Computação

Matemática I

Glauber Ferreira Cintra

EdUECE

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Computação

Matemática I

Glauber Ferreira Cintra

3ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Luciana Oliveira – CRB-3 / 304
Bibliotecário

C575m Cintra, Glauber Ferreira.
Matemática I / Glauber Ferreira Cintra . – 3. ed. – Fortaleza : EdUECE, 2015.
86 p. : il. ; 20,0cm x 25,5cm. (Computação)

Inclui bibliografia.

ISBN: 978-85-7826-444-4

1. Matemática. I. Título.

CDD 510

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

Neste livro são discutidos alguns tópicos de matemática que têm especial utilidade para estudantes de computação, engenharia e outras áreas como probabilidade, estatística, pesquisa operacional etc. Tais tópicos incluem teoria elementar dos conjuntos, problemas de contagem, relações, funções, limites e derivadas.

A compreensão desse texto não exige mais do que a matemática abordada no ensino médio. Nenhum conhecimento de prévio cálculo é necessário. Apesar de sua enorme importância na matemática, neste texto omitimos a demonstração de grande parte dos teoremas aqui apresentados, devido à natureza e à carga horária da disciplina na qual este livro será utilizado. Em alguns casos, apresentamos apenas um esboço da demonstração. Em outros casos, indicamos referências onde o leitor interessado poderá obter uma demonstração detalhada do teorema apresentado.

O livro está dividido em capítulos, cada um deles discorrendo sobre um dos tópicos citados anteriormente. Ao final de cada capítulo, o leitor encontrará um breve resumo e sugestões de outros materiais para complementar e aprofundar o estudo dos assuntos discutidos. Os capítulos, por sua vez, estão divididos em tópicos. Ao final de cada tópico, o leitor encontrará atividades de avaliação para revisão e fixação do conteúdo. É de fundamental importância que o leitor tente resolver cada um dos exercícios propostos. Tal prática é condição necessária para um bom aproveitamento desse livro.

O autor

Capítulo 1

Conjuntos

1. Introdução

Neste capítulo discutimos um objeto matemático de fundamental importância que são os conjuntos. Após definir o que é um conjunto, apresentamos formas de descrevê-los e mostramos como expressar os relacionamentos existentes entre conjuntos e entre elementos e conjuntos. Explicamos também as principais operações envolvendo conjuntos. Finalmente, apresentamos os conceitos de partição, maximalidade e minimalidade de conjuntos.

O leitor deverá compreender os conceitos e as notações aqui apresentadas e ser capaz de realizar operações envolvendo conjuntos. Além disso, deverá entender o que é uma partição de um conjunto e ser capaz de determinar se um conjunto é máximo, maximal, mínimo ou minimal com relação a uma propriedade.

2. Conceitos Básicos

Um conjunto é uma coleção de elementos distintos. Além disso, num conjunto a ordem dos elementos não é importante. Dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

É comum descrever um conjunto colocando seus elementos entre {} (chaves), separados por vírgulas. Esta maneira é apropriada para descrever conjuntos com poucos elementos. A seguir estão alguns exemplos de conjuntos.

{3, 6, 7, 9}   {CE, SP, PE}   {4, "bola", RJ}

Podemos também descrever um conjunto através de uma condição (predicado) que determina quais são os elementos do conjunto. Esta forma é especialmente adequada para descrever conjuntos infinitos. Vejamos alguns exemplos:

P = { x | x é um número primo }

NE = { x | x é um estado da região nordeste do Brasil }.

Nestes dois exemplos, o símbolo | significa *tal que*. O conjunto P foi definido como sendo o conjunto que contém todo elemento x tal que x é um número primo. Em outras palavras, P é o conjunto dos números primos, que é infinito. Já o conjunto NE é o conjunto dos estados da região nordeste do Brasil; é, portanto, um conjunto finito.

Existe ainda outra maneira, menos formal, para descrever um conjunto. Podemos usar ... (reticências) para indicar a existência de um padrão que determina quais são os elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto {1, 2, 3, ..., 20} é constituído dos números naturais de 1 a 20.

No entanto, esta maneira de descrever conjuntos pode ser ambígua e gerar confusão em alguns casos. Por exemplo, quais são os elementos do conjunto {2, 3, ..., 11}? Alguém pode dizer que são os números naturais de 2 a 11. É possível também interpretar este conjunto como sendo constituído dos números primos de 2 a 11. Deve-se ter muito cuidado ao representar conjuntos usando reticências para evitar a possibilidade de interpretações diferentes.

A *cardinalidade* ou tamanho de um conjunto é a quantidade de elementos do conjunto. Denotamos a cardinalidade de um conjunto C usando a notação |C|. Observe que P tem cardinalidade infinita enquanto que a cardinalidade de NE é 9.

Um conjunto especial é o conjunto vazio. Tal conjunto não possui elementos e é denotado por {} ou pelo símbolo especial Ø. Note que |Ø| = 0.

Denotamos que um elemento pertence a um conjunto usando o símbolo ∈ (lê-se "pertence"). Se um elemento não pertence a um conjunto, usamos o símbolo ∉ (lê-se "não pertence"). Por exemplo, sendo NE o conjunto dos estados da região nordeste do Brasil, é correto afirmar que CE ∈ NE e que SP ∉ NE.

Praticando

1. Descreva os seguintes conjuntos relacionando cada um de seus elementos entre chaves, como no primeiro exemplo. Além disso, indique a cardinalidade do conjunto.
   a) { x | x é um número natural e x ≤ 10} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Cardinalidade = 11.
   b) { x | x é um número primo e é divisível por 2}
   c) { x | x é um número inteiro x2 = 4}
   d) { x | x é um número inteiro e x2 = 10}
   e) { x | x é um estado da região sul do Brasil}
   f) { x | x é um mês de 30 dias}
   g) { x | x é um divisor positivo de 12}
   h) { x | x é um dia da semana}

3. Relacionamentos entre Conjuntos

Sejam X e Y dois conjuntos. Dizemos que X está contido em Y se todo elemento que pertence a X também pertence a Y. Neste caso, também dizemos que Y contém X. Para denotar que X está contido em Y, usamos o símbolo ⊆ (lê-se "está contido"). Para indicar que X contém Y, usamos o símbolo ⊇ (lê-se "contém").

Se $X \subseteq Y$, dizemos que X é um subconjunto de Y e Y é um superconjunto de X. Por exemplo, sejam $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{3, 7, 4, 2\}$. É correto afirmar que:

- $A \subseteq B$
- A é um subconjunto de B
- $B \supseteq A$
- B é um superconjunto de A.

Observe que, qualquer que seja o conjunto X, é verdade que $X \subseteq X$, pois todo elemento de X também pertence a X. Por outro lado, é um tanto esquisito dizer que X é um subconjunto de X (embora isso seja verdade), e portanto dizemos que X é um subconjunto impróprio (inapropriado) de X. Todos os demais subconjuntos de X são próprios (apropriados).

Formalmente, se X está contido em Y e é diferente de Y então X é um subconjunto próprio de Y. Neste caso, também dizemos que Y é um superconjunto próprio de X. Usamos a notação $X \subset Y$ para indicar que X está propriamente contido em Y. A notação $X \supset Y$ indica que X contém apropriadamente Y. Sobre os conjuntos $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{3, 7, 4, 2\}$, também é correto afirmar que:

- $A \subset B$
- A é um subconjunto próprio de B
- $B \supset A$
- B é um superconjunto próprio de A

A tabela a seguir apresenta os símbolos usados para relacionar elementos com conjuntos e conjuntos com conjuntos.

Símbolo	**Significado**
$\in$	Pertence
$\subseteq$	Está contido
$\supseteq$	Contém
$\subset$	Está propriamente contido
$\supset$	Contém apropriadamente
$\notin$	Não pertence
$\nsubseteq$	Não está contido
$\nsupseteq$	Não contém
$\not\subset$	Não está propriamente contido
$\supseteq$	Não contém apropriadamente

Dado um conjunto C, o conjunto de todos os subconjuntos de C é chamado de conjunto das partes ou conjunto potência de C e é denotado por 2C. Por exemplo, o conjunto das partes do conjunto {2, 5, 8} é:

$$\{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{8\}, \{2, 5\}, \{2, 8\}, \{5, 8\}, \{2, 5, 8\}\}$$

Uma questão interessante é: um conjunto C possui quantos subconjuntos? Em outras palavras, qual é cardinalidade do conjunto das partes de C? A resposta para esta pergunta é $2^{|C|}$. Apresentamos a seguir um esboço da demonstração de tal fato.

Comecemos com o conjunto vazio. Tal conjunto tem cardinalidade zero e possui apenas um subconjunto (ele próprio). Assim, a resposta apresentada no parágrafo anterior é válida para o conjunto vazio.

Tome agora num conjunto C não vazio, com n elementos. Suponha que ele possua 2n subconjuntos. Se acrescentarmos um novo elemento x a C obteremos um novo conjunto, digamos C', com n + 1 elementos. Observe que todos os subconjuntos de C também são subconjuntos de C'.

Dessa forma, já encontramos 2^n subconjuntos de C'. Se acrescentarmos a cada um desses subconjuntos o elemento x, obteremos mais 2^n subconjuntos de C'. Concluímos então que C' possui $2^n + 2^n = 2 . 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos. A argumentação que acabamos de utilizar é baseada em indução matemática.

Praticando

1. Sejam A = {1, 2, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {1, 2, 3, 4} e D = {4, 5}. Determine o valor verdade (V ou F) de cada uma das relações abaixo.

( ) $A \subseteq B$	( ) $C \not\subset B$	( ) $A \supset D$
( ) $B \subseteq C$	( ) $D \not\subset C$	( ) $B \supset C$
( ) $B \not\subseteq D$	( ) $B \supseteq B$	( ) $C \not\supset B$
( ) $C \not\subseteq B$	( ) $C \supseteq B$	( ) $D \not\supset D$
( ) $B \subset C$	( ) $B \not\supseteq C$	( ) $1 \in D$
( ) $D \subset A$	( ) $A \not\supseteq D$	( ) $5 \notin D$

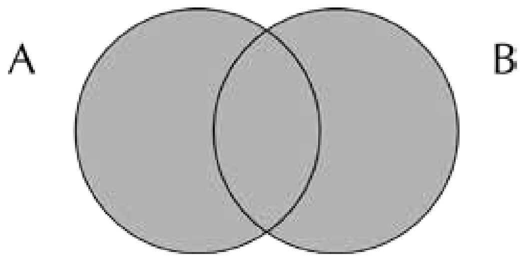
2. Seja A = {1, 2, 4, 5}. Exiba o conjunto das partes de A.

4. Operações envolvendo conjuntos

Podemos realizar diversas operações envolvendo conjuntos. Descreveremos três operações básicas e mais duas operações derivadas. Todas essas operações operam sobre dois conjuntos (são operações binárias) e resultam num terceiro conjunto. Usaremos os conjuntos A e B para descrever essas operações.

4.1. União

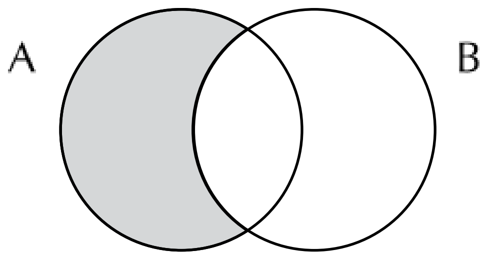
A união dos conjuntos A e B resulta num conjunto que possui todos os elementos de A e todos os elementos de B, e nenhum outro elemento. A operação de união é denotada pelo símbolo $\cup$ (lê-se "união"). Formalmente, $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ ou $x \in B \}$. Podemos representar graficamente a união usando um diagrama de Venn. Na figura a seguir, a região sombreada representa $A \cup B$.



A união é comutativa, ou seja, $A \cup B$ é equivalente a $B \cup A$. Além disso, a união é associativa, ou seja, $(A \cup B) \cup C$ é equivalente a $A \cup (B \cup C)$.

4.2. Complemento (diferença)

Esta operação é denotada pelo símbolo – (menos). A operação $A - B$ (lê-se "A complemento B") resulta num conjunto que possui todos os elementos de A que não pertencem a B, e nenhum outro elemento. Assim, $A - B = \{ x \mid x \in A$ e $x \notin B \}$. Esta operação não é comutativa nem associativa. Na figura a seguir, a região sombreada representa $A - B$.



4.3. Produto Cartesiano

O produto cartesiano de A e B resulta num conjunto que possui como elementos todos os pares ordenados que podem ser obtidos combinando-se os elementos de A (como primeiro elemento do par) com os elementos de B (como segundo elemento do par), e nenhum outro elemento. O produto cartesiano é denotado pelo símbolo × (lê-se "produto cartesiano"). Equivalentemente, $A \times B = \{ (m, n) \mid m \in A \text{ e } n \in B \}$. Por exemplo, se $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{6, 4\}$ então $A \times B$ resulta no seguinte conjunto:

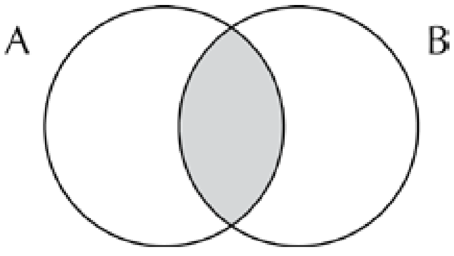
Atenção:
Num diagrama de Venn, os conjuntos são representados através de círculos ou outras figuras.

$$\{(2, 6), (2, 4), (3, 6), (3, 4), (5, 6), (5, 4)\}.$$

O produto cartesiano não é comutativo, ou seja, $A \times B$ é diferente de $B \times A$ (exceto se A e B forem iguais). Sobre a cardinalidade do conjunto resultante do produto cartesiano, é possível mostrar que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

4.4. Interseção

A interseção dos conjuntos A e B resulta num conjunto que possui todos os elementos de A que também pertencem a B, e nenhum outro elemento. A operação de interseção é denotada pelo símbolo ∩ (lê-se "interseção"). Dessa forma, $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$. Na figura a seguir, a região sombreada representa $A \cap B$.



A interseção é comutativa, ou seja, $A \cap B$ é equivalente a $B \cap A$. Além disso, a interseção é associativa, ou seja, $(A \cap B) \cap C$ é equivalente a $A \cap (B \cap C)$. Também é possível mostrar que $A \cap B = A - (A - B)$. Nesse sentido, a interseção é uma operação derivada do complemento.

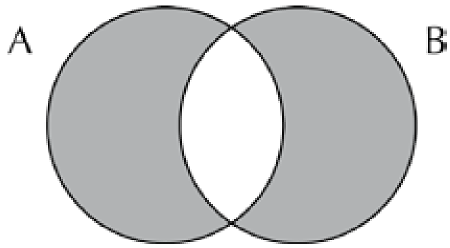
Agora que conhecemos a operação de interseção, podemos estabelecer o tamanho dos conjuntos que resultam das operações de união, complemento e interseção. A verificação das equivalências a seguir fica como exercício para o leitor.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$
$$|A \cap B| = |A| - |A - B|$$

4.5. Diferença simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B resulta num conjunto que possui todos os elementos de A que não pertencem a B e todos os elementos de B que não pertencem ao conjunto A, e nenhum outro elemento. A operação de diferença simétrica é denotada pelo símbolo Δ (lê-se "diferença simétrica"). Dessa forma, $A \Delta B = \{ x \mid (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ e } x \in B)\}$. Na figura a seguir, a região sombreada representa $A \Delta B$.



A diferença simétrica é comutativa, ou seja, $A \Delta B$ é equivalente a $B \Delta A$. Além disso, a diferença simétrica é associativa, ou seja, $(A \Delta B) \Delta C$ é equivalente a $A \Delta (B \Delta C)$. É possível mostrar que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Nesse sentido, a diferença simétrica deriva das operações de união e complemento, que são operações básicas. Também é possível mostrar que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ e que $|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B|$.

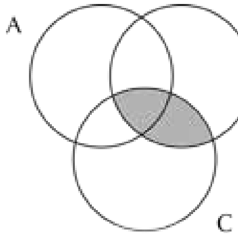
Temos outras propriedades interessantes envolvendo essas operações. As seguintes equivalências, chamadas de leis de distributividade, são válidas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

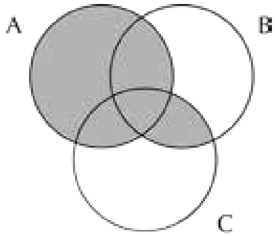
As seguintes equivalências, chamadas de leis de De Morgan, também são válidas:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

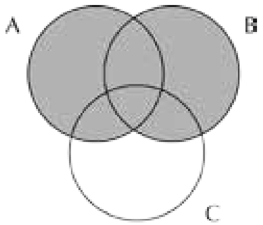
Usando diagramas de Venn podemos mostrar que a primeira das leis de distributividade é válida:



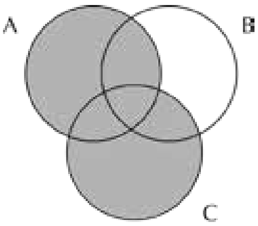
B ∩ C



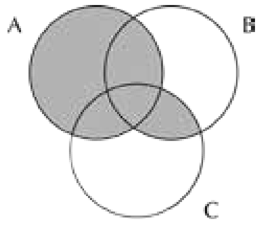
A ∪ (B ∩ C)



A ∪ B



A ∪ C



(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

Usando diagramas de Venn podemos mostrar a validade das outras leis.

Para exemplificar as operações de união, complemento, interseção e diferença simétrica, sejam $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{4, 6, 3, 8\}$. Então:

$A \cup B = \{3, 5, 6, 4, 8\}$

$A - B = \{5\}$

$A \cap B = \{3, 6\}$

$A \Delta B = \{5, 4, 8\}$

Praticando

1. Sejam $A = \{3, 2, 6, 4\}$ e $B = \{7, 4, 5, 6\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calcule:

a) $A \cup (B - C)$

b) $A \cap (B \Delta C)$

c) $A - (B \cup C)$

d) $A \Delta (B \cap C)$

e) $A \times B$

f) $B \times A$

2. Determine o valor verdade (V ou F) de cada uma das afirmações abaixo, justificando suas respostas.

a) ( ) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$

b) ( ) $|A \Delta B| = |A - B| + |B - A|$

c) ( ) $|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B|$

d) ( ) $A \cup B = A \cap B$ se e somente se $A = B$

e) ( ) $A \subseteq B$ se e somente se $A - B = \emptyset$

f) ( ) $A - \emptyset = A$

g) ( ) $\emptyset - A = \emptyset$

3. Utilizando diagramas de Venn mostre que:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

5. Partições

Dizemos que dois conjuntos são disjuntos se a interseção entre eles é vazia. Dizemos que os conjuntos $C_1, C_2, ..., C_3$ constituem uma partição de um conjunto C se:

- $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k = C$, e
- $C_i \cap C_j = \emptyset$, para $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ e $i \neq j$.

Em outras palavras, $C_1, C_2, ..., C_k$ constituem uma partição de C se a união deles é igual a C e eles são todos dois a dois disjuntos. Informalmente, particionar um conjunto é "quebrar" o conjunto em partes independentes de forma que ao unir essas partes obtenhamos o conjunto que foi particionado. Por exemplo, seja C = {3, 5, 8, 6}:

- {5}, {3}, {6} não constituem uma partição de C, pois a união deles é diferente de C (falta o 8)
- {8, 5}, {3}, {1, 6} não constituem uma partição de C, pois a união deles é diferente de C (1 não pertence a C)
- {8, 5}, {3}, {5, 6} não constituem uma partição de C, pois eles não são todos dois a dois disjuntos (o primeiro e o terceiro conjunto têm interseção não vazia)
- {8}, {3}, {5, 6} constituem uma partição de C.

Chamamos de k-partição uma partição constituída de k conjuntos. Por exemplo, {8}, {3}, {5, 6} é uma 3-partição do conjunto {3, 5, 8, 6}.

Seja $C_1, C_2, ..., C_k$ uma k-partição de um conjunto de números. Dizemos que essa partição é equilibrada se a soma dos elementos de cada membro da partição é a mesma. Por exemplo, {8, 3}, {5, 6} é uma 2-partição equilibrada do conjunto {3, 5, 8, 6}. Não há uma 3-partição equilibrada do conjunto {3, 5, 8, 6}, pois a soma de seus elementos não resulta num múltiplo de 3.

O problema da k-partição consiste em, dado um conjunto de números, encontrar uma k-partição equilibrada desse conjunto. Um aspecto algorítmico interessante relacionado a este problema é que, apesar de sua aparente simplicidade, ele é um problema intratável, ou seja, não se conhece algoritmo eficiente para resolvê-lo. De fato, muitos cientistas acreditam que não existem algoritmos eficientes para o problema da k-partição.

Praticando

1. Seja C = {9, 2, 7, 4, 5, 3, 6, 8, 10}. Forneça uma 3-partição de C e uma 2-partição equilibrada de C. C possui uma 4-partição equilibrada? Justifique sua resposta.

6. Maximalidade e Minimalidade de Conjuntos

Dizemos que um conjunto é máximo com relação a uma propriedade P se ele possui a propriedade P e não existe nenhum outro conjunto que tenha cardinalidade maior do que ele e que também possua a propriedade P. Em outras palavras, um conjunto máximo com relação a uma propriedade é o maior conjunto (em termos de tamanho) que possui tal propriedade. Por exemplo, seja P a seguinte propriedade: "seus elementos são números primos e sua soma é menor do que 50". Podemos afirmar que:

- {5, 7, 9} não possui P (seus elementos não são todos primos)
- {7, 11, 13, 19} não possui P (a soma de seus elementos não é menor do que 50)
- {3, 5, 7, 11} possui P, mas não é máximo com relação a P
- {2, 3, 5, 7, 11, 17} é máximo com relação a P (somando-se os sete menores números primos obtemos 58, portanto não existe nenhum conjunto de números primos cuja soma seja menor do que 50 e que possua mais do que 6 elementos)
- {2, 3, 5, 7, 11, 13} também é máximo com relação a P (observe que um conjunto máximo com respeito a uma propriedade pode não ser único)

Dizemos que um conjunto é maximal com relação a uma propriedade P se ele possui a propriedade P e nenhum de seus superconjuntos próprios também possui a propriedade P. Em outras palavras, um conjunto maximal com relação a uma propriedade não pode ser "aumentado", caso contrário, a propriedade deixa de ser válida. Usando a propriedade P definida anteriormente, temos que:

- {2, 3, 5, 7, 11} possui P, mas não é maximal com relação a P (podemos adicionar o elemento 13 e a propriedade P continua válida)
- {2, 3, 5, 7, 23} é maximal com relação a P
- {7, 19, 23} também é maximal com relação a P
- {2, 3, 5, 7, 11, 17} é maximal com relação a P (todo conjunto máximo com relação a uma propriedade também é maximal com relação a essa propriedade, o contrário nem sempre é verdade)

Dizemos que um conjunto é mínimo com relação a uma propriedade P se ele possui a propriedade P e não existe nenhum outro conjunto que tenha cardinalidade menor do que ele e que também possua a propriedade P. Em outras palavras, um conjunto mínimo com relação a uma propriedade é o menor conjunto (em termos de tamanho) que possui tal propriedade. Por exemplo, seja Q a seguinte propriedade: "seus elementos são números primos e sua soma é maior do que 30". É correto afirmar que:

- {5, 7, 9} não possui Q (seus elementos não são todos primos)
- { 5, 7, 11} não possui Q (a soma de seus elementos não é maior do que 30)
- {3, 5, 11, 17} possui Q, mas não é mínimo com relação a Q
- {31} é mínimo com relação a Q
- {37} também é mínimo com relação a Q (observe que um conjunto minimo com respeito a uma propriedade pode não ser único)

Dizemos que um conjunto é minimal com relação a uma propriedade P se ele possui a propriedade P e nenhum de seus subconjuntos próprios também possui a propriedade P. Em outras palavras, um conjunto minimal com relação a uma propriedade não pode ser "diminuído", caso contrário, a propriedade deixa de ser válida. Usando a propriedade Q definida anteriormente, temos que:

- {5, 7, 11, 17} possui Q, mas não é minimal com relação a Q (podemos remover o elemento 5 e a propriedade Q continua válida)
- {5, 7, 23} é minimal com relação a Q
- {19, 23} também é minimal com relação a Q
- {37} é minimal com relação a Q (todo conjunto mínimo com relação a uma propriedade também é minimal com relação a essa propriedade, o contrário nem sempre é verdade)

Observe que verificar se um conjunto é máximo com relação a uma propriedade, em geral, é muito mais difícil do que verificar se ele é maximal. Para que um conjunto seja máximo é preciso que não exista nenhum outro conjunto maior do que ele. Para que seja maximal, basta que ele não possa ser aumentado. Analogamente, verificar se um conjunto é mínimo com relação a uma propriedade, em geral, é muito mais difícil do que verificar se ele é minimal.

Existem muitos problemas de interesse prático nos quais a solução é um conjunto máximo ou um conjunto mínimo com respeito a uma propriedade. Tais problemas aparecem em diversas áreas tais como logística, economia, química, engenharia etc. Em alguns desses problemas a propriedade tem uma característica interessante: todo conjunto maximal também é máximo ou todo conjunto minimal também é mínimo. Quando isso ocorre, dizemos que a propriedade tem natureza "gulosa". Tais problemas podem ser resolvidos eficientemente por *algoritmos gulosos*.

Atividades de avaliação

1. Seja C = {9, 2, 7, 4}. Mostre 3 subconjuntos maximais de C cuja soma dos elementos é menor que 10, indicando quais deles também são máximos. Mostre 3 subconjuntos minimais de C cuja soma dos elementos é maior que 10, indicando quais deles também são mínimos.

Síntese do capítulo

Vimos que um conjunto é uma coleção de elementos distintos não ordenados. Um conjunto pode ser descrito colocando-se entre chaves os seus elementos ou uma condição que determine quais são os elementos do conjunto. A cardinalidade de um conjunto é a quantidade de elementos do conjunto.

Um conjunto está contido em outro se todos os seus elementos também pertencem ao outro. Apresentamos os símbolos usados para indicar que um conjunto está contido ou contém outro e o símbolo usado para indicar que um elemento pertence ao conjunto. Explicamos o que são subconjuntos, superconjuntos, subconjuntos próprios e superconjuntos próprios.

A união de dois conjuntos contém todos os elementos desses dois conjuntos. O complemento de um conjunto em relação a outro possui todos os elementos do primeiro conjunto que não pertencem ao segundo. O produto cartesiano, de certo modo, é uma "multiplicação" de conjuntos. O resultado do produto cartesiano entre dois conjuntos é o conjunto dos pares ordenados obtidos combinando-se os elementos do primeiro conjunto com os elementos do segundo. A interseção entre dois conjuntos contém os elementos que pertencem aos dois conjuntos. Finalmente, a diferença simétrica entre dois conjuntos possui todos os elementos que pertencem a apenas um dos dois conjuntos. Vimos ainda que interseção e a diferença simétrica derivam da união e do complemento, que são operações básicas. Apresentamos ainda as leis de distributividade e as Leis de DeMorgan.

Uma partição de um conjunto C é constituída de conjuntos dois a dois disjuntos cuja união é igual a C. Vimos que um conjunto é máximo com respeito a uma propriedade se ele é o maior conjunto que possui a propriedade. Um conjunto é maximal com respeito a uma propriedade se ele não pode ser “aumentado”, caso contrário ele perde a propriedade. Um conjunto é mínimo com respeito a uma propriedade se ele é o menor conjunto que possui a propriedade. Um conjunto é minimal com respeito a uma propriedade se ele não pode ser “diminuído”, caso contrário ele perde a propriedade.

Leituras, filmes e sites

Conjuntos por Eric Campos Bastos Guedes

http://mathfire.sites.uol.com.br/Conjunto.htm

Teoria Elementar dos Conjuntos por Nina Hirata

http://www.vision.ime.usp.br/~nina/cursos/mac0329-2007/conjuntos.pdf

Teoria dos conjuntos na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_conjuntos

Intratabilidade do problema da k-partição

http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem

Referências

SCHEINERMAN, E. R., **Matemática discreta -** uma introdução, Thomson Learning, 2003.

GERSTING, J. L. **Fundamentos de matemática para a ciência da computação**. LTC, 2004.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON M. **Matemática discreta**. 2ª ed., Bookman, 2004.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2003.

ROSEN, K. **Student´s solutions guide for use with discrete mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2002.

ROSEN, K. **Handbook of discrete and combinatorial mathematics**. CRC, 2000.

MENEZES, P. B. **Matemática discreta para computação e informática**. Sagra-Luzzatto, 2004.

Capítulo 2

Problemas de Contagem

1. Introdução

Vamos agora abordar diversos problemas de contagem envolvendo conjuntos, multiconjuntos e listas. Após apresentar os princípios da multiplicação e da adição, discutimos o problema da contagem de listas com e sem elementos repetidos, incluindo o problema da permutação. Em seguida, estudamos o problema da combinação e suas conexões com o Triângulo de Pascal e com o Binômio de Newton. Abordamos ainda o problema da contagem de anagramas e da contagem de multiconjuntos.

Ao final do estudo desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de identificar os problemas de contagem envolvidos em situações práticas e então resolver tais problemas usando as fórmulas e técnicas aqui apresentadas e os princípios da multiplicação e da adição.

2. Preliminares

Antes de abordar problemas de contagem, é conveniente compreender os princípios da multiplicação e da adição. Esses princípios constituem a base para a resolução de problemas de contagem e podem ser usados para deduzir as fórmulas que serão apresentadas adiante.

Tais princípios podem ser enunciados de diversas formas, todas elas equivalentes. A seguir, enunciamos tais princípios de uma maneira adequada para nossos propósitos.

2.1. O Princípio da Multiplicação

Se dois eventos devem ocorrer e um deles pode ocorrer de m maneiras distintas e o outro pode ocorrer de n maneiras distintas, então existem m.n maneiras distintas desses dois eventos ocorrerem.

Por exemplo, Rui e sua namorada Ana estão planejando o passeio que farão no fim de semana. Estão em cartaz duas peças e três filmes. Eles desejam assistir a uma peça e depois a um filme. Eles poderão planejar seu passeio de quantas maneiras distintas? Vamos chamar as peças de P1 e P2 e os filmes de F1, F2 e F3. Observe que existem as seguintes possibilidades para o passeio:

- Assistir P1 e F1
- Assistir P1 e F2

- Assistir P1 e F3
- Assistir P2 e F1
- Assistir P2 e F2
- Assistir P2 e F3

Ao todo são 6 possibilidades. Note que os dois eventos (assistir a uma peça e assistir a um filme) devem ocorrer. Aplicando o princípio da multiplicação, também concluímos que existem 2 x 3 = 6 possibilidades. A vantagem de utilizar tal princípio é que não precisamos enumerar todas as possibilidades.

Note que quando o princípio da multiplicação está envolvido, em geral, o conectivo de conjunção "e" está presente na descrição da situação. Vejamos agora o princípio da adição.

2.2. O Princípio da Adição

Se dois eventos são mutuamente excludentes, ou seja, apenas um deles deve ocorrer, um deles pode ocorrer de m maneiras distintas e o outro pode ocorrer de n maneiras distintas, então existem m + n maneiras distintas de um desses eventos ocorrer.

Vamos modificar um pouco o exemplo anterior. Rui e sua namorada Ana estão planejando o passeio que farão no fim de semana. Estão em cartaz duas peças e três filmes. Por razões financeiras, eles decidem assistir a uma peça ou a um filme. De quantas maneiras distintas eles poderão planejar seu passeio? Observe que agora existem as seguintes possibilidades para o passeio:

- Assistir P1
- Assistir P2
- Assistir F1
- Assistir F2
- Assistir F3

Ao todo são 5 possibilidades. Note que os dois eventos (ir ao teatro e ir ao cinema) são mutuamente excludentes, somente um deles deve ocorrer. Aplicando o princípio da adição, também concluímos que existem 2 + 3 = 5 possibilidades. Novamente, a vantagem de usar tal princípio é que não precisamos enumerar todas as possibilidades.

Quando o princípio da adição está envolvido, em geral, o conectivo de disjunção "ou" está presente.

3. Contagem de Listas

Uma lista é uma coleção de elementos. Diferentemente do que ocorre num conjunto, numa lista pode haver elementos repetidos. Além disso, numa lista, a ordem dos elementos é importante. Duas listas são iguais se possuem os mesmos elementos nas mesmas posições.

É comum descrever uma lista colocando seus elementos entre parênteses, separados por vírgulas. Eis um exemplo:

$$(4, 6, 3, 4, 5, 8, 6, 4, 7)$$

A multiplicidade de um elemento da lista é a quantidade de ocorrências desse elemento na lista. O comprimento de uma lista é a soma das multiplicidades de seus elementos. Outra maneira de calcular o comprimento de uma lista é contar quantos elementos ela possui sem levar em consideração se eles são repetidos ou não. A lista do exemplo anterior possui comprimento 9. Observe que o elemento 4 possui multiplicidade 3, o elemento 6 possui multiplicidade 2 e os elementos 3, 4, 7 e 8 possuem multiplicidade 1.

3.1. Listas com Elementos Repetidos

Uma questão que nos interessa é: quantas listas de comprimento k, diferentes, podemos formar usando apenas os elementos de um conjunto de cardinalidade n?

Observe que para formar uma lista de comprimento k precisamos fazer k escolhas. Podemos considerar cada uma dessas escolhas como um evento. Como uma lista pode ter elementos repetidos, cada um desses eventos pode ocorrer de n maneiras diferentes. Aplicando o princípio da multiplicação, concluímos que existem n^k maneiras diferentes de formar a lista.

Vejamos um exemplo de aplicação dessa fórmula: no Brasil, as placas dos carros possuem um prefixo formado por três letras. Sabendo que o alfabeto adotado no Brasil possui 26 letras, quantos prefixos diferentes podem ser formados?

Observe que um prefixo de uma placa é uma lista de três elementos. Num prefixo, pode haver letras repetidas e a ordem das letras é importante. Note ainda que as letras que compõem o prefixo são letras do alfabeto, que pode ser visto como um conjunto de cardinalidade 26.

Sendo assim, determinar a quantidade de prefixos diferentes que podem ser formados é a mesma coisa que calcular a quantidade de listas de comprimento 3 que podem ser obtidas a partir de um conjunto com 26 elementos. Podemos então aplicar a fórmula n^k, sendo n = 26 e k = 3. Concluímos que podem ser formados 263 = 17576 prefixos distintos.

E quantos prefixos começados com vogal podem ser formados? Agora temos apenas 5 possibilidades para a primeira letra do prefixo. Para as outras duas letras temos 262 possibilidades. Aplicando o princípio da multiplicação, chegamos à conclusão que podem ser formados 5 x 262 = 3380 prefixos distintos.

3.2. Arranjos

Vejamos outra questão semelhante: quantas listas de comprimento k, sem elementos repetidos, podemos formar usando apenas os elementos de um conjunto de cardinalidade n?

Note que agora não pode haver repetição, no entanto, a ordem dos elementos continua sendo importante. Cada uma dessas listas é chamada de um arranjo dos elementos do conjunto. A quantidade de tais listas é denotada por A_n^k (lê-se "arranjos de n elementos tomados k a k" ou simplesmente "arranjos de n k a k").

Para formar um arranjo precisamos fazer k escolhas. Na primeira escolha, temos n possibilidades. Na segunda escolha, restam n – 1 possibilidades, visto que não podemos repetir o elemento já escolhido. Em cada escolha seguinte, o número de possibilidades diminui de um. Na k-ésima escolha, restarão apenas n – k + 1 possibilidades. Dessa maneira, aplicando o princípio da multiplicação, concluímos que:

$$A_n^k = n.(n-1).(n-2)\dots(n-k+1)$$

$$A_n^k = n.(n-1).(n-2)\dots(n-k+1)\frac{(n-k).(n-k-1)\dots1}{(n-k).(n-k-1)\dots1}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Vamos resolver alguns problemas envolvendo arranjos. Numa classe estudam 12 alunos, sendo 5 meninas e 7 meninos. A professora decide formar uma fila com quatro alunos da classe. De quantas maneiras diferentes a fila pode ser formada?

Observe que numa fila de alunos não pode haver integrantes repetidos. Além disso, a ordem em que os integrantes aparecem na fila é importante. Assim, uma fila de alunos pode ser vista como uma lista sem elementos repetidos. A classe por sua vez pode ser vista como um conjunto. Assim, a pergunta anterior é equivalente a: quantas listas de comprimento 4, sem elementos repetidos, podem ser formadas a partir de um conjunto de cardinalidade 12? Para responder a esta pergunta, basta calcular A_{12}^{4}. Aplicando a fórmula temos:

$$A_{12}^{4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!} = 11880$$

Concluímos que a fila pode ser formada de 11880 maneiras diferentes.

E se a fila tiver que começar com duas meninas e depois ter dois meninos? Neste caso, vamos ter que formar duas filas, uma de meninas e outra de meninos. Para o primeiro caso, temos A_{5}^{2} possibilidades. Para o segundo, temos A_{7}^{2} possibilidades. Como a formação das filas são dois eventos que devem acontecer, aplicando o princípio da multiplicação, temos:

$$A_{5}^{2}.A_{7}^{2} = \frac{5!}{(5-2)!}.\frac{7!}{(7-2)!} = \frac{5!}{3!}.\frac{7!}{5!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840$$

Existem 840 maneiras distintas de formar a fila com duas meninas no início e dois meninos no fim.

Vejamos mais uma situação. E se a fila tem que ser formada somente por alunos do mesmo sexo? Temos então duas possibilidades: a fila tem somente meninas ou a fila tem somente meninos.

No primeiro caso, existem

$$A_{5}^{4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5! = 120$$

possibilidades de formar a fila. No segundo caso, existem

$$A_{7}^{4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840$$

possibilidades de formar a fila. Podemos considerar a formação da fila somente com meninas e a formação da fila somente com meninos como sendo dois eventos mutuamente excludentes. Dessa forma, aplicando o princípio da adição, concluímos que existem 840 + 120 = 960 maneiras diferentes de formar a fila contendo apenas integrantes do mesmo sexo.

3.3 Permutações

Quantas listas de comprimento n, sem elementos repetidos, podemos formar usando apenas os elementos de um conjunto de cardinalidade n?

Observe que neste caso, diferentemente do problema anterior, temos que utilizar todos os elementos do conjunto. Não é preciso escolher alguns elementos do conjunto para formar as listas. É preciso decidir como permutar os elementos do conjunto para obter as listas. Cada uma dessas listas é chamada de uma permutação dos elementos do conjunto. A quantidade de tais listas é denotada por P_n (lê-se "permutações de n elementos" ou simplesmente "permutações de n").

O problema da permutação é um caso particular do problema do arranjo. De fato, é equivalente a A_n^n. Assim,

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Vamos resolver um problema. Rui possui 8 livros diferentes, 3 escritos em francês, 3 em inglês e 2 em espanhol. De quantas maneiras distintas ele pode arrumá-los lado a lado em uma prateleira? Rui terá que decidir apenas a ordem na qual os livros serão colocados na prateleira. Assim, cada possível forma de arrumar os livros é uma permutação de 8 elementos. Dessa forma, existem P_8 = 8! = 40320 maneiras de arrumar os livros.

E de quantas maneiras ele pode arrumá-los de forma que os livros de um mesmo idioma fiquem todos juntos? Neste caso ele terá decidir como arrumar os livros de cada idioma. Existem P_3 = 3! = 6 maneiras de arrumar os livros de francês, P_3 = 3! = 6 maneiras de arrumar os livros de inglês e P_2 = 2! = 2 maneiras de arrumar os livros de espanhol. Além disso, os idiomas podem ser permutados de P_3 = 3! = 6 maneiras diferentes. Sendo assim, existem

$$P_3 \,.\, P_2 \,.\, P_3 \,.\, P_3 = 3!\,.\,2!\,.\,3!\,.\,3! = 6\,.\,2\,.\,6\,.\,6 = 432$$

maneiras de arrumar os livros de modo que os livros de um mesmo idioma fiquem todos juntos.

Praticando

1. No Brasil, a parte principal do CPF é composta de 9 algarismos, e os dois últimos são calculados em função da parte principal. Sendo assim, podem existir até 1 bilhão de CPF distintos.
   a) Quantos deles não têm algarismos repetidos?
   b) Quantos deles têm somente algarismos ímpares?
   c) Quantos deles não têm algarismos consecutivos repetidos?
2. Lia possui 6 anéis diferentes e deseja usar todos eles nos dedos das mãos (exceto nos polegares).
   a) Supondo que Lia possui 10 dedos nas mãos, de quantas maneiras distintas poderá fazê-lo, se ela não usar dois anéis num mesmo dedo?
   b) E se ela decidir usar dois anéis em apenas um dos dedos e os outros 4 anéis em outros 4 dedos?
   c) E se ela decidir usar 2 dois anéis na mão esquerda e 4 na mão direita (um anel em cada dedo)?
3. Numa corrida participam 8 atletas. O resultado final da corrida é constituído da classificação final de cada atleta. Supondo que não haja empate entre eles, quantos resultados finais diferentes são possíveis?

3.4. Combinações

Veremos agora um importante problema de contagem que se relaciona com o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.

Quantos conjuntos de cardinalidade k que podem ser formados usando apenas os elementos de um conjunto de cardinalidade n?

Note que, diferentemente do que ocorre no problema do arranjo, agora a ordem dos elementos não é importante. Cada um desses conjuntos de cardinalidade k é chamado de uma combinação dos elementos do conjunto de cardinalidade n. A quantidade de tais conjuntos é denotada por $\binom{n}{k}$ (lê-se "combinações de n elementos tomados k a k" ou simplesmente "combinações de n k a k").

Para chegar à fórmula que permite calcular $\binom{n}{k}$, vamos abordar um exemplo. Suponha que queiramos contar quantos subconjuntos de 3 elementos podemos formar com as letras da palavra BOLA. Um desses conjuntos é formado pelas letras da palavra BOA. Observe que este conjunto pode ser permutado de $P_3 = 3! = 6$ maneiras, dando origem às palavras ABO, AOB, BAO, BOA, OAB e OBA. Cada uma dessas palavras corresponde a um arranjo de comprimento 3 das letras da palavra BOLA, no entanto, cada uma delas está associada à mesma combinação de cardinalidade 3 das letras da palavra BOLA. Dessa maneira, se contarmos a quantidade de arranjos de comprimento 3 das letras da palavra BOLA, teremos contado cada combinação 3! vezes. Assim, $\binom{4}{3}$ pode ser obtido dividindo A_4^3 por P_3.

Generalizando, para calcular a quantidade de combinações de cardinalidade k que podem ser formadas a partir de um conjunto de cardinalidade n, basta calcular a quantidade de arranjos de comprimento k que podem ser formados a partir do conjunto de cardinalidade n e então dividir a quantidade de tais arranjos por $P_k = k!$, visto que cada um desses arranjos pode ser permutado de k! maneiras, mas cada uma dessas permutações corresponde à mesma combinação. Dessa forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Vejamos uma aplicação dessa fórmula. Numa classe estudam 12 alunos, sendo 5 meninas e 7 meninos. Eles decidem formar uma comissão com quatro alunos da classe. De quantas maneiras diferentes a comissão pode ser formada?

Observe que numa comissão de alunos não pode haver integrantes repetidos. Além disso, não importa a ordem dos integrantes na comissão. Assim, uma comissão de alunos pode ser vista como um conjunto. A classe também pode ser vista como um conjunto. Assim, a pergunta anterior é equivalente a: quantos conjuntos de comprimento 4 podem ser formados a partir de um conjunto de cardinalidade 12? Para responder a esta pergunta, basta calcular $\binom{12}{4}$. Aplicando a fórmula temos:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{(12-4)!.4!} = \frac{12!}{8!.4!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!.4.3.2} = 495$$

Concluímos que a comissão pode ser formada de 495 maneiras diferentes.

E se a comissão tiver que ser constituída de duas meninas e dois meninos? Neste caso, podemos formar duas comissões, uma de meninas e outra de meninos. Para o primeiro caso, temos $\binom{5}{2}$ possibilidades. Para o segundo, temos $\binom{7}{2}$ possibilidades. Como a formação dessas duas comissões são dois eventos que devem acontecer, aplicando o princípio da multiplicação, temos:

$$\binom{5}{2}.\binom{7}{2} = \frac{5!}{(5-2)!.2!}.\frac{7!}{(7-2)!.2!} = \frac{5!}{3!.2}.\frac{7!}{5!.2} = \frac{7!}{3!.4} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!.4} = 210$$

Existem 210 maneiras distintas de formar a comissão com duas meninas e dois meninos.

Vejamos mais uma situação. E se a comissão não puder ser formada somente por alunos do mesmo sexo? Observe que podem ser formadas $\binom{5}{4}$ comissões constituídas somente de meninas e $\binom{7}{4}$ comissões constituídas somente de meninos. Como tais comissões são inaceitáveis, se subtrairmos a quantidade de comissões constituídas somente de integrantes do mesmo sexo da quantidade total de comissões teremos a quantidade de comissões aceitáveis. A quantidade de tais comissões é:

$$\binom{12}{4}-\binom{5}{4}-\binom{7}{4}=495-\frac{5!}{(5-4)!\,.4!}-\frac{7!}{(7-4)!\,.4!}$$

$$=495-\frac{5.4!}{1!\,.4!}-\frac{7.6.5.4!}{3!\,.4!}=495-5-35=455$$

Para resolver este último exemplo, usamos a idéia de complementaridade. Tomamos o conjunto de todas as comissões possíveis e fizemos o complemento com o conjunto das comissões inaceitáveis. Restou o conjunto das comissões aceitáveis, cuja cardinalidade é 455.

As seguintes proposições sobre combinações podem ser demonstradas com muita facilidade.

Proposição 2.1. $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$

Prova: Note que

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{(n-0)!\,.0!}=\frac{n!}{n!}=1 \text{ e } \binom{n}{n}=\frac{n!}{(n-n)!.\,n!}=\frac{n!}{n!}=1$$

Proposição 2.2. $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n.$

Prova: Observe que

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{(n-1)!\,.0!}=\frac{n.\,(n-1)!}{(n-1)!}=n \quad \text{e}$$

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-(n-1))!.\,(n-1)!}=\frac{n.\,(n-1)!}{(n-1)!}=n$$

Proposição 2.3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Prova: Aplicando a fórmula da combinação para $\binom{n}{n-k}$, temos:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!.(n-k)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Temos mais um fato importante a respeito de combinações conhecido com Identidade de Pascal.

Identidade de Pascal. Se 0 < k < n então:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Prova: Vamos aplicar a fórmula da combinação para $\binom{n-1}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!.(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!.k!}$$

Como 0 < k < n, podemos multiplicar a primeira fração por $\frac{k}{k}$ e a segunda fração por $\frac{(n-k)}{(n-k)}$ e a igualdade continua válida.

$$= \frac{k.(n-1)!}{(n-k)!.k.(k-1)!} + \frac{(n-k).(n-1)!}{(n-k).(n-k-1)!.k!}$$

$$= \frac{k.(n-1)!}{(n-k)!.k!} + \frac{(n-k).(n-1)!}{(n-k)!.k!} = \frac{k.(n-1)! + (n-k).(n-1)!}{(n-k)!.k!}$$

$$\frac{(n-k+k).(n-1)!}{(n-k)!.k!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-k)!.k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Usando esta identidade, podemos facilmente construir o famoso Triângulo de Pascal.

3.4.1. Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é constituído de linhas de números. Cada linha n do triângulo contém todas as possíveis quantidades de combinações de n elementos, desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$. As linhas do triângulo são numeradas a partir do zero. A seguir estão as primeiras (n + 1) linhas do Triângulo de Pascal:

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\
\vdots \\
\binom{n-1}{0}\ \binom{n-1}{1} \cdots \binom{n-1}{k-1}\ \binom{n-1}{k} \cdots \binom{n-1}{n-2}\ \binom{n-1}{n-1} \\
\searrow\ \swarrow \\
\binom{n}{0}\ \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{k} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Pela Proposição 2.1, concluímos que cada linha do triângulo começa e termina com 1. A Identidade de Pascal nos permite obter com facilidade os elementos internos de cada linha. Para calcular $\binom{n}{k}$ basta somar $\binom{n-1}{k-1}$ e $\binom{n}{k}$, que estão imediatamente acima de no Triângulo de Pascal. Assim, cada elemento interno de uma linha do triângulo é a soma dos dois elementos imediatamente acima. Eis os valores contidos nas sete primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

3.4.2. Binômio de Newton

O binômio $(x + y)^n$, com $n \in N$, é conhecido como Binômio de Newton. É possível mostrar o seguinte teorema[2].

Teorema. Se $n \in \mathbb{N}$ então

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Observe que os coeficientes dos termos obtidos com o desenvolvimento do Binômio de Newton são exatamente os valores contidos na n-ésima linha do Triângulo de Pascal. Usando este teorema podemos provar com facilidade que a soma dos elementos contidos na linha n do Triângulo de Pascal é 2^n. Fazendo x = 1 e y = 1, temos que:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1y^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^0 1^n$$

e, portanto, $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

Praticando

1. Na Mega-sena, são sorteados seis números inteiros distintos no intervalo 1 a 60. Quantos resultados diferentes são possíveis?
2. Rui possui 4 amigos, 3 amigas e 2 namoradas. Ele decide convidar 3 dessas pessoas para passar o fim de semana em sua casa de praia.
   a) De quantas maneiras diferentes ele pode fazer sua escolha?
   b) E se ele decidir levar uma namorada, um amigo e uma amiga?
   c) E se ele decidir levar somente pessoas do mesmo sexo?
3. Mostre que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n} = 0$, se n é ímpar. Mostre ainda que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 0$, se n é par e maior do que zero.

3.5. Anagramas

Abordaremos agora um problema parecido com o problema da permutação. De quantas maneiras podemos permutar os elementos de uma lista? A diferença em relação ao problema da permutação reside no fato de que agora estamos interessados em permutar os elementos de uma lista, que pode ter elementos repetidos, enquanto que no problema da permutação permutávamos elementos de um conjunto.

Cada permutação dos elementos de uma lista é chamada de anagrama da lista. Frequentemente um anagrama é visto com sendo uma permutação das letras de uma palavra. Observe que uma palavra pode ser vista como uma lista. Vamos então enumerar os anagramas da palavra LUA. Eles são, em ordem alfabética, ALU, AUL, LAU, LUA (sim, LUA é anagrama de LUA), UAL e ULA. Note que LUA não tem letras repetidas, assim, podemos ver LUA como sendo um conjunto de letras. Neste caso, a quantidade de anagramas de LUA é igual à quantidade de permutações de 3 elementos, que sabemos ser = 3! = 6. Quando uma lista não tem elementos repetidos, a quantidade de anagramas é igual à quantidade de permutações.

E quando a lista tem elementos repetidos? Observe que os anagramas da palavra OVO são OOV, OVO e VOO. Vamos, por um momento, considerar que as duas letras "O" da palavra OVO são diferentes e vamos enumerar todas as permutações dessa palavra: OOV, OOV, OVO, OVO, VOO e VOO. Note que as permutações OOV e OOV correspondem a um mesmo anagrama. De fato, todas as permutações obtidas permutando-se elementos iguais não alteram o anagrama.

Seja L uma lista de comprimento n, com k elementos e sejam m_1, m_2, ..., m_k as multiplicidades dos elementos de L (sendo mi a multiplicidade do elemento i). Dado um anagrama de L, se permutarmos apenas elementos iguais do anagrama, continuaremos com o mesmo anagrama. Observe que o elemento 1 pode ser permutado de $m_1!$ maneiras, o elemento 2 pode ser permutado de $m_2!$ maneiras, e assim por diante.

Usando o princípio da multiplicação, percebemos que é possível fazer $m_1!.m_2!. \ldots .m_k!$ permutações envolvendo apenas elementos iguais, obtendo sempre o mesmo anagrama. Concluímos que, se contarmos todas as permutações de L, estaremos contando cada anagrama $m_1!.m_2!. \ldots .m_k!$ vezes. Como a quantidade de permutações de L é n!, a quantidade de anagramas de L é:

$$\frac{n!}{m_1!.m_2!.\cdots.m_k!}$$

Vamos contar os anagramas da palavra ASSOBIO. Observe que as letras S e O têm multiplicidade 2 e as demais letras têm multiplicidade 1. Com 1! = 1, e 1 é o elemento neutro da divisão, somente precisamos dividir pelo fatorial das multiplicidades maiores do que 1. Assim, a palavra ASSOBIO possui $\frac{7!}{2!\,2!}$ = 1260 anagramas.

E quantos anagramas da palavra ASSOBIO começam com a letra B? Neste caso, fixamos o B na primeira posição do anagrama e permutamos as demais letras de ASSOBIO. Percebemos então que basta contar a quantidade de anagramas da palavra ASSOIO. Utilizando a fórmula, concluímos que ASSOIO possui $\frac{6!}{2!\,2!}$ = 180 anagramas e portanto existem 180 anagramas da palavra ASSOBIO que começam com B.

Praticando

1. Enumere todos os anagramas da palavra BOLO.

2. Calcule a quantidade de anagramas da palavra TERREMOTO. Quantos anagramas da palavra TERREMOTO não começam com a letra T?

3.6. Multiconjuntos

Um multiconjunto é um conjunto que pode ter elementos repetidos. Num multiconjunto, assim como num conjunto, a ordem dos elementos não é importante.

Descreveremos um multiconjunto colocando seus elementos entre os símbolos < e >, separados por vírgulas. Eis um exemplo:

$$< 4, 6, 3, 4, 5, 8, 6, 4, 7 >$$

A multiplicidade de um elemento do multiconjunto é a quantidade de ocorrências desse elemento no multiconjunto. A cardinalidade de um multiconjunto é a soma das multiplicidades de seus elementos. Outra maneira de calcular a cardinalidade de um multiconjunto é contar quantos elementos ele possui sem levar em consideração se eles são repetidos ou não. O multiconjunto do exemplo anterior possui cardinalidade 9. Denotamos a cardinalidade de um multiconjunto M usando a notação |M|.

Dois multiconjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos com as mesmas multiplicidades.

O problema de contagem relacionado com multiconjuntos que nos interessa é: quantos multiconjuntos de cardinalidade k podem ser formados usando apenas os elementos de um conjunto de cardinalidade n?

Denotamos a quantidade de tais multiconjuntos por $\left(\binom{n}{k}\right)$ (lê-se "n multiescolha k"). A seguir fornecemos uma fórmula para $\left(\binom{n}{k}\right)$. Nas referências que se encontram no final dessa unidade é possível obter demonstrações da validade dessa fórmula.

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.\,k!}$$

Vamos aplicar esta fórmula a um exemplo. Ana vai à feira levando uma sacola com capacidade para carregar 3 quilos. Na feira só estão à venda abacaxis, abacates e melões, e todas as frutas têm exatamente 600 gramas! Ela decide levar cinco frutas. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

Observe que ela terá que levar frutas repetidas, visto que ela deseja levar 5 frutas mas só estão à venda 3 tipos de frutas. Por outro lado, a ordem em que ela compra as frutas não é relevante. Tanto faz ela comprar 3 abacaxis e depois 2 melões ou comprar 2 melões e depois 3 abacaxis, a compra é a mesma. Portanto, podemos considerar a compra que Ana fará como um multiconjunto.

A questão agora passa a ser: quantos multiconjuntos de cardinalidade 5 podem ser formados usando apenas os elementos de um conjunto de cardinalidade 3?

Vamos então aplicar a fórmula com n = 3 e k = 5:

$$\left(\binom{3}{5}\right) = \frac{(3+5-1)!}{(3-1)!.5!} = \frac{7!}{2!.5!} = \frac{7.6.5!}{2.5!} = 21$$

Concluímos que existem 21 maneiras distintas de Ana realizar sua compra.

Atividades de avaliação

1. Rui ganhou uma promoção numa loja que vende notebooks, palmtops, televisores, DVDs e celulares. Ele poderá levar gratuitamente quatro itens, distintos ou não, sendo pelo menos um deles um DVD. Por exemplo, Rui pode decidir levar dois celulares e dois DVD. Sabendo que na loja existem pelo menos quatro unidades de cada produto, de quantas maneiras Rui poderá fazer sua escolha?
2. Mostre que $\left(\binom{n}{k}\right) = \left(\binom{n-1}{k}\right) + \left(\binom{n}{k-1}\right)$

Síntese do capítulo

Neste capítulo apresentamos os princípios básicos nos quais se baseia a resolução da maior parte dos problemas de contagem: o princípio da multiplicação e o princípio da adição.

Em seguida, abordamos diversos problemas de contagem envolvendo listas, conjuntos e multiconjuntos. Vimos como calcular a quantidade de listas, arranjos, permutações, combinações e multiconjuntos que podem ser formados a partir de um conjunto. Aprendemos também como usar combinações para construir o Triângulo de Pascal e como usar tal triângulo para desenvolver o Binômio de Newton. Vimos ainda como contar a quantidade de anagramas de uma lista.

As fórmulas apresentadas nesta unidade estão resumidas na tabela a seguir. A tabela também indica qual o problema de contagem ao qual a fórmula deve ser aplicada e as principais características do problema.

Problema	Ordem importa?	Pode ter repetição?	Fórmula
Listas de comprimento k	Sim	Sim	n^k
Arranjos de k elementos	Sim	Não	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Permutações de n elementos	Sim	Não	$P_n = k!$
Combinações de k elementos	Não	Não	$\binom{k}{n} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
Anagramas	Sim	Sim	$\frac{n!}{m_1!.m_2!...m_k!}$
Multiconjuntos de k elementos	Não	Sim	$\left(\binom{n}{k}\right) = \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!k!}$

Leituras, filmes e sites

Análise combinatória

https://woc.ipca.pt/esg/getFile.do?tipo=2&id=1017

Um texto mais avançado sobre problemas de contagem

http://www.icmc.usp.br/~sma181/Teoria%20de%20Contagem.pdf

Triângulo de Pascal na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal

Binômio de Newton na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Bin%C3%B3mio_de_Newton

Máquina para calcular anagramas

http://wordsmith.org/anagram/advanced.html

Multiconjuntos na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Multiconjunto

Referências

SCHEINERMAN, E. R., **Matemática discreta -** uma introdução, Thomson Learning, 2003.

GERSTING, J. L. **Fundamentos de matemática para a ciência da computação**. LTC, 2004.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON M. **Matemática discreta**. 2ª ed., Bookman, 2004.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2003.

ROSEN, K. **Student´s solutions guide for use with discrete mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2002.

ROSEN, K. **Handbook of discrete and combinatorial mathematics**. CRC, 2000.

MENEZES, P. B. **Matemática discreta para computação e informática**. Sagra-Luzzatto, 2004.

Capítulo 3

Relações Binárias

1. Introdução

Em toda linguagem de programação existe um conjunto de operadores que servem para comparar valores. Tais operadores são chamados de operadores relacionais. Um deles é o operador $<$ (menor que). Dizemos que os números x e y se relacionam através desse operador se x é menor do que y.

O par (3, 7) se relaciona através desse operador, pois $3 < 7$. Já os pares (9, 5) e (6, 6) não se relacionam através desse operador, pois $9 \nless 5$ e $6 \nless 6$. Os demais operadores relacionais também definem relações binárias. Veremos que existe uma infinidade de outras relações binárias que podem ser definidas.

O uso de um operador relacional sempre envolve um teste e por isso é comum pensarmos numa relação binária como sendo um teste. No entanto, uma relação binária nada mais é do que um conjunto de pares ordenados. Isso pode parecer surpreendente num primeiro momento, mas esta é a definição matemática de relação binária.

No restante desse capítulo trataremos apenas de relações binárias. Dessa forma, por brevidade, usaremos o termo relação com o significado de relação binária.

Uma relação serve para associar elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto ou com elementos do próprio conjunto. Podemos ter uma relação cujas associações são definidas de maneira arbitrária, como na relação a seguir.

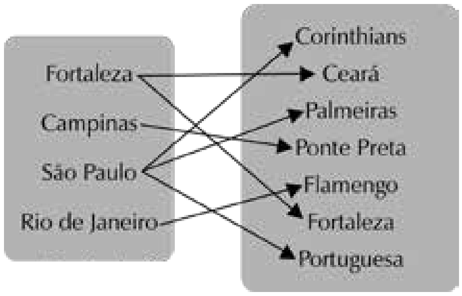
$$R = \{(3, 5), (6, 3), (3, 3), (3, 6), (4, 6), (5, 2)\}$$

No entanto, é mais frequente usarmos um predicado (teste) para definir quais elementos estão associados através da relação. Por exemplo, sejam C = {Fortaleza, Campinas, São Paulo, Rio de Janeiro} um conjunto de cidades e T = {Corinthians, Ceará, Palmeiras, Ponte Preta, Flamengo, Fortaleza, Portuguesa} um conjunto de times de futebol. Podemos definir S como sendo a relação que associa cidades a times de futebol que possuem sede nessas cidades. Formalmente,

$$S = \{(x, y) \mid x \in C, y \in T \text{ e } x \text{ é a cidade sede do time } y\}$$

Fica claro, para quem conhece futebol, que S = {(São Paulo, Corinthians), (Fortaleza, Ceará), (São Paulo, Palmeiras), (Campinas, Ponte Preta), (Rio de Janeiro, Flamengo), (Fortaleza, Fortaleza), (São Paulo, Portuguesa)}.

Graficamente, podemos expressar a relação S entre os conjuntos C e T da seguinte maneira:



Seja R é uma relação. Se $(x, y) \in R$ então x se relaciona com y através de R. Denotamos tal relacionamento usando a notação x R y. Se x R y então $(x, y) \in R$. Dessa forma:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x\ R\ y$$

Sejam A e B dois conjuntos e R uma relação. Se $R \subseteq A \times B$, dizemos que R é uma relação de A para B. Se $R \subseteq A \times A$, dizemos que R é uma relação sobre A. Observe que a relação R = {(3, 5), (6, 3), (3, 3), (3, 6), (4, 6), (5, 2)} é uma relação sobre o conjunto {2, 3, 4, 5, 6} enquanto que a relação S = {(x, y) | $x \in C$, $y \in T$ e x é a cidade sede do time y} é uma relação de C para T.

1.1. Relação Inversa

Dada uma relação R, a relação inversa de R, denotada por R^{-1}, é a relação obtida invertendo-se a ordem dos elementos em todos os pares ordenados de R. Formalmente:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Se R é uma relação de A para B, então R^{-1} será uma relação de B para A. Se R é uma relação sobre A, então R^{-1} também será uma relação sobre A.

Por exemplo, a inversa de R = {(3, 5), (6, 3), (3, 3), (3, 6), (4, 6), (5, 2)} é a relação R^{-1} = {(5, 3), (3, 6), (3, 3), (6, 3), (6, 4), (2, 5)}. A inversa de S = {(x, y) | $x \in C$, $y \in T$ e x é a cidade sede do time y} é a relação S^{-1} = {(x, y) | $x \in T$, $y \in C$ e x é um time sediado na cidade y}.

Poderíamos ter definido S^{-1} sem alterar o predicado. Para isso, bastaria ter invertido a ordem de x e y no par ordenado. Assim, $S^{-1} = \{(y, x) \mid x \in C, y \in T$ e x é a cidade sede do time y$\}$. Esta segunda maneira de expressar a relação inversa é mais simples, pois em algumas situações não é óbvio como alterar o predicado adequadamente para expressar a inversa.

Considere a relação $T = \{(x, y) \mid xy > 0\}$ sobre Z. Alguém, de forma descuidada, poderia sugerir que $T^{-1} = \{(x, y) \mid xy < 0\}$. Mas isso não é correto. Observe que o par $(-3, -2) \in T$, pois $(-3) \times (-2) > 0$. No entanto, da forma que foi sugerida a definição T^{-1}, o par $(-2, -3) \notin T^{-1}$, pois $(-2) \times (-3) \not< 0$. O correto é definir $T^{-1} = \{(y, x) \mid xy > 0\}$.

Praticando

1. Indique quais são os pares ordenados que fazem parte da relação $R = \{(x, y) \mid x > y\}$ sobre o conjunto $\{2, 5, 3, 6\}$. Forneça R^{-1}.
2. Indique quais são os pares ordenados que fazem parte relação $S = \{(x, y) \mid$ a quantidade de estados de x é y$\}$ do conjunto das regiões do Brasil para N. Forneça S^{-1}.

2. Propriedades das Relações

Seja R uma relação sobre um conjunto A.

- R é reflexiva se $(x, x) \in R$, para todo $x \in A$.
- R é anti-reflexiva se $(x, x) \notin R$, para todo $x \in A$.
- R é simétrica se $(x, y) \in R$ implica que $(y, x) \in R$.
- R é anti-simétrica se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ implica que $x = y$.
- R é transitiva se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R$.

Vejamos as propriedades da relação $R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$ sobre o conjunto $\{1, 2, 3\}$.

- R não é reflexiva, pois $(2, 2) \notin R$.
- R não é anti-reflexiva, por exemplo, $(1, 1) \in R$.
- R é simétrica.
- R não é anti-simétrica, pois $(1, 2) \in R$ e $(2, 1) \in R$, mas 1   2.
- R não é transitiva, pois $(2, 1) \in R$ e $(1, 2) \in R$, mas $(2, 2) \notin R$.

Analisemos as propriedades de outra relação. Seja $S = \{(x, y) \mid x < y\}$ sobre $\mathbb{Z}$.

- S não é reflexiva, pois $(x, x) \notin S$, visto que $x \not< x$.
- S é anti-reflexiva, pois $(x, x) \notin S$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, visto que $x \not< x$.
- S não é simétrica, por exemplo, $3 < 4$, mas $4 \not< 3$.

- S é anti-simétrica. Esta propriedade é um pouco mais complicada de justificar. Existem dois números inteiros x e y tais que $x < y$ e $y > x$? Obviamente, não. Sendo assim, não é possível que $(x, y) \in S$ e $(y, x) \in S$. Dessa forma, a implicação $[(x, y) \in S \text{ e } (y, x) \in S] \Longrightarrow x = y$ é verdadeira visto que sua premissa é falsa. Podemos justificar de outra forma: para que a relação S não seja anti-simétrica tem que existir um par (x, y) tal que $(x, y) \in S$ e $(y, x) \in S$, mas $x \neq y$. Como já dissemos antes, não existe um par (x, y) tal que $(x, y) \in S$ e $(y, x) \in S$, logo, S é anti-simétrica.
- S é transitiva, pois se $x < y$ e $y < z$, claramente $x < z$.Vejamos mais um exemplo. Seja T = {(x, y) | x é divisível por y} sobre N* (o conjunto dos números naturais sem o zero).
- T é reflexiva, pois todo número diferente de zero é divisível por ele mesmo.
- T não é anti-reflexiva, pois é reflexiva. Uma relação somente pode ser reflexiva e anti-reflexiva se ela for definida sobre o conjunto vazio. Neste caso, por vacuidade, ela será reflexiva e anti-reflexiva.
- T não é simétrica, por exemplo, 16 é divisível por 4, mas 4 não é divisível por 16.
- T é anti-simétrica, pois se x é divisível por y e y é divisível por x então x = y.
- T é transitiva, pois se x é divisível por y e y é divisível por z, então x é divisível por z.

Praticando

1. Para cada relação a seguir, determine se ela possui ou não as seguintes propriedades: reflexividade, anti-reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade. Justifique suas respostas.

R = {(x, y) | x é múltiplo de y} sobre N.

S = {(x, y) | x.y > 0} sobre Z*.

T = {(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 1), (5, 5)} sobre {1, 2, 3, 4, 5}.

D = {(x, y) | $x \cap y = \emptyset$}.

2. Determine o valor verdade (V ou F) de cada uma das afirmações abaixo, justificando suas respostas.

(   ) Se uma relação não é reflexiva então ela é anti-reflexiva

(   ) Se uma relação é simétrica e transitiva então ela é reflexiva

(   ) Se uma relação é anti-simétrica então ela é anti-reflexiva

(   ) Uma relação R é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$

3. Relações de Equivalência

Uma relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. O exemplo clássico de relação de equivalência é a relação R = {(x, y), x = y), também conhecida com relação de igualdade. Vejamos as propriedades dessa relação:

- R não é reflexiva, pois x = x. Observe que, no caso dessa relação, nem é preciso saber o conjunto sobre o qual a relação foi definida para determinar se ela é ou não reflexiva.
- R não é anti-reflexiva, pois é reflexiva.
- R é simétrica, pois se x = y então y = x.
- R é anti-simétrica, pois se (x, y) ∈ R e (y, x) ∈ R então x = y.
- R é transitiva, pois se x = y e y = z então x = z.

Existem outras relações de equivalência. Considere a relação S = {(x, y) | x é anagrama de y} sobre o conjunto de todas as palavras.

- S é reflexiva, pois toda palavra é anagrama de si mesma.
- S não é anti-reflexiva, pois é reflexiva.
- S é simétrica, pois se x é anagrama de y então y é anagrama de x.
- S não é anti-simétrica, por exemplo, BOLO é anagrama de LOBO e LOBO é anagrama BOLO, mas BOLO LOBO.
- S é transitiva, pois se x é anagrama de y e y é anagrama de z então x é anagrama de z.

Concluímos que S é uma relação de equivalência. Vejamos mais um exemplo. Na geometria, dizemos que dois triângulos são congruentes se eles possuem os mesmos ângulos internos. Vamos definir a relação é-congruente-a como sendo o conjunto dos pares (x, y) tais que x é congruente a y. Mais precisamente, é-congruente-a = {(x, y) | x é congruente a y} sobre o conjunto de todos os triângulos. Esta relação é:

- S é reflexiva, pois todo triângulo é congruente a si próprio.
- S não é anti-reflexiva, pois é reflexiva.
- S é simétrica, pois se x é congruente a y então y é congruente a x.
- S não é anti-simétrica. Por exemplo, dois triângulos eqüiláteros são congruentes, mas podem ter tamanhos diferentes.
- S é transitiva, pois se x é congruente a y e y é congruente a z então x é congruente a z.
- A relação é-congruente-a também é uma relação de equivalência.

3.1. Classes de Equivalência

Dada uma relação de equivalência R sobre um conjunto A e $x \in A$, chamamos de classe de equivalência de x, denotada por [x], o conjunto de todos os elementos com os quais x se relaciona. Mais precisamente, se R é uma relação de equivalência, então em R:

$$[x] = \{(y \mid (x, y) \in R\}$$

Seja R = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)} sobre o conjunto {1, 2, 3, 4}. O leitor pode facilmente verificar que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Sendo assim, R é uma relação de equivalência. Observe que o elemento 1 se relaciona com os elementos 1, 2 e 4, portanto, em R, [1] = {1, 2, 4}. Já o 3 se relaciona apenas com ele mesmo, logo, em R, [3] = {3}.

Note ainda que o elemento 2 também se relaciona com os elementos 1, 2 e 4, assim, em R, [2] = {1, 2, 4}. De fato, [1] e [2] não são duas classes de equivalência distintas, tratam-se da mesma classe de equivalência, pois [1] = [2].

Vejamos mais um exemplo. Seja E = {(x, y) | x está na mesma região que y} sobre o conjunto dos estados do Brasil. Esta relação é:

- Reflexiva, pois $(x, x) \in E$, visto que x está na mesma região que x.
- Simétrica, pois se x está na mesma região que y então y está na mesma região que x.
- Transitiva, pois se x está na mesma região que y e y está na mesma região que z então x está na mesma região que z.

Concluímos que E é uma relação de equivalência. Observe que Paraná, Rio Grande do Sul e Santa Catarina estão na mesma região do Brasil, logo [Paraná] = { Paraná, Rio Grande do Sul, Santa Catarina }.

Vamos agora discutir algumas propriedades das classes de equivalência.

Proposição 3.1. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $x \in A$. Então $x \in [x]$.

Prova. Sabemos que R é reflexiva, pois R é uma relação de equivalência. Dessa forma, $(x, x) \in R$. Logo, $x \in [x]$.

A Proposição 3.1 nos permite concluir que uma classe de equivalência nunca é vazia.

Proposição 3.2. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $x \notin A$. Então x não pertence a nenhuma classe de equivalência de R.

Prova. Suponha, por contradição, que existe uma classe de equivalência de R, digamos [y], tal que $x \in [y]$. Neste caso, $(y, x) \in R$. Como $R \subseteq A \times A$ (pois R é uma relação sobre A), concluímos que $(y, x) \in A \times A$. Mas isto é um absurdo, visto que $x \notin A$.

As proposições 3.1 e 3.2 têm como consequência o corolário que se segue.

Corolário 3.3. Se R é uma relação de equivalência sobre A, então a união das classes de equivalência de R é igual ao próprio A.

Prova. Sejam $C_1, C_2, ..., C_k$ as classes de equivalência de R. Pela Proposição 3.1, sabemos que todo elemento de A pertence a alguma classe de equivalência de R. Disto decorre que $A \subseteq C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k$.

Seja x um elemento pertencente a alguma classe de equivalência de R. A Proposição 3.2 implica que $x \in A$, caso contrário, x não poderia pertencer a nenhuma classe de equivalência de R. Sendo assim, $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k \subseteq A$.

Concluímos então que $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k = A$.

Proposição 3.4. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $x \in A$. Se $y \notin [x]$ então $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Prova. Suponha, por absurdo, que $[x] \cap [y]$ não é vazio. Neste caso, existe z tal que $z \in ([x] \cap [y])$. Sendo assim, x R z e y R z. Como R é simétrica, z R y. Devido à transitividade de R, temos que x R y. Mas então $y \in [x]$, o que é uma contradição. Concluímos então que $[y] \cap [x] = \emptyset$.

Proposição 3.5. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $x \in A$. Se $y \in [x]$ então $[y] = [x]$.

Prova. Para mostrar que $[y] = [x]$, basta provar que $[y] \subseteq [x]$ e $[x] \subseteq [y]$. Tome $z \in [y]$. Note que x R y e y R z. Por transitividade, concluímos que x R z, logo $z \in [x]$ e portanto $[y] \subseteq [x]$.

Tome agora $w \in [x]$. Observe que x R w e por transitividade w R x. Como x R y, concluímos, por transitividade, que w R y e, por simetria, y R w. Sendo assim, $w \in [y]$ e portanto $[x] \subseteq [y]$. Isto encerra nossa prova.

As proposições 3.4 e 3.5 nos permitem concluir o que se segue.

Corolário 3.6. Sejam [x] e [y] duas classes de equivalência de uma relação R. Então $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Prova. Suponha, por absurdo, que $[x] \neq [y]$ mas $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Neste caso, existe z tal que $z \in ([x] \cup [y])$ mas $z \notin ([x] \cap [y])$. Suponha, sem perda de generalidade, que $z \in [x]$ e, obviamente, $z \notin [y]$. Pela Proposição 3.5, temos que $[z] = [x]$, pois $z \in [x]$. Pela Proposição 3.4, concluímos que $[z] \cap [y] = \emptyset$, visto que $z \notin [y]$. Mas então $[x] \cap [y] = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y]$.

Chegamos então ao resultado mais importante.

Teorema 3.7. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. O conjunto das classes de equivalência de R constitui uma partição de A.

Prova. Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k$ as classes de equivalência de R. O Corolário 3.3 nos garante que $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = A$. Já o Corolário 3.6 estabelece que as classes de equivalência de R distintas são disjuntas. Concluímos que o conjunto das classes de equivalência de R constitui uma partição de A.

Para exemplificar a aplicação desse teorema, vamos analisar novamente a relação R = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)} sobre o conjunto {1, 2, 3, 4}. Como vimos anteriormente, esta relação possui duas classes de equivalência: {1, 2, 4} e {3}. Claramente, elas constituem uma partição do conjunto {1, 2, 3, 4}.

Vejamos mais um exemplo. Seja E = {(x, y) | x está na mesma região que y} sobre o conjunto dos estados do Brasil. Mostramos anteriormente que E é uma relação de equivalência. Cada classe de equivalência de E contém todos os estados de uma das regiões do Brasil. Sendo assim, as classes de equivalência de E constituem uma partição do conjunto dos estados do Brasil.

Atividades de avaliação

1. Quais das seguintes relações são relações de equivalências? Justifique suas respostas.

a) A relação R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (4, 4)} sobre o conjunto {1, 2, 3, 4}

b) A relação é conterrâneo de sobre o conjunto dos seres humanos.

c) A relação é irmão de sobre o conjunto dos seres humanos.

d) A relação é divisor de sobre Z.

e) A relação é divisor de sobre o conjunto dos números primos.

2. Calcule as classes de equivalências solicitadas.

a) [3] na relação {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)}, sobre {1, 2, 3, 4}.

b) [Ronaldinho Gaúcho] na relação nasceu no mesmo estado que", sobre o conjunto das pessoas.

c) [BOLA] na relação "é anagrama de", sobre o conjunto das palavras.

3. Para cada relação de equivalência a seguir, forneça uma partição do conjunto sobre o qual ela foi definida baseada em suas classes de equivalência.

a) A relação R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} sobre o conjunto {1, 2, 3, 4}.

b) A relação S = {(x, y) | x . y > 0} sobre Z* (inteiros sem o zero).

c) A relação tem o mesmo número de dias que sobre o conjunto dos meses do ano.

Síntese do capítulo

Vimos que uma relação é um conjunto de pares ordenados. Com frequência, a relação é definida através de uma condição. Os pares ordenados que satisfazem a condição fazem parte da relação. Se $(x, y) \in R$ então x se relaciona com y através de R. Uma relação de A para B associa elementos do conjunto A com elementos do conjunto B. Uma relação sobre A associa os elementos de A entre si. A inversa de uma relação R é a relação obtida invertendo-se a ordem dos elementos nos pares ordenados de R.

Uma relação R sobre um conjunto A é reflexiva se todo elemento de A se relaciona com ele mesmo. É anti-reflexiva se nenhum elemento de A se relaciona com ele mesmo. Se R é simétrica, o fato de x se relacionar com y implica que y se relaciona com x. Se R é anti-simétrica, se $x \neq y$ então $(x, y) \notin R$ ou $(y, x) \notin R$, ou seja, x e y não se relacionam de forma simétrica. Finalmente, R é transitiva se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ implicar que $(x, z) \in R$.

Uma relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Dada uma relação de equivalência R sobre um conjunto A, a classe de equivalência de x em R é o conjunto de todos os elementos com os quais x se relaciona através de R. Vimos ainda que o conjunto das classes de equivalência de R constituem uma partição de A.

Leituras, filmes e sites

Texto sobre relações por Ulysses Sodré e Matias J. Q. Neto

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/relacoes/relacoes.htm

Relações de equivalência por Eric Guedes

http://mathfire.sites.uol.com.br/RelacaoDeEquivalencia.htm

Classes de equivalência na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Classe_de_equival%C3%AAncia

Relações de ordem e diagramas de Hasse (texto para os que desejam aprofundar-se no estudo de relações)

http://www.ptmat.fc.ul.pt/~lsequeir/emd/teoricas/aula10print.pdf

Referências

SCHEINERMAN, E. R., **Matemática discreta -** uma introdução, Thomson Learning, 2003.

GERSTING, J. L. **Fundamentos de matemática para a ciência da computação**. LTC, 2004.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON M. **Matemática discreta**. 2ª ed., Bookman, 2004.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2003.

ROSEN, K. **Student´s solutions guide for use with discrete mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2002.

ROSEN, K. **Handbook of discrete and combinatorial mathematics**. CRC, 2000.

MENEZES, P. B. **Matemática discreta para computação e informática**. Sagra-Luzzatto, 2004.

Capítulo 4

Funções

1. Introdução

Funções são objetos de fundamental importância na matemática. Neste capítulo apresentamos os conceitos de função, domínio, contradomínio e imagem. Explicamos o que são funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Definimos também o que é função inversa. Discutimos o famoso Princípio da Casa de Pombos e o Teorema de Cantor.

O leitor deverá ser capaz de determinar se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora e determinar a inversa de uma função. Deverá ainda entender o princípio da casa de pombos e ser capaz de aplicá-lo para resolver problemas matemáticos elementares.

2. Conceitos Básicos

Podemos imaginar uma função como sendo uma máquina na qual inserimos algo e ela nos devolve uma resposta. Essa máquina tem uma característica fundamental: sempre que inserirmos uma mesma coisa na máquina, ele nos devolverá a mesma resposta. No presente estudo, a máquina (função) receberá um elemento de um conjunto e devolverá um elemento de um conjunto.

Podemos então definir esse tipo de função como sendo uma relação binária na qual os primeiros elementos dos pares ordenados são todos distintos. Tais funções também são chamadas de funções de uma variável. A seguir, temos exemplos de relações que são funções e de relações que não são funções.

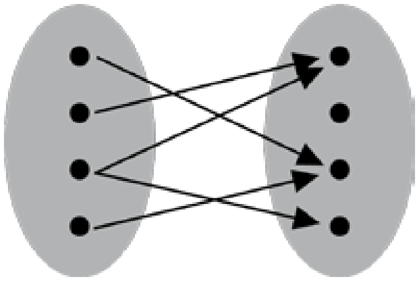
$f = \{(3, 2), (4, 4), (4, 2)\} \Leftarrow$ é função

$g = \{(3, 2), (4, 2), (3, 4)\} \Leftarrow$ não é função, pois $(3, 2)$ e $(3, 4) \in g$

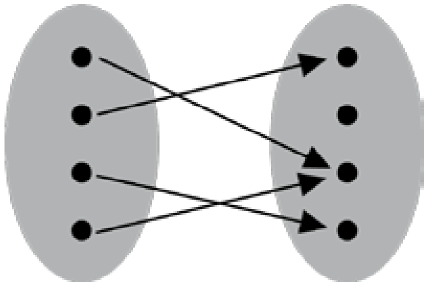
$h = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ sobre R $\Leftarrow$ é função

$i = \{(x, y) \mid x = y^2\}$ sobre R $\Leftarrow$ não é função, por exemplo, $(4, 2)$ e $(4, -2) \in i$

A figura a seguir ilustra uma relação que não é função. Observe que um dos elementos do conjunto da esquerda está associado a dois elementos do conjunto da direita.



A próxima figura ilustra uma relação que é função.



Seja f uma função. Chamamos de domínio de f, denotado por dom f, o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que compõem f. Chamamos de imagem de f, denotada por im f, o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que compõem f. Observe que a definição de função implica que cada elemento do domínio possui apenas um correspondente na imagem. Utilizando as funções f e h do exemplo anterior, temos que:

dom f = {3 ,4} e im f = {2, 4}

dom h = R e im h = R+ (números reais não negativos)

A notação f(x) (lê-se "f de x") representa o elemento com o qual x se relaciona através de f. Se f(x) = y, então x se relaciona com y através de f. Dizemos também que y é a imagem do elemento x (não confundir com a imagem da função). Formalmente:

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in f$$

Novamente usando f e h do exemplo anterior, temos que f(3) = 2 e h(3) = 9. Observe que f(2) não está definida, pois 2 não está relacionado com nenhum elemento através da função f.

Podemos usar a notação f(x) para definir alguns tipos de função. Por exemplo, seja f = {(x, y) | y = x + 5}. A notação f(x) = x + 5 indica como calcular a imagem do elemento x, e nos permite saber quais são os pares que compõem a função g. Portanto, podemos definir f usando a notação $f(x) = x + 5$. Generalizando, esta maneira de definir funções consiste em usar uma expressão para indicar como calcular a imagem de cada elemento do domínio de x. Tal maneira é a preferida para expressar funções aritméticas. Por outro lado, seja $g = \{(x, y) \mid x$ é um estado da região y do Brasil$\}$. Não conseguimos calcular a imagem de x através de uma expressão e, portanto, não conseguimos definir esta função usando a notação g(x).

Indicamos que f é uma função de A para B usando a notação $f : A \to B$. Neste caso, A é o domínio de f e B é o contradomínio de f. Observe que $f \subseteq A \times B$ e $\text{im } f \subseteq B$. Note ainda que f(x) está definida para todo $x \in A$ e f(x) não está definida se $x \notin A$.

Praticando

1. Para cada uma das seguintes relações, indique se ela é uma função. Caso não seja uma função, justifique e pare. Caso contrário, forneça seu domínio e sua imagem. Chamando a função de f, calcule f(2).

a) $\{(4, 1), (1, 3), (3, 3), (2, 2), (4, 4)\}$ sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{4\}$ sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\{(x, y) \mid y = 3x + 6\}$ sobre Z

d) $\{(x, y) \mid y = \text{seno}(x)\}$ sobre R

e) $\{(x, y) \mid y$ é a capital do estado $x\}$ do conjunto dos estados do Brasil para o conjunto das cidades do Brasil

f) $\{(x, y) \mid y$ é um estado da região $x\}$ do conjunto dos estados do Brasil para o conjunto das regiões do Brasil

g) $\{(x, y) \mid x$ é múltiplo de $y\}$ sobre Z

h) $\{(x, y) \mid x, y \in Z, x.y = 5\}$

i) $\{(x, y) \mid x, y \in R, x^2 + y^2 = 1\}$

j) $\{(x, y) \mid y = x \bmod 8\}$ sobre N (x mod 8 representa o resto da divisão de x por 8)

2. Sejam $A = \{3, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$. Escreva todas as possíveis funções de A para B.

3. Tipos de Funções

Vimos anteriormente que, numa função, cada elemento do domínio possui exatamente um correspondente no contradomínio. Já um elemento do contradomínio pode ter zero ou mais correspondentes no domínio. Podemos classificar as funções de acordo com a quantidade de elementos do domínio correspondentes a cada elemento do contradomínio.

3.1. Funções Injetoras

Dizemos que uma função é injetora se todos os segundos elementos dos pares ordenados que fazem parte da função são distintos. Isso equivale a dizer que, numa função injetora, elementos distintos têm imagens distintas. Ou ainda, numa função injetora, cada elemento da imagem tem apenas um correspondente no domínio e vice-versa. É por isso que funções injetoras também são chamadas de funções um-para-um. Formalmente,

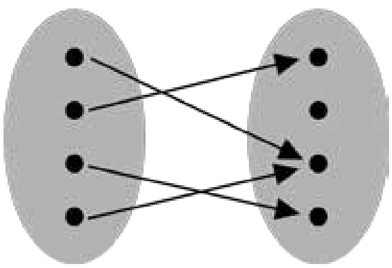
f é injetora se e somente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$

Podemos também definir o que é uma função injetora usando a contrapositiva da definição anterior:

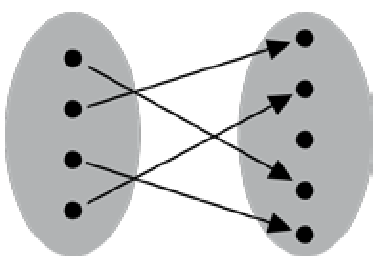
f é injetora se e somente se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

A função $h(x) = x^2$, sobre R, não é injetora, visto que $h(2) = h(-2) = 4$, no entanto $2 \neq -2$. Já a função $g(x) = x + 5$, sobre R, é injetora. Note que ao fixarmos o valor de $g(x)$, o valor de x estará determinado de maneira única, pois $x = g(x) – 5$. Isso significa que cada elemento da imagem possui apenas um correspondente no domínio.

A figura a seguir ilustra uma função que não é injetora. Note que um dos elementos do conjunto da direita possui dois correspondentes no conjunto da esquerda.



A próxima figura ilustra uma função injetora.



Funções injetoras também são chamadas de funções 1 : 1, funções injetivas ou injeções.

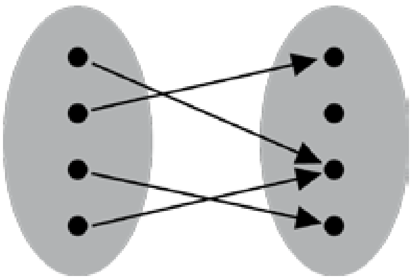
3.2. Funções Sobrejetoras

Dizemos que uma função é sobrejetora se todos os segundos elementos do contradomínio possuem pelo menos um correspondente no domínio. Formalmente,

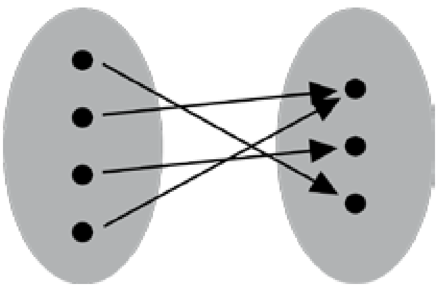
$$f : A \to B \text{ é sobrejetora se e somente se } \operatorname{im} f = B$$

A função $h(x) = x^2$, sobre R, não é sobrejetora, visto que im $h = R+ \neq R$. Já a função $g(x) = x + 5$, sobre R, é sobrejetora. Observe que, qualquer que seja $y \in R$, o valor $y - 5$ se relaciona com y, pois $h(y - 5) = y - 5 + 5 = y$. Concluímos assim que todo elemento do contradomínio possui um correspondente no domínio e portanto g é sobrejetora.

A figura a seguir ilustra uma função que não é sobrejetora. Note que um dos elementos do conjunto da direita não possui correspondente no conjunto da esquerda.



A próxima figura ilustra uma função sobrejetora.



Funções sobrejetoras também são chamadas de funções sobrejetivas ou sobrejeções.

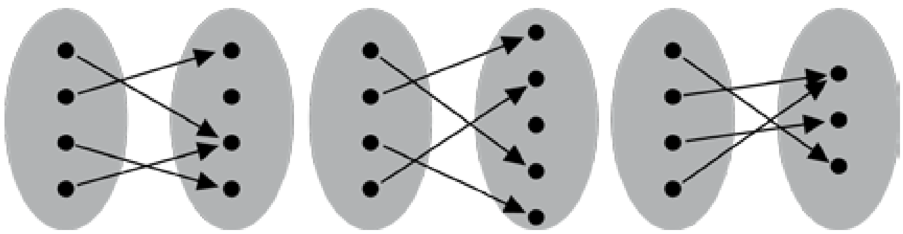
3.3. Funções Bijetoras

Dizemos que uma função é bijetora se ela é injetora e sobrejetora. Por exemplo, a função $h(x) = x^2$, sobre $\mathbb{R}$, conforme vimos anteriormente, não é injetora nem sobrejetora, logo não é bijetora. Vejamos outro exemplo: a função $f(x) = 2^x$, sobre $\mathbb{N}$, é injetora, pois se $x \neq y$ então $2^x \neq 2^y$, logo $f(x) \neq f(y)$. No entanto, a imagem de f é constituída apenas de potências de 2, visto que o domínio de f é $\mathbb{N}$, e portanto f não é sobrejetora. Consequentemente, f não é bijetora.

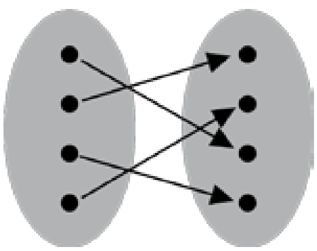
Vejamos mais um exemplo: seja $p(x) = \{(x, y) \mid x$ é um país situado no continente $y\}$, do conjunto dos países para o conjunto dos continentes. Observe que a função p é sobrejetora, pois todo continente possui algum país. No entanto, p não é injetora, pois existem vários países situados num mesmo continente. Dessa forma, p não é bijetora.

Já a função $g(x) = x + 5$, sobre $\mathbb{R}$, como vimos anteriormente, é injetora e sobrejetora, logo é bijetora.

As seguintes figuras ilustram funções que não são bijetoras. A figura à esquerda representa uma função que não é injetora nem sobrejetora. A figura central representada uma função que é injetora, mas não é sobrejetora. Já a figura à direita representada uma função que é sobrejetora, mas não é injetora.



A próxima figura ilustra uma função bijetora.



Funções bijetoras também são chamadas de funções bijetivas ou bijeções.

3.4. Função Inversa

Uma função é também uma relação. Sendo assim, podemos definir a inversa de uma função da mesma maneira que definimos a inversa de uma relação. Seja f uma função. A inversa de f é obtida invertendo-se a ordem dos elementos em todos os pares ordenados de f. Denotamos a inversa de f usando a notação f^{-1}. Formalmente:

$$f^{-1} = ((y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

Obviamente, para que a inversa de f também seja uma função, é necessário e suficiente que f seja injetora. Neste caso, dizemos que f é inversível e que f^{-1} é a função inversa de f. Mais precisamente,

Uma função f é inversível se e somente se f é injetora.

Por exemplo, considere a função f = {(3, 2), (4, 4), (4, 2)}. Note que f não é injetora, pois f(3) = f(4) = 2. Sendo assim, f não é inversível. Observe ainda que, como esperado, f^{-1} = {(2, 3), (4, 4), (2, 4)} não é uma função.

Considere agora a função g(x) = x + 5, sobre R. Vimos anteriormente que g é injetora e portanto é inversível. Sua inversa é $g^{-1}(x) = x – 5$.

Ainda sobre funções inversas, é possível mostrar que se $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora, então f^{-1} é uma função de B para A.

Praticando

1. Para cada uma das funções a seguir, responda: a função é injetora? Se não for, justifique. Caso contrário, forneça sua inversa. A função é sobrejetora? Se não for, justifique. A função é bijetora? Se não for, justifique.

a) {(4, 1), (1, 3), (3, 3), (2, 2)} sobre o conjunto {1, 2, 3, 4}

b) {1, 2, 3, 4} × {3} sobre o conjunto {1, 2, 3, 4, 5}

c) {(x, y) |y = 3x + 6} sobre Z

d) {(x, y) |y = seno(x)} sobre R

e) {(x, y) | y é a capital do estado x} do conjunto dos estados do Brasil para o conjunto das cidades do Brasil

f) {(x, y) | x é um estado da região y} do conjunto dos estados do Brasil para o conjunto das regiões do Brasil

g) {(x, y) | x, y ∈ Z, x.y = 5}

h) {(x, y) |y = x mod 8} sobre N (x mod 8 representa o resto da divisão de x por 8)

4. Princípio da Casa de Pombos

O princípio da casa de pombos pode ser informalmente explicado da seguinte maneira: um criador de pombos possui n pombos e constrói m casinhas para abrigá-los. Naturalmente, se $n > m$, o criador terá que abrigar mais de um pombo em pelo menos uma das casinhas. Se $n < m$, então pelo menos uma das casinhas ficará vazia. Formalmente,

Princípio da Casa de Pombos: Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \rightarrow B$. Se $|A| > |B|$ então f não é injetora. Se $|A| < |B|$ então f não é sobrejetora.

Este princípio tem como conseqüência que só existe uma bijeção entre dois conjuntos finitos se esses dois conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Podemos também usar este princípio para resolver diversos problemas matemáticos. Vejamos um exemplo:

Proposição 4.1. Seja $x \in \mathbb{N}$. Então existem inteiros positivos a e b, com a b, tais que $x^a - x^b$ é múltiplo de 10.

Por exemplo, se $x = 5$, $a = 3$ e $b = 2$, temos que $x^a - x^b = 125 - 25 = 100$, que é múltiplo de 10. Vamos agora provar a Proposição 4.1 utilizando o Princípio da Casa de Pombos como parte da argumentação.

Prova. Sabemos que a subtração de dois números inteiros que terminem com o mesmo algarismo resulta em um número cujo último algarismo é zero. Sabemos ainda que um número é múltiplo de 10 se o seu último algarismo é zero. Sendo assim, se encontrarmos duas potências de x, com expoentes inteiros, que terminem com o mesmo algarismo, a subtração entre elas resulta num múltiplo de 10.

Considere o conjunto $P = \{x^1, x^2, x^3, ..., x^{11}\}$ e $D = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Seja $f : P \rightarrow D$ tal que $f = \{(x, y) \mid x \text{ termina com o algarismo } y\}$. Observe que a função f associa cada elemento x de P com o elemento y de D equivalente ao último algarismo de x.

Como $|P| > |D|$, pelo Princípio da Casa de Pombos, sabemos que f não é injetora. Sendo assim, pelo menos dois elementos de P estão associados ao mesmo elemento de D, ou seja, pelo menos dois elementos de P terminam com o mesmo algarismo. Dessa forma, a subtração entre eles resulta num múltiplo de 10.

O Princípio da Casa de Pombos estabelece condições para que uma função entre conjuntos finitos seja bijetora. Mas o que dizer sobre conjuntos infinitos? Sendo mais específico, será que existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros?

Sabemos que o conjunto dos números inteiros contém todos os números naturais e mais infinitos números inteiros negativos. De certa maneira, o conjunto dos números inteiros é maior do que o conjunto dos números naturais.

Assim, numa análise apressada da questão, concluímos que não pode haver uma função sobrejetora de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, e portanto não pode haver uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$. Surpreendentemente, tal conclusão é incorreta!

Considere a seguinte função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & se\ x\ é\ par, e \\ \dfrac{(x+1)}{2} & se\ x\ é\ ímpar. \end{cases}$$

A demonstração de que f é de fato uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ é um dos exercícios propostos a seguir. No entanto, calculando uns poucos valores de f, nos convencemos que f é mesmo uma bijeção $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4

Em certo sentido, N e Z possuem o mesmo tamanho e por isso podemos construir uma correspondência do tipo um-para-um entre os elementos de N e os elementos de Z.

Mas será que todos os conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho? Ou ainda, será que existe uma bijeção entre qualquer par de conjuntos infinitos? O matemático russo Georg Cantor respondeu essas questões.

Teorema de Cantor. Se $f : A \rightarrow 2^A$, então f não é sobrejetora.

A notação 2^A representa o conjunto das partes de A. Se A é finito, o Princípio da Casa de Pombos implica que f não é sobrejetora, visto que $|A| < |2^A|$. Se A é infinito, então 2^A também é infinito. No entanto, em certo sentido, 2^A é mais infinito do que A.

Para lidar com essas noções, Cantor criou uma categoria de números chamados de cardinais transfinitos. Ele provou que os menores conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho que N. Ele denotou o tamanho de N pelo cardinal $\aleph$ (álef zero).

Atividades de avaliação

1. Num grupo de 367 pessoas, quantas delas fazem aniversário no mesmo dia do ano? E num grupo de 100 pessoas, quantas delas fazem aniversário no mesmo mês?

2. Dado um quadrado de lado 1 e cinco pontos dentro desse quadrado, prove que existem pelo menos dois desses pontos cuja distância é menor ou igual a 2/2 (sugestão: use o Princípio da Casa de Pombos).
3. Seja f : $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & se\ x\ é\ par, e \\ \dfrac{(x+1)}{2} & se\ x\ é\ ímpar. \end{cases}$$

Prove que f é uma bijeção.

Síntese do capítulo

Vimos que uma função é uma relação na qual os primeiros elementos dos pares ordenados são todos distintos. O domínio de uma função é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados que compõem a função. A imagem de uma função é o conjunto dos segundos elementos dos pares ordenados que compõem a função. A notação f : A → B indica que f é uma função de A para B. Além disso, indica que o domínio de f é A e que o contradomínio de f é B. A imagem de f está contida em B. A notação f(x) denota o elemento com o qual x se relaciona através de f. Tal elemento é chamado de imagem de x.

Uma função é injetora se os segundos elementos dos pares ordenados que compõem a função são todos distintos. Uma função é sobrejetora se sua imagem é igual ao seu contradomínio. Uma função é bijetora se é injetora e sobrejetora. A inversa de uma função é obtida invertendo-se a ordem dos elementos em todos os pares ordenados que compõem a função. Uma função é inversível se e somente se ela é injetora.

Vimos ainda o Princípio da Casa de Pombos. Sejam A e B conjuntos finitos e f : A → B. Se |A| > |B| então f não é injetora. Se |A| < |B| então f não é sobrejetora. Disso decorre que, se f é bijetora, então |A| = |B|. Finalmente, o Teorema de Cantor estabelece que se f : A → 2A, então f não é sobrejetora.

Leituras, filmes e sites

Funções na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o

O Princípio da Casa de Pombos

www.cin.ufpe.br/~can/Monitorias/Pr%EDncipio%20da%20casa%20dos%20 pombos.ppt

Georg Cantor na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Referências

SCHEINERMAN, E. R., **Matemática discreta** - uma introdução, Thomson Learning, 2003.

GERSTING, J. L. **Fundamentos de matemática para a ciência da computação**. LTC, 2004.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON M. **Matemática discreta**. 2ª ed., Bookman, 2004.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2003.

ROSEN, K. **Student´s solutions guide for use with discrete mathematics and its applications**. McGraw-Hill, 2002.

ROSEN, K. **Handbook of discrete and combinatorial mathematics**. CRC, 2000.

MENEZES, P. B. **Matemática discreta para computação e informática**. Sagra-Luzzatto, 2004.

Capítulo 5

Limites e Derivadas

1. Introdução

Veremos inicialmente como obter a reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto. Em seguida, motivados por tal problema geométrico, introduziremos o conceito de limite e continuidade de uma função, apresentaremos o Teorema do Valor Intermediário e definiremos limites laterais. Finalmente, abordaremos o conceito de derivada de uma função, definiremos derivadas laterais e apresentaremos algumas regras de derivação.

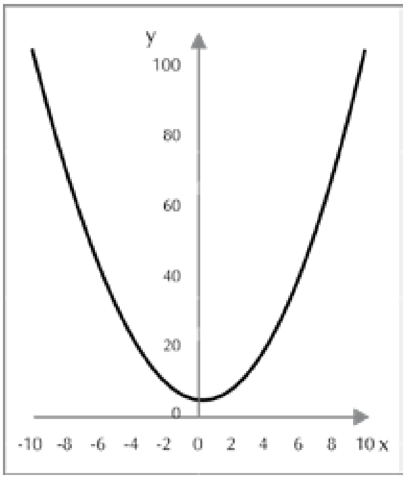
O leitor deverá ser capaz de traçar a reta tangente a um ponto do gráfico de uma função e calcular limites e derivadas de funções elementares. Esses assuntos serão abordamos com mais profundidade na disciplina Matemática II.

2. Gráficos e Tangentes

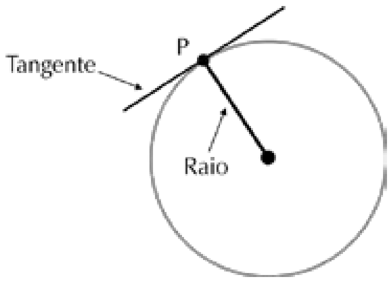
Vimos no capítulo 4 que uma função sobre números pode ser definida usando-se expressões aritméticas. Por exemplo, a expressão $f(x) = x^2 + 5$ é outra forma de definir a função $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5\}$. Se considerarmos que y representa a imagem de x, ou seja, se $y = f(x)$, podemos definir a função f como sendo $y = x^2 + 5$.

Note que, ao fixarmos o valor de x, teremos um único valor de y correspondente. O contrário não ocorre. Por exemplo, se fixarmos o valor de y em 9, o valor de x poderá ser 2, pois $9 = 2^2 + 5$, ou -2, pois $9 = -2^2 + 5$. Dizemos que y é uma variável dependente enquanto que x é uma variável independente. Esta variável x também costuma ser chamada de argumento da função.

A representação no plano cartesiano dos pares ordenados que compõem uma função fornece o gráfico de função. Por exemplo, a seguir está o gráfico da função $y = x^2 + 5$.

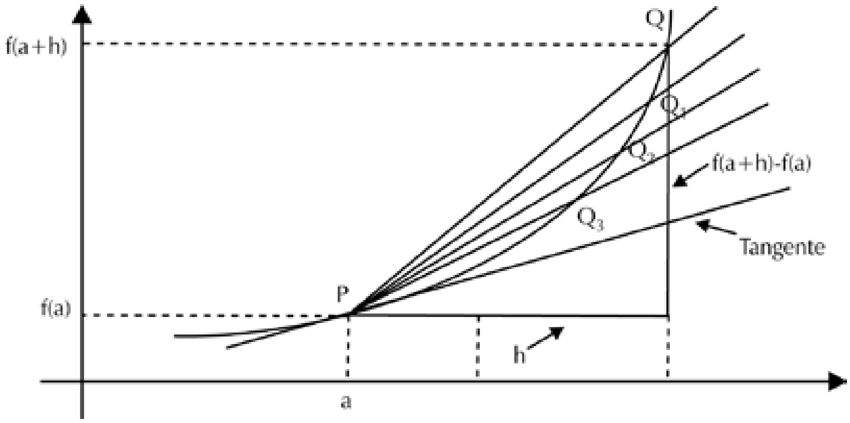


Um problema que nos interessa é traçar a reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto. No caso de uma circunferência, é fácil resolver esse problema. A reta tangente a um ponto P de uma circunferência é a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao raio da circunferência que também passa pelo ponto P.



Caso o gráfico da função seja uma curva qualquer, encontrar a reta tangente a um ponto do gráfico é um problema um pouco mais complicado.

Sejam a e f(a) as coordenadas do ponto P no gráfico da função f. Incrementamos a abscissa x = a de um valor não nulo h, obtendo outro ponto Q do gráfico cujas coordenadas são (a + h, f(a + h)).



A reta que passa pelos pontos P e Q tem declive (coeficiente angular) igual a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tal quociente é chamado de razão incremental de f no ponto de abscissa a. Em seguida, aproximamos o ponto Q do ponto P fazendo h cada vez mais próximo de zero, passando assim pelos pontos Q_1, Q_2, Q_3 etc. Utilizamos a notação h → 0 para indicar que o valor de h está tendendo a zero.

Quando h → 0 e o valor da razão incremental tende para um valor finito m, a tangente ao ponto P é a reta que passa por P e tem coeficiente angular igual a m. Se a razão incremental tende a + ou – quando h → 0, a tangente ao ponto P é a reta x = a, que é paralela ao eixo y.

Por exemplo, vamos determinar a equação da reta tangente ao ponto com abscissa igual a 1 no gráfico da função $f(x) = x^2 + 5$. Note que f(1) = 6 e $f(1 + h) = (1 + h)^2 + 5$. Dessa forma, a razão incremental é:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2+5-6}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$$

É fácil perceber que quando h → 0, a razão incremental tende a 2. Sendo assim, a equação da reta tangente ao ponto (1, 6) do gráfico da função f(x) = x2 + 5 é:

$$y-6=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2+6\Rightarrow y=2x+4$$

De forma análoga, podemos determinar a equação da reta tangente ao ponto de abscissa a no gráfico da função $f(x) = x^2 + 5$. Observe que a razão incremental no ponto de abscissa a é:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2+5-(a^2+5)}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2+5-a^2-5}{h}$$

$$=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$$

Quando h → 0, a razão incremental no ponto de abscissa a tende a 2a. Dessa forma, a equação da reta tangente ao ponto (a, f(a)) do gráfico da função $f(x) = x^2 + 5$ é:

$$y-f(a)=2a(x-a)\Rightarrow y=2ax-2a^2+a^2+5$$

$$\Rightarrow y=2ax-a^2+5$$

Praticando

1. Para cada uma das funções a seguir, calcule o coeficiente angular das retas tangentes aos pontos indicados e determine as equações correspondentes a tais retas. Além disso, desenhe o gráfico da função.

   a) $f(x) = x^4 - 5$ em $x = 3/4$ e $x = a$ qualquer.

   b) $f(x) = 2x^3/3 - 2x$ em $x = 5$ e $x = a$ qualquer.

   c) $f(x) = 1/x^3$ em $x = 1$ e $x = a \neq 0$.

   d) $f(x) = x^2/(x + 2)$, em $x = 6$ e $x = a$ qualquer.

3. Limites e Continuidade

Na seção anterior, vimos que para calcular o coeficiente angular da reta tangente a um ponto do gráfico de uma curva precisamos determinar o valor para o qual tende a razão incremental naquele ponto quando h tende a zero. Tal valor é chamado de limite da razão incremental com h tendendo a zero e é denotado por:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

O termo limite de uma função é usado para denotar o valor para o qual uma função tende à medida que seu argumento se aproxima de um determinado valor. A notação $\lim_{x\to c} f(x)$ (lê-se "limite de f de x quando x tende a c") denota o valor para o qual f(x) tende quando x se aproxima de c. A expressão

$$\lim_{x\to c} f(x)=m$$

indica que o valor de f(x) se torna tão próximo de m quanto quisermos à medida que x se aproxima de c. Esta afirmação pode ser verdadeira mesmo quando f(c) ≠ m ou quando f(c) sequer está definida.

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & se\ x \neq 2 \\ 6 & se\ x = 2 \end{cases}$$

Observe quando $x \to 2$, f(x) se aproxima de 7. Dessa forma, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. No entanto, f(2) = 6.

Vejamos outro exemplo. Seja $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Observe que, se $x \neq 2$, então:

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

Sendo assim, quando $x \to 2$, g(x) se aproxima de 4, apesar do fato de que g(2) não está definida. Portanto, .

3.1. Continuidade

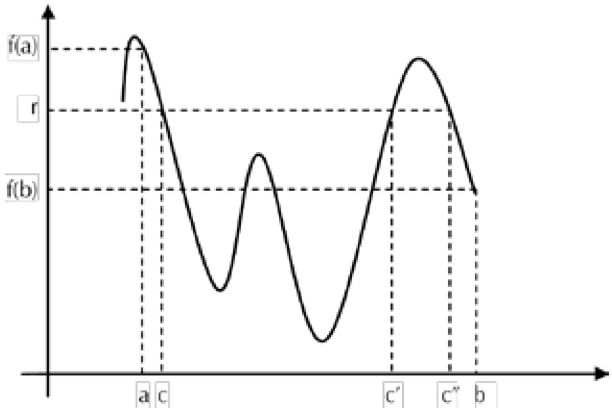
Quando $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, dizemos que a função f é contínua no ponto c. Dizemos que uma função f é contínua num intervalo [a, b] seja f é contínua em cada ponto desse intervalo.

A idéia de continuidade de uma função pode ser facilmente entendida sob o ponto de vista geométrico, segundo o qual uma função é contínua num intervalo se o gráfico da função nesse intervalo não apresenta quebras, falhas ou rupturas.

Se uma função é contínua num intervalo do qual fazem parte os pontos a e b, então o valor da função passa pelo menos uma vez por cada um dos pontos entre f(a) e f(b). Essa propriedade das funções contínuas é conhecida como Teorema do Valor Intermediário.

Teorema do Valor Intermediário: Seja f uma função contínua num intervalo do qual fazem parte os pontos a e b. Então, para qualquer r entre f(a) e f(b), existe um número c entre a e b tal que f(c) = r.

A figura a seguir ilustra este teorema. Observe que existem os valores c, c' e c'' tais que f(c) = f(c') = f(c'') = r.



3.2. Limites Laterais

Quando uma função é descontínua num ponto x_0, é possível que ela apresente limites diferentes conforme x se aproxima de x_0 pela esquerda (por valores estritamente menores do que x_0) ou pela direita (por valores estritamente maiores do que x_0). A notação $x \to x_0^-$ indica que x se aproxima de x_0 pela esquerda. Analogamente, a notação $x \to x_0^+$ indica que x se aproxima de x_0 pela direita.

O limite de uma função quando $x \to x_0^-$ é chamado de limite à esquerda de x_0, e é denotado por $\lim_{x \to x_0-} f(x)$. Quando $x \to x_0^+$, chamamos de limite à direita de x_0, e denotamos por $\lim_{x \to x_0+} f(x)$.

Por exemplo, seja $f(x) = \frac{|3x|}{x}$. É fácil perceber que $f(x) = -3$, para todo $x < 0$, e $f(x) = 3$, para todo $x > 0$. Sendo assim, $\lim_{x \to 0-} f(x) = -3$ e $\lim_{x \to 0+} f(x) = 3$.

Pode acontecer que num determinado ponto, uma função tenha apenas um ou mesmo nenhum limite lateral. Por exemplo, vamos analisar a função $g(x) = \sqrt{x-5}$. Tal função só está definida para $x \geq 5$. Observe que enquanto que não existe. Note ainda que não existem os limites laterais para $x \to 4+$ e $x \to 4-$.

3.3. Limites Infinitos e Limites no Infinito

Em alguns casos, o limite de uma função num determinado ponto pode ser – ou +. Por exemplo, seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Quando $x \to 0+$, o denominador permanece sempre positivo e o valor de f cresce, tornando-se maior do que qualquer número. Assim, $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$. Se $x \to 0-$, o denominador permanece sempre negativo e o valor de f diminui, tornando-se menor do que qualquer número. Portanto, $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$.

Podemos também calcular o limite de uma função quando seu argumento tende para – ou +. Vejamos um exemplo. Considere a função $g(x) = \frac{1}{x^2} + 3$. Quando x → – ou x → – , a fração tende a zero. Sendo assim, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 3$.

Praticando

1. Calcule os limites indicados a seguir.

a) $\lim_{x\to 2}(x^3 - 2x + 4)$

b) $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

c) $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1} + 4\right)$

4. Derivada de uma Função

No início desse capítulo, vimos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto a é dado pelo limite da razão incremental da função no ponto a quando h tende a zero. Se denotarmos por m o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto a, temos que:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Percebemos que m é função de a. Tal função é chamada de derivada da função f é denotada por f' (lê-se "derivada da função f") ou (lê-se "derivada da função f em relação a x"). Formalmente:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como exemplo, vamos calcular a derivada da função f(x) = x^2 + 5.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 5 - (x^2 + 5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 5 - x^2 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$

Fazendo x' = x + h, temos que h = x' – x. Observe que fazer h tender a zero equivale a fazer x' tender a x. Podemos então definir a derivada da seguinte maneira:

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

Vamos calcular outra derivada usando esta definição de derivada. Seja $g(x) = \sqrt{x}$. Observe que esta função está definida apenas para x ≥ 0.

$$g'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} = \lim_{x' \to x} \frac{\sqrt{x'} - \sqrt{x}}{x' - x} = \lim_{x' \to x} \frac{\sqrt{x'} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x'} + \sqrt{x})(\sqrt{x'} - \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x' \to x} \frac{1}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que g' não está definida para x = 0. Isso nos leva ao conceito de derivada lateral.

4.1. Derivada Lateral

No cálculo do limite da razão incremental, podemos fazer h tender a zero pela esquerda ou, equivalentemente, fazer x' tender a x por valores menores do que x. Neste caso temos a derivada à esquerda:

$$f'(x-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ou \quad f'(x-) = \lim_{x' \to x-} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

Se fizermos h tender a zero pela direita ou x' tender a x por valores maiores do que x, teremos a derivada à direita:

$$f'(x+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ou \quad f'(x+) = \lim_{x' \to x+} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

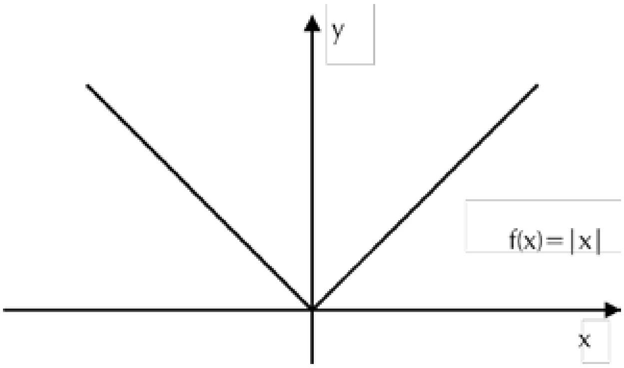
Considere a função f(x) = |x|. Observe que a derivada à esquerda de f no ponto x = 0 é:

$$f'(0-) = \lim_{x' \to x-} \frac{f(x') - f(0)}{x' - 0} = \lim_{x' \to x-} \frac{|x'|}{x'} = -1$$

Já a derivada à direita de f no ponto x = 0 é:

$$f'(0+) = \lim_{x' \to x+} \frac{f(x') - f(0)}{x' - 0} = \lim_{x' \to x+} \frac{|x'|}{x'} = 1$$

Essas derivadas laterais estão de acordo com o gráfico da função f que apresentamos a seguir. Observe que no ponto x = 0, o gráfico possui duas retas tangentes. Dizemos que uma função é derivável num ponto x se as derivadas laterais no ponto x existem e são iguais. A função f(x) = |x| não é derivável no ponto x = 0, pois suas derivadas laterais neste ponto são distintas.



Quando as derivadas laterais num determinado ponto existem, mas são distintas, dizemos que esse ponto é um ponto anguloso do gráfico da função. Como vemos no gráfico, o ponto x = 0 do gráfico da função f(x) = |x| é anguloso.

Vamos analisar novamente a função $g(x) = \sqrt{x}$. Observe que g não possui derivada à esquerda no ponto x = 0, pois a função não está definida para valores menores do que 0. Sendo assim, g não é derivável em x = 0.

Praticando

1. Calcule as derivadas de cada uma das funções a seguir usando o limite da razão incremental.

a) $f(x) = 2x^4 - 6$

b) $f(x) = x^2/2 - x$

c) $f(x) = 2/x^4$

d) $f(x) = x^3/(x + 5)$

2. Calcule as derivadas laterais das funções a seguir nos pontos indicados.

a) $f(x) = 3|x + 5|$, em x = – 5.

b) $f(x) = |x - 2|(x - 4)$, em x = 2.

c) $f(x) = \begin{cases} -3x & se\ x \leq 2 \\ 2x - 4 & se\ x > 2 \end{cases}$ em x = 2.

d) $f(x) = \begin{cases} -4(x+2)^3 & se\ x \leq 1 \\ \frac{4}{3}(x-5)^2 & se\ x > 1 \end{cases}$ em x = 1.

4.2. Regras de Derivação

Veremos agora algumas regras de derivação que permitem obter com facilidade a derivada de uma grande variedade de funções.

4.2.1. Derivada de uma Potência

Para calcular a derivada da função x^n, onde n é um número inteiro positivo, vamos utilizar o Binômio de Newton, que abordamos no capítulo 2. Vimos que:

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 h^n$$

Sendo assim, a razão incremental da função é:

$$= \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 h^{n-2} + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}$$

$$= \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 h^{n-2} + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}$$

Observe que quando h tende a zero, todos os termos da razão incremental também tendem a zero, com exceção do primeiro. Dessa forma, usando a fórmula da derivada, temos:

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Em nossa análise, consideramos que n era um número natural, para que pudéssemos utilizar o Binômio de Newton. No entanto, é possível mostrar que esta identidade também vale para todo n real. Por exemplo, vimos anteriormente que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Aplicando a regra da potência, chegamos à mesma conclusão:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4.2.2. Derivada de uma Soma

Vejamos agora como calcular a derivada de uma função composta de uma soma de termos. Podemos considerar cada termo como sendo uma função, de modo que tal função é da forma $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$. Observe que a razão incremental é:

$$\frac{[f_1(x+h)+f_2(x+h)+\cdots+f_n(x+h)]-[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]}{h}$$

Dessa forma, quando h tende a zero, a razão incremental tende para:

$$f_1{}'+f_2{}'+\cdots+f_n{}'$$

Assim, $(f_1+f_2+\cdots+f_n)'=f_1{}'+f_2{}'+\cdots+f_n{}'$

4.2.3. Derivada de um Produto

Para calcular a derivada do produto de duas funções deriváveis f e g, devemos observar que:

$$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]$$

Dessa forma, a razão incremental da função f(x)g(x) é:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Quando $x \to 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tende para f', g(x + h) tende para g(x) e $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ tende para g'. Logo,

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

4.2.4. Derivada de um Produto por uma Constante

É fácil perceber que a derivada de uma função constante é 0. Seja c uma constante. Observe que, se f(x) = c então f(x + h) = c. Sendo assim,

$$f'(x) = c' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$$

Aplicando a regra do produto, a derivada da função cf(x) é:

$$[cf(x)]' = c'f(x) + cf'(x) = 0f(x) + cf'(x) = cf'(x)$$

4.2.5. Derivada de um Quociente

Utilizando a regra do produto podemos deduzir uma regra para calcular a derivada do quociente de duas funções. Sejam f e g duas funções deriváveis e $h = \frac{f}{g}$. Note que f = gh e, portanto, pela regra do produto, f' = g'h + gh'. Assim, a derivada de h num ponto x tal que g(x) ≠ 0 é:

$$h' = \frac{f' - g'h}{g} = \frac{f' - g'\frac{f}{g}}{g}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador dessa fração por g temos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Para exemplificar as regras aqui apresentadas, vamos calcular a derivada da seguinte função, indicando a regra de derivação utilizada em cada passagem.

$$\left[\frac{(x^3-2x^2)}{x\sqrt{x}}\right]' = \frac{(x^3-2x^2)'x\sqrt{x} - (x^3-2x^2)(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2}\ (quociente)$$

$$= \frac{[(x^3)' - (2x^2)']x\sqrt{x} - (x^3-2x^2)(x\sqrt{x})'}{x^3}\ (soma)$$

$$= \frac{[(x^3)' - 2(x^2)']x\sqrt{x} - (x^3-2x^2)(x\sqrt{x})'}{x^3}\ (produto\ por\ constante)$$

$$= \frac{[(x^3)' - 2(x^2)']x\sqrt{x} - (x^3-2x^2)[x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})']}{x^3}\ (produto)$$

$$= \frac{[3x^2 - 2(2x)]x\sqrt{x} - (x^3-2x^2)[\sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}}]}{x^3}\ (potência)$$

$$= \frac{3x^3\sqrt{x} - 4x^2\sqrt{x} - x^3\sqrt{x} + 2x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^3\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x^3\sqrt{x} - x^2\sqrt{x}}{x^3} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Atividades de avaliação

1. Calcule as derivadas de cada uma das funções a seguir usando as regras de derivação apresentadas nesta unidade.

a) $f(x) = 2x^3 - 4$

b) $f(x) = x^3/3 - x^2$

c) $f(x) = 2/x^4$

d) $f(x) = x^4/(x + 8)$

Síntese do capítulo

Vimos que para obter o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto P = (a, f(a)) devemos calcular a razão incremental $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ com h tendendo a zero.

Definimos o limite de uma função f num ponto c, denotado por como $\lim_{x \to c} f(x)$, sendo o valor para o qual tende a função f à medida que x se aproxima de c. Se $\lim_{x \to c} f(x)$, dizemos que f é contínua no ponto c. O Teorema do Valor Intermediário estabelece que se f é contínua num intervalo do qual fazem parte os pontos a e b, então, para qualquer r entre f(a) e f(b), existe um número c entre a e b tal que f(c) = r.

Se x aproxima-se de c por valores menores do que c, o valor para o qual f tende é chamado de limite de f à esquerda de c, e é denotado por $\lim_{x \to c-} f(x)$. Quando x aproxima-se de c por valores maiores do que c, o valor para o qual f tende é chamado de limite de f à direta de c, e é denotado por $\lim_{x \to c+} f(x)$. Tais limites são chamados de limites laterais.

A derivada de uma função f, denotada por f'(x), é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f. Mais precisamente, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Se usarmos os limites laterais, obtemos as derivadas laterais. Uma função é derivável num ponto se as derivadas laterais nesse ponto existem e são iguais. Apresentamos as seguintes regras de derivação:

Potência: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Soma: $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = f_1' + f_2' + \ldots f_n'$

Produto: $(fg)' = f'g + fg'$

Produto por constante: $(cf)' = cf'$

Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Leituras, filmes e sites

Limites na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Limites

Mais regras de derivação

http://www.estig.ipbeja.pt/~cmmmp/matII-gest/FORMULARIO_MatII.pdf

Derivada na Wikipédia

http://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada

Referências

ANTON, H. **Cálculo, Um Novo Horizonte** - Vol. 2, 6ª edição, Editora Bookman, 2000.

ÁVILA, G. **Cálculo I**, LTC, 1994.

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**, LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, Harbra, 1994.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**, 6ª edição. MIR, 1983.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria Analítica**, McGraw-Hill, 1987.

SPIVAK, M. **Calculus**, 3ª edição. Publish or Perish, 1994.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, Makron Books do Brasil Editora, São Paulo.

THOMAS, G. B. **Cálculo - vol. 1**, Addison Wesley, 2002.

Sobre o autor

Glauber Ferreira Cintra: Possui graduação em Ciência da Computação pela Universidade Estadual do Ceará, mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo e doutorado em Ciência da Computação pela Universidade de São Paulo. Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnológia do Ceará, professor da Faculdade 7 de Setembro e professor substituto da Universidade Estadual do Ceará. Tem experiência na área de ciência da computação, com ênfase em otimização combinatória, atuando principalmente nos seguintes temas: problemas de corte e empacotamento, geração de colunas, algoritmos de aproximação e programação matemática.

Computação

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78264-44-4

Universidade Estadual do Ceará

UAB Universidade Aberta do Brasil

CAPES