D nos dois ângulos, ∠ADB e ∠BDC, que medem 30º e 15º, respectivamente. Sabendo que o lado BC mede 6 cm, determine o comprimento de BD.

6. Um triângulo ABC é tal que os ângulos ∠A e∠ B medem, respectivamente, 60º e 45º e o lado BC mede 4 cm. Determine a medida do lado AC.

7. Os lados de um triângulo medem 7, 8 e 10 centímetros. Determine o comprimento da projeção do lado de 7 cm sobre o lado de 10 cm.

8. Determine a medida dos lados de um paralelogramo, sabendo que suas diagonais medem 20 e 32 centímetros e formam um ângulo de 60º.

Referências

CARMO, Manfredo Perdigão do, e outros. **Trigonometria**. **Números Complexos.** Rio de Janeiro: SBM, 1992. Coleção do Professor de Matemática.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. único. São Paulo: Ática, 2004.

HARIKI, Seiji, e outros. **Curso de Matemática**, vol. 1. São Paulo: Harbra, 1979.

SCHMITT, Tânia e outros. **Trigonometria e números complexos**. Revisitando a matemática com atividades para professores. Brasília: Editora da UNB, 2006.

Capítulo 3

Funções trigonométricas

Introdução

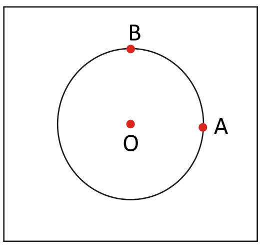
Até agora, estudamos as razões trigonométricas, inicialmente, associadas aos ângulos agudos de triângulos retângulos e, posteriormente, aos ângulos da primeira volta, ou seja, ângulos com medida entre 0º e 360º, inclusive. Agora, pretendemos estender tais definições para quaisquer números reais, obtendo, com isso, as funções trigonométricas, que são funções reais de uma variável real.

Definiremos, primeiramente, arco de circunferência e associaremos a cada arco um número real, chamado seu comprimento. Retomaremos a circunferência orientada para falarmos em arcos negativos e, com isso, definirmos as funções seno, cosseno e tangente, bem como as demais funções trigonométricas, para quaisquer números reais.

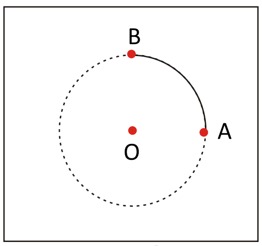
1. Arcos e ângulos

Intuitivamente, podemos dizer que um arco de circunferência é qualquer "pedaço" de circunferência. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

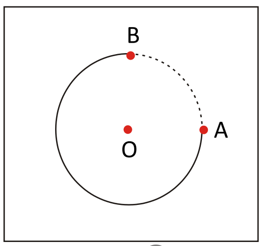
Definição. Dois pontos A e B de uma circunferência determinam dois arcos, na circunferência, cada um deles contendo os dois pontos A e B e representados por $\overset{\frown}{AB}$. Os pontos A e B são chamados de extremidades do arco.



Circunferência de centro O e pontos A e B da circunferência

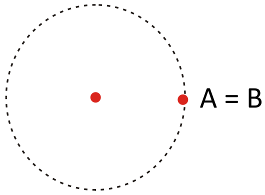


arco $\overset{\frown}{AB}$

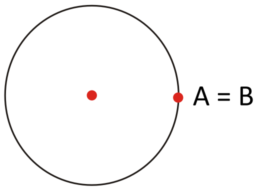


arco $\overset{\frown}{AB}$

Se os pontos A e B são coincidentes, os arcos determinados são o arco nulo (representado por qualquer um dos pontos A ou B) e o arco de uma volta (a própria circunferência).

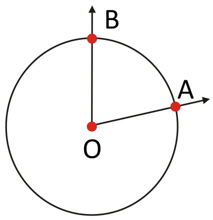


arco nulo



arco de uma volta

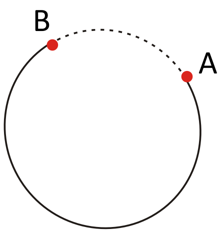
Todo arco de circunferência de extremidades A e B determina um ângulo central que o subtende, isto é, um ângulo cujo vértice é o ponto O, centro da circunferência, e cujos lados são as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Na figura ao lado temos os dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e os dois ângulos centrais que subtendem estes arcos.



Medida de arco

A medida em graus de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é a medida do ângulo central que subtende o arco. Assim, se na figura anterior, o ângulo $\angle AOB$ mede 85º, dizemos que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, em graus, é 85º; se o ângulo $\angle AOB$ é um ângulo reto, ou seja, mede 90º, então a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 90º.

Para que não haja confusão com relação ao arco ao qual estamos nos referindo, escolhemos um sentido para percorrermos a circunferência. Assim, na figura ao lado, o arco $\overset{\frown}{AB}$ é o arco que se percorre sobre a circunferência no sentido de A para B, ou seja, o arco tracejado, e o arco $\overset{\frown}{BA}$ é o arco contínuo, ou seja, o arco que se percorre sobre a circunferência no sentido de B para A.



Como se percebe, o sentido que escolhemos para nosso percurso foi o sentido anti-horário. Este será o sentido positivo. O sentido horário será o sentido negativo.

Comprimento de um arco

Sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$. De maneira intuitiva, isto significa que se cortarmos a circunferência em um ponto e a esticarmos obteremos um segmento de comprimento $2\pi r$.

Sabemos também que qualquer diâmetro de uma circunferência divide essa circunferência em duas partes (arcos) de mesmo comprimento. Assim, o comprimento da semicircunferência é πr. De maneira semelhante, podemos afirmar que o comprimento de um arco de um quarto de circunferência é $\frac{\pi r}{2}$.

E como calcular o comprimento de um arco qualquer de uma circunferência de raio r?

Podemos calcular esse comprimento valendo-nos de uma regra de três simples e utilizando a medida do ângulo que subtende o arco do qual queremos medir o comprimento. Por exemplo, se o ângulo subtendido pelo arco mede θ graus, então podemos pensar na seguinte regra de três:

“um arco de 180^o mede πr”

portanto,

“um arco de θ graus mede x”.

Em símbolos temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{l} 180^o \text{ ---------------- } \pi r \\ \theta^o \text{ ------------------ } x. \end{array}$$

O que nos dá

$$180x = \theta\pi r,$$

ou seja

$$x = \frac{\theta\pi r}{180}.$$

O radiano

Até agora, utilizamos o grau como unidade de medida de ângulos. Uma circunferência pode ser dividida em 360^o ângulos centrais, todos congruentes. Cada um desses ângulos mede, por definição, um grau, que se representa por 1^o. Assim, uma circunferência mede, em graus, 360^o, pois nela cabem 360 ângulos centrais de 1^o cada um deles. Podemos, porém, utilizar outra medida: **o radiano.**

Tomemos uma circunferência de raio r e um seu arco de comprimento r. Esse arco subtende um ângulo cuja medida será definida como 1 radiano e representada por 1 rad. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição. Um ângulo de medida 1 radiano é qualquer ângulo congruente a um ângulo central que subtende, em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento igual ao raio da circunferência.

Assim, como o comprimento de uma circunferência de raio r é 2π r, nela cabem 2π arcos de 1 rad e, portanto, seu comprimento em radianos é 2π. Consequentemente, uma semicircunferência mede π radianos e um quarto de circunferência mede $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Relação entre graus e radianos

Dado um ângulo com medida em graus, podemos desejar saber sua medida em radianos e, semelhantemente, se conhecermos a medida em radianos de um ângulo, podemos desejar saber sua medida em graus.

Sabemos que a medida, em graus, de um ângulo de uma volta é 360º e sua medida em radianos é 2π rad. Sabemos, também, que um ângulo de meia volta mede, em graus, 180º e, em radianos, π rad. Sabemos, ainda, que um ângulo de um quarto de volta mede 90º ou $\frac{\pi}{2}$ rad. E um ângulo de 30º, quanto mede em radianos?

Para responder a essa pergunta, vamos sintetizar o que foi dito anteriormente em uma tabela.

graus	radianos
360º	2π rad
180º	π rad
90º	$\frac{\pi}{2}$ rad
30º	??

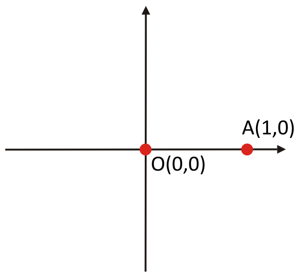
Como se percebe, existe uma proporcionalidade direta entre as medidas em graus e em radianos. Assim, desde que 30º é $\frac{1}{3}$ de 90º, a medida em radianos de um ângulo de 30º deve ser $\frac{1}{3}$ de $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\frac{\pi}{6}$.

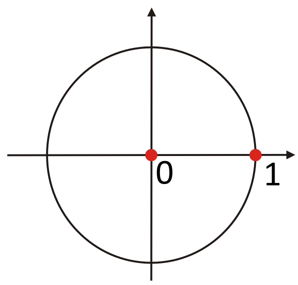
Mais geralmente, denotando por x e y as medidas de um mesmo ângulo em graus e em radianos, respectivamente, temos que

$$y = \frac{\pi}{180}x \cdot$$

Representando números reais na circunferência trigonométrica

No plano, dotado de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a circunferência trigonométrica é a circunferência com centro na origem e de raio 1.





A cada número real podemos associar um ponto na circunferência trigonométrica e, consequentemente, um ângulo central, com medida em graus ou radianos. Neste caso, por questões práticas, utilizaremos a medida em radianos. Essa associação é feita da seguinte forma:

a) o número real zero é associado ao ponto A(1,0);

b) o número real α, com $0 < \alpha < 2\pi$, é associado ao ponto B tal que o comprimento do arco $\widehat{AB}$, em que A=(1,0), quando percorrido no sentido anti-horário, tem comprimento igual a α unidades;

c) o número 2π, assim como todos os múltiplos inteiros positivos de 2π (2π, 4π, 6π, 8π, $10\pi \ldots$), é associado ao ponto A(1,0);

d) o número real α, com $\alpha > 2\pi$, é associado ao mesmo ponto B que o número real α_1, tal que $0 < \alpha_1 < 2\pi$ e $\alpha - \alpha_1 = n(2\pi)$, com n inteiro positivo.

e) o número real $-\alpha$, com $0 < \alpha < 2\pi$, é associado ao ponto B tal que o arco $\widehat{AB}$, em que A=(1,0), quando percorrido no sentido horário, tem comprimento igual a α unidades;

f) o número -2π e todos os múltiplos inteiros negativos de 2π, são associados ao ponto A(1,0);

g) o número real $-\alpha$, com $\alpha > 2\pi$, á associado ao mesmo ponto que o número real $-\alpha_1$, com $0 < \alpha_1 < 2\pi$, tal que $\alpha - \alpha_1 = n(2\pi)$, com n inteiro positivo.

Em outras palavras, é como se para cada número real positivo α, enrolássemos um barbante de comprimento α sobre a circunferência trigonométrica, prendendo uma das extremidades do barbante no ponto

A(1,0) e enrolando o barbante no sentido anti-horário até o fim do barbante, sendo que o ponto $B(x_B, y_B)$ onde ficasse a outra extremidade do barbante seria o ponto associado ao número α; e para cada número real $-\alpha$, com $\alpha > 0$, enrolássemos um barbante de comprimento α sobre a circunferência trigonométrica, prendendo uma das extremidades do barbante no ponto A(1,0) e enrolando o barbante no sentido horário até o fim do barbante, sendo que o ponto $B(x_B, y_B)$ onde ficasse a outra extremidade do barbante seria o ponto associado ao número $-\alpha$.

Note que, para cada número real α ou $-\alpha$, o ponto B determina um ângulo central (orientado) $\angle AOB$ cuja medida será definida como α ou $-\alpha$ radianos.

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem/abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a **Lista 01** de exercícios.

2. As funções seno e cosseno: funções reais de uma variável real

Nosso objetivo nesta seção é definir, para cada número real, um número real, univocamente determinado, obtendo, assim, as funções seno e cosseno, definidas no conjunto dos números reais e tendo como contradomínio o conjunto dos números reais. Em símbolos, queremos determinar as funções reais $sen: R \to R$ e $cos: R \to R$ que, para cada número real x, associam os números reais sen(x) e cos(x), respectivamente.

Na seção anterior, vimos como associar a cada número real um arco da circunferência trigonométrica e, consequentemente, um ângulo central cuja medida orientada, em radianos, é esse número. Esse arco é determinado pelo ponto A = (1,0), sua extremidade inicial, e por um ponto $B = (x_B, y_B)$, sobre a circunferência trigonométrica, sua extremidade final.

Vamos agora definir, como já fizemos no caso do ângulo de uma volta, as funções reais seno e cosseno por meio das coordenadas de B, como segue.

2.1. A função seno

Definição. A função seno é a função real de variável real, representada por $y = f(x) = sen: R \to R$, que a cada número real x associa o número real $f(x) = sen(x) = y_B$, chamado seno de x.

Observe que, da maneira como a função seno foi definida, para cada número real **x**,

- existe o número real $y = f(x) = sen(x)$ e, portanto, o domínio da função seno é o conjunto dos números reais. Em símbolos, D(sen) = R;
- o número real $y = sen(x)$ é tal que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ e, portanto, a imagem da função seno é o intervalo real [-1,1]. Em símbolos, Im(sen) = [-1,1];
- temos que $sen(x) = sen(x \pm 2k\pi)$, qualquer que seja o número inteiro k.

Anote:
A função seno é uma função periódica, de período 2π, pois $sen(x) = sen(x \pm 2kx)$, $k \in \pi$.

Como os números reais $k\pi$, em que o número k é inteiro, estão associados, na circunferência trigonométrica, a pontos do eixo das abscissas, isto é, ao ponto (1,0) ou ao ponto (-1,0), temos que $sen(k\pi) = 0$, para todo inteiro k. Assim, a função seno possui infinitos zeros. Além disso, é possível mostrar que a função seno de x é contínua em todo ponto do seu domínio.

O gráfico a seguir é um esboço do gráfico da função seno, restrita ao intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

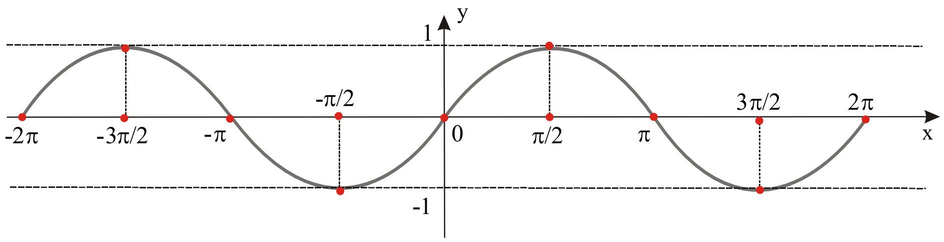


Gráfico da função seno restrita ao intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

2.2. A função cosseno

Definição. A função cosseno é a função real de variável real, representada por $cos: R \rightarrow R$, que a cada número real x associa o número real $cos(x) = x_B$.

Observe que, de forma semelhante à função seno, para cada número real x,

- existe o número real cos(x) e, portanto, o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais. Em símbolos, D(cos) = R;
- o número real cos(x) é tal que $-1 \leq cos(x) \leq 1$ e, portanto, a imagem da função cosseno é o intervalo real [-1,1]. Em símbolos, Im(cos) = [-1,1];
- temos que c os(x) = $cos(x \pm 2k\pi)$, qualquer que seja o número inteiro k.

Anote:
A função cosseno é uma função periódica, de período 2π, pois $cos(x) = cos(x \pm 2k\pi)$, $k \in \pi$.

Além disso, os números reais do tipo $k\frac{\pi}{2}$, onde k é um número inteiro ímpar, estão associados a pontos do eixo das ordenadas, isto é, pontos do tipo (0,1) ou (0, -1), e, portanto, são, todos, zeros da função cosseno.

A seguir temos um esboço do gráfico da função cosseno, restrita ao intervalo [-2π, 2π].

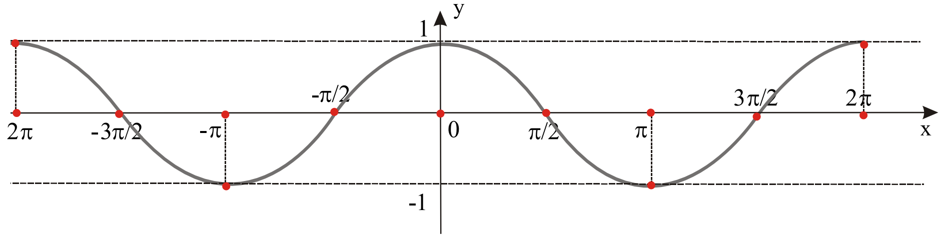


Gráfico da função cosseno restrita ao intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a **Lista 02** de exercícios.

3. As funções tangente e cotangente: funções reais de uma variável real

Nesta seção, vamos definir e estudar as funções tangente e cotangente de um número real. Funções reais de uma variável real.

Como nas seções anteriores, pretendemos que a função tangente seja o quociente entre as funções seno e cosseno de um mesmo arco e que a função cotangente seja o quociente entre as funções cosseno e seno de um mesmo arco, ou seja, para cada número real x, queremos que sejam verdadeiras as igualdades

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \text{ e } \cot g(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Agora que já sabemos quais as definições que vamos utilizar para as funções tangente e cotangente, vamos formalizar o seu estudo.

3.1. A função tangente

Definição. A função tangente é a função f: D → R, com D ⊂ R, que associa a cada x ∈ D, o número real f(x) = tgx (tangente de x), dado por

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Domínio e Imagem

Sendo o quociente entre as funções seno e cosseno, a função tangente é tal que sen o domínio é o conjunto de todos os números reais para os quais a função cosseno não se anula. Assim, basta que determinemos esses números.

Sabemos que $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ e que, no intervalo [0, 2π], esses são os dois únicos números para os quais isso acontece. Sabemos, também, que a função cosseno é periódica, de período 2π. Assim, além de não estar definida para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, a função tangente não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ nem para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com k um número inteiro. E como, $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$, concluímos que a função tangente está definida para todo número real x, tal que x $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ∈ Z). Em símbolos,

$$D(tgx) = \{ x \in R;\ x \quad \frac{\pi}{2} + kp,\ k \in Z \}.$$

Como se percebe, o domínio da função tangente é a união dos intervalos $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$,... com os intervalos $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$, ...

Com relação ao conjunto imagem da função tangente, é possível mostrar que qualquer número real pode ser tangente de algum arco ou ângulo e, consequentemente, a imagem da função tangente é o conjunto de todos os números reais. Em símbolos,

$$Im(tgx) = R.$$

Zeros

Os zeros da função tangente são os números reais x, tais que sen(x) = 0.

Sabemos que sen(x) = 0 se, e somente se, x = kπ, para algum inteiro k. Logo, os zeros da função tangente são os números positivos π, 2π, 3π, ..., além do número 0 e dos números negativos - π, - 2π, - 3π, ...

$$\ldots -4\pi \quad -3\pi \quad -2\pi \quad -\pi \quad 0 \quad \pi \quad 2\pi \quad 3\pi \quad 4\pi \ldots$$

Zeros da função tangente destacados na reta numérica real

Sinal

De acordo com a definição, o sinal da função tangente depende dos sinais da função seno e da função cosseno. A figura ao lado nos mostra essa variação de sinal, de acordo com o quadrante ao qual o ângulo pertence. No primeiro quadrante a tangente é positiva; no segundo, é negativa; no terceiro, é positiva; e no quarto, é negativa.

Na tabela a seguir, resumimos essa variação de sinal.

Variação do sinal da tangente

X	Seno	Cosseno	Tangente
0	0	1	0
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$+$	$+$	$+$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	Não existe
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$+$	$-$	$-$
π	0	-1	0
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	Não existe
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-$	$+$	$-$
2π	0	1	0

Período

Assim como as funções seno e cosseno, a função tangente também é periódica. Quando estudamos o domínio desta função, vimos que ela está definida em intervalos do tipo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}), \ldots$ e do tipo $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}), \ldots$, cada um deles de comprimento p e contendo um zero da função tangente, ou seja, um número da forma $k\pi$, com $k \in Z$.

Desde que $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, temos que $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}(x)$ e, consequentemente, a função tangente é periódica de período π.

De fato, temos que

$$\text{tg}(x+\pi) = \frac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\text{sen}(x)\cos(\pi)+\text{sen}(\pi)\cos(x)}{\cos(x)\cos(\pi)-\text{sen}(x)\text{sen}(\pi)} = \frac{-\text{sen}(x)}{-\cos(x)}$$

e, assim, $\text{tg}(x+\pi) = \text{tg}(x)$.

Gráfico

Tomando o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ como exemplo, podemos constatar que, a medida que x vai crescendo (de valores próximos a $\frac{\pi}{2}$ até p, quando a tangente se anula), o valor de tg(x) vai crescendo, mas sempre com valores negativos; para x maior do que p e menor do que $\frac{\pi}{2}$, a medida que x vai crescendo, o valor de tg(x) vai crescendo e é, sempre, positivo. Assim, podemos concluir que a função tangente é sempre crescente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, o mesmo valendo para os demais intervalos do domínio de definição da função tangente.

A figura a seguir apresenta um esboço do gráfico da função tangente, restrita ao domínio contido no intervalo $[0, 2\pi]$.

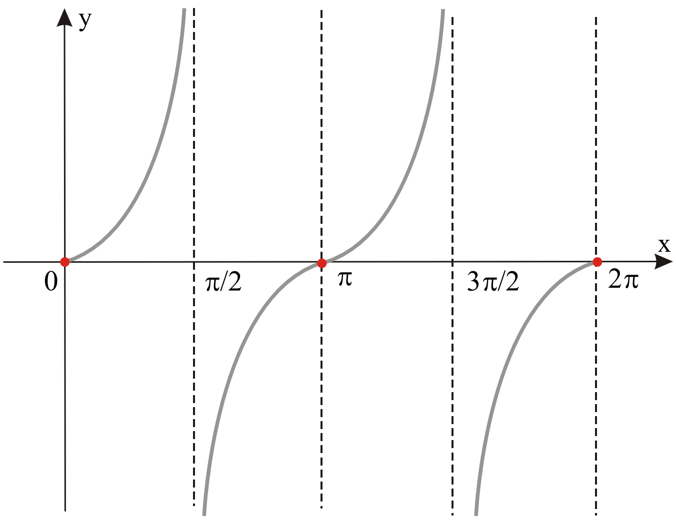


Gráfico da função tangente

Note que as retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico da tangente e que os pontos com abscissa 0, π e 2π são zeros da função, conforme já havíamos dito. Note, ainda, que a função tangente não possui máximo nem mínimo absoluto neste intervalo.

O gráfico a seguir é um esboço do gráfico da função tangente para um intervalo maior do domínio. Nele podemos visualizar melhor a periodicidade da função.

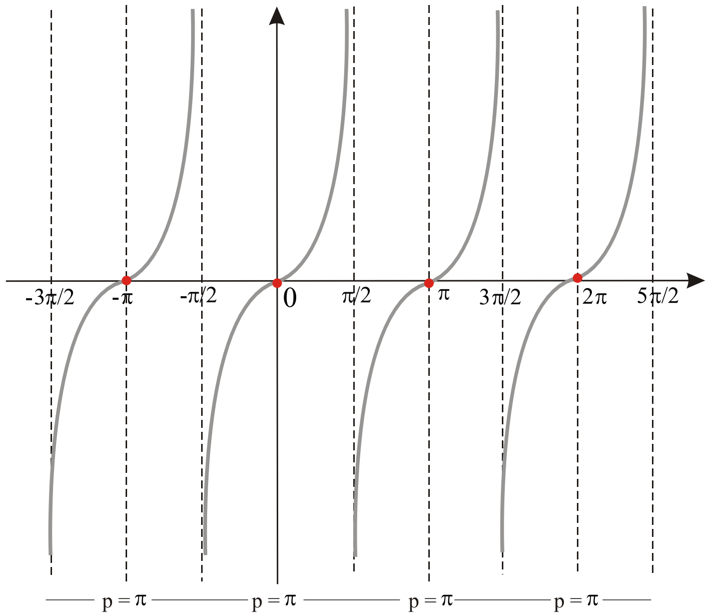


Gráfico da função tangente

3.2. A função cotangente

Definição. A função cotangente é a função $f: D \to R$, com $D \subset R$, que associa a cada $x \in D$, o número real f(x) = cotg(x) (cotangente de x), dado por $\cot g(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$.

Domínio e Imagem

Sendo o quociente entre as funções cosseno e seno, o domínio da função cotangente é o conjunto de todos os números reais para os quais a função seno não se anula. Assim, basta que determinemos esses números.

Sabemos que sen(0) = sen(π) = sen(2π) = 0 e que, no intervalo [0, 2π], esses são os únicos números para os quais isso acontece, ou seja, os únicos números que possuem seno nulo. Sabemos, também, que a função seno é periódica, de período 2π. Assim, além de não estar definida para $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$, a função cotangente não está definida para qualquer x do tipo $k\pi$, com $k \in Z$. Em símbolos,

D(cotgx) = { $x \in R$; $x \quad k\pi$, $k \in Z$ }.

Como se percebe, o domínio da função cotangente é a união dos intervalos $(0, \pi)$, $(\pi, 2p)$, $(2\pi, 3\pi)$,... Com os intervalos $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$, $(-3\pi, -2\pi)$...

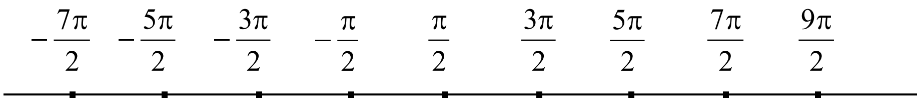
Com relação ao conjunto imagem da função cotangente, é possível mostrar que, assim como no caso da função tangente, qualquer número real pode ser cotangente de algum arco ou ângulo e, consequentemente, a imagem da função cotangente é o conjunto de todos os números reais. Em símbolos,

Im(cotgx) = R.

Zeros

Os zeros da função cotangente são os números reais x, tais que cos(x)=0.

Sabemos que cos(x) = 0 se, e somente se, $x = k\frac{\pi}{2}$, para algum inteiro k, ímpar. Logo, os zeros da função cotangente são os números positivos $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$,...



Zeros da função cotangente destacados na reta numérica real

Sinal

De acordo com a definição, o sinal da função cotangente depende dos sinais da função cosseno e da função seno. A figura ao lado nos mostra essa variação de sinal, de acordo com o quadrante ao qual o ângulo pertence, que é a mesma variação da função tangente. No primeiro quadrante a cotangente é positiva; no segundo, é negativa; no terceiro, é positiva; e no quarto, é negativa.

Na tabela a seguir, resumimos essa variação de sinal.

Variação do sinal da cotangente

x	Seno	Cosseno	Cotangente
0	0	1	Não existe
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$+$	$+$	$+$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	0
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$+$	$-$	$-$
π	0	-1	Não existe
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	0
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-$	$+$	$-$
2π	0	1	Não existe

Período

Assim como as funções seno, cosseno e tangente, a função cotangente também é periódica. Quando estudamos o domínio desta função, vimos que ela está definida em intervalos do tipo $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi), \ldots$ e do tipo $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$, $(-3\pi, -2\pi), \ldots$, cada um deles de comprimento π e contendo um zero da função tangente, ou seja, um número da forma $k\frac{\pi}{2} + \pi$, com k inteiro ímpar.

A função cotangente é periódica de período π, desde que $\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$ e, consequentemente, $\text{cotg}(x + \pi) = \text{cotg}(x)$.

De fato, temos que

$$\text{cotg}(x + \pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\text{sen}(x+\pi)} = \frac{\cos(x)\cos(\pi) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(\pi)}{\text{sen}(x)\cos(\pi) + \text{sen}(\pi)\,\text{sen}(x)} =$$

$$\frac{-\cos(x)}{-\text{sen}(x)} = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)},$$

e, assim, $\text{cotg}(x + \pi) = \text{cotg}(x)$.

Gráfico

Tomando o intervalo (0, p) como exemplo, podemos constatar que, a medida que x vai crescendo (de valores próximos a 0 até $\frac{\pi}{2}$, quando a cotangente se anula), o valor de cotg(x) vai decrescendo, mas sempre com valores positivos; para x maior do que $\frac{\pi}{2}$ e menor do que p, a medida que x vai crescendo, o valor de cotg(x) vai decrescendo e é, sempre, negativo. Assim, podemos concluir que a função cotangente é sempre decrescente no intervalo (0, p), o mesmo valendo para os demais intervalos do domínio de definição da função.

A figura a seguir apresenta um esboço do gráfico da função cotangente, comparativamente com o gráfico da função tangente. Nele podemos perceber que, enquanto a função tangente é crescente, a função cotangente é decrescente.

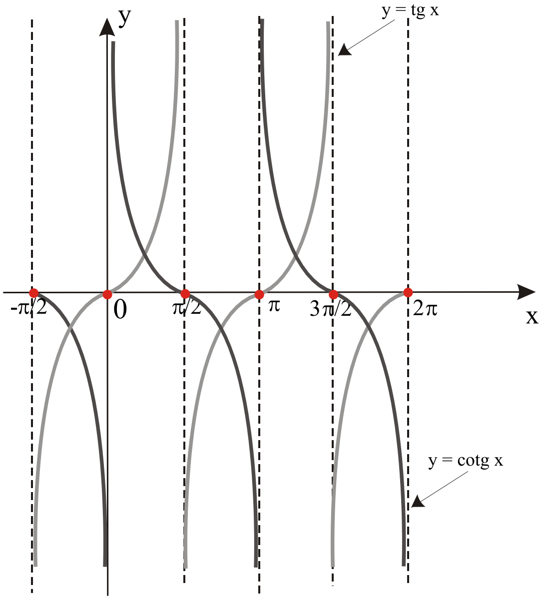


Gráfico da função cotangente
em comparação com o gráfico da função tangente

Note que as retas x = 0, x = π e x = 2π são assíntotas ao gráfico da cotangente e que os pontos com abscissa $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são zeros da função, conforme já havíamos dito. Note, ainda, que a função cotangente é periódica de período π e não possui máximo nem mínimo absoluto em cada intervalo do tipo] $n\pi$, $(n+1)\pi$[.

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 03 de exercícios.

Síntese da Capítulo

Nesta Unidade você aprendeu...

- Que existem outras unidades de medidas de arcos e de ângulos além do grau.
- A definir o radiano como outra unidade de medida de arcos e de ângulos.
- Que um arco de 2π radianos corresponde a um ângulo de 360º e que, a partir de uma regra de três simples, é possível passarmos da medida de um arco em graus para a medida desse arco em radianos e vice-versa.
- Como representar números reais na circunferência trigonométrica.
- Como definir as funções seno e cosseno, como funções reais de uma variável real.
- Que o domínio e a imagem das funções seno e cosseno são o conjunto dos números reais e o intervalo fechado [-1, 1], respectivamente.
- Que os zeros da função seno são os números reais do tipo $k\pi$, onde k é um número inteiro qualquer.
- Que os zeros da função cosseno são os números reais do tipo $k\frac{\pi}{2}$, onde k é um número inteiro ímpar qualquer.
- Que as funções seno e cosseno são, ambas, periódicas de período 2π.
- A definir as funções reais tangente e cotangente, respectivamente, como $\mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$ e $\cot g(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$, para cada x no domínio de cada função.
- Que a função tangente está definida para todo número real x, tal que x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, em que k é um número inteiro, enquanto a função cotangente está definida para todo número real x, tal que x $\neq$ $k\pi$, em que k é um número inteiro.

- Que a imagem de cada uma das funções tangente e cotangente é o conjunto dos números reais.
- Que os zeros da função tangente são os números reais do tipo $k\pi$, com $k \in \mathbf{Z}$, enquanto os zeros da função cotangente são os números reais do tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, em que k é um número inteiro.
- Que a função tangente é uma função crescente em cada intervalo do tipo $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$.
- Que a função cotangente é uma função decrescente em cada intervalo do tipo $]k\pi, (k+1)\pi[$.
- Que as funções tangente e cotangente são, ambas, periódicas de período π.

Atividades de avaliação

Lista 01

1. Um arco de 30º de uma circunferência de raio 2 cm mede $\frac{\pi}{3}$ cm de comprimento.

Solução

De fato, um arco de 180º desta circunferência mede 2π cm. Assim, usando uma regra de três simples, temos que o comprimento de um arco de 30º é dado por

$$x = \frac{30^\circ \pi 2}{180^\circ} = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

2. O comprimento de um arco de 45º de uma circunferência de 4 cm de raio é π cm.

Solução

De fato, um arco de 180º desta circunferência mede 4π cm. Assim, usando uma regra de três simples, temos que o comprimento de um arco de 45º é dado por

$$x = \frac{45^\circ \pi 4}{180^\circ} = \frac{180^\circ \pi}{180^\circ} = \pi.$$

3. Determine a medida em graus de uma arco de uma circunferência de 3 cm de raio, cujo comprimento é $\frac{\pi}{3}$ cm.

4. Determine o raio de uma circunferência, sabendo que um seu arco de comprimento $\frac{\pi}{2}$ cm é subtendido por um ângulo de 45º.

5. A medida em graus de um ângulo é 135º. Qual é a sua medida em radianos?

Solução

Temos que $135^\circ = 3 \times 45^\circ$ e a medida em radianos de um ângulo de 45º é $\frac{\pi}{4}$ rad. Assim, um ângulo de 135º mede, em radianos, $3 \times \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\frac{3\pi}{4}$ rad

6. A medida em radianos de um ângulo é $\frac{5\pi}{6}$. Qual é a sua medida em graus?

Solução

Temos que π radianos correspondem a 180º. Assim, para resolvermos nosso problema, basta resolvermos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \rightarrow & 180^\circ \\ \frac{5\pi}{6} & \rightarrow & x \end{array}$$

que resulta em $x = \frac{5\pi}{6\pi} 180^\circ = 150^\circ$.

7. Em qual quadrante está localizado cada um dos seguintes números reais:

a) 25	e) 321
b) 116	f) 247
c) -26	g) -321
d) -116	h) -247

Solução

a) Para sabermos em qual quadrante está situado o número real positivo α, basta que dividamos esse número por 2π e descubramos o resto. Fazendo isso, é como se estivéssemos enrolando um barbante de comprimento α sobre a circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário, a partir do ponto (1,0); o resto corresponde exatamente ao pedaço do barbante que não completa outra volta. Para sabermos em qual quadrante o número se encontra, basta que lembremos que o primeiro quadrante varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$ (aproximadamente 1,57); o segundo varia de $\frac{\pi}{2}$ a π (aproximadamente 3,14); o terceiro varia de π a $\frac{3\pi}{2}$ (aproximadamente 4,71); e o quarto varia de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π (aproximadamente 6,28).

Dividindo 25 por 6,28 obtemos o quociente 3 e o resto 6,16 (aproximadamente). Assim, o número 25 deve ser marcado no quarto quadrante.

c) Para sabermos em qual quadrante está situado o número real negativo $-\alpha$, basta que dividamos o número $-\alpha$ por 2π e descubramos o menor resto positivo α_1, tal que $-\alpha$ = q. 2π + α_1. Os números α_1 e $-\alpha$ estarão no mesmo quadrante. De fato, fazendo isso é como se tomássemos um barbante de comprimento α e o enrolássemos, no sentido horário, na circunferência unitária, a partir do ponto (1,0); o resto positivo é como se completássemos a volta no sentido horário e depois percorrêssemos α_1 no sentido anti-horário para encontrarmos a determinação de $-\alpha$ na primeira volta positiva.

Dividindo – 116 por 2π, encontramos –116 = (-19). 2π + 3,32, em valores aproximados. Assim, os números -116 e 3,32 representam o mesmo ponto na circunferência trigonométrica. Como 3,14 ($\cong \pi$) < 3,32 < 4,71 ($\cong 3\frac{\pi}{2}$), temo s que o número –116 se encontra no terceiro quadrante.

Lista 02

1. Sabendo que a imagem da função $\operatorname{sen}(x)$ é o intervalo [-1, 1], determine o conjunto imagem das funções $\operatorname{sen}(2x)$, $2\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}(3x)$ e $3\operatorname{sen}(x)$.

2. Sabendo que a imagem da função $\cos(x)$ é o intervalo [-1, 1], determine o conjunto imagem das funções $3\cos(2x)$ e $2\cos(3x)$.

3. A partir da análise dos gráficos das funções seno e cosseno, construídos no texto, determine os intervalos de crescimento e decrescimento destas funções.

4. Encontre todas as raízes das funções $2\operatorname{sen}(3x)$, $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{6})$, $\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ e $\cos(\frac{x}{4})$.

5. Determine o período das funções $\text{sen}(3x)$ e $\cos(\frac{x}{3})$.

6. Faça um estudo comparativo do período da função sen(kx), sendo k um número real não nulo, a partir da variação de k.

7. Faça um estudo comparativo do período da função $\cos(x + k\pi)$, sendo k um número inteiro, a partir da variação de k.

8. Resolva as seguintes equações:

a) $\text{sen}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos(\frac{2x + \pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Pesquise em livros ou na internet (em sites confiáveis) sobre as funções arcoseno e arcocosseno.

Lista 03

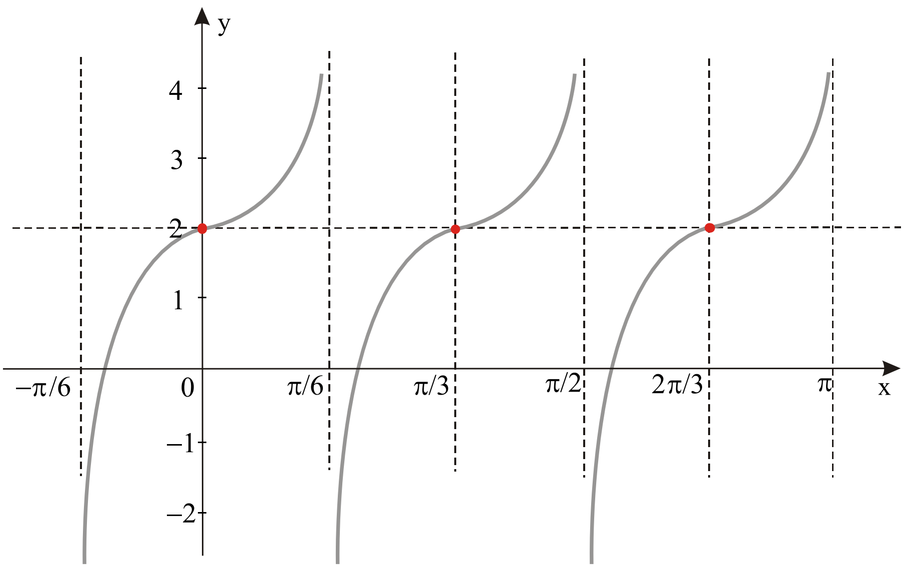
1. Resolva as seguintes equações:

a) tg(3x) = 1 **b)** $\cot g(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

2. Determine o valor de k, sabendo que a função tg(kx) tem período $\frac{\pi}{4}$.

3. Determine o domínio da função $\text{cotg}(kx + \frac{\pi}{2})$ em termos do valor de k.

4. Determine os valores de a e b, sabendo que o gráfico a seguir é o gráfico da função tg(ax + b).



5. Sabendo que $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$ e $cot\,g(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$, use seus conhecimentos de cálculo para determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento dessas funções.

6. Mostre que a função $sen(x)$ é ímpar, isto é, mostre que $sen(-x) = -sen(x)$, qualquer que seja o número real x.

7. Mostre que a função $cos(x)$ é par, isto é, mostre que $cos(-x) = cos(x)$, para todo número real x.

8. Verifique a paridade (se é par ou ímpar) das funções $tg(x)$ e $cot\,g(x)$, em seus domínios de definição.

9. Pesquise em livros ou na internet (em sites confiáveis) sobre as funções arcotangente e arcocotangente.

10. Pesquise em livros ou na internet (em sites confiáveis) os gráficos das funções secante e cossecante e faça um estudo dessas funções como foi feito ao longo do texto para as funções tangente e cotangente.

Referências

BONGIOVANNI, Domenico, e outros. **Matemática e vida.** 2º Grau, vol. 2. São Paulo: Ática, 1993.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARMO, Manfredo Perdigão do, e outros. **Trigonometria. Números Complexos.** Rio de Janeiro: SBM, 1992. Coleção do Professor de Matemática.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações,** vol. único. São Paulo: Ática, 2004.

GUELLI, Cid A. e outros. **Matemática 2º Grau,** vol. 1. São Paulo: Marco, 1979.

HARIKI, Seiji, e outros. **Curso de Matemática**, vol. 1. São Paulo: HARBRA, 1979.

LAPA, Nilton, e outros. **Noções de Matemática**, vol. 3: trigonometria. São Paulo: Editora Moderna, 1978.

SCHMITT, Tânia e outros. **Trigonometria e números complexos**. Revisitando a matemática com atividades para professores. Brasília: Editora da UNB, 2006.

Capítulo 4

O conjunto dos Números Complexos

Introdução

Já nas séries iniciais do Ensino Fundamental, iniciamos nosso estudo dos números. Começamos com os números naturais, números que são usados na contagem e são designados pelos símbolos

$$0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots,$$

Sendo o conjunto de todos os números naturais representado pela letra **N**.

$$\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$$

Em seguida, devido à insuficiência dos números naturais para efetuar subtrações como 7 – 9 ou 8 – 10, ou seja, subtrações nas quais o minuendo é menor do que o subtraendo, o conjunto **N** foi ampliado dando origem ao conjunto **Z** dos números inteiros ou números inteiros relativos, que é formado por todos os números naturais e os números negativos. Esses números negativos são representados pelos símbolos -1, -2, -3,... e, assim,

$$\mathbf{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots \}$$

Mesmo com essa ampliação, o campo numérico disponível ainda era insuficiente para resolver todas as operações. As divisões do tipo $3 \div 4$ ou $5 \div 3$ não forneciam como resultado um número inteiro. Esse problema só pode ser resolvido com nova ampliação do campo numérico. Chegamos, dessa forma, ao conjunto dos números racionais, que é representado pela letra **Q** e contém todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros, sendo o denominador um número inteiro não nulo.

$$\mathbf{Q} = \{ \frac{p}{q}; p, q \in Z, q \quad 0 \}$$

Por sua vez, o conjunto dos números racionais foi ampliado para o conjunto dos números reais, que é representado pela letra **R**, com a inclusão

Saiba Mais:
Dois números irracionais classicamente conhecidos por serem usados nas soluções de diversos problemas são o número π (3,14159...) e o número e ou número de Neper (2,718...). É importante mencionarmos que as reticências, neste caso, indicam que a parte decimal do número é infinita, não sendo, entretanto, periódica.

dos números irracionais, ou seja, daqueles números que não possuem representação decimal nem exata nem periódica. São exemplo de números irracionais os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, ambos raízes da equação $x^2 - 2 = 0$.

Quando estudávamos as equações do 2º grau, nas últimas séries do Ensino Fundamental, surgiu novamente a necessidade de ampliação do campo numérico, pois o campo dos números reais mostrou-se insuficiente para resolvermos todas as equações que nos eram apresentadas, obtendo soluções reais. Algumas equações do 2º grau não possuíam raízes reais. Isso ocorria sempre que o discriminante da equação era negativo.

De fato, de acordo com a fórmula de Bhaskara, as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais, sendo a   0, são dadas por:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$, e como em **R** não existe raiz quadrada de número negativo, sempre que o Δ for negativo não teremos raízes reais.

Por exemplo, a equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ é tal que $\Delta = -8$ e, portanto, não possui raízes reais. Pela fórmula de Bhaskara, suas raízes são dadas por

$$X_1 = \frac{-2 + \sqrt{-8}}{2} \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{-2 - \sqrt{-8}}{2}.$$

as quais não são reais, uma vez que $\sqrt{-8}$ não é um número real.

Observe, por exemplo, que aplicando à raiz X_1, encontrada anteriormente, as regras usuais da álgebra, teremos:

1. $$(X_1)^2 = \left(\frac{-2 + \sqrt{-8}}{2}\right)^2 = \frac{4 - 4\sqrt{-8} + \left(\sqrt{-8}\right)^2}{4}$$

$$(X_1)^2 = \frac{4 - 8 - 4\sqrt{-8}}{4} = \frac{-4 - 4\sqrt{-8}}{4} = -1 - \sqrt{-8}$$

2. $$(2X_1) = 2 \times \left(\frac{-2 + \sqrt{-8}}{2}\right) = -2 + \sqrt{-8}$$

3. $$(X_1)^2 + 2X_1 + 3 = (-1 - \sqrt{-8}) + (-2 + \sqrt{-8}) + 3 = 0,$$

mostrando que X_1 é uma raiz da equação. De maneira semelhante, se fizermos as contas para X_2, concluiremos que X_2 também é raiz da equação.

Na resolução da equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ encontramos soluções não reais. Isto sugere a ampliação do campo numérico dos reais para um campo que contenha as raízes quadradas dos números reais negativos, ou seja, o conjunto dos números complexos, que é representado pela letra **C**.

A partir de Bombelli (1526-1572), que em sua obra “Álgebra” operava livremente com as raízes quadradas de números negativos submetendo esses números às regras usuais da álgebra, os matemáticos passaram a “aceitar” essas raízes quadradas. C o m a aceitação desses números, todas as equações do 2º grau passam a ter duas raízes: reais ou não reais, iguais ou diferentes.

Nesta Unidade apresentaremos os números complexos, suas principais propriedades e estenderemos a esses números as operações elementares com números reais.

1. Um pouco de história

Apesar de bastante utilizados, atualmente, em quase todos os ramos da matemática e em muitos ramos da física, a aceitação dos números complexos foi um processo longo e difícil. No início da sua história, os números complexos foram considerados “números impossíveis”, aceitos apenas em um domínio limitado da álgebra, por serem úteis na resolução de equações cúbicas.

Na física, hoje os números complexos são utilizados, entre outros campos, na mecânica quântica e na eletricidade, sendo que neste último utilizam a letra j no lugar de i, reservando o símbolo i para intensidade de corrente. Na realidade, os físicos já utilizavam estes números desde 1823 quando FRESNEL (1788–1827) construiu sua teoria da reflexão total, publicada em 1831.

Mas a primeira aparição dos números complexos se deu durante a Renascença. Em 1539, o matemático Girolamo CARDANO (1501-1576) aprendeu com Nicolo Fontana TARTAGLIA (1499/1500-1557) um processo para resolver equações do 3º grau, prometendo que não o revelaria a ninguém. Para encontrar uma das raízes da equação do 3º grau $x^3 = px + q$, ele utilizava a fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{d}}\text{, em que } d = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Em 1545 ele quebrou sua promessa revelando a fórmula que, atualmente, é conhecida como fórmula de Cardano. Em seu livro Ars Magna, Cardano trabalhou com os números $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ como raízes da

Glossário:
Sofisma: Argumento aparentemente válido, mas na realidade, não conclusivo, e que supõe má fé por parte de quem o apresenta. Argumento falso formulado de propósito para induzir outrem a erro.

equação quadrática x(10 – x) = 40, referindo-se a $\sqrt{-15}$ como "quantidade sofística". Não se sabe ao certo se Cardano chegou aos números imaginários estudando as equações quadráticas ou cúbicas. O certo é que ele sabia que as raízes da equação quadrática $x^2 + b = ax$ são dadas por

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

e que essas raízes não são reais, quando $a^2 < 4b$. De maneira semelhante, sabia que a "fórmula de Cardano" também falhava em equações cúbicas do tipo $x^3 = ax + b$, quando d < 0, ou seja, quando $27q^2 < 4p^3$. Por exemplo, a equação $x^3 = 20x + 25$ possui 5 como raiz e, no entanto, na fórmula de Cardano encontramos d < 0.

A álgebra de Cardano tomou impulso com Rafael BOMBELLI (1526-1572) que, sem se preocupar muito com a natureza dos números complexos, estabeleceu um conjunto de regras de cálculo para se operar com esses números, dentre as quais encontramos (-i)(-i) = -1. Operando com números complexos como se fossem reais, utilizando as regras da álgebra e usando a fórmula de Cardano, Bombelli mostrou que a equação $x^3 = 15x + 4$ possui a solução real x = 4, e que ela podia ser obtida da fórmula de Cardano se observarmos que o produto $(2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1})$ é igual a 4.

Também contribuíram para a compreensão e aceitação dos números complexos, matemáticos como René DESCARTES (1596-1650) e Isaac NEWTON (1642-1727). Descartes despertou os matemáticos para a antítese entre o real e o imaginário, ao afirmar que podemos "imaginar" que toda equação algébrica de grau n possui n raízes, mas nem todas representam quantidades "reais". Newton, menos filosoficamente, acreditava que as raízes complexas eram indícios de que um problema não possuía solução.

Nesta mesma época, em uma carta escrita a Huyguens em 1674 ou 1675, Gottifried LEIBNIZ (1646-1675) enriqueceu a teoria dos números complexos escrevendo a surpreendente relação

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}.$$

O matemático suíço Leonhard EULER (1707-1783), apesar da grande dificuldade em lidar com os números complexos, não teve qualquer escrúpulos em utilizá-los em seus cálculos, de forma intuitiva, mas correta. Foi Euler quem percebeu a não possibilidade de ordenar os números complexos com uma ordem compatível com as operações elementares, afirmando que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser maior do que zero, nem menor do que zero, nem igual a zero.

Somente com Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) passou-se a ter uma nova visão sobre os números complexos. Foi a influência de Gauss que deu aos números complexos a mesma "importância matemática" que já era atribuída aos números reais. Gauss interpretou os números complexos como pontos de um plano desde cerca de 1796.

Diferentemente de Gauss, o matemático francês Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) via os números complexos de forma totalmente algébrica, com esses números não passando de expressões formais do tipo $a + b\sqrt{-1}$, em que a e b eram números reais. Para ele, as equações imaginárias não passavam de representações simbólicas entre quantidades reais.

No século XIX, os números complexos iniciaram sua marcha triunfal por todos os campos da matemática. Em 1851, Bernhard RIEMANN (1826-1866) afirmou que o propósito e o objetivo imediato da introdução dos números complexos na matemática era expressar as leis de dependência entre variáveis por meio de operações mais simples, a partir da observação de regularidades e harmonia que sem eles não ocorreriam. Evidenciando, com isso, a importância dos números complexos para a matemática.

2. A forma algébrica dos números complexos

Os números complexos são os números que podem ser escritos na forma a + bi, com **a** e **b** números reais e $i = \sqrt{-1}$ ou, se preferirmos, $i^2 = -1$.

Usando a linguagem da teoria dos conjuntos, o conjunto dos números complexos é representado pela letra **C** e, portanto, temos que

$$\mathbf{C} = \{\, a + bi;\ a, b \in R,\ i^2 = -1 \,\}$$

Forma algébrica de um número complexo

Quando escrevemos z = a + bi, com a e b sendo números reais, dizemos que o número complexo z está representado na sua forma algébrica. Nela destacamos a parte real – o número real **a** – e a parte complexa – o número real **b** –, que serão indicadas, respectivamente, por Re(z) e Im(z). Assim, se o número complexo z = a + bi encontra-se escrito na sua forma algébrica, então Re(z) = a e Im(z) = b.

Inclusão de R em C

Cada número real **a** pode ser pensado como o número complexo z = a + 0i e, assim, todo número real é, também, um número complexo. Em linguagem da teoria dos conjuntos, dizemos que o conjunto R, dos números reais, está contido no conjunto C, dos números complexos. Simbolicamente, escrevemos $R \subset C$.

Unidade imaginária

Se o número complexo z é tal que $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$, dizemos que z é um imaginário puro. A forma algébrica do número imaginário puro i é $0 + 1i$ e este número é chamado de unidade imaginária.

Igualdade de números complexos

Os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, escritos na sua forma algébrica, são iguais se, e somente se, a parte real e a parte imaginária de z são iguais, respectivamente, à parte real e à parte imaginária de w, ou seja, se $a = c$ e $b = d$. Em símbolos:

$$\mathbf{z = w \Leftrightarrow Re(z) = Re(w) \text{ e } Im(z) = Im(w)}$$

3. A norma e o conjugado de um número complexo

A cada número complexo z é possível associar um número real, chamado norma de z, e um número complexo, chamado o conjugado de z, como veremos a seguir.

Norma de um número complexo

Se $z = a + bi$ é um número complexo escrito na sua forma algébrica, então a norma de z é indicada por $|z|$ e é definida como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observe que a norma de qualquer número complexo z é um número real. Além disso, se z é um número real, sua norma coincide com seu valor absoluto. Assim, a norma de um número complexo é a extensão do valor absoluto de um número real.

Conjugado de um número complexo

Se $z = a + bi$ é um número complexo escrito na sua forma algébrica, então o conjugado de z é o número complexo indicado por $\overline{z}$ e definido como $\overline{z} = a - bi$.

Observe que, para todo número complexo z, temos que

$$Re(\overline{z}) = Re(z) \text{ e } Im(\overline{z}) = -Im\ (z).$$

Com relação à norma e ao conjugado de um número complexo, valem os seguintes resultados:

Proposição 4.1. Seja z um número complexo. Temos que $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$.

Prova

1. $\Rightarrow$] Seja z = a + bi um número complexo na sua forma algébrica e suponha que $|z| = 0$. Assim, devemos ter $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, o que nos dá $a^2 + b^2 = 0$. Como a e b são números reais, temos que $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$ e, conseqüentemente, $a^2 + b^2 \geq$. Portanto, a igualdade somente vale se a = b = 0, e neste caso, teremos z = a + bi = 0 + 0i = 0.

   $\Leftarrow$] Se z = 0 = 0 + 0i, temos que $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Provando a proposição.

Proposição 4.2. Sejam z um número complexo e $\overline{z}$ seu conjugado. Temos que $z = \overline{z}$ se, e somente se, z for um número real.

Prova

Sejam z = a + bi um número complexo na sua forma algébrica e $\overline{z}$ = a – bi o seu conjugado.

2. $\Rightarrow$] Se $z = \overline{z}$, devemos ter $Re(z) = Re(\overline{z})$, o que sempre ocorre, e I m(z) = $Im(\overline{z})$, ou seja, b = -b, o que ocorre somente se b = 0. Assim, se $z = \overline{z}$, devemos ter Im(z) = 0, ou seja, z deve ser um número real.

3. $\Leftarrow$] Se z for um número real, então z = a = a + 0i e seu conjugado será e $\overline{z}$ = a – 0i = a. Assim, teremos $z = \overline{z}$.

Provando a proposição.

Proposição 4.3. Sejam z um número complexo e $\overline{z}$ seu conjugado. Temos que $|z| = |\overline{z}|$.

Prova

Sejam z = a + bi um número complexo na sua forma algébrica e $\overline{z}$ = a – bi o seu conjugado.

Assim:

$$|z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}\ ; \text{ e}$$
$$|\overline{z}| = \sqrt{(a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}\,.$$

Conseqüentemente, $|z| = |\overline{z}|$.

Provando a proposição.

Pare e pense!

Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a **Lista 01** de exercícios.

4. Operações elementares com números complexos

Vamos agora definir as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos. Porém é preciso termos em mente que, como todo número real é, também, um número complexo, as operações em **C** devem ser definidas como extensões das operações correspondentes em **R** e, portanto, devem preservar as propriedades que estas já possuíam. Assim,

Para a **ADIÇÃO** devem valer as propriedades:

- **Fechamento:**

Dados os números complexos z e w, a soma de z com w é indicada por z + w e é um número complexo.

- **Associativa:**

Dados os números complexos z, v e w, devemos ter

$$z + (v + w) = (z + v) + w.$$

- **Comutativa:**

Dados os números complexos z e w, devemos ter

$$z + w = w + z.$$

- **Elemento neutro:**

Existe o número complexo 0 = 0 + 0i que é tal que z + 0 = z, qualquer que seja o número complexo z.

- **Elemento oposto:**

Dado o número complexo z existe o número complexo –z, chamado de oposto de z, tal que z + (-z) = 0. Se o número complexo z é dado por z = a + bi, então seu oposto –z é dado por –z = -a – bi.

Para a **MULTIPLICAÇÃO** devem valer as propriedades:

- **Fechamento:**

Dados os números complexos z e w, o produto de z por w é indicado por z.w, ou simplesmente zw, e é um número complexo.

- **Associativa:**

Dados os números complexos z, v e w, devemos ter

$$z.(v.w) = (z.v).w.$$

- **Comutativa:**

Dados os números complexos z e w, devemos ter

$$z.w = w.z.$$

- **Elemento neutro:**

Existe o número complexo 1 = 1 + 0i que é tal que z.1 = z, qualquer que seja o número complexo z.

- **Elemento inverso:**

Dado o número complexo não nulo z existe o número complexo $\frac{1}{z}$, chamado de inverso de z, tal que $z.\frac{1}{z} = 1$.

Se o número complexo z é dado por z = a + bi, então seu inverso é dado por $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

Deve valer, ainda, a propriedade **DISTRIBUTIVA** da multiplicação em relação à adição:

- **Distributividade:**

Dados os números complexos z, v e w, temos que

$$z.(v + w) = z.v + z.w.$$

Definindo as operações elementares

Com estas propriedades em mente, as únicas definições possíveis para a adição e para a multiplicação de números complexos são as que seguem:

- **Adição:** Dados os números complexos z = a + bi e w = c + di, ambos escritos na forma algébrica, a adição de z com w é indicada por z + w e definida como z + w = (a + c) + (b + d)i.

O número complexo z + w é chamado de soma de z com w ou soma entre z e w. Observe que, como a adição é comutativa podemos escrever, indistintamente z + w ou w + z.

- **Subtração:** Dados os números complexos z = a + bi e w = c + di, ambos escritos na forma algébrica, a diferença entre z e w é indicada por z – w e definida como z – w = (a – c) + (b – d)i. O número complexo z-w é chamado de diferença entre z e w e, neste caso, não necessariamente, temos z-w=w-z.
- **Multiplicação:** Dados os números complexos z = a + bi e w = c + di, ambos escritos na forma algébrica, a multiplicação de z por w é indicada por z.w e definida como z.w = (ac + bd) + (ad – bc)i.

O número complexo z.w é chamado de produto de z por w. Observe que, como a multiplicação é comutativa podemos escrever, indistintamente, z.w ou w.z.

- **Divisão:** Dados os números complexos z = a + bi e w = c + di, ambos escritos na forma algébrica, com w 0, a divisão de z por w é indicada por $\frac{z}{w}$ e definida como $\frac{z}{w} = z.\frac{1}{w}$.

O número complexo $\frac{z}{w}$ também é chamado de quociente entre z e w ou quociente de z por w.

Na prática, para não termos que decorar essas definições, aplicamos as propriedades das operações sempre que precisarmos efetuá-las.

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a **Lista 02** de exercícios.

5. Retomando a norma e o conjugado

Agora que já definimos a multiplicação de números complexos, podemos relacionar a norma e o conjugado de um número complexo com essa operação, da forma que segue.

Proposição 4.4. Para todo número complexo z, temos que $|z|^2 = z.\bar{z}$.

Prova

Sejam z = a + bi um número complexo na sua forma algébrica e $|z|$ e $\bar{z}$ = a – bi, sua norma e seu conjugado, respectivamente.

Assim, temos que:

(i) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; e

(ii) $z.\bar{z}$ = (a.a + b.b) + (a.b – ba)i = $a^2 + b^2$.

De (i) e (ii) concluímos que $|z|^2 = z.\bar{z}$.

Provando a proposição.

Proposição 4.5. Dados os números complexos z e w, temos que $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Prova

Sejam z = a + bi e w = c + di, as formas algébricas dos números complexos z e w.

Assim temos que:

(i) z + w = (a + c) + (b + d)i;

(ii) $\overline{z+w} =$ (a + c) – (b + d)i = (a – bi) + (c – di);

(iii) $\overline{z}+\overline{w} =$ (a – bi) + (c – di).

De (ii) e (iii), concluímos que $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$.

Provando a proposição.

Proposição 4.6. Dados os números complexos z e w, temos que $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

Prova

Deixamos a cargo do leitor.

Proposição 4.7. Se z e w são números complexos, então $|z.w| = |z||w|$.

Prova 01

Sejam z = a + bi e w = c + di as formas algébricas dos números complexos z e w.

Temos que:

(i) z.w = (a + bi).(c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i;

(ii) $|z.w|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2).(c^2 + d^2)$;

(iii) $|z|^2 = a^2 + b^2$;

(iv) $|w|^2 = c^2 + d^2$;

(v) $|z|^2.\ |w|^2 = (a^2 + b^2).(c^2 + d^2)$.

Da igualdade entre ii e v, temos que $|z.w|^2 = |z|^2.|w|^2$. Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, obtemos

$|z.w| = |z|.\ |w|$.

Provando a proposição.

Outra prova da proposição anterior pode ser dada usando a proposição 4.4, anterior, conforme veremos a seguir.

Prova 02

Temos que:

$|z.w|^2 = (z.w).(\overline{zw}) = z.w.\overline{z}.\overline{w} = z.\overline{z}.w.\overline{w} = |z|^2\,|w|^2.$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos que

$|z.w| = |z| \cdot |w|.$

Provando a proposição.

6. Potenciação de números complexos

Agora que já estendemos aos números complexos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão definidas para os números reais, vamos estender a potenciação com expoentes inteiros.

Temos a seguinte definição:

- **Potenciação:** Dado o número complexo z, para cada número natural n, definimos z^n como segue:

$z^0 = 1$

$z^1 = z$

$z^2 = z.z$

$z^n = \underbrace{z.z.z..z}_{n-\text{fatores}}$, se $n \geq 2$,

$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$, se $n \geq 1$ e $z \neq 0$.

Como consequências dessa definição temos as seguintes propriedades que serão apresentadas na forma de proposição, cujas demonstrações serão deixadas a cargo do leitor.

Proposição 4.8. Se z é um número complexo e m e n são números inteiros, então, respeitando as condições de existência, vale o seguinte:

$z^n.z^m = z^{n+m};$

$z^n : z^m = z^{n-m};$

$(z^n)^m = z^{n.m}.$

Proposição 4.9. Se z e w são números complexos e m é um número inteiro, então, respeitando as condições de existência, vale o seguinte:

$(z.w)^m = z^m.w^m;$

$(z : w)^m = z^m : w^m$

Potências do número i

Como você acha que se comportam as potências do número i? Quantas potências de i, diferentes, será que existem?

Antes de ler o que segue, procure pensar sobre o assunto.

Observe o que acontece quando calculamos potências de expoente inteiro do número i.

Sabemos que, por definição, $i^0 = 1$, e $i^1 = i$. Sabemos, também, que $i^2 = -1$. Que valor obteremos ao calcular i^6?

Tente responder, antes de continuar sua leitura.

Usando as propriedades anteriores, podemos calcular i^6 como segue:

- $i^6 = i^2.i^2.i^2 = (-1).(-1).(-1) = -1$.

Como se percebe, temos a igualdade $i^2 = i^6$.

Observe que acontece algo semelhante com as potências i^0, i^4, i^8 e i^{12}. De fato, como veremos a seguir, todas valem 1.

- $i^0 = 1$, por definição;
- $i^4 = (i^2).(i^2) = (-1)(-1) = 1$;
- $i^8 = (i^2).(i^2).\ (i^2).(i^2) = (-1)(-1)\ (-1)(-1) = 1$;
- $i^{12} = (i^4)^3 = (1)^3 = 1$.

Podemos estar nos fazendo as seguintes perguntas:

1. Para que outros valores inteiros de n teremos $i^2 = i^6 = i^n = -1$?
2. Para que outros valores inteiros de n teremos $i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = 1$?
3. Quantos são os valores diferentes para i^n, sendo n um número inteiro?

Para respondermos a essas questões, observemos, inicialmente, que para todo número natural n, $i^{4n+2} = -1$. De fato, temos que

- $i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = (i^4)^n.(-1) = (1)^n.(-1) = -1$.

E, portanto, encontramos uma infinidade de números naturais com essa propriedade.

Mas será que existem outros? Ou será que esses são os únicos números naturais com essa propriedade?

Veremos que a resposta a esta pergunta é sim. Esses são os únicos números naturais com essa propriedade.

Isso é uma consequência de um resultado conhecido como **algoritmo da divisão euclidiana**, para o caso particular em que o divisor é 4, que será enunciado a seguir. Sua demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de *Teoria dos números* e não será feita aqui.

Teorema: Algoritmo da divisão euclidiana. Dado um número inteiro qualquer N, existem, e são determinados de maneira única, números inteiros q e r, chamados, respectivamente, de quociente e resto, com $0 \leq r < 4$, tais que $N = 4q + r$.

Voltando às potências de i, temos que, para cada inteiro n, de acordo com o algoritmo da divisão euclidiana, existem inteiros q e r tais que $n = 4q + r$, com r = 0, 1, 2 ou 3, e, portanto,

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = (1)^q.i^r = i^r.$$

Assim, são quatro os possíveis valores para i^n, quais sejam

$$i^n = \begin{cases} i^0 = 1, \ se \ n = 4q; \\ i^1 = i, \ se \ n = 4q+1; \\ i^2 = -1, \ se \ n = 4q+2; \\ i^3 = -i, \ se \ n = 4q+3. \end{cases}$$

Portanto, para determinarmos o valor de i^n, sendo n um número inteiro, basta encontrarmos o resto r da divisão euclidiana de n por 4, pois,neste caso, temos que $i^n = i^r$ e i^r = 0, 1, 2 ou 3, dependendo do número n.

Pare e pense!

Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 03 de exercícios.

Síntese do Capítulo

Nesta Unidade você aprendeu...

- Que é possível ampliar o conjunto dos números para obter o conjunto dos números complexos que contém todas as raízes quadradas de números negativos.
- Um pouco da história dos números complexos.

- Que, em sua forma algébrica, um número complexo se escreve como a + bi, em que a e b são números reais e i = $\sqrt{-1}$, e que, portanto, é possível incluir o conjunto dos números reais no conjunto dos números complexos escrevendo o número real α como α + 0i.
- Que no número complexo z = a + bi, o número real a é dito a parte real de z e é indicado por Re(z) e o número real b é dito a parte imaginária de z e é representado por Im(z).
- Que os números complexos z tais que Re(z) = 0 são ditos imaginários puros enquanto os números complexos w tais que Im(w) = 0 são os números reais.
- Que dois números complexos z e w são iguais se, e somente se, a parte real de z for igual à parte real de w e se a parte imaginária de z for igual à parte imaginária de w.
- A definir a norma e o conjugado de um número complexo que são indicados $|z|$ e $\bar{z}$, respectivamente.
- Que a norma do número z = a + bi, escrito na sua forma algébrica, é o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e que, portanto, o único complexo que possui norma igual a zero é o número 0.
- Que o conjugado do número complexo z = a + bi, escrito na sua forma algébrica, é o número complexo $\bar{z}$ = a – bi e que, portanto, um número complexo é igual ao seu conjugado se, e somente se, sua parte imaginária for igual a zero.
- Que é possível estender aos números complexos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão que eram definidas para os números reais, mantendo as mesmas propriedades que elas possuíam.
- Que existe uma relação entre a norma e o conjugado de um número complexo, dada por $|z|^2 = z.\bar{z}$.
- Que se z e w são números complexos, então $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$, e $|z.w| = |z|.|w|$.
- Que é possível estender a potenciação aos números complexos, mantendo as mesmas propriedades da potenciação de números reais.
- Que só existem quatro potências distintas de i, se o expoente for um número inteiro, e elas são 1, i, -1 e –i.

Atividades de avaliação

Lista 01

1. Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 - 3i$

b) $z = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$

c) $z = 9i$

d) $z = \sqrt{-2}$

e) $z = 0$

f) $z = 1 - i$

g) $z = 2i - 3$

Solução

Dado o número complexo $z = 2 - 3i$, sua parte real é 2 e sua parte imaginária é -3, uma vez que podemos escrever $z = 2 + (-3)i$. Assim, $Re(z) = 2$ e $Im(z) = -3$.

2. Dado o número real x, em que condições o número complexo $z = 2 + (x-3)i$, é real?

Solução

O número complexo $z = 2 + (x-3)i$ será um número real se, e somente se, $x = 3$. De fato, para que um número complexo seja real é necessário e suficiente que sua parte imaginária seja zero. Assim, devemos ter a igualdade $x - 3 = 0$ ou, equivalentemente, $x = 3$.

3. Dados os números reais x e y, em que condições o número complexo $z = (2 - x)i + (3 + y)$ é real?

Solução

O número complexo $z = (2 - x)i + (3 + y)$ será um número real se, e somente se, $x = 2$ e y for um número real qualquer; e será um número complexo puro se, e somente se, $y = -3$ e x for um número real, diferente de 2.

4. Determine os valores dos números reais x e y, sabendo que os números complexos $z = (x + 5) + (y - 2)i$ e $w = 3 - 2i$ são iguais.

Solução

O número complexo $z = (x + 5) + (y - 2)i$ será igual ao número complexo $w = 3 - 2i$ se, e somente se, $x = -2$ e $y = 0$. De fato, para que tenhamos $z = w$, devemos ter as igualdades $x + 5 = 3$, ou equivalentemente, $x = -2$, e $y - 2 = -2$ ou, equivalentemente, $y = 0$.

5. Determine os valores dos números reais x e y para que os números complexos $z = 2 + (x - 3)i$ e $w = -3 + (2 - y)i$ sejam iguais.

Solução

Os números complexos $z = 2 + (x - 3)i$ e $w = -3 + (2 - y)i$ nunca serão iguais, quaisquer que sejam os valores de x e de y. De fato, dois números complexos para serem iguais precisam ter a mesma parte real e a mesma parte imaginária. Como $Re(z) = 2$ e $Re(w) = -3$, os números complexos z e w nunca serão iguais.

6. Determine os valores de x e de y para que os números complexos z e w sejam iguais.

a) $z = (x - 3) + 2i$ e $w = 2 - (y + 5)i$

b) $z = 3i$ e $w = 2 + (x - y)i$

c) $z = 2 + 3i$ e $w = (x - 4) + (2 - y)i$

d) $z = 0$ e $w = (2 - 3x)i + (2y - 3)$

e) $z = 3 + 5i$ e $w = (2x - 1) + 3i$

f) $z = 3 + 2i$ e $w = (x + y) + (x - y)i$

7. Determine os valores dos números reais x e y, para que o número complexo

a) $z = (2 - x) + (3 - 2y)i$ seja um número real.

b) $z = (x^2 + x) + 5i$ seja um imaginário puro.

c) $z = 3 + (y^2 - 1)i$ seja um número real.

d) $z = (x^2 + x) + (y^2 - 1)i$ seja igual ao número complexo $w = 0$.

e) $z = (x^2 + x) + (y + 2)i$ seja igual ao número complexo $w = -1 + 3i$.

8. Dê exemplo de um número complexo z tal que $z = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z.

9. Determine a norma e o conjugado dos seguintes números complexos:

a) $2 + 3i$

b) $2 - 3i$

c) $-\frac{1}{3}i$

d) $5 + \frac{3}{4}i$

10. Sabendo que $z = (x - 3) + (y - 2)i$ e $|z| = 0$, determine os valores dos números reais x e y.

11. Verifique, por meio de exemplos, a proposição 4.3.

Lista 02

1. Determine o número complexo z, sabendo que

a) $3z + 2i = -2z + 3 - 5i$

b) $3zi = z + 2$

2. Determine o valor dos números complexos z e w, sabendo que:

$$\begin{cases} 3z - w = 2 - i \\ 2z - 3w = 3 + 2i \end{cases}$$

3. Mostre que se z é um número complexo e $\bar{z}$ é o seu conjugado, então

a) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

b) $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

4. Mostre que, para todo número complexo não nulo z, tem-se $z^{-1} = \frac{1}{z.\bar{z}}\bar{z}$.

5. Mostre que, se z é um número complexo não nulo e $|z|$ é sua norma, então o número complexo $w = \frac{1}{|z|}z$ é unitário, ou seja, possui norma 1.

6. Se z é um número complexo tal que $z \neq 1$ e $|z| = 1$, mostre que o número $\frac{1+z}{1-z}$ é imaginário puro.

7. Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $\frac{5+2i}{1-2i}$

b) $\frac{9+6i}{-3i}$

c) $\frac{1}{i}$

8. Seja z = a +bi um número complexo na sua forma algébrica. Calcule $\overline{-z}$, o conjugado do oposto de z, e $-\overline{z}$, o oposto do conjugado de z, e verifique se eles são iguais.

9. Determine o número complexo z tal que $zi + 3\overline{z} = 2 - i$.

10. Determine a forma algébrica do inverso do número complexo z = 4 + 2i.

Lista 03

1. Verifique na prática a proposição 4.4, ou seja, escolha números complexos z (três ou quatro) e verifique que $|z|^2 = z.\overline{z}$.

2. Verifique na prática a proposição 4.5, ou seja, escolha pares de números complexos z e w (dois ou três) e verifique que eles satisfazem a proposição 4.5.

3. Verifique na prática a proposição 4.6.

4. Verifique na prática a proposição 4.7.

5. Prove que se z e w são números complexos, então $|z+w| = |z| + |w|$. Dê exemplos em que vale a desigualdade e outros em que vale a igualdade.

6. Calcule as seguintes potências:

a) i^{200}	d) i^{-50}	g) i^{-502}
b) i^{91}	e) i^{-128}	h) i^{-150}
c) i^{52}	f) i^{87}	i) i^{-3001}

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações,** vol. único. São Paulo: Ática, 2004.

HARIKI, Seiji e outro. **Curso de matemática**, vol. 3. São Paulo: HARBRA, 1981.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 6: números complexos, polinômios e equações.** São Paulo: Atual Editora, 2005.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio, vol. 3.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

Capítulo 5

Representação geométrica e forma trigonométrica de um número complexo

Introdução

Já vimos, na Geometria analítica, como associar cada ponto de um plano a um par ordenado de números reais. Com isso, o plano passa a ser visto como o conjunto de todos os pares ordenados do tipo (a, b) em que a e b são números reais. Sabemos também que todo número complexo pode ser escrito, em sua forma algébrica, como $z = a + bi$, em que a e b são números reais.

O que pretendemos fazer é associar cada número complexo $z = a + bi$, escrito em sua forma algébrica, a um par ordenado de números reais. Mais precisamente, ao par ordenado (a, b). Com isso, obteremos uma representação geométrica para os números complexos: pontos do plano ou vetores.

Dois dos responsáveis por essa representação, em sua origem, foram Argand e Gauss. Por isso, o plano no qual representamos os números complexos é chamado de plano de Argand-Gauss.

Essa associação entre números complexos e pares ordenados permite a utilização dos números complexos no estudo de grandezas que são vetoriais, como é o caso, por exemplo, da corrente elétrica e da voltagem, na eletricidade.

1. Mais um pouco de história

Acredita-se que Euler, por volta de 1749, já imaginava os números complexos como pontos de um plano. Em um artigo, ele afirmou que para determinar certos números complexos, bastava tomar um arco α em um círculo unitário e encontrar seu seno e seu cosseno: o número procurado seria $x = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha$. Mas deve-se ao matemático inglês John WALLIS (1616-1703) a primeira tentativa de associar os números complexos a pontos de um plano. A ideia de Wallis, além de não ter feito sucesso, não conseguiu sequer exercer influência sobre seus contemporâneos. A primeira tentativa exitosa de representar pontos do plano por números complexos é devida ao norueguês Caspar WESSEL (1745-1818) que, trabalhando com segmentos de reta orientados — vetores —, teve a idéia de associá-los a números complexos. Wessel introduziu um eixo imaginário perpendicular ao eixo real e interpretou os vetores no plano como números complexos. Ele definiu, geometricamente, as operações usuais com vetores, estendendo-as naturalmente e de maneira satisfatória aos números complexos. Outra interpretação geométrica, diferente daquela dada por Wessel, foi a do matemático amador suíço Jean Robert ARGAND (1768-1822). Argand interpretou o número $\sqrt{-1}$ como uma rotação de um ângulo reto no plano, justificando essa interpretação com base no fato de que duas destas rotações, ou seja, o produto $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$ é equivalente à rotação de dois ângulos retos, ou melhor, uma reflexão.

Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) interpretou os números complexos como pontos de um plano desde cerca de 1796 e utilizou essa interpretação em 1799 quando provou o teorema fundamental da álgebra de uma forma diferenciada. Em 1811, Gauss escreveu em uma carta enviada a Bessel que, da mesma forma que números reais podiam ser interpretados como pontos em uma reta, números complexos podiam ser interpretados como pontos em um plano. Por volta de 1815, Gauss já dominava completamente essa idéia, mas sua disseminação só veio a ocorrer por volta de 1831 quando Gauss publicou sua segunda memória e expressou seu ponto de vista de forma lógica e precisa.

Mas a representação geométrica dos números complexos como pontos ou vetores do plano, embora facilitassem os cálculos com esses números, ainda não era inteiramente satisfatória. Ainda não se tinha a importante definição de par ordenado, que só veio com o matemático inglês Sir William Rowan HAMILTON (1805-1865). Em 1835, Hamilton define os números complexos como pares ordenados de números reais, definindo a adição e a multiplicação de tal maneira que valem todas as leis da álgebra, como conhecemos hoje.

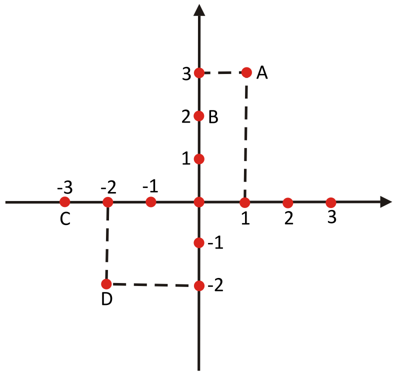
2. O plano complexo

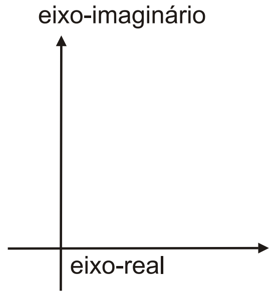
Anote:
Se z = a + bi é um número complexo na sua forma algébrica, então Re(z) = a e Im(z) = b.

Sabemos que a cada número complexo z é possível associar dois números reais que o determinam totalmente: sua parte real, Re(z), e sua parte imaginária, Im(z). Estes números podem ser representados na forma de um par ordenado, como (Re(z), Im(z)). De maneira semelhante, a partir de qualquer par ordenado (a, b) de números reais é possível obter um número complexo z, fazendo sua parte real igual à abscissa do par e sua parte imaginária igual à ordenada do par, ou seja, o número complexo z = a + bi.

Assim, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e os números complexos. Estabelecida essa relação, o plano cartesiano passa a ser chamado de plano complexo ou plano de Argand-

Gauss. O eixo das abscissas é chamado de eixo-real e o eixo das ordenadas é chamado de eixo-imaginário. Isso porque a parte real do número complexo é representada no eixo horizontal (eixo das abscissas) e a parte imaginária do número complexo é representada no eixo vertical (eixo das ordenadas).





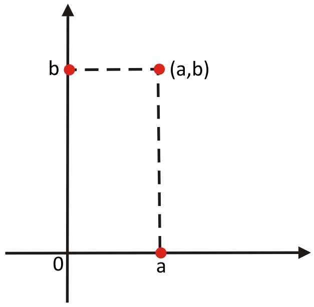
Os pontos A, B, C e D, anteriores, representam os números complexos 1 + 3i, 2i, -3 e –2 – 2i, respectivamente.

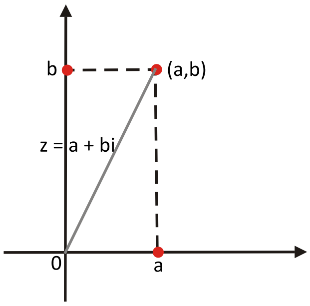
Como se percebe, a partir da representação escolhida:

- Os números complexos reais pertencem ao eixo horizontal ou eixoreal;
- Os números imaginários puros, ou seja, aqueles cuja parte real é zero, pertencem ao eixo vertical ou eixo-imaginário;
- Cada ponto do plano complexo ou plano de Argand-Gauss representa um único número complexo e, reciprocamente, para cada número complexo existe um único ponto do plano que o representa.

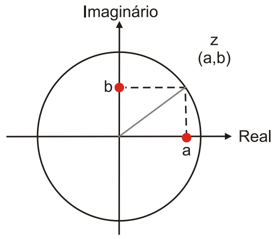
Números complexos e vetores

Podemos também, utilizando essa mesma representação, pensar cada número complexo $z = a + bi$, escrito na sua forma algébrica, como um vetor do plano: o vetor de origem em O(0,0) e com extremidade no ponto (a, b).





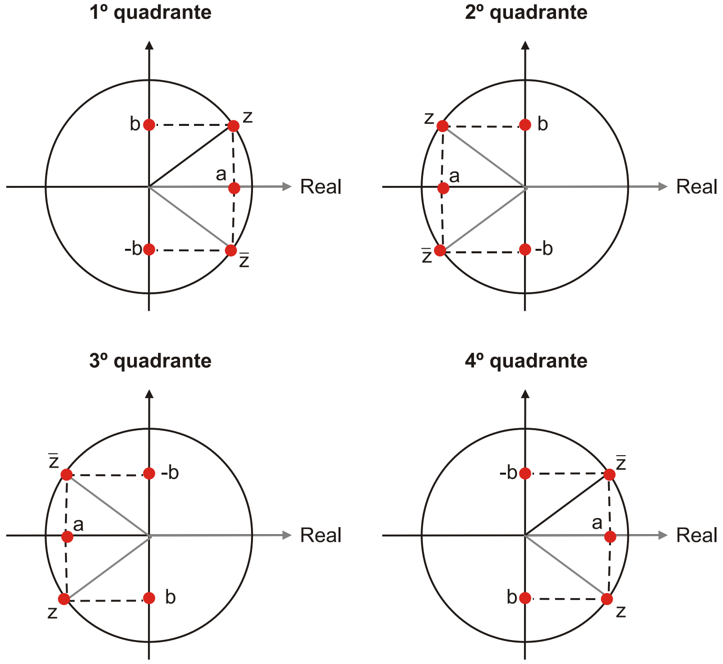
Representação geométrica do conjugado de um número complexo



Seja z = a + bi a representação algébrica de um número complexo. Vimos que z pode ser representado no plano de Argand-Gauss como o par ordenado (a, b) ou, ainda, com o vetor de origem no ponto O, de coordenadas (0, 0), e extremidade no ponto de coordenadas (a, b), conforme na figura ao lado.

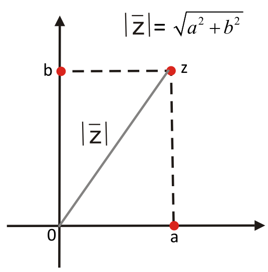
Sabemos que o conjugado de z = a + bi é o número complexo $\bar{z}$ = a – bi. Assim, a representação geométrica de z e $\bar{z}$ em um mesmo plano fica como nas figuras a seguir.

Atenção:
Você saberia representar no plano de Argand-Gauss o conjugado de z?
Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo…



Como se percebe, o ponto que representa $\bar{z}$ — o conjugado do número complexo z — é o simétrico, em relação ao eixo-x ou eixo-real, do ponto que representa o número z.

Interpretação geométrica da norma de um número complexo



Acabamos de ver a interpretação geométrica do conjugado de um número complexo z = a + bi, escrito na sua forma algébrica. Sua norma também pode ser interpretada à luz da geometria.

Na representação de z = a + bi como um vetor do plano, apresentada ao lado, podemos perceber claramente, a partir do teorema de Pitágoras, que a norma de z pode ser interpretada como o comprimento do vetor que o representa.

De fato, denotando por d o comprimento do vetor que representa o número complexo z e usando o teorema de Pitágoras, temos que d = $\sqrt{a^2+b^2}$, ou seja, d = $|z|$.

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 01 de exercícios.

3. Forma trigonométrica de um número complexo

Vimos que o número complexo z = a + bi, escrito na sua forma algébrica, pode ser representado no plano de Argand-Gauss ou plano complexo pelo par ordenado (a,b) ou por um vetor de origem em (0,0) e extremidade no ponto (a,b). Vimos ainda que, de acordo com o teorema de Pitágoras, a norma de z, dada por $\sqrt{a^2+b^2}$, pode ser pensada como o comprimento do vetor que representa z.

Se z ≠ 0, esse vetor que representa z forma com o eixo-x, ou eixo real, um ângulo θ que varia de 0º ou 360º (ou de 0 rad a 2π rad) e tal que $\text{sen}(\theta)=\frac{b}{|z|}$ e $\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}$. Desde que z = a +bi, temos que

- $z=|z|\cos\theta+|z|i\text{sen}\theta$

ou, ainda,

- $z=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$.

O ângulo θ ($0\le\theta<2\pi$) é chamado de argumento principal de z e é indicado por arg(z). A expressão $z=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$ é chamada a forma trigonométrica ou forma polar do número complexo z.

Observe que, na igualdade $z=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$, podemos substituir o ângulo θ por $\theta+2k\pi$, com k∈Z, que obteremos o mesmo número complexo z.

A forma trigonométrica escrita com θ fora do intervalo [0, 2π[é chamada forma trigonométrica secundária do número complexo z e o ângulo θ, neste caso, é dito argumento secundário do número complexo.

Saiba Mais:
Costuma-se usar a notação eiq no lugar de $\cos\theta+i\text{sen}\theta$. Assim, o número complexo $z=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$ também pode ser escrito como $z=|z|e^{i\theta}$. Portanto, quando $\theta=\pi$, teremos a igualdade $e^{i\pi}+1=0$.

Igualdade de números complexos escritos na forma trigonométrica

Sejam $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ e $w = |w|(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta)$ números complexos escritos na forma trigonométrica.

É fácil ver que esses dois números complexos são iguais se, e somente se, $|z| = |w|$ e $\theta = \vartheta + 2k\pi$, com $k \in$ **Z**.

Em palavras, dois números complexos são iguais se, e somente se, suas normas forem iguais e seus argumentos forem congruentes, ou seja, se a diferença entre eles for um múltiplo inteiro de 2π.

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem ou abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 02 de exercícios.

Produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica

Sejam $z = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ e $w = (\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta)$ números complexos unitários, isto é, com norma igual a 1, escritos na forma trigonométrica.

Pare e pense!
Você saberia dar uma representação geométrica para o produto z.w? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Sabemos que z.w é um número complexos de norma igual a 1, uma vez que

$$|z.w| = |z|.|w| = 1.1 = 1$$

Assim, para determinarmos a forma trigonométrica do produto z.w, basta determinarmos seu argumento.

Supondo a forma trigonométrica de z.w igual a $\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\psi$, queremos determinar a relação entre ψ, θ e ϑ.

Pare e pense!
Você saberia dizer qual é essa relação? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Temos que

$$\begin{aligned} z.w &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta) \\ &= (\cos\theta\cos\vartheta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\vartheta) + (\operatorname{sen}\vartheta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\vartheta)i \\ &= \cos(\theta+\vartheta) + i(\operatorname{sen}(\theta+\vartheta) \end{aligned}$$

Assim, devemos ter

- $\cos\psi = \cos(\theta+\vartheta)$; e
- $\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}(\theta+\vartheta)$

e, consequentemente, $\psi = \theta + \vartheta$.

Portanto, para multiplicarmos dois números complexos unitários, basta somarmos seus argumentos. E como proceder se os números complexos não forem unitários?

Pare e pense!

Você saberia responder? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Suponha que os números complexos z e w não sejam unitários, mas sejam diferentes de zero, e sejam $z' = \dfrac{z}{|z|}$ e $w' = \dfrac{w}{|w|}$.

Sabemos que z' e w' são unitários e que possuem os mesmos argumentos de z e w, respectivamente, uma vez que se $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $w = |w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$ são as formas trigonométricas de z e w, respectivamente, então $\dfrac{z}{|z|} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $\dfrac{w}{|w|} = (\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$.

Temos, portanto, que

$$z'.w' = \cos(\theta+\vartheta) + i\operatorname{sen}(\theta+\vartheta),$$

o que nos dá

$$\frac{z.w}{|z|.|w|} = \cos(\theta+\vartheta) + i\operatorname{sen}(\theta+\vartheta),$$

ou, ainda,

$$z.w = |z|.|w|(\cos(\theta+\vartheta) + i\operatorname{sen}(\theta+\vartheta)) \ .$$

Logo, provamos a seguinte proposição:

Proposição. Produto de números complexos escritos na forma trigonométrica. Se $z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ e $w = |w|(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\vartheta)$ são números complexos escritos na forma trigonométrica, então o produto z.w é dado por $z.w = |z|.|w|(\cos(\theta+\vartheta) + i\,\text{sen}(\theta+\vartheta))$.

Em palavras, para multiplicarmos dois números complexos, escritos na forma trigonométrica, basta que multipliquemos suas normas e somemos seus argumentos, pois o produto desses números será o número complexo cuja norma é o produto das duas normas e o argumento do produto será a soma dos dois argumentos.

Quociente de dois números complexos escritos na forma trigonométrica

Sejam $z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ e $w = |w|(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\vartheta)$ as formas trigonométricas dos números complexos z e w e suponha que $w \neq 0$.

Queremos determinar o quociente $\frac{z}{w}$, ou melhor, queremos determinar o módulo e o argumento do número complexo $\frac{z}{w}$, em função dos módulos e dos argumentos dos números complexos z e w.

Pare e pense!
Você saberia determinar esse quociente? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Seja $\frac{z}{w} = \left|\frac{z}{w}\right|(\cos\psi + i\,\text{sen}\psi)$ a forma trigonométrica de $\frac{z}{w}$.

Sabemos que $\left(\frac{z}{w}\right).w = z$ e, portanto, da seção anterior, segue que

- $|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = \left|\frac{z}{w}\right|.|w|(\cos(\psi+\vartheta) + i\,\text{sen}(\theta+\vartheta))$.

E assim devemos ter:

- $|z| = \left|\frac{z}{w}\right|.|w| \because \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$; e
- $\theta = \psi + \vartheta \because \psi = \theta - \vartheta$,

e, consequentemente, podemos escrever

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta - \vartheta) + i\operatorname{sen}(\theta - \vartheta)),$$

provando a seguinte proposição:

Proposição. Quociente de números complexos escritos na forma trigonométrica. Se $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $w = |w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$ são números complexos escritos na forma trigonométrica, com w ≠ 0, então o quociente $\frac{z}{w}$, de z por w, é o número complexo dado por $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta - \vartheta) + i\operatorname{sen}(\theta - \vartheta))$.

Em palavras, para determinarmos a forma trigonométrica do quociente entre dois números complexos, basta encontrarmos o quociente entre as normas dos números complexos – na ordem da divisão que estamos realizando – e a diferença entre os argumentos dos números complexos – também, na ordem em que estamos dividindo. O quociente das normas e a diferença entre os argumentos serão, respectivamente, a norma e o argumento do quociente que estamos procurando.

Potências e raízes de números complexos escritos na forma trigonométrica – Fórmula de De Moivre

Nesta seção deduziremos as igualdades conhecidas como fórmulas de De Moivre para determinar as potências e as raízes n-ésimas de um número complexo escrito na forma trigonométrica.

Potências

Sejam $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e n um número natural (n ≥ 1). Queremos determinar a forma trigonométrica do número complexo z^n.

Pare e pense!
Você saberia determiná-la? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Sabemos que $z^1 = z$ e que, para n > 1, z^n é o produto de z por ele mesmo, n vezes. Por exemplo, $z^2 = z.z$, $z^3 = z.z.z = z^2.z$ e assim por diante.

Vimos na seção anterior como efetuar o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica. Assim, se escrevermos $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$, teremos:

- $z^2 = |z|^2(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen} 2\theta)$;
- $z^3 = |z|^3(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen} 3\theta)$

e assim por diante.

De maneira geral, para calcular a n-ésima potência de z, temos a fórmula

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta) + i\,\mathrm{sen}\, n\theta),$$

conhecida como **fórmula de De Moivre.**

Raízes

Nosso objetivo nessa seção é determinar todas as raízes n-ésimas de um número complexo dado.

Iniciaremos definindo a raiz n-ésima de um número complexo para, em seguida, tentarmos determinar as raízes quadradas e as raízes cúbicas de um número complexo.

Definição. Se n é um número natural, com n > 1, dizemos que o número complexo z é uma raiz n-ésima do número complexo w se, e somente se, $z^n = w$.

Raiz quadrada de um número complexo

Dado o número complexo $w = |w|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ queremos determinar todos os números complexos z tais que $z^2 = w$.

Pare e pense!
Você saberia determiná-los? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Seja z o número complexo dado por $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)$ e suponha que $z^2 = w$. Assim, pela fórmula de De Moivre, devemos ter

$$|w|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) = |z|^2(\cos 2\alpha + i\,\mathrm{sen} 2\alpha).$$

De acordo com a igualdade de números complexos escritos na forma trigonométrica,

- $\begin{cases} |z|^2 = |w| \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi,\ k \in Z, \end{cases}$

ou ainda

- $\begin{cases} |z| = \sqrt{|w|} \\ \alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi,\ k \in Z. \end{cases}$

Para determinarmos os argumentos principais das raízes de w, atribuímos a k, valores inteiros não negativos. Assim,

- para k = 0, teremos $z = \sqrt{|w|}(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$;
- para k = 1, teremos $z = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \pi))$;
- para k = 2, teremos $z = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + 2\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + 2\pi))$;
- para k = 3, teremos $z = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + 3\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + 3\pi))$;
- para k = 4, teremos $z = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + 4\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + 4\pi))$;

e assim por diante.

Note que os ângulos $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2} + 2\pi$, $\frac{\theta}{2} + 4\pi, \ldots$ são, todos, congruentes e, portanto, para qualquer k inteiro e par, os números complexos $z = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + k\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + k\pi))$ são, todos, iguais. Note ainda que os ângulos $\frac{\theta}{2} + \pi$, $\frac{\theta}{2} + 3\pi$, $\frac{\theta}{2} + 5\pi, \ldots$ são, todos, congruentes e, portanto, para qualquer k inteiro e ímpar, os números complexos $z = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + k\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + k\pi))$ são, todos, iguais.

Assim, todo número complexo w, não nulo, possui exatamente duas raízes complexas dadas por $z_1 = \sqrt{|w|}(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$ e $z_2 = \sqrt{|w|}(\cos(\frac{\theta}{2} + $ $i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \pi)$, em que $|w|$ e θ são, respectivamente, a norma e o argumento do número complexo w.

Graficamente, os afixos de z_1 e z_2 dividem o círculo de raio $\sqrt{|w|}$ em dois semicírculos, ou seja, os vetores que representam os números complexos z_1 e z_2 encontram-se em semirretas opostas de uma mesma reta passando pela origem do plano de Argand-Gauss e formando com o eixo real um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ rad.

Raiz cúbica de um número complexo

Dado o número complexo $w = |w|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ queremos determinar todos os números complexos z tais que $z^3 = w$.

Pare e pense!
Baseado no que foi feito anteriormente, você saberia determiná-los? Antes de continuar a leitura, pense um pouco e experimente fazê-lo...

Seja z o número complexo dado por $z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e suponha que $z^3 = w$. Assim, pela fórmula de De Moivre, devemos ter

$$|w|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|^3(\cos 3\alpha + i\operatorname{sen} 3\alpha).$$

De acordo com a igualdade de números complexos escritos na forma trigonométrica,

- $$\begin{cases} |z|^3 = |w| \\ 3\alpha = \theta + 2k\pi,\ k \in Z, \end{cases}$$

ou ainda

- $$\begin{cases} |z| = \sqrt[3]{|w|} \\ \alpha = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in Z. \end{cases}$$

Para determinarmos os argumentos principais das raízes de w, atribuímos a k, valores inteiros não negativos. Assim,

- para k = 0, teremos $z = \sqrt[3]{|w|}(\cos\frac{\theta}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3})$;
- para k = 1, teremos $z = \sqrt[3]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}))$;
- para k = 2, teremos $z = \sqrt[3]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}))$;

- para k = 3, teremos $z=\sqrt[3]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{6\pi}{3})+i\mathrm{sen}(\frac{\theta}{3}+\frac{6\pi}{3})$;
- para k = 4, teremos $z=\sqrt[3]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{8\pi}{3})+i\mathrm{sen}(\frac{\theta}{3}+\frac{8\pi}{3})$;

e assim por diante.

Note que temos três raízes diferentes, a saber, as obtidas para k = 0, k = 1 e k = 2. Todas as demais são iguais a alguma dessas. De fato, qualquer número natural, quando dividido (divisão euclidiana) por 3, deixa resto 0, 1 ou 2.

Assim, todo número complexo w, não nulo, possui exatamente três raízes complexas dadas por $z_1=\sqrt[3]{|w|}(\cos\frac{\theta}{3}+i\mathrm{sen}\frac{\theta}{3})$, $z_2=\sqrt[3]{|w|}(\cos(\frac{\theta+2\pi}{3})+i\mathrm{sen}(\frac{\theta+2\pi}{3})$ e $z_3=\sqrt[3]{|w|}(\cos(\frac{\theta+4\pi}{3})+i\mathrm{sen}(\frac{\theta+4\pi}{3})$, em que $|w|$ e θ são, respectivamente, a norma e o argumento do número complexo w.

Essas três raízes são tais que seus afixos encontram-se sobre a circunferência de raio igual a $\sqrt[3]{|w|}$ e seus argumentos diferem, de z_1 para z_2, de z_2 para z_3 e de z_3 para z_1, de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Assim, a circunferência fica dividida em três partes iguais.

Raiz n-ésima de um número complexo

Dado o número complexo $w=|w|(\cos\theta+i\mathrm{sen}\theta)$ queremos determinar todos os números complexos z tais que $z^n = w$.

Seja z o número complexo dado por $z=|z|(\cos\alpha+i\mathrm{sen}\alpha)$ e suponha que $z^n = w$. Assim, pela fórmula de De Moivre, devemos ter

$$|w|(\cos\theta+i\mathrm{sen}\theta) = |z|^n(\cos n\alpha+i\,\mathrm{sen}\,n\alpha).$$

De acordo com a igualdade de números complexos escritos na forma trigonométrica,

- $\begin{cases}|z|^n=|w|\\ n\alpha=\theta+2k\pi,\ k\in Z,\end{cases}$

ou ainda

- $\begin{cases}|z|=\sqrt[n]{|w|}\\ \alpha=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n},\ k\in Z.\end{cases}$

Para determinarmos os argumentos principais das raízes de w, atribuímos a k, valores inteiros não negativos desde 0 até n-1, obtendo, assim, n raízes n-ésimas.

Assim, as n raízes n-ésimas de $w = |w|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ são dadas por:

- $z_1 = \sqrt[n]{|w|}(\cos\frac{\theta}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{n})$
- $z_2 = \sqrt[n]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n})$
- $z_3 = \sqrt[n]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n})$
- $z_4 = \sqrt[n]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{n} + 3\frac{2\pi}{n}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{n} + 3\frac{2\pi}{n})$
- $z_n = \sqrt[n]{|w|}(\cos(\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}) + i\operatorname{sen}(\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n})$.

Essas n raízes n-ésimas são tais que seus afixos encontram-se sobre a circunferência de raio igual a $\sqrt[n]{|w|}$ dividindo essa circunferência em n partes iguais.

Pare e pense!
Você seria capaz de elaborar atividades ou exercícios que verifiquem/abordem o que foi apresentado até o momento e que sirvam para verificar sua compreensão do assunto? Primeiramente, experimente elaborar algumas atividades, depois veja a Lista 03 de exercícios.

Síntese da Capítulo

Nesta Unidade você aprendeu...

- Um pouco mais sobre a história dos números complexos.
- A marcar números complexos no plano de Argand-Gauss.
- Que os números complexos podem ser representados por meio de vetores, cujas origens se encontram na origem do plano de Argand-Gauss.
- A representar geometricamente o conjugado de um número complexo no plano de Argand-Gauss e a dar uma interpretação geométrica para a norma ou módulo de um número complexo.

- A definir o argumento de um número complexo como o ângulo orientado que o vetor que o representa forma com o eixo real e que esse ângulo não é único.
- Que todo número complexo pode ser representado em função de sua norma e de seu argumento e que essa representação é denominada de forma trigonométrica do número complexo.
- A passar da forma trigonométrica para forma algébrica e vice-versa.
- A decidir quando dois números complexos escritos na forma trigonométrica são ou não iguais.
- Que o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica pode ser obtido multiplicando-se as suas normas e adicionando-se os seus argumentos.
- Que o quociente entre dois números complexos escritos na forma trigonométrica, sendo o denominador diferente de zero, pode ser obtido dividindo-se suas normas e subtraindo-se os seus argumentos.
- A fórmula de De Moivre para calcular a n-ésima potência de um número complexo escrito na forma trigonométrica.
- A determinar a n raízes n-ésimas de um número complexo não nulo.

Atividades de avaliação

Lista 01

1. Se $z = a + bi$, o ponto (a, b) que representa z no plano de Argand-Gauss ou plano complexo também é chamado de **afixo de z.** Represente no plano cartesiano (plano de Argand-Gauss) o afixo dos seguintes números complexos:

a) $z = 1 - 2i$ b) $z = -2 + 3i$

c) $z = 2 - 2i$ d) $z = 3 + i$

2. O sistema cartesiano de eixos coordenados divide o plano em 4 quadrantes (regiões do plano). No ponto (a, b), os sinais da abscissa e da ordenada variam de acordo com o quadrante em que se encontram, da seguinte maneira:

Quadrante	Abscissa (a)	Ordenada (b)
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Faça o que se pede:

a) Dê exemplo de um número complexo no primeiro quadrante e de outro no terceiro quadrante.

b) Diga em que quadrante se encontram os números complexos 2 – i e -3 – 2i.

c) Em que parte do plano se encontram os números complexos -3i e -3

d) Geometricamente, com você pode interpretar o produto de um número real pelo número complexo i? E o produto de um número imaginário puro pelo número complexo i?

3. Para cada número complexo z, determine o seu conjugado $\bar{z}$ e represente ambos, z e $\bar{z}$, no plano de Argand-Gauss. Use um plano diferente para cada item.

a) 1 + 3i

b) –1 – 2i

c) –1 – 5i

d) –2i

e) –3

f) 3 – 2i

4. Represente no plano de Argand-Gauss os números complexos z = 2 + 3i e zi e determine o ângulo entre eles. Faça o mesmo para os números complexos 1 + 3i, –1 – 2i, –2i e –3.

5. Dado z = 1 + 2i, represente no plano complexo os números z e $i\bar{z}$.

6. Represente no plano de Argand-Gauss o que se pede:

a) Todos os números complexos z = a + bi tais que $|z| = 4$.

b) Todos os números complexos cuja parte real é o simétrico da parte imaginária.

c) Todos os números complexos z tais que $z = \frac{4}{|\bar{z}|}$.

d) Todos os números complexos z tais que Im(z) = 0 e $|z| = 3$.

Lista 02

1. Determine a forma trigonométrica do número complexo z = 1 + i.

Solução

A forma trigonométrica do número complexo z = a + bi é dada por

$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, sendo $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$ e $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$.

Assim, para o número complexo z = 1 + i, temos que:

- $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;
- $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, z = $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ e sua forma trigonométrica ou polar é $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$.

Note que $\frac{\pi}{4}$ é o argumento principal z e que para qualquer ângulo do tipo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, com k $\in$ Z, teremos outra representação de z.

2. Determine a forma trigonométrica do número complexo z = 1 – i.

Solução

Temos que $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ em que:

- $\rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;
- $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim devemos ter o argumento principal de z dado por $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e, consequentemente, $z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4})$.

3. Determine a forma trigonométrica do número complexo z = -1 – i.

Solução

Temos que:

- $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;
- $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, a forma trigonométrica de z é $z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4})$.

4. Determine a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) z = -1 + i b) z = 1 - $\sqrt{3}i$

5. Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4})$

b) $z = 3(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3})$

c) $z = (\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3})$

d) $z = (\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4})$

Lista 03

1. Dizemos que o número complexo z é uma raiz cúbica de i se, e somente se, z^3 = i. Determine todas as raízes cúbicas de i.

Solução

Seja z = $|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ a forma trigonométrica do número complexo z. Nestas condições temos que z^3 = $|z|^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen}3\theta)$.

Por outro lado, a forma trigonométrica do número i é $\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ e, assim, devemos ter

- $|z|^3 = 1 \therefore |z| = 1$; e
- $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k = 0, 1, 2, 3, ...

ou melhor,

- $3\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$, k = 0, 1, 2, 3, ...

Para

- k = 0, temos $\theta = \frac{\pi}{6}$;
- k = 1, temos $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$;
- k = 2, temos $\theta = \frac{\pi}{6} + 4\frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6}$;
- k = 3, temos $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi$;
- k = 4, temos $\theta = \frac{\pi}{6} + 8\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$;
- k = 5, temos $\theta = \frac{\pi}{6} + 10\frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} + 2\pi$

e assim por diante.

Como se percebe, para k = 3, 4, 5, ... os ângulos passam a ser congruentes aos ângulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{9\pi}{6}$ e, logo, só temos três números complexos z, tais que $z^3 = i$. São eles:

- $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;
- $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; e
- $z = \cos\frac{9\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{9\pi}{6} = -i$.

2. De maneira geral, dizemos que o número complexo z é uma raiz n-ésima de i (n = 2, 3, 4, ...), se $z^n = i$. Determine as raízes quartas de i.

3. Determine as raízes cúbicas de -1, sabendo que se z é uma raiz cúbica de -1, então $z^3 = -1$.

4. Dado o número complexo $z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{i}$, determine suas formas algébrica e trigonométrica.

5. Determine geometricamente, no plano de Argand-Gauss, os seguintes conjuntos:

a) $A = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| = 3\}$

b) $B = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| = 0\}$

c) $C = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| \leq 2\}$

d) $D = \{ z \in \mathbf{C} ; |z - i| = 3\}$

6. O conjunto { $z = \rho(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$, $\rho \in \mathbf{R}$ } representa, no plano de Argand-Gauss, qual figura geométrica?

7. Represente na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $2(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi)$ b) $3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2})$ c) $\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6})$

8. Determine as raízes quartas de 1.

9. Qual o menor inteiro não negativo n tal que $(1+i)^n$ é um número: (a) real negativo; (b) imaginário puro.

10. Use a fórmula de De Moivre para expressar $\text{sen}\,2\theta$ e $\cos 2\theta$ em função de $\text{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

11. Escreva o número complexo $\frac{1}{1-i}$ na forma trigonométrica.

Solução

Temos que:

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1-(i)^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4})$$

.

12. Sejam ρ um número real e $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ e $w = \rho(\text{sen}\theta + i\cos\theta)$ números complexos. Calcule:

a) z +iw b) iz + w c) z – iw d) iz – w.

Solução

(a) Como $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ e $w = \rho(\text{sen}\theta + i\cos\theta)$, temos que:

z +iw = $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ + i $\rho(\text{sen}\theta + i\cos\theta)$

= $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ + $\rho(i\,\text{sen}\theta - \cos\theta)$

= $2\rho i\,\text{sen}\theta$.

13. Represente geometricamente todas as potências de $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Solução

Para o número complexo z do problema, temos $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$.

Assim, usando a fórmula de *De Moivre*, obtemos:

- $z^1 = z = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$
- $z^2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

- $z^3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}$
- $z^4 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\mathrm{sen}\pi$
- $z^5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{4}$
- $z^6 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}$
- $z^7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4}$
- $z^8 = \cos\frac{8\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{8\pi}{4} = \cos 2\pi + i\mathrm{sen}2\pi$
- $z^9 = \cos\frac{9\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{4} + 2\pi) + i\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4} + 2\pi) = z^1 = z$
- $z^{10} = \cos\frac{10\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{10\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi) + i\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = z^2$
- $z^{1} = \cos\frac{1\ \pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{1\ \pi}{4} = \cos(\frac{3\pi}{4} + 2\pi) + i\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{4} + 2\pi) = z^3$

e assim por diante.

Portanto, existem 8 (oito) potências distintas de $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e são elas:

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z^2 = i$; $z^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z^4 = -1$; $z^5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z^6 = -i$; $z^7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z^8 = 1$.

Geometricamente, elas encontram-se representadas na figura ao lado.

14. Seja z um número complexo unitário e argumento igual a 1 rad. Verifique se existe algum número natural n, com n > 1, tal que $z^n = z$.

15. Determine quais são os números complexos z tais que $z^n = n$, para algum número natural n, com n > 1.

Tabela Trigonométrica							
Ângulo	**sen**	**cos**	**tg**	**Ângulo**	**sen**	**cos**	**tg**
1	0,017452	0,999848	0,017455	**46**	0,71934	0,694658	1,03553
2	0,034899	0,999391	0,034921	**47**	0,731354	0,681998	1,072369
3	0,052336	0,99863	0,052408	**48**	0,743145	0,669131	1,110613
4	0,069756	0,997564	0,069927	**49**	0,75471	0,656059	1,150368
5	0,087156	0,996195	0,087489	**50**	0,766044	0,642788	1,191754
6	0,104528	0,994522	0,105104	**51**	0,777146	0,62932	1,234897
7	0,121869	0,992546	0,122785	**52**	0,788011	0,615661	1,279942
8	0,139173	0,990268	0,140541	**53**	0,798636	0,601815	1,327045
9	0,156434	0,987688	0,158384	**54**	0,809017	0,587785	1,376382
10	0,173648	0,984808	0,176327	**55**	0,819152	0,573576	1,428148
11	0,190809	0,981627	0,19438	**56**	0,829038	0,559193	1,482561
12	0,207912	0,978148	0,212557	**57**	0,838671	0,544639	1,539865
13	0,224951	0,97437	0,230868	**58**	0,848048	0,529919	1,600335
14	0,241922	0,970296	0,249328	**59**	0,857167	0,515038	1,664279
15	0,258819	0,965926	0,267949	**60**	0,866025	0,5	1,732051
16	0,275637	0,961262	0,286745	**61**	0,87462	0,48481	1,804048
17	0,292372	0,956305	0,305731	**62**	0,882948	0,469472	1,880726
18	0,309017	0,951057	0,32492	**63**	0,891007	0,45399	1,962611
19	0,325568	0,945519	0,344328	**64**	0,898794	0,438371	2,050304
20	0,34202	0,939693	0,36397	**65**	0,906308	0,422618	2,144507
21	0,358368	0,93358	0,383864	**66**	0,913545	0,406737	2,246037
22	0,374607	0,927184	0,404026	**67**	0,920505	0,390731	2,355852
23	0,390731	0,920505	0,424475	**68**	0,927184	0,374607	2,475087
24	0,406737	0,913545	0,445229	**69**	0,93358	0,358368	2,605089
25	0,422618	0,906308	0,466308	**70**	0,939693	0,34202	2,747477
26	0,438371	0,898794	0,487733	**71**	0,945519	0,325568	2,904211
27	0,45399	0,891007	0,509525	**72**	0,951057	0,309017	3,077684
28	0,469472	0,882948	0,531709	**73**	0,956305	0,292372	3,270853
29	0,48481	0,87462	0,554309	**74**	0,961262	0,275637	3,487414
30	0,5	0,866025	0,57735	**75**	0,965926	0,258819	3,732051
31	0,515038	0,857167	0,600861	**76**	0,970296	0,241922	4,010781
32	0,529919	0,848048	0,624869	**77**	0,97437	0,224951	4,331476
33	0,544639	0,838671	0,649408	**78**	0,978148	0,207912	4,70463
34	0,559193	0,829038	0,674509	**79**	0,981627	0,190809	5,144554
35	0,573576	0,819152	0,700208	**80**	0,984808	0,173648	5,671282
36	0,587785	0,809017	0,726543	**81**	0,987688	0,156434	6,313752
37	0,601815	0,798636	0,753554	**82**	0,990268	0,139173	7,11537
38	0,615661	0,788011	0,781286	**83**	0,992546	0,121869	8,144346
39	0,62932	0,777146	0,809784	**84**	0,994522	0,104528	9,514364
40	0,642788	0,766044	0,8391	**85**	0,996195	0,087156	11,43005
41	0,656059	0,75471	0,869287	**86**	0,997564	0,069756	14,30067
42	0,669131	0,743145	0,900404	**87**	0,99863	0,052336	19,08114
43	0,681998	0,731354	0,932515	**88**	0,999391	0,034899	28,63625
44	0,694658	0,71934	0,965689	**89**	0,999848	0,017452	57,28996
45	0,707107	0,707107	1	**90**	1	0	-

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. único. São Paulo: Ática, 2004.

GUELLI, Cid A. e outros. **Matemática 2o Grau**, vol. 1. São Paulo: Marco, 1979.

HARIKI, Seiji e outro. **Curso de matemática**, vol. 3. São Paulo: HARBRA, 1981.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 6: números complexos, polinômios e equações**. São Paulo: Atual Editora, 2005.

LAPA, Nilton, e outros. **Noções de Matemática**, vol. 3: trigonometria. São Paulo: Editora Moderna, 1978.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio**, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

Dados dos Autores

Cleiton Batista Vasconcelos: Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1980) e mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1983). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Matemática. Trabalha com Avaliação de Livros Didáticos e Laboratório de Matemática.

Manoel Americo Rocha: Mestre, título obtido na Universidade Federal do Ceará em 1980, Bacharel em Matemática também pela UFC em 1972. Especialista em Metodologia do Ensino Superior tambem pela UFC em 1975. Area de conhecimento: Matemática. Atualmente atua como professor da Fanor – Faculdades Nordeste e da UECE – Universidade Estadual do Ceará. Larga experiencia em docencia superior na Unifor e UFC.

Matemática

Aborecust, il invellu ptatem dus non cupidemquis quatempos aut iden-del lissimusa si si offictus, sectae nus.

Nam, od que pressitet pratempor autae nobistrum qui debis eaqui con ne poreptatur, alibus, sus, quatur, ide veliquatus, sequibus mintem imi, aut deliquatia doluptis pere, utatur sandae eumquo qui blautat.

Mendistrum aut alitiis re corro in es dolorro modiostis estrum etur rest, sinus doluptas quasitati dior aut pore ne sunditis es mi, volorruntur si-Tod aciem nero ut ponst nero, consulus acerfec onfirtem et perter-diurs veribun telicae nostium inatant iaetil talerri inum

Vala virmium re num hace contrum ne me inverte tum hal-icerius, ceri, audefecio Cupie mor atilne audet Cat die ia se, Ti. Ad iura Scibul utus, catussolum diendacrem issolii sentrat .

ISBN 978-85-78263-98-0
9788578263980