Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio

VITOR VASCONCELOS SILVA

ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos manipuláveis e Digitais.

BELÉM/PA
2026

VITOR VASCONCELOS SILVA

ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos manipuláveis e Digitais.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves; Co-orientador: Prof. Dr.Alan Marcel Fernandes de Souza.

BELÉM/PA
2026

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

S586a Silva, Vitor Vasconcelos
Área e volume de uma esfera: experimentação matemática com recursos manipuláveis e digitais / Vitor Vasconcelos Silva. — Belém, 2026.
146 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Coorientador: Prof. Dr. Alan Marcel Fernandes de Souza
Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática)- Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2026.

1. Volume da esfera. 2. Sequência de atividade. 3. Software geogebra. 4. Sólidos geométricos de revolução. 5. Geometria espacial. I. Título.

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345

VITOR VASCONCELOS SILVA

ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: EXPERIMENTAÇÃO MATEMÁTICA COM RECURSOS MANIPULÁVEIS E DIGITAIS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Data de aprovação: 26/03/2026

Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
FABIO JOSE DA COSTA ALVES
Data: 29/04/2026 21:16:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____________________________________. Orientador
Prof. Dr. FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES
Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA
Data: 16/04/2026 22:07:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____________________________________. Examinador Interno
Profa. Dra. CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA
Doutora em Bio Informática – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
JOSE MESSILDO VIANA NUNES
Data: 10/04/2026 19:13:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____________________________________. Examinador Externo I
Prof. Dr. JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES
Doutor em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica – PUC-SP
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
ALAN MARCEL FERNANDES DE SOUZA
Data: 12/04/2026 19:52:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____________________________________. Examinador Externo II
Prof. Dr. ALAN MARCEL FERNANDES DE SOUZA
Doutor em Computação Aplicada – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

Belém – PA

2026

Dedicatória

À minha mãe, Janete Vasconcelos, e ao meu pai, Raimundo Nonato, por serem minha fonte inabalável de inspiração e dedicação aos estudos.

À minha esposa, Marta Helena, pelo carinho, incentivo e apoio incansável na busca por novas conquistas na minha área profissional.

À minha filha, Kassiane dos Santos, pelo amor, apoio e compreensão que me permitiram chegar até aqui.

Aos amigos que sempre estiveram ao meu lado, oferecendo apoio e orientação em toda a minha trajetória acadêmica.

Agradecimento

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ser a força constante em minha vida, iluminando meu caminho, me concedendo sabedoria, paciência e resiliência para concluir esta jornada. Sem Ele, nada disso seria possível.

Aos meus pais, Janete e Nonato, que sempre valorizaram a educação e acreditaram na sua importância para a formação dos seus filhos. Sua presença e apoio foram fundamentais para esta conquista.

À minha esposa Helena e à minha filha Kassiane, por compreenderem minha ausência, e com muito carinho e suporte, não mediram esforços para tornar este sonho uma realidade.

Ao meu orientador, Professor Fábio Alves, por sua orientação sábia, competência e responsabilidade nas orientações, e por todos os trabalhos que realizamos juntos. Seu apoio foi essencial para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, por compartilharem conhecimentos e experiências que muito contribuíram para meu crescimento profissional.

Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo e pelas trocas de experiências e saberes que enriqueceram esta pesquisa.

E a todos os amigos que, de alguma forma, fizeram parte desta conquista e contribuíram para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

SILVA, Vitor Vasconcelos. **ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos Manipuláveis e Digitais.** Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2026.

RESUMO

Esta pesquisa investigou uma abordagem para o ensino do cálculo da área e do volume da esfera, fundamentada na Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995) que norteou a construção das atividades e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012). Para isso, foi aplicada uma sequência de atividades baseada na resolução de problemas, integrando materiais manipuláveis e recursos digitais, como o software Geogebra. Os conceitos de área e volume da esfera, essenciais no currículo de matemática do ensino médio, foram explorados com o objetivo de favorecer a compreensão geométrica e o desenvolvimento de habilidades espaciais e de visualização. A experimentação foi estruturada em quatro momentos principais: (1) reflexão sobre os elementos que compõem a esfera, por meio da manipulação de objetos físicos; (2) exploração do significado espacial do volume da esfera com apoio de materiais concretos; (3) construção de uma esfera no Geogebra, estimulando a criatividade e a visualização dinâmica; (4) Construção da fórmula do volume da esfera pelos alunos; e (5) Dedução da fórmula da área da superfície da esfera pelos alunos.A análise dos dados foi realizada a partir de uma abordagem qualitativa, considerando as interações dos alunos com os instrumentos de aprendizagem. Foram utilizados registros escritos, áudios e imagens como fontes de evidência. A Teoria dos Registros de Duval (2012), permitiu identificar padrões de comportamento, estratégias de conversão entre registros e níveis de compreensão dos conceitos geométricos abordados durante os tratamentos. Os resultados ofereceram uma visão ampla e detalhada do processo de aprendizagem, evidenciando o papel dos artefatos como mediadores cognitivos e a importância da multiplicidade de representações na construção do conhecimento matemático. Com base nos resultados da pesquisa foi elaborado um produto educacional na forma de livro digital que está disponível em https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/180348 para livre acesso.

Palavras-chave: Volume da esfera; Sequência de atividade; Software Geogebra; Sólidos Geométricos de Revolução; Geometria Espacial.

SILVA, Vitor Vasconcelos. AREA AND VOLUME OF A SPHERE: Mathematical Experimentation with Manipulatives and Digital Resources. Master's Dissertation of the Postgraduate Program in Mathematics Teaching - State University of Pará, Belém, 2026.

ABSTRACT

This research investigated an approach to teaching the calculation of the area and volume of a sphere, based on Rabardel's (1995) Instrumentation Theory, which guided the construction of the activities, and Duval's (2012) Theory of Semiotic Representation Registers. To this end, a sequence of problem-solving activities was applied, integrating manipulable materials and digital resources, such as the GeoGebra software. The concepts of area and volume of a sphere, essential in the high school mathematics curriculum, were explored with the aim of promoting geometric understanding and the development of spatial and visualization skills. The experimentation was structured in four main stages: (1) reflection on the elements that compose the sphere, through the manipulation of physical objects; (2) exploration of the spatial meaning of the sphere's volume with the support of concrete materials; (3) construction of a sphere in GeoGebra, stimulating creativity and dynamic visualization; (4) construction of the formula for the volume of a sphere by the students; and (5) deduction of the formula for the surface area of the sphere by the students. The data analysis was conducted using a qualitative approach, considering the students' interactions with the learning tools. Written records, audio, and images were used as sources of evidence. Duval's (2012) Theory of Registers allowed for the identification of behavioral patterns, conversion strategies between registers, and levels of understanding of the geometric concepts addressed during the treatments. The results offered a broad and detailed view of the learning process, highlighting the role of artifacts as cognitive mediators and the importance of the multiplicity of representations in the construction of mathematical knowledge. Based on the research results, an educational product in the form of a digital book was developed and is available for free access at https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/180348

Keywords: Volume of the sphere; Activity sequence; Geogebra software; Geometric Solids of Revolution; Spatial Geometry.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Equações

Capítulo 1 - INTRODUÇÃO

Jean Piaget (1969), renomado psicólogo suíço, destacou em suas teorias sobre o desenvolvimento cognitivo a importância essencial do ensino de geometria na formação do pensamento lógico, espacial e crítico dos estudantes. Nesse sentido, a geometria desempenha um papel fundamental na formação integral do indivíduo, contribuindo para o desenvolvimento de capacidades cognitivas que extrapolam o campo matemático. Dentre os diversos conceitos geométricos abordados no ensino médio, o volume da esfera se destaca por sua aplicabilidade em múltiplas áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, Medicina, Biologia, Geografia, Geologia, Astronomia, Ecologia e Ciências Ambientais.

Apesar de sua relevância, o ensino da geometria espacial nas escolas ainda é marcado por práticas pedagógicas tradicionais, centradas na exposição teórica e na aplicação mecânica de fórmulas. Como apontam Bissolotti e Titon (2022) e Neitzel (2023), muitos estudantes têm acesso ao conteúdo apenas por meio da lousa e do livro didático, o que limita a construção de significados e favorece uma postura passiva diante do conhecimento. Essa abordagem, alicerçada na autoridade do professor e na transmissão unidirecional de informações, dificulta a compreensão de conceitos tridimensionais, como o volume da esfera, cuja abstração exige habilidades de visualização espacial e raciocínio algébrico.

A lacuna identificada na literatura, onde a maioria das pesquisas sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de geometria se concentra em conceitos gerais, sugere a importância de investigar sua aplicação, que nesta pesquisa teve como prioridade o desenvolvimento da compreensão de área e volume da esfera. Essa falta de aprofundamento é particularmente relevante considerando as dificuldades já bem documentadas no aprendizado desses conceitos tridimensionais, frequentemente abordados de maneira abstrata.

A experimentação realizada nesta pesquisa evidenciou que tais dificuldades, conforme apontado por Borsoi (2016 apud GABRIEL, 2023) e Chaquiam et al. (2020), estão fortemente associadas à ausência de práticas investigativas e ao distanciamento entre os conteúdos geométricos e a realidade dos alunos. Marques (2019) reforça que o ensino da geometria espacial, quando desvinculado da manipulação de sólidos e da resolução de problemas contextualizados, pouco contribui para o desenvolvimento da autonomia e da compreensão conceitual. Como podemos ver em seus registros.

> tais dificuldades podem estar associadas a forma pela qual vem se dando o ensino de geometria espacial nas escolas, sendo que, no geral, os tópicos são trabalhados de forma desvinculada da realidade do aluno, com ênfase sobre a aplicação de fórmulas aplicadas a figuras estáticas, não oferecendo ao aluno a possibilidade de experimentação e manipulação dos sólidos geométricos, pouco favorecendo a investigação matemática e a autonomia na resolução de problemas. (MARQUES, 2019, p. 13)

Diante desse cenário, esta pesquisa investigou uma abordagem alternativa para o ensino da área da superfície e do volume da esfera, fundamentada na Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012). A proposta foi desenvolvida por meio de uma sequência de atividades baseadas na resolução de problemas, integrando materiais manipuláveis e recursos digitais, como o software Geogebra. A experimentação foi realizada com estudantes do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém do Pará e estruturada em cinco momentos principais: (1) reflexão sobre os elementos que compõem a esfera, por meio da manipulação de objetos físicos; (2) exploração do significado espacial do volume da esfera com apoio de materiais concretos; (3) construção da fórmula do volume da esfera pelos alunos; (4) construção de uma esfera no Geogebra, estimulando a criatividade e a visualização dinâmica e (5) dedução da fórmula da área da superfície da esfera a partir das experiências vivenciadas.

A análise dos dados é conduzida sob uma abordagem qualitativa, centrada nas interações dos estudantes com os instrumentos de aprendizagem propostos. Como fontes de evidência, utilizam-se registros escritos, áudios e imagens coletados durante as atividades. A interpretação fundamenta-se nos referenciais teóricos adotados, buscando identificar padrões de comportamento, estratégias de conversão entre registros de representação e os níveis de compreensão dos conceitos geométricos. Pretende-se, com isso, investigar o papel dos artefatos como mediadores cognitivos e a relevância da multiplicidade de representações no ensino da Geometria Espacial.

Diante da complexidade inerente ao estudo da Geometria Espacial, este trabalho justifica-se pela busca de estratégias que atenuem as dificuldades de abstração e representação mental. A utilização do software Geogebra surge como uma alternativa metodológica capaz de mediar a relação entre o aluno e os conceitos de área e volume da esfera. A intenção central é promover uma transição da abordagem tradicional para uma perspectiva exploratória, na qual a interatividade atue como facilitadora da compreensão teórica e o discente assuma uma postura autônoma diante da construção do seu saber.

Para Lorenzato (2010 apud NEITZEL, 2023, p. 11)a aprendizagem é mais significativa quando o aluno é protagonista do processo de descoberta, valorizando a experimentação e a investigação em detrimento de procedimentos mecanizados. Dessa forma, esta pesquisa buscou contribuir para o avanço do conhecimento na área, oferecendo subsídios para práticas de ensino que superem a abordagem tradicional e favoreçam uma compreensão mais profunda e intuitiva desses conceitos geométricos fundamentais.

Conforme apontado por Chaquiam (2020 apud GABRIEL, 2023, p. 14), no contexto do ensino e aprendizagem da geometria espacial, observou-se que muitos alunos enfrentam dificuldades na visualização do espaço tridimensional, como evidencia a seguinte passagem:

> [...] a aprendizagem da matemática no ensino médio não deve estar ligada somente a um conjunto de regras, fórmulas e técnicas, mas deve permitir o desenvolvimento de competência crítica para utilizar esse conhecimento de forma responsável e consciente, a serviço das diferentes práticas sociais, espera-se que os conhecimentos obtidos pelos participantes dessa pesquisa possa alicerçar a continuidade de seus estudos em níveis mais elevados de desenvolvimento conceitual. (GABRIEL, 2023, p.107)

Durante o processo investigativo, foram selecionados e analisados 27 trabalhos, os quais evidenciaram os desafios enfrentados no campo educacional para o desenvolvimento de atividades práticas voltadas ao ensino da geometria. Esses estudos propuseram diversas estratégias, destacando-se aquelas que envolvem a manipulação de objetos esféricos e a construção de modelos didáticos com potencial para aprimorar a compreensão dos estudantes sobre o conceito de volume.

Entre os trabalhos analisados, destacam-se os estudos de Ávila (2022), Moraes e Cardoso (2020) e Marques (2019), que contribuíram significativamente para a reflexão sobre práticas pedagógicas inovadoras. Merece também destaque a pesquisa de Gabriel (2023), que apresentou uma abordagem diferenciada ao explorar a aprendizagem em ambientes alternativos, evidenciando novas possibilidades para o ensino da geometria espacial:

> um fator considerado importante foi à mudança de ambiente: a saída da sala de aula tradicional para outro ambiente – biblioteca e laboratório de informática – pode ter motivado os alunos a empregar esforço cognitivo para favorecer a aprendizagem significativa. O simples fato de poder trabalhar em mesas adequadas para grupos de estudo, a quantidade de material disponível para cada mesa e o modo como o material da sequência didática foi trabalhado compuseram uma situação um tanto diferenciada das aulas que são ministradas na escola. (GABRIEL, 2023, p. 111)

Marques (2019) enfatizou a importância da busca pela compreensão e autonomia dos alunos na procura por soluções de problemas relacionados ao volume de uma esfera. Esse tipo de estudo mostrou uma proposta para o ensino e a aprendizagem desse objeto matemático, de maneira que o ensino possa ocorrer por meio de análises e inferências por parte do aluno. Isso vai além de uma simples substituição de valores em uma fórmula matemática, contando com o auxílio da tecnologia para que o aluno consiga criar e interpretar seus próprios resultados.

> a resolução de questões do livro didático ou a lista elaborada pelo professor; os problemas apresentam uma única resposta e são resolvidos por meio de algoritmos trabalhados em outras questões apresentadas como exemplo. Neste contexto, o aluno pouco desenvolve o seu senso crítico e a autonomia, e não se desenvolve a capacidade de lidar com erros durante o processo de aprendizagem. (MARQUES, 2029, p. 51)

Nessa perspectiva, foi realizada uma experimentação com o objetivo de proporcionar aos alunos oportunidades de interação com materiais manipuláveis, articulando recursos concretos e digitais na construção de conceitos geométricos. Para tanto, utilizou-se o Geogebra como ferramenta digital, de forma planejada e intencional, visando favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Essa abordagem está alinhada às diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que reconhecem e incentivam o uso de tecnologias educacionais como meios para enriquecer as práticas pedagógicas e ampliar as possibilidades de aprendizagem:

> é um instrumento capaz de aumentar a motivação dos alunos, se a sua utilização estiver inserida num ambiente de aprendizagem desafiador. Não é por si só um elemento motivador. Se a proposta de trabalho não for interessante os alunos rapidamente perdem a motivação. (BRASIL, 1997, p. 57).

Sob essa ótica, a motivação mencionada pelo documento oficial é fomentada quando o aluno deixa de ser um espectador passivo de fórmulas prontas e passa a atuar como protagonista na construção do conhecimento. No caso específico do cálculo volumétrico, a criação de um ambiente de aprendizagem dinâmico exige propostas que estimulem a experimentação e a visualização. Ao manipular objetos reais e confrontar seus achados com a simulação digital, o estudante encontra o desafio necessário para manter o engajamento, permitindo que a tecnologia e o material concreto atuem, de fato, como instrumentos de potencialização cognitiva e não apenas como suportes ilustrativos.

A pesquisa fundamenta-se na necessidade de investigar abordagens inovadoras para o ensino de Geometria, visando promover o desenvolvimento de habilidades essenciais à formação cidadã. Ao explorar o potencial do Geogebra, a proposta orienta-se pela mitigação de obstáculos cognitivos no processo de ensino e aprendizagem, proporcionando um ambiente no qual o discente participe ativamente da construção de conceitos relativos aos cálculos de área e volume da esfera.

No delineamento da sequência de atividades, o uso do Geogebra é compreendido como um elemento que dinamiza a aprendizagem. O recurso é empregado com o intuito de promover a exploração interativa de propriedades geométricas, fomentando o senso crítico do estudante. Nesse sentido, a manipulação digital voltada aos elementos da esfera visa subsidiar uma compreensão articulada dos cálculos de área e volume, permitindo que o protagonismo discente seja o eixo central da assimilação desses conceitos.

Diante desse cenário, a investigação buscou responder ao seguinte problema: *de que maneira a aplicação de uma sequência de atividades fundamentada na teoria da instrumentação, aliada ao uso do Geogebra e de materiais manipuláveis, pode contribuir para a aprendizagem dos cálculos de área e volume da esfera?*

Para responder a esse questionamento, estabeleceu-se como objetivo investigar como a articulação entre esses recursos promove a construção do conhecimento. Nesse processo, a teoria da instrumentação norteou a concepção e a aplicação da sequência didática, focando na transformação dos artefatos em instrumentos mediadores, enquanto a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) fundamentou a análise da aprendizagem, permitindo mensurar a capacidade dos alunos em converter e tratar as diferentes representações do objeto matemático.

O estudo busca analisar como as atividades propostas contribuem para a percepção espacial e para a construção de representações mentais dos estudantes. Para detalhar as etapas necessárias ao atendimento do problema de pesquisa, definiram-se como objetivos específicos:

01-Investigar qualitativamente os processos de aprendizagem, buscando identificar os indícios de desenvolvimento dapercepção espacial do aluno ao longo da aplicação da sequência de atividade.
02-Explorar as percepções dos alunos sobre o uso do Geogebra e seu impacto na aprendizagem de geometria, especificamente no estudo de área e volume da esfera.
03-Identificar as melhorias no desempenho dos alunos em tarefas de cálculo de área e volume de esferas ao utilizar ferramentas de geometria dinâmica.
04-Analisar a eficácia do ambiente de geometria dinâmica Geogebra na compreensão dos conceitos de área e volume de esferas por parte dos alunos.

Capítulo 2 - REVISÃO DA LITERATURA

A partir de estudos relacionados ao ensino de Geometria Espacial, com ênfase na solução de problemas na aprendizagem do Cálculo do Volume da Esfera, observamos uma grande mobilização para trazer a chamada matemática cotidiana para a realidade do aluno. O objetivo é fazer com que o aluno perceba a matemática presente em seu dia a dia

A busca pela compreensão e autonomia que o aluno deve alcançar em seus estudos foi verificada em diversos trabalhos. Esses estudos comprovam nossa inquietação quanto à habilidade adquirida pelos alunos ao se depararem com problemas que envolvem o raciocínio necessário para o cálculo do volume de uma esfera. A aprendizagem não se dá apenas pela substituição de valores em uma fórmula, mas também pela análise e inferências sobre a estrutura do problema em questão.

Este capítulo apresenta um estado do conhecimento acerca dos Sólidos Geométricos de Revolução, priorizando o cálculo do volume da esfera. Para tanto, procedeu-se a um levantamento de teses e dissertações publicadas no intervalo de 2012 a 2025. A busca, realizada em 29 de julho de 2025, abrangeu o Portal de Periódicos da CAPES, o Google Acadêmico e repositórios institucionais de Pós-Graduação, adotando como critério de inclusão programas avaliados com notas de excelência pela CAPES e que possuíam aderência à área de Ensino de Matemática. A estratégia de busca foi estruturada de forma piramidal; partindo do termo macro “Geometria Espacial”, o universo de resultados foi refinado por meio de descritores específicos como “Sólidos Geométricos de Revolução”, “Software Geogebra”, “Sequência de atividades” e “Volume da Esfera”. O critério de seleção definitivo ancorou-se na análise minuciosa de títulos e resumos, garantindo o alinhamento teórico e metodológico com a presente pesquisa.

Posteriormente, foram selecionados, dentre esses trabalhos, aqueles que se referiam a Sólidos Geométricos de Revolução ou a métodos diferenciados de ensino de Geometria Espacial com ênfase no volume dos sólidos, para possível adequação ao Volume da Esfera, que é o objeto de pesquisa deste trabalho. Ao observar trabalhos direcionados ao Ensino Fundamental, constatou-se que possuíam estratégias significativas que poderiam ser adaptadas ao Ensino Médio.

Na busca realizada, foram encontrados trinta e dois trabalhos alinhados às perspectivas deste estudo, sendo uma tese e trinta e uma dissertações, todos relacionados ao ensino de Geometria Espacial. Os estudos destacam métodos diferenciados para o Ensino de Sólidos de Revolução, visando um melhor entendimento do tema pelos alunos.

No Quadro 1 abaixo estão representados o ano de publicação, o tipo, o título e o autor da obra que tiveram seus estudos baseados no ensino de Geometria Espacial, com direcionamento ao cálculo do volume dos sólidos de revolução. Foram considerados também, alguns trabalhos que por meio de métodos inovadores mostraram que é possível o ensino da geometria espacial por meios mais dinâmicos e agradáveis ao aluno.

Quadro 1 - Trabalhos encontrados no período de 2012 - 2025

AUTOR ANO	**TIPO**	**TÍTULO**	**INSTITUIÇÃO**
Silva (2024)	Dissertação	Descobrindo a Geometria Esférica com Anselmo	UFPB/PB
Silva (2023)	Dissertação	Realidade aumentada na perspectiva da metodologia de gamificação para o aprendizado de volume de sólidos geométricos	UFAL/AL
Santos (2023)	Dissertação	Sólidos Geométricos: uma abordagem histórica, conceitual e aplicada sobre volumes	UFS/ SE

Neitzel (2023)	Dissertação	Experimentação, tecnologias digitais e o teorema de pappus-guldin: uma proposta pedagógica para o ensino de sólidos de revolução	UNIVATES/RS
Gabriel (2023)	Dissertação	Aprendizagem significativa da geometria espacial: análise de uma sequência didática para o ensino médio	UFU/MG
Costa (2022)	Dissertação	Realidade Aumentada: uma proposta de sequência didática para o ensino de geometria espacial no ensino médio	UNICSUL/SP
Maciel (2022)	Dissertação	A visualidade na resolução de problemas em geometria no ensino médio	UFPel/RS
Ávila (2022)	Tese	A formação do conceito de Cálculo de Volume em uma proposta de atividade na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov	PUC/GO
Pinheiro (2022)	Dissertação	Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos Corpos Redondos: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brosseau	UFSM/RS
Soares (2022a)	Dissertação	As contribuições da Realidade Aumentada mediada pela metodologia Sequência Fedathi para a aprendizagem de Geometria Espacial	UFPa/PA
Soares (2022b)	Dissertação	Sala de aula invertida no ensino de geometria: contributos para práticas de educação ambiental	UERN/RN
Paiva (2021)	Dissertação	A conceituação do pensamento geométrico: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil	UNESP/PA
Santos (2021)	Dissertação	Ensino de pirâmides no ensino médio: Uma sequência didática apoiada na	UTFPR/PR

		teoria de Registro de Representação Semiótica	
Paula (2021)	Dissertação	Geometria Espacial: a aprendizagem através de diferentes recursos didáticos	UFRRJ/RJ
Merlim (2020)	Dissertação	Modelagem Matemática no Ensino Médio: um panorama de estudos e suas contribuições	UNIVÁS/MG
Moraes (2020)	Dissertação	Cálculo de Volume de Prismas através de atividades práticas e intuitivas	UFPA/PA
Tourão (2020)	Dissertação	Ensino de esfera por meio de applets do software Geogebra	UEPA/PA
Cardoso (2020)	Dissertação	Centroides, teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução: uma proposta para futuros professores do ensino médio.	UFOP/MG
Garcia (2020)	Dissertação	O estudo da Geometria Espacial motivado pela Cristalografia.	UFSC/SC
Freire (2019)	Dissertação	Etnomatemática: o saber-fazer dos cisterneiros do semiárido brasileiro e suas contribuições para o ensino-aprendizagem da matemática escolar.	UERN/RN
Marques (2019)	Dissertação	Ensino de Esfera por Meio de Applets do Software Geogebra.	UEPA/PA
Ribeiro (2019)	Dissertação	Estudos de sólidos geométricos e suas representações planas e espaciais por meio de materiais manipulativos para o 6º ano	UFMG/MG
Rodrigues (2019)	Dissertação	O uso do geogebra 3D, versão para smartphone, no processo ensino aprendizagem de geometria espacial	UFAL/AL
Penha (2019)	Dissertação	Geometria Espacial no Ensino Médio: aspectos socioculturais, resolução de problemas e o uso de materiais	USP/SP

		manipuláveis	
Morcanas (2019)	Dissertação	O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros	UERJ/RJ
Cimadon (2019)	Dissertação	Geometria Espacial e educação infantil: possibilidades para o ensino a partir de uma proposta etnomatemática.	UNIVATES/RS
Boito (2018)	Dissertação	Minecraft: um aliado no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial	UPF/RS
Moraes (2018)	Dissertação	O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades	UEPA/PA
Santos (2015)	Dissertação	A utilização de materiais concretos para o ensino de Geometria Plana e Espacial: um estudo de caso	UNIVASF/BA
Nascimento (2013)	Dissertação	O estudo da Geometria Espacial por meio da construção de sólidos com materiais alternativos	UNIVATES/RS
Mattei (2012)	Dissertação	A Modelagem como ferramenta para a construção de conhecimentos matemáticos.	UNIVATES/RS
Santos (2012)	Dissertação	O ensino de volume de sólidos por atividades.	UEPA/PA

Fonte**:** O autor, 2026.

Este capítulo tem como objetivo apresentar e discutir os resultados obtidos a partir da análise de uma tese e de dissertações selecionadas entre diversos trabalhos acadêmicos voltados ao ensino da geometria espacial, com ênfase no volume da esfera, defendidos entre os anos de 2012 e julho de 2025. A partir da seleção criteriosa desses trabalhos, buscou-se identificar metodologias, estratégias didáticas, recursos utilizados e os impactos observados na aprendizagem dos alunos.

A análise individual de cada pesquisa possibilitou identificar as contribuições específicas de cada autor, bem como traçar um panorama geral sobre as tendências, desafios e avanços no ensino desse conteúdo geométrico. Ao reunir essas evidências, este capítulo visa oferecer subsídios teóricos e práticos que possam enriquecer futuras propostas pedagógicas voltadas ao ensino significativo do volume da esfera. Durante o ano de 2025, até o término dessa pesquisa, não foram encontrados teses e nem dissertações que tratem do ensino do volume da esfera para o ensino médio.

A pesquisa de Silva (2024) teve como objetivo tornar acessível a compreensão da geometria esférica, uma área considerada complexa, para estudantes do ensino médio e graduandos das ciências exatas. O trabalho articulou conceitos fundamentais da geometria esférica com a narrativa do quadrinho “As Aventuras de Anselmo Curioso”, escrito pelo cientista francês Jean-Pierre Petit. Essa abordagem interdisciplinar buscou aproximar os alunos de conteúdos abstratos por meio de uma linguagem lúdica e contextualizada, favorecendo o engajamento e a motivação no processo de aprendizagem.

Além disso, o trabalho de Silva (2024) evidenciou como o uso de recursos narrativos e visuais pode contribuir para a transição entre diferentes registros de representação matemática, ampliando a compreensão conceitual e promovendo aprendizagens significativas. A dissertação de Silva (2024) destacou que a combinação entre materiais didáticos inovadores e fundamentação teórica sólida possibilita não apenas a assimilação de conteúdos geométricos, mas também o desenvolvimento de competências reflexivas e críticas nos estudantes. Dessa forma, o trabalho reafirma o potencial pedagógico da integração entre literatura científica, recursos visuais e ensino formal da matemática.

O trabalho de Silva (2023) investigou o uso da realidade aumentada integrada à metodologia de gamificação como estratégia didática para o ensino do volume de sólidos geométricos no Ensino Médio. A proposta parte da premissa de que o uso de tecnologias digitais pode tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, interativo e significativo, especialmente em conteúdos abstratos como os da geometria espacial. O estudo envolveu o desenvolvimento e a aplicação de um objeto de aprendizagem que combina elementos lúdicos com visualizações tridimensionais, permitindo aos alunos explorar, manipular e compreender os sólidos de forma mais concreta.

Os resultados da pesquisa de Silva (2023) apontaram que a combinação entre realidade aumentada e gamificação contribuiu para o aumento do engajamento dos estudantes, favorecendo a construção do conhecimento geométrico de maneira mais autônoma e participativa. De acordo com Silva (2023), os alunos demonstraram maior facilidade em compreender os conceitos de volume e em aplicar as fórmulas associadas aos diferentes sólidos. A pesquisa de Silva (2023), concluiu que metodologias ativas apoiadas por recursos tecnológicos têm potencial para transformar a prática pedagógica tradicional, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e alinhada às demandas contemporâneas da educação matemática.

A dissertação de Santos (2023) explorou a dedução do volume da esfera (e outros sólidos) através do Princípio de Cavalieri e do método de exaustão, contrastando com a simples memorização de fórmulas. Propôs uma sequência didática que conecta a história da geometria com aplicações práticas. Este trabalho teve como foco o ensino do conceito de volume dos principais sólidos geométricos abordados no Ensino Médio, com ênfase no prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

A proposta apresentou uma abordagem que articula aspectos históricos, conceituais e aplicados, buscando tornar o ensino mais significativo e contextualizado. Para isso, Santos (2023) explorou duas vertentes metodológicas: o uso do princípio de Cavalieri, amplamente presente nos livros didáticos da Educação Básica, e a aplicação do processo de integração como alternativa para a dedução das fórmulas de volume desses sólidos.

Santos (2023) propôs uma reflexão sobre a importância de compreender o volume não apenas como aplicação de fórmulas, mas como resultado de construções matemáticas fundamentadas em argumentos geométricos e históricos. Ao integrar diferentes perspectivas teóricas e práticas, o trabalho contribui para o enriquecimento do ensino de geometria espacial, oferecendo subsídios tanto para professores quanto para estudantes no desenvolvimento de uma aprendizagem mais profunda e sólida.

Neitzel (2023) demonstrou, em sua pesquisa, que o ensino de sólidos de revolução torna-se mais dinâmico e eficaz quando associado à experimentação, ao uso de tecnologias digitais e à manipulação de objetos concretos. A proposta desenvolvida pelo autor proporcionou aos estudantes uma vivência visual e interativa na construção de sólidos tridimensionais, por meio de recursos como o software Geogebra e da aplicação do teorema de Pappus-Guldin para o cálculo de volumes. Os resultados indicaram que os alunos não apenas compreenderam os conceitos abordados, mas também foram capazes de aplicá-los com autonomia em atividades experimentais, evidenciando o potencial das metodologias inovadoras para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico e a consolidação do conhecimento matemático.

Gabriel (2023) propôs uma sequência didática que foi aplicada a 20 alunos do Ensino Médio, observando a potencialidade significativa do material de aprendizagem e a sua contribuição para a formação conceitual do aluno de maneira a desenvolver habilidades geométricas com a utilização de materiais concretos e de tecnologias digitais como o software Geogebra. Gabriel (2023) baseou seu trabalho na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (2003) e nos modelos teóricos de níveis de formação conceitual e de habilidades geométricas de Pierre Van Hiele e de Alan Hoffer. Gabriel (2023) observou que sua Sequência Didática teve êxito e que os alunos conseguiram obter um bom desempenho diante dos conteúdos de Geometria Especial.

O produto educacional elaborado por Costa (2022) apresenta o formato de uma sequência didática pedagógica com o intuito de fomentar o desenvolvimento do ensino da Geometria Espacial, sendo associada a utilização do recurso de Realidade Aumentada no aplicativo Geogebra Calculadora 3D, como instrumento para uma aprendizagem significativa. Costa (2022) observou uma melhora significativa na aprendizagem dos alunos de acordo com os dados da SAEB, afirmando que a presença de tecnologias no ensino da Geometria Espacial estimula de forma positiva a aprendizagem do aluno, o qual apresentou um avanço no estudo dessa matéria, fazendo com que ele seja autônomo e protagonista de seu próprio conhecimento.

Maciel (2022) proporcionou aos alunos a utilização da visualidade, lançando mão de mídias e imagens, auxiliando no desenvolvimento visual e contribuindo ainda mais para aprendizagem dos alunos. Com o intuito de investigar a potencialidade do visual na aprendizagem da Geometria, Maciel (2022) propôs um modelo de Ensino Virtual Enriquecido, fundamentado nas ideias de Boaler (2013; 2016; 2018; 2019; 2020) sobre o crescimento cerebral e aspectos visuais. Para o estudo dos dados, Maciel (2022) utilizou a Análise de Conteúdo de Bardin (1977), observando que durante as atividades os alunos desenvolveram mentalidades de crescimento produtivo.

O trabalho de Soares (2022a) defende a utilização do software Geogebra e a Realidade Aumentada (RA) para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, com base na metodologia Sequência de Fedathi (SF) e na Engenharia Didática, resgatando a investigação em sala de aula por meio de fundamentos e princípios. Soares(2022a) comprovou que o Geogebra e a RA favorecem a visualização e a aprendizagem de Geometria Espacial e um notório engajamento dos alunos. Numa perspectiva Qualitativa e Quantitativa, foram propostas atividades no Geogebra e ao final uma aplicação de questionário contendo 12 questões, numa turma de 20 alunos do curso de pedagogia. Com roteiro de acompanhamento e observação durante a aplicação das sessões didáticas. Soares (2022a) relata que a RA favoreceu a aprendizagem do estudo de Geometria Espacial.

Em seu trabalho, Ávila (2022) buscou analisar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, no processo de ensino-aprendizagem sobre o conceito do cálculo de volume, também analisa a trajetória histórica do conceito do cálculo de volume de modo que se entenda as relações e o movimento mental presentes em cada momento e com isso identificar as ações mentais necessárias na elaboração e execução de cada atividade de estudo. Ávila (2022) percebeu que os princípios da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov podem ser uma alternativa viável para organização e execução do ensino do conceito do cálculo de volume para turma de segundo ano do Ensino Médio.

Soares (2022b) utilizou a tecnologia digital e materiais manipuláveis em sua sequência didática para o ensino de Geometria Espacial, através de um modelo de ensino híbrido com sala de aula invertida e com pressupostos da educação ambiental, dentre os assuntos abordados está o estudo sobre Corpos Redondos. Nessa proposta, Soares (2022b) enfatizou a utilização de materiais manipuláveis/reutilizáveis ou recicláveis para auxiliar na compreensão de objetos e modelos de conhecimento de geometria espacial que seja vinculado ao dia a dia do aluno. Soares (2022b) visou corroborar para que o aluno seja protagonista do seu aprendizado. Como resultado foi possível perceber que houve uma apropriação de conhecimentos prévios por parte dos alunos que avaliaram a sequência didática como favorável ao ensino de geometria espacial.

A sequência didática de Pinheiro (2022) apresentou concepções e práxis acerca do estudo de volumes de sólidos de revolução com ênfase nos Corpos Redondos. As situações didáticas propostas pela autora envolveram a utilização de materiais manipuláveis como sólidos de acrílico e simulador de sólidos de revolução e uma atividade experimental para determinação do centroide de figuras planas, bem como a construção de maquetes físicas e virtual com a utilização do software sketchup. Baseados na teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau com caráter de instrumento científico. Sobre uma perspectiva qualitativa e na modalidade de ensino híbrido, a autora utilizou o princípio de Cavalieri e os teoremas de Pappus para o desenvolvimento de sua pesquisa.

Paiva (2021) partiu do pressuposto que o pensamento geométrico faz parte das atividades cotidianas e para isso elaborou um estudo sobre o Estado da Arte contendo as conceituações de pensamento geométrico presentes nas teses e dissertações brasileiras que tratam desse tema na formação de professores de Matemática. Paiva (2021) usou uma abordagem qualitativa, mediante a metodologia de análise documental e Estado da Arte. Através dos dados obtidos, Paiva (2021) pôde afirmar que as representações visuais além de facilitadoras para a compreensão de um conceito, também contribuem para a construção do conhecimento relacionado a um dado conteúdo.

A pesquisa de Santos (2021) iniciou com uma investigação sobre a percepção dos alunos em relação a elementos não perceptível de uma figura geométrica tridimensional. A partir disso, foi elaborada e aplicada uma sequência didática, baseada na Teoria de Registro de Representação Semióticas, e utilizada a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Santos (2021) também fez uso de materiais manipuláveis e também do software Geogebra, promovendo a visualização dos elementos não aparentes na representação bidimensional ou tridimensional, dando atenção às dimensões inferiores do sólido. Santos (2021) enfatiza que a produção em registros de representação diferentes do registro de saída demonstra que as conversões e tratamentos realizados em diferentes registros de representação semiótica, contribuem para o aprendizado de Geometria.

No trabalho de Paula (2021), é possível observar a utilização de materiais manipulativos concretos (sólidos geométricos) e virtuais (Geogebra 3D) para visualização e aprendizagem da geometria especial. Com o intuito de apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização podendo ajudar no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, numa perspectiva de aprendizagem significativa. Paula (2021) buscou trabalhar também contextos interdisciplinares que remetem a Artes e a História, com inspirações em obras de

Oscar Niemeyer. De acordo com Paula (2021), os recursos utilizados neste trabalho favoreceram uma melhor compreensão do estudo da Geometria Espacial, auxiliando também no desenvolvimento da visualização e trazendo inovação e estimulando os alunos.

O estudo de Merlim (2020) teve como principal abordagem investigar como se dá a presença da modelagem matemática no processo educativo do ensino médio, visando deixar a disciplina mais prazerosa e agradável e, consequentemente, diminuir o índice de reprovação nessa disciplina. Para Merlim (2020), a modelagem matemática, baseada em situações do mundo real, faz com que as aulas de matemática sejam mais envolventes para os alunos. Merlim (2020) baseou-se no estado do conhecimento de Romanowski e Ens (2006), observandoos aportes teóricos utilizados nos trabalhos encontrados foram de Biembengut (2003; 2009; 2010; 2015) e Bassanezi (2002; 2006; 2015), dentre outros, que tratam da modelagem matemática.

O trabalho de Tourão (2020) investigou o potencial do software Geogebra 3D, especialmente por meio de applets interativos, como ferramenta didática para o ensino da esfera no contexto da geometria espacial. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes do ensino médio e teve como objetivo principal analisar como a visualização dinâmica e a manipulação de objetos tridimensionais podem contribuir para a compreensão de conceitos como raio, diâmetro, secções planas e volume da esfera. A proposta metodológica envolveu a criação e aplicação de atividades mediadas por applets construídos no Geogebra, permitindo aos alunos explorar propriedades geométricas de forma mais concreta e visual.

Os resultados da pesquisa de Tourão (2020) indicaram que o uso dos applets favoreceu o engajamento dos estudantes e proporcionou uma aprendizagem mais significativa, especialmente no que diz respeito à abstração de conceitos tridimensionais que, tradicionalmente, apresentam alto grau de dificuldade. A dissertação de Tourão (2020) destacou ainda a importância da formação docente voltada para o uso de tecnologias digitais no ensino da matemática, reforçando que o Geogebra, por sua interface intuitiva e recursos visuais, pode ser um aliado poderoso na superação de obstáculos conceituais no ensino da geometria espacial.

O trabalho Moraes (2020) avaliou a eficácia de uma sequência didática baseada na Engenharia Didática e no Ensino por Atividade para ensinar volume de prismas a alunos do 2º ano do Ensino Médio. A proposta consistiu em um objeto de aprendizagem que ocultava as fórmulas para que os estudantes as descobrissem a partir de atividades sequenciais envolvendo paralelepípedos, cubos e prismas, complementadas por transformações e exercícios de fixação alinhados a ENEM e SAEB; o experimento incluiu pré-teste, três sessões de aprendizagem e pós-teste, e usou socialização e intervenção docente para superar dificuldades interpretativas.

Os resultados da pesquisa de Moraes (2020) mostraram ganho significativo no desempenho médio, como foi possível identificar no pós-teste (8,03) que superou amplamente o pré-teste, indicando que a sequência e as atividades favoreceram a compreensão e a construção das fórmulas de volume, ainda que alguns alunos tenham apresentado dúvidas pontuais. Conclui-se que a metodologia é estatisticamente eficaz e, integrada a tecnologias e módulos adicionais (áreas, manipulação de volumes, animações), pode ampliar o ensino da geometria espacial com baixo custo e alto potencial formativo.

Cardoso (2020), com o intuito de elaborar mecanismos para o ensino do cálculo de Volume de Sólidos de Revolução, utilizou em sua atividade o Teorema de Pappus-Guldin e um estudo sobre centroide de figuras planas. Cardoso (2020) propôs a inclusão de tecnologias digitais para o ensino dos cálculos dos volumes desses sólidos de revolução, como o software Geogebra, por exemplo. Ao elaborar essa atividade, Cardoso (2020) desenvolveu uma alternativa para que os futuros professores de matemática do Ensino Médio possam despertar o interesse dos alunos a querer aprender e a investigar os conteúdos matemáticos, sempre com foco na autonomia e protagonismo do próprio aluno, deixando-o mais criativo e questionador.

Garcia (2020) utilizou como recurso didático o uso da cristalografia para o ensino da geometria espacial, sempre mostrando sua contribuição para a ciência, indústria, medicina e tecnologia, com aplicações no cotidiano através de exemplos. Tal recurso promove o interesse do aluno e garante uma visualização satisfatória e provoca a curiosidade do aluno gerando um questionador.

Freire (2019) buscou o saber-fazer etnomatemático dos construtores de cisternas, sob um olhar D'Ambrosiano em uma pesquisa de abordagem qualitativa de cunho etnográfico, onde participaram um total de 14 alunos, mais dois cisterneiros e também o inventor da cisterna de placas, com o apoio de recursos como: registro fotográfico, diário de campo, observação direta, entrevistas e questionários não-estruturados. Freire (2019) promoveu, com essa pesquisa, estratégias de ensino-aprendizagem com significado e um comprometimento maior por parte dos alunos envolvidos. Freire (2019)constatou que a prática dos cisterneiros possui inúmeros elementos de práticas etnomatemáticas articulando com a matemática escolar uma estratégia que favorece a aprendizagem com significado.

Marques (2019) apresentou resultados da aplicação de sua Sequência Didática sobre o ensino e aprendizagem de uma Esfera com a utilização do software Geogebra 5.0. Na construção de sua Sequência Didática, Marques (2019) utilizou o modelo das Unidades Articuladas de reconstrução Conceitual (UARC) de acordo com os métodos de Cabral (2017), levando em consideração estudos prévios, análise de Livros Didáticos e uma pesquisa junto aos professores e alunos em relação ao ensino aprendizagem no estudo de uma esfera. Na aplicação da Sequência Didática foram analisadas as interações entre os alunos e entre professor/alunos por meio da Análise Microgenética de Goes (2002) e pela Análise do Discurso de Scott e Mortiner (2002), na qual se observou uma melhora significativa na aprendizagem relacionada ao sólido em questão.

Ribeiro (2019) realizou um trabalho de cunho qualitativo, visando reconhecer o grau de conhecimento dos alunos, referente a sólidos geométricos. Para isso, Ribeiro (2019) promoveu seis atividades, sendo uma sondagem, quatro oficinas e um jogo, participaram da pesquisa 19 alunos, cada oficina durou em média duas horas e o produto final desse trabalho foi uma sequência didática e um jogo. A dissertação de Ribeiro (2019) foi baseada na teoria de Pais (1996) que acreditava no entendimento da geometria a partir da construção e da manipulação de objetos, podendo ocorrer de forma manual ou por um software. Essa teoria possui quatro elementos fundamentais que são: objeto, desenho, imagem mental e conceito. Os resultados de Ribeiro (2019) foram analisados pela teoria de Van Hiele e foi possível perceber que os alunos tiveram maior interesse em compreender a estrutura dos sólidos.

Rodrigues (2019) utilizou o Geogebra 3D em sua sequências didáticas, para a construção dos conceitos fundamentais da geometria espacial, com ênfase em volumes de sólidos geométricos. Tal sequência foi fundamentada na teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e na teoria de Van Hiele, assim também como a parte histórica do ensino de Geometria. Rodrigues (2019) mostrou a importância da utilização de softwares juntamente com uma sequências didáticas para construção de uma aprendizagem significativa.

No trabalho de Penha (2019), foi aplicado uma sequência didática para o ensino da Geometria Espacial. Penha (2019) incorporou aspectos socioculturais da própria turma em sua sequência didática com métodos de resolução de problemas e utilizou material manipulável. Penha (2019) faz uma abordagem diferenciada da tradicional para o ensino de geometria, colocando o aluno diante de condições de aprendizagem e aproximando o ensino da Matemática a realidade, e assim corroborando para um aprendizado mais significativo e dinâmico. Penha (2019) constatou que houve um crescente no interesse e na motivação dos alunos em relação a atividade proposta.

Morcanas (2019) fez uso da Realidade Aumentada (RA) através de softwares educativos, permitindo que a Geometria Espacial fique mais dinâmica e interativa. Essa perspectiva lúdica nas construções de poliedros visa a melhor compreensão dos elementos e dos conceitos relacionados a esses sólidos e ainda é possível trabalhar a Relação de Euler de maneira diferenciada. Em seu trabalho, Morcanas (2019) também propôs um modelo de desenvolvimento geométrico com ênfase nas fases da aprendizagem desenvolvida por Van Hiele. A autora finaliza seu trabalho com construções de poliedros através do uso dos aplicativos: Polyèdresaugmentès e Geometrix.

A pesquisa de Cimadon (2019) propôs atividades vinculadas às noções de Geometria Espacial de cunho qualitativo e com inspirações etnográficas, proporcionando ao aluno conhecimento direto e experiencial de outras culturas. Buscando base no referencial teórico-metodológico do campo da Etnomatemática. Cimadon (2019) examinou questões sociais e culturais no âmbito do ensino, utilizando como material de pesquisa o diário de campo, que continha gravações de vídeos realizados nos ambientes internos e externos, material escrito e produzido pelos estudantes, tais como desenhos, maquetes e construções. Cimadon (2019) constatou que apesar de estarem conversando bastante, a turma estava mais concentrada e o assunto principal era a tarefa proposta.

O trabalho de Boito (2018) foi baseado no construcionismo de Seymour Papert e nos princípios de Paulo Freire, com diálogo problematizador e contextualização do saber, as atividades foram desenvolvidas com lápis, papel, dobraduras de sólidos geométricos, material dourado, etc, de maneira a se relacionar ao jogo Minecraft. Foram utilizados smartphones, projetor de imagens, tutoriais em vídeos e computadores. A pesquisa contou com nove alunos, que em doze encontros de 50 minutos cada, possibilitou o registro em diário de bordo, com fotos e relatório de cada encontro. Boito (2018) afirma ter sido relevante a aplicação de sua sequência de atividades para a aprendizagem de elementos introdutórios da geometria espacial.

A dissertação de Moraes (2018) teve como objetivo investigar estratégias diferenciadas para o ensino do cálculo de volume de sólidos geométricos, especialmente prismas e cilindros, por meio de atividades práticas e intuitivas. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes do ensino médio de escolas públicas do Pará e buscou compreender como a utilização de materiais manipuláveis e sequências didáticas inovadoras poderia favorecer a participação ativa dos alunos e melhorar seu desempenho em problemas envolvendo geometria espacial.

Os resultados da pesquisa de Moraes (2018) mostraram que a adoção de atividades práticas contribuiu para maior engajamento dos estudantes e possibilitou uma compreensão mais significativa dos conceitos de volume. A análise evidenciou que, ao articular teoria e prática, os alunos desenvolveram maior autonomia intelectual e capacidade de relacionar representações algébricas e geométricas. Dessa forma, o trabalho reforçou a importância de metodologias ativas e contextualizadas no ensino da matemática, destacando que o uso de recursos manipuláveis e sequências didáticas bem estruturadas constitui uma estratégia eficaz para promover aprendizagens significativas em geometria espacial

Santos (2015) investigou a eficácia do uso de materiais concretos para o ensino da geometria plana e espacial, esclarecendo que a matemática e a geometria não são feitas só de números, quadro branco e pincel e que a produção do conhecimento, decorre da vivência do aluno com as formas, na qual possam refletir sobre cada uma e criar relações com seu próprio raciocínio. Através de um estudo de caso, Santos (2015) mostrou que a utilização de materiais concretos para o ensino da geometria planta e espacial, torna a aula mais prazerosa e proporciona um ambiente de interação satisfatório. Santos (2015) observou duas turmas A e B, e notou que a turma que trabalhou com material concreto teve melhor desempenho no estudo de geometria plana e espacial.

Nascimento (2013) optou pela construção de Sólidos Geométricos com materiais alternativos fundamentado na concepção teórica da aprendizagem significativa de David Ausubel (2003), com o objetivo de analisar a ocorrência de aprendizagem significativa em cálculos de superfícies e volumes, utilizando para isso objetos do cotidiano do aluno, valorizando sempre os saberes prévios deles. Nascimento (2013) adotou a pesquisa-ação na aplicação da atividade que realizou numa turma do 2º ano do ensino médio e pela análise dos resultados, os participantes da pesquisa conseguiram compreender conceitos básicos da geometria espacial, dando condições aos alunos de resolver problemas de geometria espacial a eles propostos.

A pesquisa de Mattei (2012) buscou desenvolver o processo de ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos enfocando nas habilidades desenvolvidas através do ambiente de modelagem matemática. Com uma abordagem qualitativa, Mattei (2012) realizou a sua coleta de dados, em um estudo de caso, com questionários e observações das atividades desenvolvidas. Quinze alunos do segundo ano do Ensino Médio participaram dessa pesquisa, onde puderam integrar a teoria à prática, realizando construções de conceitos da Geometria Espacial. Foram utilizados como instrumentos na pesquisa filmagens, portfólio e questionário, assim como as observações registradas pela professora. Ao final da pesquisa, constatou-se que os alunos tiveram um excelente desempenho e demonstraram bastante interesse em aprender matemática. Esse estudo buscou reunir as principais pesquisas que tratam de métodos diferenciados para o ensino de Geometria Espacial, com ênfase em corpos redondos. Com o intuito de verificar as diversas metodologias e teorias que já foram utilizadas nessa perspectiva.

A dissertação *“O ensino de volume de sólidos por atividades”*, escrita por Santos (2012), teve como objetivo investigar metodologias que tornam o ensino de geometria mais dinâmico e significativo. Santos (2012) defendeu em seu trabalho que o aprendizado do cálculo de volumes não deve se restringir à aplicação mecânica de fórmulas, mas sim ser construído a partir de experiências práticas, como manipulação de objetos, construção de modelos e resolução de problemas contextualizados. Dessa forma, os alunos desenvolvem habilidades de visualização espacial e raciocínio lógico, além de perceberem a utilidade da matemática em situações reais.

O trabalho de santos (2012) também enfatizou a importância da participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, destacando que atividades práticas favorecem a motivação e o interesse pela disciplina. Ao propor estratégias que aproximam teoria e prática, a dissertação mostrou que o ensino de volume pode ser mais acessível e envolvente, contribuindo para uma formação matemática sólida e crítica. Assim, a pesquisa reforçou a ideia de que metodologias ativas são fundamentais para transformar a sala de aula em um espaço de construção de conhecimento e não apenas de transmissão de conteúdos.

Por fim, a análise das dissertações correlatas contribuiu para o refinamento desta pesquisa ao evidenciar que a integração entre o concreto e o digital é o caminho para promover a apreensão conceitual. Enquanto os trabalhos de Nascimento (2013) e Gabriel (2023) estabelecem a importância da experimentação e da visualização sob a ótica de Ausubel, esta dissertação avança ao aplicar esses resultados no desenvolvimento de uma sequência didática focada especificamente na área e volume da esfera. Esses trabalhos anteriores serviram como um guia para a seleção do software Geogebra como instrumento principal, permitindo que esta pesquisa foque na Gênese Instrumental e na conversão de registros de representação semiótica durante a criação dos sólidos.

Tanto a vivência proposta por Santos (2015) como a utilização de objetos do cotidiano apresentada por Nascimento (2013), assim também como a aplicação no cotidiano indicado na pesquisa de Garcia e Merlim (2020), e a proposta de vinculação ao dia a dia do aluno dos conteúdos referentes a Geometria Espacial vista em Soares (2022b), são métodos de valorizar os conhecimentos prévios do aluno e as práticas vivenciadas por ele em seu dia a dia.

A busca também pelos conhecimentos adquiridos ao longo dos tempos pelo saber popular, como é o caso da proposta feita por Cimadon (2019) e Freire (2019) referindo-se a etnomatemática como parceira nessa tarefa de fazer com que mais alunos compreendam e percam o medo da disciplina, por já saberem matemática de maneira popular, faltando apenas a transposição para o ensino em sala de aula.

A relevância do ensino de Geometria Espacial com o auxílio de tecnologias digitais é evidente na literatura. Entre os estudos consultados foi destaque para o uso do Geogebra. Marques (2019), aprofundou-se nessa temática, abordando especificamente o ensino da esfera no trabalho intitulado “Ensino de Esfera por Meio de Applets do Software GeoGebra”. A pesquisa de Marques apresentou os Applets que são pequenas aplicações interativas criadas dentro do software Geogebra que podem ser incorporadas em páginas da web, plataformas de *e-learning* ou outros documentos digitais.

O Applets permite que o aluno explore e manipule construções geométricas, gráficos de funções e outras representações matemáticas de forma dinâmica e visualmente atraente através de recursos que possibilitam a visualização, manipulação e cálculo de área e volume dos sólidos de revolução. Por isso, pode ser considerada uma ferramenta poderosa para o ensino de matemática, permitindo que os alunos visualizem e arrisquem conceitos de forma mais intuitiva.

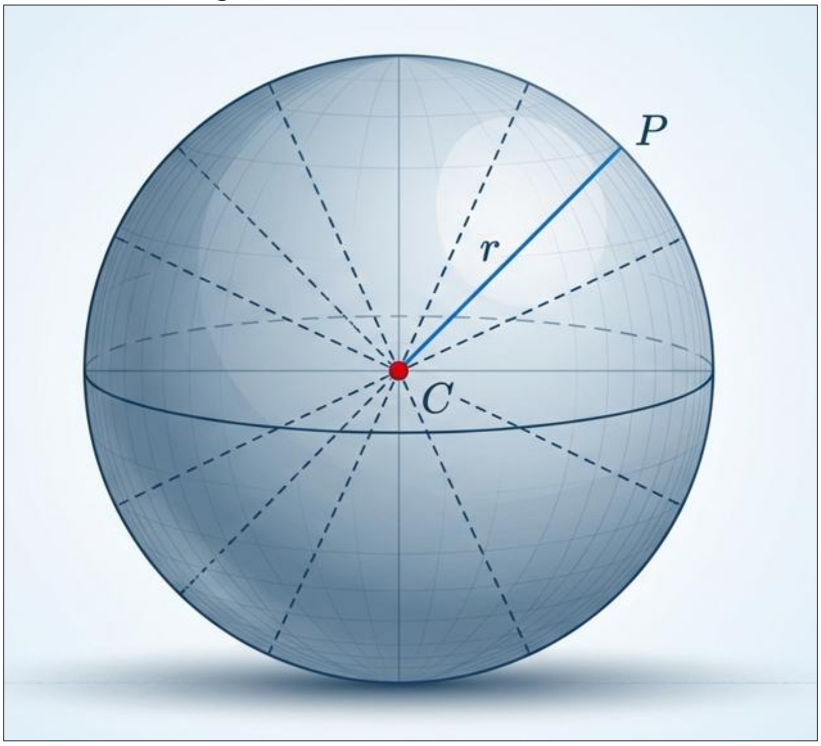
A Sequência Didática apresentada por Marques (2019) considerou o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC). Com o intuito de reconstruir conceitos de área e volume da esfera que promoveu, além da investigação, a troca de informações entre os alunos, e o levantamento de conjecturas com a formalização dos aspectos observados ao final das atividades.

Portanto, a busca por um método eficaz de ensinar ao aluno do ensino médio conteúdos da geometria espacial segue em garantir que ele seja capaz de perceber conexões do assunto com o mundo real e que consiga criar meios de raciocinar e desenvolver o estudo de maneira autônoma e criativa.

Capítulo 3 – O OBJETO MATEMÁTICO ESFERA: ABORDAGENS HISTÓRICAS, EPISTEMOLÓGICAS E FORMAIS

A esfera constitui um dos objetos mais emblemáticos da Geometria Espacial. Do ponto de vista formal, conforme define Lima (2012) em literatura do IMPA, a esfera de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional cuja distância até O é menor ou igual a r. Trata-se de um sólido geométrico de revolução que se destaca por sua simetria contínua, onde todos os pontos de sua fronteira, conhecida como superfície esférica, são equidistantes do núcleo central, tal detalhes podem ser visto na Figura 1. Sob a ótica de Eves (2011), essa configuração de máxima simetria não apenas despertou fascínio estético desde a Antiguidade clássica, mas fundamentou o desenvolvimento de métodos matemáticos e físicos que culminaram no próprio cálculo infinitesimal.

Figura 1 - Esfera tridimensional



Fonte: O autor, 2026.

O fato de todos os pontos de sua superfície serem equidistantes de um ponto central não apenas destaca sua elegância, mas também fundamenta diversos conceitos matemáticos e físicos. Ao longo deste estudo, exploraremos as propriedades e aplicações dessa figura fascinante, cuja relevância se estende a múltiplos campos do conhecimento.

3.1 EVOLUÇÃO DOS MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO DO VOLUME: DOS CLÁSSICOS AOS CONTEMPORÂNEOS

O cálculo do volume delimitado pela superfície esférica atravessou séculos de investigação, atuando como um propulsor epistemológico para a ciência matemática. A evolução do tratamento dado a esse problema permite mapear a transição do pensamento puramente geométrico e mecânico dos gregos antigos para o rigor analítico moderno, sintetizado na fórmula clássica: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Nesta seção, revisitam-se os percursos teóricos consagrados, articulando as intuições originais de Arquimedes, o princípio geométrico-comparativo de Cavalieri e a posterior formalização por meio do Cálculo Integral no século XVII.

3.1.1 O MÉTODO MECÂNICO DAS ALAVANCAS DE ARQUIMEDES

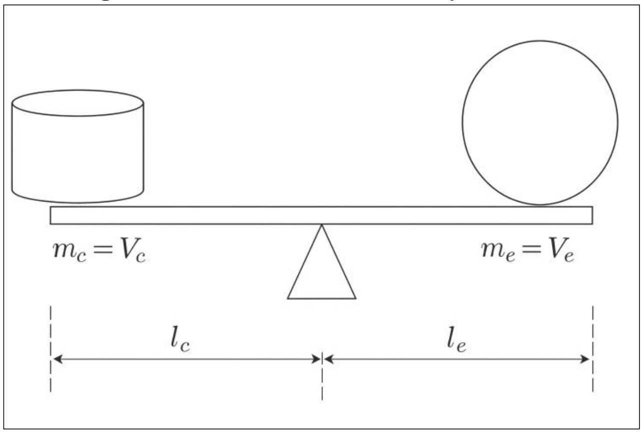
Por volta de 250 a.C., Arquimedes de Siracusa antecipou os fundamentos da análise moderna ao introduzir uma abordagem pioneira que unia a mecânica à geometria pura. Conforme aponta Boyer (1996), em seu tratado *O Método*, preservado no célebre Palimpsesto de Arquimedes, o geômetra utilizou leis da estática e o princípio das alavancas para investigar volumes de corpos complexos antes de submetê-los ao rigor das provas geométricas formais.

Utilizando uma balança idealizada, Arquimedes posicionou estrategicamente seções transversais de três sólidos de revolução de mesmas dimensões lineares básicas (altura $h = 2r$ e raio da base r): uma esfera, um cone e um cilindro circunscrito. Assumindo de forma heurística que os volumes eram proporcionais às massas das seções pesadas, ele demonstrou que o momento gerado pela seção da esfera somado ao momento da seção do cone equilibrava-se perfeitamente, na alavanca, com o momento da seção do cilindro correspondente. Traduzido para a modelagem algébrica contemporânea (ASSIS, 2014), o equilíbrio estático estabelecido pelas distâncias ao ponto de apoio revelou que:

$$V_{esfera} + V_{cone} = V_{cilindro}$$

Nesse contexto, ao associar a massa ao volume de cada sólido, definindo a massa do cilindro como $m_c = V_c$ e a da esfera como $m_e = V_e$, Arquimedes aplicou a Lei da Alavanca, método inovador utilizado por Arquimedes, na qual fazia uso de uma balança ideal para comparar diferentes sólidos geométricos. Nesse contexto, ao aplicar o princípio das alavancas, segundo o qual o produto da massa de um corpo pela sua distância ao ponto de apoio deve ser igual ao produto correspondente de outro corpo, Arquimedes demonstrou a equivalência entre os sólidos e chegou ao seguinte resultado: $m_c.L_c = m_e.L_e$ e também $V_c.L_c = V_e\ .L_e$, na Figura 2 é possível visualizar a configuração da Balança de Arquimedes:

Figura 2 - Alavanca de Arquimedes



Fonte**:** O autor, 2026.

A Figura 2 ilustra como Arquimedes alcançou a relação do volume da esfera. Nota-se que, ao abrir mão de fórmulas algébricas inexistentes em sua época, ele utilizou exclusivamente o raciocínio geométrico e princípios físicos de equilíbrio para determinar as propriedades do sólido.

> O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera, enquanto que o volume do cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera. (ASSIS, 2014, p. 30).

Embora Arquimedes não utilizasse as fórmulas algébricas modernas, ele estabeleceu relações de proporcionalidade fundamentais entre os sólidos. Por meio do método da exaustão e da estática, ele demonstrou que as áreas das seções transversais de uma esfera e de um cone, quando somadas, equivaliam à seção transversal correspondente de um cilindro. Segundo Boyer (1996), ao transpor essa relação para sua balança idealizada, Arquimedes provou que o volume da esfera somado ao do cone (ambos com altura $h = 2r$) equilibrava-se perfeitamente com o do cilindro. A partir dessa equivalência geométrica, ele deduziu que o volume da esfera correspondia a quatro vezes o volume do cone de raio r e altura r, o que, em notação atual, permite-nos chegar à fórmula $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

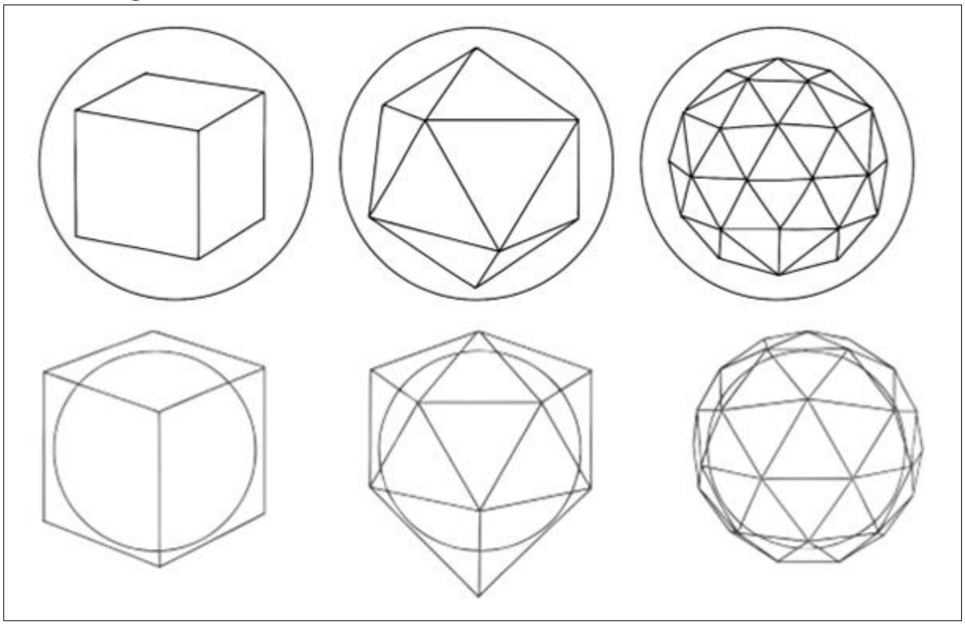
A demonstração de Arquimedes evidencia não apenas sua genialidade matemática, mas também a profundidade de sua intuição ao articular conceitos de geometria e mecânica em um raciocínio rigoroso. Ao relacionar os volumes do cilindro e do cone com o da esfera, ele estabeleceu uma prova elegante que culmina na fórmula universalmente conhecida $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Esse resultado, obtido séculos antes do desenvolvimento formal do cálculo integral, mostra como Arquimedes antecipou métodos analíticos modernos e consolidou a esfera como um dos sólidos mais emblemáticos da matemática. Sua abordagem permanece até hoje como um marco histórico e pedagógico, ilustrando a capacidade da matemática antiga de produzir resultados de grande sofisticação e relevância.

Em suma, o método da alavanca de Arquimedes não representa apenas um marco na história da geometria, mas personifica a própria essência da mediação entre o concreto e o abstrato. Ao articular leis da física para desvendar propriedades volumétricas da esfera, o geômetra antecipou o que hoje compreendemos como processos de instrumentação, nos quais o suporte material potencializa o raciocínio cognitivo. Para esta investigação, tal perspectiva histórica fundamenta a relevância de se utilizar recursos que estimulem a visualização espacial e a manipulação de dados, servindo de base para a sequência didática aqui proposta. Assim, busca-se que o estudante, ao transitar entre o manuseio de materiais concretos e a modelagem no Geogebra 3D, possa trilhar um percurso investigativo similar, consolidando sua aprendizagem por meio da conversão entre os diversos registros de representação semiótica.

3.1.2 O MÉTODO DA EXAUSTÃO E A TRANSIÇÃO PARA O INFINITESIMAL

Para conferir o rigor lógico exigido pelo padrão euclidiano de sua época, Arquimedes validou suas descobertas mecânicas por meio do método da exaustão. Como explica Eves (2011), esse método consistia em inscrever e circunscrever poliedros regulares na esfera, expandindo progressivamente o número de suas faces. À medida que o número de partições tendia ao infinito, como é possível observar na Figura 3, a diferença volumétrica entre os corpos poliedrais e o sólido esférico era "exaurida". Esse procedimento rigoroso contornava a ausência do conceito formal de limite, estabelecendo-se, na perspectiva de Boyer (1996), como o ancestral direto do cálculo dos limites e das somas infinitesimais que redefiniriam a matemática no século XVII.

Figura 3 - Poliedros inscritos e circunscritos na esfera



Fonte: O autor, 2026.

Esse método é considerado um precursor do cálculo integral, formalmente desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz apenas no século XVII. Por meio de suas investigações, Arquimedes logrou solucionar problemas de extrema complexidade para a matemática da época, evidenciando uma compreensão intuitiva e profunda de conceitos que hoje fundamentam a noção de limites e infinitesimais. Conforme destaca Boyer (1996), a genialidade de Arquimedes residiu em sua capacidade de antecipar o pensamento infinitesimal, estabelecendo as bases sobre as quais o cálculo moderno seria estruturado séculos mais tarde.

Arquimedes usou o princípio da alavanca em seu “Método dos Teoremas Mecânicos” para deduzir propriedades geométricas. Ele aplicava conceitos de equilíbrio e centro de gravidade para estabelecer relações entre diferentes partes de uma figura geométrica. Por exemplo, ele poderia usar a alavanca para encontrar o centro de gravidade de uma figura composta, o que facilitava a aplicação do método da exaustão para calcular áreas e volumes.

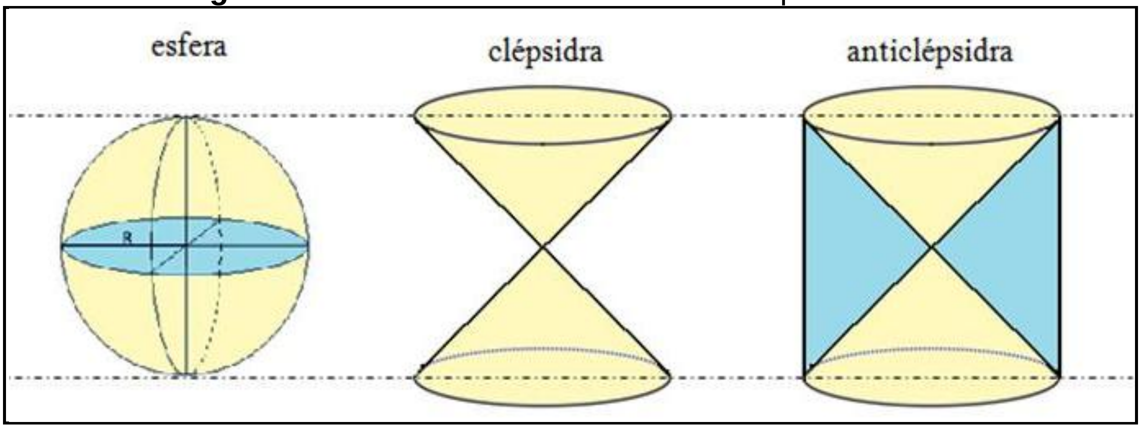
O princípio da alavanca ajuda a entender o equilíbrio e a distribuição de forças, enquanto o método da exaustão permite calcular áreas e volumes de figuras complexas por aproximação. Arquimedes usou ambos os métodos para resolver problemas matemáticos e físicos de maneira inovadora.

3.2 O MÉTODO INDIVISÍVEL DE CAVALIERI E AS SEÇÕES TRANSVERSAIS

No século XVII, abrindo caminho para o cálculo moderno, o matemático italiano Bonaventura Cavalieri formulou em 1635 o princípio dos indivisíveis. O Princípio de Cavalieri dita que, se dois sólidos de mesma altura, assentados sobre um mesmo plano horizontal, apresentam áreas de seções transversais iguais para todo plano paralelo à base, seus volumes serão equivalentes (LIMA, 2012).

Para deduzir o volume da esfera sob essa ótica, concebeu-se um sólido auxiliar denominado anticlépsidra, um cilindro equilátero de raio *r* e altura *2r* do qual são subtraídos dois cones opostos pelo vértice, cujas bases coincidem com as bases do próprio cilindro, como é possível observar na Figura 4.

Figura 4 - Sólidos Geométricos utilizados por Cavalieri

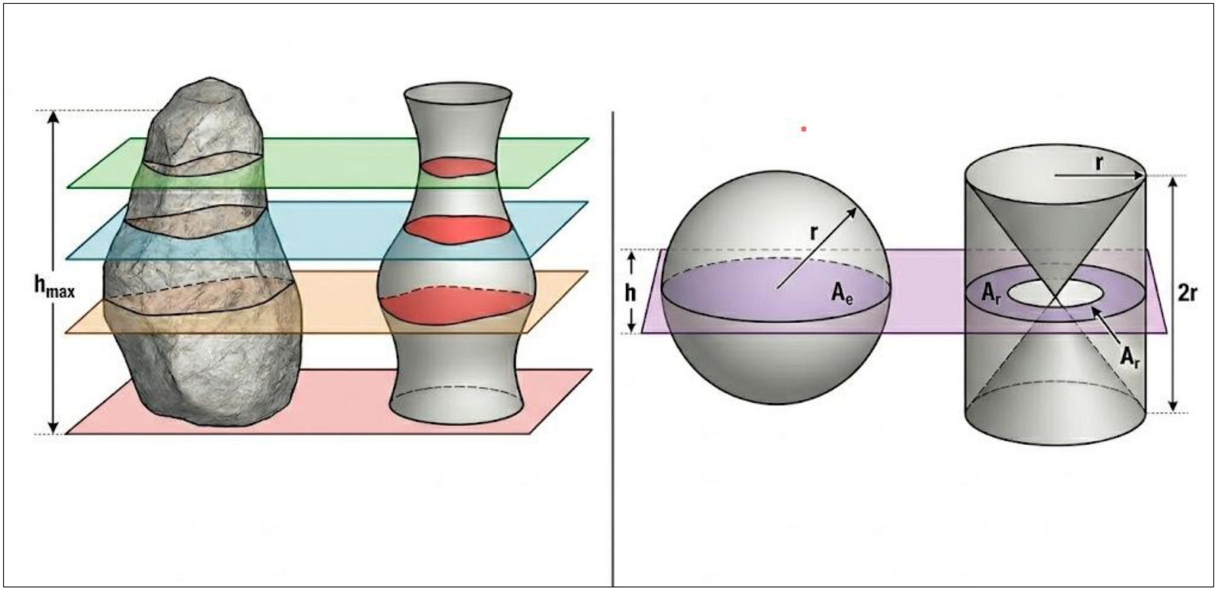


Fonte**:** Blogspot (2010). Disponível em:https://1.bp.blogspot.com/_Jl6tYApS3x8/TFjmz-TTwmI/AAAAAAAAAHs/bral2Kuv5ws/s1600/Esfera+Clepsidra+Anticlepsidra.jpg. Acesso em: 5 nov. 2023.

3.2.1 EQUIVALÊNCIA DAS ÁREAS DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS

As secções transversais desempenham papel central na compreensão dos sólidos geométricos, especialmente quando analisadas à luz do Princípio de Cavalieri. Esse princípio estabelece que, se dois sólidos possuem a mesma altura e, em todos os planos paralelos às suas bases, as áreas das secções transversais correspondentes são iguais, então os volumes desses sólidos também são iguais. Tal abordagem permite justificar, de forma rigorosa e intuitiva, fórmulas de volume como a da esfera, ao compará-la com outros sólidos de mesma altura e secções equivalentes. No contexto pedagógico, a exploração das secções transversais sob a perspectiva do Princípio de Cavalieri, conforme ilustrado na Figura 5, fomenta o avanço do raciocínio geométrico e da capacidade de visualização espacial dos discentes. Essa estratégia atua como um elo integrador entre os domínios bidimensional e tridimensional, sustentado por argumentos essencialmente comparativos e dedutivos.

Figura 5 - Exemplo de secção transversal



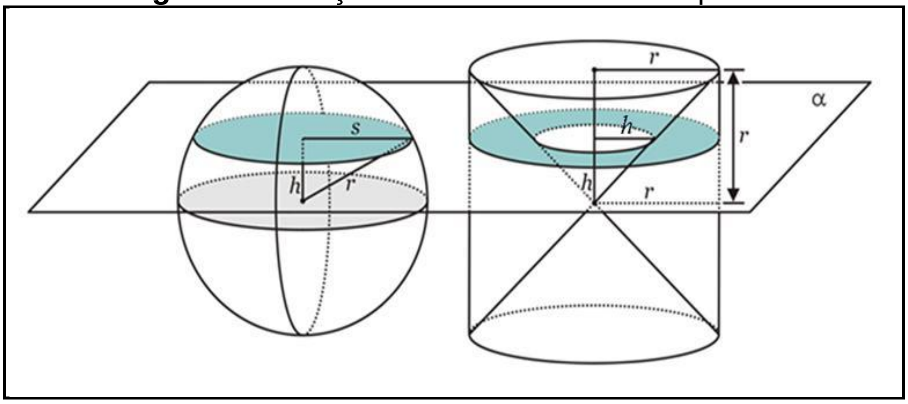
Fonte: O autor, 2026.

3.2.2 ÁREA DAS SECÇÕES TRANSVERSAIS

A análise da área de secções transversais é essencial para compreender a estrutura interna dos sólidos e suas propriedades volumétricas. Além disso, será demonstrado o cálculo da área da secção transversal da esfera para qualquer altura (h) ao longo do eixo vertical da esfera, a área da secção transversal é um círculo de raio $s = \sqrt{r^2 - h^2}$. Pela fórmula da área desse círculo, tem-se que $A_{\text{círculo}} = \pi s^2$ e daí $A_{\text{círculo}} = \pi(r^2 - h^2)$

Na anticlépsidra, a área da secção transversal a uma altura h corresponde a uma coroa circular. Essa área é determinada pela diferença entre a área do círculo máximo do cilindro e a área da secção do cone, dada por $A_{\text{coroa}} = \pi r^2 - \pi h^2$. Ao colocarmos o fator π em evidência, obtemos $A_{\text{coroa}} = \pi(r^2 - h^2)$, expressão que equivale textualmente à área da secção transversal da esfera no mesmo nível. A ilustração desse conceito está representada na Figura 6, onde mostra a comparação entre a secção transversal de uma esfera e a da anticlépsidra, evidenciando a equivalência entre ambas conforme o Princípio de Cavalieri.

Figura 6 - Secção na esfera e na anticlépsidra



Fonte**:** Blogspot (2010). Disponível em: https://3.bp.blogspot.com/_Jl6tYApS3x8/TFjpIik-zjI/AAAAAAAAAH8/lJzYULOBCIw/s1600/Esfera+e+Anticlepsidra.jpg. Acesso em: 5 nov. 2023.

Essa equivalência demonstra que, conforme o Princípio de Cavalieri, o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra. Com base nesse resultado, é possível determinar o volume da esfera por meio de duas abordagens: uma delas consiste em integrar as áreas das secções transversais ao longo da altura da esfera, variando de -r a r, o que permite obter o volume total a partir da soma contínua das áreas circulares geradas pela interseção com planos paralelos à base.

Considerando que os dois sólidos possuem a mesma altura e que, em todos os planos horizontais paralelos às suas bases, apresentam áreas de secções transversais iguais, o Princípio de Cavalieri assegura que seus volumes também são equivalentes. A anticlépsidra, nesse contexto, é formada por dois cones idênticos, cada um com raio “r” e altura “r”.

Sabendo que o volume de um cone é dado por$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2.\mathrm{h}$, então o volume total da anticlépsidra é $V_{anticlépsidra} = 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2.2r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$. No entanto, ao considerar a esfera com raio r, cuja secção transversal em cada altura coincide com a da anticlépsidra, conclui-se que seu volume também é $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Dessa forma, ao comparar a esfera com a anticlépsidra por meio do Princípio de Cavalieri, observamos que seus volumes também são iguais, já que ambas possuem a mesma altura e apresentam áreas de secções transversais congruentes em todos os planos horizontais.

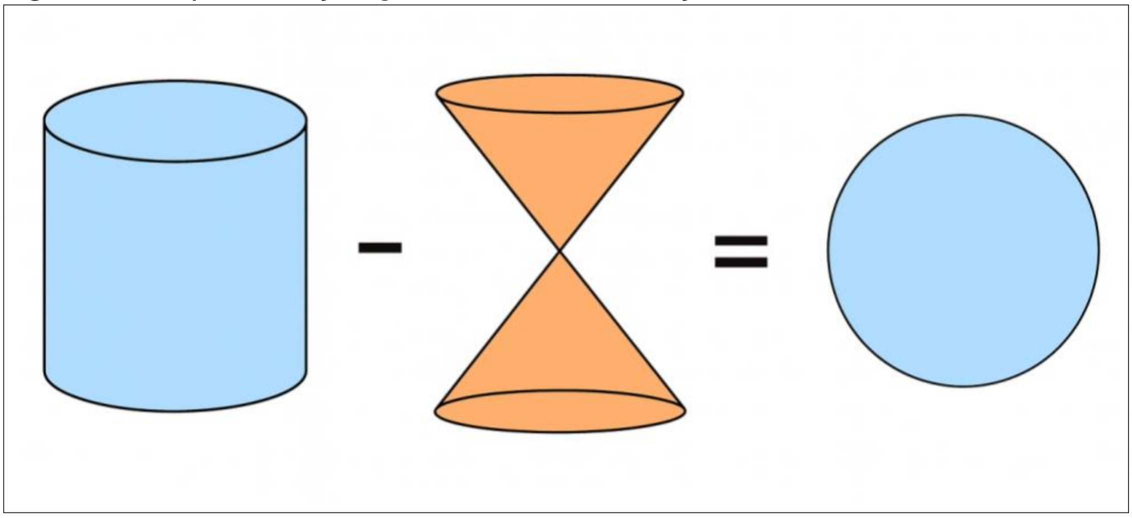
Portanto, essa abordagem evidencia o potencial do raciocínio geométrico na obtenção de resultados precisos, mesmo sem o uso direto de técnicas de integração, a qual só teve início no século XVII.

3.3 O VOLUME DA ESFERA POR MEIO DE UMA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

A forma geométrica é uma representação idealizada de objetos no espaço, caracterizada por propriedades como dimensão, contorno, simetria e proporção. Ela pode ser bidimensional, como quadrados, triângulos e círculos, ou tridimensional, como cubos, esferas e pirâmides. Essas formas são fundamentais para a construção do pensamento matemático, pois permitem a análise de estruturas, a resolução de problemas espaciais e a modelagem de situações do cotidiano. Além disso, o estudo das formas geométricas desenvolve a percepção visual e a capacidade de abstração, sendo amplamente aplicado em áreas como arquitetura, design, engenharia e arte.

O volume da esfera de raio *r* pode ser deduzido por meio de uma construção geométrica envolvendo um cilindro e dois cones. Considere um cilindro de raio *r* e altura 2*r*, cujo volume é dado por $\pi r^2 . 2r$. Dentro desse cilindro, encaixam-se perfeitamente dois cones de mesmo raio *r* e altura *r*, posicionados em sentidos opostos. O volume de cada cone é $\frac{1}{3}\pi r^2 . r$ e o volume total dos dois cones é $\frac{2}{3}\pi r^3$. Ao subtrair o volume dos cones do volume do cilindro, obtém-se o volume da esfera $2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Como podemos ver na representação da Figura 7.

Figura 7 - Representação geométrica da subtração entre o cilindro e dois cones



Fonte: O autor, 2026.

Essa abordagem geométrica oferece uma dedução elegante e intuitiva do volume da esfera, sem recorrer ao cálculo integral, reforçando a conexão entre diferentes sólidos por meio de suas propriedades volumétricas.

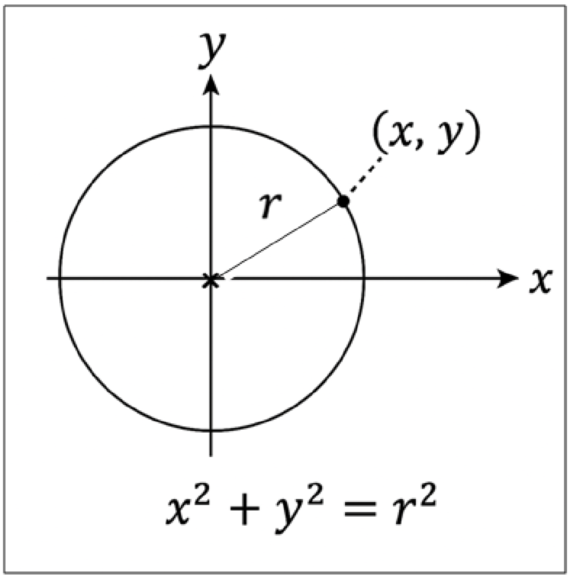
3.4 A FORMALIZAÇÃO PELO CÁLCULO INTEGRAL E MÉTODOS DE REVOLUÇÃO

O método da integral definida surgiu no século XVII como uma das maiores revoluções matemáticas, desenvolvido independentemente por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Uma das formas mais rigorosas de demonstrar a fórmula do volume de uma esfera é através do cálculo integral. A ideia é considerar a esfera como a rotação de um semicírculo em torno de um eixo.

A fórmula da integral definida é usada para somar infinitesimais volumes de cilindros que compõem a esfera. Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), fundadores do cálculo integral, desenvolveram independentemente as técnicas de integração e diferenciação. Newton usou o cálculo para resolver problemas de física, enquanto Leibniz desenvolveu a notação que é utilizada até hoje.

A integral definida para calcular volumes de sólidos de revolução, como a esfera, de maneira rigorosa e precisa, basta considerar a Equação da semicircunferência de raio (r) centrada na origem como representada na Figura 8.

Figura 8 - Equação da semicircunferência



Fonte**:** O autor, 2026.

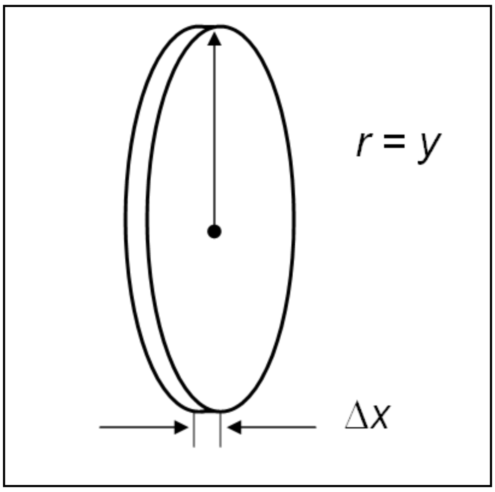
O cálculo do volume da esfera por meio da equação da semicircunferência representa uma das aplicações mais elegantes da integral definida, desenvolvida no século XVII por Newton e Leibniz. Nesse período, a matemática passou por uma profunda transformação com o surgimento do cálculo infinitesimal, que permitiu formalizar métodos para determinar áreas e volumes com precisão. Ao considerar a semicircunferência superior $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e girá-la em torno do eixo x, obtém-se a esfera como sólido de revolução. A integral definida surge então como ferramenta essencial para calcular esse volume, expressa por $V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 \, dx$, a partir daí resolvendo a integral $\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$ pelo Método da Integral Definida, conclui-se que o volume da esfera é: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Esse processo reflete o espírito da época, em que os matemáticos buscavam rigor e generalidade para problemas antes resolvidos por métodos geométricos, como os de Arquimedes. A integral definida não apenas confirma os resultados clássicos, mas também inaugura uma nova era de raciocínio analítico, consolidando o cálculo como linguagem universal da ciência moderna.

3.5 DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA POR DISCOS INFINITESIMAIS

No século XVII surgiu a demonstração geométrica por discos infinitesimais, essa é uma abordagem que utiliza a geometria pura dividindo a esfera em várias fatias finas (como fatias de uma laranja), a soma dos volumes desses discos infinitesimais aproxima-se do volume da esfera. Esta soma é então expressa como uma integral que resulta na fórmula do volume. Podemos observar na Figura 9, uma fatia de uma esfera que fora dividida em várias fatias, com uma pequena espessura (Δx).

Figura 9 - Fatia fina de uma determinada esfera de raio (r)



Fonte: O autor, 2026.

Essa é uma abordagem moderna utilizada no cálculo do volume de uma esfera, usando a integração das fatias finas horizontais da esfera como um disco infinitesimal. Ao somar o volume de todos esses discos, obtêm-se o volume total da esfera.

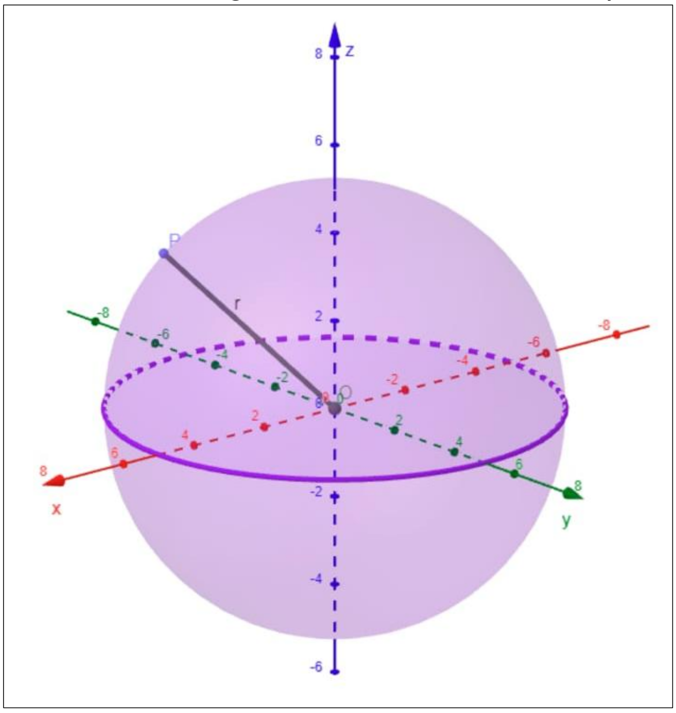
3.5.1 CÁLCULO DO VOLUME INFINITESIMAL COM DISCOS: ÁREA DO CÍRCULO VEZES A ESPESSURA

Para fundamentar essa abordagem, parte-se da equação geral da circunferência no plano cartesiano: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, como a esfera possui o centro na origem, indica que $a=0$ e $b=0$, então: $x^2+y^2=r^2$e$y=\sqrt{r^2-x^2}$. É possível perceber que a fatia da esfera corresponde a um cilindro de altura h=dx O volume desse cilindro é conhecido, portanto tem-se: $V=\pi r^2.h,$ como o cilindro tem altura infinitesimal igual a dx e o raio da base é r=y, a fórmula de seu volume fica assim:$V=\pi y^2.dx$. A esfera é formada por infinitos cilindros de alturas infinitesimais dx, com raio y variável para cada cilindro. O volume da esfera corresponde a soma desses cilindros de alturas infinitesimais que é determinada pela integral definida: $V=\int_{-r}^{r}\pi(y)^2\ dx=\int_{-r}^{r}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\ dx=V=\frac{\pi}{3}(2r^3+\ 2r^3)=V=\frac{4}{3}\pi r^3$. Essa é a fórmula clássica do volume da esfera. Tal procedimento não apenas reforça a compreensão geométrica do sólido esférico, como também exemplifica a aplicação eficaz de conceitos fundamentais do cálculo integral na resolução de problemas físicos e matemáticos.

3.6 ESFERA: CONCEITOS E PROPRIEDADES

A esfera, ver Figura 10, é um sólido geométrico tridimensional estudado na Geometria Espacial e definida como o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância igual ou menor que o raio (r) a partir de um ponto central (O). Este capítulo abordará a esfera como objeto de estudo da geometria, destacando seus conceitos e aplicações na matemática e no cotidiano. Serão apresentadas suas propriedades fundamentais como raio, diâmetro, área e volume, bem como suas características geométricas e simétricas, que evidenciam a relevância desse sólido para a compreensão de fenômenos espaciais. Além disso, serão discutidos exemplos práticos que demonstram a presença da esfera em contextos naturais e em diferentes áreas da ciência.

Figura 10 - Sólido geométrico tridimensional (Esfera)



Fonte: O autor, 2026.

Na geometria espacial, a esfera é entendida como o lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional que estão a uma distância fixa “r” de um ponto central $O(x_0,y_0,z_0)$. Sua equação é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

O cálculo do volume da esfera representa um conteúdo essencial dentro da Geometria Espacial, tradicionalmente abordado no terceiro ano do Ensino Médio.

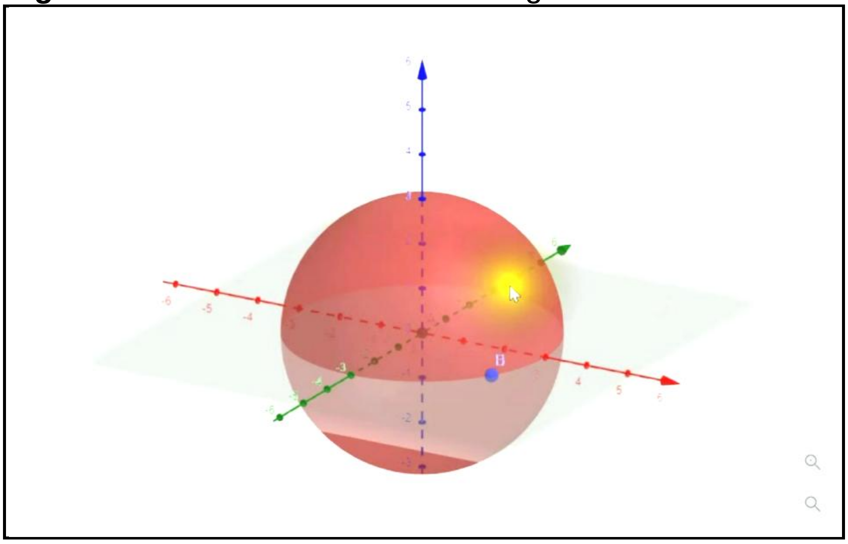
Considerando sua relevância na formação matemática dos estudantes, este trabalho apresenta uma análise dos procedimentos e fundamentos envolvidos nesse estudo, conforme desenvolvido na Educação Básica.

Componentes da Equação

- ✓ {(x_0, y_0, z_0)}: Coordenadas do centro “O” da esfera.
- ✓ (r): Raio da esfera.
- ✓ {(x, y, z)}: Coordenadas de qualquer ponto na superfície da esfera.

Quando o centro da esfera está na origem {(0, 0, 0)} e o raio é (r) então, tem-se a seguinte situação verificada na figura abaixo.

Figura 11 - Esfera com centro na origem das coordenadas



Fonte**:** O autor, 2026.

A equação da esfera simplificada, é dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (2)$$

Essa equação é construída pelo próprio aluno automaticamente durante o processo de interação com o artefato Geogebra.

3.6.1 ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA

A esfera é um dos sólidos geométricos estudado na Geometria Espacial, possui propriedades que a tornam relevante em diversas áreas do conhecimento, como física, engenharia e arquitetura. Duas de suas principais características são a área superficial "A" e o volume "V", ambos diretamente relacionados ao raio "r" da esfera.

A área superficial da esfera é dada pela expressão:

$$A = 4\pi r^2 \qquad (3)$$

Nessa expressão (3), "A" representa a área total da superfície, "r" corresponde ao raio da esfera e "pi" é a constante matemática cujo valor aproximado é 3,14159. Observa-se que a área cresce proporcionalmente ao quadrado do raio, o que implica que, ao duplicar o raio, a área superficial quadruplica.

O volume da esfera, por sua vez, é determinado pela fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (4)$$

Nessa expressão (4), "V" corresponde ao espaço interno delimitado pela superfície esférica. Neste caso, o crescimento é cúbico em relação ao raio: ao duplicar o raio, o volume aumenta oito vezes.

A comparação entre as duas expressões evidencia que, embora ambas dependam do raio, o volume apresenta uma taxa de crescimento mais acelerada do que a área superficial. Essa diferença é fundamental para compreender fenômenos naturais e aplicações práticas, como a relação entre a superfície e o volume em organismos vivos, ou ainda em cálculos de capacidade e revestimento de estruturas esféricas.

Ambas possuem uma longa jornada na construção de suas demonstrações, com contribuições de diversos matemáticos ao longo dos séculos, como Arquimedes, Euler, Gauss e muitos outros que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo e da geometria, refinando as técnicas de demonstração e cálculo de volumes.

Nos últimos anos, pesquisadores como Dante (2016), Ralestri (2016) e muitos outros citados por Marques (2019) têm realizado direcionamentos sobre a forma como a ideia de área de uma superfície esférica, assim como o volume de uma esfera vêm sendo apresentados aos alunos em sala de aula. Marques (2019) descreveu em sua obra o modelo de demonstração utilizado nos livros didáticos.

> Posteriormente, o autor apresenta de forma direta as fórmulas para cálculo da área da superfície esférica fazendo a associação [com] a área do círculo máximo. A fórmula para cálculo volume é apresentada e posteriormente [demonstrada] meio da anticlépsidra e através do método de Arquimedes,

> nesse momento também surge o conceito de secção esférica e a fórmula para cálculo de sua área. (Marques, 2019, p. 42) “grifos nosso”

Pela obra de Marques (2019), podemos perceber que nos livros didáticos estudados, os autores ofereceram de início as fórmulas aos alunos e em seguida fazem comparações entre objetos do cotidiano e daí expõe as definições e elementos da esfera; e somente depois determinam a área da superfície esférica e o volume da esfera. Essa apresentação é realizada por meio da decomposição da esfera em infinitas pirâmides de base poligonal e altura r como na Figura 12, mostram que é possível se chegar ao volume aproximado da esfera pela soma dos volumes dessas pirâmides representado por: $\frac{4}{3}\pi r^3$ e que a superfície esférica pode ser encontrada a partir da soma das áreas de todas as bases dessas pirâmides que estão na superfície da esfera e seus vértices no centro, a qual corresponde a $4\pi r^2$.

3.6.2 DEMONSTRAÇÃO INTUITIVA DA FÓRMULA DA ÁREA DA ESFERA

A compreensão da área da superfície esférica pode ser alcançada por meio da decomposição da esfera em infinitas pirâmides como visto na Figura 12, todas com vértice no centro “O” e altura igual ao raio “r”. As bases dessas pirâmides correspondem a pequenos polígonos que, somados, recobrem toda a superfície da esfera. Assim, a soma das áreas das bases infinitesimais resulta na área total da superfície esférica.

Aplicando a fórmula do volume da pirâmide, temos que:

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.A_{base}.h \qquad (5)$$

Como a altura (h) de cada pirâmide é o mesmo comprimento do raio (r) da esfera, e a área total da soma das áreas das bases de todas as pirâmides se aproxima da área da superfície da esfera e por outro lado, a soma do volume de todas as pirâmides nos fornece o volume total da esfera a partir da fórmula $\frac{4}{3}\pi r^3$, situação essa que nos permite fazer a seguinte comparação:

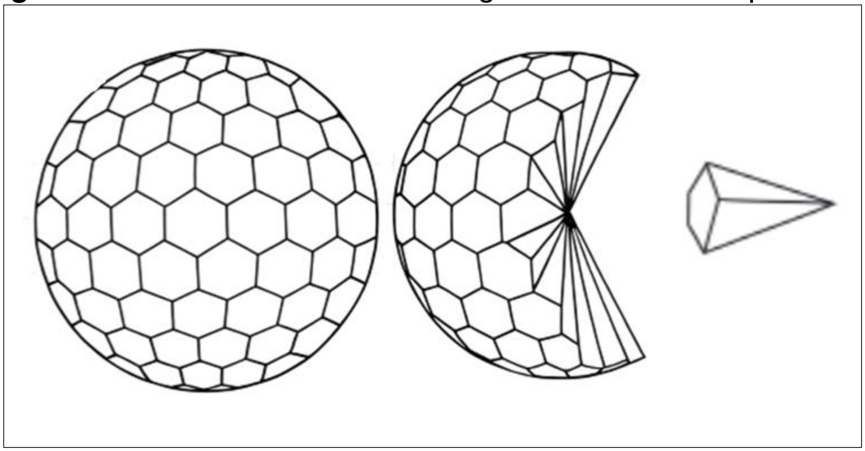
$$\frac{r}{3}(A_1 + A_2 + A_1 + \cdots) = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (6)$$

Na comparação evidenciada pela Equação 6, observa-se que a fórmula da área da superfície esférica corresponde à soma das áreas $(A_1 + A_2 + A_1 + \cdots)$ das bases das pirâmides ilustradas na Figura 12 definida como:

$$(A_1 + A_2 + A_1 + \cdots) = 4\pi r^2 \qquad (7)$$

Ao abordar o estudo da esfera na geometria espacial, é fundamental que o professor não se limite à apresentação direta das fórmulas, mas conduza o aluno por um processo de construção conceitual. A decomposição da esfera em pirâmides de altura r, a relação entre área da superfície e volume, e a dedução das expressões matemáticas devem ser exploradas como etapas de um raciocínio lógico. Dessa forma, o estudante compreende que as fórmulas não são resultados isolados, mas consequências naturais de definições e propriedades geométricas. Esse método de ensino favorece a autonomia intelectual, estimula a capacidade de dedução e fortalece a visão crítica sobre a matemática como ciência estruturada e coerente.

Figura 12 - Esfera dividida em um grande número de pirâmides



Fonte: O autor, 2026.

3.6.3 PARTES INTEGRANTES DE UMA ESFERA

Elementos essenciais na determinação de uma esfera. O primeiro ponto seria justamente o valor do comprimento do raio (r) da esfera que corresponde a distância do centro da esfera até qualquer ponto na sua superfície. Essa distância (raio) também pode ser encontrada a partir do diâmetro (D) da esfera, que corresponde a medida geométrica que descreve o comprimento entre dois pontos opostos de uma esfera, passando pelo centro dela. Em outros termos, é a maior distância que pode ser medida dentro de uma esfera, a mesma que pode ser encontrada em um círculo.

As principais características do diâmetro de uma esfera é o centro “O” que vem a ser o ponto central pelo qual o diâmetro passa; é importante destacar que o diâmetro “D” é igual a duas vezes o valor do raio “r”, de modo que: D = 2r, onde (r) é o raio da circunferência ou esfera. O diâmetro também pode ser considerado como a maior corda tanto de um círculo como de uma esfera, sendo a maior corda possível que passa pelo centro. Podemos citar alguns exemplos de diâmetros no cotidiano do aluno como o diâmetro de uma moeda, o diâmetro de uma bola de futebol, o diâmetro de uma bola de gude, o diâmetro de uma laranja, o diâmetro de uma roda de bicicleta, o diâmetro de um tubo PVC, etc.

De maneira bem simples é possível determinar o volume de uma esfera qualquer, bastando ter em mãos apenas o comprimento do raio (r), pois a fração $\mathbf{\frac{4}{3}}$ e a constante π são fixos sempre para qualquer esfera.

Como exemplo de um problema que envolve o cálculo do volume de uma esfera baseado apenas no comprimento do raio, é possível sugerir ao aluno que considere uma esfera com o raio medindo x cm de comprimento, e o mesmo seja inquirido a determinar o volume dessa esfera. Dessa forma, ele deverá fazer uso da fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para determinar o volume “V”, fazendo x=r em $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ e assim, após realizar todos os cálculos, chegará ao volume solicitado.

Outro exemplo ocorre quando o docente propõe um problema no qual é fornecido o volume de uma esfera, igual a *X* cm^3, e questiona o estudante sobre o valor do seu diâmetro “D”. De posse dessa informação, o aluno deve realizar os cálculos substituindo *V* =*X* na fórmula do volume da esfera para determinar o raio r. Sabendo que $r = \sqrt[3]{\frac{3X}{4\pi}}$, basta multiplicar esse resultado por dois para encontrar o diâmetro correspondente.

Capítulo 4 - BASE TEÓRICA

A Teoria da Instrumentação desenvolvida por Pierre Rabardel (1995), oferece uma estrutura conceitual para compreender como os sujeitos se apropriam de artefatos e os transformam em instrumentos de aprendizagem. Segundo essa perspectiva, os instrumentos não são apenas ferramentas técnicas, mas mediadores ativos que influenciam as ações cognitivas dos indivíduos.

O processo de gênese instrumental compreende duas dimensões interdependentes, cuja compreensão é fundamental para a análise da relação entre sujeito e artefato. A primeira, denominada "instrumentalização", refere-se à apropriação do artefato pelo sujeito, que aprende a utilizá-lo como ferramenta em suas atividades. A segunda, chamada "instrumentação", diz respeito à influência que o artefato exerce sobre as ações, estratégias e formas de pensar do sujeito. Essas duas dimensões serão representadas de forma esquemática no Quadro 2, com o objetivo de evidenciar suas características e distinções.

Quadro 2 - Diferença entre Instrumentalização e Instrumentação

Dimensão	Definição	Foco principal	Exemplo prático
Instrumentalização	Processo pelo qual o sujeito se apropria do artefato, aprendendo a utilizá-lo como ferramenta.	Ação do sujeito sobre o artefato.	O aluno aprende a usar arroz para preencher cilindros e esferas e comparar seus volumes.
Instrumentação	Processo pelo qual o artefato influencia as ações, estratégias e formas de pensar do sujeito.	Ação do artefato sobre o sujeito.	Essa interação reorganiza os esquemas cognitivos do estudante, mediando a transição da percepção visual para a dedução lógica de conceitos e fórmulas.

Fonte: O autor, 2026.

A utilização do arroz como material manipulável para a medição de volumes em sala de aula justifica-se por sua excelência em termos de segurança, viabilidade prática e clareza pedagógica. Por ser um elemento limpo e comercial, ele elimina os riscos respiratórios e oculares associados à poeira da areia, além de garantir um manejo logístico eficiente, visto que seus grãos são fáceis de recolher e não sofrem com problemas de aderência causados pela umidade. Ademais, sua granulometria macroscópica favorece a visibilidade do preenchimento em recipientes transparentes por toda a turma e proporciona um arranjo espacial mais estável e uniforme, minimizando distorções por compactação e resultando em aproximações matemáticas mais precisas e consistentes durante a atividade experimental.

No contexto do ensino da matemática, essa teoria permite analisar como os alunos interagem com recursos didáticos, como materiais manipuláveis e softwares educacionais, e como essas interações contribuem para a construção de saberes. A aplicação da Teoria da Instrumentação na elaboração da sequência de atividades possibilita a criação de ambientes de aprendizagem dinâmicos, nos quais os estudantes assumem um papel ativo, explorando, experimentando e refletindo sobre os conceitos matemáticos.

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, proposta por Raymond Duval (2012), destaca a importância da mobilização e conversão entre diferentes registros de representação, como o algébrico, o gráfico, o geométrico e o linguístico, para a compreensão efetiva dos conceitos matemáticos. Segundo o autor, a aprendizagem em matemática depende da capacidade de transitar entre registros e de estabelecer conexões significativas entre eles. Tal perspectiva se mostra especialmente relevante no ensino da geometria espacial, no qual a visualização e a representação desempenham papel central. Ao analisar as produções dos alunos com base nessa teoria, é possível identificar obstáculos cognitivos, dificuldades de conversão entre registros e estratégias de superação, contribuindo para o aprimoramento das práticas pedagógicas.

A construção da sequência de atividades foi orientada pelos referenciais teóricos mencionados, com o objetivo de promover a aprendizagem significativa dos conceitos de área e volume da esfera. As atividades foram organizadas de forma progressiva, contemplando os conhecimentos prévios dos alunos e incentivando a resolução de problemas em contextos reais.

Essa estrutura permitiu criar um ambiente de aprendizagem investigativo, no qual os estudantes foram estimulados a formular hipóteses, testar ideias, representar conceitos de diferentes maneiras e refletir sobre suas próprias estratégias. A sequência não se limitou à aplicação de exercícios, mas constituiu um percurso didático intencional voltado à construção ativa do conhecimento. O Geogebra, software de geometria dinâmica, foi utilizado como recurso pedagógico para favorecer a visualização e manipulação de objetos geométricos tridimensionais. Sua interface interativa permite aos alunos explorar propriedades e relações espaciais de forma concreta, o que facilita a compreensão de conceitos abstratos como área e volume da esfera.

No âmbito da Teoria da Instrumentação, o Geogebra é compreendido como um artefato que, ao ser apropriado pelos alunos, transforma-se em instrumento de aprendizagem. Sua utilização em sala de aula possibilita a articulação entre diferentes registros de representação, conforme proposto por Duval, e contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e da criatividade dos estudantes. A abordagem metodológica adotada neste estudo insere-se no campo da pesquisa qualitativa, que busca compreender fenômenos educacionais a partir da análise de contextos específicos, das interações entre os sujeitos e das interpretações construídas ao longo do processo investigativo. Essa perspectiva valoriza a complexidade do ambiente escolar e permite uma análise aprofundada das práticas pedagógicas e dos processos de aprendizagem.

Mais especificamente, a pesquisa foi conduzida sob a perspectiva da pesquisa-ação, caracterizada pela intervenção planejada no contexto educativo com o objetivo de promover transformações e, simultaneamente, produzir conhecimento sobre a prática. Essa abordagem pressupõe a participação ativa do pesquisador no ambiente investigado, bem como a reflexão contínua sobre os efeitos das ações implementadas. No caso deste estudo, a aplicação da sequência de atividades em sala de aula constituiu o núcleo da intervenção, permitindo observar, registrar e analisar os impactos da proposta sobre a aprendizagem dos alunos.

Ao aplicar essa teoria no ensino da matemática em seu processo de aprendizagem podemos organizar a experimentação em sala de aula e tornar o ensino da matemática mais dinâmico e eficaz, analisando sempre à forma como os alunos interagem com os instrumentos de aprendizagem.

A proposta ofereceu uma estrutura teórica que permitiu compreender como os alunos se apropriaram e transformaram as ferramentas educacionais em instrumentos de aprendizagem. Esse processo é crucial para a construção do conhecimento matemático, pois considera as interações entre os alunos e os recursos didáticos facilitando a adaptação das estratégias pedagógicas às necessidades específicas dos estudantes. Não apenas pode aprimorar o raciocínio lógico do estudante, mas também os prepara para enfrentar desafios complexos em diversas áreas do conhecimento e na sua vida cotidiana.

A construção de uma sequência de atividades, baseada nesses aportes teóricos, permite criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo. As atividades foram estruturadas para promover a exploração, a experimentação e a reflexão, incentivando os alunos a serem agentes ativos no processo de aprendizagem. Por exemplo, ao utilizar ferramentas tecnológicas, como softwares de geometria dinâmica, os alunos puderam visualizar e manipular conceitos matemáticos de forma mais concreta, o que facilitou a compreensão e a internalização desses conceitos.

Além disso, a abordagem proposta pela gênese instrumental de Rabardel permitiu uma análise detalhada das interações dos alunos com as ferramentas educacionais, identificando as dificuldades e facilidades encontradas no processo de aprendizagem. Essa análise pode orientar a elaboração de atividades mais eficazes, que considerem as especificidades do contexto educativo e as características dos alunos.

Em resumo, a utilização da teoria da instrumentação de Rabardel (1995) na construção da sequência de atividades pôde proporcionar uma metodologia robusta e versátil para o ensino da matemática, que neste caso foi aplicada para o ensino da geometria espacial. Essa abordagem não só promove a compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos, como também desenvolve mecanismos e habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional dos alunos.

Diversos estudos têm demonstrado resultados positivos na aplicação da Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995) no ensino da matemática, especialmente quando associada ao uso de tecnologias educacionais. Como exemplo posso citar alguns trabalhos como o de HENRIQUES *et al*. (PUC-SP) que destacam a abordagem instrumental e como ela favorece a autonomia dos estudantes, assim também como a compreensão dos conceitos matemáticos ao transformar ferramentas digitais, como o Geogebra, em instrumentos de aprendizagem.

Oliveira (2023), também é um ótimo exemplo, pois analisou o uso do Geogebra sob a ótica da gênese instrumental, e observou avanços significativos na visualização espacial, na resolução de problemas e na articulação entre diferentes registros de representação. Assim também como MENIN *et al*. (2021), em um estudo voltado à formação de professores, evidenciaram que a Teoria da Instrumentação contribui para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficazes, ao permitir compreender como os futuros docentes se apropriam de artefatos tecnológicos e os integram ao processo de ensino. Esses exemplos reforçam a relevância e a versatilidade da teoria de Rabardel como base para propostas didáticas inovadoras e contextualizadas.

4.1 TEORIA DA INSTRUMENTAÇÃODE RABARDEL (1995)

A Teoria da Instrumentação, proposta por Pierre Rabardel (1995), oferece uma estrutura teórica robusta para compreender a relação entre sujeitos e artefatos no contexto da atividade humana. Diferentemente de abordagens que tratam os instrumentos apenas como ferramentas técnicas, Rabardel os concebe como mediadores ativos que participam da construção do conhecimento e da organização da ação. Nessa perspectiva, o instrumento não é algo dado, mas sim construído a partir da interação entre o sujeito e o artefato, por meio de um processo denominado gênese instrumental.

A gênese instrumental é composta por duas dimensões interdependentes: a instrumentalização, que se refere ao processo pelo qual o sujeito atribui funções e significados ao artefato, e a instrumentação, que diz respeito à forma como o artefato influencia e estrutura as ações do sujeito. Essa relação dinâmica transforma o artefato em um verdadeiro instrumento, ou seja, em um elemento funcional incorporado à atividade do sujeito.

Essa concepção amplia a compreensão sobre o papel das ferramentas no processo de aprendizagem, especialmente em contextos educacionais mediados por tecnologias. Os instrumentos não apenas facilitam a execução de tarefas, mas também moldam os modos de pensar, agir e resolver problemas. Assim, a aprendizagem não ocorre apenas pela transmissão de conteúdos, mas pela apropriação ativa de instrumentos que reorganizam a atividade cognitiva dos aprendizes.

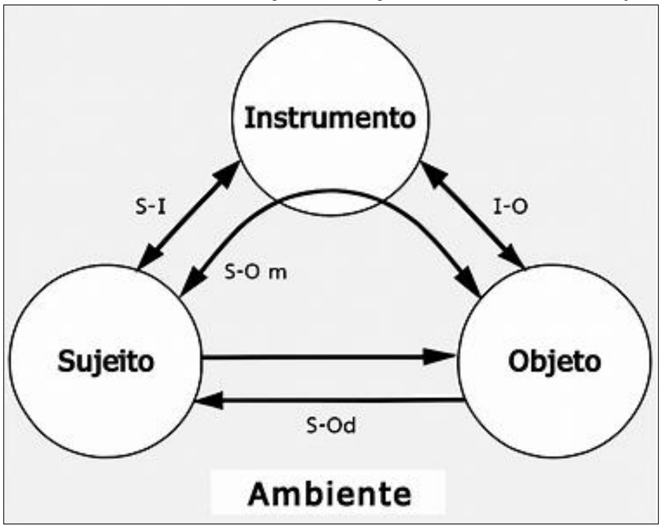
A Teoria da Instrumentação dialoga com os fundamentos da psicologia histórico-cultural de Lev Vygotsky[1] (1934), ao reconhecer o papel mediador dos instrumentos culturais no desenvolvimento humano. Vygotsky argumenta que os instrumentos, como a linguagem, os signos e as ferramentas, não apenas transformam o ambiente, mas também os próprios sujeitos que os utilizam. Rabardel

[1]VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem*. Tradução de Maria da Graça M. C. Oliveira. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2008

retoma essa ideia e a desenvolve no âmbito da atividade técnica e cognitiva, oferecendo uma abordagem que integra aspectos simbólicos, operatórios e situacionais da ação humana.

Ao considerar os instrumentos como extensões das capacidades humanas, a teoria de Rabardel permite compreender como os sujeitos constroem esquemas de uso, adaptam estratégias e desenvolvem novas formas de agir diante das situações que enfrentam. Essa perspectiva é especialmente relevante para a análise das práticas educativas que envolvem o uso de artefatos tecnológicos, pois possibilita investigar como esses recursos são apropriados e transformados em instrumentos de aprendizagem. Abaixo vamos ver a representação da Teoria da Instrumentação de Rabardel considerando os três elementos: sujeito-objeto-instrumento.

Figura 13 - Triádica sujeito-objeto-instrumento (S-O-I)



Fonte: Tradução do diagrama original de RABARDEL (1995. p. 59).

A teoria da instrumentação de Rabardel se refere ao processo pelo qual um artefato (como um software ou um material manipulável) pode se transformar em um instrumento de aprendizado. Essa transformação ocorre por meio da construção de esquemas de utilização, que são as maneiras como o aluno utiliza o artefato para alcançar seus objetivos.

A utilização da teoria de Rabardel no ensino do cálculo do volume de uma esfera é uma abordagem teórica que busca compreender como os indivíduos interagem com ferramentas e as transformam nos instrumentos para realizar as tarefas propostas pelo professor em sala de aula. Ela pode proporcionar aos alunos uma compreensão mais profunda e dos conceitos espaciais. Por meio da resolução de problemas práticos e reais, é possível demonstrar como a matemática se aplica no cotidiano, facilitando a construção de conhecimentos que vão além da simples memorização de fórmulas.

A teoria de Rabardel (1995), nesse contexto, oferece uma perspectiva promissora para analisar como os estudantes interagem com o material manipulável e com o Geogebra e como constroem seus próprios conhecimentos sobre o volume e área da esfera. Ao utilizar o software, os estudantes podem visualizar a esfera a partir de diversas perspectivas, o que facilita a visualização espacial. Além disso, eles poderão explorar as propriedades da esfera, variar o raio e observar como essas mudanças afetam o volume, estabelecendo relações entre as diferentes variáveis com base em suas próprias reflexões. O aluno poderá construir modelos dinâmicos da esfera e realizar simulações com experimentos virtuais para testar suas hipóteses.

De acordo com a teoria de Rabardel, um artefato se transforma em um instrumento de ensino à medida que o professor e os alunos o integram em suas práticas pedagógicas. Com isso em mente, e visando explorar construções geométricas e conceitos matemáticos de forma interativa e dinâmica, este trabalho propõe desenvolver uma sequência de atividades utilizando materiais manipuláveis e o Software de Geometria Dinâmica (Geogebra). A Teoria da Instrumentação de Pierre Rabardel intitulado como “Leshommes et lestechnologies: approche cognitive des instruments contemporains” com publicação em 1995, explora como os artefatos tecnológicos se transformam em instrumentos didáticos através do uso e da interação humana.

A teoria descreve o processo pelo qual um artefato se transforma em um instrumento através do uso e da apropriação pelo aluno. Tal processo envolve a criação de esquemas de uso que permitem ao aluno integrar o artefato em suas práticas cotidianas. De maneira geral, compreende-se que o instrumento não deve ser visto como objeto pronto para ser entregue ao aluno, mas sim como algo que precisa ser desenvolvido pelo próprio aluno para satisfazer uma necessidade que o professor deverá provocar em sala de aula.

Rabardel (1995) argumenta que a interação entre o usuário e o artefato é essencial para que o artefato se torne um instrumento eficaz, capaz de mediar a atividade do aluno de maneira produtiva. Para ele a instrumentação, refere-se ao desenvolvimento de esquemas de uso do artefato pelo usuário. É a adaptação do artefato às necessidades práticas. Já a instrumentalização, trata-se das modificações que o usuário faz no artefato para melhor adequá-lo às suas necessidades. Isso pode incluir tanto mudanças físicas quanto ajustes na forma de utilização.

Rabardel (1995) mostra que um registro é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que são próprios de cada um, fazendo com que o aluno tenha a capacidade de criar e desenvolver seu raciocínio matemático. Essa perspectiva pode ser favorável no ensino referente ao cálculo do volume da esfera devendo proporcionar ao aluno um desenvolvimento intelectual mais favorável.

Embora a Matemática seja frequentemente descrita como a “ciência dos números e das formas, das relações e das medidas” cujas características fundamentais são a “precisão, o rigor e a exatidão” (D'AMBROSIO, 2005, p.104), a prática pedagógica contemporânea busca humanizar esse saber. Nesse sentido, a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995) oferece o suporte teórico necessário para compreender que tal rigor só é alcançado pelo aluno através de um processo de gênese instrumental. Por fim, com nessa estratégia didática o aluno tem a possibilidade de demonstrar domínio do conteúdo ensinado e com isso favorecer apropriação daquele assunto.

4.2 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval (2012) e baseia-se nos estudos sobre semiótica de Charles Peirce e Ferdinand de Saussure, aplicados à Matemática. Esta teoria define o conceito de registro semiótico, que indica as diferentes representações semióticas dos objetos matemáticos, podendo ser, inclusive: algébrico, fracionário ou figural, geométrico, linguístico.

Para compreender a aquisição conceitual através da mobilização e coordenação dos registros de representação, conforme proposto por Duval, é essencial entender profundamente duas atividades cognitivas fundamentais: o tratamento e a conversão. O tratamento refere-se à transformação interna de um registro dentro do mesmo sistema semiótico, enquanto a conversão envolve a transposição de um registro de um sistema semiótico para outro. Essas atividades são cruciais para a apreensão e a manipulação eficaz dos conceitos matemáticos.

> O tratamento é uma transformação de representações que ocorre no mesmo sistema de representação; é uma transformação estritamente interna a um registro. Dessa maneira, cada registro tem um conjunto de regras próprias de tratamento e funcionamento que não são necessariamente válidas a um outro registro. A conversão de uma representação é uma transformação que ocorre entre registros diferentes. A representação de um objeto em um dado registro é convertida em uma representação em outro registro, que conserva a referência, mas não conserva o sentido, ou seja, não conserva as mesmas propriedades do objeto. Por esse motivo, a operação de conversão permite compreender diferentes aspectos de um mesmo objeto, conduzindo à compreensão. (DENARDI, 2018, p. 06-07)

A hipótese fundamental da teoria é que a aprendizagem dos objetos matemáticos acontece na realização de conversões entre registros semióticos diferentes. Portanto, uma das prioridades do ensino de matemática deve ser a capacidade de realizar essas conversões. A Matemática frequentemente trabalha com objetos abstratos, que podem ser representados em diferentes registros semióticos.

> A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes [...] (DUVAL, 2009, p. 18, Apud DENARDI, 2018, p. 06)

Além disso, Duval afirma enfaticamente que não existe noesis sem semiose, ou seja, que a apreensão dos conceitos matemáticos depende da pluralidade de sistemas semióticos, com a coordenação pelo próprio sujeito. O termo "registro" é usado por Duval para signos com a mesma referência em um sistema semiótico. Por exemplo, uma parábola em um registro algébrico pode ser representada em um registro gráfico no plano cartesiano. Dernardi (2018, p. 7) enfatiza que pela definição de Duval, “a lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: ‘Não há noésis (aquisição conceitual de um objeto) sem semiósis (apreensão ou produção de uma representação semiótica)‘, ou seja, não há aquisição conceitual de um objeto sem recorrer a sistemas semióticos.”

> “o fato de o aluno saber resolver uma situação numa determinada representação (semiósis) não garante que ele tenha adquirido o conceito. Para ocorrer a aquisição conceitual de um objeto (noésis) muitas representações devem ser mobilizadas, pois cada registro de representação revela um determinado conteúdo, uma determinada característica, um diferente sentido do objeto.” (DENARDI, 2018, p. 08)

Capítulo 5 - METODOLOGIA

A Geometria Espacial é um conteúdo do currículo de matemática, que ajuda os alunos a entenderem conceitos fundamentais de geometria e mensuração. Esses cálculos permitem que os estudantes compreendam melhor a relação entre as formas tridimensionais e suas representações bidimensionais, desenvolvendo habilidades espaciais e de visualização.

O estudo do cálculo da área e do volume da esfera e de suas propriedades apresenta aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento. Na física, por exemplo, é essencial para calcular o volume de bolhas de gás em experimentos de termodinâmica ou o comportamento de partículas esféricas em campos gravitacionais. Na engenharia, é utilizado no dimensionamento de reservatórios esféricos, como tanques pressurizados ou estruturas geodésicas. Já nas ciências naturais, esse conhecimento é aplicado na estimativa do volume de frutos esféricos, como laranjas ou tomates, em estudos de biomassa e produtividade agrícola, por essa razão, torna-se essencial para a formação acadêmica completa do estudante.

Esta pesquisa adotou uma abordagem qualitativa de natureza exploratória, com o objetivo de investigar como a utilização de recursos concretos e digitais pode contribuir para a aprendizagem significativa dos conceitos de área e volume da esfera no ensino médio. As transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática. A atividade ocorreu em uma escola pública do Estado do Pará e contou com a autorização[2] da direção da escola e o apoio do professor responsável pela turma, sendo realizada com a participação de 16 estudantes, pertencentes à faixa etária de 17 a 21 anos, o que possibilitou a análise de um grupo relativamente homogêneo em termos de idade..

O referencial teórico que fundamentou a construção das atividades foi a Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), a qual permitiu compreendermos como os alunos se apropriaram dos artefatos, neste caso, os materiais concretos e o software Geogebra, e como transformaram em instrumentos cognitivos por meio da gênese instrumental. A Teoria foi adotada para o planejamento e a condução das

[2] O Ofício nº 33/2025, que regulamenta a pesquisa, bem como o Termo de Autorização emitido pela instituição escolar, constam no **Anexo B**. Já os modelos do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) — destinados aos discentes maiores de idade e aos responsáveis pelos alunos menores — encontram-se dispostos no **Apêndice B**.

tarefas, por proporcionar uma compreensão aprofundada dos processos pelos quais os alunos se apropriam e transformam em artefatos. Essa perspectiva permitiu observar e interpretar as interações entre os estudantes e os recursos didáticos, oferecendo subsídios valiosos para a análise do processo de construção do conhecimento matemático.

A investigação foi realizada em uma escola pública de ensino médio localizada na cidade de Belém do Pará, com a participação de 16 estudantes do terceiro ano. A intervenção pedagógica consistiu na aplicação de uma sequência de atividade composta por cinco tarefas com perguntas que estimularam a iniciativa e a autonomia, cada um com duração de duas horas-aula, totalizando dez horas de atividades em sala de aula.

A sequência de atividades foi elaborada com base em situações-problema que estimulassem a resolução colaborativa, a experimentação e a construção de conceitos geométricos por meio da manipulação de materiais concretos e da exploração de ferramentas digitais. O software Geogebra foi utilizado de forma planejada e intencional, com o propósito de favorecer a visualização e a compreensão das propriedades da esfera, bem como de suas fórmulas de área e volume.

Para realização das atividades propostas nesse trabalho, os participantes se organizaram em grupos de dois a quatro alunos; não foram informados, logo de início, que na atividade seria envolvido conhecimentos de matemática. Para futuras explicações, sugerimos que o ambiente se mantenha favorável e sem pressões de termos e conceitos que os levem a bloqueios durante a atividade.

Os alunos fizeram suas explicações de forma oral e por escrito a partir de seus conhecimentos e com suas próprias palavras em um espaço pré-definido pela atividade, e ao longo das tarefas as nomenclaturas e definições dos conceitos vão sendo construídos e formalizados.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa o professor precisa promover a interação junto aos grupos, e através da manipulação de objetos e da interação com os colegas, eles possam desenvolver suas próprias ideias sobre o tema, aproximando-se da resposta correta de forma gradual.

Durante a aplicação da sequência de atividades, foram coletados dados por meio de observações diretas, registros escritos produzidos pelos alunos, capturas de tela das construções realizadas no software Geogebra e gravações em áudio das interações ocorridas em sala de aula. Esses instrumentos permitiram acompanhar o desenvolvimento das atividades e registrar evidências dos processos de aprendizagem.

A análise dos dados foi orientada pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2012), com foco na identificação dos diferentes registros mobilizados pelos estudantes, como o linguístico, o gráfico e o algébrico, e na observação das transformações entre esses registros durante a resolução das tarefas propostas. Buscou-se compreender como os alunos interpretaram, representaram e articularam os conceitos geométricos relacionados à esfera, especialmente no que diz respeito ao cálculo do volume e da área da superfície esférica.

As dificuldades dos alunos para compreender a matemática surgem por conta da diversidade e complexidade das transformações. Para estudar esta complexidade, as representações semióticas devem ser analisadas, não a partir dos objetos ou dos conceitos matemáticos que representam, mas a partir do funcionamento representacional que é próprio do registro no qual são produzidas (DUVAL, 2012, p. 266 apud SILVA, et al, 2021), ou seja, não basta olhar para a fórmula do volume da esfera. É preciso entender como essa fórmula é usada? como os alunos a interpretam? e como ela se conecta com outras representações? como gráficos ou modelos 3D.

Essa abordagem analítica permitiu evidenciar os obstáculos de abstração e visualização enfrentados pelos estudantes, bem como os avanços obtidos a partir da mediação pedagógica e do uso de ferramentas digitais. A triangulação dos dados contribuiu para uma compreensão mais ampla dos processos de significação envolvidos na aprendizagem da geometria espacial.

A metodologia adotada permitiu compreender como os estudantes interagiram com os recursos propostos e de que forma essas interações influenciaram seus processos de aprendizagem. A análise buscou evidenciar os indícios de apropriação do conhecimento geométrico e a emergência de significados construídos a partir da articulação entre o concreto e o digital.

Com base nos cálculos realizados ao longo das atividades, os alunos puderam aprimorar suas habilidades de resolução de problemas e desenvolver o raciocínio lógico, competências essenciais tanto para a continuidade dos estudos quanto para sua inserção no mercado de trabalho. A metodologia adotada neste estudo buscou oferecer ferramentas e estratégias que estimulassem a autonomia dos estudantes, promovendo a exploração ativa e a resolução de problemas em contextos significativos.

Por fim, a análise dos dados obtidos durante a experimentação conduzida à luz da Semióticas de Duval (2012), serviu para identificar os registros mobilizados pelos alunos e compreender como as conversões e tratamentos entre diferentes formas de representação contribuíram para a compreensão dos conceitos de área e volume da esfera. Portanto, a articulação entre a teoria da instrumentação e a Semiótica de Duval possibilitou uma análise mais ampla e consistente dos processos de aprendizagem envolvidos, encerrando a etapa metodológica desta pesquisa.

5.1 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DO VOLUME E ÁREA DA ESFERA

Esse estudo apresentou uma sequência de atividade com o intuito de corroborar com o ensino e aprendizagem referente ao Cálculo do Volume e da área da Esfera, contribuição para o estudo de Sólidos Geométricos de Revolução. Tal Conteúdo é apresentado ao final do ensino de Geometria Espacial para alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Diante disso, foram elaboradas cinco atividades com o propósito de contemplar os conhecimentos prévios dos alunos acerca das figuras espaciais e contribuir para a consolidação do ensino sobre os Corpos Redondos, com ênfase nas propriedades e características da esfera.

Para desenvolver as atividades, utilizou-se a teoria da instrumentação de Pierre Rabardel (1995) como referência. Essa teoria proporcionou uma visão importante para compreendermos como os alunos interagem com as ferramentas tecnológicas e com o material concreto e como as conversões em instrumentos ocorrem.

Com essa proposta, o aluno pôde usar sua capacidade de criar e desenvolver seu raciocínio matemático inerente ao estudo do cálculo do volume de uma esfera e da área da superfície esférica. Também foi possível constatar essa perspectiva de desenvolvimento intelectual por parte do aluno, como era previsto nas abordagens realizadas por D’Ambrósio (2005, p.114, *apud* Ribeiro, 2022) em: “[...] a ciência dos números e das formas, das relações e das medidas, das inferências, e as suas características apontam para precisão, rigor e exatidão”.

Nesta sequência de atividade foram empregados recursos didáticos como material manipulável (cilindro, esfera, arroz e régua) e tecnologias digitais (Geogebra). A partir das pesquisas realizadas para este trabalho, verificou-se a importância e influência das interações entre aluno e professor e entre aluno e objeto que contribuem para o entendimento de aspectos da Geometria Espacial como um todo.

Esta sequência de atividade aproxima os conceitos matemáticos adquiridos pelos alunos ao longo do tempo, com o intuito de favorecer a comunicação e a reflexão sobre os conhecimentos geométricos, em especial, sobre o volume e área da esfera. Podemos observar nos registros da BNCC (2018) que trata das habilidades para o ensino médio em (EM13MAT309): *“Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados”* (BRASIL, 2018).

As tarefas empregadas nesta experimentação foram preparadas com rigor metodológico, de modo a garantir clareza, objetividade e alinhamento com os objetivos da pesquisa. Cada atividade foi elaborada considerando os fundamentos teóricos previamente discutidos, bem como a necessidade de proporcionar ao estudante, condições adequadas para a construção do conhecimento. Além disso, buscou-se assegurar que as tarefas fossem progressivas e coerentes, permitindo ao aluno compreender não apenas os resultados obtidos, mas também o processo que o levou às deduções e conclusões elaboradas.

Cada atividade foi estruturada de modo a seguir rigorosamente os critérios estabelecidos no Quadro 3, garantindo alinhamento metodológico e coerência com os objetivos da pesquisa. Esses critérios funcionam como parâmetros orientadores para a elaboração das tarefas, assegurando que todas estejam em conformidade com os fundamentos teóricos discutidos e com a lógica de progressão adotada no estudo. Dessa forma, o quadro não apenas organiza os requisitos, mas também confere transparência e consistência ao processo de experimentação

Quadro 3 – Descrição das Atividades Propostas

Ordem	Descrição
A_1	**Exploração inicial das figuras espaciais**
	Os alunos foram convidados a identificar e diferenciar figuras geométricas espaciais, com foco na observação de objetos do cotidiano que apresentam formas semelhantes.(esfera e cilindro)
A_2	**Manipulação de modelos físicos**
	Foram utilizados materiais concretos (como bolas, cilindros e material para preenchimento do cilindro) para que os estudantes pudessem explorar características como forma, medidas e volume.
A_3	**Dedução da fórmula do volume da esfera por meio do raciocínio próprio**
	Os alunos foram desafiados a refletir sobre o conceito de volume da esfera, utilizando estratégias de estimativa, comparação com outro sólido geométrico(cilindro) e argumentação lógica. A atividade teve como objetivo estimular o pensamento crítico e a formulação de hipóteses, conduzindo os estudantes à construção autônoma da fórmula do volume.
A_4	**Construção de uma esfera no Geogebra como estímulo à criatividade**
	Nesta etapa, os alunos utilizaram o software Geogebra para realizar a construção digital de uma esfera, explorando diferentes possibilidades de representação e manipulação. A atividade buscou incentivar a criatividade, a familiarização com ferramentas digitais e a compreensão visual da estrutura tridimensional da esfera.
A_5	**Dedução da fórmula da área da superfície da esfera a partir de construções no Geogebra**
	Por fim, os estudantes realizaram a construção de duas esferas no Geogebra com diferentes dimensões, comparando suas características e analisando a relação entre raio e área superficial. A atividade teve como propósito favorecer a dedução da fórmula da área da superfície da esfera, com base na observação, experimentação e raciocínio matemático.

Fonte: O autor, 2026.

A estruturação metodológica da sequência didática proposta nesse quadro, organizou-se em cinco etapas interdependentes, as quais articulam progressivamente a experimentação física e a modelagem digital para a compreensão dos conceitos de área e volume da esfera. Inicialmente, as ações centram-se na mobilização cognitiva e sensorial dos estudantes por meio das etapas A1 e A2, que priorizam a exploração visual de objetos cotidianos e a manipulação direta de modelos físicos tridimensionais, como esferas e cilindros. Esse contato empírico inicial atua como base para a etapa A3, na qual os discentes são desafiados a elaborar hipóteses e estimativas comparativas entre os volumes dos sólidos manipulados, impulsionando a dedução autônoma da expressão matemática do volume antes mesmo de qualquer formalização teórica tradicional.

Dando continuidade ao percurso pedagógico, a sequência transpõe a investigação do espaço físico para o ambiente virtual com a introdução das etapas A4 e A5, mediadas pelo uso do software Geogebra 3D. A transição para o ambiente digital visa potencializar a capacidade de visualização espacial dos alunos através da construção geométrica dinâmica da esfera, estimulando diferentes formas de representação tridimensional. Dessa maneira, as duas últimas etapas aproveitam os recursos de variação paramétrica do software para conduzir os estudantes à observação das relações métricas entre o raio e a superfície esférica, fornecendo os subsídios geométricos necessários para a investigação e a subsequente dedução da fórmula da área superficial.

5.2 ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS PARA PROFESSORES: PRÁTICA EXPERIMENTAL NO ENSINO DE ÁREA E VOLUME DA ESFERA COM GEOGEBRA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS.

A elaboração de sequências didáticas no ensino de matemática, especialmente em temas envolvendo geometria espacial e o cálculo do volume e área da esfera, demanda atenção à organização dos grupos, à linguagem empregada, aos recursos didáticos selecionados e à mediação docente. O presente capítulo visa orientar professores interessados em implementar uma atividade experimental já validada junto a alunos, detalhando estratégias de organização, acompanhamento, uso de tecnologias digitais, notadamente o Geogebra, bem como o sequenciamento de tarefas que valorizem a construção ativa do conhecimento e o desenvolvimento da autonomia intelectual dos estudantes.

Sob uma perspectiva fundamentada em teorias sociointeracionistas e construtivistas, e à luz das diretrizes curriculares nacionais, este texto integra recomendações baseadas em literatura especializada, relatos de experiência e práticas já consolidadas. Destina-se a oferecer subsídios teórico-metodológicos e operacionais para professores que desejam diversificar suas intervenções didáticas e torná-las mais significativas, respeitando os ritmos e potencialidades dos alunos.

A experimentação realizada aqui demonstrou que a organização dos alunos em grupos de dois a quatro participantes favorece significativamente a colaboração e a troca de ideias entre os pares. O trabalho em pequenos grupos, nesses termos, cria espaço para que todos os membros participem ativamente, em diálogo construtivo e respeitando diferentes estilos e ritmos de aprendizagem. Para tanto, o docente deve monitorar constantemente as exposições, socializações e registros dos alunos, fazendo perguntas que estimulem o raciocínio lógico, como: "Você pode explicar por que decidiu fazer assim?"; "Como chegou a esse resultado?", "Você pode explicar esse raciocínio?". Esse tipo de intervenção, respeitosa e instigante, também contribui para a superação de bloqueios, pois valoriza o processo em detrimento do resultado final e reafirma o erro como momento de aprendizagem.

Optou-se, na ocasião, por não informar previamente que a atividade envolveria conteúdos matemáticos, o que contribuiu para a criação de um ambiente mais acolhedor, livre de pressões associadas a termos técnicos ou conceitos formais. Essa estratégia mostrou-se eficaz para evitar bloqueios cognitivos e promover uma participação mais espontânea e engajada dos estudantes. Para futuras aplicações, recomenda-se que o professor preserve essa atmosfera de leveza e abertura, permitindo que o conhecimento seja construído de forma significativa, respeitando os ritmos individuais e coletivos da turma.

Essa abordagem tem por objetivo prevenir tais bloqueios que frequentemente estão associados à ansiedade em relação à matemática. A literatura evidencia que a ansiedade matemática pode surgir diante da antecipação de dificuldades, afetando significativamente o desempenho e a participação ativa dos alunos. Portanto, um ambiente acolhedor e lúdico é essencial para incentivar a experimentação, a curiosidade e a superação gradual da percepção negativa que os alunos possam vir a ter em relação à disciplina.

Com base na experiência já realizada, recomenda-se que, em futuras aplicações da atividade, o professor acompanhe atentamente os alunos que apresentem raciocínios mais avançados, garantindo que esses estudantes sigam o desenvolvimento proposto passo a passo, sem se desvincular do ritmo coletivo. É importante permitir que os alunos se expressem oralmente e por escrito a partir de seus próprios conhecimentos e com suas próprias palavras, favorecendo uma abordagem mais significativa e pessoal. Ao longo das tarefas, o professor poderá introduzir gradualmente as nomenclaturas formais e definir os objetos envolvidos, respeitando o tempo de assimilação dos grupos. Além disso, é essencial que o docente interaja com os grupos de forma contínua, incentivando a construção de ideias e inferências que se aproximem das respostas corretas. Essa apropriação conceitual ocorre mesmo na ausência de termos científicos formais, fundamentando-se nos esquemas de ação gerados pela manipulação direta dos objetos. Para demonstrar como essa proposta se materializou no ambiente de classe, detalham-se adiante, em sua integridade, as atividades estruturantes que compõem esta pesquisa.

TAREFA 1

TÍTULO: Interpretar de forma mental os elementos que dão origem a uma esfera e sua relação com o volume.

OBJETIVO: Compreender de forma mental que os elementos que compõe a esfera estão relacionados com o volume.

MATERIAL UTILIZADO: Folhas de atividades, objeto com formato esférico, cilindro (mesma altura e largura da esfera de maneira que a esfera possa ser introduzida no cilindro), grãos de arroz em quantidade que preencherá o cilindro completamente, régua de 30 cm e lápis (ou caneta).

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Elementos de um cilindro (base, raio, altura) elementos da esfera (raio e diâmetro).

PROCEDIMENTOS: Cada grupo de aluno receberá um cilindro e uma esfera e as folhas de atividades contendo as seguintes instruções e questionamentos. Importante que cada questão esteja em uma folha isolada para discussão em grupo e seja entregue ao aluno sempre depois de concluída a questão anterior.

[Q_1] Qual o comprimento do raio da base do cilindro? Descreva com suas palavras a relação que há entre o raio e a altura desse cilindro.

____

____

[Q_2] Qual o comprimento da altura e da largura da esfera? Descreva como você chegou a esse resultado.

____

____

[Q_3] Quanto mede a distância que vai do centro da esfera ao topo da esfera? Explique como você chegou a essa resposta.

____

____

[Q_4] Quanto mede o comprimento que vai do centro da esfera a base da esfera? Justifique como você chegou a essa resposta.

____

[Q_5] Sabe-se que para encontrar o volume do cilindro temos que multiplicar a área da base pela altura. Explique com suas palavras qual seria o procedimento para encontrar o volume da esfera.

TAREFA 2

TÍTULO: Significado espacial do volume de uma esfera.

OBJETIVOS: Relacionar o conceito do volume do cilindro com a ideia de volume da esfera; Compreender que a quantidade de grãos que deverá ser retirada do cilindro corresponde ao volume da esfera.

MATERIAL UTILIZADO: Folhas de atividades; Esfera; Cilindro (com altura e diâmetro igual o da esfera); grãos de arroz; Régua de 30 cm e lápis (ou caneta).

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Relação do volume do cilindro com o volume da esfera. Noção intuitiva de cognição experimental com base no Princípio de Cavalieri e nos processos de Arquimedes para medir volumes, descoberto em 300 a.C.. Nesta sequência de atividade essas noções deverão ser observadas pelo próprio aluno na manipulação com os sólidos geométricos apresentados, comparando o volume do cilindro com o volume da esfera e refletindo sobre os resultados inerentes dessa manipulação, através de questionamentos que induzem o aluno a pensar.

PROCEDIMENTOS: Cada grupo de alunos receberá os materiais e as folhas de atividades contendo as seguintes instruções e questionamentos. Importante que cada questão esteja em uma folha isolada para discussão em grupo e que cada questão só seja entregue ao aluno após a resolução da anterior.

[Q_1] Descreva como você introduziria completamente a esfera no cilindro cheio de grão de arroz. Introduza e explique com suas palavras como é possível efetuar essa atividade?

[Q_2] Retire a esfera do cilindro, observe a quantidade de grãos que ficou no cilindro e explique com suas palavras quantas partes do volume do cilindro está sendo ocupado por grãos.

[Q_3] Quantas partes do volume do cilindro foi preciso esvaziar para introduzir a esfera no cilindro? Explique com suas palavras.

[Q_4] A quantidade de grãos de arroz retirados do cilindro para introdução da esfera possui uma relação direta com a esfera. Explique com suas palavras qual é essa relação. Justifique sua resposta.

TAREFA 3

Nessa atividade os alunos terão a oportunidade de deduzir a fórmula do volume da esfera por seus próprios raciocínios de maneira prática e envolvente.

OBJETIVO: Levar os alunos a deduzirem a fórmula do volume da esfera usando materiais concretos (esfera e um cilindro).

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades**;** esfera; Um cilindro transparente; grãos de arroz; Régua com tamanho superior ao tamanho dos objetos; Muito importante que a altura e a largura do cilindro sejam iguais a altura da esfera.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Altura, diâmetro, raio e volume do cilindro; Altura, diâmetro, raio e volume da esfera; relação entre o volume da esfera e o volume do cilindro. O aluno poderá deduzir a fórmula do volume da esfera como sendo 2/3 do volume do cilindro.

PROCEDIMENTOS: O aluno receberá os materiais e a folha de atividade contendo as seguintes instruções e questionamentos.

[Q_1] Qual relação você percebe entre o raio (r) da esfera e a altura(h) do cilindro? Explique como você chegou a essa conclusão.

[Q_2] Você já estudou como encontrar o volume de um cilindro (V_c), basta multiplicar a área da base (πr^2) pela altura (h). Pense como você faria para encontrar o volume de arroz que foi retirado do cilindro. Explique com suas palavras como realizaria essa tarefa.

[Q_3] Sabendo que a altura do cilindro é igual a duas vezes o raio da esfera, ou seja, que $h=2r$. Explique com suas palavras como fica a nova fórmula para encontrar esse volume, sabendo que o h que representa a altura na fórmula do volume do cilindro pode ser substituído por $2r$.

[Q_4] Você percebeu que das três partes em que o cilindro foi dividido, duas dessas três partes de arroz, ou seja, dois terços $\frac{2}{3}$ do volume total do cilindro " (πr^2) x $(2r)$" precisou ser retirado para introduzir a esfera. Então, baseado nesse fato, explique com suas palavras como você faria para encontrar a fórmula do volume da esfera em questão.

TAREFA 4

Conceitos e noções da geometria na construção de uma esfera no Software Geogebra.

OBJETIVOS: Obter uma visão ampla tridimensional dos elementos correspondentes a existência de uma esfera no espaço, observando durante a construção da esfera a relação que há entre o raio o tamanho da esfera.

MATERIAL UTILIZADO: Folha de atividades, Computador, Software Geogebra, sala de informática, caneta esferográfica.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Além das habilidades com o Geogebra na construção da esfera, serão envolvidos nessa atividade conceitos sobre raio, eixo, diâmetro e centro de uma esfera.

PROCEDIMENTOS: Essa atividade será conduzida na sala de informática e poderá ser realizada individualmente ou em dupla, conforme a preferência dos participantes. Os alunos receberão folhas de atividade contendo as instruções e os questionamentos necessários para a realização da tarefa. Nesse contexto, todas as questões podem ser apresentadas na mesma folha.

[Q_1] *Ao criar uma esfera no espaço tridimensional. Qual o elemento que dá início a formação da esfera? Explique com suas palavras qual a relação desse elemento com o tamanho da esfera.*

[Q_2] *Na construção de uma esfera no GeoGebra, como se chama a distância entre os dois pontos que formam a esfera? Justifique sua resposta.*

[Q_3] *Para você, o que é uma esfera? Explique com suas palavras mediante todo conhecimento adquirido ao longo das aulas. Cite três objetos do seu dia a dia que lembram uma esfera.*

[Q_4] *Verifique a largura da esfera que você criou e explique com suas palavras qual a relação dessa largura com o raio.*

TAREFA 5

Neste momento o aluno precisa deduzir a fórmula da área da superfície da esfera.

OBJETIVO: Levar os alunos a deduzirem a fórmula da área da superfície da esfera fazendo uso do software Geogebra.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades**;** computador; sala de informática; software Geogebra instalado ou on-line; caneta esferográfica.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: volume da esfera; área da superfície esférica.

PROCEDIMENTOS: O aluno já de posse de um computador receberá a folha de atividade contendo as seguintes instruções e questionamentos.

[Q_1] *Crie uma esfera no software Geogebra de raio 5 e faça o registro de qual o volume dessa esfera calculado pela fórmula já deduzida anteriormente?*

____

____

[Q_2] *Crie agora uma sequência de 3 esferas de raios consecutivamente 2, 3, 4 e registre o volume de cada uma.*

____

____

[Q_3] Imagine uma esfera comum, depois imagine retirar uma outra esfera só um pouquinho menor de dentro dela*. Registre com suas palavras o que sobra.*

____

____

[Q_4] Faça uma subtração do volume de uma esfera menor V_{E2} de raio r de dentro de uma esfera maior V_{E1} *de raio* $r + x$*. Monte a equação do volume das duas esferas e expresse a equação que representa essa subtração.*

____

____

[Q_5] Simplificando a equação anterior você chega a expressão $\frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 - x^3)$, neste caso você despreza os termos x^2 e x^3 para simplificar ainda mais a expressão. Daí você simplifica mais um pouquinho e mostre o resultado. Com suas palavras explique o que significa o x nessa equação.

____

____

A partir do mapeamento textual das atividades descritas anteriormente, viabiliza-se a compreensão de como se deu a transição para a fase de experimentação em campo. Na primeira tarefa da atividade experimental, os alunos tiveram o primeiro contato com os materiais manipuláveis, incluindo sólidos com formato esférico, assim como cilíndricos e réguas. Esse momento inicial foi fundamental para despertar a curiosidade e promover uma aproximação concreta com os objetos de estudo. Após a exploração livre dos materiais, os estudantes receberam as folhas de atividade contendo questões que os conduziram à observação e à análise das características geométricas dos sólidos. Ao realizar medições e interpretar elementos como diâmetro, raio e altura da esfera e do cilindro, os alunos começaram a construir, de forma intuitiva, relações entre essas dimensões. Essa abordagem permitiu que, mesmo sem recorrer a conceitos matemáticos formais, os estudantes internalizassem a ideia de que há uma conexão significativa entre os atributos dos dois sólidos, preparando o terreno para etapas posteriores de abstração e dedução.

Na condução dessa proposta pedagógica, pressupõe-se que o professor incentive a exploração inicial dos materiais de forma livre e investigativa, abdicando da antecipação dos objetivos matemáticos da atividade. Essa estratégia favorece a construção espontânea de relações geométricas e permite que os alunos desenvolvam uma base intuitiva sólida antes da introdução de conceitos formais. Sob essa ótica, assume papel relevante a atenção docente às observações dos discentes durante a etapa empírica, valorizando suas interpretações e promovendo questionamentos que estimulem o raciocínio espacial e a percepção das propriedades dos objetos manipulados.

Na segunda tarefa da atividade experimental, os grupos de alunos receberam o arroz que serviu como material de preenchimento do cilindro. A partir daí, os alunos foram conduzidos a uma exploração intuitiva de conceitos geométricos relacionados ao volume. As dimensões do cilindro correspondiam exatamente às da esfera entregue para a realização da atividade. A proposta foi apresentada sem qualquer menção explícita à matemática, permitindo que o professor conduzisse uma discussão inicial voltada à reflexão sobre o que ocorreria ao tentar inserir a esfera dentro do cilindro cheio. Esse momento revelou-se essencial para estimular o pensamento crítico e a formulação de hipóteses sobre a ocupação espacial da esfera no interior do recipiente.

Durante a manipulação, os alunos perceberam que seria necessário remover parte dos grãos para acomodar a esfera, o que possibilitou, de forma experimental e intuitiva, a construção da noção de capacidade volumétrica e sua relação com o espaço ocupado pela esfera em comparação ao volume do cilindro. Para experimentações futuras que visem à dedução da fórmula do volume da esfera, é imprescindível atentar para alguns aspectos metodológicos que favoreçam a clareza e a eficácia do processo investigativo. Recomenda-se a utilização de um cilindro confeccionado em material transparente, devidamente marcado com três divisões equidistantes, de modo a representar frações iguais de volume. Essa configuração permite uma observação precisa da transferência de material, como arroz ou outro elemento granular, da esfera para o interior do cilindro, promovendo uma compreensão empírica mais acessível da relação entre os volumes dos sólidos envolvidos.

A presença dessas marcações contribui significativamente para o estabelecimento de relações proporcionais, evidenciando que o volume da esfera corresponde a dois terços do volume do cilindro, desde que ambos possuam a mesma altura e o mesmo diâmetro. Tal constatação reforça, de maneira concreta e visual, a validade da fórmula matemática que expressa o volume da esfera como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, favorecendo a construção conceitual por meio da experimentação. Essa abordagem, portanto, revela-se eficaz no contexto educacional, ao articular teoria e prática na consolidação do conhecimento geométrico.

Na terceira etapa da atividade experimental, os alunos foram conduzidos por um percurso lógico e reflexivo com o objetivo de deduzir, de forma autônoma, a fórmula do volume da esfera. As orientações propostas foram cuidadosamente estruturadas para favorecer o desenvolvimento progressivo do raciocínio matemático, permitindo que os estudantes construíssem o conhecimento a partir de suas próprias inferências. Em vez de apresentar a fórmula de maneira direta, optou-se por instigar os alunos a estabelecer conexões, levantar hipóteses e validar ideias ao longo do processo, de modo que a dedução emergisse como resultado natural de sua compreensão. Para futuras aplicações, recomenda-se que o professor preserve essa abordagem investigativa, pois ela valoriza a construção ativa do conhecimento e promove no estudante uma sensação de autoria intelectual e de domínio genuíno sobre o conteúdo explorado.

A realização da quarta e quinta tarefas da atividade experimental exigiu, por parte do professor, conhecimentos básicos no uso do software Geogebra, especialmente no que diz respeito à construção de objetos tridimensionais e à utilização de funções matemáticas. Para futuras aplicações, recomenda-se que o docente se familiarize previamente com o conteúdo disponível no livro digital *Aprendizagem Matemática por meio da Utilização do Geogebra: Calculadora para o Volume da Esfera*[3]. Esse material apresenta instruções detalhadas e passo a passo sobre como desenvolver uma atividade voltada ao cálculo do volume da esfera, com diversas funcionalidades e recursos que auxiliam na construção de uma esfera e de uma calculadora interativa para o volume da esfera no software *Geogebra*. O domínio dessas ferramentas permitirá ao professor conduzir a atividade com maior segurança e clareza, proporcionando aos alunos uma experiência mais rica e significativa.

Na quarta etapa da experimentação, os alunos foram introduzidos ao software Geogebra por meio de acesso ao link[4] disponível on-line em seus computadores. Inicialmente, foram incentivados a explorar livremente a interface do aplicativo, clicando em diferentes funções sem compromisso, com o objetivo de se familiarizarem com os recursos digitais disponíveis para a construção de figuras geométricas. Essa etapa de exploração teve caráter introdutório e foi fundamental para que os estudantes adquirissem autonomia na navegação pela plataforma.

Após esse momento de ambientação, cada grupo recebeu uma Folha de Atividade com orientações específicas para a construção da esfera no ambiente digital. A atividade envolveu o uso de ferramentas previamente exploradas e exigiu dos alunos a aplicação prática dos conceitos geométricos discutidos. Além da construção, os grupos foram convidados a responder a questionamentos reflexivos

[3]https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/739119/1/Vitor%20Vasconcelos%20Livro.pdf
[4]https://www.geogebra.org/classic

sobre o processo, promovendo a articulação entre teoria e prática e estimulando o pensamento crítico sobre o uso de tecnologias digitais no ensino da matemática.

Durante essa fase, o professor deve circular entre os grupos, incentivando a curiosidade e destacando as funcionalidades que são utilizadas na construção da esfera digital. Essa abordagem favorece o protagonismo dos alunos, promove o letramento digital e fortalece a articulação entre teoria e prática. Recomenda-se que o professor esteja atento às dificuldades técnicas e conceituais que possam surgir, oferecendo apoio pontual e incentivando a colaboração entre os grupos.

Na quinta e última etapa da experimentação, os alunos foram conduzidos a explorar construções geométricas no ambiente digital do Geogebra, com o objetivo de deduzir a fórmula da área da superfície esférica. A atividade consistiu na elaboração de duas esferas utilizando os recursos do software, permitindo aos estudantes retomar e aplicar os conceitos abordados nas tarefas anteriores. Essa proposta integrou uma abordagem geométrica com ferramentas tecnológicas, favorecendo a visualização e a compreensão dos elementos envolvidos na dedução da fórmula.

Com base nas construções digitais, os estudantes foram incentivados a refletir sobre o significado geométrico da área da superfície esférica. Inicialmente, a proposta buscou articular visualização, abstração e raciocínio matemático, promovendo uma compreensão intuitiva do conceito. Em um segundo momento, os alunos foram orientados a formalizar essa compreensão por meio de cálculos algébricos, consolidando a dedução da fórmula com base nos elementos explorados geometricamente.

Para futuras investigações recomenda-se ao professor, portanto, que acompanhe atentamente o processo de manipulação das figuras, incentivando a reflexão sobre as propriedades geométricas observadas e promovendo discussões que consolidem a aprendizagem.

A construção das duas esferas no Geogebra, quando construídas de maneira concêntricas, sendo uma delas ligeiramente maior, nos permite discutir com os alunos sobre a diferença entre os volumes delas. Fazendo os alunos concluírem que a diferença entre as duas gera uma casca esférica muito fina, semelhante à “pele” da esfera. Ao considerar essa casca com espessura desprezível, é possível aproximar seu volume como sendo o produto da área da superfície da esfera pela espessura que é a diferença entre os dois raios. Portanto o Volume da casca aproximadamente igual a Área da superfície da esfera vezes a Espessura.

A definição dos volumes das esferas onde uma esfera maior $E1$ com raio $r + x$ e volume dado por $\frac{4}{3}\pi(r + x)^3$ e a outra $E2$ menor com raio r e volume igual a $\frac{4}{3}\pi(r)^3$. Na subtração dos volumes $V_{E1} - V_{E2}$ teremos o volume do casco esférico (V_{casco}) e ao chegarmos a expressão $\frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 - x^3)$ onde temos x muito pequeno, os termos x^2 e x^3 podem ser desprezados, deixando a expressão $V_{casco} = 4\pi r^2 x$. Ao interpretarmos este resultado podemos observar que o volume do casco esférico pode ser visto como a multiplicação da Área da Superfície da esfera pelo pequeno incremento x. Assim, chegamos a conclusão de que para encontrar a Área da Superfície de uma esfera basta fazer $4\pi r^2$.

Dessa forma, a abordagem adotada possibilitou que os alunos chegassem à dedução da fórmula da área da superfície esférica, articulando raciocínio geométrico e argumentação algébrica ao longo das etapas propostas na atividade. Para futuras aplicações é recomendável que o professor incentive momentos de discussão coletiva, proponha questionamentos que orientem a reflexão dos estudantes e valorize a diversidade de estratégias utilizadas, favorecendo um ambiente de investigação e colaboração no processo de aprendizagem.

Portanto, para futuras aplicações, recomenda-se que as folhas de atividade sejam elaboradas de modo que cada questão seja apresentada separadamente em uma folha individual, com espaço suficiente para o desenvolvimento estruturado do raciocínio. A entrega dessa folha, contendo uma das tarefas da atividade, deve ocorrer apenas após a conclusão da tarefa anterior, evitando que os estudantes acessem informações no comando das demais tarefas. Essa estratégia reforçou a progressão lógica entre os questionamentos e assegurou que o processo de aprendizagem ocorresse de forma gradual, coerente e significativa. Essa organização favoreceu o engajamento contínuo dos alunos e permitiu um melhor acompanhamento com maior precisão no desenvolvimento de cada etapa. Assim, a prática contribuiu para consolidar conceitos matemáticos e para estimular a autonomia intelectual dos estudantes.

5.3 FORMALIZAÇÃO

Por definição, uma esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão equidistantes de um ponto fixo denominado centro. Essa distância constante é chamada de raio. Geometricamente, a esfera pode ser representada como um sólido de revolução, gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de seu diâmetro, o qual corresponde ao dobro do raio.

O volume da esfera corresponde à medida do espaço tridimensional ocupado por esse sólido. Para seu cálculo, considera-se o raio r e a constante pi , cujo valor aproximado é 3,14. O raio é definido como o segmento de reta que liga o centro da esfera a qualquer ponto de sua superfície. A fórmula consagrada para o cálculo do volume de uma esfera é: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Além do volume, outro parâmetro fundamental na caracterização geométrica da esfera é a área de sua superfície, que representa a medida da região externa que delimita o sólido. Essa área é calculada com base no raio e na constante pi , sendo dada pela expressão: $4\pi r^2$. Essa fórmula indica que a área superficial da esfera é proporcional ao quadrado do raio, refletindo a simetria e a continuidade da superfície esférica em todas as direções. O conhecimento tanto do volume quanto da área da superfície é essencial em diversas aplicações científicas, como na física, na engenharia e na modelagem computacional de objetos tridimensionais.

5.4 ORIENTAÇÃO PARA AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE

Na presente pesquisa, os alunos foram avaliados a partir de múltiplos aspectos relacionados ao seu desempenho durante a atividade. Para futuras aplicações ou adaptações dessa proposta, recomenda-se que o docente considere os seguintes critérios avaliativos:

Quadro 4 - Organização dos critérios de avaliação

Critério Avaliativo	Descrição
Participação ativa	Observou-se o engajamento individual e coletivo dos alunos durante a realização da atividade.
Trabalho colaborativo	Avaliou-se a interação entre os membros do grupo, o respeito às opiniões dos colegas e a contribuição para a resolução conjunta das tarefas.
Precisão nos cálculos	Verificou-se a aplicação correta dos procedimentos matemáticos e a coerência dos resultados obtidos.
Compreensão dos conceitos	Foi avaliada por meio de perguntas orais e de uma breve produção escrita, na qual os alunos refletiam sobre a experiência, os desafios enfrentados e os aprendizados adquiridos e descreveram com suas próprias palavras.

Fonte: O autor, 2026.

Essa abordagem permite uma avaliação mais ampla e formativa, contemplando tanto aspectos cognitivos quanto socioemocionais do processo de aprendizagem. Dessa forma, o professor consegue avaliar a participação dos alunos durante a atividade, a capacidade de trabalhar em grupo, a correção dos cálculos e a compreensão do conceito que tiveram durante a atividade.

5.5 EXPERIMENTAÇÃO DIDÁTICA

A Experimentação Didática ocorreu com a aplicação de uma Sequência de Atividades nas dependências de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio da região metropolitana de Belém do Pará. Tal escola contou com Rampas, salas de aula e banheiros adaptados para alunos com deficiência ou mobilidade reduzida, possui também uma biblioteca, uma quadra de esportes coberta, salas de aula climatizadas, refeitório com alimentação escolar e acesso à internet banda larga, laboratório de informática e desktops para os alunos.

A autorização para a realização da pesquisa junto aos alunos foi concedida pela direção da escola após um processo de diálogo institucional que envolveu diversas reuniões ao longo de aproximadamente um mês. Esse período foi fundamental para esclarecer os objetivos da investigação, apresentar a proposta metodológica e garantir que todas as etapas estivessem alinhadas às diretrizes pedagógicas da instituição. Com a aprovação formal da diretora, foi possível iniciar a aplicação da sequência de atividades planejadas com os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

O professor responsável pela turma autorizou a participação dos alunos do 3º ano do Ensino Médio na aplicação da sequência de atividades, realizada no turno da tarde. A experimentação ocorreu ao longo de dois meses, totalizando dez aulas, distribuídas em cinco encontros. Devido a compromissos institucionais e ajustes no calendário escolar, algumas semanas foram intercaladas sem atividades, o que exigiu flexibilidade na condução da proposta.

Durante esse período, foram coletados dados por meio de observações, registros escritos e produções dos alunos, com o objetivo de analisar o processo de aprendizagem relacionado ao cálculo da área e do volume da esfera. Essas informações subsidiaram a investigação sobre o desenvolvimento dos conceitos geométricos e a eficácia da abordagem metodológica adotada.

5.6 RELATÓRIO DA EXPERIMENTAÇÃO

O presente relatório foi desenvolvido com o objetivo de organizar, de forma sistemática, os procedimentos aplicados e os resultados obtidos durante o processo investigativo. Neste relatório, busca-se contextualizar a relevância da prática realizada, destacando os fundamentos teóricos que a sustentam e a metodologia adotada para garantir a consistência dos dados. Dessa forma, pretende-se oferecer uma visão clara e organizada sobre cada etapa, permitindo compreender não apenas os resultados, mas também o caminho percorrido até alcançá-los.

Além disso, este relatório apresenta uma síntese das observações registradas, discutindo os principais achados e suas implicações para o campo de estudo em questão. Assim, o capítulo estabelece a base necessária para a análise crítica que será desenvolvida nas seções seguintes.

No presente capítulo serão abordadas três perspectivas fundamentais para a compreensão da dinâmica da atividade humana: a relação instrumento-objeto, a relação sujeito-instrumento e a relação sujeito-objeto-instrumento. Essas teorias, conforme discutidas por Pierre Rabardel (1995) em sua Teoria da Instrumentação, permitem analisar como os instrumentos mediam a interação entre o indivíduo e o objeto de estudo, revelando o papel central da mediação na construção do conhecimento e na transformação da realidade. A discussão dessas relações possibilitou compreender tanto os limites quanto as potencialidades do uso de ferramentas, destacando como o aluno se apropria delas para interagir com o objeto (volume da esfera) e, ao mesmo tempo, como essa interação redefine o próprio processo de aprendizagem e de ação prática.

5.7 A RELAÇÃO INSTRUMENTO-OBJETO: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E IMPLICAÇÕES METODOLÓGICAS

Nesta pesquisa consideramos a fundamentação teórica da Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995), com foco na aprendizagem do volume da esfera por meio de artefatos concretos e digitais.

A instrumentalização, segundo Rabardel, ocorre quando o aluno deixa de ver o artefato apenas como um recurso externo e passa a utilizá-lo como instrumento de pensamento. Ao atribuir-lhe uma função específica na resolução de problemas, o artefato é apropriado cognitivamente, tornando-se mediador entre a ação do sujeito e o conhecimento. Esse processo permite ao aluno construir conceitos, formular hipóteses e tomar decisões com base na interação com o artefato. Esse aprofundamento consta em *Les hommes et leste chnologies – approche cognitive des instruments contemporains* de Pierre Rabardel (1995), que afirma:

> O instrumento não é apenas um objeto de forma particular, com propriedades físicas específicas; é acima de tudo um objeto social, com modalidades de uso desenvolvidas durante o trabalho coletivo. *(Rabardel, 1995, p. 35, tradução nossa)*

O aluno adapta o objeto as atividades propostas na experimentação, atribui-lhe novas funções e explora suas propriedades. É quando o estudante, por exemplo, percebe que pode usar a esfera e a régua como referência para compreender o raio e converter em um valor algébrico (folha de atividade) ou virtual (Geogebra). Pierre Rabardel (1995) reconfigura o uso do artefato com base em sua experiência e raciocínio.

Quadro 5 - Distinção entre Artefato e Instrumento

Conceito	Definição
Artefato	Objeto físico ou simbólico disponibilizado ao aluno (ex: régua, esfera, cilindro etc).
Instrumento	Resultado da apropriação do artefato pelo sujeito, que passa a usá-lo com intencionalidade e significado.

Fonte: O autor, 2026.

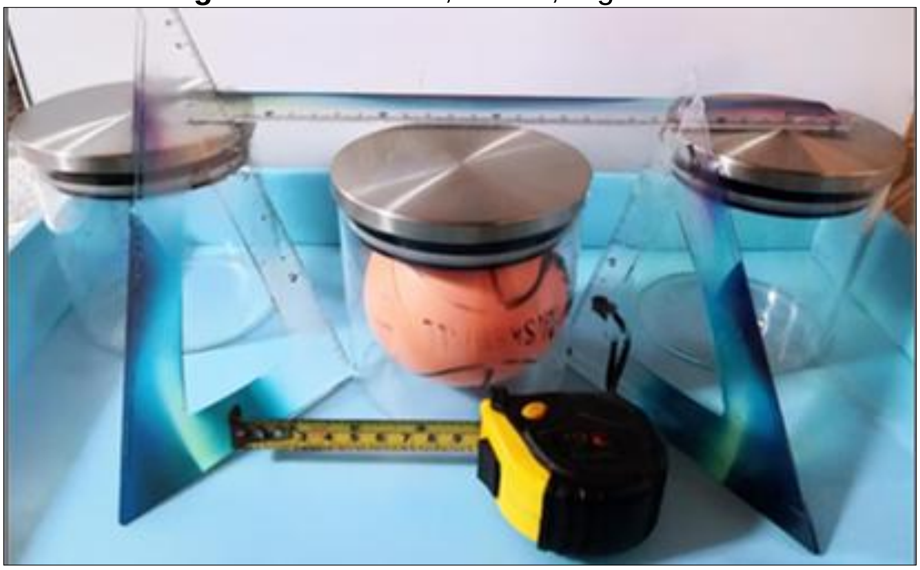
Nesta pesquisa, propomo-nos a investigar as interrelações entre o uso de materiais concretos e os ambientes computacionais de aprendizagem no contexto do ensino de Matemática. Em particular, voltamo-nos para a análise da estrutura conceitual envolvida no estudo do cálculo do volume da esfera, inserido no campo da Geometria Espacial. Para tanto, selecionamos uma turma do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública situada no município de Belém do Pará, cujos alunos ainda não haviam sido introduzidos ao referido conteúdo. A partir dessa escolha, realizamos uma atividade experimental com o objetivo de identificar indícios de aprendizagem diante de um tema até então inédito para os participantes.

A etapa experimental foi conduzida por meio da aplicação de um artefato físico manipulável, em conjunto com o software Geogebra de modelagem matemática tridimensional, com o propósito de explorar diferentes formas de tratamento na manipulação dos objetos e identificar possíveis indícios de aprendizagem. Durante as atividades, foram observadas as conversões semióticas inerentes ao conteúdo abordado.

5.8 MATERIAL CONCRETO MANIPULÁVEL

Os artefatos físicos empregados na experimentação consistiram de cilindro, esfera, arroz, régua e uma trena, além de uma caneta e de uma folha de papel. Esta última continha as instruções para a realização das manipulações propostas, bem como espaços destinados ao registro das respostas e das justificativas elaboradas pelos alunos. A Figura 14 ilustra os materiais utilizados no procedimento.

Figura 14 - Cilindro, esfera, régua e trena



Fonte: O autor, 2026.

Para compreender os processos cognitivos envolvidos nesta pesquisa, adotamos como referencial teórico a Abordagem Instrumental proposta por Pierre Rabardel (1985), que distingue entre artefato (objeto técnico disponibilizado ao sujeito) e instrumento, entendido como o resultado da apropriação desse artefato por meio de esquemas de uso construídos ao longo da atividade. Nesse contexto, tanto o material concreto quanto o software de matemática 3D são considerados artefatos que, ao serem mobilizados pelos estudantes em situações de resolução de problemas, podem se transformar em instrumentos de aprendizagem.

Na abordagem de Pierre Rabardel, o volume da esfera emerge como um instrumento de pensamento quando o aluno, ao manipular a esfera e o cilindro, atribui significado funcional ao conceito. A esfera deixa de ser apenas um artefato físico e passa a mediar a construção de raciocínios geométricos, estimativas e justificativas. O volume da esfera conecta o mundo concreto (a esfera e o cilindro manipulável) ao mundo abstrato (a fórmula matemática), permitindo que o aluno transite entre ação e formalização. Sendo o aluno o elo que transforma uma atividade prática em uma experiência conceitual.

Na Figura 15 abaixo, observa-se uma tarefa realizada com êxito, na qual o aluno foi instruído a inserir uma esfera em um cilindro previamente preenchido com arroz. A partir de sua própria manipulação e raciocínio, o estudante percebeu a necessidade de retirar parte do arroz do cilindro para possibilitar a inserção da esfera. Essa ação permitiu-lhe responder a questionamentos que evidenciaram o volume ocupado pela esfera no interior do cilindro. Nesse processo, os artefatos utilizados (cilindro, esfera e arroz) foram instrumentalizados, uma vez que o aluno se apropriou do material como recurso para construir conhecimento e compreender o conteúdo matemático em estudo.

Figura 15 - Cilindros, esfera e arroz

Fonte: O autor, 2026.

Alguns alunos perceberam ao longo da atividade, a partir das suas próprias manipulações, que ao retirar a esfera do cilindro, esvaziou-se dois terços do cilindro e que esse espaço vago corresponde ao volume da esfera. Sendo assim, chegando à generalização da fórmula para o volume da esfera, onde a parte retirada significa exatamente os dois terço do cilindro. Com isso, seguindo as instruções propostas, os alunos puderam concluir que 2/3 do volume do cilindro era igual ao volume da esfera, sabendo que o volume do cilindro corresponde a área da base (πr^2) vezes a altura (h), e que a altura do cilindro (h) é duas vezes o raio (2r), logo $Vc = \pi r^2 . 2r$, onde *2r=h*, na última questão da quarta tarefa, foi solicitado ao aluno que utilizasse esses conhecimentos para encontrar o volume de arroz que foi retirado do cilindro, lembrando que essa quantidade é a mesma do volume da esfera.

Capítulo 6 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

A experimentação realizada permitiu observar avanços significativos na aprendizagem dos conceitos relacionados ao volume e à área da esfera. A sequência de atividades proposta, fundamentada na resolução de problemas e no uso de materiais manipuláveis e ferramentas digitais, como o software Geogebra, revelou-se eficaz na promoção de uma aprendizagem ativa e significativa.

Um dos principais resultados observados foi a compreensão teórica dos conceitos geométricos antes de sua aplicação prática. Os alunos demonstraram capacidade de interpretar e explicar a fórmula do volume da esfera, compreendendo sua estrutura e origem antes de utilizá-la em cálculos. Essa apropriação teórica foi essencial para que pudessem realizar medições e aplicar os conhecimentos em situações concretas, como o cálculo do volume de esferas reais.

Além disso, a experimentação favoreceu o desenvolvimento do pensamento crítico. Os estudantes foram incentivados a analisar dados, identificar padrões, questionar resultados e propor soluções para os problemas apresentados. Durante as atividades, foi possível observar momentos em que os alunos corrigiam seus próprios erros, discutiam estratégias com os colegas e reformulavam suas abordagens, evidenciando um processo reflexivo e investigativo.

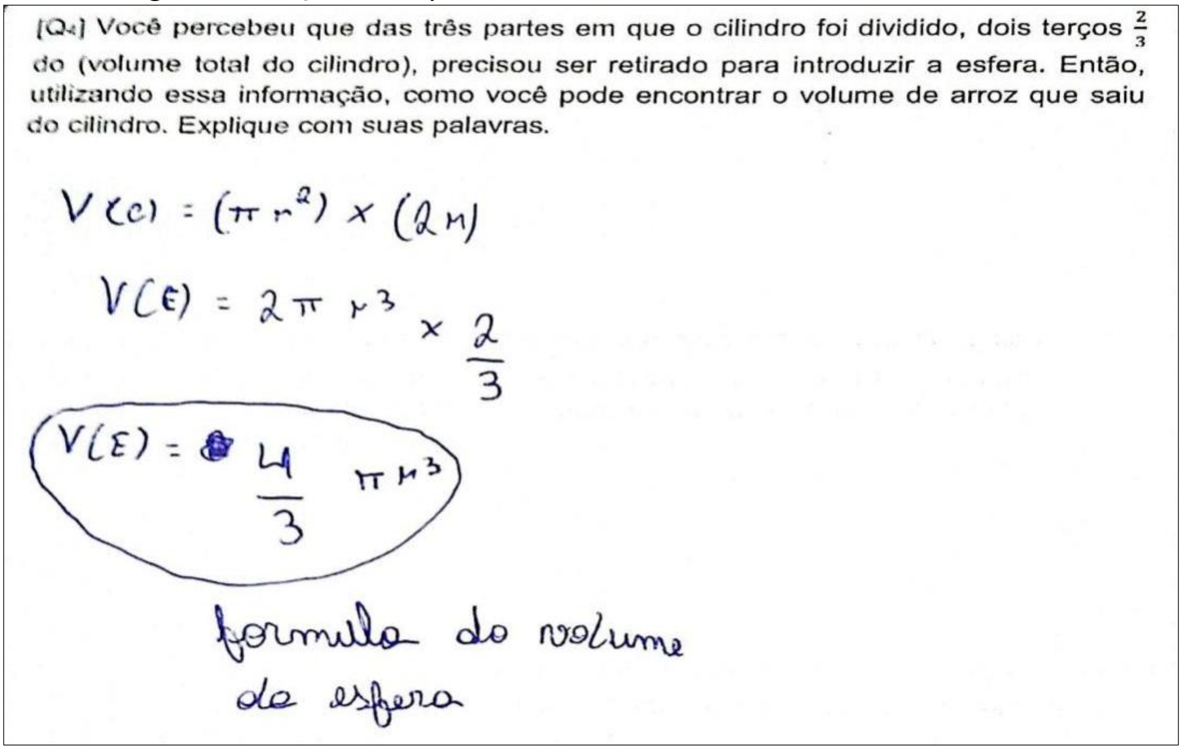
Outro aspecto relevante foi a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, conforme proposto por Duval (2012). Os alunos utilizaram fórmulas algébricas, representações gráficas no Geogebra e explicações verbais para expressar seus raciocínios. A capacidade de transitar entre esses registros mostrou-se fundamental para a consolidação dos conceitos geométricos, especialmente na compreensão da relação entre o raio da esfera e suas medidas de área e volume.

Por fim, observou-se que os alunos foram capazes de documentar e comunicar seus resultados de forma clara e objetiva, tanto por meio de registros escritos quanto em apresentações orais realizadas no decorrer da sequência. Essa habilidade de comunicação científica reforça a importância de práticas pedagógicas que valorizem a expressão argumentativa e a sistematização do conhecimento.

Em síntese, os resultados da experimentação indicam que a abordagem adotada contribuiu para o fortalecimento de competências essenciais à formação matemática dos estudantes, como a autonomia intelectual, o raciocínio lógico, a capacidade de representação e a comunicação eficaz. Tais competências não apenas favorecem o desempenho escolar, mas também preparam os alunos para enfrentar desafios reais com uma postura investigativa e científica.

A instrumentalização (modificações do artefato pelo sujeito), revela-se essencial para identificar indícios de aprendizagem. Durante o processo de ensino da fórmula do volume da esfera, observou-se que os estudantes, ao interagirem com modelos esféricos físicos, constroem esquemas de ação que favorecem a compreensão da relação entre o raio e o volume. Essa abordagem permitiu que, por meio de raciocínios sucessivos e de conversões entre diferentes registros de representação, os alunos alcançassem a dedução da fórmula para o volume da esfera. A Figura 16, apresentada a seguir, exemplifica uma das etapas da atividade desenvolvida, evidenciando o momento em que o estudante, após a realização das tarefas propostas, conclui os tratamentos algébricos necessários e consolida a compreensão do conceito de volume esférico, expressa pela fórmula $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Figura 16 - Questão que formaliza o conceito do volume da esfera


[Q4] Você percebeu que das três partes em que o cilindro foi dividido, dois terços $\frac{2}{3}$ do (volume total do cilindro), precisou ser retirado para introduzir a esfera. Então, utilizando essa informação, como você pode encontrar o volume de arroz que saiu do cilindro. Explique com suas palavras.

$V(c) = (\pi r^2) \times (2r)$

$V(E) = 2\pi r^3 \times \frac{2}{3}$

$V(E) = \frac{4}{3} \pi r^3$

formula do volume da esfera

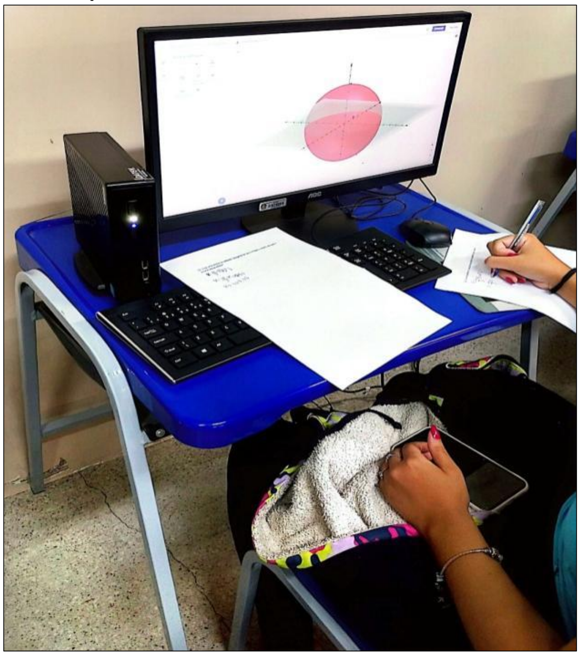
Fonte: O autor, 2026.

Do ponto de vista metodológico, o volume da esfera expressou-se idealmente por meio do volume de arroz deslocado ou mensurado durante a atividade de transvasamento. Essa igualdade física funcionou como um registro de representação figural e tátil, a partir do qual se inferiu que o espaço tridimensional ocupado pela esfera correspondia à capacidade do material de preenchimento. Essa relação de equivalência foi o elemento conector que viabilizou a conversão da atividade empírica em uma equação matemática formal.

Foi extremamente significativo acompanhar o processo pelo qual o estudante desenvolveu seu raciocínio de maneira autônoma, culminando na generalização de um conceito fundamental para a compreensão da geometria espacial. Essa trajetória evidencia não apenas o engajamento cognitivo do aluno, mas também a eficácia das estratégias didáticas adotadas, que favoreceram a construção ativa do conhecimento matemático.

A transformação do artefato em instrumento ocorreu em vários momentos da experimentação, inclusive quando o estudante utilizou o Geogebra para construir a esfera como é possível ver na Figura 17 e, em seguida, explorou variações no raio para observar alterações no volume. O processo evidenciou a construção de significados e a internalização de conceitos geométricos, indicando que o artefato deixou de ser apenas um suporte técnico e passou a mediar a atividade matemática. Além disso, o aluno ainda utilizou a fórmula desenvolvida na fase inicial de manipulação com material concreto, para encontrar o volume da esfera que criou no software para aplicação a fórmula.

Figura 17 - Aluna “A” construindo uma espera no Geogebra e respondendo aos questionamentos da atividade



Fonte: O autor, 2026.

O experimento foi estruturado a partir de tarefas previamente definidas, organizadas em uma sequência de atividades cuidadosamente elaborada e validada no âmbito de um programa de pós-graduação stricto sensu, em nível de mestrado. Com o apoio de instrumentos como: folhas de atividades, caneta, esfera, cilindro, réguas, trena e um celular equipado com gravador de áudio e imagem, foi possível realizar registros fundamentais que evidenciaram os processos de conversão e tratamento realizados pelos alunos durante a instrumentalização desses artefatos.

O estudo das relações construídas pelos estudantes com os artefatos durante cada fase da atividade, aliadas aos registros escritos e audiovisuais coletados ao longo da experimentação, possibilitou a identificação de padrões de comportamento que evidenciam a ocorrência da instrumentalização. Esse processo, por sua vez, revelou indícios de uma aprendizagem ancorada no conhecimento prévio dos alunos, favorecendo a construção de significados e a apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos.

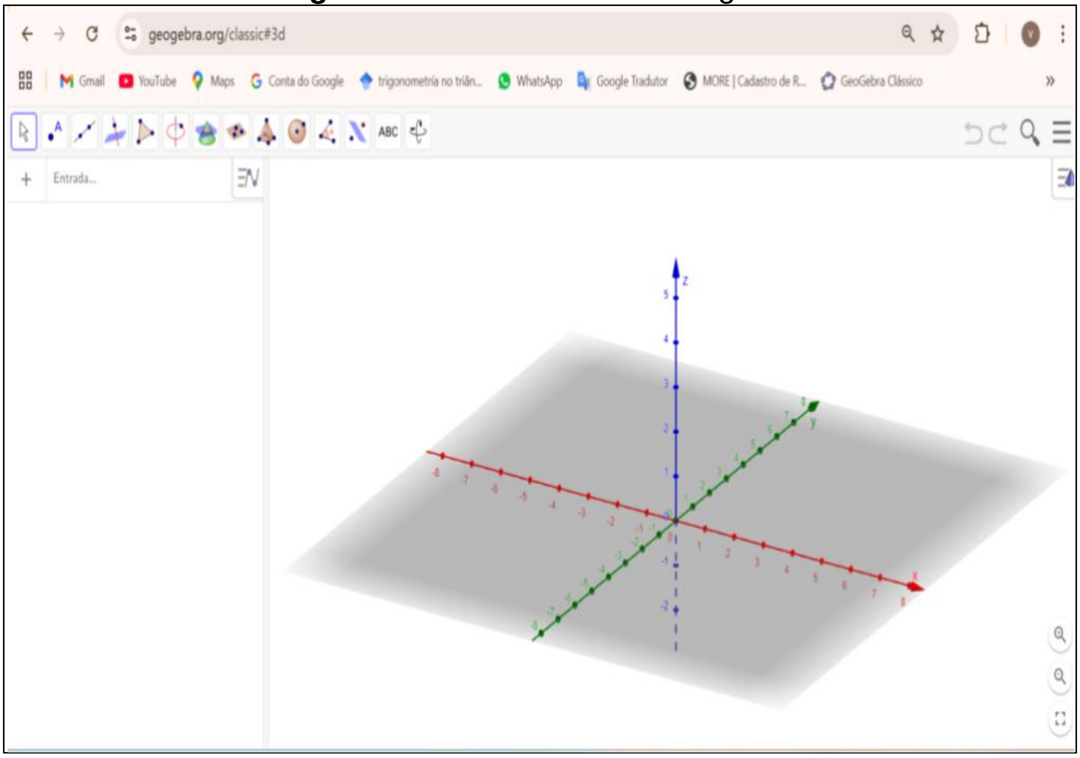
A atividade foi realizada em duplas, ainda que a proposta inicial tenha sido a formação de grupos. Surpreendentemente, ao retornar à sala, os estudantes já se encontravam organizados em pares, demonstrando iniciativa e prontidão para o início da tarefa. Essa configuração espontânea favoreceu a interação direta entre os participantes, promovendo trocas mais intensas e colaborativas durante o desenvolvimento das atividades.

O material concreto utilizado consistiu na manipulação de um cilindro e de uma esfera, ambos com altura equivalente de 10 cm. A escolha desses objetos teve como objetivo provocar nos estudantes a construção dos conceitos de volume e área da esfera, por meio da comparação entre formas geométricas e da exploração de suas propriedades físicas. A manipulação direta permitiu que os alunos estabelecessem relações espaciais e perceptivas, fundamentais para a compreensão dos conceitos envolvidos.

6.1 DO CONCRETO AO ABSTRATO: GEOGEBRA CLÁSSICO COMO INSTRUMENTO COGNITIVO

O Geogebra Clássico é uma ferramenta poderosa e versátil de classificação livre que tem revolucionado o ensino da Matemática, especialmente no campo da Geometria Espacial. Trata-se de um software de matemática dinâmica que integra, em uma única plataforma, recursos de Geometria, Álgebra, Planilhas, Gráficos, Estatística, Probabilidade e Cálculo Simbólico. A plataforma Geogebra foi desenvolvida com o objetivo de tornar o ensino da matemática mais visual, interativo e acessível para todos os níveis de ensino. A Figura 18, apresentada a seguir, ilustra uma interface digital de caráter intuitivo, que possibilita a professores e estudantes a construção, manipulação e exploração de objetos matemáticos em tempo real. Essa ferramenta favorece uma abordagem investigativa e experimental do conhecimento, promovendo o desenvolvimento de habilidades cognitivas por meio da interação dinâmica com representações geométricas e algébricas.

Figura 18 - A interface do Geogebra



Fonte: O autor, 2026.

A utilização do software como ferramenta digital para o ensino do volume da esfera possibilitou aos estudantes a criação de esferas tridimensionais em ambiente virtual. Por meio da interface intuitiva do aplicativo, os alunos puderam criar esferas e movimentar em diferentes direções, rotacionando, modificando dimensões, alterando cores, puderam apagar construções anteriores e refazer, tudo isso sem instruções prévias sobre o uso do programa. Apesar de nunca terem tido contato com o Geogebra, demonstraram grande autonomia e entusiasmo ao explorá-lo, o que contribuiu significativamente para o engajamento na atividade.

Essa apropriação espontânea do software evidenciou o processo de instrumentação, conforme descrito por Rabardel (1985), no qual o artefato digital, inicialmente um recurso técnico, transforma-se em instrumento de aprendizagem a partir da construção de esquemas de uso pelos próprios estudantes. Ao reconhecerem que deram origem a uma esfera digital, os alunos passaram a explicar com maior propriedade os detalhes de sua criação, revelando indícios de aprendizagem significativa e domínio conceitual.

A articulação entre o artefato concreto e o digital permitiu observar a gênese instrumental em ação, com momentos de instrumentalização (adaptação do artefato às necessidades da tarefa). A atividade, portanto, não apenas promoveu a compreensão do volume da esfera, mas também favoreceu o desenvolvimento de competências relacionadas à autonomia, à visualização espacial e à linguagem matemática.

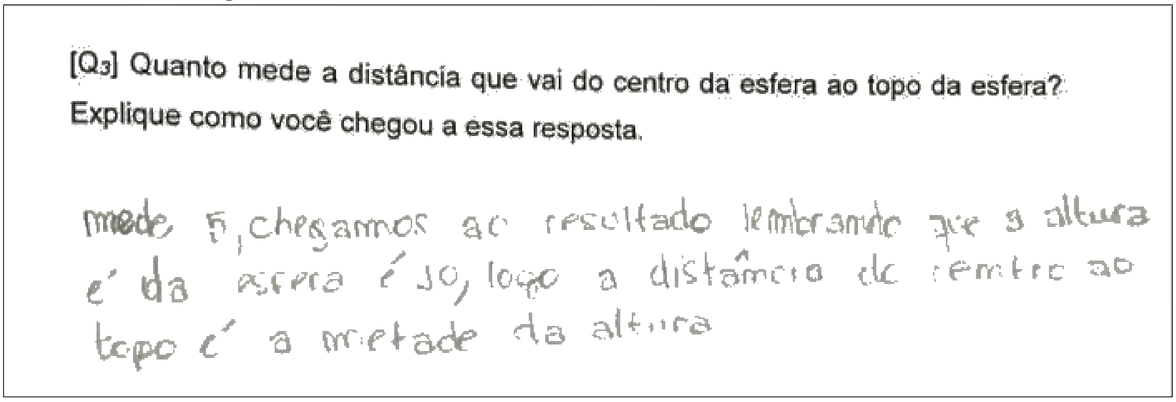
6.2 COMPREENSÃO DO VOLUME: DA MANIPULAÇÃO À FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA

A compreensão de volume em geometria frequentemente se perde em fórmulas descontextualizadas. Por essa razão, criamos essa atividade que permite uma ponte entre a ação e o conceito de volume de uma esfera, fazendo com que os alunos manipulem objetos e observem as regularidades e negociem significados antes de formalizar a expressão matemática, construindo conceitos sobre raio, diâmetro e capacidade.

O par esfera-cilindro é extremamente importante nessa definição, visto que revela uma relação surpreendente entre o volume da esfera de diâmetro 10 cm que equivale a dois terços do volume do cilindro de raio 5 cm e altura 10 cm. Proporcionar ao aluno essa dedução, transforma a fórmula de um resultado que deveria ser decorado em um conhecimento que pode ser agora explicado.

Nesta atividade experimental, foram empregados diversos materiais com o intuito de favorecer a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. Utilizou-se uma esfera de borracha impermeável com 10 cm de diâmetro, selecionada para representar o sólido geométrico em sua totalidade volumétrica, além de um cilindro transparente com raio de 5 cm e altura interna de 10 cm. Este último apresentava-se subdividido em três seções iguais, recurso que permitiu a visualização proporcional e comparativa do volume.Por fim, instrumentos de medição como trena e régua, foram disponibilizados aos alunos, com o objetivo de permitir a verificação das dimensões dos modelos físicos de esfera e cilindro e para o registro preciso dos elementos de cada objeto. A Figura 19 ilustra uma das questões propostas durante a atividade, na qual os estudantes foram desafiados a determinar a medida da distância entre o centro e o topo da esfera. Na figura, o aluno “B” responde ao questionamento proposto pela tarefa, essa atividade exigiu a aplicação de conceitos geométricos e habilidades de medição, promovendo a articulação entre o raciocínio espacial e o uso de instrumentos concretos.

Figura 19 - Aluno “B” encontrando o raio de uma esfera


[Q_3] Quanto mede a distância que vai do centro da esfera ao topo da esfera? Explique como você chegou a essa resposta.

mede 5, chegamos ao resultado lembrando que a altura é da esfera é 10, logo a distância do centro ao topo é a metade da altura

Fonte: O autor, 2026.

Na etapa inicial da atividade, buscou-se promover a exploração e a medição dos elementos constituintes dos objetos geométricos em análise (esfera e o cilindro) com o propósito de formalizar conceitos fundamentais como raio, diâmetro e o volume ocupado pela esfera no interior do cilindro. Com o intuito de favorecer a compreensão das relações métricas entre os sólidos, foi solicitado aos alunos que procedessem à determinação das medidas referentes à esfera (altura, largura e raio) e, em seguida, às dimensões do cilindro (altura, largura e raio).

Foram observados alguns questionamentos por parte dos alunos durante essa atividade, especialmente no que diz respeito à transposição da percepção visual para o registro gráfico, já esperado pela característica do nosso trabalho. Em determinado momento, a aluna, identificado como “A”, muito participativa, solicitou esclarecimentos: “*Professor, posso medir a esfera aqui por fora?*” Ao incentivá-la a explicitar seu raciocínio, ela prosseguiu: “*Veja! Se eu colocar a régua por fora da bola, a medida é 10 cm. E se a régua pudesse entrar na bola, seria a mesma medida, certo?*” Foi surpreendente observar a aluna colocando a régua ao lado da esfera e tentando explicar como fazer para medir o seu diâmetro ou sua altura. Logo confirmei a correção de seu raciocínio e a parabenizei pela lógica empregada na tarefa, incentivando-a a prosseguir na atividade com afinco e determinação.

Uma dificuldade significativa foi observada na escala da régua escolar, cuja marcação dos centímetros inicia-se alguns milímetros após a extremidade. Verificou-se que alguns alunos, ao apoiar a régua sobre a mesa e posicionar o objeto ao lado, poderiam obter medidas superiores às reais. Diante dessa situação, torna-se imprescindível a intervenção do professor, que, embora não esteja diretamente envolvido na manipulação dos objetos, desempenha papel essencial na orientação dos alunos, conduzindo-os adequadamente e prevenindo equívocos na construção dos conceitos geométricos.

O principal objetivo desta proposta pedagógica foi atribuir ao aluno a responsabilidade pelos registros e pelas nomenclaturas utilizadas no cotidiano, que fundamentam a existência e a compreensão dos objetos manipulados durante a atividade. Essa abordagem visa promover o protagonismo discente na construção do conhecimento, valorizando a observação, a experimentação e o raciocínio lógico.

Em uma segunda etapa, foi solicitado aos alunos que determinassem o raio da esfera. Nesse momento, observou-se alguns questionamentos importantes, uma vez que, tratando-se de um corpo esférico que não pode ser seccionado, a medição direta com régua torna-se inviável. Após diversas tentativas de estimar a metade da esfera, os alunos chegaram à conclusão de que o raio corresponde à metade de seu diâmetro. O aluno "B" expressou sua dúvida da seguinte forma: "*Professor, é muito difícil posicionar a régua exatamente no centro da esfera ou medir sua metade, mas sei que a metade da altura que medi é 5 cm. Posso afirmar, então, que o raio é 5 cm? Portanto, metade da altura?*" A formulação da pergunta evidencia a assimilação do conceito por meio da experimentação prática e da reflexão individual.

O fato de o aluno ser capaz de identificar o raio da esfera por seus próprios meios demonstrou, não apenas a compreensão do conteúdo, mas também a autonomia intelectual necessária para, futuramente, utilizar materiais manipuláveis como ferramentas eficazes na resolução de problemas envolvendo formas esféricas, seja no âmbito matemático ou em situações cotidianas.

A instrumentalização na dinâmica apresentada ocorre no momento em que o aluno passa a utilizar o material manipulável, no caso, a esfera, como ferramenta cognitiva para compreender e aplicar conceitos matemáticos, como o raio e o diâmetro. Esse processo se evidencia quando o aluno, por meio da experimentação e da observação direta, consegue abstrair a ideia de que o raio corresponde à metade do diâmetro da esfera, mesmo diante da dificuldade de realizar a medição exata com a régua devido a curvatura da esfera.

O ponto alto da instrumentalização é quando o aluno "B", por exemplo, formula uma pergunta do tipo: "*Sei que a metade da altura da esfera é 5 cm, posso dizer que o raio da esfera é 5 então, né?*". Nesse instante, o artefato deixa de ser apenas um recurso físico e passa a funcionar como mediador do pensamento matemático. O aluno não apenas manipula o objeto, mas o transforma em instrumento de raciocínio, atribuindo-lhe significado conceitual.

Portanto, a instrumentalização ocorre quando há apropriação do objeto como suporte para a construção de conhecimento, permitindo ao aluno resolver problemas, formular hipóteses e justificar suas conclusões com base na interação concreta com o material. É nesse momento que o objeto se converte em instrumento didático, e o aluno assume papel ativo na aprendizagem.

Concluídas as medições da esfera e do cilindro, realizadas pelos próprios alunos, com o suporte de orientação do professor e questionamentos reflexivos, foi proposta uma atividade comparativa de manipulação entre os dois sólidos. Os estudantes foram convidados a analisar as dimensões e estimar os respectivos volumes, considerando a esfera com diâmetro de 10 cm (raio de 5 cm) e o cilindro com altura de 10 cm e raio de 5 cm. As respostas foram registradas com as devidas justificativas, conforme as situações apresentadas nas fichas de atividade, consolidando o processo de aprendizagem por meio da argumentação, da análise crítica e da aplicação dos conceitos geométricos.

6.3 A RELAÇÃO SUJEITO-INSTRUMENTO: MEDIAÇÕES NA AÇÃO E NO CONHECIMENTO

Neste trabalho, propomos investigar como a relação sujeito-instrumento (S-I) se manifesta durante uma atividade prática voltada ao cálculo da área e do volume da esfera, tomada como objeto de estudo. Para isso, são utilizados materiais manipulativos e recursos digitais, como o software Geogebra, que funcionam como artefatos pedagógicos. Sob a perspectiva da teoria da instrumentação de Rabardel (1995), essas interações revelam o processo de gênese instrumental, no qual o artefato é transformado em instrumento à medida que os estudantes atribuem significados às ferramentas disponíveis e as incorporam às suas ações cognitivas.

Assim, o foco recai sobre a apropriação ativa dos recursos, que passam a mediar a construção do conhecimento matemático de forma significativa.

O Quadro 6 descreve a principal diferença que há na relação entre objeto e instrumento (O-I) que trata especificamente sobre o processo pelo qual a ferramenta é utilizada como instrumento pedagógico mantendo o foco na configuração do artefato e em sua capacidade de intervir intencionalmente no processo de ensino e a relação sujeito-instrumento (S-I), que se refere à forma como o aluno se apropria das ferramentas disponibilizadas durante a atividade, integrando-as à sua atividade cognitiva. O foco, agora, desloca-se da ferramenta em si para os processos mentais e as ações do aluno, que aprende a utilizar o artefato como mediador pedagógico.

Quadro 6 - Principais diferenças entre (O-I) e (S-I)

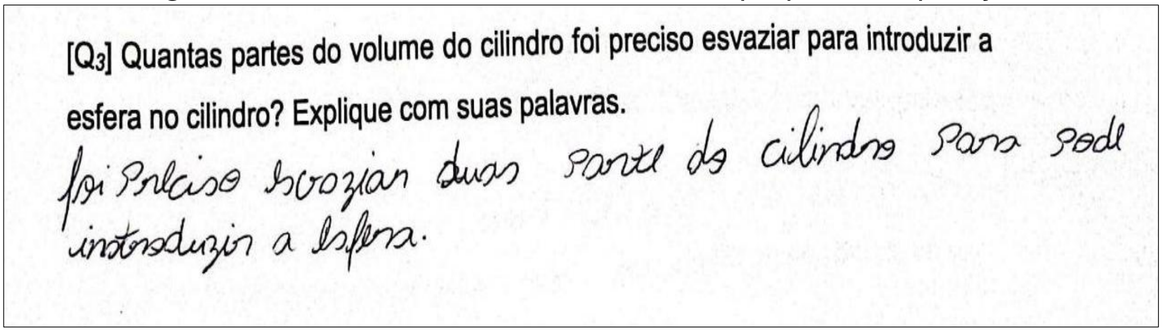
Relação	Foco
Objeto-Instrumento(O-I)	Foca na ferramenta e em sua estrutura física e função para atuar em relação ao conteúdo volume e área da esfera.
Sujeito-Instrumento(S-I)	Foca no aluno e na apropriação mental e prática da ferramenta, que molda a atividade desse aluno.

Fonte: O autor, 2026.

A relação (S-I) centra-se na forma como o aluno se apropriou das ferramentas disponíveis, incorporando-as à sua atividade cognitiva. Um exemplo ilustrativo dessa dinâmica pode ser observado na atividade representada na Figura 7, na qual o estudante é convidado a inserir uma esfera em um cilindro previamente preenchido com arroz e observar o consequente deslocamento do material. Essa atividade levou o aluno a compreender que o deslocamento do material correspondia a uma medida indireta do volume da esfera. Por meio da manipulação prática e da observação dos efeitos gerados pela inserção da esfera no cilindro, o estudante foi capaz de estabelecer relações entre os elementos envolvidos e inferir, com autonomia, o conceito de volume esférico.

Nesse contexto, o arroz deixa de ser apenas um recurso manipulativo e passa a assumir o papel de instrumento cognitivo, sendo utilizado pelo aluno para estabelecer comparações, elaborar esquemas mentais e inferir, de forma autônoma, a fórmula matemática do volume esférico. A resposta registrada a baixo pelo estudante à pergunta sobre quantas partes do volume do cilindro foram esvaziadas para acomodar a esfera, evidencia esse processo de construção ativa do conhecimento.

Figura 20 - Aluno “C” refletindo sobre sua própria manipulação


[Q$_3$] Quantas partes do volume do cilindro foi preciso esvaziar para introduzir a esfera no cilindro? Explique com suas palavras.

foi Preciso Isvaziar duas parte do cilindro Para Pode introduzir a Isfera.

Fonte: O autor, 2026.

O aluno, após um processo de análise cuidadosa, conseguiu organizar e explicitar seu raciocínio, registrando suas conclusões de forma articulada na folha de atividade. Esse momento representou não apenas a consolidação do entendimento conceitual, mas também a capacidade de comunicar com clareza os procedimentos realizados e as inferências construídas ao longo da tarefa.

Após essa aplicação em sala de aula, abre-se um campo fértil para a ampliação do conhecimento do aluno. A vivência prática desperta a curiosidade, estimula o raciocínio e favorece a construção de significados mais profundos. Ao refletir sobre a experiência, os alunos podem extrapolar o conceito de volume e de área para outras figuras geométricas, explorar variações no uso dos instrumentos, e até propor novas formas de investigação.

Ao explorar os recursos do ambiente digital, o aluno realiza ajustes no raio, observa variações na área e no volume, e estabelece conexões entre os parâmetros geométricos e suas representações algébricas. Nesse processo, o Geogebra deixa de ser apenas um recurso tecnológico e passa a funcionar como instrumento cognitivo, permitindo que o aluno desenvolva esquemas mentais, formule hipóteses e aprofunde sua compreensão sobre os conceitos de área e volume da esfera.

Um momento significativo da atividade experimental, em que o aluno utiliza o software Geogebra para construir digitalmente uma esfera é possível ser identificada na (Figura 17) na página 83. Essa ação evidencia a relação sujeito-instrumento (S-I), pois o estudante não apenas manipula a ferramenta, mas a incorpora como mediadora de seu raciocínio matemático.

Durante a atividade, observou-se que os alunos passaram por um processo de instrumentação, ou seja, apropriaram-se das ferramentas (arroz, cilindro, esfera e Geogebra) com profundidade. As ferramentas deixaram de ser apenas objetos externos e passaram a mediar o pensamento do aluno, moldando suas ações e estratégias de resolução. Para Rabardel (1995), isso se chama gênese instrumental, justamente quando ocorre a evolução do instrumento para se tornar uma ferramenta propriamente dita. Na teoria, dois aspectos estão envolvidos: a instrumentalização vista no capítulo anterior (a apropriação do objeto pelo sujeito) e a instrumentação (a apropriação do sujeito pela ferramenta, moldando suas ações e pensamento).

Na manipulação concreta, por exemplo, o arroz foi reinterpretado como instrumento cognitivo, permitindo aos alunos construírem esquemas de comparação e inferência para deduzirem o volume. E no caso do Geogebra, funcionou como uma extensão visual do raciocínio, favorecendo a abstração e a generalização da fórmula do volume e da área superficial de uma esfera. Esse movimento de expansão transforma o conhecimento escolar em saber ativo, crítico e contextualizado, fortalecendo a autonomia intelectual e o protagonismo dos estudantes.

Algumas evidências coletadas durante o experimento foram selecionadas para ilustrar, com mais clareza, a dinâmica cognitiva envolvida na relação sujeito - instrumento, conforme representado no Quadro 7.

Quadro 7 - Processo de Apropriação e Aprendizagem

<table>
<tr><th>Etapa da atividade</th><th>Ação do Aluno</th><th>Apropriação Mental e Prática do Instrumento</th><th>Indício de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Manipulação concreta</td><td>Coloca a esfera maciça dentro do cilindro cheio de arroz e observa o deslocamento.</td><td>O arroz deixa de ser apenas material/alimento e torna-se instrumento de medição indireta do volume.</td><td>O aluno interpreta o deslocamento como representação do volume e deduz a fórmula.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exploração digital (Geogebra)</td><td>Modela a esfera no software, varia o raio e observa mudanças no volume.</td><td rowspan="2">O Geogebra deixa de ser apenas programa e torna-se instrumento de exploração conceitual.</td><td>O aluno percebe a relação entre raio e volume, valida e generaliza a fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.</td></tr>
<tr><td>Criar duas esferas, considerando-as maciças de tamanhos</td><td>Após estimular a visualização tridimensional, o aluno consegue efetuar de forma algébrica essa</td></tr>
</table>

	diferentes, e realizar a subtração da maior pela menor.		subtração e generalizar a fórmula da área da esfera $A = 4\pi r^2$.
Integração concreto - digital	Compara a experiência da esfera no cilindro de arroz e as construções no software.	Os dois artefatos tornam-se instrumentos complementares de raciocínio.	O aluno articula registros diferentes, formula explicações e demonstra engajamento e prazer em aprender.

Fonte: O autor, 2026.

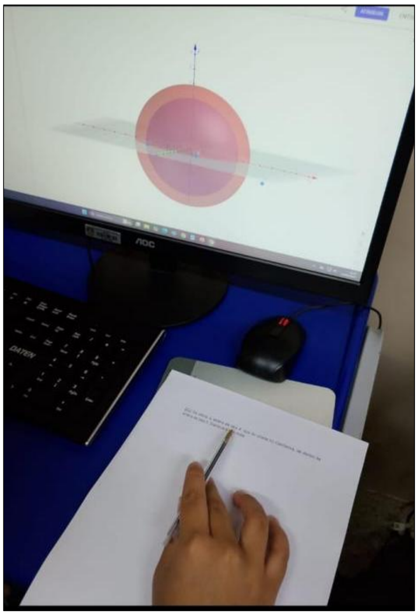
Ao estimular a visualização tridimensional das esferas, o aluno desenvolve uma compreensão mais concreta da geometria envolvida, o que facilita a transição para o raciocínio algébrico. Os alunos foram estimulados a construir duas esferas no Geogebra de raios diferentes e encontrar o volume aplicando a fórmula do volume da esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. O aluno ao comparar duas esferas de tamanhos diferentes e realizar a subtração de seus volumes mentalmente, percebe como o raio influencia diretamente na superfície da esfera. Esse processo não apenas reforçou a habilidade de manipular expressões algébricas, mas também promoveu a generalização da fórmula da área de uma esfera $A = 4\pi r^2$, permitindo que o aluno compreendesse seu uso em diferentes contextos e dimensões.

A atividade em questão retoma o conceito de volume explorado na etapa inicial da experimentação e promove uma integração entre visualização espacial, raciocínio matemático e abstração. Ao aplicar e utilizar a fórmula do volume, o aluno consolida seu entendimento por meio de cálculos concretos, ao mesmo tempo em que avança na generalização da fórmula da área da esfera. O aluno consolida o aprendizado de forma integrada, desenvolvendo a capacidade de generalizar conceitos geométricos com eficácia e profundidade.

A Figura 21 a baixo ilustra a construção realizada pelo próprio aluna durante a atividade experimental, na qual foi solicitado que criassem duas esferas com raios distintos. Essa proposta teve como objetivo promover a observação e a análise comparativa entre os valores de área e volume das esferas geradas. A Figura evidencia o procedimento adotado pela estudante para atender à tarefa, demonstrando sua capacidade de utilizar o ambiente digital como instrumento de exploração geométrica e de desenvolver raciocínios que articulam medidas, fórmulas e representações visuais.

É importante destacar que, nesse tipo de atividade, os alunos poderiam inicialmente criar esferas de forma isolada e dispersa no ambiente do Geogebra. No entanto, cabe ao professor intervir pedagogicamente, orientando os estudantes a construírem as esferas a partir de um mesmo centro. Essa escolha metodológica favoreceu uma visualização mais clara e precisa das diferenças proporcionais entre os raios, áreas e volumes das duas esferas criadas, potencializando a compreensão conceitual por meio da comparação direta entre os objetos construídos. A Figura a seguir deixa claro o envolvimento da aluna com sua criação.

Figura 21 - Aluna “D” criando duas esferas concêntricas com raios distintos



Fonte: O autor, 2026.

Durante a atividade, os alunos aprimoraram suas competências geométricas e algébricas, ao mesmo tempo em que construíam uma base consistente de conhecimento matemático. Esse processo ocorreu de forma leve e envolvente, impulsionado pela interação ativa com o instrumento e pela troca entre os próprios alunos, o que contribuiu para tornar o aprendizado mais agradável e colaborativo. foi possível observar manifestações espontâneas de entusiasmo e envolvimento por parte dos alunos, revelando não apenas o interesse pela proposta, mas também o impacto positivo da mediação instrumental no processo de aprendizagem.

A aluna “E”, por exemplo, ao se deparar com sua própria resposta à última tarefa, declarou: “*Estou impressionada com minha capacidade de expressar minhas ideias, principalmente em realizar umas contas dessa forma e o pior é que estou entendendo*”, demonstrando que o artefato, no caso, o ambiente digital e os recursos manipulativos, foi apropriado como instrumento de pensamento. Ela ainda comentou que sua mãe ficaria muito contente ao ver as respostas que havia produzido, o que reforça o vínculo afetivo com o saber construído.

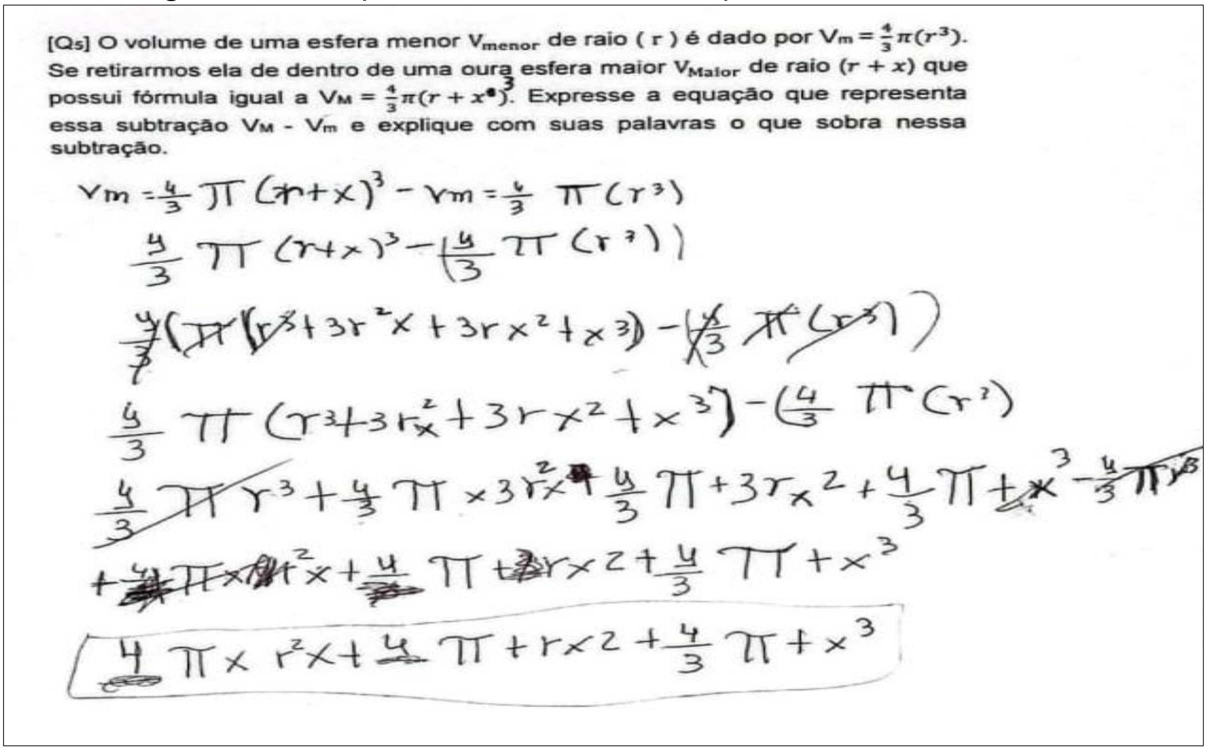
De forma semelhante, a aluna “F” afirmou: “*Foi uma experiência incrível, estou muito feliz com o que consegui compreender durante a atividade e com tudo que consegui criar durante essa experiência*”, sugerindo inclusive que a atividade fosse estendida até o final do ano letivo por considerar esse formato mais eficaz para sua aprendizagem.

O estudante B se expressou dizendo:*"No começo, eu estava só vendo o desenho do cilindro e da esfera no papel e não encaixava. Mas quando peguei a bola e vi que ela encostava certinho nas paredes do cilindro transparente, entendi que a altura dele tinha que ser igual ao diâmetro da esfera, ou seja, duas vezes o raio. Aí a conta começou a fazer sentido na minha cabeça."*

Essas falas explicitam a intersecção entre a gênese instrumental e a mobilização de registros de representações semióticas. À medida que os estudantes constroem esquemas de utilização que transformam o artefato em instrumento, eles concomitantemente transitam entre a representação figural do sólido e a linguagem verbal, atribuindo função, significado e rigor matemático à atividade desenvolvida. A proposta pedagógica, ao articular manipulação concreta, exploração digital e reflexão conceitual, favoreceu esse processo, permitindo que os alunos se apropriassem das ferramentas como mediadores cognitivos. O êxito da tarefa confirma-se não apenas pela correta aplicação da fórmula do volume da esfera, mas, sobretudo, pela autonomia demonstrada pelos estudantes, pela valorização do percurso de aprendizagem e pela consolidação de práticas significativas no ensino da geometria espacial.

Na Figura 22 a baixo, a aluna “E” realiza a subtração algébrica entre os volumes da esfera maior e da esfera menor criadas por ela no Geogebra, adotando “*r*” como o raio da menor e “*r + x*” como o raio da maior esfera. Ela observou que a esfera maior apresenta um acréscimo “*x*” em relação ao raio, o qual, ao final do processo, é considerado infinitamente pequeno. Com isso, a diferença entre os volumes representa apenas uma camada extremamente fina, resultado da subtração entre as duas esferas.

Figura 22 - Resposta da aluna “E” a um questionamento da tarefa


[Q5] O volume de uma esfera menor V_{menor} de raio (r) é dado por $V_m = \frac{4}{3}\pi(r^3)$. Se retirarmos ela de dentro de uma oura esfera maior V_{Maior} de raio $(r + x)$ que possui fórmula igual a $V_M = \frac{4}{3}\pi(r + x^3)$. Expresse a equação que representa essa subtração V_M - V_m e explique com suas palavras o que sobra nessa subtração.

$Vm = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - vm = \frac{4}{3}\pi(r^3)$

$\frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - (\frac{4}{3}\pi(r^3))$

$\frac{4}{3}(\pi(r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3) - (\frac{4}{3}\pi(r^3))$

$\frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3) - (\frac{4}{3}\pi(r^3))$

$\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi \times 3r^2x + \frac{4}{3}\pi + 3rx^2 + \frac{4}{3}\pi + x^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$+ \frac{4}{3}\pi \times r^2x + \frac{4}{3}\pi + rx2 + \frac{4}{3}\pi + x^3$

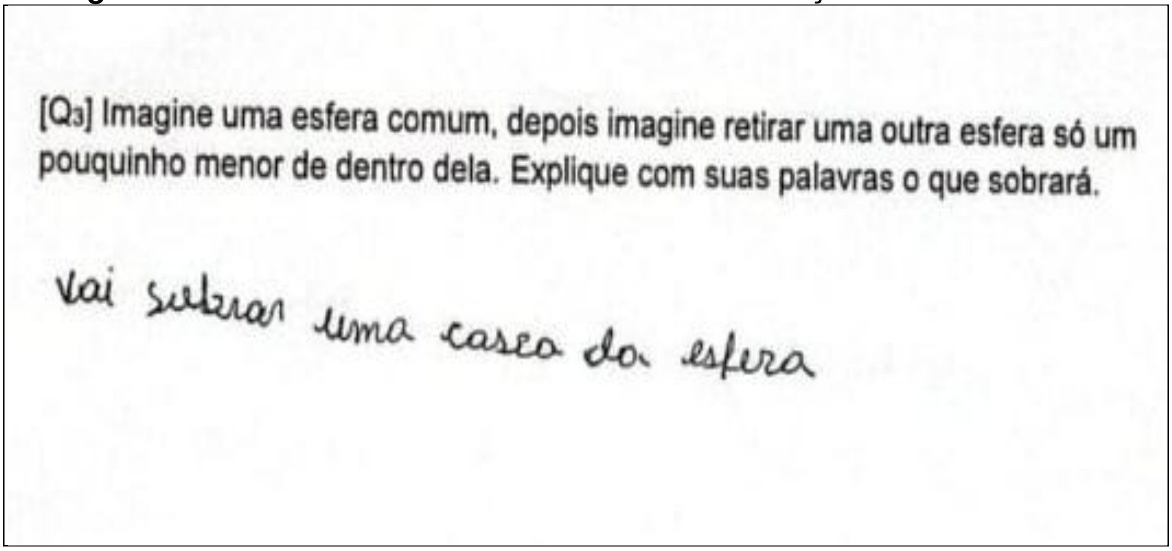
$\boxed{\frac{4}{3}\pi \times r^2x + \frac{4}{3}\pi + rx2 + \frac{4}{3}\pi + x^3}$

Fonte: O autor, 2026.

Nesse momento da atividade, foi possível identificar indícios significativos de aprendizagem, evidenciados por uma resposta simples, porém pertinente, elaborada pela aluna “E” a respeito da subtração dos volumes das duas esferas que ela mesma havia construído. A formulação dessa resposta indica que a estudante compreendeu não apenas os procedimentos operacionais envolvidos, mas também os conceitos matemáticos subjacentes, demonstrando apropriação dos instrumentos e capacidade de aplicar o raciocínio geométrico de forma contextualizada.

Na última tarefa da experimentação, apresentada como exemplo do processo de construção do conhecimento e ilustrada na Figura 23, foi possível observar, por meio da questão 3, como o aluno “G” buscou refletir sobre a subtração entre os volumes das duas esferas construídas. Essa tentativa revela um movimento de apropriação conceitual, no qual o estudante começou a relacionar os objetos geométricos manipulados com operações matemáticas, evidenciando indícios de compreensão sobre os princípios que regem o cálculo do volume e área da esfera

Figura 23 - Aluno “G” conceituando a ideia da subtração entre os volumes


[Q3] Imagine uma esfera comum, depois imagine retirar uma outra esfera só um pouquinho menor de dentro dela. Explique com suas palavras o que sobrará.

Vai sobrar uma casca da esfera

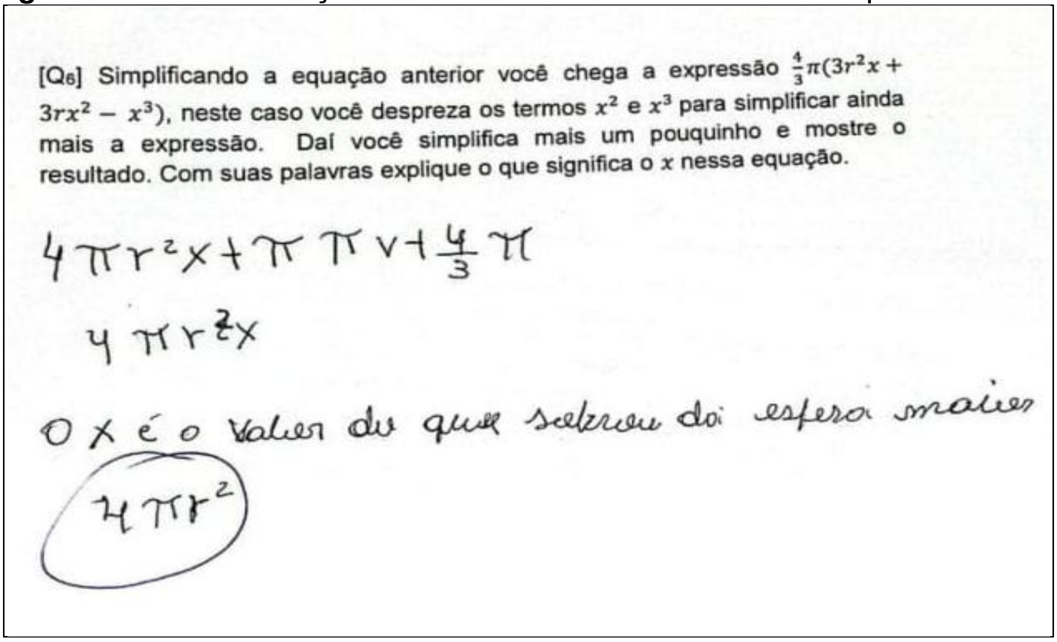
Fonte: O autor, 2026.

Cumpre destacar que, na organização da tarefa manipulativa, a bola de borracha atuou como o signo representativo do sólido esférico propriamente dito, contrapondo-se à ideia de uma casca oca. A relevância dessa caracterização manifestou-se no momento em que os estudantes utilizaram o arroz para mensurar a capacidade espacial correspondente; a densidade e a totalidade da bola balizaram a percepção de que o volume investigado compreendia tanto o interior quanto a fronteira do sólido. Assim, o objeto de borracha funcionou como um instrumento mediador que evitou o obstáculo didático da redução da esfera à sua mera extensão superficial.

Nesta atividade, o aluno foi incentivado a refletir sobre o processo de subtração entre duas esferas e a expressar, com suas próprias palavras, o entendimento que construiu sobre essa operação, foi nesse momento que o aluno se expressou, dizendo que a área de uma esfera nada mais é do que “*uma casca da esfera maior que sobrou na subtração entre as duas*”. Em seguida, foi conduzido a concluir a tarefa de maneira criativa e utilizando raciocínio algébrico, o que o levou à generalização da fórmula da área da esfera, consolidando o aprendizado de forma mais eficaz e autônoma.

A Figura 24 apresenta um momento significativo da atividade. Nessa etapa, os alunos foram conduzidos a refletir sobre a generalização da fórmula da área da esfera. O aluno “H” a partir da manipulação de esferas com diferentes raios e da observação dos padrões emergentes entre os valores obtidos, o estudante começou a identificar regularidades que o conduziu à estrutura algébrica da fórmula como conhecemos hoje: $A = 4\pi r^2$. Esse processo de generalização, conforme discutido por Rabardel (1995), evidenciou a gênese instrumental, pois os artefatos utilizados, como o Geogebra e os materiais manipulativos, foram transformados em instrumentos cognitivos, mediando a construção de significados e favorecendo a abstração matemática. A atividade, portanto, não apenas promoveu a compreensão conceitual da área da esfera, mas também estimulou o desenvolvimento de habilidades de análise, comparação e formulação de regras gerais a partir de situações concretas.

Figura 24 - Generalização da fórmula da área de uma esfera pelo aluno "H"



[Q6] Simplificando a equação anterior você chega a expressão $\frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 - x^3)$, neste caso você despreza os termos x^2 e x^3 para simplificar ainda mais a expressão. Daí você simplifica mais um pouquinho e mostre o resultado. Com suas palavras explique o que significa o x nessa equação.

$4\pi r^2x + \pi \; \pi v + \frac{4}{3}\pi$

$4\pi r^2x$

O x é o valor do que sobrou da esfera maior

$4\pi r^2$

Fonte: O autor, 2026.

Durante o processo de generalização da fórmula da área da esfera, o aluno "H" foi conduzido a refletir sobre o termo "x" que aparece na construção da expressão. Ao analisar a estrutura geométrica envolvida, compreendeu que esse termo representa uma espessura extremamente fina, resultante da divisão da superfície em partes infinitesimais. Por essa razão, "x" é considerado desprezível no cálculo final, sendo eliminado da fórmula. Essa compreensão permitiu ao aluno consolidar a expressão $A = 4\pi r^2$, reconhecendo que a simplificação decorre das propriedades geométricas da esfera e da natureza do processo de aproximação utilizado na dedução da fórmula.

Os alunos evidenciaram forte engajamento para atingir os resultados por meio de seus próprios raciocínios, demonstrando satisfação pessoal ao perceberem sua capacidade de construir soluções de forma autônoma.Essa vivência fortaleceu a confiança em suas habilidades cognitivas e promoveu uma postura ativa diante do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento de uma aprendizagem efetiva e duradoura. Sob a perspectiva da teoria da instrumentação de Rabardel (1995), esse processo revelou a gênese instrumental, na qual os artefatos utilizados, como materiais manipulativos e recursos digitais, foram transformados em instrumentos cognitivos, mediando a atividade dos sujeitos e favorecendo a construção do conhecimento.

A experimentação proporcionou aos alunos uma vivência rica e significativa, articulando conceitos geométricos e algébricos por meio da construção e análise de esferas. Ao explorar a subtração entre volumes e generalizar a fórmula da área da esfera, os estudantes desenvolveram habilidades cognitivas essenciais, como visualização espacial, abstração e raciocínio lógico. A interação com os instrumentos e entre os colegas favoreceu um ambiente colaborativo e prazeroso, no qual o aprendizado se deu de forma natural e envolvente.

Os dados obtidos revelam que a dinâmica proposta não se limitou à fixação de conceitos matemáticos, mas estimulou a autonomia e a postura investigativa dos estudantes. Sob essa perspectiva, a participação ativa do grupo corrobora a premissa de que a mediação por meio de instrumentos potencializa a construção do saber geométrico.

6.4 RELAÇÃO SUJEITO-OBJETO-INSTRUMENTO: FUNDAMENTOS DA ATIVIDADE MEDIADA

Neste capítulo, buscamos investigar de que maneira a relação sujeito-objeto-instrumento (S-O-I) ocorreu durante a atividade prática voltada ao cálculo do volume e da área da esfera, fazendo uso de materiais manipuláveis e ferramentas digitais como o Geogebra.

Foi verificado que nas relações estabelecidas entre objeto-instrumento (O-I) e sujeito-instrumento (S-I), que evidenciaram, respectivamente, como as propriedades físicas e funcionais dos artefatos foram manipuladas para sua transformação em instrumentos pedagógicos e como o aluno se apropriou dessas ferramentas, integrando-as em sua atividade cognitiva ao deslocar o foco da ferramenta para seus processos mentais e ações. Agora, queremos mostrar de que forma a S-O-I se manifestou durante o experimento. O presente estudo concentra-se na análise dessa relação, onde a teoria da gênese instrumental de Rabardel (1995) propõe que o uso de ferramentas no processo de aprendizagem não se limite apenas na interação entre S-I ou entre O-I, abrangendo, de forma integrada, os três elementos: sujeito, objeto e instrumento.

Essa relação se manifesta de forma dinâmica e interdependente, especialmente em atividades práticas, como a realizada nesta pesquisa que exigiu a manipulação concreta (cilindro, esfera, régua, arroz) e abstração simbólica (software Geogebra) para a dedução da fórmula para o volume e da área da esfera. Rabardel (1995, p.58) descreveu em seu livro "Les hommes et leste chnologies; approche cognitive des instruments contemporains" o que deve ser alvo da nossa investigação durante essas interações em que o sujeito (aluno) apreende o conhecimento (objeto) mediado pelo instrumento (material manipulável/App).

> De fato, além das interações diretas sujeito-objeto (S-O), múltiplas outras interações devem ser consideradas: interações entre o sujeito e o instrumento (S-I), interações entre o instrumento e o objeto sobre o qual ele atua (I-O) e, finalmente, interações sujeito-objeto mediadas pelo instrumento (S-O-I). Além disso, este conjunto está imerso em um ambiente que consiste em todas as condições que o sujeito deve levar em conta em sua atividade finalizada. Cada um dos polos e cada uma das interações que acabamos de examinar são, eles próprios, suscetíveis de interagir com o ambiente assim definido. (tradução nossa)

Considerando essa abordagem, o experimento, incentiva os alunos a manipularem diretamente modelos de cilindros e esferas, observando como a esfera se encaixa dentro do cilindro e como isso altera o volume de arroz presente no cilindro. A construção do conhecimento pela relação S-O-I consolida-se quando os alunos, motivados e engajados, refletem sobre o que observam. Eles passam de uma ação concreta (manipular) para uma ação abstrata (compreender), o que caracteriza a internalização do conhecimento. O instrumento, nesse momento, é essencial para que o objeto (conceito de volume da esfera) seja apropriado cognitivamente pelo sujeito. A Figura 25 funciona como um registro material relevante desse processo de mediação, ilustrando o momento em que os estudantes interagem diretamente com os recursos didáticos. Na imagem, observa-se a transição da postura passiva para uma atitude investigativa, na qual os discentes manipulam os objetos, confrontam hipóteses e realizam os registros necessários para a dedução dos conceitos esféricos, validando empiricamente a dinâmica proposta.

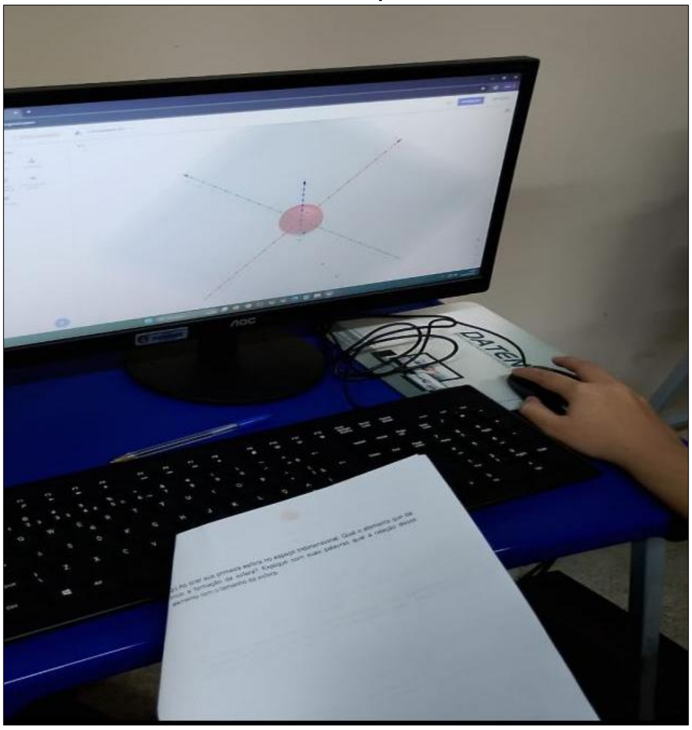
Figura 25 - Momento de reflexão e construção do conhecimento

Fonte: O autor, 2026.

Na sequência, ao utilizarem o software Geogebra, os alunos passaram a interagir com representações digitais da esfera. A relação S-O-I torna-se evidente quando o aluno apropria-se da ferramenta digital, integrando à sua atividade com um propósito específico. A relação S-O-I é dinâmica e se constrói ao longo da ação, o artefato tecnológico funciona aqui como instrumento cognitivo, incorporando ao processo mental do aluno.

Através da Figura 26 abaixo, observou-se o aluno “I” construindo uma esfera no Geogebra de forma autônoma. Após a manipulação prévia de uma esfera concreta, o estudante foi conduzido, por meio das atividades propostas, a refletir e a explicar aspectos relacionados à criação e à forma dessa esfera, evidenciando sua compreensão sobre os elementos que a compõem.

Figura 26 - Aluno “I” criando sua primeira esfera no Geogebra



Fonte: O autor, 2026.

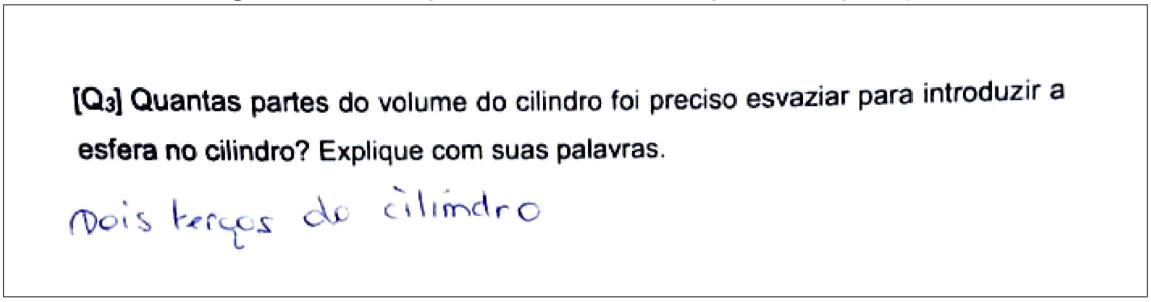
A percepção dos estudantes sobre a participação na atividade foi registrada nos áudios coletados. Em um dos relatos, um dos alunos expressou: “*Estou achando incrível poder aprender na prática! Nunca imaginei que seria tão legal entender um assunto de maneira tão divertida e fácil.*” Além disso, outro aluno solicitou que fosse avaliada a possibilidade de estender as atividades até o final do ano letivo dizendo “*professor, como podemos fazer para o senhor continuar a atividade até o final do ano*”. Embora tenha sido necessário informar que, por enquanto, esse desejo não poderia ser atendido, ressaltei que a proposta dessa experimentação tem justamente o objetivo de mostrar aos professores de matemática a viabilidade de conduzir o processo de aprendizagem de forma alegre e motivadora.

A relação S-O-I emerge, portanto, quando o aluno, utilizando os materiais concretos e o Geogebra, realiza ações cognitivas para compreender e calcular o volume e a área da esfera. Essa relação é dinâmica, modificando-se conforme o aluno alterna entre a manipulação concreta dos modelos físicos e a investigação simbólica no ambiente digital e transcreve seu raciocínio para a folha de resposta. Essa característica fica evidenciada na passagem de Rabardel (1995, p.78), em seu estudo sobre a Gênese Instrumental, onde ele destaca que:

> Na direção do sujeito para o objeto, uma mediação pragmática, onde o instrumento é um meio de uma ação transformadora (em sentido amplo, incluindo controle e regulação) direcionada ao objeto. Mas, assim que essa mediação faz parte de uma atividade real, as dimensões epistêmica e pragmática da mediação estão em constante interação dentro dessa atividade. O instrumento, portanto, não é apenas um universo intermediário, é um meio de ação e, mais amplamente, de atividade; esta é uma segunda dimensão característica. (Pierre Rabardel, 1995, p.78, tradução nossa)

O instrumento aqui representado pelo material concreto e pelo Geogebra, não apenas media a ação, mas também influencia a forma como o conteúdo é concebido e como o aluno estrutura seu pensamento. Ele atua como mediador entre o sujeito e o objeto, mas também como catalisador impulsionando o processo de aprendizagem. Na experimentação, esse fenômeno pode ser observado, por exemplo, quando o aluno “j” percebe por conta própria que o volume da esfera corresponde a dois terços ($\frac{2}{3}$) do volume do cilindro que a contém, como podemos observar em sua resposta na Figura 27 a seguir.

Figura 27 - Resposta do aluno “J” após manipulação


[Q3] Quantas partes do volume do cilindro foi preciso esvaziar para introduzir a esfera no cilindro? Explique com suas palavras.

Dois terços do cilindro

Fonte: O autor, 2026.

O aluno “J” explicou oralmente todos os passos de sua experimentação, contando como fez para introduzir a esfera num cilindro cheio de arroz, e que ao retirar a esfera do cilindro, verificou que havia apenas um terço do cilindro preenchido, então chegou a conclusão que duas partes foram retiradas iguais a que ficou, portanto dois terços do cilindro. Observar o entusiasmo do aluno e sua satisfação ao aprender de maneira autônoma é gratificante para o professor, mostrar ao aluno que ele é capaz de compreender a matemática por seus próprios raciocínios é motivo de satisfação e é o que impulsiona minha pesquisa na área da educação.

Outro momento importante esteve presente na atividade em que foram utilizados comandos do Geogebra para orientar o raciocínio na construção algébrica da fórmula da área da esfera. Nesse contexto, o instrumento digital foi manipulado e o aluno reorganizou seus esquemas mentais com base nessa mediação. Assim, a relação S-O-I revelou-se como um processo de construção ativa, no qual o aluno transformou o instrumento (Geogebra) em ferramenta de pensamento e o objeto (Esfera) em um conhecimento profundo e duradouro.

Dentre as características da relação S-O-I, com base na teoria da Gênese Instrumental de Pierre Rabardel (1995), aplicada ao contexto educacional, devemos ressaltar que o instrumento (I), seja ele físico ou digital, não é apenas uma ferramenta externa, mas parte integrante da atividade cognitiva em questão, mediando a ação do aluno (S) sobre o conteúdo (O). Para melhor compreender a complexidade desse processo, apresentamos a seguir as características que delineiam essa interação, evidenciando a dinâmica que se estabelece em experimentos dessa natureza.

Quadro 8 - Relação Sujeito-Objeto-Instrumento

Elemento	**Papel na atividade**	**Justificativa**
Sujeito (S)	O aluno que realiza a atividade de aprendizagem.	É o agente da ação, responsável por manipular os instrumentos (físicos e digitais) para transformar o objeto de conhecimento. Desenvolve esquemas de uso e interpreta os resultados.
Objeto (O)	O conteúdo matemático: volume e área da esfera	Representa o foco da atividade cognitiva; é o conhecimento que se busca construir ou compreender. O aluno busca compreender e deduzir as fórmulas por meio da experimentação.
Instrumento (I)	Ferramentas utilizadas: modelos físicos (cilindro/esfera) e digital (Geogebra).	Media a ação do sujeito sobre o objeto. O cilindro cheio de arroz permite estimar o volume da esfera por comparação, enquanto o Geogebra possibilita criar esferas variadas e observar como o volume e a área mudam com a variação do raio, favorecendo a dedução das fórmulas $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e $A = 4\pi r^2$.

Fonte: O autor, 2026.

De modo geral, a experimentação vivenciada pelo aluno, tanto no uso de materiais concretos quanto na manipulação de ferramentas digitais como o Geogebra, evidenciou o potencial transformador da aprendizagem ativa. A relação entre sujeito, instrumento e objeto, revelou-se essencial para a construção do conhecimento, permitindo que o aluno se apropriasse do conteúdo matemático por meio de seus próprios raciocínios e experiências. Essa abordagem, fundamentada na teoria da Gênese Instrumental de, reforça a importância de práticas pedagógicas que valorizem a autonomia intelectual, a mediação reflexiva e o protagonismo do estudante no processo de aprendizagem, promovendo não apenas a compreensão conceitual, mas também o prazer em aprender.

6.5 ANÁLISE DOS PROCESSOS DE CONVERSÃO E TRATAMENTO DE REGISTROS SEMIÓTICOS NA EXPERIMENTAÇÃO PRÁTICA

Neste capítulo, vamos analisar a experimentação por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (2012) na aprendizagem do cálculo do volume e área da esfera no espaço. A teoria destaca a importância dos diferentes registros de representação para compreender conceitos matemáticos. Podendo ser observado claramente em:

> a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática. (Raymond Duval, 2012, p. 3)

Raymond Duval (2012) propôs que a aprendizagem matemática está diretamente relacionada à capacidade de operar com diferentes registros de representação semiótica, isto é, distintas formas de expressar ideias matemáticas. Esses registros incluem:

- A linguagem natural, por meio de explicações verbais ou escritas;
- As representações algébricas, como equações e expressões;
- As representações geométricas, como figuras e gráficos;
- As tabelas, diagramas e notações simbólicas específicas.

A articulação entre esses registros é essencial para a construção do conhecimento matemático, pois permite ao aluno compreender os elementos e conceitos referente a formação da esfera de maneira mais ampla e relevante. Como afirma Duval, em sua obra:

> Não é possível, portanto, fingir como se as representações semióticas fossem simplesmente subordinadas às representações mentais, pois o desenvolvimento da segunda depende de uma interiorização da primeira e somente as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas essenciais como a de tratamento. O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. (Raymond Duval, 2012, p. 5)

É fundamental compreender que ensinar matemática vai além da simples transmissão de fórmulas. Trata-se de favorecer a construção do conhecimento por meio da habilidade de transitar entre diferentes registros de representação. Frequentemente, as dificuldades enfrentadas pelos alunos não decorrem da ausência de domínio sobre o conteúdo, mas sim da limitação em converter informações de um registro para outro. Essa realidade tornou-se evidente durante a atividade experimental, quando um aluno foi confrontado com a seguinte situação, após terem medido as dimensões de uma esfera e encontrado sua largura e altura, foi feito o seguinte questionamento aos grupos conforme ilustrado na Figura 28.

Figura 28 - Quarta questão da primeira tarefa da experimentação

[Q_4] Quanto mede o comprimento que vai do centro da esfera a base da esfera? Justifique como você chegou a essa resposta.

Fonte: O autor, 2026.

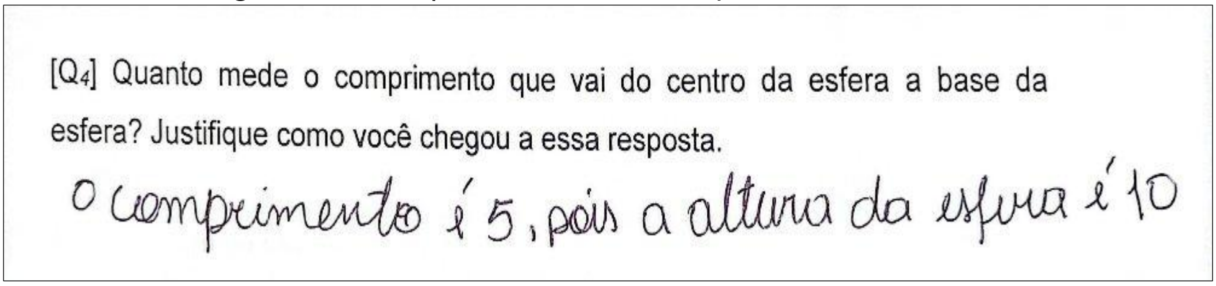
Durante a realização da atividade, o aluno “K”, antes mesmo de registrar seu raciocínio, solicitou minha presença e fez diversas perguntas, como: “*Onde é o centro da esfera?*” e “*Onde fica a base da esfera*?”, O aluno complementou seu relato afirmando que, ao trabalhar com o cilindro, compreendeu que a base correspondia à sua parte inferior. No entanto, demonstrou dificuldade em identificar uma referência equivalente na esfera, evidenciando os desafios envolvidos na abstração das propriedades geométricas dos sólidos e na transposição de conceitos entre diferentes formas espaciais.

O comportamento dos alunos revelou dificuldades na conversão entre diferentes registros de representação semiótica, em especial na transposição do registro geométrico, representado pelo objeto físico que nesse caso se tratou de uma esfera para o registro de linguagem natural, compreendido na experimentação como a linguagem oral e escrita. Ao longo das aulas, esse desafio foi gradualmente abordado por meio de estratégias pedagógicas que buscaram esclarecer os conceitos envolvidos e orientar os estudantes na construção do conhecimento geométrico em questão.

Conforme a teoria semiótica de Raymond Duval (2012), a linguagem natural corresponde ao uso da língua falada ou escrita para expressar ideias matemáticas, por meio de explicações, justificativas, descrições ou interpretações. Trata-se do registro mais comum e acessível, pois permite ao aluno verbalizar ou escrever o que pensa, mesmo sem recorrer a símbolos formais ou representações gráficas.

A limitação do aluno “L” observada durante a experimentação não se relaciona à ausência de conhecimento sobre o conteúdo matemático, mas sim à dificuldade do aluno em articular diferentes registros de representação para construir e expressar seu raciocínio. Tal evidência tornou-se perceptível após uma breve intervenção, na qual foram esclarecidos os conceitos de centro e base da esfera. A partir desse esclarecimento, o aluno “L” demonstrou autonomia e compreensão ao responder à questão de forma satisfatória. Inicialmente, expressou-se oralmente ao afirmar: *“Essa parte que vai do meio da esfera ao topo da esfera é igual a metade do tamanho todo da esfera, então se a esfera mede 10, então esse valor é 5.”* Em seguida, foi capaz de registrar sua resposta por escrito na folha de atividades, conforme ilustrado na Figura 29, apresentando uma formulação concisa e coerente com o raciocínio desenvolvido.

Figura 29 - Resposta do aluno “L” após esclarecimentos



[Q_4] Quanto mede o comprimento que vai do centro da esfera a base da esfera? Justifique como você chegou a essa resposta.

O comprimento é 5, pois a altura da esfera é 10

Fonte: O autor, 2026.

Na resposta apresentada pelo aluno “L” ao questionamento proposto na Figura 29, observa-se que o discente demonstrou domínio conceitual ao identificar corretamente o valor do raio da esfera, articulando seu raciocínio de maneira clara e coerente. Durante esse processo, é possível identificar a conversão entre registros de representação semiótica, evidenciada pela sequência de ações: medição do objeto geométrico com o auxílio da régua, verbalização da conclusão e posterior registro escrito na folha de atividades. Ainda nessa resposta, foram identificados indícios de tratamento da informação, uma vez que o aluno aplicou o procedimento de divisão por dois após determinar o diâmetro da esfera, utilizando essa operação para calcular o valor do raio. Tal compreensão foi expressa por meio da relação matemática *D/2=r*, seguida da dedução de que *2r=D*. A relevância desse aspecto é corroborada por Duval (2012), ao afirmar que:

> para 0,25, 1/4 e 25.10^{-2}: não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições 0,25 + 0,25 = 0,5, 1/4 +1/4 = 1/2 e $25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$ e o número representado que não é o significante 0,25, nem o significante 1/4 e nem o significante 25.10^{-2}. Cada uma destas três expressões tem uma significação operatória, mas representa o mesmo número. (Raymond Duval, 2012, p. 8)

Na Teoria Semiótica de Raymond Duval (2012), os processos de *conversão* e *tratamento* são fundamentais para a aprendizagem matemática. A "conversão" ocorre quando o aluno transfere uma informação de um registro de representação para outro, como transformar uma figura geométrica ou parte dela em uma expressão algébrica. Já o "tratamento" refere-se à manipulação de informações dentro do mesmo registro, como, por exemplo, desenvolver as equações criadas, realizando os cálculos necessários para obtenção das respostas para as atividades sugeridas na experimentação. O Quadro 9 esclarece melhor a diferença entre os dois processos.

Quadro 9 - Diferença entre Conversão e Tratamento

Processo	**Definição**	**Exemplo Matemático**	**Objetivo na atividade**
Conversão	Passar de um registro de representação para outro.	Traduzir a figura para uma expressão matemática.	A partir dos objetos e da manipulação, deduzir as fórmulas $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ e $A = 4\pi r^2$
Tratamento	Manipular informações dentro do mesmo registro de representação.	Calcular o volume de uma esfera com raio 5 cm.	Usar o Geogebra para alterar o raio da esfera e observar como o volume muda.

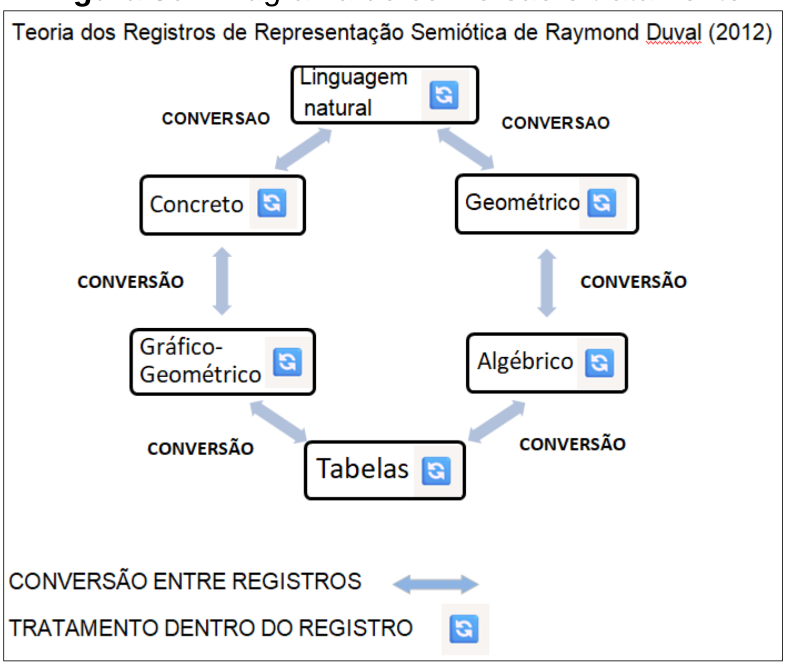
Fonte: O autor, 2026.

Muitos dos erros cometidos pelos alunos não estão diretamente relacionados ao conteúdo, mas sim à dificuldade em realizar determinadas operações cognitivas. Trabalhar esses processos em sala de aula é essencial para promover uma aprendizagem mais eficaz e integrada. Recomenda-se, portanto, que os professores proponham atividades que estimulem os alunos a construir suas próprias conversões, favorecendo a compreensão dos significados presentes nas representações. Também é importante que os estudantes pratiquem e aprimorem habilidades com cálculos simples, aplicando os conhecimentos adquiridos ao longo da vida escolar durante o tratamento das informações. Criamos um diagrama para ilustrar como ocorre a conversão e o tratamento segundo Duval (2012).

A Figura 30 mostra diferentes formas de representação como a linguagem natural, concreta, geométrica, algébrica, tabelas e gráfico-geométrico. Cada um deles é um “registro” que permite ao estudante compreender e manipular conceitos matemáticos. A Conversão entre registros está sendo representada pelas setas de dupla direção ( ), as quais indicam que é possível traduzir uma ideia de um registro para outro (por exemplo, passar de uma expressão algébrica para um gráfico). Essa conversão é essencial para a aprendizagem, pois amplia a compreensão e evita que o conhecimento fique restrito a uma única forma de representação.

Nessa Figura, também é possível ver que o Tratamento dentro do registro está sendo representado pelo símbolo circular ( ) mostrando que também é possível realizar operações e transformações dentro de um mesmo registro (por exemplo, simplificar uma expressão algébrica sem mudar de registro).

Figura 30 - Diagrama de conversão e tratamento



Fonte: O autor, 2026.

A teoria evidencia que o domínio da matemática não depende apenas de saber operar em um registro, mas, sobretudo, de conseguir transitar entre eles. Isso explica por que muitos alunos compreendem melhor quando têm acesso a diferentes representações de um mesmo conceito.

Esse tipo de atividade exige domínio técnico dos registros, como a manipulação de símbolos algébricos e o uso adequado das operações matemáticas. Para que o aprendizado em matemática seja realmente eficaz, é necessário integrar de forma articulada os processos de conversão e tratamento. Essa Figura 30 sintetizou como a aprendizagem matemática se estrutura em múltiplos registros de representação e destaca a importância da *Conversão* e do *Tratamento* para que o estudante desenvolva uma compreensão profunda e flexível dos conceitos.

O Quadro 10 exibe essa abordagem metodológica que permite identificar, de maneira precisa, como os processos de conversão entre diferentes registros de representação e os tratamentos realizados dentro de um mesmo registro se manifestaram ao longo da experimentação.

Quadro 10 - Aplicação de Conversão e Tratamento na Atividade

Processo	Registro Envolvido	Exemplo na Atividade	Objetivo Didático
Conversão	**Concreto→ Geométrico**	Apresentar uma esfera maciça e um cilindro com mesma altura e diâmetro.	Relacionar os objetos físicos às formas geométricas correspondentes.
Conversão	**Concreto→ Algébrico**	Usar arroz para preencher o cilindro e estimar quantas vezes caberia na esfera.	Intuir a proporção entre os volumes e introduzir o raciocínio algébrico da fórmula do volume da esfera.
Conversão	**Geométrico→ Algébrico**	Criar a esfera no Geogebra e reconhecer os elementos das fórmulas $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ e$A = 4\pi r^2$	Compreender como a forma tridimensional se traduz em uma expressão matemática.
Tratamento	**Algébrico**	Realizar os cálculos de volume da esfera e do cilindro com os mesmos valores de raio e altura.	Comparar os volumes e verificar que o volume da esfera é cerca de 2/3 do cilindro.

Tratamento	**Gráfico-Geométrico**	Alterar o raio da esfera no Geogebra e observar como o volume muda.	Explorar dinamicamente a relação entre raio e volume.

Fonte: O autor, 2026.

O aluno que compreende o volume da esfera em mais de um registro e consegue transitar entre esses registros demonstra uma compreensão mais sólida do conceito. Essa atividade permitiu aos alunos visualizarem e manipularem os conceitos envolvendo o cálculo de volume e área de uma esfera, promovendo uma compreensão mais profunda por meio da experiência concreta, da manipulação geométrica, da aplicação algébrica e digital, exatamente como propõe Duval (2012).

> é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. (Raymond Duval, 2012, p. 5)

A aprendizagem em matemática exige que os alunos consigam estabelecer relações entre o mundo físico e as representações abstratas. No estudo da geometria espacial, essa conexão se torna especialmente relevante ao tratar de estudo relacionado à esfera. Propomos uma abordagem em que o aluno, com o apoio do professor e por meio das atividades propostas na sequência didática, construa gradualmente a fórmula para o cálculo do volume e da área da esfera.

Essa construção ocorreu a partir da manipulação de objetos físicos e da análise das relações geométricas envolvidas entre a esfera e o cilindro, favorecendo uma compreensão mais clara e ampla dos conceitos matemáticos. Tal perspectiva pode ser observada em Duval (2012) "*Na sequência, permite separar, na análise da resolução de um problema, dois tipos de transformação de representação semiótica que são radicalmente diferentes: as conversões e os tratamentos*." (Raymond Duval, 2012, p. 1).

6.6 CONVERSÃO DO REGISTRO CONCRETO PARA O GEOMÉTRICO: TRANSIÇÃO DO CONCRETO AO ABSTRATO.

Na etapa inicial da atividade, observou-se o entusiasmo dos alunos diante da manipulação dos materiais concretos (esferas, cilindros e réguas). Após uma breve explanação sobre os objetos disponibilizados e um período de exploração livre, deu-se início às tarefas experimentais, cuidadosamente planejadas para favorecer a reflexão e a construção ativa do conhecimento. Considerando que os alunos já possuíam familiaridade com o conceito de volume de sólidos geométricos, especialmente o cilindro, esta atividade foi estruturada com o propósito de levá-los à formulação da expressão algébrica do volume da esfera. A proposta baseia-se na manipulação dos conhecimentos previamente adquiridos, favorecendo a construção de novos conceitos por meio da experimentação e da análise comparativa entre os sólidos envolvidos.

Durante a atividade, um aluno, identificado como “M”, ao observar e manipular uma “esfera concreta”, fez a seguinte colocação: “*Professor, essa bola mede aproximadamente 10 cm, e a largura do cilindro também. Se ela não fosse de borracha, não entraria no cilindro, porque a medida externa do cilindro é de 10 cm, mas por dentro é menor, certo*?” Essa intervenção espontânea evidencia que o estudante alcançou o objetivo central da proposta, ao revelar sua capacidade de abstrair os objetos físicos e reconhecer as limitações entre suas dimensões reais e ideais. A partir da comparação entre os materiais concretos e suas representações geométricas, o aluno demonstrou compreender a relação entre os elementos constitutivos dos sólidos e os conceitos matemáticos envolvidos, iniciando o processo de transição entre os registros de representação, conforme propõe Duval (2012).

As formas geométricas da esfera e do cilindro constituem representações ideais, cujas características não se manifestam de maneira exata no mundo físico. Tais figuras apresentam propriedades perfeitas, como linhas sem espessura, superfícies completamente lisas e medidas rigorosamente precisas, que só podem ser concebidas por meio da abstração mental ou representadas simbolicamente. Por essa razão, são classificadas como objetos abstratos no campo da matemática. Nesta etapa da atividade, busca-se favorecer a compreensão dessa relação abstrata por parte dos alunos, promovendo a transição do registro concreto para o geométrico e estimulando a construção de significados que ultrapassam a mera manipulação dos materiais físicos.

Outro aspecto relevante a ser mencionado refere-se ao uso da trena durante a atividade. Embora o instrumento tenha sido manuseado exclusivamente pelo professor, sua utilização ocorreu sempre na presença do aluno que solicitava a confirmação das medidas obtidas nos objetos manipulados. Essa prática teve como objetivo validar as observações feitas pelos estudantes, reforçando a autonomia no processo de mensuração e promovendo a construção do conhecimento por meio da interação e da verificação conjunta.

Com o objetivo de favorecer a conversão cognitiva do concreto para o geométrico, buscou-se garantir que os alunos estabelecessem relações entre os objetos físicos e suas respectivas representações matemáticas, reconhecendo-os como uma esfera maciça e um cilindro com capacidade volumétrica e apenas uma base, cujos elementos fundamentais (altura, diâmetro e raio) seriam posteriormente utilizados na formulação e compreensão das expressões algébricas envolvidas.

Essa abordagem está alinhada à Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2012), segundo a qual a aprendizagem matemática exige não apenas a manipulação de diferentes registros (como o concreto, o gráfico, o algébrico e o verbal), mas sobretudo a capacidade de conversão entre eles. Ao permitir que os alunos transitem do registro concreto para o geométrico e, posteriormente, para o algébrico, a atividade contribui para o desenvolvimento de competências cognitivas fundamentais à compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Os materiais utilizados nesta etapa foram apresentados na Figura 14 (pg.78), fundamental para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Com o intuito de garantir que o aluno realize sua própria conversão, do Concreto para o Geométrico, relacionando os objetos físicos às formas geométricas correspondentes e identificando os objetos como sendo uma esfera maciça e um cilindro com espaço interno vazio que possuem altura, diâmetro e raio iguais.

As questões propostas nesta etapa da experimentação foram elaboradas com o finalidade de conduzir os alunos à reflexão e à apropriação dos elementos característicos dos sólidos geométricos envolvidos, especificamente a esfera e o cilindro. Nesse momento, os estudantes foram instigados a responder questionamentos que exigiam observação atenta e interpretação conceitual, como por exemplo, na Atividade 1, onde foi entregue ao aluno um folha com o seguinte questionamento:

“[Q1] Na circunferência da base do cilindro, quanto mede o raio? Existe uma relação entre esse raio e a altura do cilindro. Observe com atenção e explique com suas palavras qual é essa relação.”

Perguntas que visaram promover a identificação dos atributos geométricos fundamentais e estimular a construção ativa do conhecimento por meio da linguagem própria dos alunos, favorecendo a transição entre os registros de representação semiótica conforme proposto por Duval (2012).

Os alunos realizaram a medição dos sólidos geométricos que estão representados na Figura 31, atentando-se ao diâmetro e à altura, e identificaram que a esfera se ajusta perfeitamente ao interior do cilindro. Todas as observações contribuíram significativamente para a construção de conhecimentos prévios fundamentais à segunda etapa da atividade, a qual se destinou à análise da capacidade volumétrica de cada sólido e à compreensão das relações existentes entre eles. O material concreto, contendo um cilindro e uma esfera, foi entregue aos alunos para familiarização e análise dos elementos.

Figura 31 - Comparações entre cilindro e esfera

Fonte: O autor, 2026.

Nesta tarefa inicial, foi fundamental conduzir o aluno à percepção de que as alturas do cilindro (h_c) e da esfera (h_e) eram equivalentes, ou seja, ($h_c = h_e$). A partir dessa análise inicial, buscou-se favorecer a compreensão de que a altura do cilindro (h_c) corresponde, na verdade, ao dobro do raio da esfera ($2r_e$), ou seja, ($h_c=2r_e$). Esse raciocínio deve emergir da própria investigação do aluno, por meio da manipulação dos materiais e da resolução reflexiva das questões propostas na atividade que os provocaram a raciocinar e refletir.

Durante a atividade, alguns alunos trouxeram observações muito relevantes. O aluno “N”, por exemplo, comentou: *“Professor, a altura do cilindro é igual à da* *esfera, não é?”*, revelando exatamente a primeira percepção que se esperava. À medida que manipulavam os materiais e refletiam sobre as medidas, outros começaram a dizer: *"Professor, se a altura da esfera é igual a dois raios, então a altura do cilindro também é dois raios! né?"* Esse tipo de raciocínio emergiu naturalmente da investigação prática, revelando que os alunos estavam construindo o conceito de forma sólida, conectando medidas reais com propriedades geométricas, baseando-se na vivência prática, favorecendo a assimilação.

Durante a realização da atividade, foi possível observar que os alunos, mesmo diante de informações aparentemente claras e acessíveis, demonstraram constante necessidade de validação de seu raciocínio. Essa postura revela uma característica comum entre estudantes em processo de construção da autonomia intelectual, evidenciando a importância de experiências que favoreçam a segurança na tomada de decisões e na formulação de conclusões próprias.

6.7 CONVERSÃO DO REGISTRO CONCRETO PARA O ALGÉBRICO: INTERAÇÃO ENTRE OS SÓLIDOS E A CONSTRUÇÃO DOS PRIMEIROS NÚMEROS ALGÉBRICOS DA FÓRMULA DO VOLUME DA ESFERA

No segundo dia da experimentação, deu-se início ao processo de registro concreto para o algébrico durante a análise da relação volumétrica entre os sólidos geométricos envolvidos (cilindro e a esfera). Com o intuito de favorecer a visualização e a compreensão desse conceito por parte dos alunos, utilizou-se o arroz como material de preenchimento. A escolha pelo arroz, em detrimento da água, deve-se à praticidade e à adequação ao ambiente escolar, embora se reconheça que o uso da água proporcionaria maior precisão na observação do deslocamento volumétrico.

Nesse sentido, sugere-se aos colegas docentes a possibilidade de apresentar esse procedimento por meio de vídeos, como recurso complementar para ilustrar o fenômeno de deslocamento da água pela esfera dentro do cilindro. A inserção da esfera no interior do cilindro, previamente preenchido com arroz, permitiu aos alunos observar concretamente o deslocamento de volume provocado pela presença do sólido esférico, essa inserção foi ilustrada na figura 15 (pg. 79).

A inserção da esfera em um recipiente previamente preenchido com arroz constituiu uma atividade exploratória que visou favorecer a compreensão do conceito de volume da esfera. Ao realizar essa ação, o aluno pôde observar empiricamente o deslocamento do arroz, o que permitiu a ele estabelecer uma relação entre o espaço ocupado pela esfera e o volume do recipiente. Essa abordagem concreta contribui para a construção do conceito de volume da esfera, articulando a experiência sensorial com o desenvolvimento de abstrações matemáticas.

Durante a realização da atividade experimental, a aluna, identificado como “A”, muito participativa, chamou a atenção ao afirmar: “*Professor, eu precisei retirar um pouco de arroz do cilindro para colocar a esfera dentro completamente e coloquei mais um pouco de arroz para completar a parte de cima que ficou vago, tá certo assim?*”. Essa fala revela uma prática comum entre os estudantes, a necessidade de validação do próprio raciocínio, mesmo quando este está correto. No entanto, o que mais me surpreendeu foi o fato de que, ao final da atividade, todos os alunos haviam devolvido uma porção de arroz ao cilindro, completando o volume, contrariando minha expectativa inicial de que alguns deixariam o recipiente incompleto após a inserção da esfera.

A proposta da atividade consistiu em levar os alunos a observarem o deslocamento do arroz provocado pela introdução da esfera no cilindro e, posteriormente, ao retirar a esfera, refletirem sobre a relação entre o volume ocupado pela esfera e a quantidade de arroz retirada. Esse momento revelou-se especialmente significativo, pois alguns alunos, ao observarem o espaço restante no cilindro, afirmaram espontaneamente: “*Professor, tive que retirar metade da quantidade de arroz para acrescentar a esfera*”, enquanto outro, de forma mais cautelosa, disse: “*Tirei uns 45% do arroz do cilindro*”.

Apesar dessas aproximações, nenhum aluno ainda havia chegado de forma autônoma à conclusão de que o volume retirado correspondia a dois terços do cilindro. Foi um dos momentos que fiz a intervenção, orientando-os a verificar a marcação do cilindro em três partes iguais e a responder às questões propostas na sequência da atividade. A partir dessa análise, todos os estudantes chegaram à conclusão de que aproximadamente dois terços da quantidade de arroz haviam sido retirados, correspondendo ao volume da esfera inserida. Esse resultado evidenciou o potencial da atividade para promover a construção do conceito de volume por meio da experimentação e da mediação docente.

Essa abordagem apresenta grande potencial para auxiliar os alunos na interpretação de questões em processos seletivos como apresentada na Figura 32, especialmente aquelas que envolvem situações-problema em que é necessário construir mentalmente os objetos geométricos e estabelecer relações entre os elementos apresentados e as fórmulas matemáticas correspondentes. Em determinadas questões, a fórmula é fornecida como apoio ao raciocínio, enquanto em outras, exige-se que o estudante a recorde e a relacione integralmente com os dados propostos, a fim de elaborar uma estratégia de resolução adequada.

A vivência prática proporcionada pela atividade contribuiu significativamente para o desenvolvimento dessa competência, ao favorecer a visualização, a abstração e a compreensão das relações matemáticas envolvidas. Essa é uma questão bastante representativa, que corrobora com os aspectos abordados nesta investigação.

Figura 32 - Questão do Enem envolvendo a esfera e um cilindro

1) Enem 2016 – 2ª Azul – 156 (F)

QUESTÃO 156

Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), (2016, 156, Azul).

O enunciado exemplifica de forma clara como os conhecimentos construídos por meio da experimentação contribuem diretamente para a interpretação e resolução de situações-problema semelhantes, especialmente aquelas que exigem a visualização mental de objetos geométricos e a aplicação de fórmulas matemáticas em contextos práticos, são frequentemente exigidas em avaliações como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Esse exame, aplicado no Brasil, tem como finalidade avaliar o desempenho dos estudantes que concluíram ou estão em fase de conclusão do ensino médio, além de funcionar como uma das principais vias de acesso ao ensino superior.

O aluno que vivencia o processo de construção algébrica das fórmulas tende a desenvolver uma compreensão mais significativa sobre seus elementos constitutivos e aplicações. Essa vivência favorece a interpretação imediata das situações-problema propostas, especialmente em avaliações como o ENEM, uma vez que o estudante não necessita despender tempo tentando compreender a estrutura da fórmula, mas sim direciona seu raciocínio para a análise dos dados e a resolução da questão. Dessa forma, a aprendizagem torna-se mais eficiente e alinhada às demandas cognitivas exigidas em contextos avaliativos.

6.8 TRATAMENTO NO REGISTRO ALGÉBRICO: VOLUME DA ESFERA

O objetivo didático desta atividade foi conduzir os alunos à construção das fórmulas do volume da esfera, por meio de cálculos e comparações fundamentadas em operações matemáticas previamente conhecidas. Para isso, propôs-se inicialmente um tratamento algébrico envolvendo o volume da esfera e o volume de um cilindro com medidas equivalentes, permitindo que os estudantes identificassem a relação proporcional entre esses sólidos.

Durante a manipulação dos materiais concretos, com a esfera introduzida no cilindro preenchido com arroz, os alunos começaram a levantar hipóteses. Um deles comentou: "*Professor, quando coloco a esfera dentro do cilindro cheio de arroz, parece que sobra pouco espaço! Será que a esfera ocupa mais da metade do volume do cilindro?*". A partir dessas observações, os estudantes foram incentivados a realizar medições e cálculos algébricos combinando a fórmula do cilindro com as proporções encontradas na atividade.

A figura 33 mostra o momento final da segunda atividade realizada pelo aluno "B", que agora em outro momento da experimentação, fez observações importantíssimas durante a comparação entre os volumes da esfera e do cilindro: "*Professor, se para encontrar o volume do cilindro eu tenho que fazer a multiplicação da área da base pela altura e, como a altura é igual ao diâmetro da esfera, então dá pra fazer uma relação entre os dois, certo?* Após essa reflexão o aluno ainda concluiu dizendo: *"Acho que a esfera ocupa metade do cilindro! né professor?*" Com base nessas análises, o aluno foi conduzida à dedução da expressão geral para o volume (*V*) da esfera que corresponde a dois terços do volume do cilindro e é representado pela fórmula: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. De forma progressiva, os alunos desenvolvem a consciência das relações geométricas entre a esfera e o cilindro, elaborando tal compreensão por meio de suas próprias análises e inferências.

Figura 33 - Atividade de manipulação concluída pelo aluno “B”

Fonte: O autor, 2026.

É relevante destacar que os alunos já possuíam conhecimento prévio acerca da fórmula geral do volume do cilindro, o que serviu como ponto de partida para a atividade proposta. O objetivo foi conduzi-los à construção da fórmula geral do volume da esfera por meio de procedimentos comparativos e cálculos envolvendo os dois sólidos com medidas equivalentes.

Durante a experimentação, os estudantes foram incentivados a observar e refletir sobre as relações entre os volumes. A aluna “M” comentou: “*Se o cilindro tem o mesmo raio e altura que a esfera, dá pra comparar os volumes e ver quanto a esfera ocupa, né professor?*” O estudante “B”, ao realizar os cálculos, observou: “*Acho que a esfera ocupa menos espaço que o cilindro... parece que é dois terços ou algo assim.*” Essas percepções foram fundamentais para que os alunos, por meio do tratamento algébrico, chegassem mais a diante à generalização da expressão que permite calcular o volume de qualquer esfera.

Na Figura 34, observou-se que, durante a atividade experimental, os processos de tratamento tornaram-se evidentes nas resoluções elaboradas pela estudante “M”, especialmente nos momentos em que a aluna foi orientada a manipular expressões matemáticas, que de forma algébrica fez substituição de valores e realizou cálculos a partir de conhecimentos previamente internalizados ao longo da experimentação e de sua vida escolar.

Figura 34 - Questão resolvida pela aluna "M"

[Q4] Você percebeu que das três partes em que o cilindro foi dividido, dois terços $\frac{2}{3}$ do (volume total do cilindro), precisou ser retirado para introduzir a esfera. Então, utilizando essa informação, como você pode encontrar o volume de arroz que saiu do cilindro. Explique com suas palavras.

$$V(C) = (\pi r^2) \times (2r)$$

$$V(E) = 2\pi r^3 \times \frac{2}{3}$$

$$V(E) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

formula do volume da esfera

Fonte: O autor, 2026.

Essa abordagem contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático, ao estimular a compreensão conceitual, a capacidade de abstração e a autonomia intelectual dos estudantes frente aos desafios propostos. A atividade favoreceu não apenas a dedução da fórmula, mas também a compreensão conceitual do conteúdo e o desenvolvimento do pensamento matemático. Ao relacionar sólidos conhecidos com novos conceitos, os alunos demonstraram capacidade de abstração, argumentação e construção de significados, conforme previsto na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012).

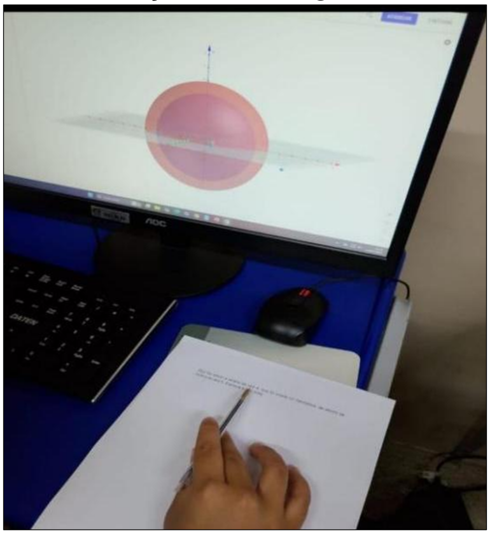
Portanto, constatou-se uma vivência significativa dos registros de representação semiótica, com destaque para o algébrico. Ao articular conhecimentos prévios com novas relações, os alunos foram capazes de realizar tratamentos dentro do registro algébrico, o que evidenciou um processo de aprendizagem ativa e reflexiva.

6.9 TRATAMENTO NO REGISTRO GRÁFICO-GEOMÉTRICO: CRIAÇÃO E DIMENSIONAMENTO DA ESFERA

Nesse registro de representação semiótica os alunos realizaram operões com representações visuais dinâmicas, que pertencem ao registro gráfico-geométrico com o uso de uma plataforma digital Geogebra. Nessa etapa, os alunos foram orientados a utilizar o software Geogebra para construir duas esferas, uma maior e outra menor, como é possível ver na Figura 35, com o objetivo futuro de explorar, por meio do tratamento no registro algébrico, a variação da área superficial em função do raio. Ao manipular os parâmetros no ambiente digital, uma aluna "D" comentou: "*Professor, quando eu aumento o raio, a esfera cresce bastante! Mas a área também muda! Dá pra ver que ela depende do raio."* Essa experimentação dinâmica possibilitou a dedução da fórmula da área da esfera: $A = 4\pi r^2$.

Ao construir a esfera, a aluna realizou o tratamento dos dados dentro do registro geométrico, manipulando objetos visuais sem alterar o tipo de representação. Essa ação evidencia que a estudante compreende como criar, explorar e interpretar os elementos constituintes de objetos tridimensionais, demonstrando domínio sobre suas propriedades espaciais. Além disso, o uso de ferramentas digitais para realizar essa construção revela uma apropriação contemporânea do registro geométrico, articulando habilidades técnicas e cognitivas que favorecem a visualização e a compreensão das estruturas matemáticas envolvidas.

Figura 35 - Aluna "D" respondendo ao questionamento da atividade sobre sua criação no Geogebra

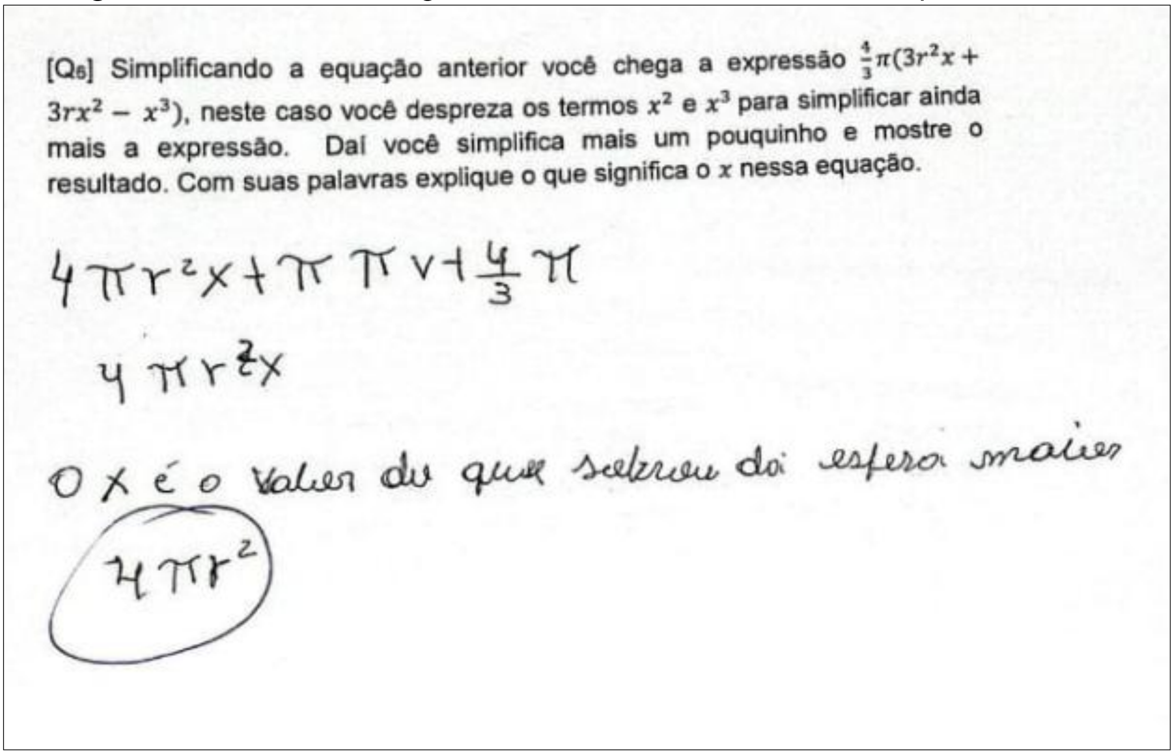


Fonte: O autor, 2026.

Após essa análise, a estudante foi orientada a fazer uma conversão para a forma algébrica, do raciocínio que foi adquirido na manipulação do software, como podemos ver na Figura 36. Durante essa atividade, a aluna “F” foi desafiado a realizar a subtração algébrica entre as duas esferas construídas no Geogebra, uma maior e outra menor, a fim de analisar a variação da área superficial em função do raio. Esse processo exigiu que ele aplicasse sucessivos tratamentos no registro algébrico, percorrendo quatro etapas de manipulação simbólica até chegar à quinta questão, na qual foi conduzido à dedução da fórmula geral da área da esfera.

Esse percurso investigativo favoreceu a construção autônoma do conhecimento, permitindo ao estudante compreender a relação entre grandezas geométricas e expressões algébricas, além de consolidar sua capacidade de abstração e generalização matemática.

Figura 36: Tratamento algébrico do raciocínio desenvolvido pelo aluna “F”



[Q5] Simplificando a equação anterior você chega a expressão $\frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 - x^3)$, neste caso você despreza os termos x^2 e x^3 para simplificar ainda mais a expressão. Daí você simplifica mais um pouquinho e mostre o resultado. Com suas palavras explique o que significa o x nessa equação.

$4\pi r^2 x + \pi\ \pi\ v + \frac{4}{3}\pi$

$4\pi r^2 x$

O x é o valor do que sobrou da esfera maior

$4\pi r^2$

Fonte: O autor, 2026.

A partir desse ponto, a estudante demonstrou em sua resposta a capacidade de deduzir a fórmula da área da esfera, articulando o raciocínio matemático de forma clara e fundamentada. Tal dedução não apenas evidencia o domínio dos conceitos geométricos envolvidos, mas também revela a habilidade de aplicar métodos analíticos para transformar princípios abstratos em resultados concretos. Nesse sentido, o percurso argumentativo apresentado pela aluna reforçou a importância da compreensão dos fundamentos da geometria que sustentam a construção da fórmula, consolidando assim sua competência acadêmica e científica no tratamento rigoroso de problemas matemáticos.

6.10 CONCLUSÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação realizada demonstrou de forma consistente a eficácia da articulação entre materiais manipuláveis (como esfera, cilindro e arroz) e recursos digitais, como o Geogebra, na construção de significados matemáticos. Sob a perspectiva da Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), observou-se que os objetos físicos e digitais transcenderam sua função de simples ferramentas, tornando-se instrumentos de mediação cognitiva capazes de favorecer a gênese instrumental dos estudantes. Paralelamente, a análise fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012) evidenciou que a alternância entre registros concretos, gráficos e algébricos potencializou a compreensão conceitual, permitindo aos alunos transitar entre diferentes formas de representação e consolidar o conhecimento de maneira integrada.

Portanto, a atividade revelou-se altamente significativa do ponto de vista pedagógico, pois promoveu o engajamento dos alunos e valorizou a aprendizagem ativa, favorecendo a construção de conhecimentos matemáticos de maneira contextualizada e motivadora. Nesse sentido, a experiência confirma que a combinação de materiais manipuláveis e digitais, apoiada por referenciais teóricos sólidos, constitui uma estratégia pedagógica profícua para o desenvolvimento de aprendizagens significativas em matemática.

Capítulo 7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo apresentou e aplicou uma sequência de atividades com o objetivo de contribuir para o ensino e aprendizagem dos conceitos relacionados ao cálculo do volume e da área da esfera, inseridos no contexto dos Sólidos Geométricos de Revolução. Esse conteúdo, tradicionalmente abordado ao final do ensino de Geometria Espacial, foi trabalhado com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, em uma escola pública localizada em Belém do Pará.

As atividades desenvolvidas possibilitaram aos alunos uma compreensão mais significativa dos conceitos de área e volume da esfera. A fundamentação teórica em Rabardel (1995), com sua teoria da gênese instrumental, foi essencial para compreender como os estudantes transformaram os recursos didáticos em instrumentos de aprendizagem, favorecendo a mediação entre os objetos matemáticos e as ferramentas utilizadas. Essa perspectiva permitiu analisar não apenas o uso dos materiais, mas também o processo de apropriação e construção de significados, ampliando o alcance pedagógico das atividades propostas.

Do mesmo modo, a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2012) contribuiu de forma decisiva para o planejamento e execução da sequência didática, ao evidenciar a importância das conversões entre diferentes formas de representação (algébrica, gráfica, geométrica e verbal) na consolidação da aprendizagem. A articulação entre essas representações possibilitou que os alunos desenvolvessem uma visão mais ampla e integrada dos conceitos de geometria espacial, superando dificuldades comuns nesse conteúdo.

Com base nos resultados obtidos ao longo da experimentação, é possível afirmar que os objetivos específicos propostos foram plenamente atendidos. A investigação qualitativa dos processos de aprendizagem revelou indícios consistentes de desenvolvimento do pensamento espacial entre os alunos, evidenciado pela capacidade crescente de visualizar, manipular e compreender estruturas tridimensionais, como cilindros e esferas, ao longo da sequência de atividades.

As percepções dos estudantes sobre o uso do Geogebra foram majoritariamente positivas, destacando o caráter interativo e visual da ferramenta como fator facilitador na aprendizagem dos conceitos geométricos. O estudo de áreas e volumes esféricos, tradicionalmente abstrato, tornou-se mais acessível e significativo por meio da experimentação com recursos dinâmicos.

Além disso, observou-se uma melhora expressiva no desempenho dos alunos em tarefas de cálculo de área e volume de esferas. A utilização de ferramentas de geometria dinâmica contribuiu para a consolidação dos conceitos envolvidos, permitindo que os estudantes aplicassem com maior segurança os procedimentos matemáticos necessários.

Dessa forma, a análise da eficácia do ambiente Geogebra confirmou seu potencial pedagógico na promoção da compreensão conceitual. A visualização em tempo real das transformações geométricas e a possibilidade de manipulação dos objetos favoreceram a construção ativa do conhecimento, reforçando a importância da integração de tecnologias digitais no ensino de matemática, especialmente no desenvolvimento de habilidades espaciais e na compreensão de conteúdos geométricos complexos.

Por fim, a análise dos dados também evidenciou que a sequência de atividades empregada neste trabalho, contribuiu efetivamente para a superação de dificuldades relacionadas à visualização espacial e à compreensão das fórmulas de volume e área da esfera. Os registros escritos, as construções digitais e as interações observadas em sala de aula revelaram avanços significativos na apropriação dos conceitos, confirmando a relevância da proposta metodológica. Assim, a sequência de atividades desenvolvida neste trabalho, mostrou-se eficaz para o ensino do cálculo da área e volume da esfera, ao integrar recursos concretos e digitais em uma abordagem investigativa e centrada no protagonismo dos alunos.

8. REFERÊNCIAS

AFONSO, Henriques; et al. **Abordagem instrumental e aplicações no ensino da matemática**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo: PUC-SP. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/56144/38390. Acesso em: 07 jun. 2025.

ASSIS, André Koch Torres; MAGNAGHI, Ceno Pietro. **O Método Ilustrado de Arquimedes**: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade. Apeiron, Instituto de Física Universidade Estadual de Campinas, SP, 2014.

ÁVILA, E. A. da S.. **A formação do conceito de cálculo de volume em uma proposta de atividade na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov**. 2022. 196f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2022.

BOITO, P.. **Minecraft:** *um aliado no processo de ensino aprendizagem da geometria espacial.*2018. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de Passo Fundo, RS, 2018.

BOYER, Carl B.*História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL**.Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <https://bncc.mec.gov.br>. Acesso em: 08 mar. 2024.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CARDOSO, I. C. da S.. **Centroides, Teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução:***uma proposta para futuros professores do Ensino Médio.* 2020. 105f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.

CIMADON, E.. **Geometria espacial e educação infantil:** *possibilidades para o ensino a partir de uma proposta etnomatemática.* 2018. 140f. Dissertação (Mestrado), Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2018.

COSTA, R. S.. **Realidade Aumentada:** *Uma proposta de Sequência Didática para o Ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio.* 2022. 83f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2022.

DANTES, Luiz Roberto. **Matemática: Volume único Livro didático**. 504f. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

DENARDI, Vânia Bolzan. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica**: contribuições para a formação de professores de matemática. XX EBRAPEM, Pelotas, 2018. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd04_vania_denardi.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2024.

DUVAL, RAYMOND. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. [trad. Méricles Thadeu Moretti]. Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat. vol. 7, n. 2. Santa Catarina: Florianópolis, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acessado: 05/06/2024.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, F. de O.. **Etnomatemática:** *O saber-fazer dos cisterneiros do Semiárido brasileiro e suas contribuições para o ensino aprendizagem da matemática escolar.* 2019. 194f Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Ensino). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, 2019.

GABRIEL, G. A. de F.. **Aprendizagem significativa da geometria espacial:***análise de uma sequência didática para o ensino médio.* 2023. 119f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.

GARCIA, L. B.. **O Estudo da Geometria Espacial Motivado pela Cristalografia**. 2020. 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020.

LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2012. v. 2.

MACIEL, C. de M.. **A visualidade na resolução de problemas em Geometria no Ensino Médio.** 2022. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

MARQUES, G. E. de A.. **Ensino de Esfera por Meio de Applets do Software Geogebra.** 2019. 134f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

MATTEI, F.. **A modelagem como ferramenta para a construção de conhecimentos matemáticos.** 2012. 100f. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2012.

MENIN, Maria Helena; et al. **A abordagem instrumental na formação de professores de matemática**. ZETETIKE, Campinas: UNICAMP, v. 29, n. 1, p. 1–20, 2021. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8665982. Acesso em: 07jun. 2025.

MERLIM, G. R. da S. R.. **Modelagem matemática no ensino médio: um panorama de estudos e suas contribuições**. 2020. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Sapucaí – (UNIVÁS). – Pouso Alegre: 2020.

MORAES, I. E. S. Q.. **Cálculo de Volume de Prismas Através de Atividades Práticas e Intuitivas.** 2020. 116f. Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2020.

MORAES, I. E. S. Q.. **O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades**. 2018. 279f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

MORCANAS, M. S.. **O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros**. 2019. 82f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

NASCIMENTO, J. B. De S.. **O estudo da geometria espacial por meio da construção de sólidos com materiais alternativos.** 2013. 125f. Dissertação (Mestrado), Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2013.

NEITZEL, G. S. M.. **Experimentação, tecnologias digitais e o teorema de pappus-guldin:** Uma proposta pedagógica para o Ensino de Sólidos de Revolução. 2023. 175f. Dissertação(Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado/RS, 2023.

OLIVEIRA, José Carlos de. **GeoGebra como instrumento de aprendizagem: uma análise sob a ótica da abordagem instrumental**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – XI ENEM, Anais..., São Paulo: SBEM, 2023. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/2456_1704_ID.pdf. Acesso em: 07jun. 2025.

PAIVA, S. M. de. **A conceituação do pensamento geométrico:** aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil. 2021. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2021.

PAULA, E. A. da S.. **Geometria espacial**: a aprendizagem através de diferentes recursos didáticos. 2020. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2020.

PENHA, R. T.. **Geometria espacial no Ensino Médio:** aspectos socioculturais, resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis. 2019. 91p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

PIAGET, Jean. **A Psicologia da Criança**. 1ª ed. São Paulo: Editora Melhoramentos, 1969.

PINHEIRO, A. L. V..**Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos:** concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brosseau. 2022. 139f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Maria, RS, 2022.

RABARDEL, PIERRE . **Leshommes et lestechnologies; approchecognitivedesinstruments contemporains,**1995, Centre National de laRecherche Scientifique; Linguagem: Francês, Disponível em: www.periodicos.capes.gov.br/index.php/acervo/buscador.html?task=detalhes&id=W1555538354. Acessado: 05/06/2024.

RIBEIRO, A. C.. **Estudo de sólidos geométricos e suas representações planas e espaciais por meio de materiais manipulativos para o 6º ano**. 2019. 153f. Dissertação – (Mestrado - Faculdade de Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

RODRIGUES, T. V.. **O uso do Geogebra 3D, versão para smartphone, no processo ensino aprendizagem de geometria espacial**. 2019. 88f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SANTOS, A. M. A. dos. **A Utilização de Materiais Concretos para o ensino de Geometria Plana e Espacial: um estudo de caso.** 2015. 51f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2015.

SANTOS, Robson Francisco dos.**Sólidos Geométricos: uma abordagem histórica, conceitual e aplicada sobre volumes**. São Cristóvão, SE: Universidade Federal de Sergipe, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2023. Disponível em: https://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/18490. Acesso em: 07 jun. 2025.

SANTOS, R. A. dos. **Ensino de pirâmides no Ensino Médio:** uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica. 2021. 175 páginas. Dissertação (Mestrado em ensino de matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

SILVA, Vitor Vasconcelos; PEREIRA, Cinthia Cunha Maradei; ALVES, Fábio José daCosta. **APRENDIZAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DA UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA:** Calculadora para o Volume da Esfera. 2023. 30f.Produto Educacional de Tecnologia de Informática no Ensino de Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2023. ISBN: 978-65-84998-40-7. https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/739119/1/Vitor%20Vasconcelos%20Livro.pdf. Acesso em: 07 junho. 2025.

SILVA, Henrique José Cavalcante Chagas da***.Descobrindo a Geometria Esférica com Anselmo.***2024. 91f.Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, PB, 2024.Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/32927/1/HenriqueJos%C3%A9CavalcanteChagasDaSilva_Dissert.pdf. Acesso em: 07 junho. 2025.

SILVA, Paulo Henrique Firmino da.**Realidade aumentada na perspectiva da metodologia de gamificação para o aprendizado de volume de sólidos geométricos**. 2023. 115f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática)- Universidade Federal de Alagoas, Centro de Educação, 2023. Disponível em: https://cedu.ufal.br/pt-br/pos-graduacao/mestrado-em-ensino-de-ciencias-e-matematica/documentos/dissertacoes-defendidas-1/2021-2024/2023/dissertacao.pdf/view. Acesso em: 07 jun. 2025.

SOARES, E. B. da S.. **SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO DE GEOMETRIA:** Contributos para práticas de educação ambiental. 2022. 184f. Dissertação (CURSO

DE MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO – CMAE) - Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, RN, 2022.

SOARES, F. R.. **As contribuições da realidade aumentada mediada pela metodologia sequência fedathi para a aprendizagem de geometria espacial**. 2022. 236f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Educacional) – Instituto Universidade Virtual, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza (CE), 2022.

9. ANEXO - Ofício que regulamenta a pesquisa

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

....UEPA....
Criação: Lei Estadual nº 5747 (19.05.93)
Autorização: Decreto Presidencial

OFÍCIO Nº 33/2025 – PPGEM Belém (PA), 28 de Maio de 2025

Senhora Diretora,

Cumprimentamos V. Sª., e na oportunidade apresentamos o **Prof. VITOR VASCONCELOS SILVA** que é aluno regularmente matriculado no **Programa de Pós-Graduaçãoem Ensino de Matemática - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática** do Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará. O motivo da apresentação é a necessidade de consultar V. Sª. sobre a possibilidade de permitir o mesmo em aplicar junto aos alunos da escola sob sua direção seu experimento de Pesquisa que tem como objetivo analisar o **"ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos Tangíveis e Digitais"** por meio de atividades que fazem parte do desenvolvimentode uma atividade do referido Programa de Pós-Graduação.

Certos de contarmos com sua colaboração, agradecemos desde já,

Atenciosamente,

Pedro Sá

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Coordenador do PPGEM/CCSE/UEPA

Recebido em 04/06/2025

À

Prof[redacted]
Diretor[redacted]
End: Ru[redacted]

Belém / Pará

10. APÊNDICE - Termos de Consentimento/Aceite dos Alunos

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, ____ ocupante do cargo de direção geral da________________________________, autorizo a realização da pesquisa cientifica intitulada "ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos Tangíveis e Digitais", no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará - UEPA, sob a responsabilidade do pesquisador Prof. Mestrando Vitor Vasconcelos Silva, orientado pelo pesquisador Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

Afirmo que fui devidamente orientada sobre a finalidade e o objetivo da pesquisa, bem como sobre utilização dos dados, exclusivamente para fins científicos, e sua divulgação posterior, sendo que meu nome, o dos professores e dos alunos envolvidos na presente pesquisa serão mantidos de acorda com os padrões profissionais de **sigilo**, com a utilização de nomes fictícios para a apresentação dos dados coletados.

Caso necessário, a qualquer momento poderei revogar este termo de autorização, se comprovada atitudes que causem prejuízo à instituição ou que comprometam o sigilo dos dados dos participantes desta pesquisa.

Estou ainda devidamente informada de que em qualquer etapa do estudo, poderei ter acesso ao pesquisador responsável, Vitor Vasconcelos Silva pelo fone (91 98742-7412), e também pode ser encontrado no endereço [redacted] Cidade de Belém, Estado do Pará. Tomo ciência de que poderei entrar em contato com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n, Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

Assim, tenho sido informada dos objetivos de maneira clara e detalhada, autorizo a utilização e divulgação dos dados pelo fato de a pesquisa ter sido desenvolvida na EEEFM [redacted]

Belém-Pa, 02 de junho de 2025.

____
Assinatura da Diretora Escolar

____
Assinatura do Professor da turma

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO- TCLE

Senhor(a) **responsável,** você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu/sua filho (a), participar de um experimento de ensino que tem como objetivo realizar um diagnóstico sobre o **ensino de Matemática** em sala de aula, sob a responsabilidade do **Prof. Mestrando Vitor Vasconcelos Silva** sob orientação do **Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves**, vinculados ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, da Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho de pesquisa estamos buscando investigar como uma **Atividade Experimental** pode ajudar no ensino e aprendizagem do **Cálculo da Área e do Volume de uma Esfera** conteúdo referente ao terceiro ano do Ensino Médio. A participação do(a) estudante(a) consistirá em responder **questões** referente a atividade didática que envolve raciocínio lógico e habilidade com Apps para verificação de conhecimentos sobre o assunto. **As informações produzidas para pesquisa terão o anonimato dos estudantes garantido.**

Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e mesmo assim a identidade do aluno (a) será preservada. Você e o(a) estudante(a) não terão gastos ou ganho financeiro por participar desta pesquisa. Os benefícios serão de **natureza acadêmica**, gerando um **estudo científico** dos resultados obtidos com a intenção de melhorias para **o ensino de matemática** nas escolas públicas. Você é livre para decidir se o estudante participará da pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o **pesquisador Prof. Vitor (91)98742-7412)** ou com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) – fone: 4009-9542, Tv. Djalma Dutra s/n.Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010.

Belém-Pa, 02 de junho de 2025.

____
Assinatura do pesquisador

Eu (responsável), ________________________________

autorizo meu (minha) filho(a) ____________________________ a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do responsável

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO- TCLE

Você está sendo consultado sobre a possibilidade de participar de um experimento de ensino que tem como objetivo realizar um diagnóstico sobre o **ensino de Matemática** em sala de aula, sob a responsabilidade do **Prof. Mestrando Vitor Vasconcelos Silva** sob orientação do **Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves**, vinculados ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, da Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho de pesquisa estamos buscando investigar como uma **Atividade Experimental** pode ajudar no **ensino** e **aprendizagem** da matemática no terceiro ano do Ensino Médio. Sua participação consistirá em responder **questões** referente a atividade didática que envolve raciocínio lógico e habilidade com Apps para verificação de conhecimentos sobre o assunto. **As informações produzidas para pesquisa terão o anonimato garantido.**

Os resultados da pesquisa poderão ser publicados em revista científicas e mesmo assim sua identidade será preservada. Você não terá gastos ou ganhos financeiros por participar desta pesquisa. Todos os benefícios serão de **natureza acadêmica**, gerando um **estudo científico** dos resultados obtidos com a intenção de melhorias para **o ensino de matemática** nas escolas públicas. Você é livre para decidir participará da pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) – fone: 4009-9542, Tv. Djalma Dutra s/n.Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010.

Belém-Pa, 02 de junho de 2025.

____
Assinatura do pesquisador

Eu, ____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem