Matemática

Álgebra Linear

João Montenegro de Miranda

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Matemática

Álgebra Linear

João Montenegro de Miranda

3ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo
Bibliotecária – CRB-3 / 623

M672a Miranda, João Montenegro de
Álgebra linear / João Montenegro de Miranda. 3. ed. ___ Fortaleza : EdUECE, 2015.

117 p. (Matemática)

ISBN: 978-85-7826-389-8

1. Álgebra linear . I. Título.

CDD: 512.5

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

O livro aborda os tópicos centrais que compõem a disciplina de Álgebra Linear, organizados em 8 capítulos, trazendo aspectos conceituais, exemplos e soluções, finalizando com atividades de avaliação.

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo das matrizes e sistemas de equações lineares abrangendo os conceitos, técnicas e resultados básicos, envolvendo matrizes e abordando a resolução de sistemas de equações lineares utilizando-se de matrizes e de determinantes.

O Capítulo 2 trabalha espaços vetoriais e subespaços vetoriais introduzindo o conceito de espaço vetorial e de subespaço vetorial de um espaço vetorial, identificando entre os conjuntos numéricos conhecidos os que são espaços vetoriais.

No Capítulo 3, que trata de bases e dimensões, são apresentados os conceitos de dependência linear e independência linear e de base e dimensão de um espaço vetorial, concluindo com o estudo das matrizes de mudança de base.

O Capítulo 4 trata de aplicações lineares e explicita o conceito de aplicação linear ou transformação linear e de isomorfismo de espaços vetoriais, estabelecendo relações entre matrizes e aplicações lineares.

O Capítulo 5 aborda autovalores, autovetores e diagonalização e envolve o estudo do processo de diagonalização de matrizes Am x n com entradas em R, estabelecendo relações entre a diagonalização de A e a existência ou não de vetores especiais de Rn. A ultima seção apresenta a aplicação da diagonalização na resolução de sistemas de recorrência.

O Capítulo 6 é dedicado ao tema referente ao produto interno e se centra em estudar a estrutura linear do Rn e tem como objetivo transportar espaços vetoriais as noções de comprimento, ângulo e ortogonalidade vistas em Rn, apresentar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e utilizar projeções ortogonais para resolver problemas de aproximação.

O Capítulo 7 intitulado Teorema espectral e aplicações apresenta as propriedades das matrizes reais simétricas, isto é, matrizes reais tais que A = At e o Teorema Espectral (toda matriz simétrica é diagonalizável sobre os reais), aplicando-o em formas quadráticas, cônicas e quádricas.

O último capítulo aborda cônicas e quádricas discorrendo sobre a aplicação do Teorema Espectral ao estudo das cônicas e quádricas.

Esperamos que ao percorrer os temas abordados nesse livro, o aluno se prepare adequadamente para as disciplinas futuras, e com isso tenha um bom desempenho escolar.

O autor

Capítulo 1

Matrizes e sistemas de equações lineares

Objetivos

- Apresentar os conceitos, técnicas e resultados básicos sobre matrizes.
- Conceituar determinante se utilizá-los na resolução de sistemas lineares.
- Resolver sistemas de equações lineares utilizando-se de matrizes e de determinantes.

Introdução

Uma matriz de ordem mxn sobre um conjunto K, que se lê uma matriz m por n sobre K- onde n e m são inteiros positivos- é uma tabela de elementos de K, chamados entradas ou elemento da matriz, dispostos em m seqüências horizontais, chamadas linhas da matriz, e n seqüências verticais chamadas colunas.

É usual representar matrizes por letras maiúsculas, por exemplo, A, neste caso os elementos da matriz A, sempre que possível, são denotados genericamente por $a_{ij}\ ,1 \le i \le m\ ,1 \le j \le n$, onde o primeiro índice indica a linha, e o segundo índice, a coluna em que o elemento se situa.

$Assim\ \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Abreviadamente usa-se também as

notações $A = (a_{ij})_{mxn}\ ou\ A_{mxn}$ para representar uma matriz A de ordem mxn.

Os elementos de uma matriz podem ser números reais ou complexos, funções, outras matrizes, etc.

1. Conceitos Elementares

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes A e B são iguais se têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $A = (a_{ij})_{mxn}\ e\ B = (b_{ij})_{rxs}$ são iguais se m = r; n = s e $a_{ij} = b_{ij}\ \ , 1 \le i \le m\ \ , 1 \le j \le n.$

Algumas matrizes especiais

Matriz quadrada: uma matriz que tem o número de linhas e de colunas iguais a n é denominada uma matriz quadrada de ordem n.

Numa matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ de ordem n chamamos de diagonal principal aos elementos $a_{ij}\ com\ i = j \in \{1, ..., n\}$

Matriz identidade de ordem n: é a matriz quadrada I de ordem n cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os outros elementos são todos iguais ao 0.

Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 com elementos em

$\mathbb{R}\ é\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Matriz nula: a matriz nula de ordem mxn, denotada por 0, é a matriz de ordem mxn na qual todos os elementos iguais ao 0 .

Matriz linha: é qualquer matriz de ordem 1xn, ou seja, qualquer matriz com uma única linha.

Matriz coluna: é qualquer matriz de ordem mx1, ou seja, qualquer matriz com uma única coluna.

Matriz diagonal: é uma matriz quadrada na qual os únicos elementos não nulos estão na diagonal principal, isto A = $(aij)_{nxn}$ é matriz diagonal se, e somente se, $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$. A matriz diagonal $A = (a_{ij})_{nxn}$ *na qual* $a_{ij} = c$ quando $i = j$ é denominada matriz escalar.

Matriz transposta de uma matriz dada: dada uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, a matriz $A^t = (b_{ij})_{nxm}$ tal que, $b_{ij} = a_{ji}, \forall i \in \{1, ..., m\}\ e\ \ \forall j \in \{1, ..., n\}$ é chamada matriz transposta da matriz A.

Matriz simétrica: uma matriz $A = (a_{ij})_{nxn}\ na\ qual\ a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}$ é dita uma matriz simétrica, se os elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são iguais, ou seja, A = A^t .

Matriz anti-simétrica: uma matriz $A = (a_{ij})_{nxn}\ na\ qual,\ a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}$ isto é, os elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são opostos e os elementos da diagonal principal são nulos é dita uma matriz anti-simétrica.

Matriz triangular superior: Uma matriz , $A = (a_{ij})_{nxn}\ na\ qual\ a_{ij} = 0\ \forall i > j; ij \in \{1, ..., n\}$ é dita uma matriz triangular superior, isto é, os elementos situados abaixo da diagonal principal são nulos.

Matriz triangular inferior: Uma matriz, $A = (a_{ij})_{nxn}$ $na\ qual\ a_{ij} = 0\ \forall i < j; ij \in \{1, ..., n\}$ isto é, os elementos situados acima da diagonal principal são nulos é dita uma matriz triangular inferior.

2. Operações com matrizes

Adição

A soma de duas matrizes de ordem mxn, $A = (a_{ij})\ e\ B = (b_{ij})$ é a matriz de mesma ordem $A + B = (c_{ij}), onde\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \forall i \in \{1, ..., m\}$ $e\ j \in \{1, ..., n\}$

Propriedades da adição

Quaisquer que sejam A, B, C matrizes de mesma ordem, temos que:

1. A + (B + C) = (A + B) + C, isto é, à adição é associativa.
2. A + B = B + A, isto é, a adição é comutativa.
3. A + 0 = 0 + A = A, onde 0 é a matriz nula de ordem mxn, isto é, 0 é o elemento neutro da adição.
4. Existe uma matriz denotada por –A, tal que A + (-A) = 0.

A demonstração destas propriedades é deixada como exercício.

Multiplicação por escalar

Se k é um escalar, ou seja, número real ou complexo, o produto deste escalar por uma matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ é a matriz $kA = (b_{ij})_{nxn}, onde$ $b_{ij} = ka_{ij}, i \in \{1, ..., m\} e\ j \in \{1, ..., n\}$.

Propriedades da multiplicação por escalar

Quaisquer que sejam as matrizes A e B, de mesma ordem, e quaisquer que sejam os escalares k e l, temos que:

k(A + B) = kA + kB

(k + l)A =kA + lA.

0A = 0, onde 0 é a matriz nula da mesma ordem que A.

k(lA) = (kl)A.

A demonstração destas propriedades é deixada como exercício.

Multiplicação

O produto de duas matrizes A= (a_{lt})mxn e B= (b_{rs})nxp é a matriz

AB= (C_j)mxp, onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\ \forall i \in \{l, ..., m\}, j \in \{l, ..., p\} p$

Observações

1. O produto de duas matrizes é possível apenas quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

2. $AB = (c_{ij})_{mxp}$, *onde* $A = (a_{lt})_{mxn}$ *e* $B = (b_{rs})_{nxp}$, *então*

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (a_n \ldots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{ij} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$ – produto de uma matriz linha por uma

matriz coluna $-\forall i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,p\}$

Propriedades da multiplicação

Quaisquer que sejam as A, B, C matrizes, de ordens compatíveis com as multiplicações indicadas, temos que:

1. A(BC) = (AB)C, isto é, a multiplicação é associativa.
2. A(B + C) = AB + AC, isto é, a multiplicação é distributiva à esquerda.
3. (A + B)C = AC + BC, isto é, a multiplicação é distributiva à direita.
4. AI = A e IA = A, onde a matriz I é a matriz identidade de ordem compatível com a operação indicada, em cada caso.

A demonstração destas propriedades é deixada como exercício.

Observações.

1. A0 = 0 e 0A = 0, onde, em cada caso, 0 é a matriz nula de ordem conveniente.

2. Em geral dados A e B, matrizes de ordens compatíveis com os produtos AB e BA, $AB \neq BA$.

Por exemplo:

$$se\ A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} e\ B = (2,1,3), então\ AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} e\ BA = (10).$$

3. É possível se ter AB = 0 sem que A = 0 ou B = 0.

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ então $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sistema de Equações Lineares

Um conjunto de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \quad 1 \leq j \leq n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \ onde\ a_{ij} \in \square, b_i \in \square, 1 \leq i \leq m$$

é denominado um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas.

O sistema (1) pode ser escrito na forma de equação matricial AX=B,

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, onde\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

é a matriz dos termos independentes

Podemos representar o sistema (1) por sua matriz aumentada, matriz obtida acrescentando-se à matriz A, dos coeficientes, a matriz B, dos termos independentes.

Ou seja, pela matriz $\begin{pmatrix} a_{11} \ \dots \ a_{1n} & b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

3.1. Solução de um sistema

Uma solução do sistema acima é uma n-upla de números reais $(x_1, ..., x_2)$ que satisfaz a todas as equações do sistema.

Sistemas equivalentes

Sistemas que têm as mesmas soluções são ditos equivalentes. Por exemplo, os sistemas $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}, \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}, \begin{cases} x + 0y = 1 \\ 0x + y = 2 \end{cases}$

são equivalentes, pois os três têm como única solução x = 1 e y = 2.

Observe que no último sistema a solução está evidente.

3.2. Uma técnica para resolver sistemas

Uma das técnicas usadas para resolver um sistema consiste em substituir cada sistema por outro que lhe seja equivalente até conseguir um sistema equivalente ao primeiro no qual a solução está evidente.

Vejamos como resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ usando esta técnica.

Para tornar mais claro o processo vamos dividi-lo em etapas e ao lado de cada sistema vamos por a sua matriz aumentada.

1ª Etapa

Inicio do processo.

Sistema Matriz Aumentada

$$(1)\begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2ª Etapa

Substituímos o sistema (1) por outro equivalente que tenha 1 como coeficiente de x na primeira equação. Para isso substituímos a primeira equação por outra obtida multiplicando-a por $\frac{1}{3}$.

Sistema Matriz Aumentada

$$(2)\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

3ª Etapa

Substituímos o sistema (2) por outro equivalente que tenha 0 como coeficiente de x na segunda equação. Para isso substituímos a segunda equação de (2) por outra, obtida somando-se a ela a primeira equação multiplicada por $-2.$.

Sistema Matriz Aumentada

$$(3)\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - 7y = -4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

4ª Etapa

Substituímos o sistema (3) por outro equivalente que tenha 1 como coeficiente de y na segunda equação. Para isso substituímos a segunda equação de (3) por outra, obtida multiplicando-se ela $\frac{-1}{7}$.

Sistema Matriz Aumentada

$$(4)\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5ª Etapa

Substituímos o sistema (4) por outro equivalente que tenha 0 como coeficiente de y na segunda equação. Para isso substituímos a primeira equação de (4) por outra, obtida somando-se a ela a segunda equação multiplicada por -2.

Sistema Matriz Aumentada

$$(5)\begin{cases} x+0y=1 \\ 0x+y=2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observe que no último sistema a solução é evidente, x = 1 e y = 2, chegamos assim ao final do processo.

No exemplo acima fomos obtendo sucessivamente sistemas novos, equivalentes ao sistema dado inicialmente, aplicando em cada etapa "operações elementares" às equações do sistema.

Note que estas operações são todas reversíveis, isto é, após cada etapa podemos recuperar o sistema anterior usando uma operação elementar semelhante à operação usada na etapa.

É importante observar também que, o que fizemos acima, é equivalente a aplicarmos "operações elementares" sobre as linhas das matrizes aumentadas dos sistemas obtidos em cada etapa e, na última etapa recuperarmos o sistema, sistema no qual a solução é evidente.

3.3. Operações elementares sobre linhas de uma matriz

As operações elementares sobre linhas de uma matriz são: Permutação da i-ésima linha pela j-ésima linha.

Esta operação será representada simbolicamente por: $L_i \leftrightarrow L_j$ Substituição da i-ésima linha pela linha obtida multiplicando-a por um escalar k não nulo.

Esta operação será representada simbolicamente por: $L_i \to kL_i$. Substituição da i-ésima linha pela linha obtida somando-se a ela a multiplicação por um escalar k não nulo da j-ésima linha.

Esta operação será representada simbolicamente por: $L_i \to L_i + kL_j$

Na resolução do sistema $\begin{cases} 3x+6y=15 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$ observamos que as matrizes ampliadas dos vários sistemas obtidos apenas sofreram operações elementares sobre suas linhas, com o objetivo de serem transformadas numa matriz na "forma escada".

3.4. Matriz na forma escada

Uma matriz mxn é uma matriz "linha reduzida à forma escada", ou simplesmente está na forma escada, se satisfaz as condições:

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha é 1.
2. Em cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, os demais elementos são iguais a 0.

As linhas nulas, linha na qual todos os elementos são nulos, caso existam, aparecem abaixo de todas as linhas não nulas.

Se $L_1,\ldots,L_r$ são as linhas não nulas e se o primeiro não nulo de $L_i\,; i = 1,\ldots,r$; ocorra na j_i – ésima coluna, então $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Observação

O item 4 da definição acima pode ser reescrito como segue: "A quantidade de zeros que precede o primeiro elemento não nulo de uma dada linha é menor do que a quantidade de zeros que precede o primeiro elemento não nulo da linha seguinte".

Exemplo 1

São linha reduzida à forma escada as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Não são linha reduzida à forma escada as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.5. Matrizes linha-equivalentes

Sejam A e B matrizes mxn. Dizemos que B é linha–equivalente a A, se B foi obtida de A por um número finito de operações elementares sobre linhas.

Para indicar que B é linha-equivalente a A usamos a notação $A \sim B$.

Proposição: Sistemas de equações lineares com matrizes ampliadas linha–equivalentes são equivalentes.

Proposição: Toda matriz é linha–equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz A é definido como o número de linhas não nulas da única matriz linha reduzida a forma escada que é linha–equivalente a A.

Exemplo 2

Determine o posto da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&1&3\\1&3&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2+(-2)L_1}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&3\\1&3&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3+(-1)L_1}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&3\\0&2&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to(-1)L_2}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&3&-3\\0&2&0&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1+(-1)L_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&3\\0&1&3&-3\\0&2&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3+(-2)L_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&3\\0&1&3&-3\\0&0&-6&10\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to\left(-\frac{1}{6}\right)L_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&3\\0&1&3&-3\\0&0&1&\frac{-5}{3}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1+L_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&3&-3\\0&0&1&\frac{-5}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2+(-3)L_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&2\\0&0&1&\frac{-5}{3}\end{pmatrix}.$$

Então o posto de A é 3.

Exemplo 3

Resolva o sistema $\begin{cases}x+y+2z=0\\2x+y+z=3\\x+3y+2z=4\end{cases}$.

Note que a matriz ampliada do sistema é $A=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&1&3\\1&3&2&4\end{pmatrix}$ que é linha equivalente a matriz $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&2\\0&0&1&\frac{-5}{3}\end{pmatrix}$. E, portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases}x+0y+0z=\frac{4}{3}\\0x+y+0z=2\\0x+0y+z=\frac{-5}{3}\end{cases}$, cuja solução é evidente.

3.6. Resolução de sistemas por escalonamento

Nos últimos exemplos usamos o que é usualmente chamado de "método de escalonamento" para resolução de sistemas lineares, que em resumo, consiste de três procedimentos que são:

1º. Determinamos a matriz ampliada do sistema.

2º. Usando operações elementares convenientes, determinamos a matriz linha reduzida à forma escada à qual a matriz ampliada do sistema é equivalente.

3º. Determine o sistema que tem como matriz ampliada a matriz obtida no segundo procedimento.

Exemplo 4

Resolva o sistema $\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ x+4y-z=-1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$.

A matriz ampliada do sistema é A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A matriz linha reduzida à forma escada à qual A é linha equivalente é a matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{48} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{48} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

O sistema que tem B como matriz ampliada é

$$\begin{cases} x+0y+0z=\frac{-5}{48} \\ 0x+y+0z=\frac{-7}{48} \\ 0x+0y+z=\frac{1}{16} \end{cases}$$

cuja solução esta evidente.

Exemplo 5

Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z+3t=1 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}$.

A matriz ampliada do sistema é A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

A matriz linha reduzida à forma escada à qual A é linha equivalente é a matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

O sistema que tem B como matriz ampliada é $\begin{cases} x+y+0z+\dfrac{5}{2}t=\dfrac{1}{2} \\ 0x+0y+z+\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Neste sistema temos muitas soluções, na verdade infinitas soluções, que são

dadas por $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}t-y \\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t \end{cases}$, $\forall\, y,t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6

Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$.

A matriz ampliada do sistema é A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A matriz linha reduzida à forma escada à qual A é linha equivalente é a matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

O sistema que tem B como matriz ampliada é $\begin{cases} x+0y+0z=0 \\ 0x+y+z=0 \\ 0x+0y+0z=1 \end{cases}$. Devido à última igualdade ser um absurdo, o sistema é impossível, isto é, não tem solução.

3.7. Discussão de um sistema m x n

Como vimos nos três últimos exemplos, um sistema de m equações e n incógnitas, pode ser:

1. Compatível (ou possível) e determinado, isto é, tem uma única solução.

2. Compatível e indeterminado, isto é, tem uma infinidade de soluções.

3. Incompatível (ou impossível), isto é, não tem solução.

Teorema

1. Um sistema de m equações a n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada, p_a, for igual ao posto da matriz dos coeficientes, p_c Isto é, $p_a = p_c$.

2. Se o sistema tem solução, isto é, $p_a = p_c = p$,e se n=p, a solução é única.

3. Se o sistema tem solução, isto é, $p_a = p_c = p$, e se n>p, então as n-p incógnitas são livres e as p incógnitas restantes são dadas em função delas.O número n-p é chamado de grau de liberdade do sistema.

Demonstração

A demonstração será deixada como exercício.

Exemplo 7

Discuta e resolva o sistema $\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$, onde m é um número real.

Suponha inicialmente $m \neq 0$.

Neste caso, usando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema A , obtemos a matriz linha reduzida à forma escada

B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{10+m}{2} \end{pmatrix}$ que é linha-equivalente a matriz A.

Se m = -10, então B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto $p_a = p_c = 2 \; e \; n = 2.$

E daí o sistema é compatível e determinado com

solução $x = \frac{-1}{2} \; e \; y = \frac{1}{2}$.

Se m $\neq$ -10, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{10+m}{2} \end{pmatrix}$, com $\frac{10+m}{2} \neq 0$. Portanto

$p_a = 2 \ e \ p_c = 3$, e o sistema é incompatível.

Vejamos agora o caso m = 0.

Neste caso, A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ usando operações elementares sobre as

linhas da matriz ampliada do sistema A, obtemos a matriz linha reduzida à

forma escada B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ que é linha equivalente a matriz.

Portanto $p_a = 2 \ e \ p_c = 3$, e o sistema é incompatível.

4. Determinante

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{nxn}$, vamos indicar por A_{ij}; $j \in \{1, ..., n\}$; a matriz quadrada de ordem n - 1 obtida de A pela supressão da linha i e da coluna j.

A toda matriz quadrada $A = (a_{ij})_{nxn}$ está associado um número real chamado "determinante de A", denotado por $\det A \ ou \ |A| \ ou \ \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$, e definido indutivamente como segue.

Se n=1, isto é, $A = (a_{11})_{1x1}$ det A= a_{11}.

Se $n \geq 2$, klklklklklkl, onde j é fixo escolhido arbitrariamente no conjunto $\{1, ..., n\}$ expressão acima é conhecida como desenvolvimento de Laplace segundo a linha i.

Observação

Pode-se provar que:

$se \ n \geq 2, \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$, *onde j é fixo* escolhido.

arbitrariamente no conjunto $\{1, ..., n\}$. A expressão acima é conhecida como desenvolvimento de Laplace segundo a coluna j.

4.1. Propriedades dos determinantes

1. Uma matriz quadrada que tem uma linha (coluna) nula tem determinante nulo.

2. Permutando-se duas linhas (colunas) de uma matriz quadrada A, obtemos uma matriz quadrada que tem determinante igual a –detA.

3. Uma matriz quadrada que tem duas linhas (colunas) iguais tem determinante nulo.

4. Multiplicando-se uma linha (coluna) de uma matriz quadrada A por uma constante k obtemos uma matriz quadrada que tem determinante igual a kdetA.

5. Se uma matriz quadrada A = $(a_{ij})_{nxn}$ é tal que $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}\ , onde\ b_{ij}\ e\, c_{ij}$

são constante para algum $i \in \{1,...,n\}$ e para todo $j \in \{1,...,n\}$ então

detA = detB + detC, onde

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ b_{i1} \cdots\ b_{in} \\ \vdots \cdots\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} e\ C = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ c_{i1} \cdots\ c_{in} \\ \vdots \cdots\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

6. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então det(AB) = (detA)(detB).

5. Sistemas de Equações Lineares Homogêneos

Um sistema de m equações lineares a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} , onde\ a_{ij} \in \mathbb{R}\ , b_i \in \mathbb{R}\ , 1 \le i \le m\, e\, 1 \le j \le n$$

é dito homogêneo quando os termos independentes são todos nulos.

Então um sistema homogêneo pode ser escrito na forma de equação matricial $AX = O$ ou $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $, onde\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

é a matriz dos coeficientes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

é a matriz dos termos independentes.

Observações

1. Sobre um sistema homogêneo m x n.

Um sistema homogêneo é sempre compatível, admitindo pelo menos a "solução trivial"

$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$.

A matriz ampliada tem o mesmo posto que a matriz dos coeficientes, se este posto for igual ao número de incógnitas, o sistema será determinado possuindo apenas a solução trivial. Se o posto for diferente do número de incógnitas, o sistema será indeterminado possuindo infinitas soluções.

Sobre um sistema homogêneo n x n.

Se det$A \neq 0$, o sistema admite apenas a solução trivial.

Se det A = 0, o sistema admite infinitas soluções.

Atividades de avaliação

1. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} e\, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

determine, se possível, as expressões: AB + C, BC, CB, D - BA, AB + BA e CB^t.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e\, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determine x, y, z, $\in$ R tais que xA + yB + zC = 0.

b) Determine x, y, z, $\in$ R tais que xA + yB + zC = I.

c) Determine x, y, z, $\in$ R tais que xA + yB + zC = $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Se $A = \begin{pmatrix} x^2 + x & 6 \\ y^2 + 4 & 1 \end{pmatrix}$ $e\ B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$, determine $x\ e\ y \in$ tais que A = B.

4. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, determine uma matriz B tal que AB = I.

5. Determine todas as matrizes que comutam com:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Determine uma matriz quadrada A, não nula, tal que $A^2 = 0$.

7. Demonstre as propriedades da adição de matrizes.

8. Demonstre as propriedades da multiplicação de escalares por matrizes.

9. Demonstre as propriedades da multiplicação de matrizes.

10. Discuta e resolva o sistema:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y + 3z + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$

11. Dado o sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 3y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ .Verifique se x = 2, y = 3, z = 1 é solução. O tem solução única? Em caso negativo obtenha outras soluções.

12. Determine os valores de k os quais o sistema $\begin{cases} 3x + 6y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases}$ é:

a) Compatível e determinado.

b) Compatível e indeterminado.

c) Incompatível.

13. Determine os valores de k para os quais o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + ky - 6z = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções, e obtenha sua solução geral.

Capítulo 2

Espaços vetoriais e subespaços vetoriais

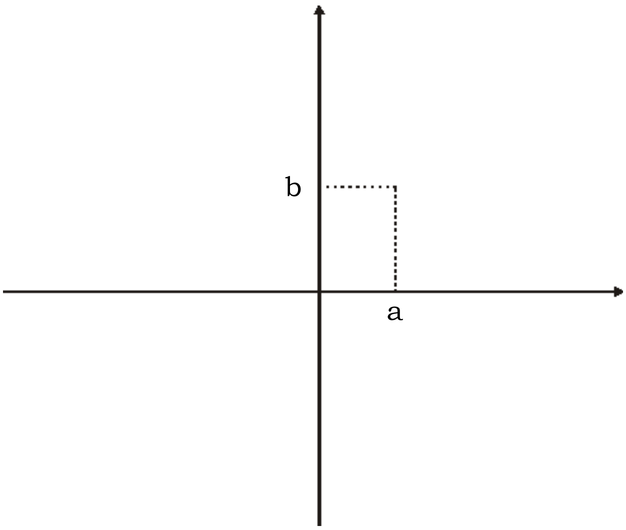
Objetivos

- Introduzir o conceito de espaço vetorial.
- Identificar entre os conjuntos numéricos conhecidos os que são espaços vetoriais.
- Apresentar o conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial.

1. Espaços Vetoriais

Neste capítulo vamos estudar os espaços vetoriais bem como os subespaços de um espaço vetorial. Em poucas palavras um espaço vetorial é um conjunto onde temos definidas uma “adição” e uma “multiplicação por escalar” que satisfazem determinadas propriedades, e um subespaço de um espaço vetorial é um subconjunto do espaço vetorial que ainda é um espaço vetorial com as operações herdadas do espaço.No final da unidade estudamos os espaços vetoriais finitamente gerados.

Iniciaremos apresentando um dos exemplos mais simples de espaço vetorial, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, que é usualmente identificado com o plano. O produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.



A “adição” do $\mathbb{R}^2$, é uma regra que a cada par de pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) associa o elemento $(a_1 + a_2)$ e $(b_1 + b_2)$ denotado por $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ e denominado soma dos elementos (a_1, b_1) e (a_2, b_2).

A “multiplicação por escalar” é uma regra que a cada par de elementos $c \in \mathbb{R}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ associa o elemento $(ca, cb) \in \mathbb{R}^2$ denotado por $c.(a,b)$.

É de fácil verificação que quaisquer que sejam *u, v, w* pontos do plano e *a, b* números reais:

i) u + v = v + u.

ii) (u + v) + w = u + (v + w).

iii) (b v) = (a b) v.

iv) (a + b) v = av + bv.

v) a(v + u) = av + au.

vi) (0, 0) $\in \mathbb{R}^2$ é tal que (0,0) + v = v.

vii) qualquer que seja (x, y) $\in \mathbb{R}^2$ o ponto (-x, -y) $\in \mathbb{R}^2$ é tal que (x, y)+(-x, -y) = (0, 0)

viii) 1v = v

Conjuntos, como o do exemplo acima, onde estão definidas uma “adição” e uma “multiplicação por escalar satisfazendo propriedades análogas às acima citadas é o que chamamos um ”espaço vetorial sobre os reais”.

Observação. Sempre que nos referirmos ao **Espaço Vetorial** $\mathbb{R}^2$, salvo menção em contrário, a adição e a multiplicação por escalar são as definidas acima.

1.1. Definição de espaço vetorial

Um espaço vetorial (sobre os reais) é um conjunto não vazio V no qual temos definido uma adição (que associa a cada par $u, v \in V$ o elemento $u + v \in V$) e uma multiplicação por escalar (que associa a cada par $a \in \mathbb{R}, v \in V$ o elemento $av \in V$) que gozam das oito propriedades abaixo:

Quaisquer que sejam $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$

i) u + v=v + u.

ii) (u + v) + w = u + (v + w).

iii) (bv) = (ab)v.

iv) (a + b)v = av +bv

v) a(u + v) = au + av

vi) ∃0 ∈ V tal que 0 + v = v

vii) $\forall$ u $\in$ V$\exists$ – u $\in$ V tal que u + (–u) = 0

viii) 1v = v

Exemplos de espaços vetoriais

1. O conjunto $\mathbb{R}^n$ que é formado pelos vetores coluna $(x_1,...,x_n)$ com $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial com a adição definida por $(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_1+y_1)$ e a multiplicação por escalar definida por $a(x_1,...,x_n)=(ax_1,...,ax_n)$.

A verificação que as operações acima tornam o $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial é deixada como exercício.

2. O conjunto, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$, das matrizes com n linhas e m colunas sobre $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial com a adição e a multiplicação por escalar definidas abaixo: Adição: $(a_{i,j})+(b_{i,j})=(c_{i,j})$ onde $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}; i=1,...,n; j=1,...,m$.

Multiplicação por escalar: $a(a_{i,j})=(d_{i,j})$ onde

$d_{i,j}=aa_{i,j}; i=1,...,n; j=1,...,m.$

A verificação que as operações acima tornam $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ um espaço vetorial é deixada como exercício.

3. O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, é um espaço vetorial com suas operações usuais de adição e multiplicação.

4. O conjunto $P_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual n juntamente com o polinômio nulo é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e de multiplicação de um número por um polinômio.

5. $S^{\mathbb{R}}$, o conjunto das funções de S *em* $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial com as operações definidas a seguir.

Adição: $\forall \int, g \in S^{\mathbb{R}}: (f+g)(x)=f(x)+g(x), \forall x \in S.$

Multiplicação por escalar:

$\forall \int \in S^{\mathbb{R}}$ e $\forall a \in \mathbb{R}: (af)(x)=a.f(x), \forall x \in S.$

A verificação de que as operações acima tornam $S^{\mathbb{R}}$ um espaço vetorial é deixada como exercício.

Observações

1) Os elementos de um espaço vetorial são chamados vetores.

2) O vetor 0 da propriedade vi) é único e é denominado vetor nulo.

3) Na definição de espaço vetorial dada anteriormente os escalares são números reais, mas os escalares podem ser elementos de um “corpo” K como por exemplo o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Neste caso temos a definição de um espaço sobre K.

Teorema

Se u e v são vetores de um espaço vetorial V e c é um número real, então:

a) 0.u = 0 e c.0 = 0.

b) u + v = 0 implica u = -v.

c) (-1). u = -u.

Nos itens acima o representa o número real zero e 0 representa o vetor nulo de V.

Demonstração:

a) ou + ou = (o + o)u = o.u $\Rightarrow$ (ou + ou) + [-(ou)] = ou + [-(ou)] $\Rightarrow$ ou + {ou + [-(ou)]} = 0 $\Rightarrow$ ou + 0 = $\Rightarrow$ ou = 0

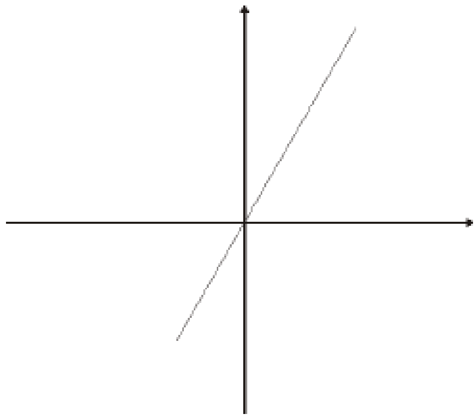
c.0 + c.0 = c.(0 + 0) = c.0 $\Rightarrow$ –(c.0) + (c.0 + c.0) = -(c.0) + c.0 $\Rightarrow$ [-(c.0) + c.0] + c.0 = 0 $\Rightarrow$ 0 + c.0 = 0 $\Rightarrow$ c.0 = 0.

b) u + v = 0 $\Rightarrow$ (u + v) + (-v)=0 + (-v) $\Rightarrow$ u + [v + (-v)] = -v $\Rightarrow$ u + 0 = -v $\Rightarrow$ u = -v

c) (-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = 0 $\Rightarrow$ (-1)v = -v

2. Subespaços Vetoriais

O conjunto $V=\{(a,2a)\mid a\in\mathbb{R}\}$ é um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}^2$ tal que (a, 2a) + (b, 2b) = (a + b, 2 (a + b)) e c(a, b) = (ca, 2ca). Em particular $(0,0)\in V e (-a,-2a)=(-1)(a,2a)\in V$. Como as demais propriedades de um espaço vetorial são satisfeitas por quaisquer elementos do $\mathbb{R}^2$, V é um espaço vetorial se consideramos a adição e multiplicação por escalar como sendo as mesmas do $\mathbb{R}^2$ (restritas a V). Em situações como esta o subconjunto é denominado um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. O conjunto V tem como representação geométrica a reta do plano que passa por $(0,0)\,e\,(1,2)$.



2.1 Definição de subespaço vetorial

Um subespaço vetorial de um espaço vetorial V é um subconjunto U de V tal que:

a) o vetor nulo de V pertence a U;

b) se u e v são vetores de U , então u + v é também vetor de U;

c) se c é um número real e v é um vetor de U, então c.v é também vetor de U.

Observações:

1) Um subespaço vetorial U de um espaço vetorial V é ele próprio um espaço vetorial com a adição e a multiplicação por escalar de V restritas ao conjunto U.

2) A condição i) da definição de subespaço vetorial pode ser substituída pela condição $U \neq \phi$.

Exemplos de subespaços vetoriais

1) Se V é um espaço vetorial , então o próprio V e o conjunto cujo único elemento é o vetor nulo de V são subespaços de V , os subespaços triviais de V.

2) Se $c \in \mathbb{R}, U = \{(a, ca) \mid a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

3) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4) $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x), \forall \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial de $\square^{\square}$.

5) $U = (x\ y \in \mathbb{R} \mid y = | x |$ não é subespaço vetorial do $\square^{2}$.

Teorema

Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W.

Então: i) $U \cap V$ *é subespaço vetorial de* W.

ii) $U + V = \{u + v \mid u \in U \; e \; v \in V$ é subespaço vetorial de W.

Demonstração

i) O vetor nulo de W pertence ao U e ao V, consequentemente ao U $\cap$ V.

Sejam u, v $\in$ U $\cap$ V. Então, u $\in$ U e u, v $\in$ V.

Como U e V são subespaços de W então u + v $\in$ U e u + v $\in$ V.

Assim u + v $\in$ U $\cap$ V

Sejam a $\in$ |R e u $\in$ U $\cap$ V. Então, u $\in$ U e u, u $\in$ V.

Como U e V são subespaço de W então au $\in$ U e au $\in$ V.

Assim au $\in$ U $\cap$ V.

Observações

1. O subespaço U + V do teorema anterior é denominado subespaço soma de U e V, quando $U \cap V = \{$o subespaço U + V é denominado soma direta de U e V, e é denotado por $U \oplus V$.

2. Quando um espaço vetorial W=$U \oplus V$, onde U e V são subespaços vetoriais de W, dizemos que W se decompõe como soma direta de U e V.

Por exemplo $\mathbb{R}^3 = (x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \oplus x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0$

Combinação linear de vetores e espaços vetoriais finitamente gerados.

Sejam $v_1, ..., v_n$ vetores de um espaço vetorial V. Chama-se uma combinação linear de $v_1, ..., v_n$, qualquer vetor de V do tipo $c_1 v_1 + ... + c_n v_n$, *onde* $c_1, ..., c_n$ são números reais.

Exemplos

1. Qualquer que seja o vetor $(a, b \in \mathbb{R},\ a, b - a1, 0 + b0, 1)$ ou seja a,b é combinação linear de 1, 0 e 0, 1.

2. O polinômio $1 + 2x + 3x^2 \in P_2(\mathbb{R}$ é combinação linear dos polinômios 1, x, x^2.

Teorema

Seja S um subconjunto não-vazio de um espaço vetorial V.

Então, o conjunto $\langle S \rangle$ de todas as combinações lineares de elementos de S é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

Como $S \neq$ f *, escolha* $v \in S$*. Então* $0 = 0v \in$.

Sejam u = $a_1v_1 + a_2v_2 + ... a_nv_n$ e v = $b_1v_1 + b_2v_2 + ... b_nv_n \in \langle S \rangle$

Completando se necessário com coeficientes nulos, podemos supor que os vetores que comparecem nas combinações lineares u e v são os mesmos. Então u + v = ($a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$) =

$= (a_1v_1 + b_1v_1) + (a_2v_2 + b_2v_2) + ... + (a_nv_n + b_nv_n) = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2$ $+ ... + (a_n + b_n)v_n = \in \langle S \rangle$

Finalmente, sejam $u = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \in \langle S \rangle$ e $a \in$ □ .

Então $au = a(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a(a_1v_1) + a(a_2v_2) + ... + a(a_nv_n) =$
$= (aa_1)v_1 + (aa_2)v_2 + ... + (aa_n)v_n \in \langle S \rangle$

Observações

1. O subespaço do teorema anterior é chamado o subespaço de V gerado por S, e o conjunto S é denominado conjunto de geradores de $\langle S \rangle$.

2. Se S é um subconjunto finito, digamos $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o subespaço gerado por S é denotado por $\langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.

Exemplos

1. $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

2. U = {(a, 2a) | a e R é subespaço do R^2 gerado por {(1, 2)}, isto é, U = (1, 2).

3. O subespaço do P_3 (R) gerado pelos vetores 1, x e x^2 é P_2 (R).

Definição de espaço vetorial finitamente gerado

Um espaço vetorial V é dito espaço vetorial finitamente gerado, se existe um número finito de vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ *tais que* $V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.

Exemplos

1. R^3 = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). De fato, (a, b, c) =
   = a (1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1). $\forall$a, b, c $\in$ R.
2. Pn (R) = (1, x, x^2, x^3, ..., xn)
3. $P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Atividades de avaliação

1. Mostre que são espaços vetoriais com as operações definidas na seção:

2. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Defina a em $\mathbb{C}$ a adição pondo $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ e a multiplicação por escalar pondo $c(a + ib) = ca + icb,\ c \in \mathbb{R}$.

Prove que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial com estas operações.

a) $P_n\mathbb{R}$

b) $M_{n\times m}(\mathbb{R})$

c) $\mathbb{R}^n$

3. Prove que $P(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios, é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de um escalar por um polinômio.
4. Prove que o vetor nulo de um espaço vetorial é único.
5. Se u,v,w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u+w = v+w$, mostre que $u = v$.
6. Sejam V um espaço vetorial, $v \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

Mostre que:

i) $a0 = 0$.

ii) $av = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $v = 0$.

7. Prove que a comutatividade da adição, na definição de espaço vetorial, é uma consequência das demais condições
8. Prove que o conjunto $P\mathbb{R}$ dos polinômios com coeficientes reais é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e
9. Verifique que o que foi dito a respeito dos exemplos é verdadeiro.
10. Prove que os únicos subespaços vetoriais do $\square^2$ são retas que passam por (0, 0) ou {(0, 0)} ou o próprio $\square^2$.
11. A união de dois subespaços de um espaço vetorial é um subespaço vetorial?
12. Se A é uma matriz $m \times n$, mostre que $N(A) = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \mid A \cdot X = 0\}$ é um subespaço vetorial de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Note que $N(A)$ é o conjunto das soluções com sistema linear homogêneo $A \cdot X = 0$.
13. Verifique que $(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0$ e $x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0$ são subespaços vetoriais do $\square^3$ e que
14. Seja W um espaço vetorial, e sejam U e V subespaços vetoriais de W. Mostre que: $W = U \oplus V \Longleftrightarrow U \cap V = \{$ e $W = U + V$
15. Ache subespaço do $\mathbb{R}$ gerado pelos vetores (1, 2 e 5, 0).
16. Prove que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ finitamente gerado.
17. Sejam u e v vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$ tais que $u \notin \langle v \rangle$.

Prove que $\mathbb{R}2 = \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$.

Capítulo 3

Bases e Dimensões

Objetivos

- Apresentar os conceitos de dependência linear e independência linear.
- Estudar os conceitos de base e dimensão de um espaço vetorial.
- Estudar matrizes de mudança de base.

1. Dependência Linear

Iniciamos esta unidade trabalhando com os conceitos de dependência linear e independência linear. No segundo tópico estudamos os conceitos de base e dimensão e concluímos demonstrando que todo espaço vetorial finitamente gerado tem base. No terceiro e último tópico introduzimos a noção de coordenadas de um vetor numa base dada e de matriz de mudança de bases.

Seja V um espaço vetorial.

Um subconjunto S de V é linearmente dependente (LD) se existem vetores $v_1, v_2, ...v_r \in S$ e escalares não todos nulos $c_1, c_2, ..., c_r \in \mathbb{R}$, tais que $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_rv_r = 0$·

Um subconjunto S de V que não é LD é dito linearmente independente (LI). Assim, S é LI se $\forall\ v_1, v_2, ...v_r \in S\,; c_1, c_2, ..., c_r \in \mathbb{R}$,

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_rv_r = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c \ = 0.$$

Observações

1. Se V é um espaço vetorial, a afirmação:

$$\sum_{i=1}^{r} c_i v_i = 0 \ \ com \ \ c_i \in \mathbb{R} \ \ não \ todos \ nulos \ e \ \ v_i \in V \ ; i = 1, 2, ..., r$$

É equivalente a dizer que um dos vetores é combinação linear dos demais.

De fato, se $c_j \neq 0$ para algum j $\in$ {1, 2, ..., r , v_j = $\sum_{j \neq i=1}^{r} \frac{c_i}{c_j} v_i$.

2. Dizemos também que $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são LD ou LI para significar que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n$ é LD ou LI.

Exemplos

1. Seja V um espaço vetorial.

a) Se v é vetor de V, então: { é LD se, e somente se, v é o vetor nulo de V.

b) Se u e v são vetores não nulos de V, então: u, v são LD se, e somente se, u é múltiplo de v.

2. Em $P_3\mathbb{R}$ $x+1$, $x+2$, x^2-1 são LI.

Com efeito, $c_1(x+1)+c_2(x+2)+c_3(x^2-1)=0$ implica $\begin{cases} c_1+c_2-c_3=0 \\ c_1+2c_2=0 \\ c_3=0 \end{cases}$

e portanto $c_1=c_2=c_3=0$.

3. No $\mathbb{R}^2$ são LD os vetores *(-1, 2), (1, 2) e (2, -4).*

4. No $\square^3$, três vetores são LD se, e somente se, ligando-se quaisquer dois destes pontos obtemos retas co-planares.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de V.

Então qualquer subconjunto de $U=\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ contendo mais que n elementos é linearmente dependente.

Demonstração

Basta mostrarmos que dados $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \in U$ eles são linearmente dependentes.

$$i=1,2,\ldots,n+1;\ u_i = d_{1i}v_1+\ldots+d_{ni}v_n, com\ d_{ji}\in\square, \forall\ j=1,2,\ldots,n$$

Isto é, que existem $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1} \in \square$ não todos nulos tais que $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_{n+1}u_{n+1}=0$. Qualquer que seja

Assim $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_{n+1}u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i\left(\sum_{j=1}^{m} d_{ji}v_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} d_{ji}c_i\right)v_j$.

O sistema homogêneo ($\sum_{i=1}^{n+1} d_{ji}x_i = 0 : j=1,2,\ldots,n$), tem mais incógnitas que equações, portanto tem solução não trivial, isto é, existem reais $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{n+1} d_{ji}c_i = 0 : j=1,2,\ldots,n$.

Daí $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_{n+1}u_{n+1}=0$.

3. Corolário

Se um espaço vetorial V é gerado por n elementos, qualquer subconjunto de V com mais que n elementos é linearmente dependente.

Exemplo

$P_3\mathbb{R}$ é gerado por $\{1, x^1, x^2, x^3\}$. O conjunto $\{1 + x, x^3, x + x^2 + 2x^2\}$ é linearmente dependente. De fato, $1(1 + x) + 1x^3 + (-1)(x + x^2) + 2(x^3 + 2x^2) + (-1)(1 + 3x^2 + 3x^3) = 0$.

2. Base de um Espaço Vetorial

Um subconjunto não vazio S de um espaço vetorial V é uma base de V se é verdade que:

a) S é linearmente independente.

b) S gera V.

Exemplos

1. S = $\{E_1, E_2,... E_n\}$ onde $E_1 = (1, 0,..., 0)$, $E_2 = (0, 1, ..., 0)$,...,$E_n = (0, 0,..., 1)$, é base para $\mathbb{R}^n$

2. S = $\{1, x_1, x_2,..., x_n\}$, é base para $P_n(\mathbb{R})$.

3. $S = \{A_j^i \mid i = 1, 2, ..., n\ j = 1, 2, ..., m\}, onde\ A_j^i$ é a matriz cujas entradas são nulas exceto a entrada situada na linha i e na coluna j que é igual a 1, é base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Teorema

Se $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é base de um espaço vetorial V, então cada vetor v de V tem uma única expressão da forma $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ *, onde* 1 2 n
$c_1, c_2, ..., c_n \in$ □.

Demonstração

Como S gera V, então cada vetor da V tem uma expressão como acima.

Vejamos agora que ela é única. Para isso suponhamos que um dado vetor v de V tem duas expressões do tipo acima, digamos

$v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ e $v = d_1v_1 + d_2v_2 + ... d_nv_n$, onde

$c_1, c_2, ... c_n$ e $d_1, d_2, ... d_n$ e R

Assim, $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = d_1v_1 + d_2v_2 + ... d_nv_n$, e daí $(c_1\ d_1)v_1\ (c_2\ d_2)v_2\ ...\ (c_n\ d_n)v_n$

$(c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 + ... + (c_n - d_n)v_n = 0$.

Como S é linearmente independente, temos que $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, ..., $c_n = d_n$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se um subconjunto não vazio B_0 de V é linearmente independente, então ele está contido em uma base de V.

Demonstração

Digamos que V é gerado por m elementos, então qualquer conjunto com mais que m vetores é linearmente dependente. Portanto B_0 não pode ter mais que m elementos.

Segue daí que existe um subconjunto B de V contendo B_0 maximal com relação a propriedade de ser linearmente independente (Isto é, B contém B_0 é LI e não está contido propriamente em nenhum subconjunto LI de V). Caso contrário, teríamos subconjuntos de V linearmente independentes contendo B_0 com um número arbitrariamente grande de elementos, o que não é possível.

Vejamos que B é uma base de V. Basta mostrarmos que B gera V. Digamos que $B = \{v_1, v_2, ..., v_k, \; k \le m$. Seja $v \in V - B$, *então* $B \quad v = v ,...,v \;,v$

$B \cup \{v = v, ..., v_m, v$ é LD. *Então existem* $a_1, a_2, ..., a_m, b \in$ □ *não todos nulos tais que* $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m + bv = 0$. Como B é LI, então $b \neq 0$. Então $v = (\frac{-a_1}{b})v_1 + (\frac{-a_2}{b})v_2 + ... + (\frac{-a_m}{b})v_m \in \langle B \rangle$ e como $B \subset \langle B \rangle$, temos que B gera V.

Corolário

Todo espaço vetorial V finitamente gerado e não-nulo tem uma base.

Demonstração

Seja v um elemento não-nulo de V. Como $\{v\}$ é LI, existe uma base de V que o contém. Portanto V tem uma base.

Teorema

Seja V um espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado.

Então quaisquer duas bases de V têm o mesmo número de elementos.

Demonstração

Sejam $\{u_1, u_2, ... u_m\}$ *e* $\{v_1, v_2, ... v_n\}$ bases de V.

Como $\{u_1, u_2, ... u_m\}$ gera V e $\{v_1, v_2, ... v_n\}$ é LI, então $n \le m$.

Como $\{v_1, v_2, ... v_n\}$ gera V e $\{u_1, u_2, ... u_m\}$ é LI, então $m \le n$.

Assim $n = m$.

Dimensão

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado não-nulo.

A dimensão de V é o número de elementos de uma base de V.

A dimensão do espaço nulo é definida como sendo 0.

Denotamos por dimV a dimensão do espaço vetorial V.

Exemplos

1. Como $E_1 = (1, 0,...0)$, $E_2 = (0, 1,..., 0)$,...$E_n = (0, 0,...,1)$ formam uma base para $\mathbb{R}^n, \dim \mathbb{R}^n = n$.

2. $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$ pois $\{1, x^1, x^2,..., x^n\}$ é base para $P_n(\mathbb{R})$.

3. $S = \{A^i_j \mid i = 1,2,...,n\ j = 1,2,...,m\}$ onde A^i_j é a matriz cujas entradas são nulas exceto a entrada situada na linha i e na coluna j que é igual a 1, é base para $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. $Logo \dim M_{n\times m}(\mathbb{R}) = n.m.$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial com dimensão n positiva.

Então:

a) Qualquer subconjunto de n vetores LI é uma base de V.

b) Qualquer subconjunto de n vetores não-nulos que gera V é uma base de V.

Demonstração

a) Seja S subconjunto LI de V com n elementos. Então S está contido numa base B de V.Como dimV = n, então o número de elementos de B é n. Portanto S = B.

b) Seja $S = \{v_1, v_2, ..., \subset V - 0$ um conjunto que gera V.

Suponha que S é LD.

Então um dos vetores de S, digamos v_n, é combinação linear dos demais.

Assim $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ gera V.

Se $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ é LD, podemos eliminar mais um vetor de S e ainda continuar com um conjunto de geradores de V.

Deste modo podemos eliminar vetores de S até chegar a um conjunto LI de geradores de V com menos que n elementos. O que é um absurdo pois dimV = n.

Teorema

Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W de dimensão finita.

Então $\dim(U + V = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$.

Demonstração

Vejamos o caso $U \cap V \neq \{0\}$. O caso $U \cap V = \{0\}$é deixado como exercício.

Seja $B = \{w_1, w_2, ..., w_s\}$ *base de* $U \cap V$..

Então existem vetores $u_1, u_2, ..., u_t \in U$ *e* $v_1, v_2, ..., v_r \in V$ tais que $B \cup \{u_1, u_2, ..., u_t$ é base de U e $B \cup \{v_1, v_2, ..., v_r$ é base de V.

Afirmação: $B \cup \{u_1, u_2, ..., u_t\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_r\}$é base de $U + V$.

Portanto $dim(U+V) = s + t + r = (s+t)+(s+r) - r=$

$= \dim U + \dim V - \dim U \bigcap V$

Prova da Afirmação:

$\forall w \in U + V$, $w = u + v$, *onde* $u \in U$ *e* $v \in V$.

$$u \in U \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j \text{, onde } a_i, b_j \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., s, j = 1, 2, .., t$$

$$w = u + v = \sum_{i=1}^{s} (a_i + c_i) w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j + \sum_{k=1}^{r} d_k v_k$$

$$v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{s} c_i w_i + \sum_{k=1}^{r} d_k v_k \text{, onde } c_i, d_k \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., s, k = 1, 2, .., r$$

Assim $B \cup \{u_1, u_2, ..., u_t\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ gera U+V.

Finalmente vejamos que $B \cup \{u_1, u_2, ..., u_t\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_r\}$é LI.

$$\sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j + \sum_{k=1}^{r} d_k v_k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j = \sum_{k=1}^{r} (-d_k) v_k .$$

Daí $\sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j \in U \bigcap V$, o que implica

$$\sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j = \sum_{i=1}^{s} e_i w_i .$$

E daí $a_i = e_i \ \forall \, i = 1, ..., s$ *e* $b_j = 0 \ \forall \, j = 1, ..., t$.

Assim $0 = \sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j + \sum_{k=1}^{r} d_k v_k = \sum_{i=1}^{s} a_i w_i + \sum_{k=1}^{r} d_k v_k$ e,

consequentemente, $a_i = o \ \forall \, i = 1, ..., s$ *e* $d_k = 0 \ \forall \, k = 1, ..., r$.

3. Coordenadas de um Vetor

Seja V um espaço com base ordenada (base com uma ordem prescrita) $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Sabemos que cada vetor v de V tem uma única expressão nesta base $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, onde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Assim v é completamente determinado por $c_1, \ldots, c_n$ (nesta ordem).

Chamamos de vetor de coordenadas de v com relação à base ordenada $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a matriz $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$. Usamos a notação $[v]_B$ para representar o vetor de coordenadas de v com relação à base ordenada B.

Exemplos

1. Seja B = {(1, 1), (3, 4)} e v = (2, 3). B é base do R^2 e $[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De fato, (2, 3) = –1. (1, 1) + 1.(3. 4).

2. Seja B = {(1, 0), (0, 1)} a base canônica do R^2.

Então $\forall$v = (x, y) $\in R^2$, temos v = x . (1, 0) + y.(0, 1),

isto é, $[v]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. Seja B = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a base canônica de M_{2x2}(R).

Então, Av = $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ e M_{2x2}(R), $[v]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix}$.

Teorema (Mudança de base)

Seja V um espaço vetorial. Sejam $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases (ordenadas) de V.

Se $\forall\, j = 1, \ldots, n;\ v_j = a_{1j}u_1 + \ldots + a_{nj}u_n$ *com* $a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in \mathbb{R}$, *então* $[v]_C = M_C^B [v]_B$, *onde* $M_C^B = (a_{ij})_{n \times n}$.

Demonstração

Se $[v]_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, então $v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$.

Portanto, $v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n = b_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} u_i\right) + \ldots + b_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_{in} u_i\right) =$

$$= (a_{11}b_1 + \ldots + a_{1n}b_n)\,u_1 + \ldots + (a_{n1}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n)\,u_n.$$

$$Assim, [v]_C = \begin{pmatrix} (a_{11}b_1 + \ldots + a_{1n}b_n) \\ \vdots \\ (a_{n1}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M_C^B . [v]_B.$$

A matriz M_C^B é chamada matriz de mudança da base B para a base C.

Atividades de avaliação

1. Em cada item determine se os vetores do espaço vetorial V são LI ou LD.

$a)\ (1,2,3), (4,5,6)\ e\ (6,9,12)\ em\ V = \mathbb{R}^3.$

$b)\ x-1, x^2+1 e x^3-x^2-x+3\ em\ V = P_3(\mathbb{R}).$

$c)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} em\ V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$

2. Um subconjunto de um espaço vetorial que contém o vetor nulo é LI ?

3. Se um subconjunto S de espaço vetorial V é LI , então qualquer subconjunto de S é LI ?

4. Se um subconjunto S de espaço vetorial V é LD , então qualquer subconjunto de S é LD ?

5. Prove que três vetores no □ ^{2} são LD.Generalize este resultado para □ ^{n} .

6. Encontre n vetores LI em □ ^{n} .

7. Encontre n.m vetores LI em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

8. A união de subconjuntos LI de um espaço vetorial é LI ?

9. Se $\{u,v\}\{v,w\}\{w,u\}$ são subconjuntos LI de um espaço vetorial V, então $\{u,v,w\}$ é LI?

10. Mostre que dois vetores do $\mathbb{R}^2$ são LD precisamente quando eles são representados por segmentos de reta paralelos.

11. Sejam $x_1 = (2,1), x_2 = (4,3)\, e\, x_3 = (7,3)$.

a) Mostre que $\{x_1, x_2\}$ é base para $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $\langle x_1,\ x_2,\ x_3 \rangle$.

12. Se $x_1 = (1,\ 2,\ 3)\, e\, x_2 = (4,\ 5,\ 6)$

a) determine x_3 de modo que $\langle x_1,\ x_2,\ x_3 \rangle \neq \mathbb{R}^3$.

b) que condição deve satisfazer x_3 para que $\langle x_1,\ x_2,\ x_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

13. a) Ache uma base para o subespaço do $\mathbb{R}^4$ formado pelos vetores do tipo $(a+b, a-b+c,\ b,\ c)$ onde a,b e c são números reais .

b) Qual a dimensão do subespaço do primeiro item.

14. Sejam $x_1 = (1,\ 2,\ 2), x_2 = (2,\ 5,\ 4), x_3 = (1,\ 3,\ 2), x_4 = (2,\ 7,\ 4)\, e\, x_5 = (1,\ 1,\ 0)$

a) $(7,\ 11,\ 12) \in \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$?

b) Qual a dimensão de $\langle x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \rangle$?

15. Ache a dimensão do subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ gerado por

a) $x, x+1\, e\, x-1$.

b) $x^2,\ 1+x^2,\ x\, e\, x^3 - x^2$

16. a) Ache uma base para o subespaço do $P_3(\mathbb{R})$ formado pelo polinômio do tipo $ax^2 + bx + 2a + 3b, onde\ a, b \in \mathbb{R}$.

b) Qual a dimensão do subespaço do item anterior?

17. a) Ache uma base para o subespaço:

a) $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}\ do\ M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) Ache uma base para o subespaço $P_2(\mathbb{R})$ gerado por $x, x+1\, e\, x-1$.

18. Sejam $v_1 = (2,\ 1), v_2 = (4,3)\, e\, v_3 = (7,\ 3)$.

a) Mostre que $B - \{v_1,\ v_2\}$ é $base\ para\ o\ \mathbb{R}^2$..

b) Determine $[v_3]_B$..

c) Determine M_C^B, onde C é a base canônica $do\ \mathbb{R}^2$.

19. Se $v_1 = (1,\ 2,\ 3)\, e\, v_2 = (4,\ 5,\ 6)$

a) determine v_3 de modo que $B = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ seja base do $\mathbb{R}^3$.

b) determine $[v]_B, onde\ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

20. a) Ache uma base B para o subespaço:

$$V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A = {}^{t}A\}\ do\ M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

b) Ache $[v]_B\ onde\ v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Capítulo 4

Aplicações lineares

Objetivos

- Estudar o conceito de aplicação linear ou transformação linear.
- Estudar o conceito de isomorfismo de espaços vetoriais.
- Estabelecer relações entre matrizes e aplicações lineares.

1. Introdução às Aplicações Lineares

Iniciamos esta unidade introduzindo o conceito de aplicação linear e apresentando o teorema do núcleo e da imagem. No tópico seguinte trabalhamos com o conceito de isomorfismo de espaços vetoriais.Finalizamos estabelecendo relações entre matrizes e aplicações lineares.

Sejam V e W espaços vetoriais

Uma aplicação $T:V \to W$ é dita uma aplicação linear se:

$1. T(u+v) = T(u) + T(v); \forall u,v \in V.$

$2. T(au) = aT(u); \forall u \in V \; e \; \forall a \in \mathbb{R}.$

Observações

1. Se V e W são espaços vetoriais, então $T:V \to W$ é dita uma aplicação linear se, e somente se, $T(au+bv) = aT(u) + bT(v); \forall u,v \in V, \forall a,b \in \mathbb{R}$

2. Se V e W são espaços vetoriais, então $T:V \to W$ é dita uma aplicação linear, então $T(0) = T(0.0) = 0.T(0) = 0.$.

Exemplos

1. Se V e W são espaços vetoriais, então O : V → W tal que $O(v) = 0, \forall v \in V$, é uma aplicação linear, a aplicação linear nula.

2. Se V é um espaço vetorial, então $I:V \to V \; tal \; que \; I(v) = v, \forall v \in V,$ é uma aplicação linear, a aplicação linear identidade.

3. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; dada \; por \; T(a,b,c) = (a,b)$ é uma aplicação linear. De fato,

$$T((a,b,c)+(d,e,f)) = T((a+d,b+e,c+f)) = (a+d,b+e) = (a,b)+(d,e) =$$
$$= T((a,b,c)) + T((d,e,f))$$
$$T(r(a,b,c)) = T((ra,rb,rc)) = (ra,rb) = r(a,b) = rT((a,b,c)),$$
$$\forall (a,b,c),(d,e,f) \in \mathbb{R}^3 \; e \; \forall r \in \mathbb{R}.$$

4. Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})\, T\colon\ M_{n,1}(\mathbb{R}) \to M_{m,1}(\mathbb{R})\, dada\ por$
$T(X) = A.X, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, é uma aplicação linear.

5. $T\colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}\ dada\ por\ T(a,b) = a+b+1, \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$ não é aplicação linear por $T(0,0) = 1$.

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais.

Se V tem base $\{v_1, v_2, ...v_n\}$, então uma aplicação linear $T\colon V \to W$ fica univocamente determinada por $T(\{v_1,...,v_n\}) = \{T(v_1),...T(v_n)\}$.

Demonstração

$$\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\,.\, Assim\ T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i).$$

Exercício

Determine a aplicação linear

$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ tal\ que\ T(1,0) = (2,3)\, e\, T(0,1) = (4,5)$.

Solução:

$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1) =$
$x(2,3) + y(4,5) = (2x+4y, 3x+5y)$

2. Núcleo, Imagem, Homomorfismos e Automorfismo

Sejam U e V espaços vetoriais. Seja T uma aplicação linear de U em V. O núcleo de T é o subconjunto de U definido como $N(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$. A imagem de T é o subconjunto de V definido como $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

Exemplos

1. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a aplicação linear dada por $T(x,y) = (x+y,\ x-y)$.
$Então\ \ N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$.
$Agora\ \ T(\mathbb{R})^2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) = T(x,y) \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
$$(a,b) = T(x,y) \Leftrightarrow (a,b) = (x+y, x-y) \Leftrightarrow \begin{cases} a = x+y \\ b = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

2. Se U e V são espaços vetoriais e $O\colon U \to V$ é a aplicação nula, então $N(T) = U\ e\ O(U) = \{0\}$

3. Se U é um espaço vetorial e $I\colon U \to U$ é a aplicação identidade, então
$N(T) = \{0\} e\ I(U) = U.$
$Assim, T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2.$

Observações

Seja T uma aplicação (linear) de U em V.

1. T é injetora se T(u) = T(v) implicar u = v.
2. T é sobrejetora se a imagem da aplicação T, T(U), coincidir com V.
3. T é bijetora se é injetora e sobrejetora.

Teorema

Sejam U e V espaços vetoriais. Seja T uma aplicação linear de U em V. Então:

a) o núcleo de T, N(T), é um subespaço vetorial de U.

b) a imagem de T, T(U), é um subespaço vetorial de V.

c) T é injetora se, e somente se, N(T)= $\{0\}$.

Demonstração

Deixamos como exercício as demonstrações dos itens a e b.

Vejamos a demonstração do item c.

c) Suponha T injetora.

Temos que $u \in N(T) \Leftrightarrow T(u) = 0 \Leftrightarrow T(u) = T(0) \Leftrightarrow u = 0.$

$Logo\ N(T) = \{0\}.$

Reciprocamente , suponha $N(T) = \{0\}.$

$$T(u) = T(v) \Leftrightarrow T(u - v) = T(u) - T(v) = 0 = T(0) \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v.$$

Assim T é injetora.

Exemplos

1.Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}), tal\ que\ T(p(x)) = p(x)', \forall p(x) \in P_n(\mathbb{R})$

T não é injetora, seu núcleo é o conjunto dos polinomios constantes.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, tal\ que\ T((x, y)) = (x, 0, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2..$

$N(T) = \{(0,0)\}..$ Portanto T é injetora.

Teorema (Teorema do núcleo e da imagem)

Sejam U e V espaços vetoriais. Seja T uma aplicação linear de U em V.

Se dimU é finita , então dimU = dimN(T) + dimT(U).

Demonstração

Suponhamos que $N(T) \neq \{0\}$. O caso $N(T) = \{0\}$.é deixado como exercício.

Seja $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ base de N(T). Então existem $u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+m} \in U$ tais que $\{u_1, u_2, ...u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+m}\}$ é base de U.

Assim,

$$\forall u \in U\ ,\ u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} a_{n+j} u_{n+j}\ , onde\ a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+m} \in \mathbb{R}$$

Daí,

$$\forall u \in U\ ,\ T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} a_{n+j} u_{n+j}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i) + \sum_{j=1}^{m} a_{n+j} T(u_{n+j}) =$$

$= \sum_{j=1}^{m} a_{n+j} T(u_{n+j})$.Ou seja $\{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), ..., T(u_{n+m})\}$ $gera\ T(U)$..

Basta agora provarmos que $\{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), ..., T(u_{n+m})\}$ é LI .

$$\sum_{j=1}^{m} b_j T(u_{n+j}) = 0\ ,\ com\ b_j \in \mathbb{R}\ ,\ j = 1, ..., m.\ \ Implica\ T\left(\sum_{j=1}^{m} b_j u_{n+j}\right) = 0.$$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{m} b_j u_{n+j} \in N(T).\ Assim\ \sum_{j=1}^{m} b_j u_{n+j} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\ \ , onde\ a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

Como $\{u_1, u_2, ... u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+m}\}$, é LI, temos que

$$a_1 = ... = a_n = b_1 = ... = b_m = 0$$

Então, $\{u_1, u_2, ... u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+m}\}$ é base de U, $\{u_1, u_2, ... u_n,\}$ é base de N(T) e $\{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), ..., T(u_{n+m})\}$ é base de TU

Assim dimU = n + m = dimN(T) + dimT(U).

Corolário

Sejam U e V espaços vetoriais de mesma dimensão. Seja T uma aplicação linear de U em V. Então as afirmações abaixo são equivalentes.

a) T é sobrejetora.

b) T é injetora.

c) T é bijetora.

Demonstração

Neste caso $\dim V = \dim U = \dim N(T) + \dim T(U)$

$$Tinjetora \Leftrightarrow N(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim N(T) = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim U = \dim T(U)$$
$$\Leftrightarrow V = T(U) \Leftrightarrow Tsobrejetora.$$

Exercício

Sejam a_1, ..., a_n reais não todos nulos. Seja $H = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in R^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$

Mostre que dim H = n – 1.

Solução

H = N(T), onde T : $R^n \to R$ é dada por T(x_1, ..., x_n) = $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Como T não é a aplicação nula, então T é sobrejetora.

$Assim,\ n = \dim \mathbb{R}^n = \dim H + \dim T(\mathbb{R}^n) = \dim H + 1$,

$e\ daí\ \dim H = n - 1$

Isomorfismos e automorfismos

Sejam U e V espaços vetoriais.

Uma aplicação linear T de U em V bijetora é chamada um isomorfismo.

Se U = V, um isomorfismo de U em V é chamado um automorfismo.

Exemplos

1. A aplicação identidade I : U → U é um automorfismo qualquer que seja o espaço vetorial U
2. T : $R^n \to P_{n-1}(R)$, dada por T(a_1, ..., a_n) = $a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}$, é um isomorfismo.
3. T : $M_{m \times n}(R) \to R^{mn}$, dada por T(($a_{ij}$)) = ($a_{1l}$, ..., a_{ln}, a_{ml}, ...a_{mn}), é um isomorfismo.
4. T : $R^3 \to R^3$, dada por T (x, y, z) = (x – y, x – z, z – y), não é um isomorfismo.

3. Matriz de uma Aplicação Linear

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita.

Sejam $B = \{u_1, ..., u_n\}$ base de U e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ base de V.

Seja T : U → V uma aplicação linear.

$$Então\ T\ u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\ ,\ \forall\ j = 1, \dots, n.$$

A matriz $(aij) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é chamada matriz da aplicação linear T em relação as bases B e C e é denotada por $[T]_{B,C}$. No caso $U = V\ e\ B = C$ usamos a notação $[T]_B$.

Note que as colunas de $[T]_{B,C}$ são os vetores de coordenadas em relação à base C das imagens, por T,dos vetores da base B.

Exemplos

1. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, tal\ que\ T((x,y,z)) = (x+y, x-z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Se B e C são as bases canônicas de $\mathbb{R}^3\ e \mathbb{R}^2$, respectivamente, então

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam B e C bases de U e V, respectivamente.

Se O é a aplicação linear nula U em V, então $[O]_{B,C} = 0$, matriz nula $m \times n$, onde m = dimV e n = dimU.

3. Se B e C são bases do espaço vetorial V de dimensão finita e I é a aplicação identidade de V, então $[I]B,C = M_C^B$ a matriz de mudança da base B para C.

Teorema

Sejam *U, V, W* espaços vetoriais de dimensão finita.

Sejam $T:U \to V\ e\ S:V \to W$ aplicações lineares.

Se $B,\ C,\ D$ são bases de $U,\ V,\ W$ respectivamente, então

$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D}.[T]_{B,C}$.

Demonstração

Sejam $B = \{u_1, ..., u_n\}, C = \{v_1, ..., v_m\}\ e\ D = \{w_1, ..., w_p\}$

$Se\ [T]_{B,C} = [a_{ij}]\ e\ [S]_{C,D} = [b_{kl}],\ então\ S \circ T(u_j) = S(T(u_j)) =$

$$= S\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} S(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} S\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} w_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) w_k.$$

$$Logo\ [S \circ T]_{B,D} = \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) = [S]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

Corolário

Sejam U e V espaços vetoriais de mesma dimensão n.

Se $T:U \to V$ é um isomorfismo, então $[T]_{B,C}$ é invertível e

$[T]_{B,C}^{-1} = [T^{-1}]_{C,B}$.

Demonstração

$[T]_{B,C}.[T^{-1}]_{C,B} = [T \circ T^{-1}]_B = [I]_B = I_n$, matriz de identidade $n \times n$.

$[T^{-1}]_{C,B}.[T]_{B,C} = [T^{-1} \circ T]_C = [I]_C = I_n$, matriz de identidade $n \times n$.

Logo $[T]_{B,C}$ é $inversível\ e\ [T]_{B,C}^{-1} = [T^{-1}]_{C,B}$

Teorema

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C, respectivamente.

Se $T : U \rightarrow V$ é uma aplicação linear, então

$$\forall u \in U [T(u)]_C = [T]_{B,C}.[u]_B.$$

Demonstração

Sejam $B = \{u_1, ..., u_n\}, C = \{v_1, ..., v_m\}\, e\, D = \{w_1, ..., w_p\}$

$$Se [T]_{B,C} = [a_{ij}]\, e\, [S]_{C,D} = [b_{kl}], \text{então } S \circ T(u_j) = S(T(u_j)) =$$

$$= S\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} S(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} S\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} w_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) w_k.$$

$$Logo\ [S \circ T]_{B,D} = \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) = [S]_{C,D} [T]_{B,C}.$$

Atividades de avaliação

1. Verifique se a aplicação é linear.

a) $T : R^3 \rightarrow R$, tal que $T(x, y, z) = x + 4y - 2z$, $\forall (x, y, z) \in R^3$.

b) $T : P_2(R) \rightarrow P_3(R)$, tal que $T(a + bx + cx^2) = ax + bx^2 + cx^3$, $\forall a + bx + cx^2 \in P_2(R)$.

c) $T : P_2(R) \rightarrow R^3$, tal que $T(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$, $Aa + bx^2 + cx^3$, $\forall a + bx + cx^2 \in P_2(R)$.

d) $T : R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (2x - 1, x + y)$, $\forall (x, y) \in R^2$.

2. Determine o núcleo e a imagem das aplicações lineares da questão 1.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, tal\ que\ T(1, 0, 1) = (1, 1), T(0, 1, 0) = (2, 1)$
$T(1, 1, 2) = (0, 0)$.

a) Encontre T(x, y, z).

b) T é sobrejetora ?

c) T é injetora?

4. a) Ache um operador linear do $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja gerado por (1, 1, 1).

b) Ache uma base para a imagem do operador da atividade 1.

5. Ache uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3\ tal\ que$
$\dim N(T) = 2\, e \dim T(\mathbb{R}^4) = 2$.

6. Ache uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(\mathbb{R}^2) = \langle (1,2,0),(2,1,0) \rangle$.

7. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação a base $B = \{(1,0),(1,4)\}$ é $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ache a matriz de T em relação a base canônica.

b) T é um automorfismo?

8. Se T é uma aplicação linear de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V.

a) Prove que N(T) é um subespaço vetorial de U.

b) Prove que a imagem de T é um subespaço vetorial de V.

9. Seja T é uma aplicação linear de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V, ambos de dimensão finita. Prove que, T é bijetora se, e somente se, T(B) é base de V sempre que B é base de U.

10. Prove o teorema do núcleo e da imagem no caso $N(T) = \{0\}$.

Capítulo 5

Autovalores, Autovetores e Diagonalização

Objetivos

- Estudar o processo de diagonalização de matrizes $A_{m \times n}$ com entradas em $\mathbb{R}$
- Estabelecer relações entre a diagonalização de A e a existência ou não de vetores especiais de $\mathbb{R}^n$.
- Aplicar a diagonalização na resolução de sistemas de recorrência.

1. Autovalores e Autovetores

Seja A uma matriz n x n sobre $\mathbb{R}$. Diz-se que $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ é um autovetor de A, se AX = cX para algum $c \in \mathbb{R}$. Neste caso o escalar c é chamado o autovalor associado ao autovetor X.

Exemplo 1

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, como proceder para encontrar um autovetor $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de A?

Inicialmente procuremos os autovalores de A.

Devemos determinar os valores de $c \in \mathbb{R}$ tais que AX = cX.

Portanto, $\begin{cases} 2x + y = cx \\ 2x + 4y = cy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-c)x + y = 0 \\ 2x + (4-c)y = 0 \end{cases}$.

Agora, sendo $X \neq 0$, segue-se que $\det \begin{pmatrix} 2-c & 1 \\ 2 & 4-c \end{pmatrix} = 0$,

ou seja, $(2 - c)(4 - c) - 2 = 0 \Rightarrow c^2 - 6c + 6 = 0 \Rightarrow c = 3 + \sqrt{3}$ ou $c = 3 - \sqrt{3}$.

Assim os autovalores de A são $3 + \sqrt{3}$ ou $3 - \sqrt{3}$.

Determinados os autovalores, podemos encontrar os autovetores.

a) Autovetores associados ao autovalor $3 + \sqrt{3}$

Para isto basta a equação matricial

AX = (3 + $\sqrt{3}$)X, isto é, $\begin{cases} 2x + y = (3+\sqrt{3})\,x \\ 2x + 4y = (3+\sqrt{3})y \end{cases}$.

Portanto y = (1 + $\sqrt{3}$) x, com x $\in$, x$\neq 0$. Então é autovetor associado a 3 + $\sqrt{3}$ todo vetor do tipo X = $\begin{pmatrix} x \\ (1+\sqrt{3})x \end{pmatrix}$, com x $\in$, x$\neq 0$.

b) Autovetores associados ao autovalor $3 - \sqrt{3}$

Para isto basta resolver a equação matricial

AX = (3 - $\sqrt{3}$)X, isto é, $\begin{cases} 2x + y = (3 - \sqrt{3})\,x \\ 2x + 4y = (3 - \sqrt{3})y \end{cases}$.

Portanto y = (1 - $\sqrt{3}$) x, com x $\in$, x$\neq 0$. Então é autovetor associado a 3 - $\sqrt{3}$ todo vetor do tipo X = $\begin{pmatrix} x \\ (1-\sqrt{3})x \end{pmatrix}$, com x $\in$, x$\neq 0$.

Observação: O número de autovetores associados a um autovalor infinito. Na verdade, se c é autovalor de A, então

V_c = { X $\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, X $\neq$ 0 / AX = cX} é um subespaço vetorial de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ o qual é chamado autoespaço associado a c.

De fato,

$$0 \in V_c, \, pois \; A0 = c0 = 0$$

$$\forall X_1,\; X_2 \in Vc{:}A(X_1 + X_2) = A.(X_1) + A(X_2) = cX_1 + cX_2 = c(X_1 + X_2),$$

$$ou\; seja\; X_1 + X_2 \in V_c$$

$$\forall X \in V_c \, e \, \forall a \in \mathbb{R} : A(aX) = aAX = a(cX) = c(aX) \, ou\; seja\; aX \in V_c.$$

$$Mn \times 1(\mathbb{R}), X \neq 0$$

A Equação Característica.

A procura de autovetores associados ao autovalor c está condicionada à existência de solução X $\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, X $\neq$ 0 do sistema homogêneo (A – cI) X = 0. E como sabemos, tal sistema tem solução X $\neq$ 0 se, e somente se, det (A – cI) = 0.

A equação det(A – cI) = 0 é denominada a **equação característica** de A e as suas raízes são os autovalores ou valores característicos de A.

Observe que não necessariamente existe autovalor para A, conforme mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Então $\det(A - cI) = c^2 + 1 \neq 0$, $\forall\, c \in$ □ .

Portanto, A não possui autovalor .

Exemplo 3

Seja A uma matriz n x n sobre □ . Se $A^2 = 0$, prove que $c = 0$ é o único autovalor de A

Demonstração:

Seja c um autovalor de A.

Temos $AX = cX$, $X \neq 0$. Assim, $A^2X = AcX = c\,AX = c^2X$ e

portanto $c^2X = 0$.

Logo $c = 0$, pois $X \neq 0$.

Exemplo 4

Seja A uma matriz n x n com a propriedade de que a soma dos elementos de cada linha tem o mesmo valor s. Mostre que s é um autovalor de A.

Solução: Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e seja $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Então $AX = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Portanto, s é um autovalor de A.

1.1. Diagonalização

Seja A uma matriz n x n com entradas em □ . A é dita diagnalizável sobre □ se existe uma matriz P n x n invertível com entradas em □ tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal em □ .

Matrizes diagonais são de fácil manipulação.

Por exemplo, se $D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & c_n \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{N}$, então

$$D^k = \begin{pmatrix} c_1^{\,k} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & c_n^{\,k} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, se A é diagonalizável, isto é, $P^{-1}AP = D$ para alguma matriz P sobre $\mathbb{R}$.

Daí $D^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = (PA^2P^{-1}), \ldots, D^k = (PA^kP^{-1})$ e portanto

$A^k = (P^{-1}D^kP)$.

Por isso, as matrizes diagonalizáveis são desejáveis. No final deste tópico aplicaremos a propriedade acima para resolver sistemas de recorrência. Também existem aplicações em sistemas de equações diferenciais.

Vamos agora determinar condições necessárias e suficientes para que uma matriz $A_{n \times n}$ sobre $\mathbb{R}$ seja diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Começaremos com um exemplo bastante sugestivo.

Exemplo 1

Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ são autovetores da matriz

A, associados aos autovalores 2 e 3, respectivamente.

Se $P = (X_1\ X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então

$AP = A(X_1\ X_2) = (AX_1\ AX_2) = (2X_1 3X_2) = (X_1\ X_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = PD$.

P é uma matriz invertível, caso contrário, a equação PX = 0 teria uma solução

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e assim $aX_1 + bX_2 = 0$, isto é, X_1 e X_2 seriam LD.

Portanto $P^{-1}AP = D$. Isto é, A é uma matriz diagonalizavél.

Teorema

Seja A uma matriz n x n sobre $\mathbb{R}$.

Então:

Se $c_1, \ldots, c_n$ são autovalores distintos com autovetores associados $X_1, \ldots, X_n$, então $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é um conjunto LI de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

b) A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ A tem n autovetores LI em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Prova

a) Suponha $\{X_1, ..., X_n\}$ LD.

Assim, existe um índice **i** com **i < n** tal que $\{X_1, ..., X_i\}$ é LI, mas $\{X_1, ..., X_i, X_{i+1}\}$ é LD.

Logo existem $d_1, ..., d_i, d_{i+1} \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que:

$d_1X_1 + ... + d_iX_i + d_{i+1}X_{i+1} = 0.$ (I)

Multiplicando a igualdade (I) por A obtemos:

$Ad_1X_1 + ... + Ad_iX_i, + Ad_{i+1}X_{i+1} = 0.$

Daí $d_1AX_1 + ... + d_iAX_i, + d_{i+1}AX_{i+1} = 0.$

E também $d_1\, c_1X_1 + ... + d_ic_iX_i, + d_{i+1}\, c_{i+1}X_{i+1} = 0$ (II).

Multiplicando (I) por c_{i+1} e subtraindo do resultado (II) , obtemos

$(c_{i+1} - c_1)d_1X_1 + ... + (c_{i+1} - c_i)d_iX_i = 0.$

Como $\{X_1, ..., X_i\}$ LI, temos que $(c_{i+1} - c_1)d_1 = ... = (c_{i+1} - c_i)d_i = 0.$

Mas $c_{i+1} \neq c_1, ..., c_{i+1} \neq c_i$, portanto $d_1 = ... = d_i = 0$. Então $d_{i+1}X_{i+1} = 0$ e portanto $d_{i+1} = 0$.

Assim $d_1 = ... = d_i = d_{i+1} = 0$, o que é uma contradição, pois $\{X_1, ..., X_i, X_{i+1}\}$ é LD .

Concluímos que $\{X_1, ..., X_n\}$ é LI.

b)($\Rightarrow$) Inicialmente. Suponha A seja diagonalizável, isto é, que exista uma matriz P n x n com entradas em $\mathbb{R}$ tal que $P^{-1}AP = D$ onde D é diagonal em $\mathbb{R}$. Seja $c_1, ..., c_n$ as entradas da diagonal principal de D e $X_1, ..., X_n$ as colunas de P.

Então

$$A(X_1 \; ... \; X_n) = (X_1 \; ... \; X_n)\begin{pmatrix} c_1 & 0\cdots & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots 0 & c_n \end{pmatrix} = (c_1X_1 \; ... \; c_nX_n) \text{ e}$$

portanto,

$AX_1 = c_1X_1, AX_2 = c_2X_2, ..., AX_n = c_nX_n$. Isso mostra que $X_1, ..., X_n$ são autovetores da matriz A associados aos autovalores $c_1, ..., c_n$. Vejamos que $X_1, ..., X_n$ são elementos linearmente independentes de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Se $a_1X_1 + ... + a_nX_n = 0$ com $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$., então $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ é solução do sistema $PX = 0$.

Como a matriz $P = (X_1 ... X_n)$ é invertível, $P^{-1}PX = P^{-1}0$. Então $X = 0$, isto é, $a_1 = ... = a_n = 0$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que A tenha n autovetores $X_1, ..., X_n$ LI em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, e sejam $c_1, ..., c_n$ os autovalores associados (c_i é associado a X_i, $i = 1, ..., n$).

Seja $P = (X_1 \ldots X_n)$. Como $\{X_1, ..., X_n\}$ é LI, P é invertível, pois $PX = 0$ tem apenas a solução trivial $X=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Como $AX_i = c_iX_i$; $i=1,..,n$;$AP = A(X_1 \ldots X_n) =$

$$(AX_1 \ldots AX_n) = (c_1X_1 \ldots c_nX_n) = (X_1 \ldots X_n)\begin{pmatrix} c_1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & c_n \end{pmatrix} =$$

$$PD, \text{ onde } D = \begin{pmatrix} c_1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & c_n \end{pmatrix}$$

Donde $P^{-1}AP = D$, ou seja, A é diagonalizável .

Observação

A demonstração do item b do último teorema, nos fornece um procedimento padrão para diagonalizar matrizes, a saber:

1º. Encontre os autovalores $c_1, ..., c_n$ de A.

2º. Encontre os autovetores $X_1, ..., X_n$ de A associados a $c_1, ..., c_n$, respectivamente.

3º. $P^{-1}AP = D$, onde $P = (X_1 \ldots X_n)$ e $D = \begin{pmatrix} c_1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & c_n \end{pmatrix}$.

Vale ressaltar que existem matrizes n x n que não são diagonalizáveis. Para isso, basta que A não tenha n autovalores LI.

Exemplo 2

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A equação característica é

$\det(A - cI) = 0$, isto é, $(1 - c^2) = 0$. Portanto, o autovalor de A é somente

$c = 1$. De modo que se existisse P invertível tal que, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, teríamos

$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o que não é verdade. Portanto A não é diagonalizável.

Os próximos dois exemplos nos dão uma mostra da diagonalização de matrizes.

Exemplo 3

Suponha que em uma população de gatos e ratos observou-se que em cada ano o número de gatos é igual a quatro vezes o número de gatos menos duas vezes o número de ratos do ano anterior. Além disso, o número de ratos é igual a soma do número de gatos com o número de ratos do ano anterior. Se o número de inicial de gatos e ratos é 100 e 10, respectivamente, ache o número de cada espécie depois de n anos.

Solução: Seja g_n e r_n o número de gatos e de ratos, respectivamente, depois de n anos.Então

$$\begin{cases} g_{n+1} = 4g_n - 2r_n \\ r_{n+1} = g_n + r_n \end{cases}, g_0 = 100, r_0 = 10.$$

Para resolver o sistema (de recorrência lineares) acima vamos usar sua forma matricial.

$X_{n+1} = AX_n$, onde $X_n = \begin{pmatrix} g_n \\ r_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} g_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Assim, $X_1 = AX_0$, $X_2 = AX_1 = A^2X_0$, ..., $X_n = A^nX_0$ e portanto se soubermos calcular A^n, teremos resolvido o problema.

Por outro lado, sabemos que A é diagonalizável (V. Exemplo 1)

$P^{-1}AP = D$, onde $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Como $A = PDP^{-1}$, $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2.3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3^n - 2^n & 2.2^n - 2.3^n \\ 3^n - 2^n & 2.2^n - 3^n \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} 2.3^n - 2^n & 2.2^n - 2.3^n \\ 3^n - 2^n & 2.2^n - 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 200.3^n - 100.\,2^n + 20.\,2^n - 20.3^n \\ 100.3^n - 100.\,2^n + 20.\,2^n - 10.3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180.3^n - 80.\,2^n \\ 90.3^n - 80.\,2^n \end{pmatrix}$. Daí

$g_n = 180 . 3^n - 80 . 2^n$ e $r_n = 180 . 3^n - 80 . 2^n$ e $r_n = 180 . 3^n - 80 . 2^n$.

Exemplo 4

A seqüência dada pela relação de recorrência $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n \geq 1$, $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Isto é (0, 1, 1, 2, 3, 5, ...) é conhecida como Sequência de Fibonacci (Ver nota histórica a seguir).

Podemos determinar o enésimo elemento desta seqüência usando diagonalização de matrizes, como segue.

Fazendo $y_n = x_{n-1}$, obtemos o sistema de recorrência $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$, que pode ser descrito pela equação matricial $X_{n+1} = AX_n$, onde $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Assim, $X_2 = AX_1, \ldots, X_{n+1} = A^n X_1$ e $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Os autovalores de A são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Portanto, A é diagonalizável e a matriz $P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é tal que $P \quad AP \begin{pmatrix} \frac{1 \quad \sqrt{5}}{} & \\ & \frac{1 \quad \sqrt{5}}{} \end{pmatrix}$.Um cálculo fácil determina $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$.

$$X_{\ \ 1} = A \ X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1 \quad \sqrt{5}}{}) & 0 \\ 0 & (\frac{1 \quad \sqrt{5}}{}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Portanto, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}] \\ \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}] \end{pmatrix}$ e assim

$$y_{n+1} = x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$

Atividades de avaliação

1. Ache todos os autovalores e autovetores das matrizes

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Se A e B são matrizes n x n, mostre que AB e BA têm os mesmos autovalores.

Sugestão: Seja c um autovalor de AB.Separe em dois casos 1) c = 0 e 2) $c \neq 0$. Se c = 0,então det AB = 0 = det BA e portanto c também é autovalor de BA.Agora,se $c \neq 0$ e X é um autovetor de AB, então ABX = cX. Portanto, BABX = BcX = cBX e $BX \neq 0$,pois BX = 0 $\Rightarrow$ ABX = 0 = cX $\Rightarrow$ c = 0.

3. Ache matrizes que diagonalize:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

4. Para quais valores de a e b a matriz $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável em $\mathbb{C}$?

5. Seja A uma matriz diagonalizável e seja S uma matriz que diagonaliza A, isto é, $S^{-1}AS = D$ onde D é diagonal. Prove que T diagonaliza A $\Leftrightarrow$ T = CS onde AC = CA.

6. Seja $T{:}P_n(\square) \to P_n(\square)$ o operador diferenciação, isto é, $T(a_0 + a_1x + \ldots + nax^n) = a_1 + \ldots + na_nx^{n-1}$. Mostre que os autovalores de T são zero. Quais os autovetores?

7. Prove que A e A^t têm os mesmos autovalores.

8. Resolva o sistema de recorrência:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -12y_n \\ y_{n+1} = x_n + 7y_n \end{cases} \quad com \quad x_0 = o \ \ e \ \ y_0 = 1$$

9. Um casal de coelhos adultos gera mensalmente um casal de coelhos, que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Suponha os coelhos imortais. Começando no mês zero com um casal de coelhos (que terá prole apenas no mês 1), quantos casais serão gerados no mês n?

Sugestão: $C_0 = 1$; $C_1 = 1$ e $C_n = C_{n-2} + C_{n-1}$.

10. A é semelhante a B, se existe S invertível tal que $S^{-1}AS = B$. Se A é invertível e semelhante a B, então B é invertível e A^{-1} é semelhante B^{-1}.

11. Se A é semelhante a B, então A^2 é semelhante de B^2.

12. Se A é diagonalizável e B é semelhante a A, então B também é diagonaliável.z

13. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Encontre P tal que $P^t = P^{-1}$ e $P^{-1}AP$ é diagonal cujas entradas da diagonal principal são autovalores de A.

Texto complementar

Fibonacci

Leonardo Pisano, nasceu em 1170, e morreu depois de 1240. Também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci, foi o primeiro grande matemático da Europa Cristã medieval. Ele representou um papel importante revivendo matemáticas antigas e fazendo contribuições significantes.

Liber Abacci (Livro do Ábaco, 1202), seu tratado em aritmética e álgebra elementar, introduziu o sistema hindu-árabe moderno de números usando dez símbolos. Seu trabalho original mais importante está em análise indeterminada e teoria do número. A SEQUÊNCIA de FIBONACCI é nomeada por ele. *Mis practica geometriae* (Prática de Geometria, 1220) deu uma compilação da geometria do tempo e também introduziu alguma trigonometria.

A sequência de Fibonacci

Uma sequência de Fibonacci é uma SEQUÊNCIA na qual cada termo é a soma dos dois termos que o precedem. Foi nomeada assim porque Fibonacci foi o descobridor. A sucessão de Fibonacci, que tem 1 como seu primeiro termo é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

Os números também podem ser chamados *números de Fibonacci*. Esta equação é uma relação de recursão, ou relação de recorrência que relaciona termos diferentes de uma sequência ou de uma série. Sequências de Fibonacci se demonstraram útil na teoria do número, geometria, teoria de frações contínuas, e genética. Elas também surgem em muitos fenômenos aparentemente sem conexão, por exemplo, a SEÇÃO DOURADA, uma forma avaliada em arte e arquitetura por causa de suas agradáveis proporções, e o arranjo espiral de pétalas e galhos em certos tipos de flores e árvores.

Capítulo 6

Produto Interno

Objetivos

- Estudar a estrutura linear do $\mathbb{R}^n$.
- Transportar espaços vetoriais as noções de comprimento, ângulo e ortogonalidade vistas em $\mathbb{R}^n$.
- Apresentar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt .
- Utilizar projeções ortogonais para resolver problemas de aproximação.

1. O Produto Interno (escalar) em R^n

Neste tópico inicial lembraremos as principais propriedades do produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Sejam $X = (x_1, ..., x_n)\, e\, Y = (y1, ..., yn)\, em\, \mathbb{R}^n$.

O produto escalar de X e Y é definido como sendo o número real

$X.Y = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Podemos verificar facilmente as seguintes propriedades:

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$; X . Y = Y . X .

$\forall X \in \mathbb{R}^n$; $X . X \geq 0$ e $X . X = 0 \Leftrightarrow X = 0$;

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\, e\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $(\alpha X + \beta Y) . Z = \alpha(X . Z) + \beta(Y . Z)$.

1.1. Norma ou comprimento

A norma ou comprimento de $X \in \mathbb{R}^n$ é o número real não negativo $|X| = \sqrt{X.X}$.

Note que o símbolo | | também é usado para valor absoluto de número real.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathbb{R}^n$, então $|\alpha X| = \sqrt{\alpha X.\alpha X} = \sqrt{\alpha^2(x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2)} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2} = |\alpha||X|$ (o primeiro | | é o valor absoluto de α).

1.2. Ortogonalidade

O vetores X e Y $\in \mathbb{R}^n$ são ditos ortogonais (ou perpendiculares) quando X . Y = 0.

A definição acima é justificada pelo fato que em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ vale:

X.Y = | X | | Y | cosθ, onde θ é o ângulo entre X e Y com $0 \le \theta \le \pi$. E, portanto vetores perpendiculares tem seu produto interno igual a zero.

Exemplo 1

Sejam $X = (1, 2, 0, 1)\, e\, Y = (-1, 0, 3, 1)$ Então:

$X.Y = 1(-1) + 2(0) + 0(3) + 1(1) = 0$

$|X + Y|^2 = 0^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 = 17$

$|X|^2 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 = 6$

$|Y|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 3^2 + 1^2 = 11.$

Observação

No exemplo acima, $|X + Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2$. Na verdade, sempre que

X.Y = 0, teremos $|X + Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2$.

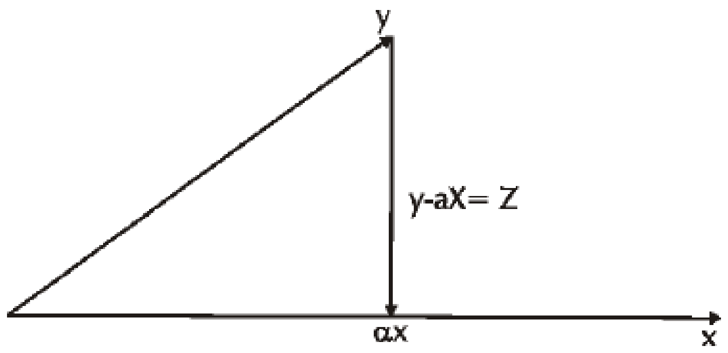
Com efeito,

$|X + Y|^2 = (X + Y).(X + Y) = X.X + X.Y + Y.X + Y.Y = |X|^2 + |Y|^2$. Este fato é conhecido como **Teorema de Pitágoras.**

Exemplo 2

Vetor Projeção

Dados dois vetores arbitrários $X \neq 0$ e $Y \in \mathbb{R}^n$, generalizando a noção de projeção do plano $\mathbb{R}^2$, definimos a projeção de Y na direção de X como o vetor αX, $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $Y = \alpha X + Z$ e $Z . X = 0$.



Vamos determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal modo que $(Y - \alpha X) . X = 0$.

Então, $Y.X - \alpha (X . X) = 0$ .E daí $\alpha = \dfrac{X.Y}{X.X} = \dfrac{X.Y}{|X|^2}$.

Portanto vetor projeção de Y sobre X, denotado $\operatorname{Proj}_X Y$, é o vetor

$\alpha X = \left(\frac{X.Y}{|X|^2}\right) X$. Isto é $\operatorname{Proj}_X Y = \left(\frac{X \,.\, Y}{|X|^2}\right) X$.

Por exemplo, se $X = (1,2,1)$ e $Y = (1,0,2)$, temos

$$\operatorname{Proj}_X Y = \left(\frac{X.Y}{|X|^2}\right) X = \left(\frac{1.1+2.0+1.2}{1^2+2^2+1^2}\right)(1,2,1) = \left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right).$$

$$Z = Y - \operatorname{Proj}_X Y = (1,0,2) - \left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{3}{2}\right)$$

$$Z\,.\,X = \frac{1}{2}.1 - 1.2 + 1.\frac{3}{2} = 0$$

$|X\,.\,Y| = 3$

$|X||Y| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\ \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}\sqrt{6} = \sqrt{30}$

Note que $|X\,.\,Y| \leq |X||Y|$. Esta desigualdade é conhecida como "**Desigualdade de Cauchy-Schwartz**".

Proposição (Desigualdade de Cauchy-Schwartz)

Se $X, Y \in \mathbb{R}^n$, então $|X\,.\,Y| \leq |X||Y|$.

Demonstração

Podemos supor $X \neq 0$. Pois, se $X = 0$, então $X\,.\,Y = 0$. No exemplo 2, vimos que podemos escrever $Y = \alpha X + Z$, onde $X\,.\,Z = 0$ e $\alpha = \frac{X.Y}{|X|^2}$.

Portanto, $|Y|^2 = |\alpha X|^2 + |Z|^2$, já que $\alpha X\,.\,Z = \alpha\,(X\,.\,Z) = 0$.

Segue-se que $|Y|^2 \geq |\alpha X|^2 = |\alpha|^2 |X|^2 = \frac{|X.Y|}{|X|^2}$.

Daí $|X\,.\,Y|^2 \leq |X|^2 |Y|^2$, e portanto $X\,.\,Y| \leq |X||Y|$.

Outra importante propriedade da norma em $\mathbb{R}^n$ é a **desigualdade triangular.**

Proposição (Desigualdade triangular)

Se $X, Y \in \mathbb{R}^n$, então $|X + Y| \leq |X| + |Y|$, $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração

$|X + Y|^2 = (X + Y).(X + Y) = X.X + X.Y + Y.X + Y.Y =$

$|X|^2 + 2(X.Y) + |Y|^2$.

Mas, $X.Y \leq |X.Y| \leq |X||Y|$.

Logo, $|X+Y|^2 \leq |X|^2 + 2.|X|.|Y| + |Y|^2 = (|X| + |Y|)^2$.

Donde $|X+Y| \leq |X| + |Y|$.

Observação

Se X e Y são vetores não-nulos, então

$|X.Y| = |X||Y| \Leftrightarrow Y = \alpha X$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, α não nulo.

De fato, se $Y = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α não nulo. Então

$|X.Y| = |X.\alpha X| = |\alpha||X|^2$ e

$|X||Y| = |X||\alpha X| = |X||\alpha||X| = |\alpha||X|^2$ $\therefore$

$|X.Y| = |X||Y|$.

Reciprocamente, se $|X.Y| = |X||Y|$. Sabemos que

$Y = \alpha X + Z$, onde $X.Z = 0$. Logo,

$|X.Y| = |X.(\alpha X + Z)| = |\alpha X.X| = |\alpha||X|^2$.

Portanto,

$|X||Y| = |\alpha||X|^2$ e $|Y| = |\alpha||X|$. Por outro lado,como

$Y = \alpha X + Z$ e $X.Z = 0$, segue-se que

$|Y| = |\alpha X| + |Z| = |\alpha||X| + |Z|$ e assim $Z = 0$, ou seja $Y = \alpha X$.

2. Espaços munidos de produto interno

2.1. Produto interno

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno em V é uma função $\langle\ \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz às seguintes propriedades:

a) $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$.

b) $\langle v, v\rangle \geq 0$ e $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

c) $\langle \alpha v + \beta u, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle + \beta\langle u, w\rangle$.

Para quaisquer $v, u, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1

O produto escalar definido no tópico anterior é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, este produto interno é chamado de produto euclidiano e o $\mathbb{R}^n$ munido deste produto interno é chamado espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$**.**

Norma de um vetor

Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle\ \rangle$.

Para v $\in$ V, definimos a norma de v como sendo o número real não negativo | v | = $\sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Propriedades da norma

Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle\ \rangle$. Então a norma tem as seguintes propriedades:

$$i)\ \forall v \in V; |v| \geq 0. E, |v| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

$$ii)\ \forall v \in V\ e\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow |\alpha v| = |\alpha||v|.$$

A demonstração das duas propriedades acima é deixada como exercício.

Projeção de um vetor sobre outro vetor

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ \rangle$.

Dados u, v $\in$ V com u $\neq$ 0. A projeção de u sobre v é o vetor

$$proj_u v = \left(\frac{\langle u, v\rangle}{|u|^2} \right) u.$$

Note que $\langle v - proj_u v, u\rangle = 0\ e\ \langle v - proj_u v, proj_u v\rangle = 0.$

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwartz)

Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle\ \rangle$.

Então, $\forall$ u, v $\in$ V, | $\langle$u, v$\rangle$| $\leq$| u || v |.

Demonstração

Se u = 0 a relação é obviamente satisfeita .

Suponhamos agora que u não é nulo.

$$Se\ w = proj_u v,\ |v|^2 = \langle v, v\rangle = \langle v - w + w, v - w + w\rangle =$$

$$= \langle v - w, v - w\rangle + 2\langle v - w, w\rangle + \langle w, w\rangle =$$

$$= |v - w|^2 + |w|^2 . Daí\ \ |v|^2 \geq |w|^2 . Assim \left(\frac{\langle u, v\rangle}{|u|^2} \right)^2 |u|^2 \leq |v|^2 .$$

Portanto, $\dfrac{\langle u, v\rangle^2}{|u|^2} \leq |v|^2\ ou\ \langle u, v\rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2 .$

$$Finalmente\ \left| \langle u, v\rangle \right| \leq |u|\ |v|\ .$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

Seja V um espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle\ \rangle$.

Então, $\forall$ u, v $\in$ V, $|u+v| \leq |u| + |v|$ $\forall$ u, v $\in$ V.

Demonstração

$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle =$

$= |u|^2 + 2.\langle u, v \rangle + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + |v|^2$.

Mas, $|\langle u, v \rangle| \leq |u|\,|v|$.

Logo, $|u+v|^2 \leq |u|^2 + 2.|u|\,|v| + |v|^2$.

Donde $|u+v|^2 \leq (|u|+|v|)^2, o\ que\ implica\ |u+v| \leq |u|+|v|$.

Exemplo 2

V = $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios em x com coeficientes reais de grau menor que n. Isto, é $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \,/\, a_i \in \mathbb{R}\}$.

Definamos $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são reais todos distintos. Podemos tomar $x_1 = 1, \ldots, x_n = n$.

Vamos verificar as condições para produto interno.

$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i) = \langle g, f \rangle$

$\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2 \geq 0$. Além disso, se $\langle f, f \rangle = 0$, então

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2 = 0$. Logo $f(x_1) = 0 = \ldots = f(x_n)$ e portanto f tem n raízes. Como n > grau de f, segue-se que f(x) = 0. É claro que se f = 0, então $\langle f, f \rangle = 0$.

Verifique que $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha\langle f, h \rangle + \beta\langle g, h \rangle$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall$ f, g $\in$ $P_n(\mathbb{R})$.

Observação

Diz-se que uma função $\langle\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ é um produto interno sobre um espaço vetorial complexo V, se:

a) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;

b) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

c) $\langle au + bv, w \rangle = \bar{a}\,\langle u, w \rangle + \bar{b}\,\langle v, w \rangle$;

quaisquer que sejam os vetores u,v e w pertencentes a V e a,b números complexos, sendo $\bar{z}$ denota o conjugado do número complexo z, isto é, se

$z = c + id$, então $\bar{z} = c - id$.

Exemplo 3

$$Dados\ X = (x_1, ..., x_n)\ e\ Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n,, \left\langle X, Y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$, é um

produto interno sobre o espaço vetorial $□^n = \{(x_1, ..., x_n) / x_1, ..., x_n \in □\}$ Deixamos para o aluno verificar que temos de fato um produto interno. Este produto interno é chamado produto interno canônico de $□^n$.

3. O Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

3.1. Definições

Se V é um espaço munido de um produto interno $\langle\ \rangle$, os vetores u, v e V são ditos ortogonais quando $\langle u, v\rangle = 0$.

Um conjunto de vetores $A \subset V$ é dito ortogonal, se dois quaisquer vetores de A são ortogonais.

Se $A \subset V$ é ortogonal e cada vetor de A tiver norma 1, A é dito ortonormal.

Exemplo 1

Um Conjunto Ortonormal em $□^3$

Sejam $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$. Então $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ $\langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle$. Logo $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ é ortogonal. Observe que

$|v_1| = 1$, $|v_2| = \sqrt{2} = |v_3|$, isto é, A não é ortonormal. Entretanto, podemos facilmente obter, a partir de A, um conjunto ortonormal. Com efeito, $B = \left\{ v_1, \frac{v_2}{|v_2|}, \frac{v_3}{|v_3|} \right\}$ é ortonormal. (Verifique!).

Duas importantes propriedades de conjuntos ortogonais são dadas pela seguinte proposição.

Proposição

Se $\{v_1, ..., v_r\}$ é um subconjunto ortogonal de V, então $\{v_1, ..., v_r\}$ é LI.

Se $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V e $v \in V$, então

$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + + ... + \langle v, v_n\rangle v_n$.

Demonstração

Suponha $a_1v_1 + ... + a_rv_r = 0$ onde $a_1, ..., a_r \in □$.

Então $\langle a_1v_1 + ... + a_nv_r, v_i\rangle = = 0$, $\forall\ i = 1, ..., r$. Aplicando as propriedades do produto interno, obtemos

$a_1\langle v_1, v\rangle + \ldots + + a_i\langle v_i, v_i\rangle + \ldots + a_r\langle v_r, v_i\rangle = 0$. Mas $\langle v_j, v_i\rangle = 0\ \forall\ j \neq i$. Portanto, $a_i\langle v_i, v_i\rangle = 0 \therefore a_i = 0$, pois $\langle v_i, v_i\rangle > 0$.

Seja $v \in V$. Então $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, pois $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gera V. Repetindo o argumento do item a), vemos que $\langle v, v_i\rangle = a_i\langle v_i, v_i\rangle$. Mas, $\langle v_i, v_i\rangle = 1$. Assim, $a_i = \langle v, v_i\rangle$ e $v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \ldots + \langle v, v_n\rangle v_n$.

Exemplo 2

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e

$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

Para encontrar as coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ em relação à base B, não precisaremos resolver o sistema $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Basta calcular $\langle v, v_1\rangle$, $\langle v, v_2\rangle$ e $\langle v, v_3\rangle$. Por exemplo, se $v = (1, 1, 1)$, então $\langle v, v\rangle = 1$,

$\langle v, v_2\rangle = \sqrt{2}$ e $\langle v, v_3\rangle = 0$. Portanto $[V]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

É um processo para obter uma base ortonormal do espaço vetorial V a partir de uma base qualquer de V.

Se dimV = n , como vetores ortogonais são necessariamente LI, para conseguirmos uma base ortogonal de V basta apresentarmos n vetores ortogonais.

Vamos começar com dimV = 2.

Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base de V. Nosso objetivo é transformar a base $\{u_1, u_2\}$ em uma base ortogonal.

Para isso façamos $v_1 = u_1$.

Seja agora, $v_2 = u_2 - proj_{v_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1$.

Então $\langle v_2, v_1\rangle = \left\langle u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1, v_1 \right\rangle =$

$\langle u_2, v_1\rangle - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{|v_1|^2}\langle v_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_1\rangle - \langle u_2, v_1\rangle = 0$. Temos assim

uma base ortogonal de V:B= $\{v_1, v_2\}$.

Por indução, se $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V , então $v_1 = u_1$,

$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_j\rangle}{|v_j|^2} v_j$; $\forall$ i, $2 \leq i \leq n$, formam uma base ortogonal de V.

Deste modo, conseguimos ortogonalizar a base $\{u_1, \dots, u_n\}$, ou seja, usando os vetores $u_1, \dots, u_n$ conseguimos uma base ortogonal $\{v_1,\dots,v_n\}$. Normalizando cada um dos vetores obtidos temos uma base ortonormal

$\left\{\frac{v_1}{|v_1|}, \dots, \frac{v_n}{|v_n|}\right\}$ de V.

Observação

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt garante a existência de uma base ortonornal em todo espaço vetorial finitamente gerado munido de um produto interno.

Exemplo 3

Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$, onde $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$ uma base de V.

Vamos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

1º passo: $v_1 = u_1 = (1, 1, 1)$.

2º passo: $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3º passo: $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 =$

$$(0,1,1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Desta forma encontramos a base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$. Portanto

$\left\{\frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}, \frac{v_3}{|v_3|}\right\}$ é base ortonormal.

4. Complemento Ortogonal

Em todo este tópico V denota um espaço vetorial real munido de um produto interno.

Definição

Seja S um subespaço de V. O complemento ortogonal de S é definido como o subconjunto $S^\perp = \{v \in V \,/\, \langle v, s \rangle = 0\ \forall\, s \in S\}$ de V.

Observação

$S^\perp$ é um subespaço vetorial de V e $S^\perp \cap S = \{0\}$. A demonstração destes fatos é deixada como exercício.

Exemplo 1

Seja V = $\mathbb{R}^3$ e S = {$\alpha(1, 2, 3)$/ $\alpha \in \mathbb{R}$}. Vamos encontrar $S^\perp$. Seja

v = $(x, y, z) \in S^\perp$. Então v é ortogonal a $(1, 2, 1)$ e, portanto x + 2y + z = 0. Assim, $z = -(x+2y)$ e $v = (x, y, -(x+2y)) = = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)\, x(1, 0, -1)+y(0,1,-2)$. Concluímos que $S^\perp = \{x(1,0,-1) + y(0,\ 1,\ -2)\,/x,\ y \in \mathbb{R}\}$.

Podemos observar mais ainda: $\mathbb{R}^3 = S + S^\perp$. Com efeito, se

v = $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, resolvendo o sistema

$$(x,y,z) = a(1, 2, 1) + b(1, 0, -1) + c(0, 1, -2) = (a + b, 2a + c, a - b - 2c)$$

encontramos $a = \dfrac{x+2y+z}{6}$, $b = \dfrac{5x-2y-z}{6}$ e $c = \dfrac{y-x-z}{3}$.

Como já temos $S^\perp \cap S = \{0\}$, então $\mathbb{R}^3$ é soma direta de S e $S^\perp$ e escrevemos $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$.

Este não é um fato isolado.

Projeção de um vetor sobre um subespaço

Seja $v \in V$ e W um subespaço de V, onde dimV = n. Pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt W tem uma base ortogonal $\{v_1, \dots, v_r\}$. A projeção de v sobre W é definida como $proj_W v = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{\langle v,\ v_i\rangle}{|v_i|^2}\ v_i \in W$.

Note que

$\langle v - proj_W v\ , v_i\rangle = \langle v, v_i\rangle - \langle proj_W v, v_i\rangle = \langle v, v_i\rangle - \langle v, v_i\rangle = 0$,

pois $\langle v_j, v_i\rangle = 0$,

$\forall\, j \neq i$. Portanto, $v - proj_W v \in W^\perp$ e $v = proj_W v + (v - proj_W v) \in W \oplus W^\perp$

Exemplo 2

Neste exemplo vamos determinar a projeção de um vetor sobre um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Se $u \in W$, então

u = (x, y, z) = (x, y, –(x + y)) = x(1, 0, – 1) + y (0, 1 ,–1). Portanto,

$u_1 = (1, 0, -1)$ e $u_2 = (0, 1, -1)$ formam uma base para W. Usando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt encontramos $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1 = (0, 1, -1) - \dfrac{1}{2}(1, 0, -1) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1, \dfrac{-1}{2}\right)$ que formam uma base ortogonal para W.

Seja v = *(1, 1, 2)*, então $proj_W\, v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{|v_2|^2} v_2 =$

$-\frac{1}{2}(1, 0, -1) + \frac{-1}{3}\left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e

$z = v - proj_W\, v = (1, 1, 2) - \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Verifique que $\langle z, v_1\rangle = \langle z, v_2\rangle = 0$ e, portanto $z = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \in W^{\perp}$.

Teorema

Seja S um subespaço vetorial de um espaço vetorial finitamente gerado V munido de um produto interno $\langle\ \rangle$. Então $V = S \oplus S^{\perp}$ e $\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$.

Demonstração

Seja $\{u_1, \dots, u_r\}$ uma base ortonormal de S, isto é, $\langle u_i, u_j\rangle = 0, i \neq j$ e $|u_i| = 1$, $\forall$ i,j = 1, ..., r.

Seja $v \in V$ um vetor arbitrário e seja $w = \langle v, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle v, u_r\rangle u_r$.

Então $w \in S$, e $\forall$ i = 1, ..., r , $\langle v - w, u_i\rangle = \langle v, u_i\rangle - \langle w, u_i\rangle =$

$\langle v, u_i\rangle - \langle \sum_{j=1}^{r} \langle v, u_j\rangle u_j, u_i\rangle = \langle v, u_i\rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle v, u_j\rangle \langle u_j, u_i\rangle =$

$\langle v, u_i\rangle - \langle v, u_i\rangle = 0$, pois $\langle u_j, u_i\rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle u_i, u_i\rangle = 1$.

Portanto, $v - w \in S^{\perp}$.

Como v = w + (v – w), então $V = S + S^{\perp}$ .Temos também que

$S \cap S^{\perp} = \{0\}$, assim $V = S \oplus S^{\perp}$.

Daí temos também que $\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$.

Exemplo 3

Aplicando o Teorema

Seja W a reta de equação y = 2x em $\mathbb{R}^2$, obtenha uma equação para $W^{\perp}$.

Considere o produto interno de $\mathbb{R}^2$ sendo o canônico.

Inicialmente, observe que $W = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\}$ e, portanto W é gerado pelo vetor v = (1, 2).

Isto significa que $\dim W = 1$. Logo, pelo teorema podemos concluir que $\dim W^{\perp} = 1$, pois $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Assim, qualquer vetor não-nulo ortogonal a W, isto é, ortogonal a v = (1, 2) gera $W^{\perp}$.

Tome u = (2, –1).

Então $W^{\perp} = \{t(2,-1) / t \in \mathbb{R}\}$ que uma reta dada pelas equações $x = 2t,\ y = -t : t \in \mathbb{R}$ ou pela equação $y = \dfrac{-x}{2}$.

A seguir apresentaremos uma interessante interpretação do vetor projeção, com aplicações na resolução de problemas práticos.

Teorema (Teorema da Melhor Aproximação)

Se W é um subespaço de V e v ∈ V, então

$|v - proj_W v| \leq |v - x|\ \forall x \in W$, isto é, $proj_W v$ é o vetor de W que melhor aproxima v.

Demonstração

Se x ∈ W e v ∈ V, podemos escrever $v - x = v - proj_W v + proj_W v - x$.

Como $v - proj_W v \in W^{\perp}$, segue-se que

$\langle proj_W v - x, v - proj_W v \rangle = 0$ e portanto

$|v - x|^2 = |v - proj_W v|^2 + |proj_W v - x|^2$. Logo,

$|v - x|^2 \leq |v - proj_W v|^2$.

E daí $|v - proj_W v| \leq |v - x|$.

O Método dos Mínimos Quadrados

Em muitos problemas físicos nos deparamos com sistemas lineares do tipo AX = B com m equações e n incógnitas que não tem solução, isto é, AX = B é inconsistente. Nestes casos podemos encontrar uma solução aproximada do sistema. Isto é, encontrando $X \in M_{nx1}(\mathbb{R})$ tal que $|AX - B|$ seja mínima. Freqüentemente isto ocorre em problemas físicos.

A origem do nome mínimos quadrados vem do fato de estarmos procurando um mínimo para $|AX - B|$. Pois, se $AX - B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, então

$|AX - B|$ é mínimo quando $|AX - B|^2 = a_1^2 + \ldots + a_m^2$ for mínimo.

Problema

Encontre $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|AX_0 - B| \leq |AX - B|\ \forall X \in \mathbb{R}^n$, onde $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{R}^m$.

Quando necessário identificamos o vetor $Y = (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r$ com a matriz coluna $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$

Solução

Seja W o espaço-coluna de A, isto é,

W = {AX / X $\in M_{nx1}(\mathbb{R})$} = {$x_1X_1 + ... + x_nX_n$ / $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ }, onde $X_1 ... X_n$ são as colunas de A .

Ora, estamos procurando um vetor $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Observe que o Teorema da Melhor Aproximação já nos mostra que o vetor de W que melhor aproxima B é $proj_W B$. Assim, X_0 é solução de AX = $proj_W B$ .Para isto, podemos inicialmente encontrar uma base {v_1, ... , v_r} ortonormal de W e calcular $proj_W B = \sum_{i=1}^{r} \langle B, v_i \rangle v_i$. Em seguida resolvemos o sistema AX = $proj_W B$ e encontramos X_0. Uma alternativa melhor para resolver o problema, pode ser obtida do seguinte fato: $Y \in W^{\perp} \Leftrightarrow A^tY = 0$.

Com efeito, se AX = $proj_W B$, então $B - AX \in W^{\perp}$ e, portanto $A^t(B - AX) = 0$, isto é, $A^tAX = A^t B$.

Nosso problema se reduz a encontrar uma solução do sistema $A^tAX = A^t B$. Veja que não precisamos encontrar $proj_W B$, o que simplifica bastante o nosso trabalho.

O sistema $A^tAX = A^t B$ é denominado o sistema normal associado de AX = B. Observe também que se A^tA for invertível, então $X = (A^tA)^{-1} A^t B$. Donde $AX = A(A^tA)^{-1} A^t B$ e portanto $proj_W B = A(A^tA)^{-1} A^t B$.

Exemplo 4: Solução de Mínimos Quadráticos

Seja $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \\ 4x + 5y = 5 \end{cases}$ é fácil ver que este sistema não tem solução. **(Verifique)**

Na notação matricial o sistema se escreve:

AX = B, onde A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

O sistema normal associado é $A^tAX = A^t B$, temos:

$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}$ e

$$A^t B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Ficamos com $\begin{pmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ e portanto $x = \dfrac{20}{11}$ e $y = \dfrac{20}{11}$.

Donde $X_0 = \begin{pmatrix} 20/11 \\ 50/11 \end{pmatrix}$ é a solução de mínimos quadráticos.

Agora, encontre $proj_W B = A(A^tA)^{-1} A^t B$ e coloque a sua solução no nosso fórum.

Atividades de avaliação

1. Sejam X e Y em $\mathbb{R}^n$. Prove que

$|X + Y|^2 + |X - Y|^2 = 2(|X|^2 + |Y|^2)$.

2. Dê exemplo de vetores X e Y em $\mathbb{R}^3$ tais que:

a) $|X + Y| < |X| + |Y|$.

b) $|X + Y| = |X| + |Y|$.

3. Dados dois vetores não-nulos X e Y em $\mathbb{R}^n$. Encontre condições necessárias e suficientes para que $|X + Y| = |X| + |Y|$.

4. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Encontre uma base para W e uma base de $W^\perp$. Descreva os elementos de $W^\perp$.

5. Seja $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$. Defina

$\langle u, v \rangle = 2xx' - xy' - x'y + 2yy'$.

Prove que isso define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

6. Seja $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário, com $abc \neq 0$. Determine t de modo que $v = (-bt, at, 0)$ e $W = (act, bct, -1/t)$ são tais que $\langle u, v \rangle = 0 = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$. ($\langle ... \rangle$ é o canônico).

7. Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle\ \rangle$. Prove que

$\forall\, u, v \in V,\ ||u| - |v|| \leq |u - v|$.

8. Num espaço vetorial real V com produto interno, o cosseno do ângulo entre dois vetores não-nulos u e v é definido como $\cos(u, v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$.

Prove se u e v são ortogonais e não-nulos, então:

$\cos^2(u,\ u - v) + \cos^2(v,\ u - v) = 1$.

9. Se V é um espaço vetorial real com produto interno, prove que

$|\,u\,|v + |\,v\,|u$ **e** $|\,u\,|v - |\,v\,|u$ são ortogonais.

10. Seja $v = (1, -2, 3)$ e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por

$u = (1, 2, 3)$ e $u_1 = (0, -4, 5)$. Sabemos que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$. Determine vetores

$w \in W$ e $z \in W^{\perp}$ tais que $v = w + z$.

11. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que

$(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\theta)^2 \leq a^2 + b^2,\ \forall\ a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

12. Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Mostre que se u e v são vetores ortogonais em V tais que $|\,u\,| = |\,v\,| = 1$. Prove que $|\,u - v\,| = \sqrt{2}$.

13. Seja W a interseção dos dois planos $x + y + z = 0$ e $x - y + z = 0$. Encontre uma equação para $W^{\perp}$. Determine também $\dim W^{\perp}$ e $\dim W$.

14. Ache o vetor projeção de $(3,4,-2)$ sobre o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que tem

base ortonormal $v_1 = \dfrac{1}{3}(2,\ 1,\ 3)$ e $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,\ -4,\ 1)$.

15. Seja $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear tal que $|L(X)| = |X|$ (L é chamado ortogonal).

a) Dê exemplos de alguns operadores ortogonais de $\mathbb{R}^2$.

b) Prove que L é ortogonal $\Leftrightarrow \langle L(X), L(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

16. Mostre que $v_1 = \left(\dfrac{-3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right)$, $V_2 = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, 0\right)$ e $v_3 = (0,\ 0,\ 1)$ formam

uma base ortonormal para R^3; em seguida escreva $v = (1, -1, 2)$ como

combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

17. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base

$\{u_1, u_2, u_3\}$ onde $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (1, 2, 1)$ em uma base ortonormal.

18. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V. Mostre que se $v \in V$, então $|v|^2 = \langle v, v_1\rangle^2 + \langle v, v_2\rangle^2 + \langle v, v_3\rangle^2$.

19. Dê a solução de mínimos quadráticos do sistema $AX = b$ onde

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e B = $(2, -1, 5)$, encontrando inicialmente $proj_W B$, onde W é o subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$ gerado por $u_1 = (1, 2, 4)$ e $u_2 = (-1, 3, 5)$ e depois resolvendo o sistema AX = $proj_W B$.

20. Ache a solução de mínimos quadráticos do sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y + z = 0 \\ -y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

(Sugestão: Use o método do sistema normal associado).

Texto complementar

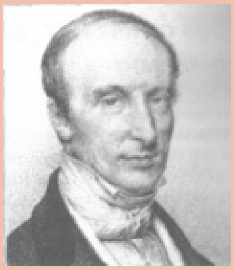
Erhard Shmidt (1876 - 1959)

Foi um matemático alemão, Schmidt recebeu seu dotorado de Universidade de Göttingen em 1905, onde estudou sob orientação de david Hilbert, um dos gigantes da Matemática. Mais tarde, em 1917, foi lecionar na Universidade de Berlim, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Schmidt fez importantes contribuições em uma variedade de campos matemáticos, mas é mais notável por ter conseguido moldar muitas das diversas ideias de Hilbert, num início conceito abrangente (*chamado espaço de Hilbert*), que é fundamental no estudo de espaços vetoriais de dimensões infinita. Schmidt primeiro descreveu o processo que leva seu nome num trabalho sobre equações integrais publicado em 1907.

Jörgen Pederson Gram (1850 - 1916)

Foi um atuário dinamarquês. A educação elementar de Gram foi em escolas de aldeias suplementares com tutoria particular. Depois de concluir o segundo grau ele obteve o grau de Mestre em Matemática com especialização na então sendo desenvolvida Álgebra Moderna. Em seguida Gram foi contratado como atuário na Companhia Hafnia de Seguros de Vida, onde ele desenvolveu fundamentos matemáticos de seguros de acidentes para a firma Skjorld. Ele trabalhou na Diretoria da Hafnia e dirigu a Skjold até 1910, quando se tornou diretor do Conselho Dinamarquês de Seguro. Enquanto trabalhavade atuário, ele obteve o Doutorado com sua tese intitulada "Sobre Desenvolvimentos em Séries Ultilizando o Método dos Mpinimos Quadrados." Foi nesta tese que primeiro formulou suas contribuições ao processo de Gram- Schmidt. Mais tarde Gram passou a interessar-se por Teoria Abstrata de Números, tendo ganhado uma medalha de ouro da Sociedade Real Dinamarquesa de Ciências e Letras por sua contribuição neste campo. No entanto, ele também manteve um interesse, durante toda sua vida, na inter-relação entre matemática teórica e aplicada, que o levou a quatro tratados sobre administração florestal dinamarquesa. Gram foi morto num final de tarde numa colisão de bicicleta a caminho de uma reunião da Sociedade Real Dinamarquesa.

Augustin Louis (Baron de) Cauchy (1789 - 1857)

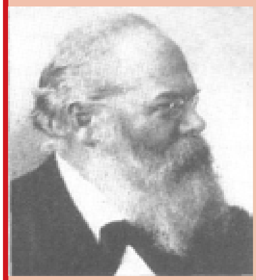


Foi um matemático francês. A educação básica de Cauchy foi adquirida de seu pai, um advogado e mestre dos clássicos. Cauchy ingressou na Escola Politécnica em 1805 para estudar engenharia, mas por causa de sua saúde frágil, foi aconselhado e especializar em Matemática. Seu principal trabalho matemático começou em 1811, com uma série de soluções brilhantes a alguns difíces e importantes problemas.

As contribuições matemáticas de Cauchy nos 35 anos seguintes foram brilhantes e inacreditáveis em quantidade: mais de 700 artigos, que preencheu 26 volumes modernos. O trabalho de Cauchy iniciou a era da análise moderna; ele trouxe à Matemática padrões de precisão e de rigor impensáveis para os matemáticos mais antigos.

A vida de Cauchy foi inextrincavelmente ligada aos tumulos políticos de sua época. Por ser fortemente partidário da família Bourbon, ele abandonou mulher e filhos em 1830 para seguir o rei Carlos X ao exílio. Por sua lealdade ele foi feito um barão pelo ex-rei. Mais tarde, Cauchy retornou à França, mas só veio a aceitar uma posição universitária quando o governo abriu mão da exigência de um juramento de lealdade.

É difícil compreender Cauchy muito bem. Profundamente catótico, ele patrocinava trabalho de caridade para mães solteiras e criminosos bem como socoro para a Irlanda. No entanto, outros aspectos de sua vida o colocam noutra luz. O matemático norueguês Abel o descreveu como "louco, infinitamente católico e fanático," Alguns escritores louvam suas aulas, enquanto outros dizem que ele falava incessante e incoerentemente e, de acordo com um relatório, uma vez ele dedicou uma aula inteira à extração da raiz quadrada por um método muito bem conhecido pelos seus alunos. De qualquer forma, Cauchy é indiscutívelmente uma das maiores mentes da história da ciência.



Herman Armandus Schwarz (1843 - 1921)

Foi um matemático alemão. Schwarz foi o líder matemático de Berlim da primeira metade do século vinte. Por causa de sua dedicação ao ensino na Universidade de Berlim e de uma propensão para tratar com a mesma dedicação tanto fatos importantes quanto triviais, ele não publicou muito abundantemente. Sua tendência era concentrar-se em problemas concretos específicos, mas suas técnicas eram, muitas vezes, extremamente engenhosa e influenciaram o trabalho de outros matemáticos. A versão da desigualdade que leva o seu nome apareceu num artigo sobre superfícies de área mínima publicado em 1885.

Capítulo 7

O Teorema Espectral e Aplicações

Objetivos

- Conhecer as propriedades das matrizes reais simétricas, isto é, matrizes reais tais que $A = A^t$.
- Conhecer o Teorema Espectral (toda matriz simétrica é diagonalizável sobre os reais).
- Aplicar o Teorema Espectral em formas quádráticas, cônicas e quádricas.

1. Matrizes Simétricas

Definição: Uma matriz A real n x n é simétrica, se A = At.

Exemplo 1: Uma Matriz Simétrica Real

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Então $A^t = A$.

Para verificar se A é diagonalizável, precisamos inicialmente encontrar os seus autovalores, que como sabemos são as raízes da equação característica: det (cI – A) = 0, ou seja, $\begin{vmatrix} 1-c & 1 \\ 1 & 2-c \end{vmatrix} = 0 \therefore c^2 - 3c + 1 = 0$. Portanto,

$c_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $c_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ são os valores característicos de A.

Agora vamos determinar os autovetores.

1. Associados ao autovalor $c_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Devemos encontrar $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $AX = c_1X$, isto é, $\begin{cases} x + y = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x \\ x + 2y = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)y \end{cases}$

E daí, y= $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$x e os autovetores associados a c_1 são $\begin{pmatrix} x \\ (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})x \end{pmatrix}$ com x $\in \mathbb{R}$. Por exemplo, v_1 = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

2. Associados ao autovalor $c_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Devemos encontrar X $\in \mathbb{R}^2$ tal que AX = c_2X. Resolvendo o sistema AX = c_2X , obtemos

$X = \begin{pmatrix} x \\ ((1-\sqrt{5})/2)x \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, v_1 = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Do que vimos na unidade 4, podemos concluir que A é diagonalizada pela matriz P = = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$, isto é, $P^{-1}AP = D$, onde D = $\begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

Não é evidente que isto sempre ocorra com matrizes simétricas reais. Como preparação para o Teorema Espectral, precisamos algumas propriedades das matrizes simétricas. Observe que o Teorema Fundamental da Álgebra (todo polinômio de grau n sobre $\mathbb{C}$ tem n raízes em $\mathbb{C}$) nos garante que toda matriz n x n em $\mathbb{C}$ tem n autovalores que podem ser reais ou complexos. Em particular,uma matriz simétrica tem autovalores reais ou complexos. O teorema a seguir nos mostra que os autovalores de uma matriz simétrica são todos reais.

Antes, vamos lembrar um pouco de números complexos.

Um número complexo z é da forma z = a + i b, com a, b $\in \mathbb{R}$ e denotamos por $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os complexos. O simbolo i representa o número complexo tal que $i^2 = -1$.

O módulo de z = a + i b é | z | = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

O conjugado de z = a + i b é $\bar{z}$ = a – i b .

Um número complexo z é real se, e somente se, $\bar{z}$ = z.

Se z = a + i b , então $\bar{z}$ = (a + ib) (a – ib) = $a^2 + b^2 = |z|^2$.

Para quaisquer complexos z e w, $\bar{\bar{z}}$ = z, $\bar{z}\,\bar{w} = \overline{zw}$ e,

para z $\neq$ 0, $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Se A é uma matriz com entradas em $\mathbb{C}$, denotamos por $\overline{A}$ a matriz cujas entradas são os conjugados das entradas de A. E por A* a transposta conjugada de A, isto é, $A^* = \overline{A}^t$.

Não é difícil ver que $(A + B)^* = A^* + B^*$, $A^{**} = A$ e $(AB)^* = B^* A^*$ **(Verifique).**

Agora o teorema.

Teorema

Seja A uma matriz real n x n simétrica. Então:

a) os autovalores de A são todos reais.

b) autovetores de A associados a autovalores distintos são ortogonais.

Prova

a) Seja c um autovalor de A associado a um autovetor X (possivelmente, $X \in \mathbb{C}^n$). Então AX = cX e tomando a transposta conjugada, obtemos

$X^*A^* = \overline{c}\, X^*$. Mas, $A^* = A^t = A$, pois A é uma matriz simétrica real. Logo, $X^*A = cX^*$. Agora multiplique por X e obtenha $X^*AX = \overline{c}\, X^*X = \overline{c}\,(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$ onde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Por outro lado, $X^*AX \in \mathbb{C}$ e $(X^*AX)^* = X^*A^*X^{**} = X^*AX$.

Logo $X^*AX \in$ □ e assim $X^*AX = \overline{c}\, X^*X = \overline{c}\,(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2) \in$ □ ,

onde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Como $X \neq 0$, então $|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \neq 0$, donde $\overline{c} \in$ □ e portanto $c \in$ □ .

b) Sejam X e Y autovetores associados a autovalores distintos c e d respectivamente. Então AX = cX e AY = dY. Assim, $Y^*AX = Y^*cX = cY^*X$. Do mesmo modo, $X^*AY = X^*dY = dX^*Y$.

Tomando transposta conjugada, deduzimos que $(Y^*AX)^* = (cY^*X)^*$, ou seja $X^*A^*Y^{**} = \overline{c}\, X^*Y^{**} \therefore X^*AY = cX^*Y$. Portanto, $cX^*Y = dX^*Y \therefore$

$(c - d)\, X^*Y = 0$. Mas, como $c - d \neq 0$, segue-se que $X^*Y = 0$ e assim X e Y são ortogonais.

O próximo teorema será decisivo para a prova do Teorema Espectral.

Teorema de Schur

Seja A uma **matriz simétrica real**. Então existe uma matriz P real ortogonal, isto é, $P^t = P^{-1}$, tal que P^tAP é triangular superior.

Prova

Provaremos o teorema por indução sobre n, onde A é n x n.

Se n = 1, é claro que A é triangular superior. Suponha n>1 e seja c_1 um autovalor de A. Pelo teorema anterior, $c_1 \in \mathbb{R}$. Seja $X_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor associado a c_1. É claro que podemos supor $|X_1| = 1$ (aqui vamos olhar $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico), pois $\dfrac{X_1}{|X_1|}$ também é associado a c_1. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos conseguir uma base ortonormal $\{X_1, \dots , X_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Seja $P_0 = (X_1 \dots X_n)$; então P_0 é ortogonal, pois as colunas $X_1, \dots , X_n$ formam um conjunto ortonormal.

Agora, $P_0^tAX_1 = P_0^tc_1X_1 = c_1 (P_0^tX_1)$. Também $X_i^tX_1 = 0$ se i > 1 e $X_1^tX_1 = 1$. Portanto, $P_0^tAX_1 = c_1(P_0^tX_1) = \begin{pmatrix} X_1{}^tX_1 \\ \vdots \\ X_n{}^tX_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como $P_0^tAP_0 = P_0^tA(X_1 \dots X_n) = (P_0^tAX_1\ \ P_0^tAX_2 \dots P_0^tAX_n) = \begin{pmatrix} c_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$,

onde A_1 é (n – 1) x (n – 1) e B é um (n – 1)-vetor linha. Observe que

$(P_0^tAP_0)^t = P_0^tA^t(P_0^t)^t = = P_0^tAP_0$, segue-se que $\begin{pmatrix} c_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} c_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, ou seja $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ B & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ e portanto B = 0 e $A_1^t = A_1$. Assim, por hipótese de indução, existe uma matriz P_1 ortogonal real tal que $P_1^tAP_1 = T_1$ é triangular superior.

Ponha $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$.

Então $P_2^tP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1{}^tP_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$.

Seja $P = P_0P_2$. Então

$P^tP = (P_0P_2)^tP_0P_2 = P_2^t(P_0^tP_0)P_2 = P_2^tIP_2 = P_2^tP_2 = I.$

Finalmente,

$$P^tAP = (P_0P_2)^t A P_0P_2 = P_2^t(P_0^tAP_0) P_2 = P_2^t \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & P_1^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^tA_1P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}.$$ Isto

mostra que P^tAP é triangular superior.

Como recompensa pelo trabalho desenvolvido para provarmos os dois teoremas anteriores, ganhamos quase que de graça o Teorema Espectral.

Teorema (Espectral)

Seja A uma matriz simétrica real. Então existe uma matriz real ortogonal P tal que P^tAP é diagonal.

Prova

Pelo Teorema de Schur, existe uma matriz real ortogonal P tal que

$P^tAP = T$ é triangular superior. Então T^t é triangular inferior. Mas,

$T^t = (P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tAP = T$. Isto mostra que T é triangular inferior e também triangular superior. Portanto, T é necessariamente diagonal.

Corolário

Se A é real simétrica, então existe uma base ortogonal de R^n consistindo de autovetores.

Prova

Segue do **Teorema Espectral** que existe uma matriz real P tal que

$P^tAP = D$,onde D é diagonal. Assim, $AP = PD$, pois $P^t = P^{-1}$.Se $P = (X_1 \dots X_n)$ e $d_1, \dots, d_n$ são as entradas de D, então $AX_i = d_iX_1$ e portanto X_i é autovetor de A e como P é ortogonal. Segue-se que $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base ortogonal de n.

Exemplo 2 - Um Método para Diagonalizar Matrizes Simétricas.

Seja A, matriz simétrica nxn real.Para diagonalizar A,podemos adotar os seguintes procedimentos:

a) encontre os autovalores e bases para os autoespaços.

b) agora ortogonalize, pelo processo de Gram-Schmidt, os vetores de cada base dos autoespaços.

c) finalmente,ortonormalize a base encontrada no item ii)e obtenha base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ com $P = (X_1 \dots X_n)$ ortogonal e $P^tAP = D$ diagonal.

Por exemplo,se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Então:

autovalores: 3 e –1.

autovetores: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associado a 3 e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associado a –1. Os autoespaços

V_3 e V_{-1} têm dimensão 1.

ortonormalizando:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};$$

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad P^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$PP^t = I$

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Formas Quadráticas

Uma forma quadrática real nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ é um polinômio em $x_1, \dots, x_n$ com coeficientes reais e no qual todo termo tem grau 2. Por exemplo, $q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ é uma forma quadrática em x e y.

Observe que

$$q = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Em geral uma forma quadrática q em $x_1, \dots, x_n$ se escreve como $q = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = X^tAX$, onde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Fato Importante: Se $q = X^tAX$ é uma forma quadrática real. Então $X^tAX \in \mathbb{R}$ e portanto $(X^tAX)^t = X^tAX$. Mas, também vale $(X^tAX)^t = X^tA^tX^{tt} = X^tA^tX$.

Portanto, $q = \frac{1}{2}(X^tAX + X^tAX) = \frac{1}{2}(X^tAX + X^tA^tX) = X^t(\frac{1}{2}(A + A^t))X$.

Por outro lado, $\frac{1}{2}(A + A^t)$ é simétrica, pois

$(\frac{1}{2}(A + A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t + A^{tt}) = \frac{1}{2}(A + A^t)$.

Assim, toda forma quadrática real pode ser escrita $q = X^tAX$ onde A é simétrica real. De agora em diante estaremos supondo $q = X^tAX$ onde A é simétrica real. Isto nos permitirá usar o Teorema Espectral para escrever q em termos de quadrados.

Exemplo 3: Encontrando a Matriz de uma Forma Quadrática

Seja $q = x^2 + xy + xz + z^2$. Então $q = (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Teorema

Seja $q = X^tAX$ uma forma quadrática real. Então existe uma matriz real ortogonal P tal que $q = c_1x_{1'}^2 + ... + c_nx_{n'}^2$ onde $x_1', ..., x_n'$ são as entradas de $X' = P^tX$ e $c_1, ..., c_n$ são autovalores de A.

Prova

Seja P ortogonal tal que $P^tAP = D$ é diagonal, com entradas $c_1, ..., c_n$.

Defina $X' = P^tX$. Então:

$PX' = X$ e $q = X^tAX = (PX')^tAPX' = X'^tP^tAPX' = (X')^tDX' = =c_1x_{1'}^2 + ... + c_nx_{n'}^2$.

Exemplo 4: Eliminando os Termos Cruzados

Seja $q = x^2 + 4xy + y^2$. Queremos eliminar o termo 4xy. Com efeito, $q = (x\quad y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^tAX$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Conforme vimos no exemplo 2, $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$,

$P^t = P^{-1}$, $P^tAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Portanto, $q = 3x'^2 - y'^2$, onde $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^tX$.

2.1. O Sinal da Forma Quadrática

Diz-se que a forma quadrática $q = X^tAX$ é positiva definida, se $q > 0$ $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$; se $q < 0$ $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$, q é negativa definida e se q assume valores positivos e negativos, dizemos que q é indefinida. É interessante notar que podemos determinar a natureza de q (positiva, negativa ou indefinida) analisando somente os autovalores de A.

De fato, se $q = X^tAX$ (A simétrica real). Fazendo $X' = P^tX$, P é ortogonal real tal que $P^tAP = D$ é diagonal sobre $\mathbb{R}$ .Então, como já vimos $q = c_1x_1'^2 + ... + c_nx_n'^2$ onde $c_1, ..., c_n$ são os autovalores de A (as entradas de D) e $x_1', ..., x_n'$ são as entradas de X'. Agora, como $X' = P^tX$ e $P^t = P^{-1}$ é invertível, se X varia sobre todos os velores não-nulos de $\mathbb{R}^n$, então X' também varia sobre todos os vetores não-nulos de $\mathbb{R}^n$.

Assim, $q > 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \Leftrightarrow q > 0$

$\forall X' \in \mathbb{R}^n, X' \neq 0$.

Desta maneira, é suficiente discutir o comportamento de q como forma quadrática em $x_1', ..., x_n'$ e podemos concluir:

q é positiva $\Leftrightarrow c_i > 0 \ \forall i = 1, ..., n$.

q é negativa $\Leftrightarrow c_i < 0$.

q é indefinida $\Leftrightarrow$ existe $c_i > 0$ e $c_i < 0$.

Exemplo 5: Determinando o Sinal da Forma Quadrática

Seja $q = -2x^2 - y^2 - 2z^2 + 6xz$ uma forma quadrática em x, y, z.

A matriz da forma é $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ que tem autovalores –5, –1 e 1

(Verifique). Portanto q é indefinida.

Finalizaremos com um critério muito diferente para a positividade de uma matriz.

Teorema

Seja A uma matriz simétrica real. Então A é positiva definida, se e somente se, $A = B^tB$ para alguma matriz real invertível B.

Prova

Suponha $A = B^tB$, onde B é real invertível. Então

$q = X^tAX = X^tB^tBX = (BX)^tBX = |BX|^2$ e portanto $q > 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n$ com $X \neq 0$, pois sendo B invertível, $X \neq 0 \Rightarrow BX \neq 0$.

Reciprocamente, suponha que A seja positiva definida. Então todos os autovalores de A são positivos, também existe uma matriz real ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal cujas entradas são os autovalores de A, d_1, ..., d_n todos positivos. Defina $\sqrt{D}$ a matriz real diagonal com entradas $\sqrt{d_1}$, ..., $\sqrt{d_n}$ na diagonal principal. Então $A = PDP^t$, pois $P^t = P^{-1}$, e portanto $A = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^t = (\sqrt{D}P^t)^t\sqrt{D}P^t = B^tB$ onde $B = \sqrt{D}P^t$ é invertível, pois $\sqrt{D}$ e P^t são invertíveis.

Atividades de avaliação

1. Dada A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre P_{3x3} ortogonal real tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

2. Seja P uma matriz 3 x 3 real. Prove que A é ortogonal $\Leftrightarrow$ os vetores colunas de A formam um conjunto ortonormal de □ ^{3}. (□ ^{3} com o produto interno canônico).

3. Se A é uma matriz n x n e u e v são vetores em □ ^{n} colunas. Prove:

$$\begin{cases} \langle Au, v\rangle = \langle u, A^t v\rangle \\ \langle u, Av\rangle = \langle A^t u, v\rangle \end{cases}$$

4. Problema Resolvido 1. Se A é real n x n. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é ortogonal, isto é, $P^t = P^{-1}$.

(b) $|AX| = |X|$, $\forall$ X $\in$ □ ^{n}.

(c) $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ $\forall$ X, Y $\in$ □ ^{n}.

Solução:

(a $\Rightarrow$ b): temos $|AX| = \sqrt{\langle AX, AY\rangle} = \sqrt{\langle X, A^t AY\rangle} = \sqrt{\langle X, Y\rangle}$.

Observe que a segunda igualdade acima vale pelo exercício 3 e a última igualdade segue do fato que $A^t = A^{-1}$.

(b $\Rightarrow$ c): Suponha $|AX| = |X|$ $\forall$ X $\in$ □ ^{n}. Precisamos mostrar que $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$. Com efeito,

$$\langle AX, AY \rangle = \frac{1}{4}|AX + AY|^2 - \frac{1}{4}|AX - AY|^2 = \frac{1}{4}|A(X+Y)|^2 - \frac{1}{4}|A(X-Y)|^2 =$$

$\frac{1}{4}|(X+Y)| - \frac{1}{4}|(X-Y)| = \langle X, Y \rangle$ **(Verifique todas as igualdades)**

(c $\Rightarrow$ a) Suponha $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ $\forall$ X, Y $\in$ □ ^{n}. Então, pelo exercício 3, $\langle X, A^tAY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

$\therefore \langle X, A^tAY \rangle - \langle X, Y \rangle = 0$

$\therefore \langle X, A^tAY - Y \rangle = 0$

$\therefore \langle X, (A^tA - I)Y \rangle = 0$

Portanto $(A^tA - I)Y = 0$, $\forall$ Y $\in$ □ ^{n} e assim $A^tA - I = 0 \therefore A^tA = I$.

5. Problema Resolvido 2. Ache todas as matrizes ortogonais reais 2 x 2.

Solução: Seja A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal real; portanto

$A^tA = I$ e $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $\therefore$ $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$ e $ab + cd = 0$.

A primeira igualdade $a^2 + c^2 = 1$ nos garante que o ponto (a, c) é um ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Assim, existe $\alpha \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos\alpha = a$ e $\operatorname{sen}\alpha = c$. De modo análogo, existe $\beta \in [0, 2\pi]$ tal que $b = \cos\beta$ e $d = \operatorname{sen}\beta$.

Agora, $ab + cd = 0 \Rightarrow \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = 0$, isto é,

$\cos(\alpha - \beta) = 0 \therefore \alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2}$ ou $\alpha - \beta = \pm\frac{3\pi}{2}$. Conclua que

A = $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou A = $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

6. Determine se as seguintes formas quadráticas são positivas,negativas ou indefinidas.

a) $2x^2 - 2xy + 3y^2$

b) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 3xz$

7. Seja A uma matriz real $n \times n$ positiva definida ($X^tAX > 0\ \forall\ X \in \mathbb{R}^n$) e seja P uma matriz real $n \times n$.Prove que P^tAP também é positiva definida.

8. Seja $q = x^2 - 8xy - 5y^2$.Encontre uma mudança de variável $X = PX'$ que transforma q em uma forma quadrática sem termo $x'y'$.

9. Seja A uma matriz real simétrica 3 x 3 e sejam $m = \min\{X^tAX; |X| = 1\}$, $M = \max\{X^tAX : |X| = 1\}$.Seja P uma matriz ortogonal tal que $P^tAP = D$ seja a matriz diagonal cujas entradas da diagonal principal são os autovalores de A. Prove:

a) se $X = PX'$,então $X^tAP = (X')^tDX'$

b) se $X = PX'$,então $|X| = |PX'| = |X'|$.Em particular, $|X| = 1 \Leftrightarrow |X'| = 1$

c) m é o menor autovalor de A e M é o maior autovalor de A.

10. Seja A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.Encontre o valor máximo e o valor mínimo da forma quadrática X^tAX sujeita à restrição $|X| = 1$.Encontre também os vetores de $\mathbb{R}^3$ em que o mínimo e o máximo ocorrem.

Capítulo 8

Cônicas e Quádricas

Objetivos

- Aplicar o Teorema Espectral ao estudo das cônicas e quádricas.

1. Um Problema Fundamental

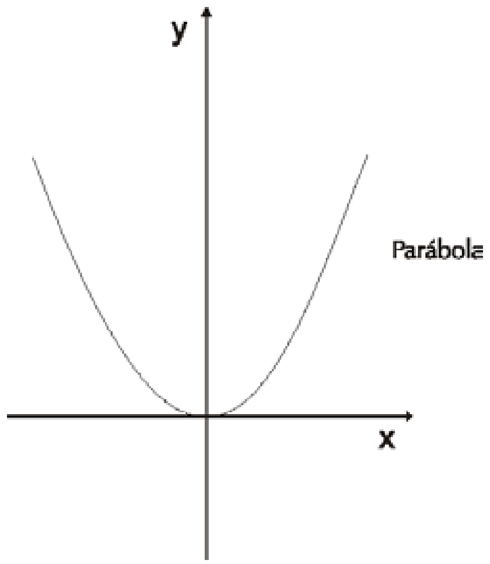
Um problema fundamental da Geometria Analítica é obter a superfície representativa de uma dada equação.

Já sabemos que a equação $Ax + By + C = 0$, onde A, B e C são números reais com pelo menos A ou B não-nulo representa uma reta e que

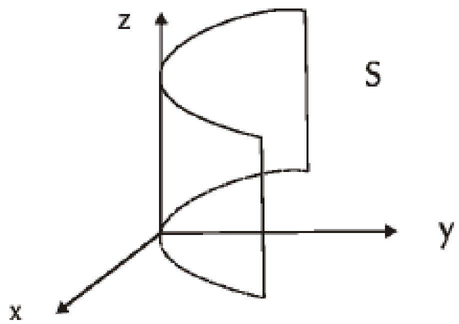
$Ax + By + Cz + D = 0$ com pelo menos um dos coeficientes A, B ou C não-nulo representa um plano. Nesta aula trataremos da equação geral de segundo grau em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1: A imagem geométrica depende do espaço considerado

Seja $y = x^2$ ou $y - x^2 = 0$. Então se considerarmos $y = x^2$ em $\mathbb{R}^2$, teremos a seguinte imagem geométrica.



Agora, em $\mathbb{R}^3$, a imagem geométrica é.



A determinação da imagem geométrica de uma dada equação pode ser feita através de uma discussão da equação, onde destacamos os seguintes pontos:

I) Intersecção dos eixos

Fazemos $x = 0 = y$, $x = 0 = z$ e $y = 0 = z$ e obtemos as intersecções com os eixos z, y e x.

II) Determinação dos traços sobre os planos coordenados.

Fazemos $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$ para obtermos os traços com os planos xy, yz e xz respectivamente.

III) Simetria

Simetria em relação aos planos coordenados. Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se, para cada

$P = (x, y, z)$ da superfície, existe outro ponto $P' = (x, y, -z)$.

Simetria em relação aos eixos coordenados. Para uma superfície ser simétrica em relação ao eixo x, a cada ponto $P = (x, y, z)$, deve existir $P' = (x, -y, -z)$.

Simetria em relação à origem. Se para cada $P = (x, y, z)$ da superfície, $P' = (-x, -y, -z)$ també pertencer à superfície, diz-se que ela é simétrica em relação à origem.

IV) Seções

Fazendo $z = k$, obtemos uma seção da superfície paralela ao plano xy. As outras seções são obtidas com $x = k$ e $y = k$.

V) Esboço da imagem geométrica

Finalmente podemos fazer um esboço indicando a posição da superfície em relação aos eixos coordenados.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2: Discutindo uma equação.

Seja $x^2 + y^2 - z = 4$. Vamos discutir e construir a sua imagem geométrica.

a) Interseções com os eixos.

Fazendo $x = y = 0$; $x = z = 0$ e $y = z = 0$, obtemos: $(0, 0, 4)$, $(0, \pm 2, 0)$ e $(\pm 2, 0, 0)$ que são os pontos onde a superfície corta os eixos coordenados.

b) Traços

Com o plano xy, basta fazer $z = 0$. Temos $x^2 + y^2 = 4$, uma circunferência de centro na origem e raio 2. Fazendo $y = 0$, obtemos $x^2 = z + 4$, que é uma parábola com vértice em $x =- 0$ e $z = –4$. agora, se $x = 0$, temos a parábola $y^2 = z + 4$ no plano yz com vértice $y =- 0$ e $z = –4$.

c) Simetria

A superfície é simétrica em relação ao plano yz (pois se $x^2 + y^2 – z = 4$, então $x^2 + (– y)^2 – z = 4$) e em relação ao plano xz (pois, se $x^2 + y^2 – z = 4$, então $(– x)^2 + y^2 – z = 4$).

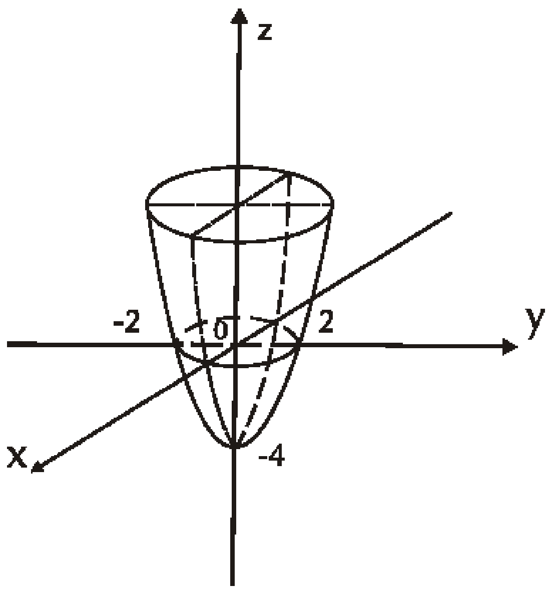
Vemos que a superfície não é simétrica em relação ao plano xy, pois em geral $x^2 + y^2 – z = 4$ não implica $x^2 + y^2 – (–z) = 4$, isto é, a superfície é simétrica em relação ao eixo z. Também não existe simetria em relação aos eixos x e y.

Seções

Para $z = k$, temos $x^2 + y^2 = k + 4$ – círculos crescentes com $k > 0$ e decrescentes para $0 < k < –4$. Para $k = –4$, a secção se reduz a um ponto e se $k < –4$, não existe seção, ou seja, não existe superfície abaixo do plano $z = –4$. Para $y = 4$, temos $x^2 = z + (4 – k^2)$ – parábolas de vértice $x = 0$ e $z = –(4 – k^2)$. Observe que para qualquer valor de k existem seções paralelas ao plano xz.

Analogamente, se $x = k$, as seções paralelas ao plano yz são parábolas $y^2 = z + (4 – k^2)$.

Esboço do gráfico da imagem geométrica



1.1. Cônicas

Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é uma curva que representa a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde a ou b ou c é não nulo. Observe que a equação acima pode ser escrita em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$ ou $X^tAX + (d \quad e)X + f = 0$ onde

$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ é simétrica e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

O Teorema Espectral nos garante a existência de uma matriz real ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal cujas as entradas da diagonal principal são os autovalorres de A.

Fazendo $X' = P^tX$ ou $X = PX'$, a cônica toma a forma

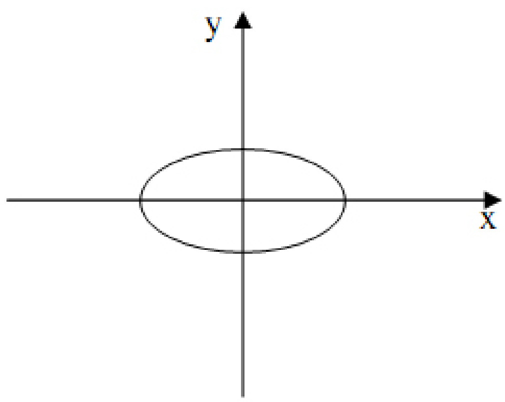
$(PX')^tAPX' + (d \quad e)PX' + f = 0$ ou $X'^tDX' + (d \quad e)PX' + f = 0$.

De modo que se $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$, então

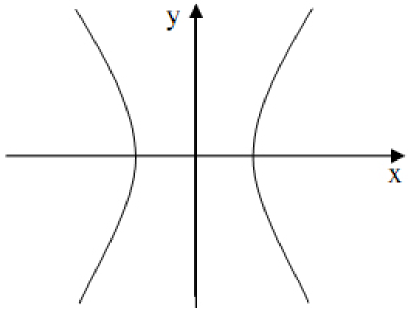
$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ é a equação da cônica, que tem a vantagem de não ter termos cruzados (isto é, termos em x'y'). Finalmente podemos completar quadrados para eliminar os termos em x' e y'. Isto tudo permite enquadrar a equação da cônica em uma das formas reduzidas, que serão tratadas a seguir:

As Formas Reduzidas

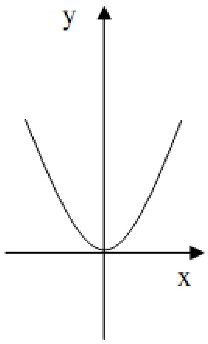
Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$



Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > 0, b > 0)

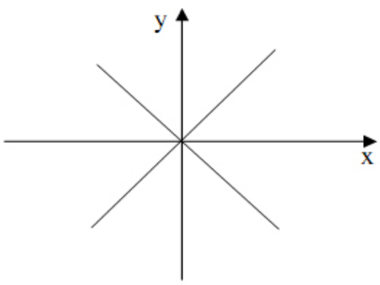


Parábola: $y^2 - dx = 0$ (d = 0)

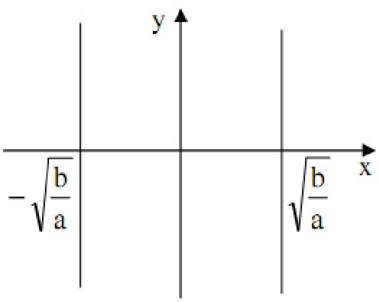


Casos degenerados

Par de retas concorrentes. (hipérbole degenerada) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x$



Par de retas paralelas (parábola degenerada) $ax^2 - b = 0$ (a > 0 e b > 0).



Exemplo 3: Classificando cônicas

Seja $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$. Então podemos escrever

$x^2 - 6x + y^2 - 2y = -8$

$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = -8 + 9 + 1$

$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$

Portanto, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ é uma circunferência (caso particular de elipse) de centro (3, –1) e raio $\sqrt{2}$.

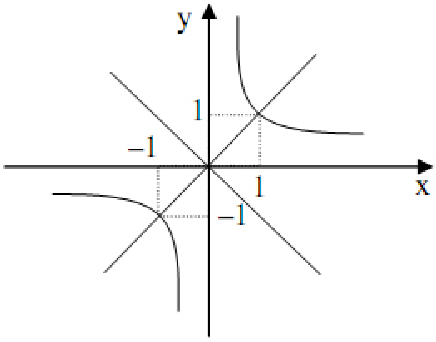
Seja agora $xy - 1 = 0$ temos $X^tAX - 1 = 0$, onde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

A é diagonalizável por $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $P^tAP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ponha $X' = P^tX$. Então $X = PX'$ e $X^tAX - 1 = (PX')^tAPX' - i = X'^tP^tAPX' - 1$ $= X'^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X' - 1$. Logo, $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0 \therefore \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, onde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, isto é, $x' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$ e

$y' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}$

Portanto $xy - 1 = 0$ é uma hipérbole com eixos $y = x$ e $y = -x$ e centro na origem.



2. Quádricas

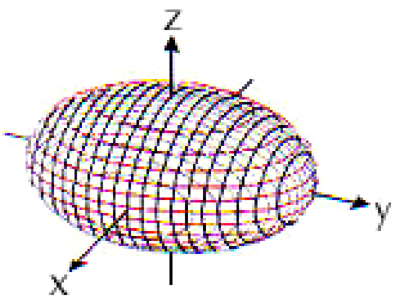
Uma quádrica é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ cuja equação é da forma:

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + iz + j = 0$

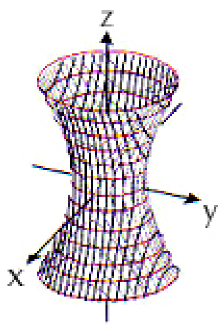
Se $A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, então a equação da quádrica pode ser escrita na forma $X^tAX + (g \quad h \quad i)\, X + j = 0$.

Através da discussão das equações reduzidas, podemos obter as imagens geométricas das quádricas em suas formas reduzidas e as suas respectivas imagens.

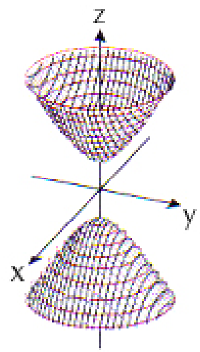
Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



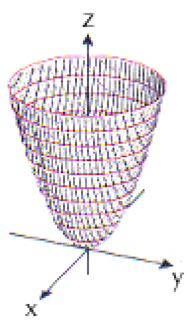
Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



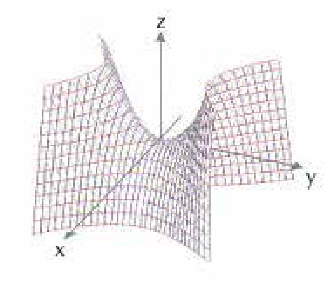
Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



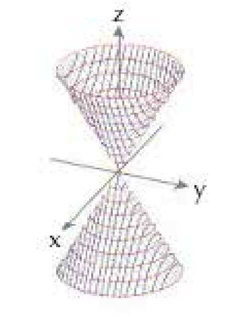
Parabolóide elíptico: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=Z$



Parabolóide hiperbólico: $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=Z$



Cone: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$



Cilindro

a) cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) cilindro hiperbólico

c) cilindro parabólico

A equação que define uma quádrica também pode representar um conjunto vazio ($x^2 = -1$); um ponto, ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$); uma reta ($x^2 + y^2 = 0$); um plano ($z^2 = 0$); dois planos paralelos ($z^2 = 1$) ou dois planos que se intersectam ($xy = 0$). Estes são os casos degenerados.

Exemplo 4: Classificando quádricas

Seja $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 2 = 0$. Na forma matricial a equação se escreve:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 = 0.$$

Os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ são $c_1 = 2$ e $c_2 = 4$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ formam uma base do autoespaço associado a 2 e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é uma

base do autoespaço associado a 4. Portanto, $\{u_1, u_2, u_3\}$, onde

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e

assim $P^tAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ com $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Fazendo $X' = P^tX$ ou

$X = PX'$, teremos $(PX')^tAPX' - 2 = 0 \quad \therefore \quad X'^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X' - 2 = 0$

$\therefore \quad 2x'^2 + 2y'^2 + 3z'^2 = 2 \quad \therefore \quad x'^2 + y'^2 + \dfrac{z'^2}{\frac{2}{3}} = 1$, onde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} \\ y' = y \\ z' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Portanto

$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 2 = 0$ é uma elipsóide com centro na origem.

Atividades de avaliação

1. Dadas as equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $-x^2 + y^2 - z^2 = 4$

Discutir as equações, determinando:

a) interseções

b) traços

c) simetrias

d) seções

e) esboço da imagem geométrica.

2. Identifique cada uma das cônicas:

a) $2x^2 + 5y^2 = 20$

b) $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$

3. Dada a cônica $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$. Pede-se:

a) escreva na forma $X^t AX - 36 = 0$,onde A é uma matriz simétrica 2 x 2 e

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) elimine o termo xy e identifique a cônica.

4. Escreva a forma matricial da equação

$x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 2z = 3$ e identifique a quádrica.

5. Prove $5x^2 + 2xy + 2y^2 + 5z^2 = 1$ é um elipsóide com centro na origem.

Referências

ANTON, Howard A. e RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações.** São Paulo: Bookman Companhia, 2001.

BOLDRINI, J.L. e outros. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harbra, 1986.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**, v.4. Sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo: Atual, 2004.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**. Coleção SCHAUM. São Paulo: Bookman Companhia, 2004.

SHOKRANIAN, Salahoddin. **Uma introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** São Paulo: Makron, 1987.

Sobre o autor

João Montenegro de Miranda: possui graduação em Bacharelado Em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1969), mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1978) e doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1985). Atualmente é professor de ensino superior da Faculdade Farias Brito e professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Comutativa, atuando principalmente nos seguintes temas: normalizer problem, teoremas de pontriagin, m-enésima potência, normalizer conjecture e finite groups.

Matemática

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78263-89-8

Universidade Estadual do Ceará

UAB Universidade Aberta do Brasil

CAPES