Matemática

Desenho Geométrico

Joelma Nogueira dos Santos

Ed UECE

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Matemática

Desenho Geométrico

Joelma Nogueira dos Santos

1ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo
Bibliotecária – CRB-3 / 623

S237d Santos, Telma Nogueira dos
Desenho geométrico / Telma Nogueira dos Santos 1. ed. ___ Fortaleza : EdUECE, 2015.

82 p. (Matemática)

ISBN: 978-85-7826-394-2

1. Desenho geométrico. I. Título.

CDD: 510

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

Esse material tem como objetivo auxiliar o aluno da licenciatura em matemática da UAB-UECE na disciplina de desenho geométrico. A ideia é que sirva de suporte para orientá-lo nas construções geométricas trabalhadas na disciplina.

A proposta apresentada aqui não se resume explorar o desenho geométrico por si só, mas trabalhar sob uma perspectiva pedagógica trazendo discussões as quais o futuro professor poderá desenvolver com seus colegas para melhor compreender como os conteúdos dessa disciplina podem ser abordados em sala de aula. Por essa razão está sendo considerado um material de apoio para a formação inicial do professor de matemática.

O livro encontra-se dividido em seis capítulos. No primeiro é feita uma breve análise histórica sobre as construções geométricas mostrando desde o surgimento da geometria até os dias de hoje quando o uso das tecnologias avançadas em tais construções é comum.

O capítulo dois aborda a reta como um conceito primitivo da geometria e seus dois subconjuntos, a semirreta e o segmento de reta. Conteúdos relacionados a esse tema também são explorados como os tipos e o transporte de segmentos de reta; retas perpendiculares e o traçado da mediatriz; retas paralelas; operações envolvendo adição e subtração de segmentos de reta, multiplicação de um segmento por um escalar e divisão de segmentos em partes iguais. Nesse capítulo são tratadas ainda algumas construções envolvendo divisões de segmentos de reta como a terceira proporcional, a quarta proporcional e a média e extrema razão conhecida como secção áurea.

No capítulo três é feito um estudo sobre ângulos. Transporte de ângulos; traçado da bissetriz do ângulo; ângulos de 30^0, 45^0 e 60^0; construção de arcos capazes são conteúdos que acompanham esse tema. No capítulo quatro o tema triângulo é estudado de forma que contemple uma abordagem teórica e prática, sendo que nessa última envolvem as construções geométricas. No início do capítulo é feita a classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos seguida da construção dos mesmos. Os pontos notáveis do triângulo são o grande referencial dessa unidade como também o traçado do baricentro, incentro e ortocentro.

No capítulo cinco a proposta de estudo são os quadriláteros. De forma semelhante aos triângulos a relação entre a teoria e a prática é trabalhada, primeiro com a divisão dos quadriláteros em paralelogramos traçando retângulos, quadrados e losangos e em seguida os trapézios explorando os trapézios retângulos, isósceles e escalenos. E por último, no capítulo seis um breve estudo sobre a semelhança de figuras geométricas é feito. O intuito é que o aluno compreenda as transformações geométricas translação, reflexão e rotação e explore o conceito de homotetia.

Em todos os capítulos podem ser encontrados sugestões de leitura e/ou de vídeos, exercícios apresentados na seção ‘para refletir’, atividades de avaliação e seção ‘saiba mais’ sempre trazendo uma informação extra, porém, referente ao conteúdo.

A autora

Capítulo 1

Um pouco de história

Objetivos

- Explorar a história da geometria
- Analisar brevemente o desenvolvimento das construções geométricas

Não há estradas reais para a geometria.
Ptolomeu

Introdução

'Que ninguém que ignore a geometria entre aqui'. Esta frase, fixada sobre as portas da escola platônica, dava boas-vindas aos que se atreviam a buscar conhecimento. Platão (428 - 348 a.C.), devido a sua postura em relação à matemática, foi considerado mais formador de matemáticos do que propriamente um. Sua escola serviu de ponte entre a matemática dos pitagóricos e a escola de Alexandria. Vamos voltar num tempo antes da existência de Platão e analisar brevemente alguns feitos envolvendo o desenvolvimento da matemática.

A geometria assim como a aritmética surgiu a partir das necessidades humanas e para elas se desenvolveu e ainda se desenvolve. Num passado distante o conhecimento matemático do povo egípcio, babilônico, assírio, hindu e chinês envolvia a geometria nas medições de terra, nas pequenas e grandes construções ou apenas em algumas observações na natureza. A partir dessas considerações, podemos concluir que as construções geométricas acompanham o desenvolvimento da matemática desde muito cedo.

> Sobre a geometria grega... E Tales, primeiramente tendo ido ao Egito, transportou para a Grécia essa teoria e, por um lado, descobriu muitas coisas, e, por outro lado, mostrou os princípios de muitas para os depois dele, aplicando-se de modo mais geral, a outras, de modo mais sensível. (Os Elementos de Euclides).

A matemática era uma ciência puramente experimental, mas por volta de 600 a.C. os gregos passaram a ter outro olhar para a matemática, organizando-a e sistematizando-a teoricamente, introduzindo o raciocínio dedutivo. A Grécia é considerada o berço da ciência no mundo antigo, mas foi apenas no Período Helênico que o desenvolvimento intelectual e científico iniciou. Com o surgimento de uma nova civilização caracterizada pela dinâmica de um racionalismo em crescimento, questionamentos do tipo "como" e "por que" passaram a ser frequentes. Na matemática não foi diferente, a geometria ganhou destaque entre os matemáticos e os métodos empíricos começaram a dar espaço para um pensamento mais dedutível.

Durante esse período entra no cenário intelectual da Grécia, Tales de Mileto (624 - 548 a.C.), um rico comerciante que dedicou boa parte da vida a essa ciência. Alguns historiadores matemáticos afirmam que ele foi o precursor da geometria demonstrativa.

Tales foi o primeiro a considerar a matemática na teoria, entre seus estudos destacam-se a bissecção do círculo que é traçado em qualquer diâmetro; a igualdade entre as medidas dos ângulos da base de um triângulo isósceles; a igualdade entre as medidas de ângulos opostos pelo vértice; o ângulo inscrito num semicírculo que é reto. Além desses, desenvolveu um teorema que leva o seu nome. A ele é dado o título de primeiro matemático por lançar os primeiros olhares sobre como demonstrar as ideias geométricas. Em muitas de suas observações, utilizou raciocínio lógico ao invés de experimentos ou intuição.

Pitágoras de Samos (580 - 500 a.C.) é outro nome que contribuiu com a organização 'racional' da matemática embora fosse uma figura mística e profética. Buscou em várias peregrinações feitas durante sua existência, o conhecimento matemático, astronômico e espiritual. Ao se estabelecer em Crotona, no sul da Itália, fundou a escola pitagórica, uma sociedade secreta de caráter filosófico e matemático.

O que a escola pitagórica estudava? Os ensinamentos dos pitagóricos baseavam-se na ideia de que os números governam o mundo. E estavam fundamentados no *Quadrivium* (aritmética, geometria, música, astronomia) e no *Trivium* (gramática, lógica, retórica), áreas consideradas as sete artes liberais, necessárias para educar uma pessoa e, atreladas a elas o misticismo e conservadorismo.

Os pitagóricos são conhecidos pelas construções de figuras cósmicas (sólidos regulares). Mas, uma das questões da geometria que atraiu a nossa atenção está relacionada à construção do pentagrama, no qual entra na questão, a secção áurea, que veremos nesta unidade, denominada pelos gregos de 'divisão de um segmento em média e extrema razão'. Pitágoras é considerado o 'pai da matemática', e até hoje tem a fama da autoria de um teorema que leva seu nome, embora os egípcios e os babilônicos tenham utilizado o teorema mesmo antes de sua existência. Alguns historiadores matemáticos supõem que Pitágoras foi discípulo de Tales, mas em relação a esse fato, nada é comprovado.

Por volta de 300 a. C., Euclides de Alexandria começou a organizar e sistematizar o conhecimento matemático existente na época. A geometria, incluída nesse contexto, começou a ser tratada de maneira mais teórica, pois até então sua natureza era predominantemente utilitária.

Euclides de Alexandria aparece como destaque na história da antiguidade clássica. Não se sabe muito sobre sua vida, onde e quando nasceu. Sabe-se apenas que viveu por volta 300 a. C. e é considerado um dos maiores geômetras de todos os tempos, uma prova disso é o termo 'Geometria Euclidiana' dado ao estudo dessa área em nossas escolas. Sua obra *Os Elementos*, é uma compilação de todo o conhecimento matemático existente na época, e é uma das mais divulgadas em todo mundo sendo composta por treze livros, os quais os seis primeiros são dedicados à geometria plana. Trazem construções geométricas com régua e compasso. Poucas demonstrações são de sua autoria, isso mostra que Euclides apenas organizou o que já existia.

Além de Euclides, Apolônio de Perga e Arquimedes de Siracusa também trabalhavam com essas construções na Idade Áurea da Matemática e se tornaram grandes renomes da matemática grega.

Os matemáticos na Grécia Antiga não tinham desenvolvido as representações algébricas para as ideias matemáticas, ficando a cargo da geometria, fazer todas as demonstrações necessárias ao pensamento matemático, inclusive a noção de número.

A primeira menção do uso da régua e compasso (denominados posteriormente a esse fato, de 'instrumentos euclidianos) é relatada pela História da Matemática, nos feitos de Anaxágoras (- 428 a. C.), quando tentou 'quadrar' o círculo. Essa atividade consistia em, a partir de um círculo dado, construir um quadrado cuja área é exatamente igual ao desse círculo. Esse fato caracterizou o início do desenvolvimento das construções geométricas, mesmo não sendo de forma oficial, pois a idade heróica da matemática grega foi caracterizada pelo fato de trabalhar determinados conhecimentos matemáticos com metodologias insuficientes para os que pretendiam buscar.

O traçado da régua e compasso tornou-se uma das mais fascinantes invenções matemáticas adentrando inclusive outras áreas de conhecimento. Artistas que viveram entre os séculos XV e XVII trabalharam com o compasso fixo e a régua em suas obras. Leonardo da Vinci (1452 - 1519) foi um deles.

Já os séculos XVIII e XIX chamam-nos atenção às construções de Mohr-Mascheroni e Poncelet-Steiner, que podem ser consideradas como o aprimoramento das construções geométricas. Nas primeiras, os problemas que poderiam ser resolvidos com régua e compasso, passaram a ser feitos apenas com o compasso. Nas segundas, em algumas construções, é possível apenas o uso da régua ao invés de usar os dois instrumentos.

Atualmente a geometria dinâmica utiliza-se de recursos tecnológicos para desenvolver mais ainda as ideias matemáticas referentes a esse contexto. Computadores e softwares avançados não só permitem a construção de figuras geométricas como também observar como se comportam quando algum de seus elementos é modificado. Mas, é com a régua e compasso que propomos fazer as primeiras discussões sobre as construções geométricas.

Leituras, filmes e sites

ARAGÃO, Maria José. História da matemática. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

EVES, Howard. História da geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 3).

PAULA, Evandro Felipe Rosa de; PEREIRA, Leandro da Silva; CHAVES, Lucas Monteiro. Perdi a régua, só tenho o compasso. O que posso fazer? Revista do Professor de Matemática – RPM, n. 88, ano 33, jul-set, 2015.

Vídeo

A História da Matemática.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Ztz6VX0kIPc&list=PLrzL8F15KKjG9jK0b08y4ij4EqBAoHEbx>.

Sites

Tudo é Matemática.

Disponível em: <http://www.everythingismathematical.com/>.

Atividades de avaliação

1. Discuta com seus colegas a importância da geometria para a aprendizagem matemática.
2. Pesquise sobre a idade áurea da matemática e apresente ao seu professor três grandes feitos dessa época e os nomes dos matemáticos responsáveis.

Capítulo 2

Analisando a reta: subconjuntos e operações

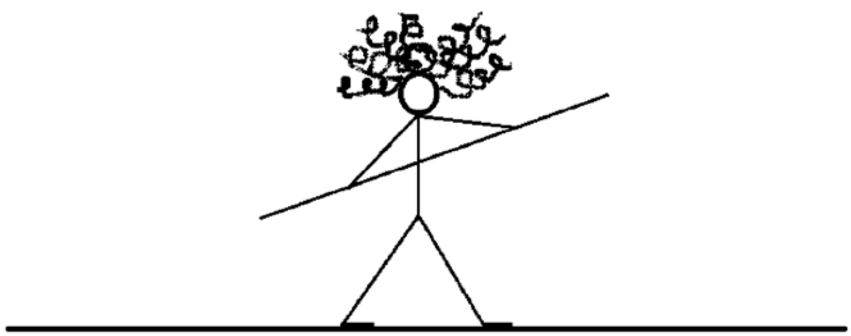
Objetivos

- Compreender a noção de reta, semirreta e segmento de reta.
- Explorar traçado de transportes de segmentos de reta e de mediatriz de uma reta.
- Construir geometricamente as operações com segmentos de reta.
- Estender a definição de divisão de segmento de reta para trabalhar a terceira, a quarta proporcional e a razão áurea.

> E nada é surpreendente começar a descoberta tanto dessa quanto das outras ciências pela necessidade, porque tudo o que é produzido na geração avança do imperfeito ao perfeito.
>
> (Sumário de Eudemo – Catálogo dos Geômetras).

1. A reta: um conceito primitivo da Geometria

Considerada um ente primitivo, a reta foi percebida por Euclides de Alexandria, por volta de 300 a. C. em sua obra Os Elementos, como sendo aquilo que é posto igualmente com pontos sobre si mesmo. A ideia de reta pode nos ser dada pelo exemplo de uma corda de comprimento indefinido sendo esticada em sentidos contrários. Agora imagine você outra situação que dá ideia de reta...

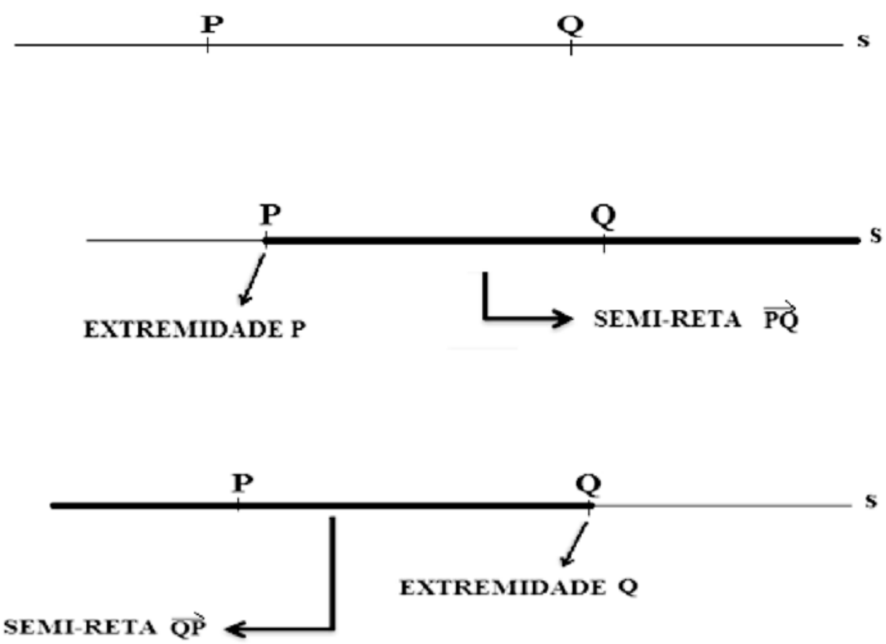


Pois é, o que você fez foi representar intuitivamente a noção de um ente primitivo da Geometria. Para analisarmos as construções geométricas, começaremos com algo bem elementar. Pedimos que marque em uma folha de papel, dois pontos quaisquer A e B. Em seguida trace tantas retas quantas forem possíveis por esses dois pontos. A pergunta é: quantas retas distintas passam ao mesmo tempo por A e B? Agora, em outro espaço da folha de papel, marque um ponto P. Depois trace por ele, com uma régua, todas as retas possíveis. Conseguiu?

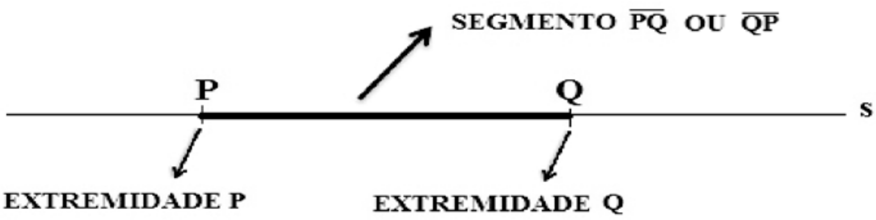
Essas duas perguntas, embora simples, são bem pertinentes ao nosso assunto. Na primeira, em relação às retas distintas, sabemos que apenas uma única reta passa por A e B simultaneamente e, na segunda, sabemos que não foi possível traçar todas as retas que podem passar pelo ponto P, pois infinitas passam por ele.

2. A semi-reta e o segmento de reta: dois subconjuntos

A semi-reta: diferente da reta, a semi-reta tem apenas um dos sentidos ilimitados.



O segmento de reta: considerado parte da reta, é limitado por dois pontos distintos.



3. Transportando segmentos

Vamos iniciar nossas construções geométricas utilizando régua e compasso. Nossa experimentação será transportar o segmento PQ sobre a reta s.

Agora siga as instruções:

1º) Marque na reta s um ponto P'.

2º) Tome PQ com o compasso de centro em P e raio PQ.

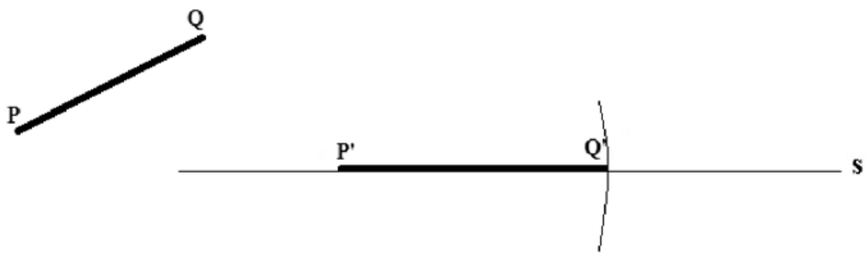
3º) Sobre o ponto P', trace o arco de raio PQ na reta s.

4º) Marque Q' na intersecção do arco de raio PQ com a reta .

5º) Trace o segmento $\overline{P'Q'}$ P'Q' na reta s.

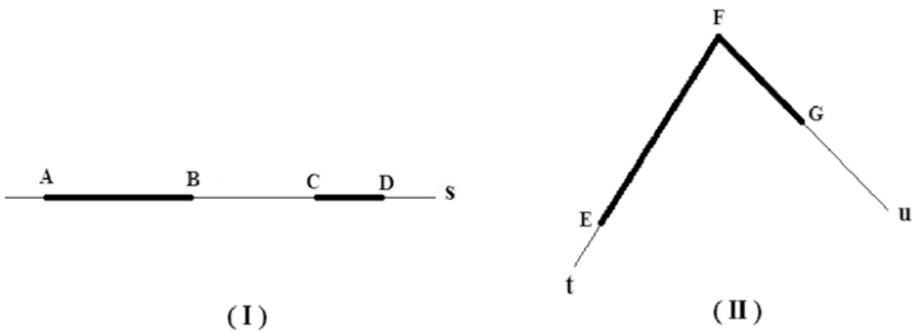
O símbolo $\cong$ quer dizer congruência. Logo a simbologia significa que os dois segmentos de reta são congruentes, isto é, embora sejam diferentes, possuem a mesma medida.

Pronto! O segmento $\overline{PQ}$ PQ foi transportado sobre a reta s, obtendo-se $\overline{P'Q'}$ tal que $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$.



3.1. Tipos de segmentos

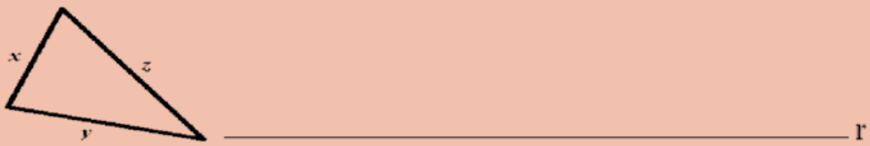
Observe as duas situações a seguir



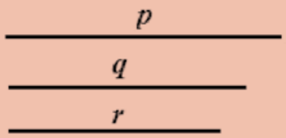
Na situação (I) os segmentos estão contidos na mesma reta, neste caso dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares. Na situação (II), percebemos que o ponto F é comum aos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$, logo eles são consecutivos.

Para refletir

1. Dado o triângulo abaixo, transporte os seus lados para uma reta r, de modo que os mesmos sejam consecutivos e que não se sobreponham.

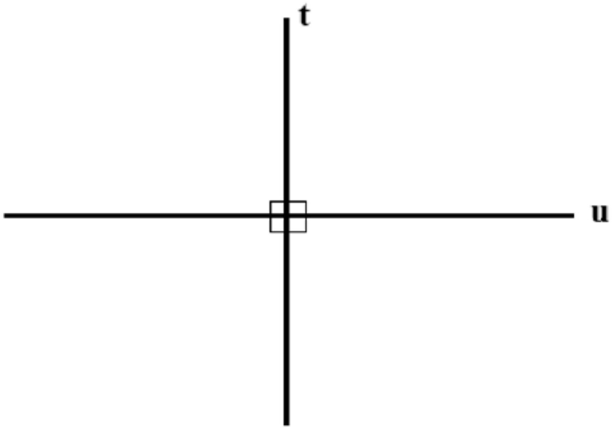


2. Dados os segmentos de medidas p, q e r, e com p, contido na reta suporte u. Trace-os de maneira que, de dois a dois, sejam consecutivos e ao mesmo tempo não colineares.



4. Retas perpendiculares

Na figura a seguir as retas t e u estão contidas num mesmo plano e se interceptam no ponto M, formando entre si ângulos congruentes. Neste caso dizemos que t e u são perpendiculares.



Tente traçá-la seguindo as instruções:

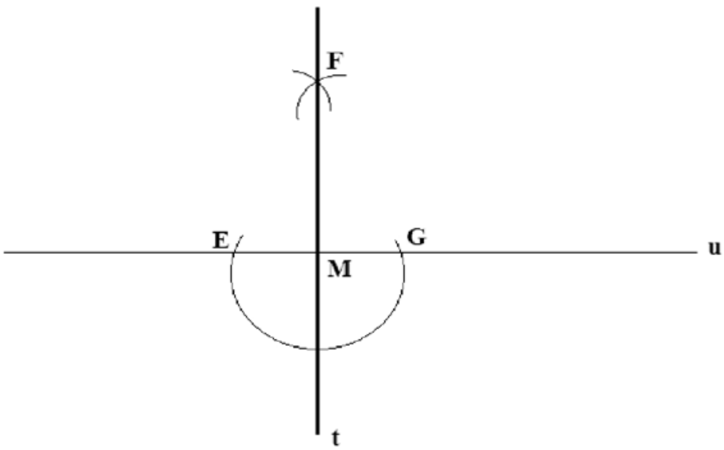
1º) Dados a reta u e o ponto M.

2º) Tome o compasso de centro em M e determine E e G, sendo $\overline{EM} \cong \overline{MG}$.

3º) Com a abertura do compasso maior que $\overline{EM}$ e $\overline{MG}$ e , trace arcos de centros E e G determinando o ponto F.

4º) Trace a reta passando por F e M.

Veja! A reta t é perpendicular à reta u. Esse modo de traçar as perpendiculares é apenas um.

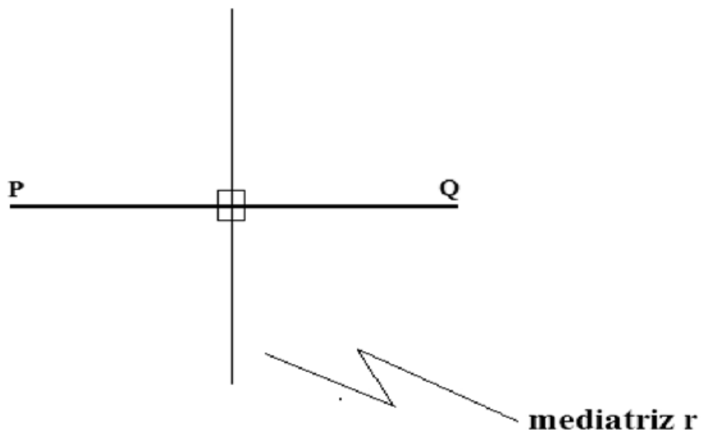


Dadas as retas r^1 e r^2 contidas num mesmo plano e que interceptadas no ponto P são chamadas de retas concorrentes. $r^1 \cap r^2 = \{P\}$.

Usamos a simbologia r s para r e s concorrentes. Quando r e s são perpendiculares então, usamos $r \perp s$.

4.1 Traçando a mediatriz

A mediatriz de um segmento $\overline{PQ}$ é uma reta perpendicular a $\overline{PQ}$ e passa pelo ponto médio desse segmento. Logo, quando traçamos a mediatriz de $\overline{PQ}$ significa que o dividimos ao meio.



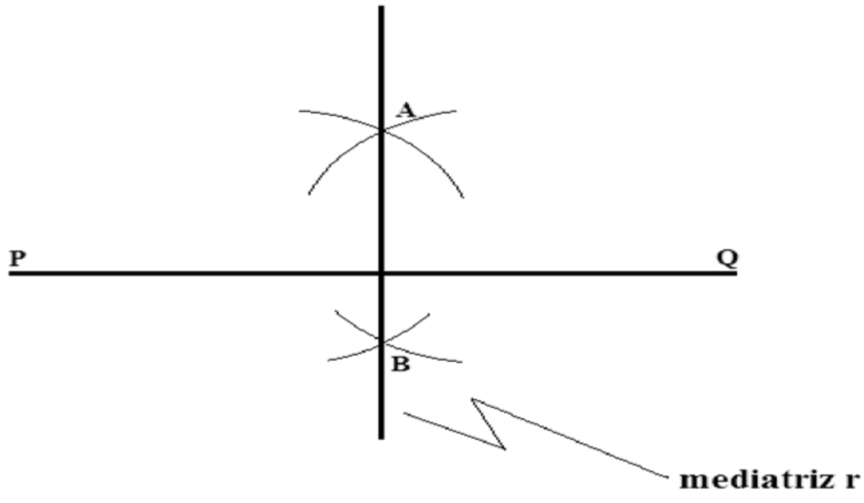
Experimente traçá-la seguindo as instruções:

1º) Dado o segmento $\overline{PQ}$.

2º) Tome o compasso de centro P e raio qualquer e trace arco de um lado e do outro do segmento $\overline{PQ}$.

3º) Com o mesmo raio do arco anterior, tome o compasso de centro Q e trace arco de um lado e do outro do segmento $\overline{PQ}$.

4º) Marque os pontos A e B e trace a mediatriz r por A e B.



5. Retas paralelas

Duas retas t_1 e t_2 cntidas no mesmo plano e que não possuem pontos comuns são paralelas. Vamos traçar a reta t_2 paralela a t_1 a partir de um ponto dado.

A simbologia utilizada para paralelismo é ||. Na figura acima escrevemos $t_1 \parallel t_2$ para indicar que t_1 é paralela a t_2.

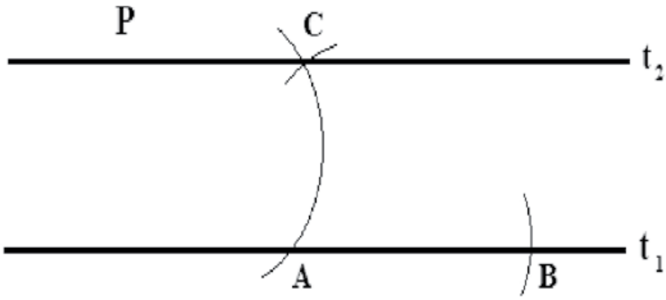
Agora siga as instruções:

1º) Tome o compasso de centro P e determine em t_1 o ponto A.

2º) Tome o compasso de centro em A e arco de raio $\overline{AP}$ e determine B na reta t_1.

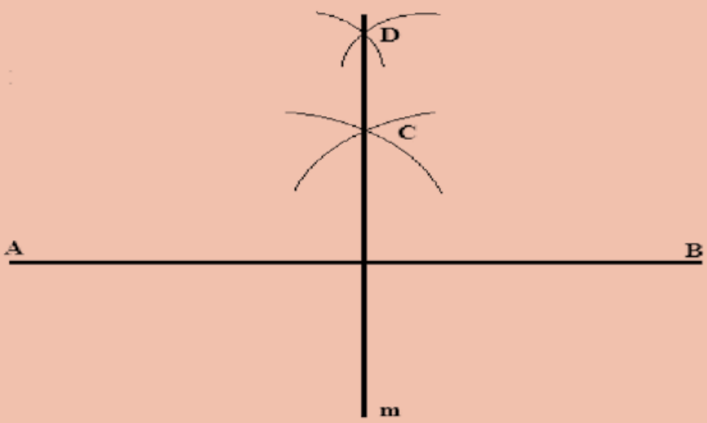
3º) Tome o compasso de centro em B e arco de raio AB e determine o ponto C.

4º) Trace a reta t_2 por P e C, paralela a t_1.



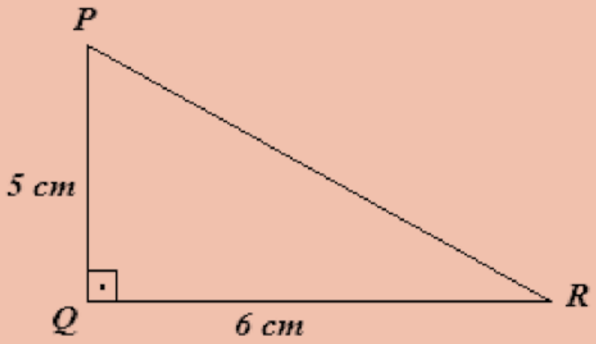
Para refletir

1. Duas perpendiculares também podem ser traçadas apenas com os esquadros. Tente traçá-las.
2. A figura a seguir mostra outro método de traçado da mediatriz. Descreva com seus colegas passo a passo.



3. Dada a reta r_1 e os pontos A, B e C pertencentes a ela, trace as retas r_2, r_3 e r_4 passando por A, B e C, respectivamente, de modo que $r_1 \perp r_2$ e $r_2 \,||\, r_3 \,||\, r_4$.

4. Construa o ΔPQR de acordo com o modelo. Utilize régua e compasso.



6. Operações com segmentos

Na adição, subtração e multiplicação de segmentos, trabalhamos com o transporte deles.

6.1 Adição de segmentos

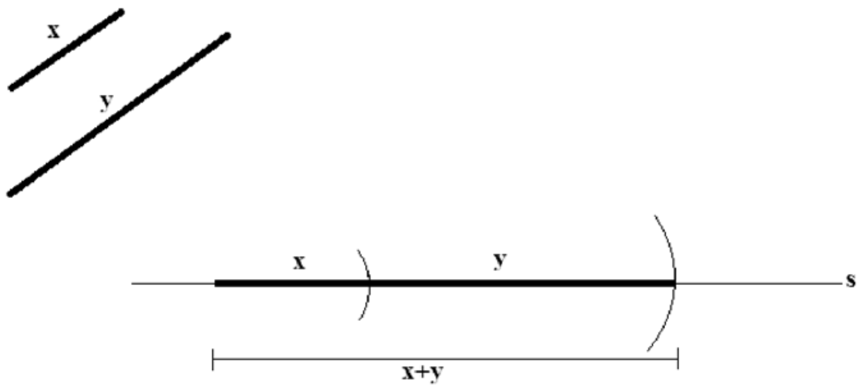
Dados os segmentos de reta de medidas x e y, vamos adicioná-los um ao outro. Faremos $x + y$ geometricamente.

Siga as instruções:

1º) Transportar o segmento de medida x para a reta suporte s.

2º) Transportar o segmento de medida y para a reta suporte s de modo que x e y, sejam consecutivos.

3º) Determinar o segmento $x + y$.



6.2 Subtração de segmentos

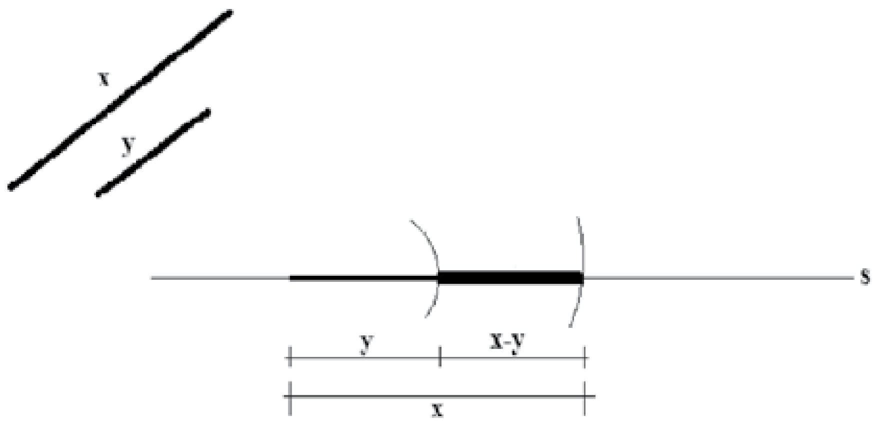
Dados dois segmentos de medidas x e y, tais que $x > y$. Vamos fazer $x - y$ geometricamente.

Siga as instruções:

1º) Transporte o segmento de medida x (segmento de maior comprimento) sobre a reta suporte s.

2º) Transporte o segmento de medida y (segmento de menor comprimento) sobre a reta suporte s, a partir de uma das extremidades de x.

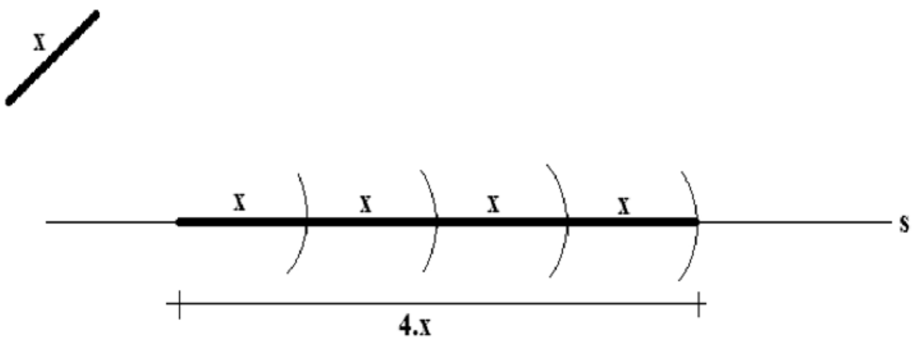
3º) Determine o segmento $x - y$.



6.3 Multiplicação de um segmento por um escalar

Para efetuarmos a multiplicação de um segmento utilizamos a ideia que é trabalhada na definição: adição de parcelas iguais. Neste caso, adição de segmentos de mesma medida.

Dado o segmento de medida x a seguir, vamos efetuar, com régua e compasso, $4x$. Para isso basta transportarmos sobre a reta suporte, quatro segmentos de mesma medida x, de forma que sejam consecutivos.



6.4 Divisão de um segmento em n partes iguais

Vamos dividir o segmento de medida x em cinco partes iguais.

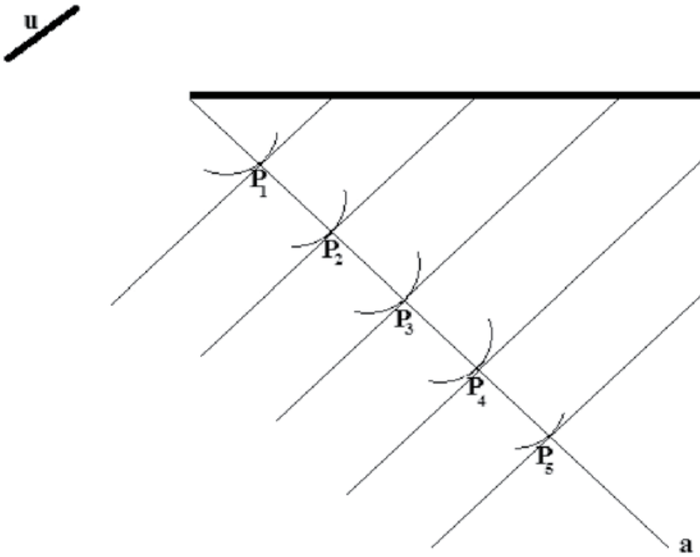
Siga as instruções:

1º) Trace uma reta auxiliar a, a partir de uma das extremidades de x.

2º) Tome um segmento de medida u e sobre a reta auxiliar a, trace $5.u$ obtendo os pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

3º) Trace uma reta unindo o P_5 à outra extremidade do segmento x.

4º) A esta reta trace quatro paralelas utilizando o par de esquadros, dividindo assim o segmento em 5 partes.



Para refletir

1. Utilizando uma malha quadriculada, trace segmentos de medidas fazendo as operações a seguir, de maneira que $a = 4.u$, $b = 3u$, $c = 2.u$, $d = u$.

a) $a + 2.d$

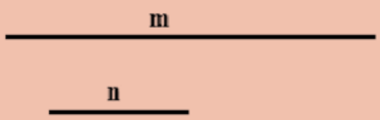
b) $(a+b) + (c+d)$

c) $2(a+b) + 3.c$

d) $2.a - d$

e) $3.b - c$

2. Dados os segmentos de medida m e n, obtenha:

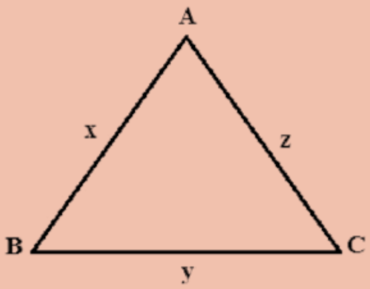


a) $\overline{PQ} = 2.m+n$

b) $\overline{AB} = m - n$

c) $\overline{EF} = m + 2.n$

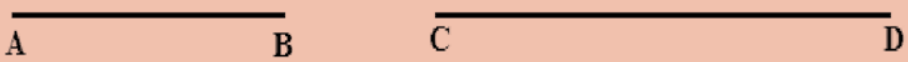
3. Sabendo que a medida de $\overline{PQ}$ corresponde ao perímetro do ΔABC, trace $\overline{PQ}$.



4. Divida o segmento $\overline{MN}$ em 7 partes iguais.

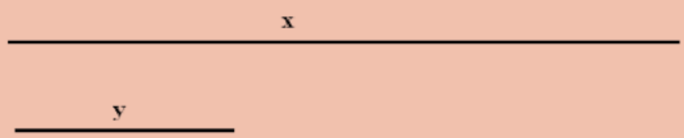
5. Determine geometricamente $\overline{PQ}$ de modo que $PQ = \frac{3}{5}\overline{AB}$, e transporte para a reta suporte s.

6. Dados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine $\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{4}{5}\overline{CD}$.



7. Para discutir!!!

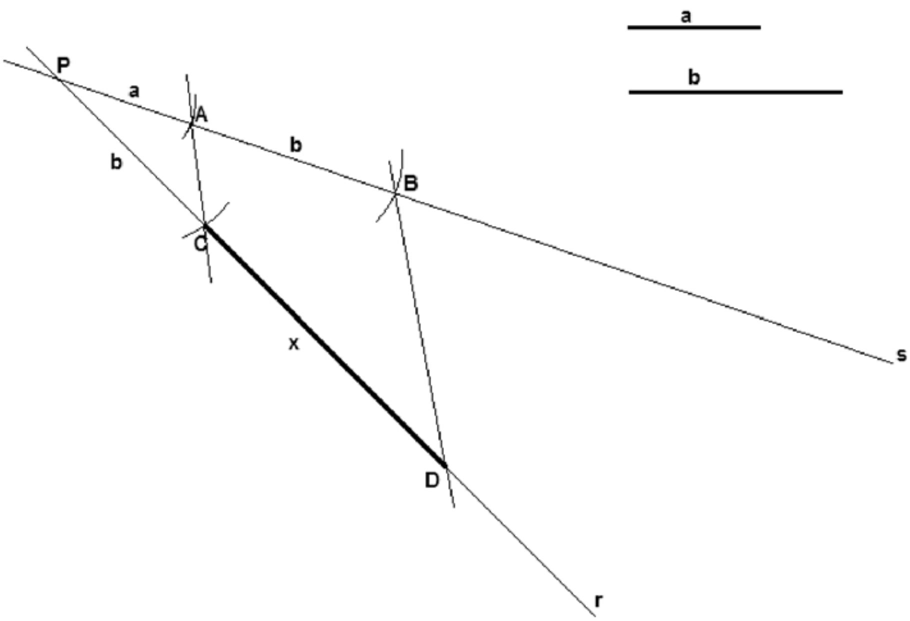
Fiquem em duplas e discutam a construção geométrica de $\frac{2}{3}(x - y)$.



7. Algumas construções envolvendo divisões de Segmentos de retas

7. 1 A terceira proporcional

A terceira proporcional é o segmento de reta de medida x que forma uma proporção com outros dois segmentos de reta de medidas a e b como mostra a figura abaixo.



Os Elementos de Euclides mostram que esses segmentos estão contidos em duas retas dispostas com um ângulo não nulo entre elas.

Agora tente construir a terceira proporcional usando apenas régua e compasso de acordo com as instruções a seguir.

1º) Trace as retas suportes s e r com uma 'pequena' angulação entre elas exatamente no ponto P.

2º) Tome o compasso de centro em P e raio $\overline{PA}$ de medida a.

3º) Tome o compasso de centro em A e raio $\overline{AB}$ de medida b.

4º) Tome o compasso de centro em P e raio $\overline{PC}$ de medida b.

5º) Trace $\overleftrightarrow{\mathbf{AC}}$.

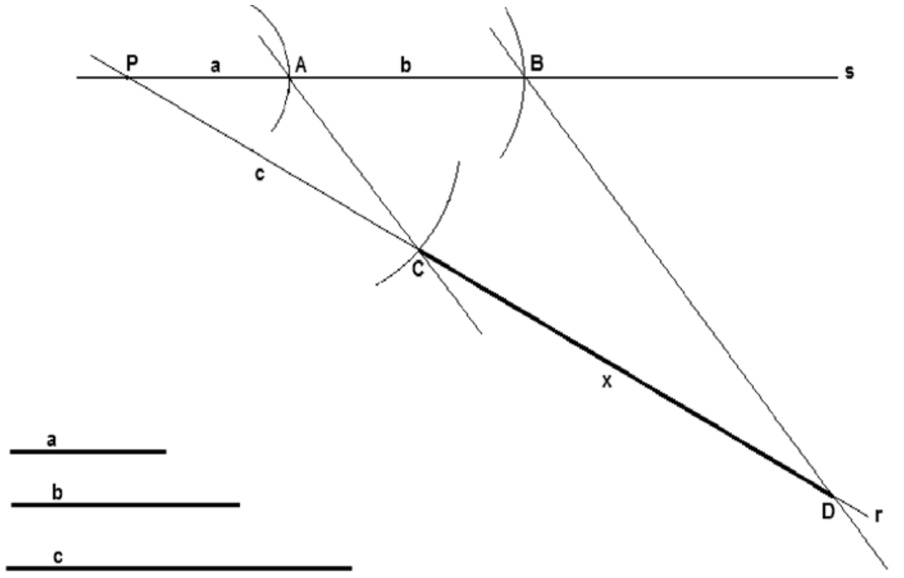
6º) Trace $\overleftrightarrow{\mathbf{BD}} \,||\, \overleftrightarrow{\mathbf{AC}}$ determinando o segmento $\overline{CD}$ de medida x que é a terceira proporcional.

Analisando algebricamente

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Longleftrightarrow a.x = b.b \Longleftrightarrow x = \frac{b^2}{a}$$

7.2. A quarta proporcional

A quarta proporcional é o segmento de reta de medida x que forma uma proporção com os segmentos de medida a, b e c como mostra a figura abaixo.



Com régua e compasso, construa a quarta proporcional mostrada na figura anterior seguindo as instruções.

1º) Trace as retas suportes s e r com uma 'pequena' angulação entre elas exatamente no ponto P.

2º) Tome o compasso de centro em P e raio $\overline{PA}$ de medida a.

3º) Tome o compasso de centro em A e raio $\overline{AB}$ de medida b.

4º) Tome o compasso de centro em P e raio de medida $\overline{PC}$ de medida c.

5º) Trace a reta $\overleftrightarrow{\mathbf{AC}}$.

6º) Trace $\overleftrightarrow{\mathbf{BD}} \,||\, \overleftrightarrow{\mathbf{AC}}$ determinando o segmento $\overline{CD}$ de medida x que é a quarta proporcional.

Analisando algebricamente

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \iff a.x = b.c \iff x = \frac{b.c}{a}$$

7.3. A média proporcional (média geométrica)

A média proporcional ou média geométrica refere-se a um segmento médio, de medida x, em proporção entre dois outros segmentos de medidas a e b.

Algebricamente a média proporcional ou média geométrica significa que os $a, x, x,$ e b formam, nesta ordem, uma proporção.

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \Longleftrightarrow x.x=a.b \Longleftrightarrow x^2=a.b \Longleftrightarrow x\sqrt{a.b}$$

Com a régua e o compasso, siga as instruções a seguir e construa a média proporcional ou média geométrica conhecendo os segmentos de medidas a e b.

1º) Trace a reta suporte r.

2º) Fixe um ponto A em r.

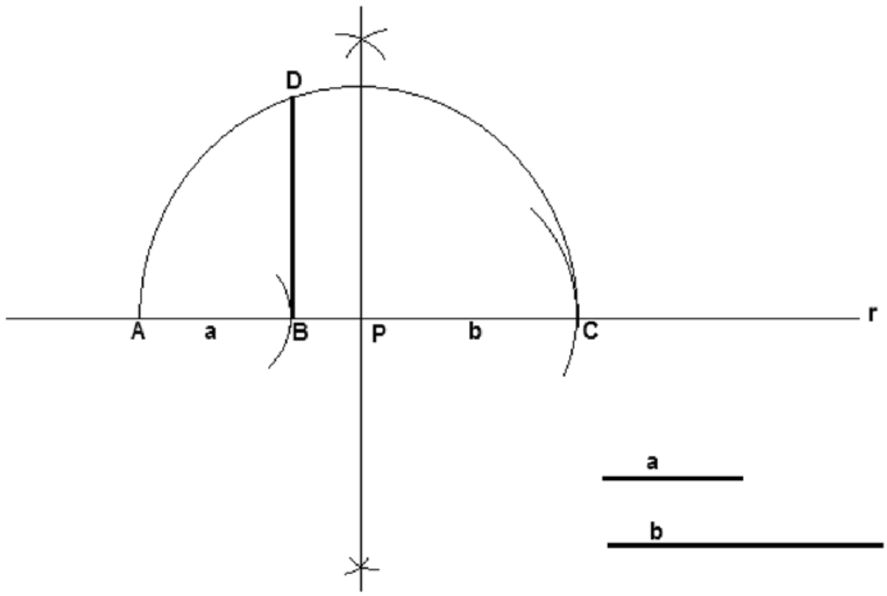
3º) Trace em r um segmento de centro em A e raio $\overline{AB}$ de medida a.

4º) Trace em r um segmento de centro em B e raio de medida b.

5º) Trace o ponto médio P do segmento $\overline{AC}$.

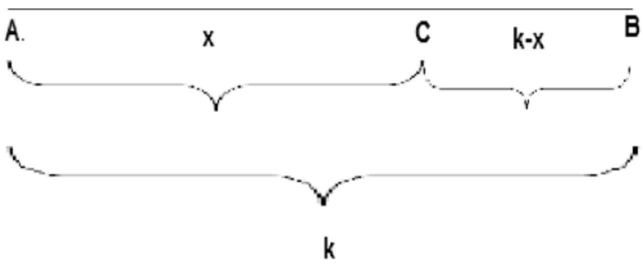
6º) Trace a semicircunferência cujo diâmetro é $\overline{AC}$ e o centro é P.

7º) Trace em B o segmento $\overline{BD}$ perpendicular a $\overline{AC}$, determinando a média proporcional ou média geométrica entre a e b.



7.4. A média e extrema razão (a secção áurea)

A secção áurea é também conhecida como a média e extrema razão. Geometricamente é possível percebê-la em um segmento $\overline{AB}$ como um ponto C pertencente a ele como mostra a figura seguinte.



O ponto C divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes de modo que a menor parte $\overline{CB}$ está para a maior parte $\overline{AC}$ assim como a maior parte $\overline{AC}$ está para o segmento total $\overline{AB}$.

Analisando algebricamente

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Longleftrightarrow \frac{k-x}{x} = \frac{x}{k} \Longleftrightarrow x^2 = k^2 - k.x \Longleftrightarrow x^2 + k.x - k^2 = 0$$

Os valores de x para a equação acima são:

$$x_1 = k.\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \; e \; x_2 = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Agora com régua e compasso, divida $\overline{AB}$ em média e extrema razão.

1º) Trace a reta suporte, s.

2º) Trace o segmento $\overline{AB}$.

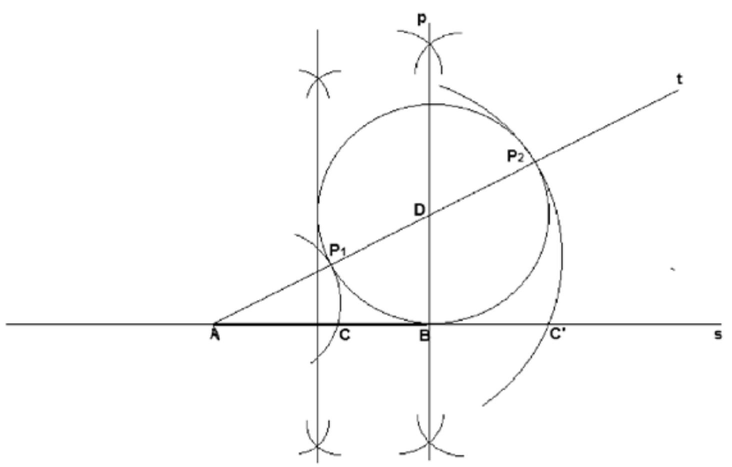
3º) Trace a reta p, perpendicular a s passando pelo ponto B.

4º) Determine $\overline{BD}$ em p, de modo que a medida de $\overline{BD}$ seja a metade da medida de $\overline{AB}$.

5º) Com o compasso de centro em D e raio $\overline{BD}$, obtenha uma circunferência e, a partir do ponto A trace a reta t, determinando os pontos P_1 e P_2.

6º) Com centro em A e raio $\overline{AP_1}$ determine o ponto C.

7º) Com centro em A e raio $\overline{AP_2}$ determine o ponto C'.



Leituras, filmes e sites

Um aferidor para a razão áurea.

Revista Cálculo, ano 2, n. 13, p. 16-17, fev. 2012.

Pavanello, Regina Maria. O abandono do ensino de geometria no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 1, n. 1, mar. 1993. p. 5-6.

Sites

Matemática na veia

Disponível em: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2008/03/phi-razo--area-e-curiosidades-matemticas.html>.

Vídeos

Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Disponível:< https://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8 >.

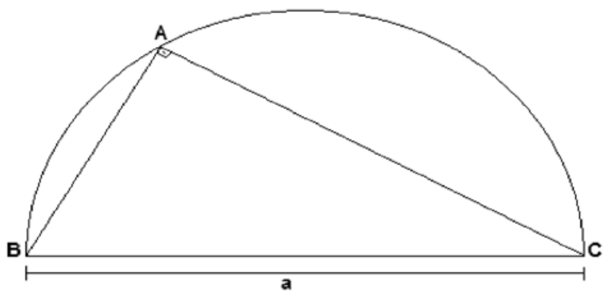
Isso é Matemática – A Proporção Divina

Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=xtsTXAwWF20&index=6&list=PLS7mvKWgmuhANSSzwafoTcwWtJRa8lYTE >.

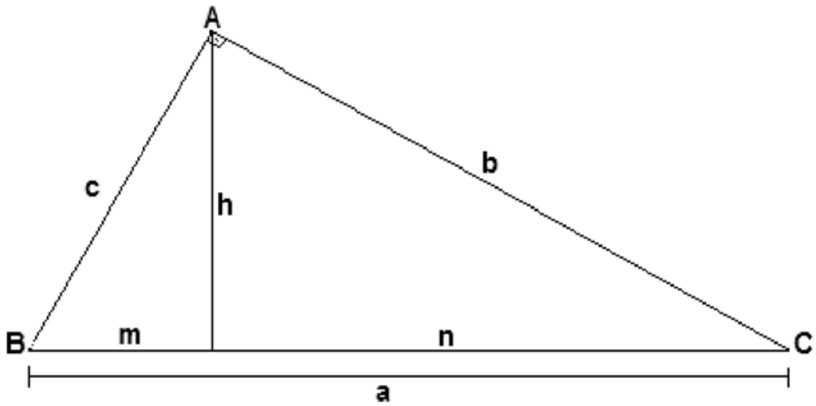
Atividades de avaliação

1. Discuta com seus colegas como fazer uma abordagem de uma aula na qual o conteúdo é Paralelismo e Perpendicularismo.
2. Discuta com seus colegas sobre como explorar instrumentos de medida de comprimento em uma aula envolvendo geometria.

   Apresente, por escrito, seus argumentos ao professor sobre essa atividade.
3. Dado o ΔABC, retângulo em A, inscrito na semicircunferência. Utilizando o conceito de média proporcional ou média geométrica, com régua e compasso, trace a altura relativa à hipotenusa sabendo que $a = m + n$ e que $n = 3m$.



4. Dados os segmentos de reta de medidas $a = 5cm$ e $b = 4cm$, determine geometricamente a terceira proporcional.
5. Dados os segmentos de reta de medidas $a = 2cm$, $b = 4cm$ e $c = 6cm$, construa com régua e compasso a quarta proporcional.
6. Forme uma dupla com um colega de sua turma e produza um texto a partir de uma análise didática sobre as relações métricas $c^2 = a.m$ e $b^2 = a.n$ no triângulo retângulo a seguir e a média proporcional ou média geométrica.



7. A secção áurea foi estudada na Grécia Antiga. Euclides mostrou em sua obra Os Elementos outra forma de dividir um segmento de reta em média e extrema razão. Pesquise e faça um esboço do método euclidiano.
8. Utilize o tema 'Arte e Matemática' e pesquise um pouco sobre as aplicações do número áureo na natureza, nas artes e em outras áreas de conhecimento. Discuta com seus colegas como, a partir da análise que fará, é possível elaborar uma aula, em que conteúdo específico da proposta curricular pode-se introduzir esse assunto.
9. Pesquise sobre a relação entre as construções envolvendo divisão de segmentos e o Teorema de Tales.

   Apresente essa atividade ao professor.

Leituras, filmes e sites

Um aferidor para a razão áurea.

Revista Cálculo, ano 2, n. 13, p. 16-17, fev. 2012.

Pavanello, Regina Maria. O abandono do ensino de geometria no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 1, n. 1, mar. 1993. p. 5-6.

Sites

Matemática na veia.

Disponível em: < http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2008/03/phi-razo--area-e-curiosidades-matemticas.html>.

Vídeo

Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Disponível: <https://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8 >.

Isso é Matemática – A Proporção Divina

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=xtsTXAwWF20&index=6&list=PLS7mvKWgmuhANSSzwafoTcwWtJRa8lYTE>.

Capítulo 3

Ângulos

Objetivos

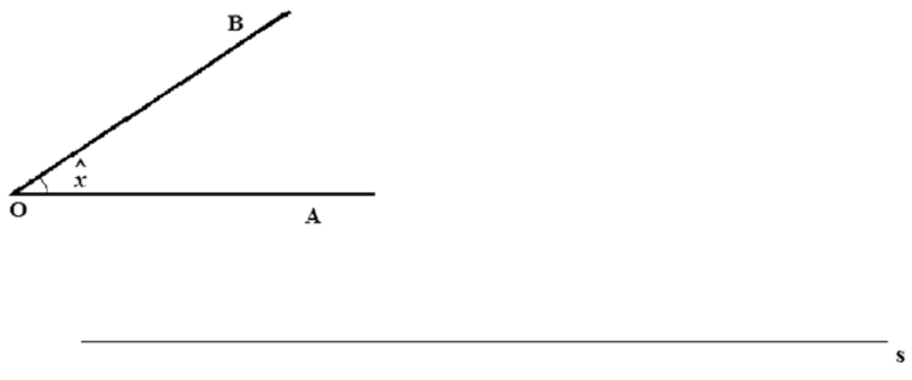
- Transportar ângulos para a reta suporte.
- Traçar a bissetriz de um ângulo.
- Construir arcos capazes a partir de uma circunferência dada.

Introdução

Duas semirretas, que possuem a mesma origem, quando traçadas representam um ângulo. O transferidor é um instrumento que utilizamos para medir ângulos, mas no dia a dia outros instrumentos são utilizados como, por exemplo, o teodolito.

1. Transporte de ângulos

Nossa intenção agora é construir um ângulo sobre a reta suporte s, a partir de um ângulo dado. Em outras palavras, vamos transportá-lo.



Siga as instruções:

1º) Trace a reta suporte s e nela marque o vértice $0'$.

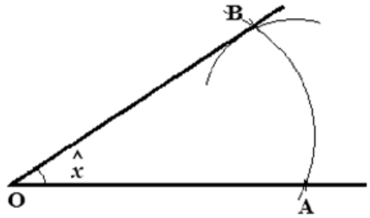
2º) Com centro no ponto 0, trace um arco $\widehat{AB}$ qualquer.

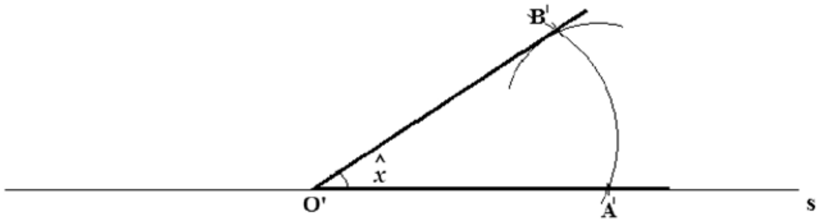
3º) Trace na reta s, um arco de centro em $0'$ e raio $\overline{OA}$, determinando o ponto A'.

4º) Trace um arco de centro A' e raio de medida $\overline{AB}$, determinando o ponto B'.

5º) Trace o lado $\overline{O'B'}$

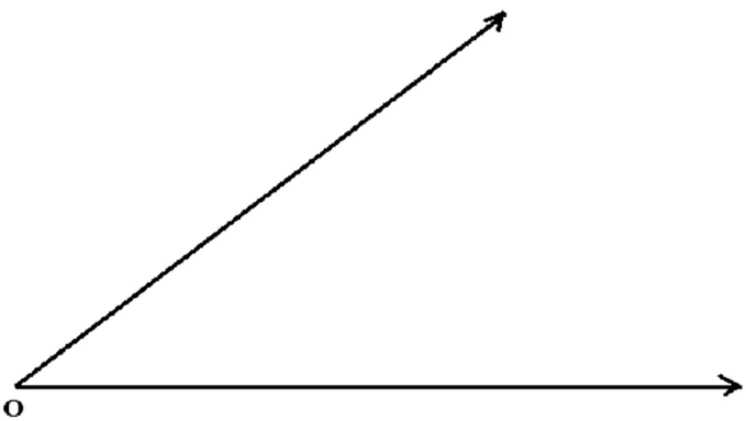
6º) Destaque o ângulo $A'\widehat{O'}B'$.





2. Bissetriz de um ângulo

Analisaremos duas situações envolvendo o traçado da bissetriz de um ângulo. Primeiramente conhecendo seu vértice. Observe o ângulo de vértice 0.

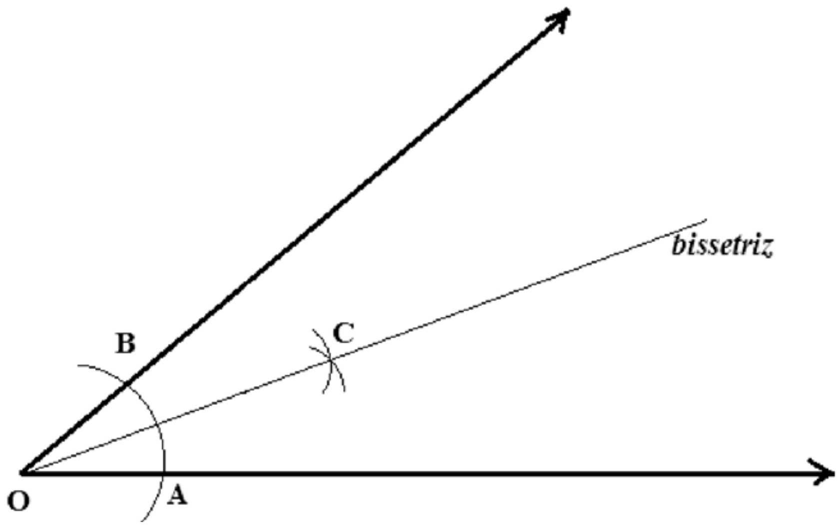


Agora siga as instruções:

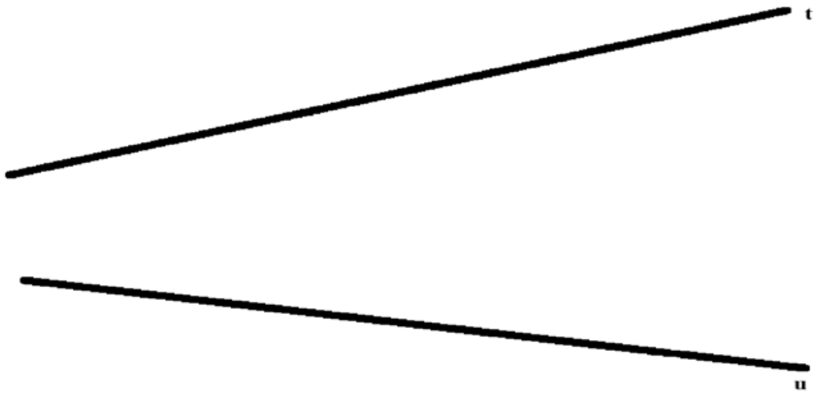
1º) Trace um arco de centro em 0 e raio qualquer determinando os pontos A e B.

2º) Trace um arco de centro em A e raio qualquer e, em seguida, de centro em B e mesmo raio em A, determinando o ponto C.

3º) Trace a semi-reta $\overline{OC}$, indicando a bissetriz do ângulo.



Agora vamos traçar a bissetriz de um ângulo qualquer cujo vértice, desconhecemos.



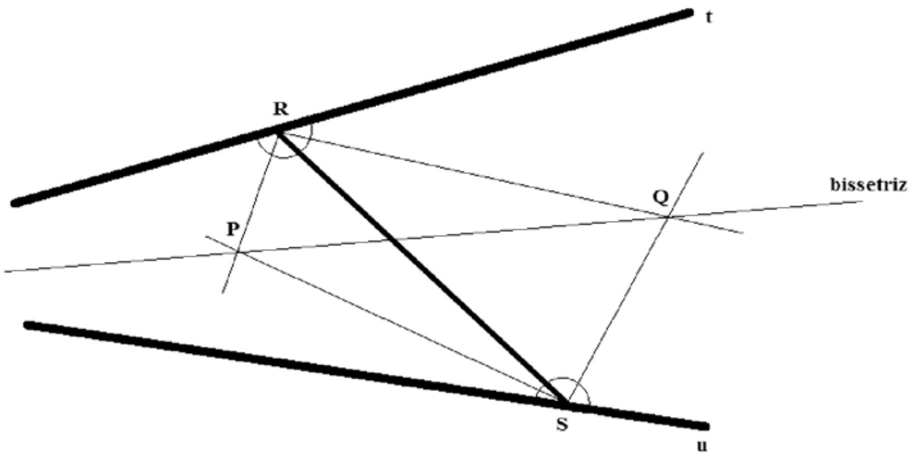
Siga as instruções:

1º) Trace o segmento de reta $\overline{RS}$, com R em t e S em u, determinando quatro ângulos.

2º) Trace as bissetrizes de cada ângulo obtido por $\overline{RS}$ determinando os pontos P e Q.

3º) Trace a reta $\overline{PQ}$ na qual está inserida a bissetriz do ângulo formado pelas retas t e u.

O ponto de intersecção das três bissetrizes de um triângulo é chamado de Incentro(I).



3 Os ângulos de 30°, 60° e 45°

Primeiramente vamos construir o ângulo de 60°.

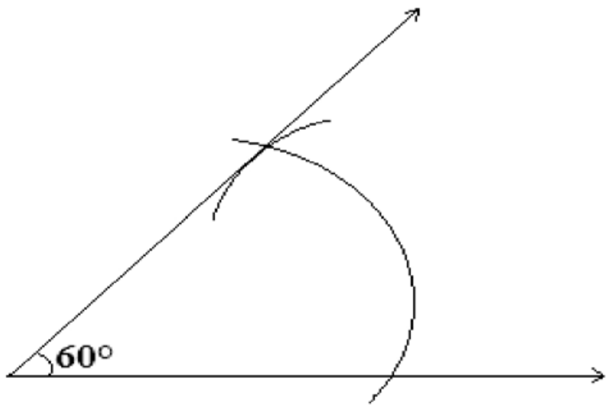
Siga as instruções;

1º) Trace a semi-reta $\overrightarrow{OA}$.

2º) Com o arco de centro em 0 e raio $\overline{OA}$, trace um arco qualquer.

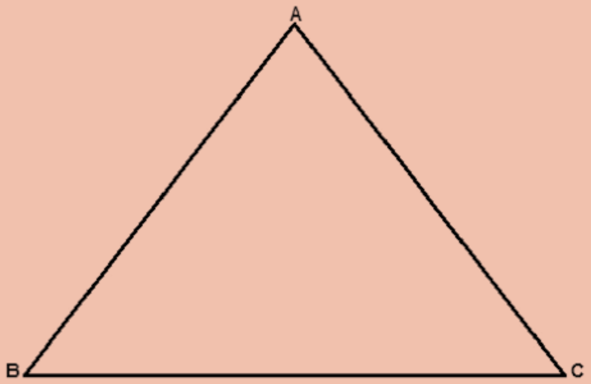
3º) Com arco de centro A e raio $\overline{OA}$, determine o ponto B.

4º) Trace a semi-reta $\overrightarrow{OB}$, determinando assim o ângulo de medida igual a 60°.



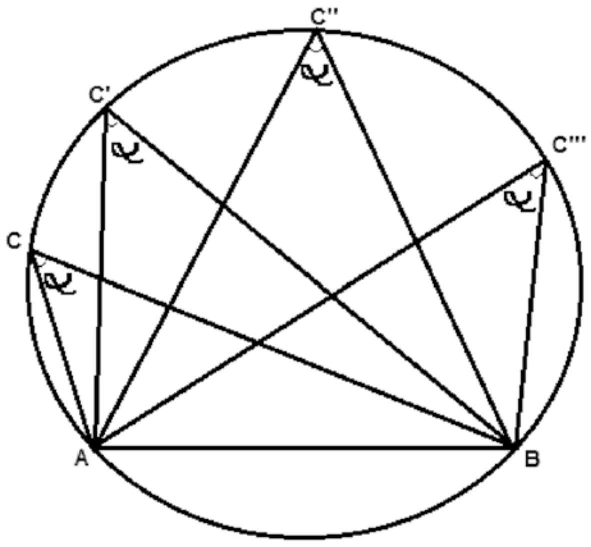
Para refletir

1. Os ângulos de 30° e 45° ficam como exercícios na lista de atividades para você desenvolver como seus colegas em sala.
2. Dado o triângulo abaixo, com régua e compasso, determine o Incentro.



4. Utilizando ângulos na construção de arcos capazes

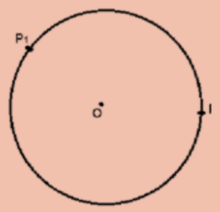
Observe a figura abaixo.



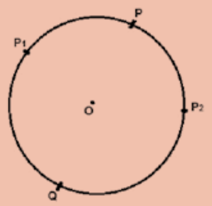
Considere o arco $\widehat{ACB}$, de medida α, que está sobre o segmento $\overline{AB}$. Ele é chamado de arco capaz. Isso porque qualquer ponto sobre esse arco é capaz de formar um ângulo de mesma medida α sobre o segmento $\overline{AB}$.

Saiba mais

ARCO é uma parte da circunferência. Vamos analisar.
Tomemos os pontos P_1 e P_2 pertencentes a uma dada circunferência de centro *O* como mostra a figura a seguir.

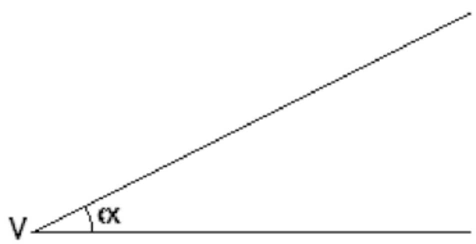


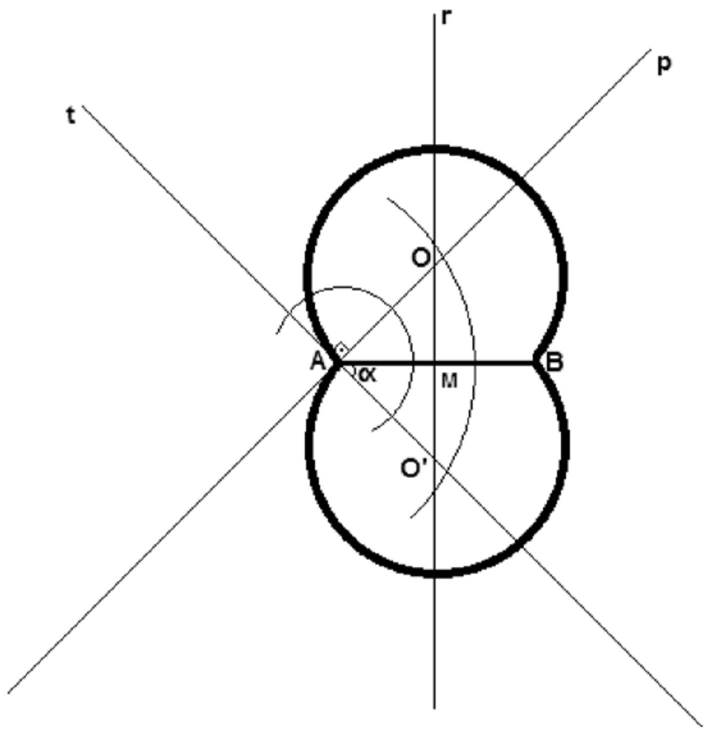
Os pontos P_1 e P_2 determinam duas partes, a cada parte chamamos de arco. Embora os arcos sejam diferentes, percebemos que os dois têm a mesma notação P_1P_2. Caso queiramos indicar um deles devemos tomar outros dois pontos pertencentes à circunferência para diferenciar um arco do outro.



Agora temos os arcos P_1PP_2 e P_1QP_2.

Agora sugerimos que você tente construir, a partir das instruções que serão dadas um par de arcos capazes do ângulo α dado sobre o segmento $\overline{AB}$.





1º) Dado o segmento $\overline{AB}$ trace sua mediatriz r.

2º) Transporte o ângulo α sobre a reta t.

3º) Trace a reta p, perpendicular à reta t, passando pelo ponto A.

4º) Destaque o ponto 0 que é a intercessão da reta p com a reta r.

5º) Com o compasso fixo em A de raio $\overline{AO}$, determine o ponto $0'$ em r, com o mesmo raio.

6º) Trace o par de arcos capazes de ver $\overline{AB}$ sob um ângulo α, com centros em 0 e $0'$, e raio $\overline{AB}$.

Leituras, filmes e sites

MURARI, Claudemir. PEREZ, Geraldo. O Movimento da matemática moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de geometria no Brasil e em Portugal. **Bolema**, Rio Claro, v.24, n.38, abr. 2011. p. 171-196.

Vídeo

O que é ângulo?

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eIKJxVtuyAY>.

Um pouco mais sobre ângulos.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cD6oKbUj32c>.

Sites

O Baricentro da Mente.

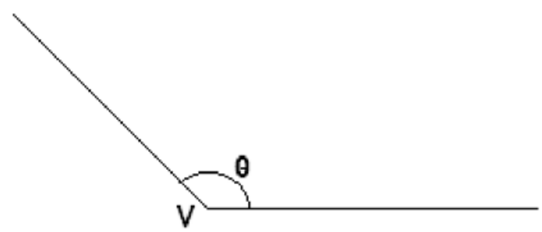
Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/07/como-determinar-o-angulo-interno-de-um.html>.

Clube de Geometria.

Disponível em: <http://clubedegeometria.blogspot.com.br/>.

Atividades de avaliação

1. Construa o par de arcos capazes do ângulo de 60º sobre o segmento $\overline{AB}$.
2. Construa o par de arcos capazes de ângulo obtuso θ sobre o segmento $\overline{AB}$.



3. Em dupla justifique cada passo da construção de um par de arcos capazes do ângulo α sobre o segmento $\overline{AB}$, descrito nesse livro. Analise cada passo da construção e escreva quais as propriedades e características vão aparecendo. Escreva os argumentos e entregue ao professor.

Capítulo 4

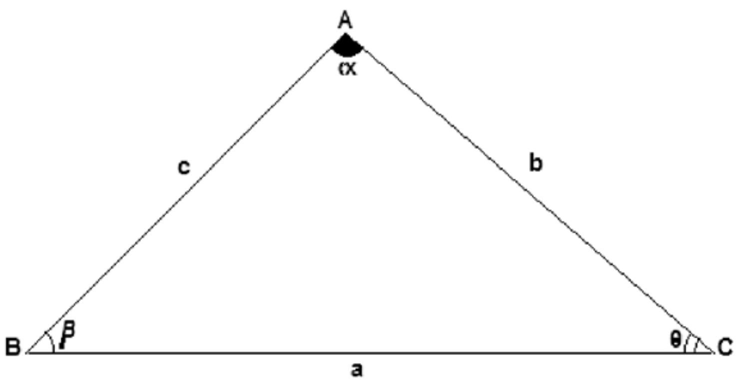
Triângulos

Objetivos

- Classificar os triângulos quantos aos lados e quanto aos ângulos.
- Construir triângulos a partir da condição de existência.
- Traçar geometricamente os pontos notáveis de um triângulo.

Introdução

O triângulo é o polígono (poli=vários, gono=ângulo) que possui três lados e três ângulos internos.



Algumas notações...

Indicamos os elementos do triângulo com algumas notações. A figura acima representa o ΔABC, cujos lados têm medidas $med(\overline{AB}) = c$, $med(\overline{BC}) = a$, $med(\overline{AC}) = b$. As medidas dos ângulos são $med(\widehat{A}) = \alpha$, $med(\widehat{B}) = \beta$, $med(\widehat{C}) = \theta$ e os vértices são A, B e C.

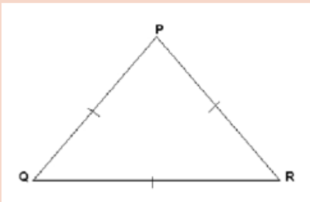
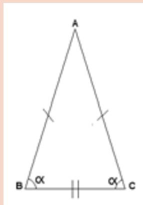
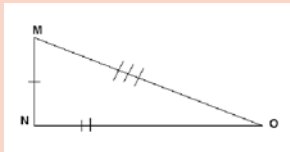
Embora o triângulo seja um polígono de três lados, é necessário que uma determinada condição seja satisfeita para que sua existência seja possível. No ΔABC que estamos analisando, os lados de medidas a, b e c estabelecem uma relação entre eles: a medida de cada lado do triângulo deve ter medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados, ou seja,

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

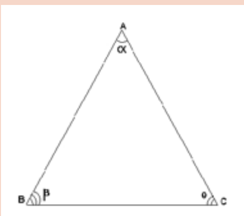
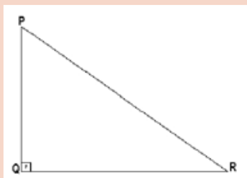
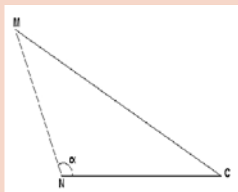
1. Classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos

Podemos classificar os triângulos quanto às medidas de seus lados e quanto às medidas de seus ângulos.

1.1. Quanto aos lados

Triângulo Equilátero possui três lados congruentes	Triângulo Isósceles possui dois lados congruentes	Triângulo Escaleno possui os três lados de medidas diferentes
		
$\overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{PR}$	$\overline{AB} \cong \overline{BC}$	$\overline{MN} \ncong \overline{NO} \ncong \overline{MO}$

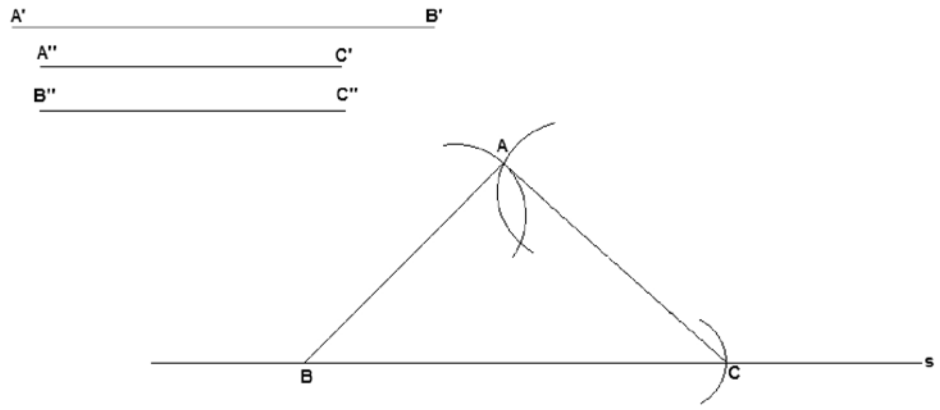
1.2. Quanto aos ângulos

Triângulo Acutângulo possui três ângulos agudos	Triângulo Retângulo possui um ângulo reto	Triângulo Obtusângulo possui um ângulo maior que 90°
		
	$med(\widehat{Q}) = 90^o$	$\alpha > 90^o$

2. Construção de Triângulos

A partir de algumas informações dadas vamos agora, com régua e compasso, construir triângulos.

2.1. Dadas os três lados de medida a, b e c, construa o DABC.



Siga as instruções!

1º) Trace a reta suporte s.

2º) Marque o ponto A na reta s.

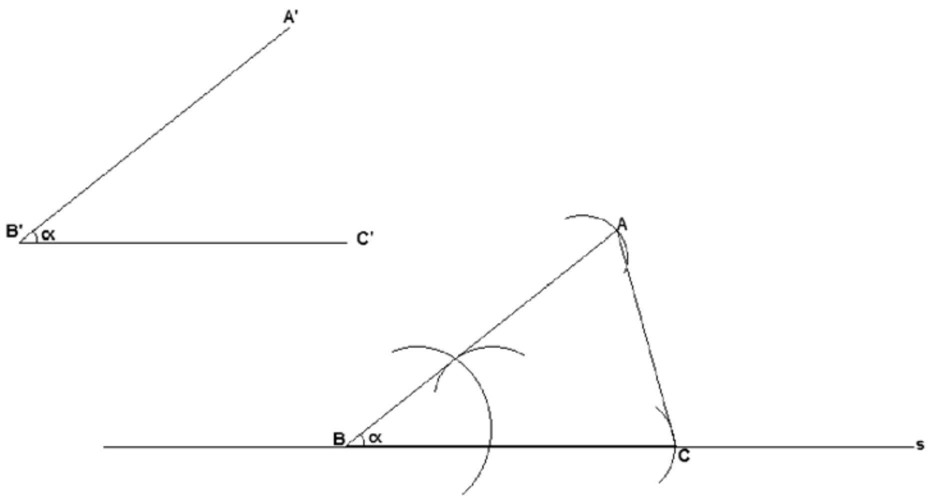
3º) Transporte o segmento $\overline{A'B'}$ para a reta s de forma que A' coincida com A.

4º) Trace o arco de centro A e raio $A''C'$.

5º) Trace o arco de centro B e raio $\overline{B''C''}$ determinando o ponto C.

6º) Destaque o ΔABC.

2.2. Dados dois lados e um ângulo por eles determinado, construa o ΔABC.



Siga as instruções!

1º) Trace a reta suporte s.

2º) Marque o ponto B na reta s.

3º) Transporte B'C' para a reta s de forma que B' coincida com B.

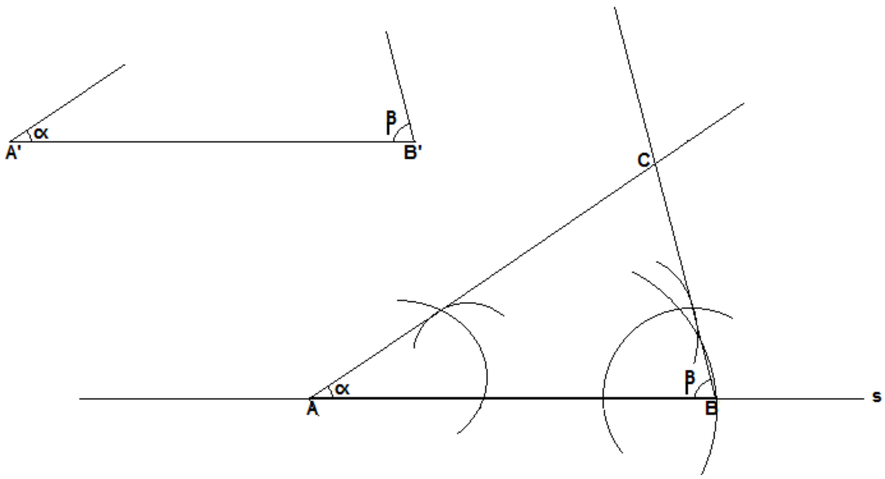
4º) Transporte o ângulo de medida α para a reta s, de vértice B.

5º) Trace o arco de centro B e raio A'B' sobre o outro lado do ângulo, determinando o ponto A.

6º) Trace o lado $\overline{AC}$.

7º) Destaque o ΔABC.

2.3. Dados dois ângulos e um lado adjacente a eles, construa o ΔABC.



Siga as instruções!

1º) Trace a reta suporte s.

2º) Marque o ponto A na reta s.

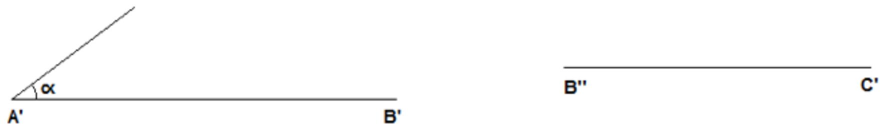
3º) Transporte A'B' para a reta s de forma que A' coincida com A.

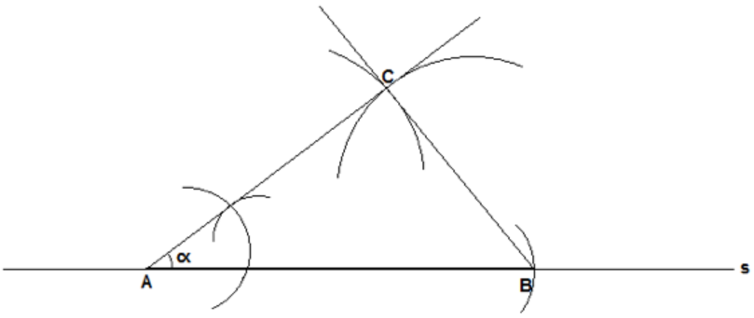
4º) Transporte o ângulo de medida α para a reta s, no vértice A.

5º) Marque o ponto C.

6º) Destaque o ΔABC.

2.4. Dados dois lados e um ângulo adjacente a um dos lados, construa o ΔABC.





Siga as instruções!

1º) Trace a reta suporte s.

2º) Marque o ponto A na reta s.

3º) Transporte o segmento $\overline{A'B'}$ para a reta s no ponto A.

4º) Transporte o ângulo de medida α para a reta s de forma que A' coincida com A.

5º) Trace o arco de centro em B e arco $\overline{B'C'}$, determinando o ponto C.

6º) Destaque o ΔABC.

A ceviana de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto a esse vértice. De cada vértice pode partir uma ceviana.

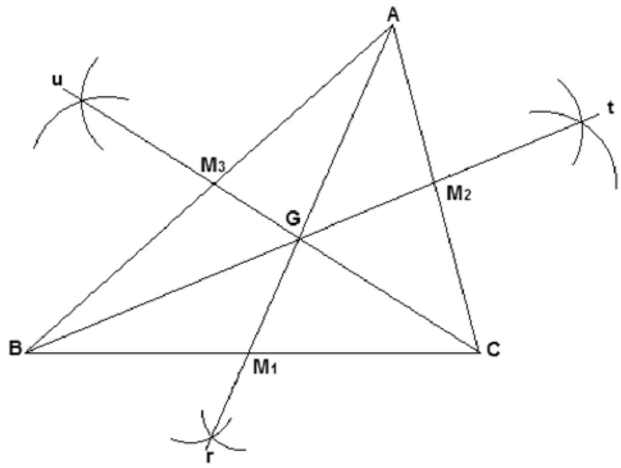
3. Os pontos notáveis de um Triângulo

O baricentro, o incentro e o ortocentro são pontos notáveis de um triângulo. São determinados a partir das cevianas. Existem várias cevianas, porém as principais são altura, bissetriz e mediana.

3.1. Baricentro

No triângulo a mediana é a ceviana cujas extremidades são o vértice e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. O ponto de intersecção das três medianas do triângulo é o baricentro.

Vamos agora, a partir de algumas orientações, traçar o baricentro no ΔABC.



1º) Com o compasso de centros em B e C e, raios de mesma medida, maior que a metade, trace os arcos determinando a reta r e o ponto M_1 no lado $\overline{BC}$.

2º) Com o compasso de centros em A e C e, raios de mesma medida, maior que a metade, trace os arcos determinando a reta t e o ponto M_2 no lado $\overline{AC}$.

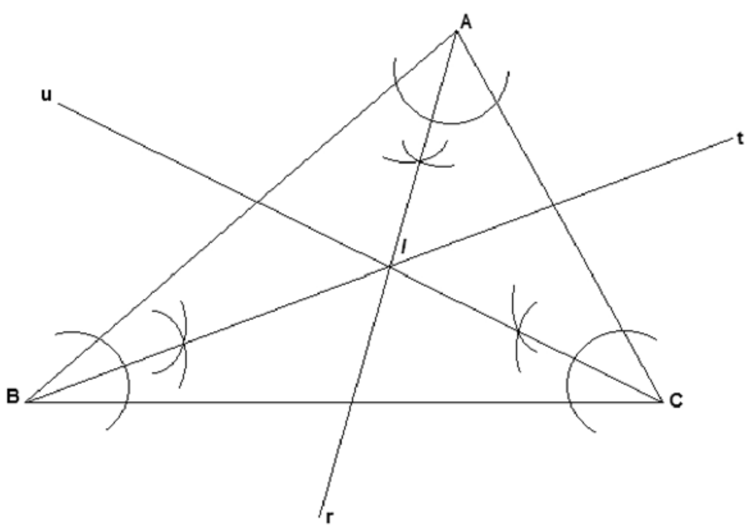
3º) Com o compasso de centros em A e B e, raios de mesma medida, maior que a metade, trace os arcos determinando a reta u e o ponto M_3 na lado $\overline{AB}$.

4º) Destaque G, o baricentro, ponto de intercessão das três medianas.

3.2. Incentro

No triângulo a bissetriz interna é ceviana que divide o ângulo do vértice ao meio. O ponto de intersecção das três bissetrizes do triângulo é o incentro.

Vamos agora, a partir de algumas orientações, traçar o incentro no ΔABC.

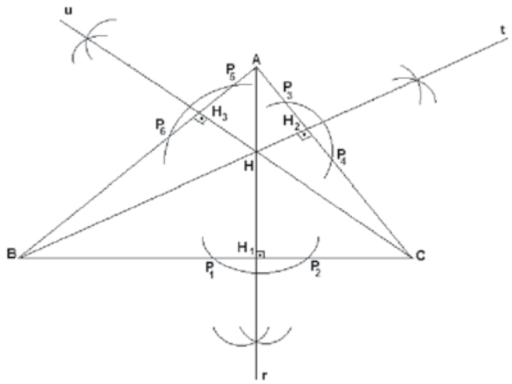


1º) Trace a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.
2º) Trace a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$.
3º) Trace a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.
4º) Destaque I, o baricentro, ponto de intercessão das três bissetrizes.

3.3. Ortocentro

No triângulo a altura é a ceviana que é perpendicular ao lado oposto ao vértice. O ortocentro é o ponto de encontro das três alturas do triângulo.

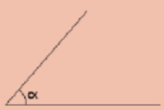
Vamos agora, a partir de algumas orientações, traçar o ortocentro no DABC.



1º) Com o compasso de centro em A, trace um arco qualquer no lado oposto a A, determinando os pontos P_1 e P_2.
2º) Com o compasso de centros em P_1 e P_2, trace dois arcos determinando a reta r e o ponto H_1.
3º) Com o compasso de centro em P_3 e P_4, trace dois arcos determinando a reta t e o ponto H_2.
4º) Com o compasso de centro em P_5 e P_6, trace dois arcos determinando a reta u e o ponto H_3.
5º) Destaque o ponto H, o ortocentro, ponto de intersecção das três alturas.

Para refletir

1. Construa o triângulo isósceles cuja base possui 6 cm de comprimento e ângulos de α dado na figura a seguir. Utilize apenas régua e compasso.



2. Construa o triângulo equilátero de lados de medida 4 cm.

3. Dados os ângulos α e β e o lado $\overline{AB}$ adjacente a eles, construa, com régua e compasso o ΔABC.

4. Dados dois lados e um ângulo adjacente a um deles, construa o ΔABC.

5. Construa o triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm, em seguida determine o baricentro desse triângulo.

6. Construa um triângulo de lados 10 cm, 8 cm e 6 cm e determine seu incentro.

7. Construa um triângulo cujos lados têm medidas 5 cm e em seguida determine o ortocentro desse triângulo.

Leituras, filmes e sites

Bioconstrução, Geodésicas e a Educação de Jovens e Adultos

Disponível em: <http://proex.ufabc.edu.br/ejaecosol/bioconstrucao-geodesicas-e-educacao-de-jovens-e-adultos/>.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática uma breve história.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

MENDES, Iran Abreu. **Tópicos de história da matemática:** contribuições para a formação de professores. Belém: SBEM-PA, 2011.

Vídeo

O Triângulo de Penrose – Arte ou Matemática?

Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=veYX2JNQFyk >.

Sites

Discovery na escola

Disponível em: < http://www.discoverynaescola.com/ >

Atividades de avaliação

1. Em dupla, construa um triângulo equilátero cujos lados têm medidas 6 cm e discuta sobre:

a) as cevianas desse triângulo

b) os pontos notáveis desse triângulo

2. Com régua e compasso verifique a possibilidade de existência dos triângulos cujos lados têm as medidas a seguir:

a) 10 cm, 6 cm e 4 cm

b) 8 cm, 4 cm e 2 cm

3. Construa um triângulo de lados 9 cm, 8 cm e 7 cm. Determine o baricentro e discuta por que ele é o ponto de equilíbrio do triângulo.

4. Pesquise sobre o circuncentro, desenhe o ΔABC e faça uma construção com régua e compasso.

Os argumentos dessas atividades deverão ser escritos e entregues ao seu professor.

Capítulo 5

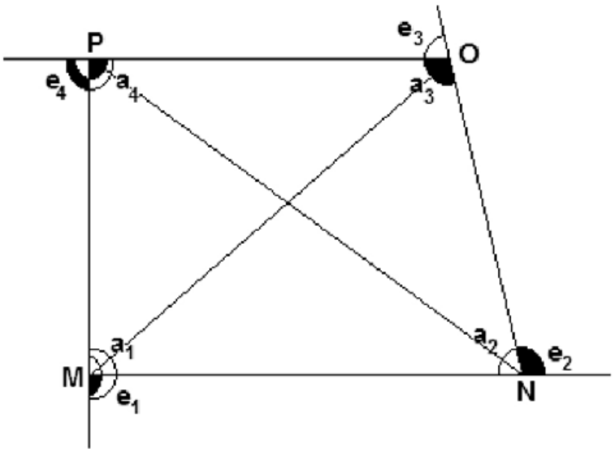
Quadriláteros

Objetivos

- Classificar os quadriláteros em paralelogramos e trapézios.
- Construir quadriláteros com régua e compasso.

Introdução

Quadrilátero é um polígono que possui quatro lados.



Algumas notações...

Indicamos os elementos do quadrilátero com algumas notações. A figura acima representa o quadrilátero MNOP, cujos lados são $\overline{MN}, \overline{NO}, \overline{OP}, \overline{PM}$. .As medidas dos ângulos internos são $med(\widehat{M}) = a_1, med(\widehat{N}) = a_2, med(\widehat{O}) = a_3, med(\widehat{P}) = a_4$ e, as medidas dos ângulos externos são $med(M) = e_1, med(N) = e_2, med(O) = .\ e_3, med(P) = e_4$ Os véstices são M, N, O, P e as diagonais são $\overline{MO}$ e $\overline{PN}$.

Os quadriláteros podem ser côncavos e convexos.

1. Classificação

Os quadriláteros são classificados em:

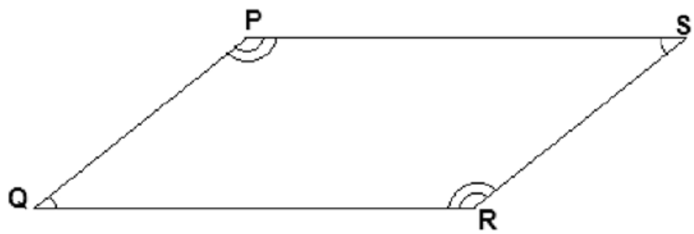
Paralelogramo
- Retângulo
- Losango

→ Quadrado

Trapézio
- Trapézio Retângulo
- Trapézio Isósceles
- Trapézio Escaleno

2. Paralelogramo

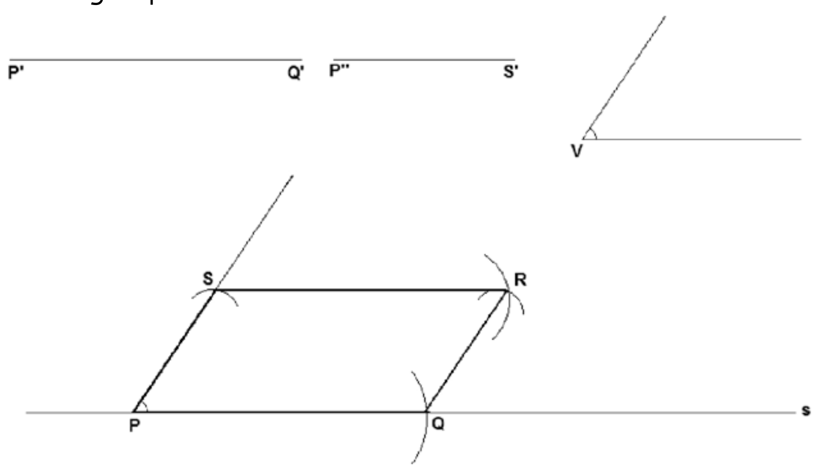
O paralelogramo propriamente dito possui ângulos opostos congruentes e lados opostos de mesma medida. As diagonais de um paralelogramo se interceptam em seu ponto médio.



As diagonais do retângulo estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

A partir de agora sugerimos a construção, com régua e compasso, de alguns quadriláteros. É só seguir as instruções.

Construa um paralelogramo propriamente dito, dados dois lados consecutivos e um ângulo por eles formado.



1º) Trace a reta suporte s.

2º) Marque o ponto P em s.

3º) Transporte $\overline{P'Q'}$ para s de forma que P' coincida com P.

4º) Transporte o ângulo $\widehat{V}$ de forma que o vértice coincida com o ponto P.

5º) Transporte o segmento $\overline{P''S'}$ para o lado do ângulo que não coincide com $\overline{PQ}$.

6º) Trace o segmento $\overline{PS}$.

7º) Trace o arco de centro em Q e raio $\overline{PS}$.

8º) Trace o arco de centro em S e raio $\overline{PQ}$, determinando o ponto R.

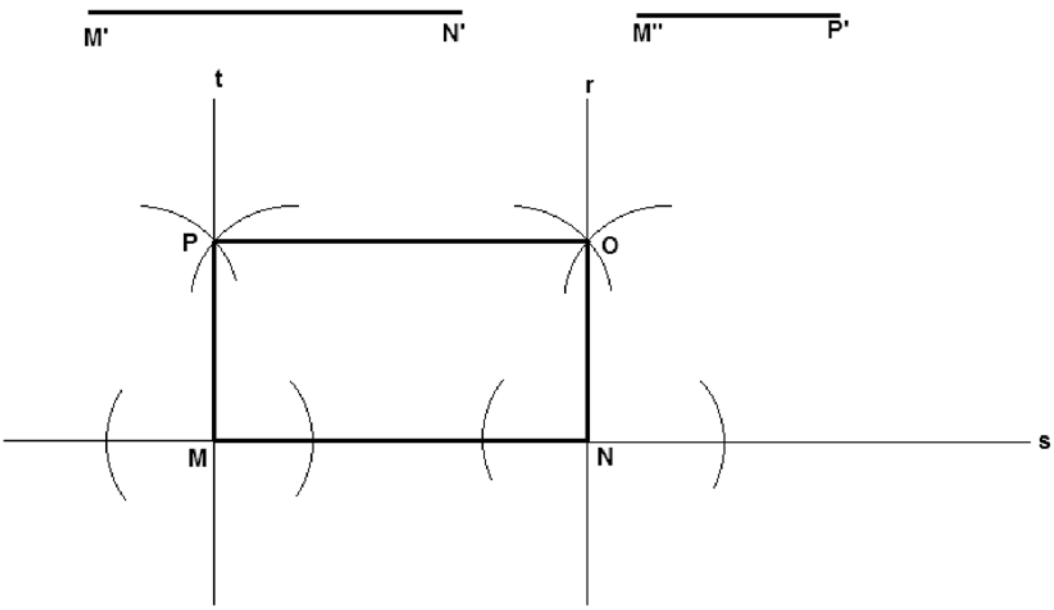
9º) Destaque o paralelogramo $PQRS$.

No trapézio também é possível traçar a base média, paralela às duas outras bases e, cuja medida é igual à metade da soma das medidas da base maior e da base menor.

2.1. Retângulo

O retângulo é o paralelogramo, cujas diagonais são congruentes e os ângulos internos medem cada um, 90º.

Dados dois lados consecutivos, construa o retângulo $MNOP$.



1º) Trace a reta suporte s.

2º) Marque o ponto M e transporte $\overline{M'N'}$ de forma que M' coincida com M.

3º) Trace $t \perp s.$.

4º) Transporte $\overline{M''P'}$ para t de forma que M'' coincida com M. Destaque $\overline{MP}$.

5º) Trace $r \perp s.$.

6º) Trace o arco de centro N e raio $\overline{MP}$, determinando o ponto 0 em r.

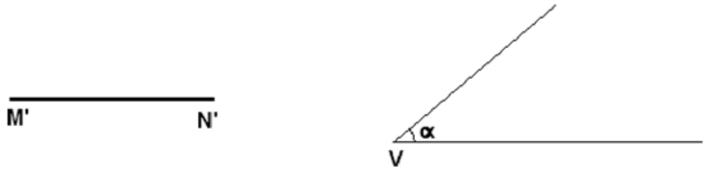
7º) Trace o segmento $\overline{PO}$, e destaque o retângulo $MNOP$.

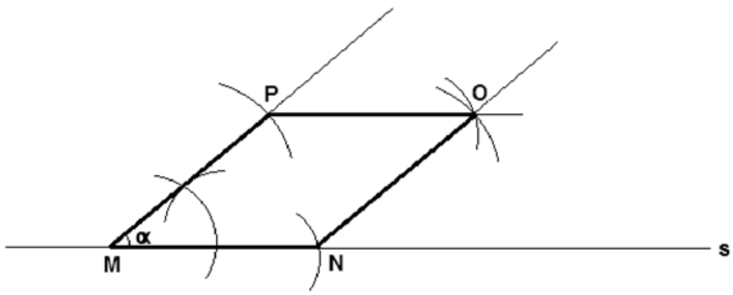
2.2. Losango

O losango é o paralelogramo que possui todos os lados de mesma medida e, as diagonais são perpendiculares e se interceptam no ponto médio.

Com régua e compasso, siga as instruções:

Dado o lado e um ângulo construa o losango $MNOP$.





1º) Trace a reta suporte s.

2º) Transporte $\overline{M'N'}$ para s de forma que M' coincida com M. Trace o lado $\overline{MN}$.

3º) Transporte o ângulo $\widehat{V}$ para de forma que o vértice coincida com M.

4º) Trace no outro lado de $\widehat{V}$ um arco de centro M e raio $\overline{M'N'}$. Destaque o lado $\overline{MP}$ do losango.

5º) Trace o arco de centro N e raio $\overline{MN}$ e o arco de centro em P e raio $\overline{MN}$, determinando o ponto 0.

6º) Destaque o losango $MNOP$.

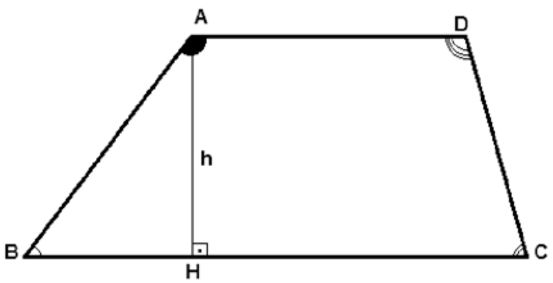
2.3. Quadrado

O quadrado é considerado o quadrilátero no qual estão inseridas propriedades do retângulo e do losango. Do retângulo, o quadrado possui ângulos internos retos e diagonais de mesma medida. Do losango, possui a congruência dos lados e a perpendicularidade das diagonais.

Para você, deixamos a seguinte orientação: Com base nos procedimentos utilizados na construção do retângulo e do losango, com régua e compasso, construa o quadrado $ABCD$, de lado cujo comprimento L.

3. Trapézio

O trapézio difere do paralelogramo em possuir apenas um par de lados opostos paralelos, que são denominados de base maior e base menor.

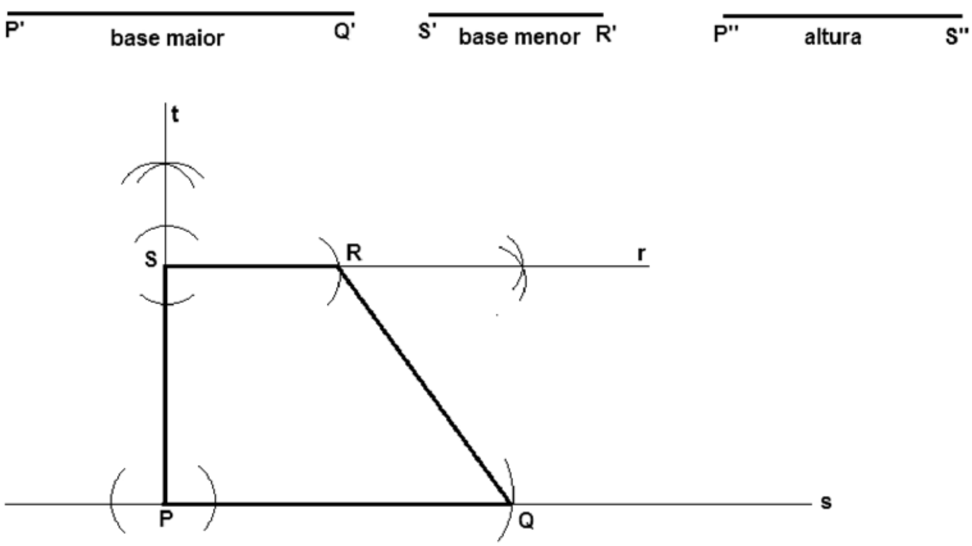


No trapézio os ângulos adjacentes a um lado transversal são suplementares. Na figura acima temos que: $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$ e $\widehat{C}+\widehat{D}=180°$. O segmento $\overline{AH}$ de medida h é a altura do trapézio (distância de uma base à outra).

3.1. Trapézio Retângulo

No trapézio retângulo, os ângulos de um dos lados transversais medem 90º cada um.

Agora é a sua vez! Com régua e compasso, construa o trapézio retângulo $PQRS$, dadas a base maior, a base menor e a altura.



1º) Trace a reta suporte s e marque o ponto P.

2º) Transporte para s o segmento $\overline{P'Q'}$, de forma que P' coincida com P.

3º) Trace $t \perp s$ passando por P.

4º) Transporte $\overline{P''S''}$ para t de forma que P'' coincida com P.

5º) Trace $r \perp t$ ou $r \parallel s$.(Optamos por sugerir $r \perp t$).

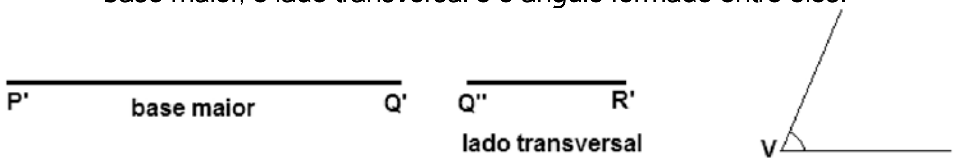
6º) Transporte $\overline{S'R'}$ para r, de forma que S' coincida com S.

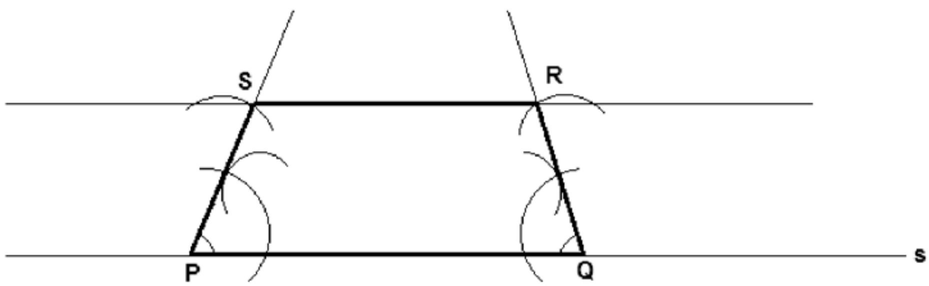
7º) Trace o lado transversal $\overline{RQ}$, destacando o trapézio $PQRS$.

3.2. Trapézio Isósceles

No trapézio isósceles os lados transversais têm a mesma medida e os ângulos das bases maior são congruentes entre si, e os ângulos da base menor também.

Seguindo as instruções, construa o trapézio isósceles $PQRS$, dados a base maior, o lado transversal e o ângulo formado entre eles.





1º) Trace a reta suporte s e marque o ponto P.

2º) Transporte o segmento $\overline{P'Q'}$ para s, de forma que P' coincida com P. Destaque o segmento $\overline{PQ}$..

3º) Transporte o ângulo $\widehat{V}$ para de forma que o vértice coincida com P. Depois transporte o ângulo $\widehat{V}$ para s de forma que o vértice também coincida com Q.

4º) Trace o arco de centro P e raio $\overline{Q''R'}$ no lado do ângulo transportado que não coincide com a base maior.

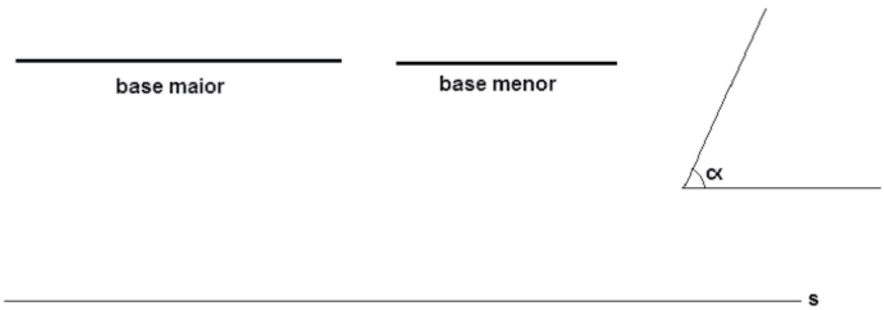
5º) Trace o arco de centro Q e raio $\overline{Q''R'}$ no lado do ângulo transportado que não coincide com a base maior.

6º) Trace o segmento $\overline{SR}$. Destaque o trapézio isósceles $PQRS$.

3.3. Trapézio Escaleno

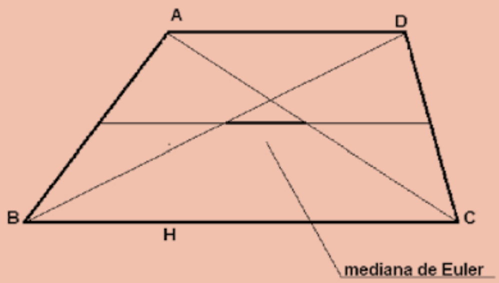
As propriedades do trapézio escaleno são as propriedades para qualquer trapézio. Não possui uma propriedade específica.

Com base nos procedimentos já realizados na construção do trapézio retângulo e do trapézio isósceles, com régua e compasso, construa o trapézio escaleno $PQRS$, dadas as bases e um ângulo adjacente à base maior.



Saiba mais

A mediana de Euler é o segmento que está contido na base média do trapézio e cujos extremos são os pontos médios das diagonais desse trapézio.



Leituras, filmes e sites

ALVES, Maria Rachel. et al. Atividades envolvendo quadriláteros. **Educação Matemática em Revista.** SBEM, n. 37, nov. 2012.

SCIPIONE, Smoothey. **Atividades e jogos com quadriláteros:** investigação matemática. São Paulo: Scipione, 1998.

site

Quadriláteros

Disponível em:

< http://www.somatematica.com.br/fundam/quadrilatero/quadrilatero.php>.

Geogebra

Disponível em:< https://www.geogebra.org/>.

Vídeo

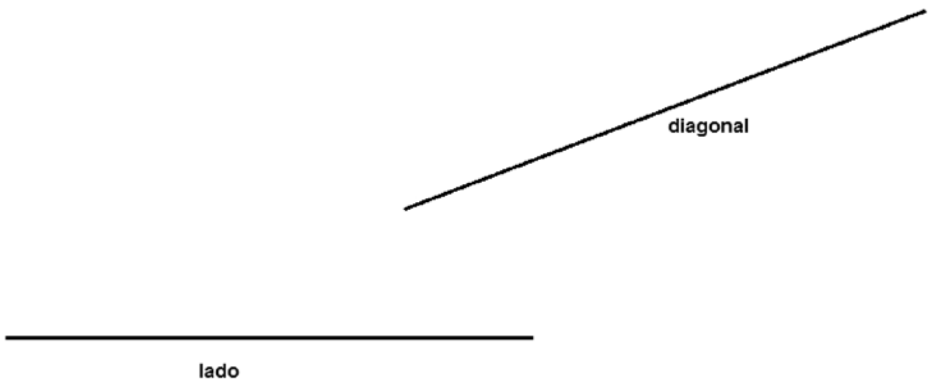
Geoplanos – perímetros e áreas

Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=qHhq3xJc38g>.

Atividades de avaliação

1. Dados dois lados e um ângulo por eles formado, construa o paralelogramo

2. Dados o lado $\overline{A'B'}$ e a diagonal $\overline{A''C'}$, construa, com régua e compasso, o retângulo . (lembre-se: para a diagonal, você deverá traçar a bissetriz do ângulo interno).



3. Dadas as duas diagonais, construa o losango *ABCD*.

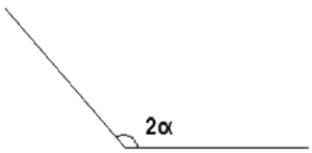
diagonal maior

diagonal menor

4. Construa o trapézio isósceles PQRS, dadas as bases e os ângulos de um lado transversal cujas medidas são α e 2α.

base menor

base maior

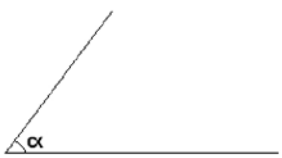


s

5. Construa o trapézio retângulo dada a base maior, a altura e o ângulo de um lado transversal.

base maior

altura



s

6. Construa o trapézio isósceles $MNOP$ dadas as bases maior e menor e a altura. (trace a altura passando pelo ponto médio da base maior).

base maior

base menor

altura

s

7. Com um colega, monte um quadro no qual as linhas serão as propriedades dos paralelogramos explorados nesse capítulo (caso encontre mais alguma coloque no quadro). Responda se o paralelogramo possui ou não possui a propriedade que você escrever no quadro.

	PARALELOGRAMO	RETÂNGULO	LOSANGO	QUADRADO
PROPRIEDADE				
PROPRIEDADE				
PROPRIEDADE				
PROPRIEDADE				
⋮				

8. O segmento $\overline{PQ}$ é o perímetro de um quadrado. Determine o lado $\overline{AB}$ e construa o quadrado $ABCD$.

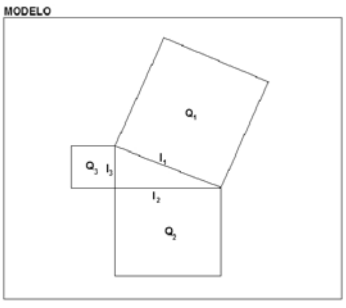
P Q

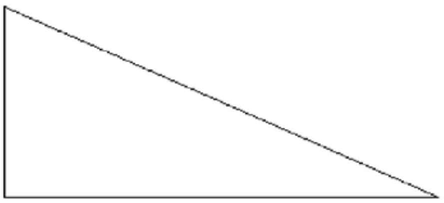
9. No retângulo MNOP a medida de seu comprimento é o dobro da medida de sua largura. Dado o semiperímetro $\overline{EF}$, construa o retângulo.

E F

10. Construa o losango $ABCD$ dado o lado e um ângulo interno cuja medida é . (Não utilize transferidor).

11. Construa os quadrados Q_1, Q_2 e Q_3 no triângulo abaixo, cujos lados são, respectivamente, l_1, l_2 e l_3.





12. Construa o trapézio retângulo $EFGH$, dada base maior, a altura e o ângulo de um lado transversal cuja medida é 45º. (Não utilize transferidor!).

base maior

altura

13. Escreva os procedimentos que você utilizou na construção do quadrado do subitem 5.2.3.

14. Escreva os procedimentos que você utilizou na construção do trapézio escaleno do subitem 5.3.3.

Os argumentos dessas atividades deverão ser escritos e entregues ao seu professor.

Capítulo 6

Semelhança de figuras geométricas

Objetivos

- Explorar as transformações geométricas.
- Construir com régua e compasso figuras homotéticas.

Introdução

Observe as figuras a seguir

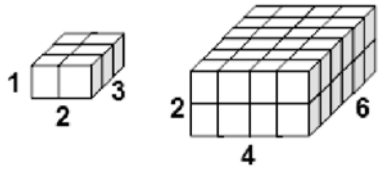
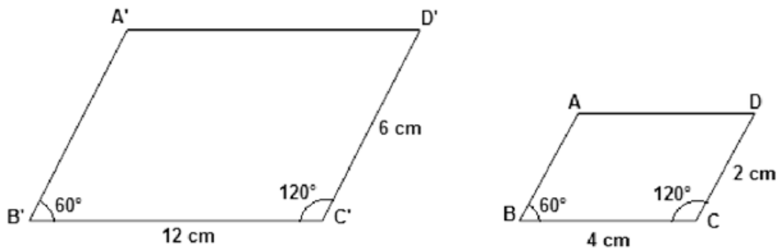


fig. (1) fig. (2)

Ao analisar as figuras (1) e (2) você pode concluir que as formas são as mesmas, porém os tamanhos são diferentes.

Vejamos agora os paralelogramos P_1 e P_2.



P_1 P_2

Da maneira como as figuras estão dispostas, vemos claramente os ângulos de P_1 que se correspondem com os ângulos de P_2.

P_1	*corresponde a*	P_2
A'		A
B'		B

C'		C
D'		D

Os ângulos correspondentes são congruentes.

$\widehat{A'} \cong \widehat{A} \rightarrow med\left(\widehat{A'}\right) = med\left(\widehat{A}\right)$

$\widehat{B'} \cong \widehat{B} \rightarrow med\left(\widehat{B'}\right) = med\left(\widehat{B}\right)$

$\widehat{C'} \cong \widehat{C} \rightarrow med\left(\widehat{C'}\right) = med\left(\widehat{C}\right)$

$\widehat{D'} \cong \widehat{B} \rightarrow med\left(\widehat{D'}\right) = med\left(\widehat{D}\right)$

Podemos ainda analisar os lados formados por vértices que se correspondem.

P_1	*corresponde a*	P_2
$\overline{A'B'}$		$\overline{AB}$
$\overline{B'C'}$		$\overline{BC}$
$\overline{C'D'}$		$\overline{CD}$
$\overline{D'A'}$		$\overline{DA}$

Quando comparamos os lados correspondentes, notamos que

$\overline{A'B'}$ está para $\overline{AB}$ assim como 6 cm está para 2 cm, ou seja, .
$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{6\,cm}{2\,cm} = 3$

$\overline{B'C'}$ está para $\overline{BC}$ assim como 12 cm está para 4 cm, ou seja, $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \dfrac{12\,cm}{4\,cm} = 3$.

$\overline{C'D'}$ está para $\overline{CD}$ assim como 2cm está para 2 cm, ou seja, $\dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \dfrac{6\,cm}{2\,cm} = 3$.

$\overline{D'A'}$ está para $\overline{DA}$ assim como 12 cm está para 4 cm, ou seja, $\dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = \dfrac{12\,cm}{4\,cm} = 3$.

Em P_1 e P_2, os lados correspondentes são homólogos (os lados de P_1 estão na mesma posição/ lugar que os lados de P_2). E ainda mais, são proporcionais, pois $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = 3$.

Neste caso, dizemos que P_1 *e* P_2 são polígonos semelhantes, ou seja, $P_1 \sim P_2$.

Portanto, dois polígonos são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos em proporção.

Na semelhança comparamos duas figuras nas quais, uma está ampliada ou reduzida em relação à outra. A semelhança é aplicada em escalas (confecção de mapas, em maquetes ou na planta baixa de uma casa).

1. As Transformações Geométricas

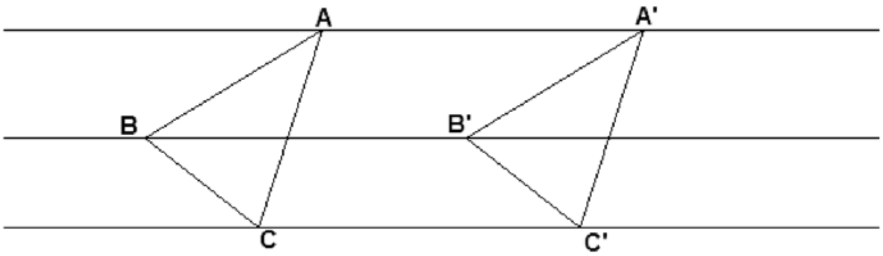
As Isometrias (iso=mesma, metria=medida) também são denominadas de movimentos rígidos por preservarem a figura original.

No estudo das semelhanças de figuras, estão as transformações geométricas, que são relações entre pontos de um mesmo plano. Ou seja, as transformações geométricas permitem que figuras num plano sejam movimentadas ou transformadas, porém sua forma e tamanho podem ser conservados.

Você pode estar se perguntando: que tipo de transformação as figuras sofrem que a forma e o tamanho podem ser conservados? Uma transformação que permita a translação, a reflexão ou a rotação da figura, sem que suas propriedades sejam alteradas. Vamos analisar cada uma dessas transformações.

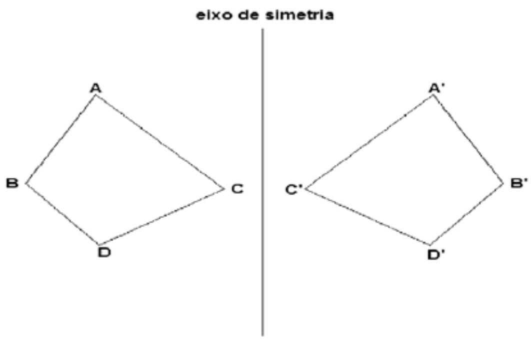
1.1. Translação

Nessa transformação geométrica uma figura pode ser deslocada de um local para outro do plano. Na translação uma figura é transformada em outra congruente.



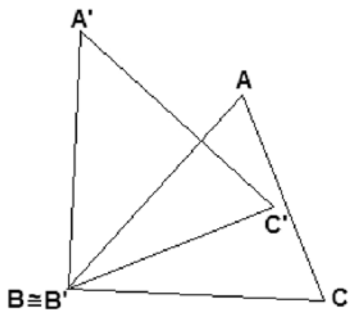
1.2. Reflexão

A reflexão ou simetria permite que uma figura seja refletida obtendo a sua simétrica em relação a um eixo de projeção. Nessa transformação surge uma figura congruente à figura original, porém o plano é invertido.



1.3. Rotação

Na rotação a transformação ocorre girando uma figura no sentido anti-horário (como orienta a convenção). Mesmo o centro da figura sendo rotacionado e sofrendo uma variação de ângulo e de amplitude, a figura que surge é congruente à figura original.



Duas figuras são homotéticas quando são semelhantes e há paralelismo entre os lados homólogos.

As transformações geométricas que acabamos de analisar são chamadas de Isometrias, pois não deformam a figura original, e a figura que sofre transformação é congruente à primeira.

2. Homotetia: uma transformação geométrica que não é Isometria

Embora a homotetia não seja uma Isometria, ou seja, não transforme uma figura em outra congruente, é uma transformação geométrica e gera uma figura semelhante à outra.

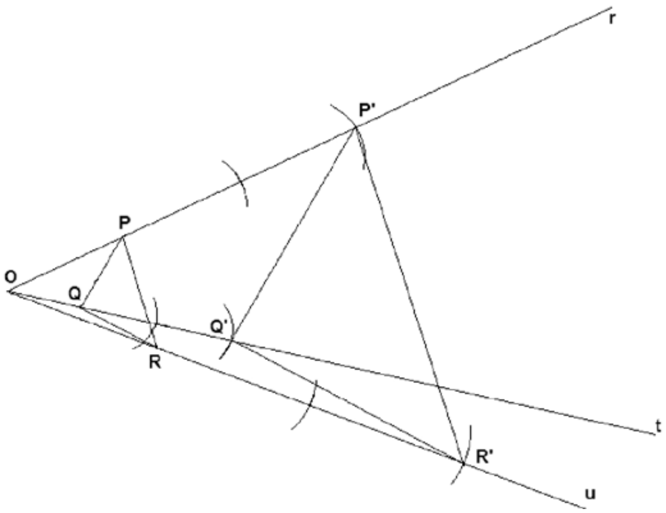
Nossa intenção é que a partir de agora você construa figuras homotéticas.

Para a construção de figuras homotéticas é fundamental que se defina o centro de homotetia e a razão de semelhança k, que determina se a homotetia é direta $(k > 0)$ ou inversa $(k < 0)$, se a figura será reduzida ou ampliada.

Agora siga as instruções:

Construa o $\Delta P'Q'R'$ homotético ao ΔPQR na razão $k = 3$.

A orientação dada é que se construa um triângulo três vezes maior ao que é dado, na homotetia direta, pois $k > 0$.



1º) Marque o ponto O, centro de homotetia.

2º) Trace as retas t, r e u passando pelo ponto 0 e pelos vértices do $\Delta P'Q'R'$.

3º) Trace em r três arcos de raio $\overline{OP}$. Determine o ponto P'.

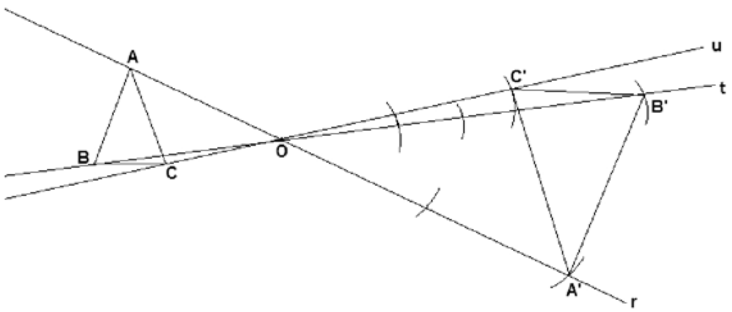
4º) Trace em t três arcos de raio $\overline{OQ}$. Determine o ponto Q'.

5º) Trace em u três arcos de raio $\overline{OR}$. Determine o ponto R'.

6º) Destaque o $\Delta P'Q'R'$.

Construa o $\Delta A'B'C'$ homotético ao ΔABC na razão $k = -2$.

A orientação dada é que se construa um triângulo duas vezes maior ao que é dado, na homotetia inversa, pois $k < 0$.



1º) Marque o ponto O, centro de homotetia na frente da figura.

2º) Trace as retas r; t e u passando por O e pelos vértices do ΔABC.

3º) Trace em r dois arcos de raio $\overline{OA}$, determinando o ponto A'.

4º) Trace em t dois arcos de raio $\overline{OB}$, determinando o ponto B'.

5º) Trace em u dois arcos de raio $\overline{OC}$, determinando o ponto C'.

6º) Destaque o ΔABC.

Leituras, filmes e sites

RODRIGUES, Camila Roberta Ferrão. **Pontencialidades e possibilidades do ensino das transformações geométricas no ensino fundamental.** 2012. 156f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/61264/000865141.pdf? sequence=1>.

Site

Homotetia através de Aplicativos Dinâmicos

Disponível em: <http://homotetiacomaplicativosdinamicos.blogspot.com.br/2013/05/elementos-da-homotetia.html>.

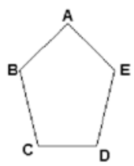
Vídeo

Escher e a Geometria

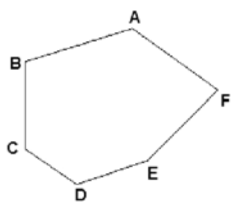
Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY>.

Atividades de avaliação

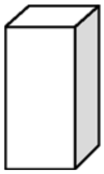
1. Construa o pentágono $A'B'C'D'E'$ homotético ao pentágono ABCDE na razão $k = 4$.



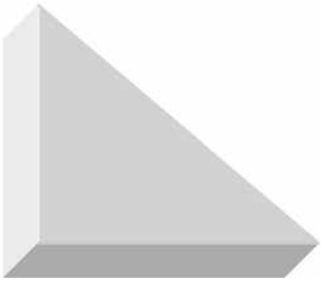
2. Construa o hexágono $A'B'C'D'E'F'$ homotético ao hexágono $ABCDEF$ na razão $k = -1$.



3. Amplie a figura na razão $k = 2$.



4. Reduza a figura na razão $k = 1/2$.



5. Construa um $\Delta A'B'C'$ homotético ao ΔABC na razão $k=1/3$.

6. Construa na razão $k=4/3$ um $\Delta P'Q'R'$ homotético ao ΔPQR.

Os argumentos dessas atividades deverão ser escritos e entregues ao seu professor.

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GIONGO, Affonso R. **Curso de desenho geométrico.** 34. ed. São Paulo: Nobel, 1984.

LOPES, Elizabeth T.; Kanegae, Cecília F. **Construções geométricas: conceitos e técnicas.** São Paulo: Scipione, 1999. (Coleção Desenho Geométrico).

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 110p. (Coleção do Professor de Matemática, 9).

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática.** Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985

Sobre a autora

Joelma Nogueira dos Santos: atualmente é professora de Matemática e coordena o Laboratório de Matemática Educativa da E.E.F.M. Lions Jangada. Ministra aulas nos cursos de graduação e pós-graduação em Ensino de Matemática. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática. Concluiu o mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) pela Universidade Federal do Ceará (UFC). É Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) cuja formação está direcionada para o Ensino e a Aprendizagem. É Especialista em Gestão e Avaliação da Educação Pública pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) a qual está voltada para a Gestão do Currículo.

Matemática

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78263-94-2
9788578263942

LUMEN AD VIAM

Universidade Estadual do Ceará

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CAPES