Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias

Luciano Moura Cavalcante

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias

Luciano Moura Cavalcante

2ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2014

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo
Bibliotecária – CRB-3 / 623

C376e Cavalcante, Luciano Moura
Equações diferenciais ordinárias / Luciano Moura Cavalcante. ___ Fortaleza : EdUECE, 2014.

76 p. (Matemática)

ISBN: 978-85-7826-399-7

1. Equações diferenciais ordinárias.

I. Título.

CDD: 515

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

A origem do estudo das equações diferenciais e as técnicas de resolução datam da época do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, envolvendo personagens histórios e famosos como Isaac Newton, Gottfried Leibniz e muitos outros. A partir daí, o campo de estudo das equações diferenciais vem se desenvolvendo, com a formulação e resolução de inúmeros problemas nas mais diferentes áreas das ciências.

As equações diferenciais, por definição, são equações que envolvem funções e suas derivadas, e por isso elas são divididas em duas classes distintas. As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) envolvem apenas derivação de funções ordinárias e as Equações Diferenciais Parciais (EDP) trabalham com derivadas parciais de funções de várias variáveis.

Este livro trata apenas da primeira classe de equações, onde estudaremos as equações diferenciais ordinárias desde a sua definição, tentando ajudar o aluno a entender a sua natureza e o seu significado. Algumas vezes preferimos ser ocasionalmente informais nas provas e demonstrações de resultados, mas compreensíveis, pois não pretendemos construir uma estrutura matemática logicamente impecável, com teoremas, provas e demonstrações que desafiem a capacidade do leitor.

O nosso principal objetivo é procurar interpretar o significado das equações diferenciais e aplicá-las a problemas de cinemática, eletricidade, decaimento radiativo, crescimento populacional, cinética química, ecologia, epidemiologia e outras áreas, com uma variedade de problemas resolvidos e propostos.

O Autor

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

Objetivos

- Definir as Equações Diferenciais Ordinárias.
- Identificar uma Equação Diferencial Ordinária.
- Analisar as soluções de uma Equação Diferencial Ordinária.

Introdução

A origem do estudo das equações diferenciais e as técnicas de resolução datam da época do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, envolvendo personagens históricos e famosos como Isaac Newton, Gottfried Leibniz e muitos outros. A partir daí, o campo de estudo das equações diferenciais vem se ampliando, com a formulação e resolução de inúmeros problemas nas mais diferentes áreas do conhecimento.

Estudaremos as equações diferenciais desde a sua definição, tentando ajudar o aluno a entender a sua natureza e significado. Algumas vezes, para facilitar o entendimento, faremos simplificações ousadas, sem, no entanto desprezarmos a exatidão dos conceitos e o rigor matemático. O nosso principal objetivo é facilitar a compreensão, a interpretação e as aplicações das equações diferencias ordinárias. Para isto apresentaremos exercícios resolvidos e propostos versando sobre aplicações nas ciências físicas biológicas e humanas.

1. Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Definição

Uma Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.) de ordem **n** é definida como uma relação da forma F (x , y , y' , y'', ... , y^n) = 0 envolvendo uma função y = y(x) e suas n primeiras derivadas $y' = \frac{dy}{dx}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$; ...... ; $y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$, onde a função F é sempre suposta ser contínua.

A palavra **ordinária** significa que a função y = y(x) depende somente de uma variável independente x. Havendo duas ou mais variáveis independentes, a equação é chamada de **Equação Diferencial Parcial (E.D.P.).** Um exemplo de tais equações é a conhecida equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0.$$

O **grau** de uma E.D.O. é o maior dos expoentes que está elevada a derivada de maior ordem contida na equação.

Exemplo:

1. $\frac{dy}{dx}$ = 3x + 1 é uma equação diferencial de primeira ordem.

Aqui temos

$y' = \frac{dy}{dx} = 3x + 1$ ou $y' - 3x + 1 = 0$.

Portanto, $F(x, y, y') = y' - 3x + 1 = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}$ + y = 0 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Neste caso, temos que $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ e assim y'' + y = 0 ou ainda $F(x, y, y'') = y'' + y = 0$.

3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - y = \frac{d^2y}{dx^2}$ é uma E.D.O. de terceira ordem e de grau dois.

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^8 = x^2e^x$ é uma E.D.O. de primeira ordem e grau oito.

Uma função y = f(x) com derivadas até a ordem n é uma **solução** de uma E.D.O. $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$ se, e somente se, a substituição da função y = f(x) e de suas respectivas derivadas na equação, a tornarem uma identidade em x, ou seja, y e suas derivadas satisfizerem a igualdade $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$.

Exemplo:

A função $y = e^x$ é solução da equação $y''' + 4y'' - 5e^x = 0$, pois $y = e^x$; $y' = e^x$; $y'' = e^x$; $y''' = e^x$, o que implica dizer que $y''' + 4y'' - 5e^x = 0$, acarreta que $e^x + 4e^x - 5e^x = 0$ é uma identidade em x.

É fácil observar no exemplo anterior que, não somente a função $y = e^x$ é solução da equação dada, mas também são soluções as função da forma $y = e^x + k$, com k constante. Nesse caso, dizemos que a função $y = e^x$ é uma solução particular, pertencente a uma família de funções que são soluções da equação diferencial.

De um modo geral, podemos apresentar a solução de uma equação diferencial ordinária $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$ de duas formas:

i) **A solução geral**, que é uma expressão que depende de um ou mais parâmetros e engloba todas as soluções da equação. Representa uma família de curvas chamadas <u>curvas integrais</u> ou <u>primitivas</u>.

Por exemplo, a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ é a família das funções $f(x) = x^2 + C$ constituída de todas as parábolas com concavidade para cima e vértice sobre o eixo y, pois para cada valor da parâmetro C temos uma solução da equação.

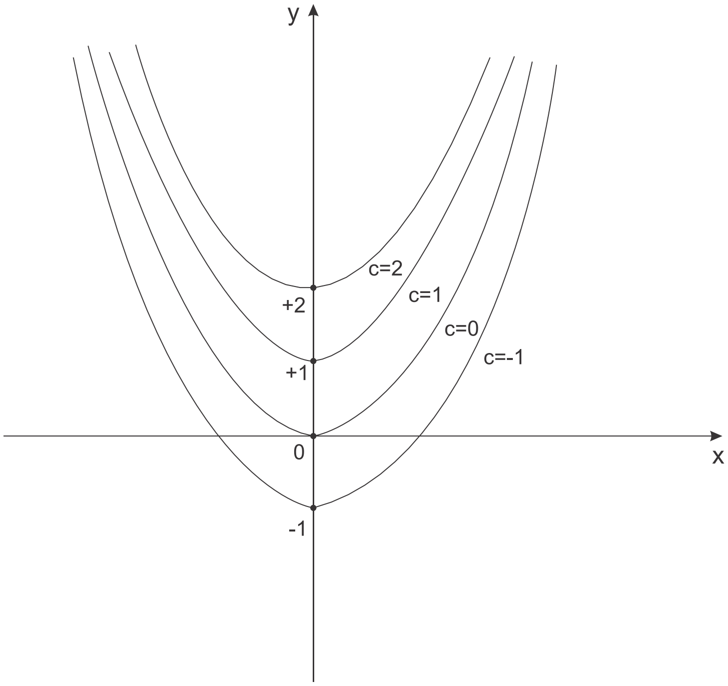

Figura 1 - Gráfico da solução geral $f(x) = x^2 + c$

ii) **A solução particular** que é uma função específica dentro da família de funções que compõem a solução geral. Para se obter essa função é necessário que sejam atribuídas condições iniciais que permitam determinar valores particulares para as constantes. De uma maneira geral, para se obter uma solução particular de uma equação diferencial $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$, com condições iniciais: $y_0 = f(x_0)$; $y_0' = f'(x_0)$; $y_0'' = f''(x_0)$; ..... ; $y_0^n = f^n(x_0)$, onde $x_0 \in D$, devemos encontrar a solução geral para em seguida aplicar essas condições.

Exemplo:

Encontre a solução particular da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x + 1$, sabendo que essa curva passa no ponto $P_0(0\ ,\ 1)$ ou equivalentemente satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

Solução:

Veja que a equação $\frac{dy}{dx} = x + 1$ pode ser resolvida fazendo-se $dy = (x+1)dx$, o que implica dizer que $y = \int (x+1)dx$, ou ainda $y = \frac{x^2}{2} + x + C$ que é a solução geral. A condição inicial dada é que a função procurada deve passar no ponto $P_0(0\ ,\ 1)$, ou seja, $y = 1$, quando $x = 0$, que substituindo na solução geral teremos que $1 = \frac{0^2}{2} + 0 + C$, logo $C = 1$.

Logo a solução procurada é $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$.

Exemplo 2:

Uma curva, que é o gráfico da função $y = f(x)$, é tal que em todos os seus pontos, a inclinação da reta tangente é igual ao dobro do valor da abscissa do ponto. Exprimir essa condição por meio de uma EDO.

Solução:

Sabemos que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em qualquer ponto $P(x\ ,\ y)$ é dada por $\frac{dy}{dx}$. Se a inclinação é igual ao dobro da abscissa, então $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Exemplo 3:

Obtenha uma EDO de segunda ordem cuja solução geral seja $y = f(x) = c_1e^x + c_2$, com c_1 e c_2 constantes.

Solução:

Se $y = c_1e^x + c_2$, então $y' = c_1e^x$ e $y'' = c_1e^x$ o que implica dizer que $y'' = y'$, logo $y'' - y' = 0$ é a equação diferencial procurada.

Atividades de avaliação

1. Identifique a ordem e o grau das equações diferenciais abaixo:

a) $(y'')^3 - 3yy' + xy = 0$

b) $x^4y^4 + y''' = e^x$

c) $\dfrac{d^n x}{dy^n} = y^2 + 1$

d) $\left(\dfrac{d^2 r}{dy^2}\right)^3 + \left(\dfrac{dr}{dy}\right)^9 = ry$

2. Verifique quais das funções abaixo são soluções da equação diferencial $y'' - y = 0$.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \text{sen}x$

c) $f(x) = 4.e^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$.

3. Escreva a equação diferencial determinada pelas condições específicas:

a) Em qualquer ponto de uma curva $y = f(x)$ a inclinação da reta tangente é igual ao cubo da ordenada do ponto.

b) A taxa de decomposição do rádio é proporcional à quantidade Q presente em cada instante.

c) Massa vezes aceleração é igual a força.

4. Mostre que a função $y = 2 + e^{-x^3}$ é uma solução da equação diferencial de primeira ordem $y' + 3x^2.y = 6x^2$.

5. Verifique que $y = \dfrac{2 + \ln x}{x}$ é a solução da equação diferencial $x^2.y' + x.y = 1$ com valor inicial $y(1) = 2$.

6. Para quais valores não nulos de k a função $y = \text{sen}\, kt$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 9y = 0$?

7. Verifique que para todos os valores de k da questão anterior, todas as funções da família $y = A.\text{sen}\, kt + B.\cos kt$ são também soluções da equação.

8. Para quais valores reais de r a função $y = e^{rt}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + y' - 6y = 0$?

9. Quais das funções abaixo são soluções da equação diferencial $y' + 2y + y = 0$?

a) $y = e^{t}$

b) $y = e^{-t}$

c) $y = t.e^{-t}$

d) $y = t^{2}.e^{-t}$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem

Objetivos

- Estudar as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em todas as suas formas, com aplicações diversas.
- Conhecer as equações Diferenciais Ordinárias com variáveis separáveis.
- Trabalhar com equações Diferenciais Homogêneas.
- Estudar equações Diferenciais Exatas.
- Resolver equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

1. Definição

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é uma equação cuja forma geral é $F(x , y , y') = 0$, ou $\dfrac{dy}{dx} = f(x , y)$ ou ainda $P(x , y)\,dx + Q(x , y)\,dy = 0$.

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem constituem um grupo de equações que envolvem apenas derivadas de primeira ordem. São as de maior aplicação em todos os ramos do conhecimento. Elas podem se apresentar de formas diferentes. Aqui estudaremos algumas delas.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias com variáveis separáveis

As equações com variáveis separáveis são equações de primeira ordem conforme descrita acima, onde $f(x , y)$ ou $P(x , y)$ e $Q(x , y)$ são funções de apenas uma variável ou o produto de fatores de uma só variável ou constantes.

Para se obter a solução geral desse tipo de equação, devemos agrupar cada uma das variáveis envolvidas, no caso x e y, com seus diferenciais, possibilitando assim a integração. Isto justifica o nome equações diferenciais com variáveis separáveis.

Vejamos os seguintes exemplos de como resolver esse tipo de equação:

1) $y.\dfrac{dy}{dx} = -x$

Multiplicando ambos os membros da equação por dx obtemos ydy = - xdx , ou ainda xdx + ydy = 0.

Integrando essa igualdade teremos

$\int xdx + \int ydy = c$. Segue que $\frac{x^2}{2}$ + $\frac{y^2}{2}$ = c ou $x^2 + y^2 = 2c$. Então $x^2 + y^2 = 2c$ é a solução geral.

2) (y + xy) dx + (x – xy) dy = 0

Colocando em evidência o fator comum y no coeficiente de dx e o fator comum x no coeficiente de dy, temos y(1 + x) dx + x(1 – y) dy = 0.

Dividindo agora por xy teremos que $\frac{1+x}{x}$ dx + $\frac{1-y}{y}$ dy = 0. Integrando temos $\int \frac{1+x}{x}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = c$ ou $\int \frac{dx}{x}$ + $\int dx$ + $\int \frac{dy}{y}$ - $\int dy$ = c. Portanto a solução geral é ln| x | + x + ln| y | - y = c ou ln| xy | + x - y = c.

3) $4xy^2 dx + (x^2 + 1) dy = 0$

Para se obter a separação de variáveis é necessário que dividamos toda a equação pelo fator $y^2(x^2 + 1)$, no que resulta em $\frac{4x}{x^2+1}dx + \frac{1}{y^2}dy = 0$, que integrando obtemos $\int \frac{4x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{y^2}dy = c$ ou $2.\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int y^{-2}dy = c$

Calculando essas integrais temos que $2.\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{y}$ = c, que é a solução geral. Esta solução pode ser escrita na forma explícita y = $\frac{1}{\ln(x^2+1)^2 - c}$

4) xdx + y $e^{-x^2} dy$ = 0

Multiplicando a equação por e^{x^2} chegaremos a x e^{x^2} dx + ydy = 0. Integrando esta equação teremos $\int xe^{x^2}dx + \int ydy = c$ ou $\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx + \int ydy = c$

Resulta que e^{x^2} + y^2 = 2c que é a solução geral

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2y}}{x^2+4}$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por e^{2y}dx obteremos

$e^{2y}dy = \dfrac{dx}{x^2+4}$. Integrando temos $\int e^{2y}dy = \int \dfrac{dx}{x^2+4}$.

A integral do primeiro membro é imediata, ou seja $\int e^{2y}dy = \dfrac{1}{2}e^{2y} + c_1$

Para resolver a integral do segundo membro, observe que

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx}{4(\frac{x^2}{4}+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$

Fazendo agora $u = \dfrac{x}{2}$, teremos que $du = \dfrac{dx}{2}$ ou ainda $dx = 2du$, portanto $\int \dfrac{dx}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\int \dfrac{2du}{u^2+1} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{u^2+1} = \dfrac{1}{2}.\text{arctg } u + c_2 = \dfrac{1}{2}.\text{arctg } \dfrac{x}{2} + c_2$

Portanto, deveremos ter $\dfrac{1}{2}e^{2y} + c_1 = \dfrac{1}{2}.\text{arctg } \dfrac{x}{2} + c_2$, ou ainda $e^{2y} = .\text{arctg } \dfrac{x}{2} + c$. A solução geral é portanto $y = \dfrac{1}{2}.\ln|\text{arctg } \dfrac{x}{2}| + c$.

6) $\cos^2 y.senxdx + seny.\cos xdy = 0$, sabendo que y = 0, quando x = 0.

Dividindo a equação por $\cos x.\cos^2 y$ obtemos $\dfrac{senx}{\cos x}dx + \dfrac{seny}{\cos^2 y}dy = 0$, que integrando obteremos $\int \dfrac{senx}{\cos x}dx + \int \dfrac{seny}{\cos^2 y}dy = c$.

Para resolver a primeira integral, fazendo u = cosx teremos que du = - senx dx ou ainda senxdx = - du, e assim

$$\int \frac{senx}{\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + c_1 = -\ln|\cos x| + c_1$$

Na segunda integral, fazendo v = cosy teremos que dv = - senydy ou seny dy = - dv, logo $\int \dfrac{seny}{\cos^2 y}dy = \int \dfrac{-dv}{v^2} = -\int v^{-2}dv = \dfrac{1}{v} + c_2 = \dfrac{1}{\cos y} + c_2$

Portanto, a solução geral da equação é $-\ln|\cos x| + \sec y = c$.

Se y = 0, quando x = 0, então $-\ln|\cos 0| + \sec 0 = c$. Resulta que c = 1 e a solução procurada é $-\ln|\cos x| + \sec y = 1$ ou $\sec y = 1 + \ln|\cos x|$ ou ainda na forma explícita $y = \text{arcsec}(1+\ln|\cos x|)$.

7) $y^2dx = \dfrac{dy}{x\ln x}$ tal que $y(1) = 1$.

Se multiplicarmos essa equação por $y^2x\ln x$ teremos $x\ln x dx = y^2dy$, que integrando obtemos $\int x\ln x dx = \int y^2dy$.

Para se resolver a integral do primeiro membro dessa equação, devemos usar integração por partes, tomando $u = \ln x$ e $dv = xdx$. Assim, temos $du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$ e daí teremos que $\int x\ln x dx = \dfrac{x^2}{2}.\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}.\dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^2}{2}.\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

Como o segundo membro da equação é $\int y^2dy = \dfrac{y^3}{3}$, a solução geral da equação será $\dfrac{x^2}{2}.\ln x - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{y^3}{3} + c$.

Para $x = 1$ temos $y = 1$, então $\dfrac{1^2}{2}.\ln 1 - \dfrac{1^2}{4} = \dfrac{1^3}{3} + c \Rightarrow c = -\dfrac{7}{12}$, e assim obtemos a solução particular $\dfrac{x^2}{2}.\ln x - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{7}{12}$.

1.2 Aplicações Geométricas

Seja $P(x , y)$ um ponto qualquer de uma curva $y = f(x)$.

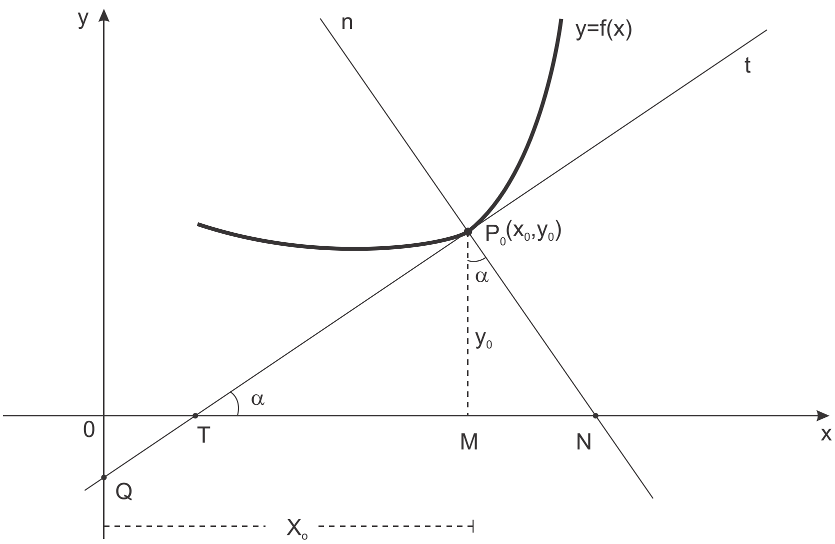

Figura 2 – Segmento de um ponto na curva y = f(x)

Observando a figura, verificamos que:

1) tgα **=** $\frac{dy}{dx}$ é a inclinação da reta t tangente à curva no ponto.

2) – $\frac{1}{tg\alpha}$ = - $\frac{dx}{dy}$ é a inclinação da reta n normal à curva no ponto.

3) Se fixarmos esse ponto como sendo P(x_0 , y_0), então a equação da reta tangente à curva em P é $y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$.

4) Sob as mesmas condições, a equação da reta normal à curva no ponto P é dada por $y - y_0 = -\frac{dx}{dy}(x - x_0)$.

A partir dessas observações, podemos definir :

a) Segmento tangente: TP cuja medida é $\overline{TP} = \sqrt{\overline{TM}^2 + \overline{MP}^2}$

Mas $\overline{MP}$ = y e tgα = $\frac{\overline{MP}}{\overline{TM}} \Rightarrow \overline{TM} = \frac{y}{tg\alpha} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = y.\frac{dx}{dy}$, portanto

$$\overline{TP} = \sqrt{\left(y\frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{TP} = |y|.\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

b) Segmento subtangente:

TM cuja medida é $\overline{TM} = y.\frac{dx}{dy}$

c) Segmento normal:

PN cuja medida é $\overline{PN} = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{MN}^2}$

Se tgα = $\frac{\overline{MN}}{\overline{PM}}$, então $\overline{MN}$ = y. tgα $\Rightarrow \overline{MN} = y.\frac{dy}{dx}$

portanto $\overline{PN} = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = |y|.\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

d) Segmento subnormal:

MN cuja medida é $\overline{MN} = y.\frac{dy}{dx}$

e) OT é o valor da abscissa do ponto onde a reta tangente corta o eixo x, que pode ser um número real qualquer. Fazendo y = 0 na equação da reta tangente, teremos que $-y_0 = \frac{dy}{dx}(OT - x_0) \Rightarrow OT - x_0 = -y_0 . \frac{dx}{dy} \Rightarrow OT = x_0 - y_0 . \frac{dx}{dy}$.

f) OQ é o valor da ordenada do ponto onde a reta tangente corta o eixo y. Então, fazendo x = 0 na equação da reta tangente, teremos $OQ - y_0 = \frac{dy}{dx}(-x_0)$, logo $OQ = y_0 - x_0 . \frac{dy}{dx}$.

Exemplo 1:

Encontre a equação da família de curvas cujo comprimento da subnormal é constante e igual a π.

Solução:

Se o comprimento da subnormal é igual a π, teremos $y.\frac{dy}{dx} = \pi$ ou $y.dy = \pi.dx$. Integrando esta igualdade obtemos $\int ydy = \int \pi dx$ ou $\frac{y^2}{2} = \pi.x + c$. A solução geral é portanto $y^2 = 2\pi.x + 2c$, que é uma família de parábolas.

Exemplo 2:

A ordenada do ponto em que a reta tangente a uma curva no ponto (x, y) corta o eixo y é 2xy. Determine a equação da curva.

Solução:

Considerando as variáveis obtemos $\frac{1-2x}{x}dx = \frac{dy}{}$. Integrando esta equação temos $\ln|x| - 2x = \ln|y| + c$ ou $\ln\left|\frac{x}{y}\right| = 2x + c$ que é a equação geral. Usando exponencial podemos apresentar a solução geral na forma $\frac{x}{y} = e^{2x+c}$ ou $y = x.e^{-2x-c}$

Exemplo 3:

Encontre a equação da família de curvas cuja reta normal em qualquer ponto passa na origem.

Solução:

A equação da reta normal a uma curva qualquer é $y - y_0 = -\frac{dx}{dy}(x - x_0)$.

Se $y_0 = x_0 = 0$ teremos $y = -\frac{dx}{dy}x$ ou $x\,dx + y\,dy = 0$. Teremos $\int x dx + \int y dy = 0$ ou $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$. Então $x^2 + y^2 = r^2$, onde $r^2 = 2c$ é a família de curvas procurada e são todas as circunferências centradas na origem.

Exemplo 4:

Ache a família de curvas que, em qualquer ponto, a medida do segmento OT seja média aritmética de OM e a constante π

Solução:

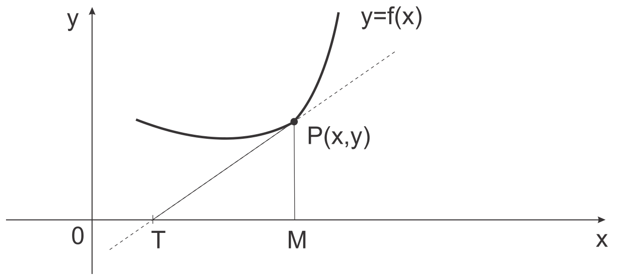

Figura – 3

Se $\overline{OT} = \frac{\overline{OM} + \pi}{2}$, então $x - y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{x + \pi}{2}$. Teremos $x\,dy - y\,dx = \frac{x + \pi}{2}dy$ ou $y\,dx = (x - \frac{x + \pi}{2})\,dy$. Segue que $y\,dx = (\frac{x - \pi}{2})\,dy$, que separando as variáveis teremos $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x - \pi}dx$. $\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{1}{x - \pi}dx$. Integrando ambos os membros da igualdade, teremos que $\ln| y | = 2 \ln| x - \pi | + c$. Concluimos então que $y = k.e^{2\ln| x - \pi |}$ é a família de curvas procurada.

Exemplo 5:

Encontre a equação da curva cujo comprimento da subtangente seja o dobro da abscissa do ponto de contato, e passa no ponto $P_0(1, 2)$.

Solução:

Sabemos que o comprimento da subtangente é $\overline{TM} = y.\dfrac{dx}{dy}$. Então, $\overline{TM} = 2x$ implica que $y.\dfrac{dx}{dy} = 2x$ ou $2\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$. Integrando, temos $2\int\dfrac{dy}{y} = \int\dfrac{dx}{x}$, ou $2\ln|y| = \ln|x| + \ln c$. Assim teremos $\ln|y^2| = \ln|cx|$ e ou $y^2 = cx$, que é a solução geral. Como a curva procurada passa no ponto $P_0(1\ ,\ 2)$, então $2^2 = c.1$, o que implica que $c = 4$, portanto $y^2 = 4x$ é a solução desejada.

1.3 Trajetórias Ortogonais

Seja $F(x\ ,\ y\ ,\ \lambda) = 0$ a equação de uma família de curvas que dependem do parâmetro λ. Definimos as trajetórias ortogonais dessa família, como uma outra família de curvas que cortam as curvas da primeira segundo um ângulo reto.

Exemplo: Encontre as trajetórias ortogonais da família de hipérboles $x.y = k$.

Solução:

Derivando a equação $x.y = k$ com relação a x teremos que $x.y' + y = 0$. Segue que $y' = -\dfrac{y}{x}$, o que nos permite afirmar que a declividade da família de hipérboles em qualquer ponto é $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

Se as trajetórias ortogonais são perpendiculares a essa família de curvas, então a declividade dessas trajetórias são inversas e simétricas da declividade da família de hipérboles. Logo, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ ou $y\,dy = x\,dx$. Integrando esta equação teremos $\int ydy = \int xdx$, e assim $y^2 - x^2 = k$ que é a família de curvas ortogonais à família dada.

1.4 Aplicações Diversas

Vamos agora aplicar a teoria das equações diferenciais ordinárias com variáveis separáveis em Cinemática, Eletricidade, Decaimento Radioativo, Dinâmica Populacional, Aquecimento e Arrefecimento, etc. Embora os problemas que apresentaremos sejam bastante simples, é necessário que tenhamos algum conhecimento sobre mecânica newtoniana, que é a teoria do movimento. As relações fundamentais da mecânica estão contidas nas três leis do movimento de Newton, que enunciaremos a seguir.

1. Quando não existem forças externas agindo sobre um corpo, ele permanece num referencial inercial, em repouso ou em movimento, com velocidade constante.

2. A taxa de variação do movimento de um corpo em relação ao tempo é igual à resultante das forças externas que agem sobre o corpo, ou seja, $\sum F = \frac{d\gamma}{dt}$, onde γ é o momento (quantidade de movimento). A quantidade de movimento, γ, é o produto da massa do corpo **m** pela velocidade **v.** Quando a massa do corpo é constante, então $\sum F = m.\frac{dv}{dt} = m.a$, onde $a = \frac{dv}{dt}$ é a aceleração.

3. As forças sempre existem aos pares: quando um corpo A exerce uma força F_{AB} sobre um corpo B, este exerce sobre aquele um força igual e oposta $F_{BA} = -F_{AB}$.

Exemplo 1:

Uma bola de golfe de massa 0,2 Kg recebe uma tacada que lhe imprime uma velocidade de 180 Km/h. Supondo que a bola permanece em contato permanente com o chão e que a força de atrito que atua sobre ela é de 10 newtons (N), qual a distância percorrida pela bola até ela parar?

Solução:

Antes de começarmos a solucionar o problema vamos lembrar que uma força unitária agindo sobre um corpo de massa de 1 Kg provoca uma aceleração de 1 m/s^2, ou seja, 1 unidade de força = 1 Kg.1 m/s^2.

Esta combinação de unidades 1 Kg.1 m/s^2 , é chamada de newton, ou seja a unidade de força é 1 N = 1 Kg.1 m/s^2.

Usando a segunda lei de Newton, temos que $\sum F = m.\frac{dv}{dt}$ ou $0{,}2\frac{dv}{dt} = -10$. O sinal negativo indica que a força atua no sentido contrário ao deslocamento. Segue que $dv = -50\,dt$; Integrando temos $\int dv = -50\int dt$ e assim $v = -50.t + c_1$.

Como a velocidade inicial da bola é de 180 Km/h = 50 m/s, para t = 0 temos que v = 50, o que resulta em $c_1 = 50$, e assim $v(t) = -50t + 50$ metros por segundo que é a velocidade da bola a cada instante t.

Quando a bola pára, temos $v(t) = 0$, logo t = 1 segundo. Mas, se **s(t)** é o espaço percorrido pela bola em um tempo t, então $\frac{ds}{dt} = v(t)$ no que resulta uma nova nova equação $\frac{ds}{dt}$ = - 50t + 50. Então ds = (- 50t + 50) dt. Integrando esta equação temos $\int ds = \int(-50t+50)dt$. Segue que s = - 25t^2 + 50t + c_2. Como para t = 0 temos que o espaço percorrido é s = 0, concluímos que c_2 = 0.

Portanto, o espaço percorrido pela bola em qualquer instante t é s(t) = - 25t^2 + 50t, e no instante t igual a 1 segundo teremos s(1) = - 25 + 50 = 25 metros que é o deslocamento da bola.

Exemplo 2:

Um bote está sendo rebocado a uma velocidade de 6,1 m/s. No instante t = 0 em que o cabo do reboque é largado, um homem no bote começa a remar, no sentido do movimento, exercendo uma força F = 10 Kgf. Sabendo que o peso do bote com o homem é 200 Kgf e que a resistência ao deslocamento, em Kgf, é R = 2,6v, onde v é a velocidade em m/s, ache a velocidade do bote no fim de 30 segundos.

Solução:

Antes de partirmos para solucionar o problema é necessário que façamos algumas considerações.

A força mais comum na nossa experiência cotidiana é a força de atração que a terra exerce sobre todos os corpos, que chamamos de **peso** do corpo. Podemos determinar o peso de um corpo com 1 Kg de massa, medindo a aceleração desse corpo em queda livre, quando a única força que atua sobre ele é o próprio peso. A aceleração da gravidade é, conforme sabemos, 9,8 m/s^2 com sentido para baixo.

O peso P da massa de 1 Kg será portanto P = m.a = 1 Kg.9,8 m/s^2 = 9,8 N.

Em algumas situações práticas, no lugar da unidade de massa, é fundamental que usemos a unidade de força, que é o quilograma-força. O quilograma-força (Kgf) é, por definição, o peso do quilograma (massa) padrão em um lugar em que a aceleração da gravidade seja 9,8 m/s^2. Assim, a relação entre essa unidade de força e o newton será 1 Kgf = 1 Kg . 9,8 m/s^2 = 9,8 N.

Uma vez que 1 Kg pesa 9,8 N num lugar em que a aceleração da gravidade é 9,8 m/s^2, o peso de um corpo com massa de 1 Kg, medido em Kgf é 1 Kgf.

Agora podemos começar a solucionar o problema, observando primeiro que as forças que atuam sobre o bote, após o cabo do reboque ser largado, são a força exercida pelo homem e a força de resistência. Aplicando a segunda lei de Newton teremos m.$\frac{dv}{dt}$ = F - R, ou seja, 200$\frac{dv}{dt}$ = 10 – 2,6v ou $\frac{dv}{dt}$ = 0,05 - 0,013v.

Segue que $\frac{dv}{0,05-0,013v}$ = dt e portanto $\int \frac{dv}{0,05-0,013v} = \int$ dt .

Para a primeira integral, façamos u = 0,05 - 0,013v, du = - 0,013dv ou ainda dv = - $\frac{du}{0,013}$.

Então - $\frac{1}{0,013}\int \frac{du}{u} = \int$ dt.

Segue que - $\frac{1}{0,013}$. ln|u|=t + c ou ainda

ln | 0,05 - 0,013v | = - 0,013(t + c).

Portanto 0,05 – 0,013v = $e^{-0,013(t+c)}$, ou 0,013v = 0,05 - $e^{-0,013t}$. Teremos v = $\frac{0,05}{0,013}$ - $\frac{e^{-0,013c}}{0,013}$. $e^{-0,013t}$

Quando t = 0, sabemos que v = 6,1, que substituindo na equação encontramos $\frac{e^{-0,013c}}{0,013}$= 2,25 , logo v = $\frac{}{0,26}$ - 2,25 . $e^{-0,013t}$.

A velocidade do bote ao final de 30 segundos é v(30) = 2,32 m/s.

Exemplo 3:

Um circuito elétrico é constituído por uma resistência R de 8 Ω e está sujeito a uma força eletromotriz (f.e.m.) E = 4 volts. Sendo o coeficiente de auto-indutância L = 0,2 henries, encontre a intensidade da corrente elétrica i no instante em que t = 0,01 s.

Solução:

Quando a intensidade i de uma corrente elétrica sofre uma variação, ela produz uma variação no fluxo magnético, o qual, por sua vez, da origem a uma força eletromotriz induzida que, de acordo com a lei de Lenz, se opõe à variação da corrente. Esta f.e.m. de auto-indutância se exprime em função da variação da intensidade de corrente, pela relação $e = -L.\frac{di}{dt}$, onde L é a constante do circuito que se denomina coeficiente de auto-indutância. O sinal negativo traduz o fato de que a f.e.m. induzida se opõe à variação da corrente. A unidade prática de auto-indutância correspondente ao volt e ao ampére é o henry.

Pela lei de Kirchhof, temos que $i = \frac{\sum f.e.m.}{R} = \frac{E+e}{R} \Rightarrow i.R = E + e$ ou ainda $-e + i.R = E \Rightarrow L.\frac{di}{dt} + R.i = E$, onde L, R e E são constantes.

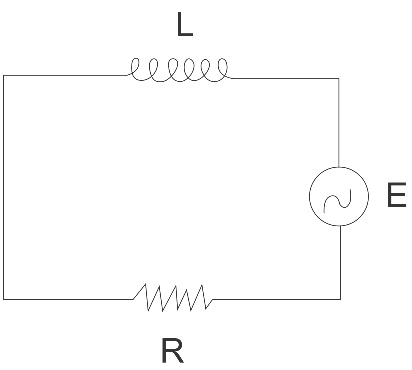

Figura 4 – Circuito elétrico

Para solucionar essa equação diferencial $L.\frac{di}{dt} + R.i = E$ façamos $L.\frac{di}{dt} = E - Ri$ ou $L\,di = (E - Ri)\,dt \Rightarrow \frac{di}{E-Ri} = \frac{1}{L}dt \Rightarrow \int\frac{di}{E-Ri} = \frac{1}{L}\int dt$.

Fazendo na primeira integral $u = E - Ri$, teremos que $du = -R\,di$ ou $di = -\frac{1}{R}du$, de onde tiramos que $-\frac{1}{R}.\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{L}\int dt$. Resolvendo ambas as integrais obtemos que $\ln|E - Ri| = -\frac{R}{L}.t + C$.

Quando $t = 0$, temos $i = 0$ o que implica que $C = \ln|E|$, que substituindo na equação anterior temos $\ln|E - Ri| = -\frac{R}{L}.t + \ln|E|$ ou ainda $\ln|E - Ri| - \ln|E| = -\frac{R}{L}.t \Rightarrow \ln|\frac{E-Ri}{E}| = -\frac{R}{L}.t \Rightarrow \frac{E-Ri}{E} = e^{-\frac{R}{L}t}$ ou $E.e^{-\frac{R}{L}t} = E - Ri \Rightarrow Ri = E - E.e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

Que é a equação que exprime a intensidade i de corrente, t segundos após ser fechado o circuito, e que graficamente pode ser vista na figura.

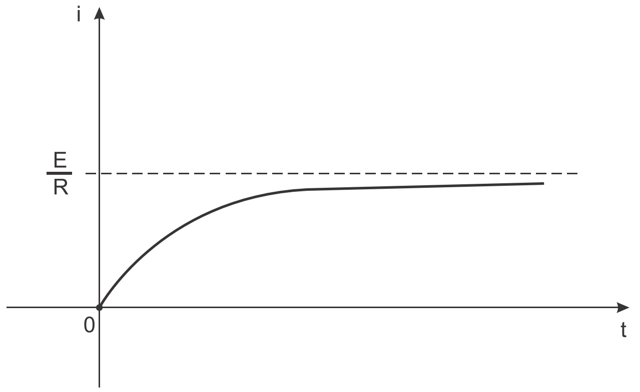

Figura 5 – Gráfico da intensividade da corrente em função do tempo

No caso em que E = 4; R = 8; L = 0,2 e t = 0,01 temos que i = 0,16 amp.

Exemplo 4:

A lei de variação da temperatura de Newton afirma que a taxa de variação da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. Se um corpo à temperatura de 50 °C é colocado em um meio onde a temperatura é de 100 ºC, e se após 5 minutos a temperatura do corpo é de 60 ºC, determine sua temperatura depois de 20 minutos.

Solução:

A lei de Newton pode ser traduzida pela equação diferencial $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$, onde T_m é a temperatura do meio, e se admite constante, k é uma constante positiva que depende da propriedade física do corpo. O sinal negativo se explica pelo fato que o calor flui da fonte mais quente para a mais fria, e assim, para $T > T_m$ teremos $\frac{dT}{dt} < 0$ o que quer dizer que o corpo está esfriando, enquanto que $T < T_m$ acarretará aquecimento do corpo, ou $\frac{dT}{dt} > 0$.

Então, se a temperatura do meio é 100 ºC, então $\frac{dT}{dt} = -k(T - 100)$ ou

$$dT = -k(T - 100)\,dt \Rightarrow \frac{dT}{T-100} = -k\,dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-100} = -k\int dt$$

Integrando, temos $\ln|T - 100| = -kt + c_0 \Rightarrow T = C.e^{-kt} + 100$.

Se T = 50 para t = 0, então C = - 50; e T = 60 para t = 5, temos que $k = 0{,}045$, portanto $T = -50.e^{-0{,}045t} + 100$.

Assim, podemos agora obter a temperatura do corpo em t = 20 min, que será $T = -50.e^{-0,045\times 20} + 100 \Rightarrow T = 79,5$ °C.

Um outro modelo que se enquadra na classe de modelos matemáticos característicos de equações diferenciais com variáveis separáveis é o crescimento populacional, que se baseia na premissa de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população.

Admitamos ser P a população de uma cidade, e esta cresce ao longo do tempo t a uma taxa proporcional a P, isto é, $\frac{dP}{dt} = k.P$, onde k > 0 é chamada de constante de proporcionalidade .

Assim, $\frac{dP}{dt} = k.P \Rightarrow \frac{1}{P}dP = k.dt \Rightarrow \int \frac{1}{P}dP = \int k.dt \Rightarrow \ln P = k.t + r$, logo $P = e^{k.t+r} \Rightarrow P = e^{k.t}.e^{r} \Rightarrow P = C.e^{k.t}$, com $e^{r} = C$.

Exemplo 5:

Suponhamos que a população de uma cidade dobrou nos últimos 20 anos, passando de 20.000 habitantes em 1990 para 40.000 em 2010. Faça uma estimativa de sua população para as próximas três décadas.

Solução:

t	0	20	30	40	50
P	20.000	40.000	?	?	?

Veja na tabela acima , que consideramos t = 0 em 1990, como ponto de partida de nossa estimativa , e t = 20 para o ano de 2010.

Então:

Sendo $P = C.e^{k.t}$, então para t = 0, temos $P = C.e^{k.0}$ logo $P = C.1 = C$.

A constante C corresponde sempre ao valor de P na data zero.

Assim, $P = 20000.e^{k.t}$

Para t = 20, $P = 20000\,e^{k.20} \Rightarrow 40000 = 20000\,e^{20k}$

$e^{20k} = 2 \Rightarrow 20k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20} \Rightarrow k = 0,034657$.

Agora , a função está completa onde $P = 20000\,e^{0,034657.t}$ e podemos fazer a estimativa da população para qualquer período.

Em 2020 , t = 30 $\Rightarrow P = 20000\,e^{0,034657.30} \Rightarrow P = 56.568$ habitantes.

Em 2030, t = 40 $\Rightarrow P = 20000\,e^{0,034657.40} \Rightarrow P = 79.998$ habitantes.

Em 2040, t = 50 $\Rightarrow P = 20000\,e^{0,034657.50} \Rightarrow P = 113.135$ habitantes

É conveniente observar que essa estimativa é feita com base nos dados que tomamos , e que o crescimento populacional de uma cidade pode sofrer influências que modifiquem esse resultado.

Na física nuclear temos também um exemplo que tem características semelhantes aos modelos anteriores, quando se afirma que a massa de um elemento radioativo decai a uma taxa proporcional à massa presente em cada instante. Admitindo ser M a massa desse elemento, temos que $\frac{dM}{dt}$ = - k.M, onde k > 0 é a constante de proporcionalidade e o sinal negativo indica a perda de massa do elemento.

A equação diferencial para esse modelo é semelhante à equação do modelo de crescimento populacional, e assim, podemos dizer que

$$\frac{dM}{dt} = -k.M \Rightarrow M = C.e^{-kt}.$$

Exemplo 6:

Se uma substância radioativa perdeu 30 % de sua massa em 15 anos, em quantos anos perderá 60% ?

Solução:

M	M_0	$70\%M_0$	$40\%M_0$
t	0	15	?

Suponhamos que existiam inicialmente 100 gramas da substância. Se houve uma perda de 30% em 15 anos, então restam 70 gramas, e queremos saber em quanto tempo restarão 40 gramas.

Assim, temos $M = C.e^{-kt}$, de modo que:

M = 100 para $t = 0$, implica que $C = 100$

M = 70 para $t = 15$, então $70 = 100.e^{-k\times 15} \Rightarrow e^{-15k} = 0{,}7$ ou ainda

$$-15k = \ln 0{,}7 \Rightarrow k = \frac{-0{,}35667}{-15} \Rightarrow k = 0{,}023.$$

Agora temos a função $M = 100.e^{-0{,}023t}$, e para saber o tempo em que a massa do elemento se reduzirá a 40 gramas devemos fazer M = 40, no que implica $40 = 100.e^{-0{,}023t} \Rightarrow e^{-0{,}023t} = 0{,}4 \Rightarrow -0{,}023t = \ln 0{,}4 \Rightarrow$

$$t = \frac{-0{,}9163}{-0{,}023}$$

Portanto, o tempo será de aproximadamente 40 anos.

Exemplo 7:

A meia-vida do rádio-226 é de 1590 anos . Se uma amostra de rádio tem hoje uma massa de 100 mg, calcule:

a) sua massa daqui a 1000 anos .

b) em quantos anos essa massa estará reduzida a 30 mg.

Solução:

a) Se M é a massa de rádio, $M = M_0 . e^{k.t} \Rightarrow M = 100 . e^{k.t}$.

A meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade .

Então, $50 = 100\ e^{1590.k} \Rightarrow e^{1590.k} = 0,5 \Rightarrow 1590k = \ln 0,5$

$k = -0,0004359$.

Em 1000 anos teremos $M = 100\ e^{-0,0004359.1000} \Rightarrow M = 100\ e^{-0,4359}$

$M = 65$ mg.

b) Para saber o tempo em que a massa se reduzirá a 30 mg, devemos fazer M = 30, no que implica em $30 = 100\ e^{-0,0004359t} \Rightarrow e^{-0,0004359t} = 0,3$ $-0,0004359t = \ln 0,3 \Rightarrow t = -\dfrac{\ln 0,3}{0,0004359} \Rightarrow t = 2.762$ anos.

Outro tipo de problema cuja solução recai em uma equação diferencial com variáveis separáveis é o problema de misturas.

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido por uma solução completamente misturada de alguma substância. Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ for a quantidade de substância no tanque no tempo t, então $y'(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada, menos a quantidade na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação leva frequentemente a uma equação diferencial com variáveis separáveis. Esse mesmo raciocínio podemos usar para modelar outros tipos de fenômenos , como ; reações químicas, descarga de poluentes em um lago ou injeção de medicamentos na corrente sanguinea.

Exemplo 8:

Um tanque contem 20 kg de sal dissolvidos em 5000 litros da água. Água salgada que contem 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

Solução:

Suponhamos que y(t) é a quantidade de sal depois de t minutos. Nos foi dado que y(0) = 20 e queremos saber o valor de y(30). Se $\frac{dy}{dt}$ é a taxa de variação da quantidade de sal, então:

$$\frac{dy}{dt} = \text{(taxa de entrada) - (taxa de saída).}$$

A taxa de entrada é a taxa na qual o sal entra no tanque, logo:

Taxa de entrada = (0,03 kg/L).(25 L/min) = 0,75 kg/min

Taxa de saída = ($\frac{y(t)}{5000}$ kg/L) . (25 L/min) = $\frac{y(t)}{200}$ kg/min

Então: $\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{150 - y(t)}{200}$.

Resolvendo essa equação diferencial, que é de variáveis separáveis, temos que:

$\frac{1}{150 - y(t)} dy = \frac{1}{200} dt \Rightarrow \int \frac{1}{150 - y} dy = \int \frac{1}{200} dt$ e daí

$- \ln |150 - y| = \frac{t}{200} + C$

Quando t = 0, temos que y = 20, isso implica dizer que C = - ln130, o que acarreta que $- \ln |150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130 \Rightarrow$

$- \ln 130 + \ln |150 - y| = - \frac{t}{200}$ $\ln \frac{|150 - y|}{130} = - \frac{t}{200} \Rightarrow |150 - y| = 130 \cdot e^{-t/200}$.

Como y(t) é contínua, y(0) = 20 e o lado direito dessa equação nunca é igual a zero, então concluímos que 150 - y(t) é sempre positiva, o que implica dizer que |150 - y| = 150 - y, portanto:

$y(t) = 150 - 130 \cdot e^{-t/200}$

Em meia hora, temos que t = 30 $\Rightarrow$ $y(30) = 150 - 130 \cdot e^{-30/200}$ logo y(30) = 38,1 kg.

Para refletir

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

a) $y' = y^2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$

c) $y.y' = x$

d) $y' = x.y$

e) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^t}{y\sqrt{1+y^2}}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{2.\ln y}$

2. Encontre a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial dada:

a) $y' = y^2 + 1$; $y(1) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x}{xy}$; com $x > 0$. $y(1) = -4$.

c) $x.e^{-t}.\dfrac{dx}{dt} = t$; $x(0) = 1$.

3. Encontre uma equação da curva que satisfaz $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 y$ e cujo intercepto y é igual a 7.

4. Encontre uma equação da curva que passa pelo ponto $P_0(1, 1)$ e cuja inclinação da reta tangente em qualquer ponto $P(x, y)$ é $\dfrac{y^2}{x^2}$.

5. Resolva o problema de valor inicial $y' = y.\text{sen}\,x$; $y(0) = 1$.

6. O crescimento do número de bactérias em uma determinada cultura é proporcional à quantidade presente. Se existem 1.000 bactérias presentes inicialmente e a quantidade dobra em uma hora, quantas bactérias existirão em 5 horas ?

7. Em uma reação química a taxa de conversão de uma substância é proporcional à quantidade de substância ainda não transformada. Após 10 minutos, um terço da quantidade original da substância foi convertido, e 20 gramas foram convertidas após 15 minutos . Qual era a quantidade de substância no início?

8. Se trinta por cento de uma substância radioativa desaparece em 15 anos , qual a vida média dessa substância?

9. Um tanque contém 200 galões de água salgada na qual existem 3 kg de sal por galão. Deseja-se diluir esta solução adicionando-se água salgada contendo 1 kg de sal por galão , que flui no tanque à taxa de 4 galões por minuto, e sai à mesma taxa . Em quanto tempo o tanque conterá 1,5 kg de sal por galão?

10. Uma curva passa pelo ponto (0, 5) e tem a propriedade de que a inclinação da reta tangente à curva em qualquer ponto P(x , y) é o dobro da ordenada de P. Encontre a equação dessa curva. Encontre também as trajetórias ortogonais dessa curva.

11. Encontre as trajetórias ortogonais das seguintes curvas:

a) $y = k.x^2$

b) $x^2 - y^2 = k$

c) $y = (x + k)^{-1}$

d) $y = k.e^{-x}$

12. Suponha que você acabou de servir uma xícara de café recém-passado a uma temperatura de 95º C em uma sala com temperatura ambiente de 20º C. Sabendo que a taxa de resfriamento do café é proporcional à diferença de temperatura com o meio ambiente, em quanto tempo o café estará a uma temperatura de 55º C?

2. Equações Diferenciais Homogêneas

Se n é um número natural, dizemos que uma função de duas variáveis f(x , y) é **homogênea de grau n** quando $f(tx , ty) = t^n.f(x , y)$ para todo número real t.

Tomemos por exemplo a função $f(x , y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$.

$$f(tx , ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)(ty)} = \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2xy} = t^0.\frac{x^2 - y^2}{xy} = t^0.\ f(x , y),$$

portanto essa função é homogênea de grau zero.

A função $f(x , y) = x^3 + xy^2$ é homogênea de grau 3, pois

$$f(tx , ty) = (tx)^3 + (tx)(ty)^2 = t^3(x^3 + xy^2) = t^3.\ f(x , y).$$

Uma equação diferencial ordinária do tipo $P(x , y)\,dx + Q(x , y)\,dy = 0$ é dita homogênea, quando as duas funções $P(x , y)$ e $Q(x , y)$ forem homogêneas de mesmo grau.

A equação diferencial $(x^2 + y^2)\,dx + x^2\,dy = 0$ é homogênea pois as duas funções $P(x , y) = x^2 + y^2$ e $Q(x , y) = x^2$ são homogêneas de grau dois.

Teorema

Uma equação diferencial ordinária homogênea $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ se reduz ao caso de variáveis separáveis mediante a substituição $y = x . v$.

Prova

Se $y = x.v$, então $dy = x.dv + v.dx$ que substituindo na equação temos que

P(x , xv) dx + Q(x , xv) (x.dv + v.dx) = 0 ou

[P(x , xv) + v. Q(x , xv)] dx + x Q(x , xv).dv = 0.

Dividindo essa igualdade por x.[P(x , xv) + v. Q(x , xv)] obtemos

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(x,xv)}{P(x,xv)+Q(x,xv)}.dv = 0.$$

Suponha agora que as duas funções P e Q sejam homogêneas de grau r, e assim $\frac{dx}{x} + \frac{x^r Q(\pm 1,\pm v)}{x^r[P(\pm 1,\pm v)+Q(\pm 1,\pm v)]}.dv$ = 0 ou ainda

$\frac{dx}{x} + \frac{Q(\pm 1,\pm v)}{P(\pm 1,\pm v)+Q(\pm 1,\pm v)}.dv$ = 0, conforme seja x > 0 ou x < 0, que é uma equação diferencial com variáveis separáveis.

Exemplo 1:

Encontre a solução geral da equação x dy = (x + y) dx

Solução:

x dy = (x + y) dx $\Rightarrow$ (x + y) dx - x dy = 0 onde P(x , y) = x + y e

Q(x , y) = - x , são tais que P(tx , ty) = tx + ty = t(x + y) = t.P(x , y) e

Q(tx , ty) = - (tx) = t.(- x) = t.Q(x , y) , ou seja, P e Q são ambas homogêneas de grau um.

Fazendo y = xv , temos dy = x dv + v dx, que substituindo na equação encontraremos (x + xv) dx - x(x dv + v dx) = 0 ou x dx - x^2 dv = 0.

Dividindo essa equação por x^2, temos que $\frac{dx}{x}$ - dv = 0, que integrando obteremos $\int \frac{dx}{x} - \int dv$ = C $\Rightarrow$ ln| x | - v = C $\Rightarrow$ ln| x | - $\frac{y}{x}$ = C, de onde tiramos a forma explícita para y = x(ln| x | - C).

Exemplo 2:

Resolva a equação 2xy dy = ($y^2 - x^2$) dx .

Solução:

2xy dy = ($y^2 - x^2$) dx $\Rightarrow$ ($y^2 - x^2$) dx - 2xy dy = 0 onde temos que

P(x , y) = $y^2 - x^2$ e Q(x , y) = - 2xy .

P(tx , ty) = $(ty)^2 - (tx)^2$ = $t^2(y^2 - x^2)$ = t^2 P(x , y) e

Q(tx , ty) = - 2(tx)(ty) = t^2(- 2xy) = t^2 Q(x , y) , de onde concluímos que as duas funções são homogêneas de grau 2.

Fazendo y = xv , temos dy = x dv + v dx, na equação resultará que

$[(xv)^2 - x^2]\,dx - 2x(xv)(x\,dv + v\,dx) = 0$ ou

$x^2(1 + v^2)\,dx + 2x^3 v\,dv = 0$.

Dividindo a equação por $x^3(1 + v^2)$ resultará

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{1+v^2}.dv = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2v}{1+v^2}dv = C, \text{ ou seja },$$

$\mathrm{Ln}|x| + \ln|1 + v^2| = \ln K \Rightarrow \ln|x|.|1 + v^2 = \ln K$ de onde tiramos

$$|x|.(1 + v^2) = K \Rightarrow |x|.\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = K \Rightarrow x^2 + y^2 = K|x|.$$

Exemplo 3:

Ache a solução da equação $(x.e^{\frac{-y}{x}} + y)\,dx - x\,dy = 0$ tal que $y(1) = 0$.

Solução:

$P(x, y) = x.e^{\frac{-y}{x}} + y \Rightarrow P(tx, ty) = tx.e^{\frac{-ty}{tx}} + ty = t(x.e^{\frac{-y}{x}} + y)$, logo

$P(tx, ty) = t.P(x, y)$

$Q(x, y) = -x \Rightarrow Q(tx, ty) = -(tx) = t(-x) = t.Q(x, y)$

Portanto, ambas são funções homogêneas de grau um.

Fazendo y = xv, temos dy = x dv + v dx, e substituindo na equação teremos que $(x\,e^{-\frac{xv}{x}} + xv)\,dx - x(x\,dv + v\,dx) = 0$, ou ainda $x\,e^{-v}\,dx - x^2\,dv = 0$, de onde resulta $\frac{dx}{x} - e^v\,dv = 0$, que integrando temos $\int \frac{dx}{x} - \int e^v dv = C \Rightarrow$ $\ln|x| - e^v = C$.

Substituindo $v = \frac{y}{x}$, teremos a solução geral $\ln|x| - e^{\frac{y}{x}} = C$.

Quando x = 1 e y = 0 teremos que C = - 1, sendo então $\ln|x| - e^{\frac{y}{x}} = -1$ a solução particular desejada.

Para refletir

1. Verifique se as funções abaixo são homogêneas, e especifique o grau de homogeneidade, quando for o caso:

a) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - \frac{x^4}{y}$

b) $f(x, y) = \sqrt{x+y}\,(2x-3y)$

c) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2 - xy^3}{(4x-3y)^2}$

d) $f(x, y) = \text{sen}\,\dfrac{y}{x+y}$

2. Use uma substituição apropriada para encontrar a solução geral das equações diferenciais :

a) $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$

b) $x\,dx + (y-2x)\,dy = 0$

c) $y(x+y)\,dx + x^2\,dy = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y}{x+2y}$

f) $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$

g) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\mathrm{h}\,\dfrac{y}{x}.$

3. Encontre uma solução particular para cada equação homogênea:

a) $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$; com $y(1) = 1$.

b) $(x^2 + 2y^2)\,dx = xy\,dy$; com $y(-1) = 1$.

c) $2x^2\dfrac{dy}{dx} = 3xy + y^2$; com $y(1) = -2$.

d) $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3$; com $y(1) = 2$.

3. Equações Diferenciais Exatas

Dizemos que uma equação diferencial ordinária do tipo $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ é **exata** quando existe uma função $f(x, y)$ com derivadas parciais de primeira e segunda ordem tal que sua diferencial total seja igual ao primeiro membro da equação, ou seja, $df(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$. Nesse caso, teremos que $f(x, y) = k$ será a solução geral da equação diferencial.

Para exemplificar, tomemos a função f(x , y) = x.y cujas derivadas parciais são $\frac{\partial f}{\partial x}$ = y e $\frac{\partial f}{\partial y}$ = x, de modo que sua diferencial total df(x, y) = $\frac{\partial f}{\partial x}$ dx + $\frac{\partial f}{\partial y}$ dy ou df(x , y) = y dx + x dy.

Assim, dada a equação diferencial y dx + x dy = 0, temos que P(x , y) = y e Q(x , y) = x que é uma equação diferencial exata e sua solução geral será f(x , y) = k ou x.y = k, com k real.

Para resolver equações diferenciais exatas, temos dois pontos que devem ser observados:

1. Verificar se uma determinada equação é exata

2. Como encontrar a sua solução geral.

O seguinte teorema nos fornece condições para dirimir essas dúvidas.

Teorema

Uma E.D.O. P(x , y) dx + Q(x , y) dy = 0, onde P(x , y) , Q(x , y) e suas derivadas parciais são funções contínuas, é exata se, e somente se, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Prova:

Inicialmente admitiremos que P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ são funções contínuas e que a equação P(x , y) dx + Q(x , y) dy = 0 é exata, para provar que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Sendo a E.D.O. exata, existe uma função f(x , y) tal que

df = $\frac{\partial f}{\partial x}$ dx + $\frac{\partial f}{\partial y}$ dy = P(x , y) dx + Q(x , y) dy, logo P(x , y) = $\frac{\partial f}{\partial x}$ e Q(x , y) = $\frac{\partial f}{\partial y}$, de modo que $\frac{\partial P}{\partial y}$ = $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ = $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Mas, $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ são contínuas, e assim $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ = $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Agora, admitiremos que P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ são funções contínuas e $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ para mostrar que existe uma função f(x , y) tal que df(x . y) = P(x , y) dx + Q(x , y) dy e assim garantindo que a E.D.O. é exata.

Começamos fazendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ = P(x , y) o que acarreta ∂f = P(x , y) dx, donde f(x , y) = $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$ + $\varphi(y)$, onde $\varphi(y)$ é uma função a ser determinada.

Mas, $\frac{\partial f}{\partial y}$ = $\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \phi(y)\right]$ = $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}dx + \phi'(y)$ e como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ vem $\frac{\partial f}{\partial y}$ = $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \phi'(y)$ = Q(x , y) - Q(x_0 , y_0) + $\varphi'(y)$.

Como queremos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ = Q(x , y), podemos fazer - Q(x_0 , y_0) + $\varphi'(y)$ = 0 ou $\varphi'(y)$ = Q(x_0 , y) ou ainda $\varphi(y)$ = $\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$.

Portanto, existe uma função f(x , y) = $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$ + $\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$, tal $\frac{\partial f}{\partial x}$ dx + $\frac{\partial f}{\partial y}$ dy = P(x , y) dx + Q(x , y) dy o que prova que a E.D.O. é exata.

Exemplo:

Resolva as seguintes equações :

1) (2x – y + 1) dx - (x + 3y – 2) dy = 0

Temos P(x , y) = 2x – y + 1 e Q(x , y) = - (x + 3y – 2) como $\frac{\partial P}{\partial y}$ = - 1 = $\frac{\partial Q}{\partial x}$ então a equação é exata.

Mas $\frac{\partial f}{\partial x}$ = 2x – y + 1 $\Rightarrow$ ∂ f = (2x – y + 1) dx , e assim temos que f(x , y) = $\int (2x - y + 1)dx$ + $\varphi(y)$ = x^2 – xy + x + $\varphi(y)$, onde $\varphi(y)$ é uma função a ser determinada.

Ademais, $\frac{\partial f}{\partial y}$ = Q(x , y) $\Rightarrow$ - x + $\varphi'(y)$ = - x – 3y + 2 $\Rightarrow$ $\varphi'(y)$ = – 3y + 2 o que implica em $\varphi(y)$ = $\int (-3y + 2)dy$ = - $\frac{3}{2}y^2$ + 2y

Portanto, a solução geral será $f(x, y) = x^2 - xy + x - \frac{3}{2}y^2 + 2y + k$, onde $k \in R$.

2) $(2x \cos y)\,dx = x^2 \operatorname{sen} y\,dy$

Temos que $(2x \cos y)\,dx - x^2 \operatorname{sen} y\,dy = 0$, de modo que

$P(x, y) = 2x \cos y$, $Q(x, y) = -x^2 \operatorname{sen} y$ sendo $\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

logo a E.D.O. é exata.

Mas $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y \Rightarrow \partial f = 2x \cos y\,dx \Rightarrow f(x, y) = \int 2x \cos y\,dx$, logo

$f(x, y) = x^2 \cos y + \varphi(y)$.

Sendo $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$ então $-x^2 \operatorname{sen} y + \varphi'(y) = -x^2 \operatorname{sen} y \Rightarrow \varphi'(y) = 0$, de onde concluímos que $\varphi(y) = C$ e a solução geral da equação será

$f(x, y) = x^2 \cos y + C = k$, com $k \in R$.

Para refletir

1. Verifique se as seguintes equações diferenciais são exatas. Em caso afirmativo, encontre a sua solução geral :

a) $(2x - y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$

b) $(2x - 1)\,dx + (3y + 5)\,dy = 0$

c) $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$

d) $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x \cos y - y)\,dy = 0$

e) $(2y^2x - 5)\,dx + (2yx^2 + 6)\,dy = 0$

f) $(x - y)(x + y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$

g) $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)\,dx + (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy = 0$

h) $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

i) $(y.\ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$

j) $\frac{2x}{y}\,dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy = 0$

l) $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

m) $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$

2. Encontre a equação da curva que passa pelo ponto A(1 , 1) e satisfaz a equação $(x+y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0$.

3. Determine o valor de k para que seja exata a equação diferencial

$(2xy^2 + y e^x)\,dx + (2x^2 y + k e^x - 1)\,dy = 0$

4. Mostre que qualquer equação diferencial separável de primeira ordem da forma $h(y)\,dx - g(x)\,dy = 0$ é também exata.

4. Equação Diferencial Ordinária Linear

Definimos uma equação diferencial linear de primeira ordem como toda equação diferencial da forma $f_1(x)\dfrac{dy}{dx} + f_2(x)\,y = f_3(x)$, onde $f_i(x)\colon (a, b) \to R$, com i = 1, 2, 3 são funções contínuas. Se $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então podemos escrever essa equação na forma $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\,y = \dfrac{f_3(x)}{f_1(x)}$, ou ainda $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$, onde $P(x) = \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ e $Q(x) = \dfrac{f_3(x)}{f_1(x)}$.

Quando em uma equação diferencial linear de primeira ordem tivermos $Q(x) = 0$ ou $P(x)$ e $Q(x)$ constantes, então essa equação poderá ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis.

Teorema

A solução geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ é dada por $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

Prova:

Para encontrar a solução geral para uma equação diferencial da forma $\dfrac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$, vamos multiplicar toda a equação por uma função adequada , e ainda desconhecida $I(x)$, a qual chamaremos de fator integrante. Teremos:

$$I(x)\,.\,\left[\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)\right] \Rightarrow I(x)\,.\,\frac{dy}{dx} + I(x)\,.\,P(x)\,.\,y = I(x)\,.\,Q(x).$$

Se impusermos uma condição de $I(x)$ ser uma função tal que $I'(x) = I(x)\,.\,P(x)$, então poderemos afirmar que $I(x)\,.\,y' + I'(x)\,.\,y = I(x)\,.$

Q(x) , o que implicará pela regra da derivada do produto de duas funções que [I(x) . y]´ = I(x) . Q(x) .

Integrando a última equação temos I(x) . y = $\int I(x).Q(x)dx + C$ ou y = $\frac{1}{I(x)}.[\int I(x).Q(x)dx + C]$ que é a solução geral da equação diferencial considerada.

O problema de encontrar a solução geral está parcialmente resolvido, visto que essa solução geral apresentada está em função do fator integrante I(x) que ainda não conhecemos.

Para contornar esse impasse, observemos a condição imposta inicialmente, de que esse fator integrante é uma função tal que I´(x) = I(x) . P(x), ou $\frac{dI}{dx} = I.P(x)$ o que implica em $\frac{1}{I}dI = P(x)dx$. Integrando esta igualdade, temos $\int \frac{1}{I}dI = \int P(x)dx$ ou ln | I | = $\int P(x)dx$ logo I(x) = $e^{\int P(x)dx}$.

Assim, a solução geral para a equação diferencial linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$ está completa , sendo y = $\frac{1}{e^{\int P(x)dx}}.[\int .Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$ ou y = $e^{-\int P(x)dx}.[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$.

Exemplo 1:

Encontre a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 3x^2.y = 6x^2$

Solução:

O primeiro nosso passo é encontrar o fator integrante I(x) , sabendo que P(x) = 3x ^{2} e Q(x) = 6x ^{2}

Para isso devemos calcular $\int P(x)dx = \int 3x^2 dx = x^3$.

Então, I(x) = $e^{\int P(x)dx} = e^{x^3}$

Calculemos agora $\int I(x).Q(x)dx = \int e^{x^3} 6x^2 dx$.

Fazendo u = e^{x^3} , temos que $\frac{du}{dx} = e^{x^3}.3x^2 \Rightarrow$ 2.du = $e^{x^3}.6x^2dx$, portanto $\int I(x).Q(x)dx = \int 2du = 2u = 2.e^{x^3}$.

A solução geral da equação será então y = $\frac{1}{I(x)}.[\int I(x).Q(x)dx + C]$ ou y = $\frac{1}{e^{x^3}}.[2.e^{x^3} + C]$. Segue que y = 2 + C. e^{-x^3} .

Exemplo 2:

Encontre uma solução para a equação diferencial $x^2.y' + x.y = 1$, onde $x > 0$ e $y(1) = 2$.

Solução:

Veja que esse é um problema com valor inicial, que deveremos encontrar uma solução particular que satisfaçam as condições indicadas. A equação dada $x^2 . y' + x.y = 1$ é equivalente a $y' + \frac{1}{x}.y = \frac{1}{x^2}$ Temos então uma equação linear onde $P(x) = \frac{1}{x}$ e $Q(x) = \frac{1}{x^2}$

Temos $\int P(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| = \ln x$, pois $x > 0$

Assim, $I(x) = e^{\int P(x)dx}dx = e^{\ln x} = x$. Segue que

$$\int I(x).Q(x)dx = \int x.\frac{1}{x^2}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x.$$

Portanto, a solução geral da equação é $y = \frac{1}{I(x)}.[\int I(x).Q(x)dx + C]$ ou ainda $y = \frac{1}{x}.[\ln x + C] \Rightarrow y = \frac{\ln x + C}{x}$

Como $y(1) = 2$, temos que $2 = \frac{\ln 1 + C}{1} \Rightarrow C = 2$

Portanto, $y = \frac{\ln x + 2}{x}$ é a solução particular desejada

Exemplo 3:

Uma partícula de massa 10 kg desloca-se em um plano impulsionado por uma força variável com o tempo, conforme a lei de formação $F(t) = (100 \operatorname{sen} t)$ N. Sobre a partícula atua ainda uma força de atrito de valor $F_a = 10v$ N, onde v é a velocidade da partícula em um tempo t, expressa em m/s. Sabendo que em t = 0 a partícula está parada na origem, calcule:

a) A velocidade da partícula em um tempo t.

b) O espaço percorrido em um tempo t.

Solução:

(a) Pela segunda lei de Newton temos que $m.a = \sum F$ ou $m.\frac{dv}{dt} = F(t) - F_a$, onde o sinal negativo na força de atrito tra duz o sentido contrário ao movimento.

Portanto, 10. $\frac{dv}{dt}$ = 100.sen t - 10 v $\Rightarrow$ $\frac{dv}{dt}$ + v = 10 sen t, que é uma equação diferencial linear de primeira ordem onde P(t) = 1 e Q(t) = 10 sen t.

O fator integrante é I(t) = $e^{\int P(t)dt}$ = $e^{\int dt}$ = e^t, e portanto a solução geral será dada por v(t) = e^{-t} $\left[\int 10sent.e^t dt + C_1\right]$ ou v(t) = e^{-t} [5e^t (sen t - cos t) + C_1].

Quando t = 0 temos v = 0 e assim teremos que C_1 = 5, sendo a velocidade em cada instante dada por v(t) = e^{-t} [5e^t (sen t - cos t) + 5].

(b) Sabendo que v(t) = $\frac{ds}{dt}$ = e^{-t} [5e^t (sen t - cos t) + 5], temos que ds = e^{-t} [5e^t (sen t - cos t) + 5] dt $\Rightarrow$ s(t) = $\int\left[5(sent - \cos t) + 5e^{-t}\right]dt$, logo s(t) = 5(- cos t + sen t) - 5e^{-t} + C_2

Quando t = 0 , temos s(0) = 0 de onde tiramos que C_2 = 10 , e portanto s(t) = 5(- cos t + sen t) - 5e^{-t} + 10 metros.

Exemplo 4:

Suponha que em um circuito elétrico simples a resistência seja R = 12 Ω e a indutância seja L = 4 H . Se uma pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e o interruptor for fechado quando t = 0 , então a corrente começa com I(0) = 0 . Encontre I(t) e o valor da corrente depois de 1 seg.

Solução:

Sendo L = 4 ; R = 12 e E = 60 , então temos que:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}.I = \frac{E}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{12}{4}.I = \frac{60}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} + 3.I = 15.$$

Como P(t) = 3 e Q(t) = 15 , então :

$\int P(t)dt = \int 3dt = 3t \;\Rightarrow\; e^{\int P(t)dt} = e^{3t}$ é o fator integrante.

$$\int I(t).Q(t)dt = \int e^{3t}15dt = 5e^{3t} .$$

Portanto, a solução geral dessa equação é

I(t) = $\frac{1}{e^{3t}}[\int e^{3t}15dt] = \frac{1}{e^{3t}}[5.e^{3t} + C]$ ou I(t) = 5 + C.e^{-3t} .

Se I(0) = 0, então 0 = 5 + C. e^{-3t} $\Rightarrow$ C = - 5 e I(t) = 5(1 - e^{-3t}) $\Rightarrow$ I = 4,75 A .

Atividades de avaliação

1. Encontre a solução geral das equações abaixo:

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

b) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

c) $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$

d) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

e) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = y + e^{x}$

g) $x^2 y' + xy = 1$

h) $y' = 2y + x^2 + 5$

i) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

j) $x\,dy = (x \operatorname{sen} x - y)\,dx$

k) $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

l) $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{cotg} x = 2\cos x$

m) $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 + x$

n) $x^2 y' + x(x+2)y = e^{x}$

o) $x y' + 2y = e^{x} + \ln x$

p) $(1+x)y' - xy = x + x^2$

2. Uma equação diferencial não linear da forma $\dfrac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x).y^n$ é chamada equação de Bernoulli em homenagem ao seu descobridor, o matemático francês James Bernoulli. Observe que para $n = 0$ ou $n = 1$, a equação se torna linear.

Mostre que para outros valores de n, a substituição $u = y^{1-n}$ transforma uma equação de Bernoulli em uma equação linear de primeira ordem. Use esse método para determinar a solução geral das equações:

a) $x.y' + y = -x.y^2$

b) $y' + \dfrac{2}{x}.y = \dfrac{y^3}{x^2}$

c) $y' + y = x.y^3$.

3. Em um circuito simples, uma pilha fornece uma voltagem constante de 40 V, a indutância é 2 H, a resistência é 10 Ω e $I(0) = 0$. Encontre a função $I(t)$ e calcule o valor da corrente depois de 0,1 seg.

4. Em um circuito simples, um gerador fornece uma voltagem $E(t) = 40.\operatorname{sen} 60t$ volts, a indutância é 1 H, a resistência é 20 Ω e $I(0) = 1$ A. Encontre a função $I(t)$ e determine o valor da corrente depois de 1 seg.

Capítulo 3

Equações Diferenciais Ordinárias lineares de segunda ordem

Objetivos

- Estudar as equações diferenciais lineares de segunda ordem em todas as suas formas, e suas aplicações.
- Resolver equações lineares de segunda ordem incompleta.
- Trabalhar com operadores diferencias lineares.
- Estudar equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas a coeficientes constantes.
- Aprender equações diferenciais lineares homogêneas de ordem superior.
- Fazer aplicações de equações diferenciais de 2ª ordem.

1. Definição

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é uma equação da forma $f_1(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + f_2(x)\dfrac{dy}{dx} + f_3(x)y = f_4(x)$, onde $f_i(x): (a, b) \rightarrow R$, com $i = 1, 2, 3, 4$ são funções contínuas.

Se $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então podemos escrever essa equação na forma $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{f_3(x)}{f_1(x)}y = \dfrac{f_4(x)}{f_1(x)}$.

Fazendo $P(x) = \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$; $Q(x) = \dfrac{f_3(x)}{f_1(x)}$ e $f(x) = \dfrac{f_4(x)}{f_1(x)}$, obteremos a forma mais usual de uma equação diferencial linear de segunda ordem: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P(x)\dfrac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$.

Para se determinar todas as soluções de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, desde que tais soluções existam, é um problema árduo. No entanto, exceto para poucos tipos de equação, é impossível expressar tais soluções em termos de funções conhecidas. Portanto, o estudo sistemático das equações diferenciais de segunda ordem deve ser dirigido no sentido de analisar o comportamento geral de suas soluções, na falta de teorias específicas para exibi-las. Estudaremos apenas as equações diferenciais lineares.

1.1 Equações de Segunda Ordem Incompletas

Há quatro tipos de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem incompletas, que apresentaremos e mostraremos como encontrar suas soluções.

1º Tipo: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

Para encontrar a solução geral desse tipo de equação, devemos lembrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = f(x)$. Segue que $d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = f(x)\,dx$, que integrando obtém-se $\dfrac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_0$.

Fazendo $\int f(x)dx = F(x)$, teremos que $\dfrac{dy}{dx} = F(x) + C_0$.

Multiplicando os membros da igualdade por dx, temos que $dy = (F(x) + C_0)\,dx$.

Integrando esta equação obtemos $y = \int [F(x) + C_o]dx + C_1$ que é a solução desejada.

Exemplo 1:
Encontre a solução geral da equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x^2$
Solução:

Se fizermos $\dfrac{dy}{dx} = u(x)$, teremos $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{du}{dx}$ o que implica em $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$, logo $du = 3x^2dx \Rightarrow u = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$.

Agora temos $\dfrac{dy}{dx} = u(x) = x^3 + C_1 \Rightarrow dy = (x^3 + C_1)\,dx$, de onde tiramos que $y = \int (x^3 + C_1)dx \Rightarrow y = \dfrac{x^4}{4} + C_1x + C_2$.

Exemplo 2:
Encontre uma solução y(x) para a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\pi$, de modo que $y'(0) = 1$ e passe pelo ponto $P(0, 2)$.

Solução:

Seguindo a mesma linha de raciocínio do exemplo anterior, façamos $\dfrac{dy}{dx}$ = u(x), de onde teremos $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{du}{dx}$ o que implica em $\dfrac{du}{dx} = 2\pi \Rightarrow$ $u = \int 2\pi dx$, logo $u(x) = 2\pi x + C_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\pi x + C_1$

Uma das condições iniciais dadas, é que $y'(0) = 1$, o que acarreta dizer que quando x = 0 teremos $\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow C_1 = 1$, portanto $\dfrac{dy}{dx} = 2\pi x + 1$.

Multiplicando por dx ambos os membros da equação, teremos $dy = (2\pi x + 1)\, dx$, e assim $y = \int (2\pi x+1)dx \Rightarrow y = \pi x^2 + x + C_2$

Como a solução que queremos deve passar pelo ponto P(0 , 2), então y = 2 quando x = 0, e assim $C_2 = 2$, logo $y = \pi x^2 + x + 2$.

2º Tipo: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$

Para resolver esse tipo de equação devemos fazer $\dfrac{dy}{dx} = p$, o que implicará em $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}.\dfrac{dy}{dx} = p.\dfrac{dp}{dy}$ segue que $p.\dfrac{dp}{dy} = f(y)$.

Multiplicando ambos os membros por dy, resulta que $p.dp = f(y).dy$. Integrando esta equação obtemos:

$$\int p.dp = \int f(y)dy \quad \text{ou} \quad \frac{p^2}{2} = \int f(y)dy + C_0 \quad \text{ou ainda}$$

$$p = \pm\sqrt{F(y)+2C_0}\,, \quad \text{onde } F(y) = 2.\int f(y)dy\,.$$

Mas, $p = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{F(y)+2C_0}$ que é uma equação diferencial ordinária com variáveis separáveis.

Exemplo 1:

Solucione a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -w^2 y$.

Solução:

Sendo $\dfrac{dy}{dx} = p$, temos que $p.\dfrac{dp}{dy} = -w^2 y \Rightarrow p.dp = -w^2 y.dy$, que integrando resulta em $\int p.dp = -w^2\int y.dy \Rightarrow \dfrac{p^2}{2} = -\dfrac{w^2}{2}.y^2 + C_0$ ou ainda

$P = \pm\sqrt{K^2 - w^2y^2}$, onde $K^2 = 2.C_0$.

Então $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{K^2 - w^2y^2}$ que separando as variáveis temos

$$\frac{dy}{\sqrt{K^2-(wy)^2}} = \pm\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{K^2-(wy)^2}} = \pm \int dx$$

Resolvendo essas duas integrais obtemos $\frac{1}{w}$. arcsen$\frac{wy}{K} = \pm\ x + C_1$, de onde tiramos que $y = \frac{K}{w}$. sen($\pm$ w.x + w.C_1)

Exemplo 2:

Encontre a solução geral de $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.y^{-3}$

Solução:

Fazendo $\frac{dy}{dx} = p$, temos que p. $\frac{dp}{dy} = 4y^{-3} \Rightarrow$ p.dp $= 4y^{-3}$.dy, de modo que $\int pdp = 4.\int y^{-3}dy \Rightarrow \frac{p^2}{2} = -2.y^{-2} + C_0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{w^2 - 4y^{-2}}$, com $w^2 = 2C_0$

Então $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{w^2 - 4y^{-2}}$ é uma equação com variáveis separáveis, e podemos escrever $\frac{dy}{\sqrt{w^2-4y^{-2}}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{w^2-4y^{-2}}} = \pm \int dx$, ou

$$\int \frac{dy}{\sqrt{w^2 - \frac{4}{y^2}}} = \pm x + C_1 \Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{w^2y^2-4}} = \pm x + C_1 \text{ ou ainda } \frac{\sqrt{w^2y^2-4}}{w^2} = \pm x + C_1,$$

que é a solução desejada.

3º Tipo: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$

Para solucionar esse tipo de equação, devemos tomar $\frac{dy}{dx} = p$ que substituindo na equação, em geral, resulta em uma equação diferencial de primeira ordem.

Exemplo:

Encontre a solução da equação $x.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\frac{dy}{dx} = x^3$

Solução:

A equação pode ser escrita na forma $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}.\frac{dy}{dx} = x^2$, e fazendo $\frac{dy}{dx} = p$ obteremos $\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}.p = x^2$ que é uma equação diferencial linear de primeira ordem, onde temos $P(x) = \frac{2}{x}$ e $Q(x) = x^2$

O fator integrante dessa equação é $I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2dx}{x}} = e^{2\ln x} = x^2$

Assim, $p = \frac{1}{I(x)}.[\int I(x).Q(x)dx + C_1] = \frac{1}{x^2}.[\int x^2.x^2dx + C_1] =$

$\frac{1}{x^2}.\int x^4dx + \frac{C_1}{x^2}$ $p = \frac{1}{5}x^5 + \frac{C_1}{x^2}$

Como $\frac{dy}{dx} = p$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x^5 + \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow dy = [\frac{1}{5}x^5 + \frac{C_1}{x^2}]dx$, logo

$y = \int [\frac{1}{5}x^5 + \frac{C_1}{x^2}]dx \Rightarrow y = \frac{x^{26}}{30} - \frac{C_1}{x} + C_2$

4º Tipo: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$

A solução desse tipo de equação deve seguir um método semelhante ao utilizado no modelo anterior, fazendo-se $\frac{dy}{dx} = p$, e assim $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p.\frac{dp}{dy}$. Assim a equação ficará na forma $p.\frac{dp}{dy} = f(y, \frac{dy}{dx})$, que, em geral, é uma equação com variáveis separáveis.

Exemplo:

Resolva a equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

Solução:

Fazendo $\frac{dy}{dx} = p$, temos $\frac{d^2y}{dx^2} = p.\frac{dp}{dy}$ que substituindo na equação resulta $p.\frac{dp}{dy} - 2yp = 0 \Rightarrow dp = 2y\,dy \Rightarrow p = \int 2ydy \Rightarrow p = y^2 + c^2$.

Sendo $p = \frac{dy}{dx}$, teremos $\frac{dy}{dx} = y^2 + c^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2+c^2} = dx$, onde

$\int \frac{dy}{y^2+c^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{c}.\text{arctg}\frac{y}{c} = x + k \Rightarrow y = c.\text{tg}(c.x + c.k)$.

Para refletir

1. Determine a solução das seguintes equações diferenciais:

a) $y'' = e^{2x} + \cos 2x$

b) $y'' - 4 = (y')^2$

c) $y'' = y$

d) $y'' - 2y.y' = 0$

e) $2y.y'' = (y')^2 - 1$

f) $y'' = [(y')^2 + b^2]^{2/3}$

2. Operadores Diferenciais Lineares

O estudo de espaços vetoriais reais pode ser descrito como uma generalização de algumas idéias da Geometria Analítica, mas essa concepção muda, tão logo estas idéias sejam utilizadas para estudar funções definidas em espaços vetoriais. As funções mais simples, porém mais importantes, que aparecem no estudo de espaços vetoriais são conhecidas como transformações lineares.

Uma **Transformação linear** ou **Operador linear** de um espaço vetorial V em outro espaço vetorial W é uma função $L : V \to W$ que associa cada elemento $v \in V$ a um único elemento $L(v) \in W$, satisfazendo as propriedades:

P. 1 $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

P. 2 $L(k.v_1) = k.L(v_1), \ \forall\ k \in R$

Transformações lineares que envolvem derivadas de funções e suas potências, são chamadas de **Operadores Diferenciais Lineares**, que representaremos por $D = \dfrac{d}{dx}$

O estudo de tais operadores leva naturalmente à teoria das equações diferenciais lineares.

Seja I um intervalo da reta, e para cada inteiro não-negativo **n** seja $C^n(I)$ o espaço vetorial de todas as funções com valores reais que tenham derivadas de ordem n contínuas em I.

Uma transformação linear $L : C^n(I) \to C(I)$ se diz um operador linear de ordem n em I se puder ser colocado na forma $L = a_n(x)D^n + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)$, onde os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ são funções contínuas em I e $a_n(x)$ não é identicamente nula em I.

Um operador diferencial, quando aplicado a um conjunto de funções $y \in C^n(x)$, nos permite definir naturalmente uma equação diferencial linear de ordem n em um intervalo I, como $L[y] = [a_n(x)D^n + ... + a_1(x)D + a_0(x)]y = f(x)$ ou $a_n(x)D^n y + ... + a_1(x)Dy + a_0(x)y = f(x)$, onde f(x) é uma função contínua em I.

Se $f(x) \equiv 0$ então dizemos que a equação diferencial linear $L[y] = 0$ é homogênea.

A seguir estudaremos as equações diferenciais lineares homogêneas a coeficientes constantes, isto é, equações da forma $a_n D^n y + ... + a_1 D y + a_0 y = 0$ onde a_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$ são constantes reais e $a_n \neq 0$. Tais equações aparecem com freqüência em problemas físicos e justifica o lugar que elas ocupam na teoria das equações diferenciais.

Consideremos o operador $L = a_n D^n + ... + a_1 D + a_0 D^0$, onde $D^0 = 1$; $D = \frac{d}{dx}$; .... ; $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ e a_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$ são constantes reais e $a_n \neq 0$. Então, o operador $L[y] = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0$ e o polinômio $P(r) = a_n r^n + ... + a_1 r + a_0$, chamado polinômio auxiliar ou polinômio característico do operador $L[y]$ gozam das mesmas propriedades.

Exemplo 1:

Escreva a equação $(D^2 + D + 4)y = e^x$ na notação usual.

Solução:

$(D^2 + D + 4)y = e^x \quad \Rightarrow \quad D^2(y) + D(y) + 4y = e^x$

Mas, $D^2(y) = \frac{d^2y}{dx^2}$; $D(y) = \frac{dy}{dx}$; portanto podemos representar a equação na forma $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y = e^x$ ou $y'' + y' + 4y = e^x$

Exemplo 2:

Calcule $(3D^2 + 2D + 2)(\text{sen}\, x)$.

Solução:

Temos $(3D^2 + 2D + 2)(\text{sen}\, x) = 3D^2(\text{sen}\, x) + 2D(\text{sen}\, x) + 2\,\text{sen}\, x = -3\,\text{sen}\, x + 2\cos x + 2\,\text{sen}\, x = -\text{sen}\, x + 2\cos x$.

Para refletir

1. Calcular cada uma das expressões seguintes:

a) $(D2 + D)\, e^{2x}$

b) $(3D2 + 2D + 2)\,\text{sen}\, x$

c) $(xD - x)(2\ln x)$

d) $(D + 1)(D - x)(2e^x + \cos x)$

2. Escreva cada um dos operadores diferenciais lineares na forma $a_n(x)D^n + ... + a_1(x)D + a_0(x)$

a) (D 2 + 1)(D - 1)

b) xD(D - x)

c) (xD 2 + D) 2

d) D 2 (xD - 1) D

3. Mostre que D(xD) $\neq$ (xD)D .

4. Decomponha cada um dos operadores diferenciais lineares num produto de fatores irredutíveis de ordem menor , isto é , em fatores que não admitem mais decomposição .

a) D 2 - 3D + 2

b) 2D 2 + 5D + 2

c) 4D 2 + 4D + 1

d) D 3 - 3D 2 + 4

e) 4D 4 + 4D 3 - 7D 2 + D - 2

f) D 4 - 1

5. Em cada um dos casos , verifique se a função dada é solução da equação diferencial

a) xy'' + y' = 0 ; y = ln(1/x)

b) (1 - x 2)y'' - 2xy' + 6y = 0 ; y = 3x 2 - 1 .

c) x 2 y'' - x y' + y = 1 ; y = 1 + 2xln x .

3. Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem Homogêneas a Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial linear de segunda ordem a coeficientes constantes é uma equação do tipo $L[y] = (D^2 + a_1 D + a_2)(y) = 0$, onde a_1 e a_2 são constantes.

Observe que a equação polinomial auxiliar correspondente ao operador diferencial linear $L[y] = 0$ é $p(r) = 0$ ou $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, de modo que essa equação pode ter duas raízes reais, uma raiz real com multiplicidade ou duas raízes complexas conjugadas.

Para encontrar a solução geral da equação $L[y] = 0$ devemos estudar o polinômio auxiliar $p(r)$ quanto ao número de raízes, e por isso devemos considerar três casos.

Caso I: O polinômio auxiliar possui duas raízes reais e distintas.

De $(D^2 + a_1 D + a_2)(y) = 0$ segue-se que $(D - a).(D - b)y = 0$ onde a e b são duas raízes reais distintas de $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$

Fazendo $(D-b)y = u$, teremos $(D-a)u = 0$ ou $\frac{du}{dx} - au = 0$

Separando as variáveis e integrando teremos que $\int \frac{du}{u} = a.\int dx$ ou $\ln|u| = a.x + c$ ou ainda $u = c_0.e^{ax}$, onde $c_0 = e^c$

Como $(D-b)y = u = c_1.e^{ax}$, então temos que $\frac{dy}{dx} - by = c_0.e^{ax}$ que é uma equação diferencial linear de primeira ordem com $P(x) = -b$ e $Q(x)$_= $c_0.e^{ax}$ e fator integrante $I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-b\int dx} = e^{-bx}$

A solução geral da equação será portanto $y = \frac{1}{I(x)}.[\int I(x).Q(x)dx + c]$,

logo $y = \frac{1}{e^{-bx}}.[\int e^{-bx}.c_0 e^{ax}dx + c_2] = c_0.e^{bx}[\int e^{(a-b)x}dx + c_2] = c_0.e^{bx}.[\frac{e^{(a-b)x}}{a-b} + c_2]$ $y = \frac{c_0}{a-b}.e^{bx}.\frac{e^{ax}}{e^{bx}} + c_2 e^{bx} \Rightarrow y = c_1.e^{ax} + c_2.e^{bx}$, com $c_1 = \frac{c_0}{a-b}$,

que é a solução geral desejada.

Exemplo 1:

Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$

Solução:

O primeiro passo para se solucionar esse tipo de equação é tomar a equação auxiliar e determinar as suas raízes . Essa equação diferencial tem equação característica $m^2 - 5m + 6 = 0$, cujas raízes são $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

A solução geral da equação diferencial é portanto $y = c_1.e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$ ou $y = c_1.e^{2x} + c_2.e^{3x}$

Exemplo 2:

Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' + 5y' = 0$

Solução:

Equação auxiliar: $m^2 + 5m = 0$ cujas raízes são $\alpha = 0$ e $\beta = -5$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é $y = c_1.e^{0x} + c_2.e^{-5x}$ ou $y = c_1. + c_2.e^{-5x}$

Exemplo 3:

Encontre a solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ cuja inclinação da reta tangente no ponto $P(0, 2)$ é 3.

Solução:

A equação auxiliar dessa equação é $m^2 - 3m + 2 = 0$, cujas raízes são $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, portanto a solução geral da equação diferencial é $y = c_1 . e^x + c_2 . e^{2x}$.

Para determinar a solução particular que passa pelo ponto $P(0 , 2)$ e tem nesse ponto inclinação 3, devemos fazer :

i) $x = 0$ e $y = 2$, logo $2 = c_1 . e^0 + c_2 . e^0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2$.

ii) $\dfrac{dy}{dx} = 3 \Rightarrow c_1 . e^x + c_2 . 2e^{2x} = 3 \Rightarrow c_1 . e^0 + c_2 . 2e^0 = 3$, logo $c_1 + 2c_2 = 3$.

iii) $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = e^x + e^{2x}$ é a solução particular da equação que queríamos determinar.

Caso II: O polinômio auxiliar possui duas raízes reais e iguais.

No desenvolvimento do primeiro caso, chegamos a uma equação diferencial de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} - by = c_0.e^{ax}$ com fator integrante $I(x) = e^{-bx}$. Multiplicando essa equação por seu fator integrante, obteremos $e^{-bx}\dfrac{dy}{dx} - b e^{-bx} y = c_0.e^{(a-b)x}$ ou ainda $\dfrac{d}{dx}(e^{bx}y) = c_0.e^{(a-b)x}$.

Se as duas raízes forem iguais, ou seja $a = b$, então $\dfrac{d}{dx}(e^{bx}y) = c_0$, que separando as variáveis obteremos $\int \dfrac{d}{dx}(e^{bx}y) = c_0 \int dx \Rightarrow e^{-bx}.y = c_0.x + c_1$ ou $y = (c_0.x + c_1).e^{bx}$ que é a solução geral desejada.

Exemplo 1:

Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solução:

A equação característica da equação diferencial é $m^2 + 6m + 9 = 0$ ou $(m + 3)^2 = 0$, cuja única raiz é $a = -3$.

A solução geral será portanto $y = (c_1 + c_2 . x)\, e^{-3x}$

Caso III: O polinômio auxiliar possui duas raízes complexas.

Sejam $\alpha = a + b.i$ e $\beta = a - b.i$ as duas raízes conjugadas do polinômio auxiliar $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$. Como elas são distintas, a solução geral da equação será

$y = c_1 . e^{\alpha x} + c_2 . e^{\beta x} \Rightarrow y = c_1 . e^{(a+bi)x} + c_2 . e^{(a-bi)x}$ ou ainda

$y = c_1 . e^{ax}.e^{ibx} + c_2 . e^{ax}.e^{-ibx} \Rightarrow y = e^{ax}.[c_1 . e^{ibx} + c_2 . e^{-ibx}]$

Pela fórmula de Euler da teoria das funções de variáveis complexas e^{ix} = cos x + i.sen x podemos reescrever essa expressão como:

$y = e^{ax}.[c_1 . (\cos bx + i.\operatorname{sen} bx) + c_2 . (\cos bx - i.\operatorname{sen} bx)]$

$y = e^{ax}.[(c_1 + c_2) \cos bx + i.(c_1 - c_2) \operatorname{sen} bx]$

Encontramos então uma solução complexa da equação considerada. Verifique, como exercício, que se y = u + iv é uma solução complexa de uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constante, então também u e v são soluções (reais) desta equação. Além disso a.u + b.v também é solução.

Das considerações acima concluímos que a solução geral da equação considerada tem a forma $y = e^{ax}. [k_1 \cos bx + k_2 \operatorname{sen} bx]$, onde $k_1 = c_1 + c_2$ e $k_2 = c_1 - c_2$.

Exemplo 1:

Encontre a solução geral da equação y '' - 4 y ' + 13 y = 0.

Solução:

O polinômio auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ possui duas raízes complexas $\alpha = 2 + 3i$ e $\beta = 2 - 3i$, logo temos a = 2 e b = 3 de modo que a solução geral será

$y = e^{2x}. [k_1 \cos 3x + k_2 \operatorname{sen} 3x]$

Caso Particular: O segundo membro da equação diferencial é uma constante

Analisaremos agora um caso em que a equação diferencial linear de segunda ordem é não homogênea, e tem como segundo membro uma constante, sendo portanto da forma

$(D^2 + a_1 D + a_2)(y) = k.$

Passando-se essa constante k para o primeiro membro e adicionando com o termo em y, iremos obter uma equação da forma $D^2 y + a_1 Dy + (a_2 y - k) = 0$, que com um pequeno artifício recairemos nos casos precedentes.

Fazendo $u = a_2 y - k$, teremos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{a_2}.\dfrac{du}{dx} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{a_2}.\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

A equação diferencial passa a ser agora $\dfrac{1}{a_2}.\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{a_1}{a_2}.\dfrac{du}{dx} + u = 0$

que é uma equação diferencial linear homogênea.

Exemplo:

Encontre a solução geral da equação $\frac{d^2y}{dx^2}$ - 4$\frac{dy}{dx}$ + 2y = 4.

Solução:

Vamos escrever a equação na forma $\frac{d^2y}{dx^2}$ - 4$\frac{dy}{dx}$ + (2y – 4) = 0, para em seguida fazermos u = 2y – 4. Teremos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{du}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}.\frac{d^2u}{dx^2}$.

Substituindo estes valores na equação inicial, temos $\frac{1}{2}.\frac{d^2u}{dx^2} - 2.\frac{du}{dx} + u = 0$ ou $\frac{d^2u}{dx^2} - 4.\frac{du}{dx} + 2u = 0$, que é uma equação homogênea de segunda ordem, cujo polinômio auxiliar é $p(r) = r^2 - 4r + 2$, que possui duas raízes reais $a = 2 + \sqrt{2}$ e $b = 2 - \sqrt{2}$. A solução geral é então $u = c_1.\, e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2.\, e^{(2-\sqrt{2})x}$.

Como 2y – 4 = u, então $y = \frac{1}{2}.u + 2 \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2}(c_1.\, e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2.\, e^{(2-\sqrt{2})x}) + 2.$$

Para refletir

1. Ache a solução geral de cada uma das equações diferenciais .

a) $y'' + y' - 2y = 0$

b) $3y'' - 5y' + 2y = 0$

c) $8y'' + 14y' - 15y = 0$

d) $y'' - 2y' = 0$

e) $y'' + 4y' + 8y = 0$

f) $y'' + 4y = 0$

g) $3y'' + 2y = 0$

h) $4y'' - 4y' + 3y = 0$

i) $y'' - 2y' + 2y = 0$

j) $9y'' - 12y' + 4y = 0$

k) $y'' + 2y' + 4y = 0$

l) $2y'' - 2\sqrt{2}\,y' + y = 0$

m) $9y'' + 6y' + y = 0$

2. Encontre as soluções para os problemas de valor inicial dados .

a) $2y'' - y' - 3y = 0$; $y(0) = 2$ e $y'(0) = -\frac{7}{2}$

b) $y'' - 8y' + 16y = 0$; $y(0) = \frac{1}{2}$ e $y'(0) = -\frac{1}{3}$

c) $4y'' - 4y' + 13y = 0$; $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$

d) $9y'' - 3y' - 2y = 0$; $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$.

3. Ache uma equação diferencial linear de segunda ordem a coeficientes constantes cuja solução geral é :

a) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

b) $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x}$

c) $y = (c_1 + c_2 x) e^{-5x}$

d) $y = c_1 \operatorname{sem} 2x + c_2 \cos 2x$

4. Equações Diferenciais Homogêneas de ordem superior

A técnica usada para resolução de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, pode ser estendida para a resolução de equações de mesmas características , com ordem superior a dois. Essa afirmação se justifica pelo fato de um operador diferencial a coeficientes constantes na forma de um polinômio diferencial, ter as mesmas propriedades operatórias dos polinômios algébricos .

Por outro lado , sabemos que todo polinômio algébrico de grau superior a dois pode ser fatorado como produto de polinômios de graus um e dois, com ou sem multiplicidades, propriedade esta que pode ser aplicada aos polinômios diferenciais.

Vejamos por exemplo, como encontrar a solução geral da equação diferencial

$$(D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = 0$$

primeiro decompomos o operador em fatores lineares e quadráticos, obtendo-se uma equação equivalente

$$(D - 1)^2 (D^2 + 1)y = 0$$

de onde tiramos duas equações de segunda ordem $(D - 1)^2 y = 0$ e $(D^2 + 1)y = 0$, que resolvidas separadamente obtemos $y = (c_1 + c_2 x) e^x$ e $y = c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x$, respectivamente como solução.

Assim, a solução geral da equação diferencial dada é :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x .$$

Observe que essa solução geral, pelo fato de a equação ser de ordem quatro, é composta por uma combinação de quatro soluções particulares e^x, xe^x, sen x e cos x.

Para os casos de equações com multiplicidade de raízes, a solução geral deve ser obtida conforme os seguintes exemplos.

Exemplo 1:

$(D-1)^5 y = 0$

Solução:

Essa equação tem equação auxiliar $(m-1)^5 = 0$, com uma única raíz real $\alpha = 1$ e multiplicidade 5, de tal forma que a solução geral da equação diferencial é

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 x^4 e^x$ ou

$y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4)$.

Exemplo 2:

$(D^2 + 1)^2 y = 0$

Solução:

A sua equação auxiliar é $(m^2+1)^2 = 0$ que possui duas raízes complexas $m_1 = i$ e $m_2 = -i$, com $a = 0$ e $b = 1$, e multiplicidade 2, de modo que as soluções particulares da equação diferencial serão sen x, cos x, x.sen x e x.cos x.

Portanto, sua solução geral é

$y = c_1$ sen x + c_2 cos x + c_3 x.sen x + c_4 x.cos x ou

$y = (c_1 + c_3 x)$.sen x + $(c_2 + c_4 x)$.cos x .

Exemplo 3:

$(D^7 - 4D^5 + 4D)y = 0$

Solução:

A equação característica dessa equação diferencial é $m^7 - 4m^5 + 4m^3 = 0$

ou $m^3(m^4 - 4m^2 + 4) = 0$

$m^3 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ com multiplicidade 3, logo as funções resultantes dessa primeira equação característica são e^{0x}, x. e^{0x} e x^2. e^{0x}.

Da equação $m^4 - 4m^2 + 4 = 0$, que implica em $(m^2-2)^2 = 0$ temos $m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = -\sqrt{2}$ e $m = \sqrt{2}$, ambas com multiplicidade 2 , resultando nas soluções particulares $e^{\sqrt{2}x}$, x $e^{\sqrt{2}x}$, $e^{-\sqrt{2}x}$ e x. $e^{-\sqrt{2}x}$

A solução geral será portanto

$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 e^{\sqrt{2}x} + c_5 x e^{\sqrt{2}x} + c_6 e^{-\sqrt{2}x} + c_7 x.\, e^{-\sqrt{2}x}$

ou $y = c_1 + c_2 x + c_3 x_2 + (c_4 + c_5 x)\, e^{\sqrt{2}x} + (c_6 + c_7 x)\, e^{-\sqrt{2}x}$

Para refletir

1. Encontre a solução geral de cada uma das equações diferenciais:

a) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$

b) $y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$

c) $4y''' + 12y'' + 9y' = 0$

d) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$

e) $2y''' + y'' - 8y' - 4y = 0$

f) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$

g) $y^{(IV)} - y'' = 0$

h) $y^{(IV)} - 8y'' + 16y = 0$

i) $y^{(IV)} + 18y'' + 81y = 0$

j) $4y^{(IV)} - 8y''' - y'' + 2y' = 0$

l) $y^{(IV)} = 0$

m) $y^{(V)} + 2y''' + y' = 0$

n) $y^{(V)} + 6y^{(IV)} + 15y''' + 26y'' + 36y' + 24y = 0$.

2. Ache equações diferenciais lineares que tenham como solução as seguintes funções :

a) $x^2 e^{2x}$

b) $3e^{2x} \cos 2x$

c) $x(2x + 1) \operatorname{sen} x$

d) $3 + 4x - 2e^{-2x}$

e) $x^2 \operatorname{sen} x . \cos x$

f) $x^2 e^{3x} sen^2 x$

3. Verifique se a afirmação seguinte é verdadeira: O conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial linear homogênea é um espaço vetorial, com a soma de funções e o produto de um número real por uma função usuais.

5. Aplicações

As equações diferenciais lineares de segunda ordem são de grande utilidade em vários ramos das ciências, principalmente na matemática e na física. Apresentaremos a seguir algumas dessas aplicações na resolução de problemas dos mais variados modelos.

5.1. Aplicações Geométricas

Exemplo 1:

Determine a equação de uma curva que passa pela origem e pelo ponto $P_0(1, 1)$ de modo que $2yy'' = (y')^2$ em cada um de seus pontos $P(x, y)$.

Solução:

Fazendo-se $\frac{dy}{dx} = p$, teremos que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p.\frac{dp}{dy}$, que substituindo na equação inicial resulta $2p.\frac{dp}{dy}.y = p^2$

Separando as variáveis obteremos $2.\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow 2.\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$ e resolvendo essa integral teremos $2 \ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1|$ ou ainda $\ln p^2 = \ln|c_1.y| \Rightarrow p^2 = c_1.y \Rightarrow p = \sqrt{c_1 y}$.

Mas, $\frac{dy}{dx} = p = \sqrt{c_1 y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{c_1}\,dx \Rightarrow \int y^{-1/2}dy = \sqrt{c_1}\int dx$ ou $2.y^{1/2} = \sqrt{c_1}(x + c_2) \Rightarrow y = \frac{c_1(x+c_2)^2}{4}$.

Usando o fato de a função passar na origem encontramos $c_2 = 0$, e o fato de passar no ponto $P_0(1, 1)$ nos leva a concluir que $c_1 = 4$, portanto teremos $y = x^2$ como solução particular.

Exemplo 2:

Ache a equação de uma curva que passa pelo ponto $(0, 2)$, onde tem uma tangente horizontal, e em todo ponto (x, y) temos sempre $y'' = y$.

Solução:

Se $y'' - y = 0$, então a equação auxiliar $m^2 - 1 = 0$ tem duas raízes reais $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, o que implica dizer que a solução geral é $y = c_1.e^x + c_2.e^{-x}$.

Como a curva passa pelo ponto $(0, 2)$, então $c_1 + c_2 = 2$, e se a inclinação da tangente $\frac{dy}{dx} = c_1.e^x - c_2.e^{-x}$ nesse ponto é horizontal, então $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = c_1 - c_2 = 0$.

Portanto, resolvendo o sistema $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$ encontramos $c_1 = c_2 = 1$, e a solução particular procurada é $y = e^x + e^{-x}$.

Exemplo 3:

Encontre a equação de uma curva que passa pelo ponto $P(3, 2)$ e cuja tangente nesse ponto tem inclinação de 45^0, sabendo-se que o raio de curvatura em um ponto qualquer é o dobro do comprimento da normal no mesmo ponto.

Solução:

Antes de iniciar o processo de resolução do problema, devemos relembrar que em um ponto qualquer (x , y) de uma curva, o raio de curvatura é

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

e que o comprimento da normal no mesmo ponto é

$$N = y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ .$$

Se o enunciado nos diz que em qualquer ponto da curva, o raio de curvatura é o dobro do comprimento da normal, então

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 2.y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

de onde tiramos que $2y.\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Fazendo $\frac{dy}{dx} = p$, teremos que $\frac{d^2y}{dx^2} = p.\frac{dp}{dy}$, que substituindo na equação vem $2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$.

Separando as variáveis obteremos $\int\frac{2pdp}{1+p^2} = \int dy \Rightarrow 1 + p^2 = c_1.y$

Como $\frac{dy}{dx} = p$ temos que $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = c_1.y$ e pelas condições iniciais dadas, para $y = 2$, $\frac{dy}{dx} = \text{tg } 45^0 = 1$, resulta que $c_1 = 1$ e assim temos $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y$

Separando novamente as variáveis nessa equação, obtém-se $\int\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int dx$, no que implica em $2\sqrt{y-1} = x + c_2 \Rightarrow y = \frac{(x+c_2)^2}{4} + 1$.

Se a curva passa pelo ponto P(3 , 2), então $c_2 = -1$, logo $y = \frac{(x-1)^2}{4} + 1$ é a solução particular.

5.2. Aplicações Diversas

Exemplo 1:

Deduzir a equação da velocidade e do movimento para uma partícula de massa m, que está caindo verticalmente de uma altura x :

a) Desprezando a resistência do ar.

b) Admitindo que a resistência do ar é proporcional à velocidade.

Solução:

Graficamente temos:

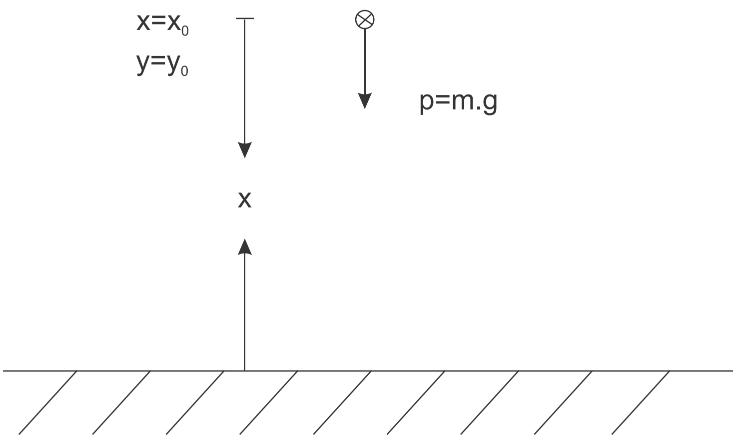

Figura 6 – Movimento em queda livre

a) Se p é o peso da partícula, então pela segunda lei de Newton $m.a = m.\frac{d^2x}{dt^2}$ ou $m.\frac{dv}{dt} = p = m.g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g \Rightarrow dv = g.dt \Rightarrow v = g.t + c_1$

Para $t = 0$ temos $v = v_0$, logo $c_1 = v_0 \Rightarrow v = g.t + v_0$.

Mas $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = g.t + v_0 \Rightarrow dx = (g.t + v_0)\,dt$

Integrando ambos os membros temos que $x = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0$, que é a equação do movimento.

Se o corpo for lançado verticalmente para cima, o sentido do movimento é inverso ao sentido da aceleração g, e a equação do movimento será $x = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0$.

b) Se a resistência do ar R é diretamente proporcional à velocidade da partícula, então R = k.v, onde k > 0 é a constante de proporcionalidade,e pela segunda lei de Newton temos m.$\frac{dv}{dt}$ = p - R = m.g - k.v ou $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$, que é uma equação diferencial linear de primeira ordem onde P(t) = $\frac{k}{m}$, Q(t) = g e o fator integrante é I(t) = $e^{\int P(x)dx} = e^{\frac{k}{m}t}$.

A solução geral é v = $\frac{1}{I(t)}.[\int I(t).Q(t)dt + c]$ ou v = $e^{-\frac{k}{m}t}[\frac{mg}{k}.e^{\frac{k}{m}t} + c_0]$

Quando t = 0, v = $v_0 \Rightarrow c_0 = v_0 - \frac{mg}{k}$ e a velocidade da partícula em um instante t será v = $v_0.e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

Para a equação do movimento temos que v = $\frac{dx}{dt} = v_0.e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$, logo separando as variáveis e integrando obtemos

x = $-\frac{mv_0}{k}.e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}) + c_1$.

Quando t = 0, temos x = x_0 logo $c_1 = x_0 + \frac{mv}{} - \frac{m^2g}{k^2}$ e a equação do movimento é x = $x_0 + \frac{mv_0}{k}.(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k})$.

Exemplo 2:

Uma força constante atua sobre um volante de Fórmula 1 de tal modo que sua aceleração angular seja de 2 rad/seg ^{2}. Se θ é o ângulo descrito pelo volante ao longo de um intervalo de tempo t, ache:

a) A função θ = f(t) , supondo que o volante parte do repouso.

b) Ao fim de quanto tempo sua velocidade será de 1000 rotações por minuto?

c) Quantas voltas terá girado ao final do primeiro minuto?

Solução:

(a) A aceleração angular é $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ rad/seg ^{2} onde $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2$ ou $\frac{dv}{dt} = 2$, onde nesse caso v é a velocidade angular.

Assim, $dv = 2\,dt \Rightarrow v = 2t + c_1$ ou $\frac{d\theta}{dt} = 2t + c_1$.

Para $t = 0$, a velocidade angular é zero, o que implica que $c_1 = 0$ e $\frac{d\theta}{dt} = 2t$.

Novamente separando as variáveis e integrando, temos $\int d\theta = \int 2t dt$ de onde tiramos que $\theta = t^2 + c_2$. Para $t = 0$ temos $\theta = 0$, pois se contam os ângulos a partir do instante inicial, e assim $c_2 = 0$. Portanto, a função procurada é $\theta = f(t) = t^2$.

(b) O número de rotações por minuto é representado por N, e sabe-se que a velocidade angular é $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\quad}{60} \Rightarrow 2t = \frac{2\pi N}{60}$, e para N = 1000 temos então que $t = \frac{1000\pi}{60}$, o que implica dizer que t = 52,4 segundos é o tempo em que a velocidade será de 1000 r.p.m.

(c) O ângulo em radianos, que o volante girou é $\theta = t^2$ e durante o primeiro minuto $\theta = 60^2 = 3600$. O número de voltas (n_v) é $n_v = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{3600}{2\pi} = 573$ voltas.

Exemplo 3:

A atração que um corpo A exerce sobre uma partícula de peso **p** é proporcional à sua distância a esse corpo. Quando a partícula está localizada em O, a uma distância AO = 10 cm abaixo do corpo A, a atração de A sobre a partícula é exatamente de mesma intensidade e oposta ao seu peso p. Ache :

a) A equação do movimento da partícula, supondo que ela foi abandonada sem velocidade inicial no ponto A.

b) Qual é a duração da oscilação da partícula ?

c) Qual a sua velocidade quando ela alcança o ponto O?

(Despreze a resistência do ar e tome G= 980 cm/ seg^2.)

Solução:

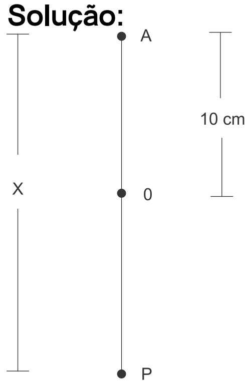

Figura 7 – Atração entre dois corpos

(a) Observando a figura verifica-se que a força atrativa para A é F = - kx orientada para cima, no sentido inverso do peso da partícula. Pela segunda lei de Newton temos

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = p - kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m}.x.$$

No ponto O temos p = 10 k ou mg = 10 k $\Rightarrow$ k = $\frac{mg}{10}$ = 98 m.

Assim, $\frac{d^2x}{dt^2} = 980 - 98x$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + 98x - 980 = 0$.

Fazendo u = 98 x - 980 resulta que $\frac{d^2u}{dt^2} = 98.\frac{d^2x}{dt^2}$ e que a equação passa a ser $\frac{1}{98}.\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + 98u = 0$ uma equação de ordem dois com equação auxiliar $m^2 + 98 = 0$ cujas raízes complexas são $m = \pm i.\sqrt{98}$, de modo que a solução geral da equação é $u = k_1.\cos\sqrt{98}\,t + k_2.\text{sen}\sqrt{98}\,t$.

Como $u = 98x - 980$ então $98x - 980 = k_1.\cos\sqrt{98}\,t + k_2.\text{sen}\sqrt{98}\,t$ o que implica que $x = \frac{1}{98}(k_1.\cos\sqrt{98}\,t + k_2.\text{sen}\sqrt{98}\,t) + 10$.

Para t = 0, x = 0 bem como $v = \frac{dx}{dt}$, logo $k_1 = -980$ e $k_2 = 0$, portanto a equação do movimento será $x = 10 - 10.\cos\sqrt{98}\,t$.

(b) O período de oscilação da partícula é $T = \frac{2\pi}{\sqrt{98}}$ = 0,63 segundos

(c) No ponto O, temos x = 10 e assim $10 = 10 - 10.\cos\sqrt{98}\,t$ logo $t = \frac{\pi}{2\sqrt{98}}$, portanto a velocidade quando a partícula atinge esse ponto é

$$v = \frac{dx}{dt} = 10.\sqrt{98}\,\text{sen}(\sqrt{98}\,\frac{\pi}{2\sqrt{98}}) = 99 \text{ cm/ seg.}$$

Exemplo 4:

Vamos considerar um pequeno objeto de massa **m** fixo em uma mola elástica de comprimento **l**, que está suspensa por um suporte rígido horizontal como na figura. Uma mola elástica tem a propriedade de que ao ser esticada ou comprimida de uma distância Δl, que é pequena comparada com o seu tamanho natural l, ela exerce uma força restauradora de módulo $k.\Delta l$, onde a constante k é chamada de constante de elasticidade.

Observe que a massa e a mola podem estar em um meio qualquer, como no ar ou em um líquido, e vamos nos referir a esse tipo de sistema como um sistema massa-mola-amortecido, e que tem aplicações diversas. Um exemplo muito característico desse tipo de sistema são os mortecedores de choque, que podem ser encontrados nos automóveis.

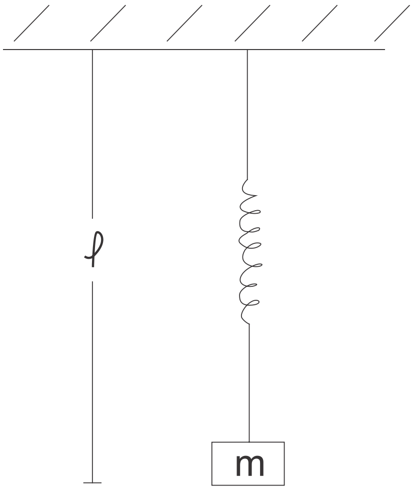

Figura 8 – Problema da mola elástica

A posição de equilíbrio da massa é o ponto em que a massa ficará suspensa, se forças externas não agirem sobre ela. Em equilíbrio, o peso $p = m.g$ é equilibrado exatamente pela força restauradora da mola, isto é, $m.g = k.\ \Delta l$.

Façamos $x = 0$ para indicar esta posição de equilíbrio e tomemos o sentido para baixo como positivo, com $x(t)$ sendo a posição da massa no instante t. Para se determinar $x(t)$, devemos calcular a força total que atua sobre a massa, e essa força é a resultante de quatro forças distintas, p, F_r, F_a e F, onde:

(i) A força $p = m.g$ é o peso da massa puxando para baixo, considerada positiva por estar no mesmo sentido de $x(t)$.

(ii) A força F_r é a força restauradora da mola, que é igual e oposta ao alongamento ou compressão $\Delta l + x$ da mola, isto é $F_r = -k(\Delta l + x)$. Observe que a força restauradora sempre atua em um sentido tal que tende a fazer o sistema voltar a sua posição de equilíbrio : se a massa está abaixo da posição de equilíbrio então $x > 0$ e assim $F_r = -k(\Delta l + x) < 0$; se a massa está acima da posição de equilíbrio, $x < 0$ e consequentemente $F_r = -k(\Delta l + x) > 0$.

(iii) A força F_a é o amortecimento que o meio exerce sobre a massa m. Esta força age sempre no sentido contrário ao sentido do movimento e é diretamente proporcional ao módulo da velocidade $\frac{dx}{dt}$. Se a velocidade é positiva, isto é, se a massa se move no sentido para baixo, então $F_a = -\alpha \cdot \frac{dx}{dt}$ será para cima e se a velocidade é negativa, a massa se deslocando para cima, então essa força $F_a = -\alpha \cdot \frac{dx}{dt}$ será negativa, agindo para baixo.

(iv) A força F é a força externa aplicada à massa m. Essa força também deverá ter um sentido dirigido para cima (F < 0) ou para cima (F > 0), sendo sempre uma função do tempo.

Pela segunda lei de Newton

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = p + F_r + F_a + F$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = m.g - k(\Delta l + x) - \alpha \cdot \frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = k\Delta l - k(\Delta l + x) - \alpha \cdot \frac{dx}{dt} + F(t) \text{ ou ainda}$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \cdot \frac{dx}{dt} + k.x = F(t)$$

Essa equação diferencial linear de segunda ordem pode ser usada como solução de qualquer problema envolvendo um sistema massa-mola, que pode variar conforme as condições do sistema.

a) Movimento Harmônico Simples

Vamos considerar inicialmente o caso mais simples do movimento livre não amortecido ou movimento harmônico simples, onde a força de amortecimento é nula, e não havendo força externa, a equação diferencial se reduz a $m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0$ ou ainda $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2.x = 0$ se fizermos $w^2 = \frac{k}{m}$.

A equação auxiliar é $r^2 + w^2 = 0$ que tem duas raízes complexas $\alpha = w.i$ e $\beta = -w.i$, de onde concluímos que a solução geral da equação será $x = c_1.\cos wt + c_2.\text{sen } wt$ ou em uma forma mais simples $x = A.\cos(w.t - \varphi)$ onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\text{tg } \varphi = \frac{c_2}{c_1}$.

Sendo $-1 \leq \cos(w.t - \varphi) \leq 1$, então x varia no intervalo [- A , A], portanto o movimento da massa é periódico, ou seja, se repete em cada intervalo de tempo $\frac{2\pi}{w}$.

Nesse tipo de movimento harmônico simples, A é chamado de amplitude do movimento, φ é o ângulo de fase do movimento, $T = \frac{2\pi}{w}$ é o período natural, sendo $f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$ ciclos/segundo a freqüência natural do sistema.

Observe que quanto maior for o valor de k, maior será a freqüência, o que indica que quanto mais rígida for a mola, mais rapidamente o corpo oscila.

A figura abaixo mostra a forma típica de $x = A.\cos(w.t - \varphi)$.

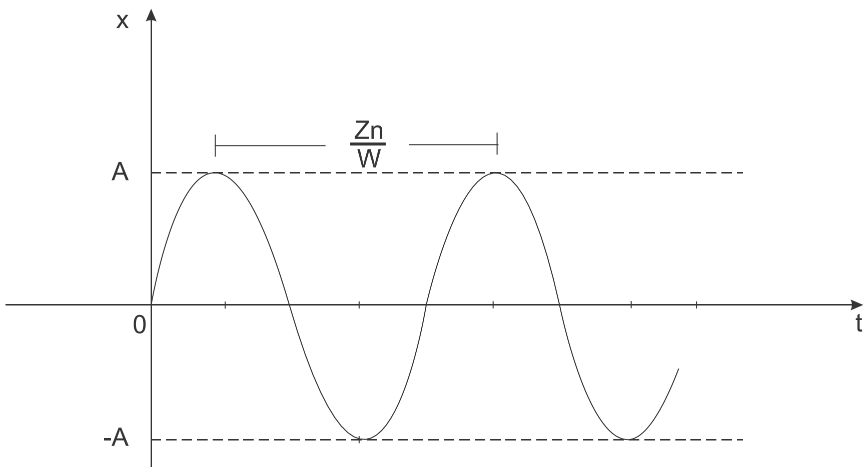

Figura 9 – Movimento harmônico

b) Movimento Amortecido

Agora, se incluirmos o efeito do amortecimento então a equação diferencial que nos dá o movimento da massa é $m.\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha . \frac{dx}{dt} + k.x = 0$.

A equação auxiliar passa a ser $m.r^2 + \alpha.r + k = 0$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m} \text{ e}$$

$$r_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m}$$

Portanto, há três casos a se considerar, dependendo do valor de α^2 - 4km ser positivo, negativo ou nulo.

Caso I (Superamortecimento)

Quando a constante de amortecimento α for tão grande, de modo que $\alpha^2 > 4km$, isso implica dizer que $\alpha^2 - 4km > 0$ e as raízes da equação auxiliar serão reais e distintas, sendo portanto $x(t) = c_1.e^{r_1 t} + c_2.e^{r_2 t}$ a solução geral da equação.

Caso II (Subamortecimento)

Se a constante de amortecimento for suficientemente pequena de modo que se tenha $\alpha^2 < 4km$, então as raízes serão imaginárias, e nesses casos a solução geral da equação será $x(t) = e^{-\frac{\alpha t}{2m}}(c_1.\cos \mu t + c_2.\text{sen } \mu t)$, onde $\mu = \frac{\sqrt{4km - \alpha^2}}{2m}$ ou ainda $x(t) = A.e^{-\frac{\alpha t}{2m}} \cos(\mu t - \varphi)$.

Esse segundo caso ocorre muito frequentemente em sistemas mecânicos e representa uma vibração com atrito.

Caso III (Amortecimento Crítico)

Dizemos que a forma de amortecimento é crítico quando ocorre $\alpha^2 = 4km$, e nesse caso teremos duas raízes reais e iguais de modo que a solução geral da equação diferencial é $x(t) = (c_1 + c_2.t)\, e^{-\frac{\alpha t}{2m}}$.

Exemplo 6:

Um pêndulo de peso p, ligado por um fio de comprimento l = 2,45 m a um eixo O, move-se verticalmente. Esse pêndulo vai oscilar e suas oscilações são amortecidas em conseqüência da resistência do ar e do atrito do eixo. Desprezando essas causas de amortecimento e admitindo g = 9,8 m/s ^{2}, calcule:

a) seu deslocamento

b) seu período

c) sua freqüência

Solução:

(a) Graficamente temos:

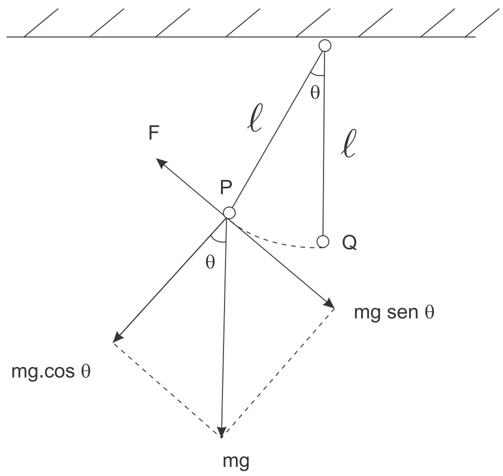

Figura 10 – problema do pêndulo

Chamaremos o arco $\overset{\frown}{PQ}$ descrito pelo pêndulo de x(t) por depender do tempo, e de F a força tangencial que faz o pêndulo subir. Assim temos que F = - m.g.sen θ de onde tiramos que m.$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ = - m.g.sen θ. Segue que $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ = - g.sen θ.

Supondo que θ é suficientemente pequeno, podemos admitir então que senθ = θ = $\dfrac{x}{l}$ no que resulta a equação $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ = - $\dfrac{gx}{l}$ ou ainda $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ + $\dfrac{g}{l}$.x = 0.

Usando os dados iniciais temos que $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ + $\dfrac{9,8}{2,45}$.x = 0 $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ + 4.x = 0.

Sua equação auxiliar é $r^2 + 4 = 0$ com raízes imaginárias $r = \pm 2i$. Portanto a solução geral da equação será x(t) = c_1.cos 2t + c_2.sen 2t.

(b) O período é T = $\dfrac{2\pi}{2}$ = π .

(c) Como a frequência é o inverso do período, então f = $\dfrac{1}{2}$

Atividades de avaliação

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \quad ; \quad x(0) = 10 \quad e \quad x'(0) = 0$$

2. Uma massa presa a uma mola de coeficiente de elasticidade k = 3,27 N/cm é solta de um ponto a 8 cm abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade direcionada para cima de 25 cm/seg. Determine a função x(t) que descreve o movimento livre subseqüente.

3. Se um peso de 10 kg distende uma mola em 2,5 cm, de quanto irá distende-la um peso de 32 kg ?

4. Qual o período do movimento harmônico simples de um peso de 8 kg atado a uma mola cuja constante vale 6,25 N/m ?

5. Se um movimento harmônico crítico é descrito pela função $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sem $(2t + \varphi)$, determine seu ângulo de fase φ quando $x(0) = -\frac{1}{2}$ e $x'(0) = 1$.

6. Uma massa de 750 gramas, atada a uma mola, provoca nesta uma distensão de 1/3 m. Encontre a equação do movimento se o peso for solto a partir do repouso, de um ponto 0,25 m acima da posição de equilíbrio.

Referências

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**, Volume I. Michael R. CULLEN ; tradução Antonio Zumpano, revisão técnica Antonio Pertence Jr. Makron Books, São Paulo, 2001.

ANTON, Howard; **Cálculo, um novo horizonte** Vol. II. Tradução Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6.ed. Porto Alegre ; Bookman, 2000.

LEITHOLD, Louis; **O Cálculo com Geometria Analítica** , Vol. I e II; 3ª edição; editora HARBRA; São Paulo 1994.

KREIDER, Donald Lester; **Equações Diferenciais.** KULLER, Robert G. e OSTBERG, Donald R. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

KREYSZIG, Erwin. **Matemática superior 1:** Equações Diferenciais Ordinárias. Tradução de Alfredo Alves de Farias 2. ed. Rio de Janeiro; LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. 1984.

Sobre o autor

Luciano Moura Cavalcante: possui Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1975) e especialização em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1977). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará e Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática.

Matemática

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78263-99-7
9 788578 263997

Universidade Estadual do Ceará
UAB Universidade Aberta do Brasil
CAPES