



Laboratório de Matemática com GeoGebra:

Do Básico à Trigonometria

Guia de Construções Geométricas e Atividades Práticas

Localização

Fortaleza, 2024

Autor:

F. Ivanildo C. Sousa

Sumário

1	Introdução para o Professor	3
1.1	Objetivo do Material	3
1.2	Metodologia de Polya	3
2	Módulo 1: Fundamentos de Geometria Plana	5
2.1	Pontos, Retas e Segmentos	5
2.2	Retas Perpendiculares e Paralelas	6
2.3	Polígonos (Triângulo e Quadrado)	8
3	Módulo 2: Introdução à Trigonometria	11
3.1	O Círculo Unitário	11
3.2	Medindo Ângulos	12
4	Módulo 3: Trigonometria Avançada	15
4.1	Radianos e Comprimento de Arco	15
4.2	Linhas Trigonométricas (Seno e Cosseno)	16
5	Exercícios de Fixação	19
6	Considerações Finais para o Docente	21
6.1	Gestão de Sala de Aula	21
6.2	Avaliação	21
7	Referências Bibliográficas	23

Capítulo 1

Introdução para o Professor

1.1 Objetivo do Material

Este guia visa capacitar alunos do Ensino Médio (e Fundamental II como revisão) a utilizarem o GeoGebra não apenas como ferramenta de desenho, mas como ambiente de investigação matemática. A progressão das atividades segue uma lógica de complexidade crescente.

1.2 Metodologia de Polya

Cada atividade foi desenhada seguindo as 4 etapas de George Polya:

1. **Compreensão:** O que vamos construir?
2. **Plano:** Quais comandos utilizaremos?
3. **Execução:** Digitar os comandos no GeoGebra.
4. **Retrospecto:** O que aprendemos com a figura criada?

Capítulo 2

Módulo 1: Fundamentos de Geometria Plana

Neste módulo, aprenderemos os comandos básicos para criar estruturas geométricas essenciais.

2.1 Pontos, Retas e Segmentos

Objetivo: Criar pontos fixos, traçar uma reta infinita e um segmento de reta limitado.

Comando GeoGebra

$A = (1, 1)$

$B = (4, 5)$

DefinirComoFixo(A) ou DefinirFixar(A)

DefinirComoFixo(B) ou DefinirFixar(B)

$r = \text{Reta}(A, B)$

$s = \text{Segmento}(A, B)$ ou $s = \text{SegmentoReta}(A, B)$

$\text{comp} = \text{Comprimento}(s)$

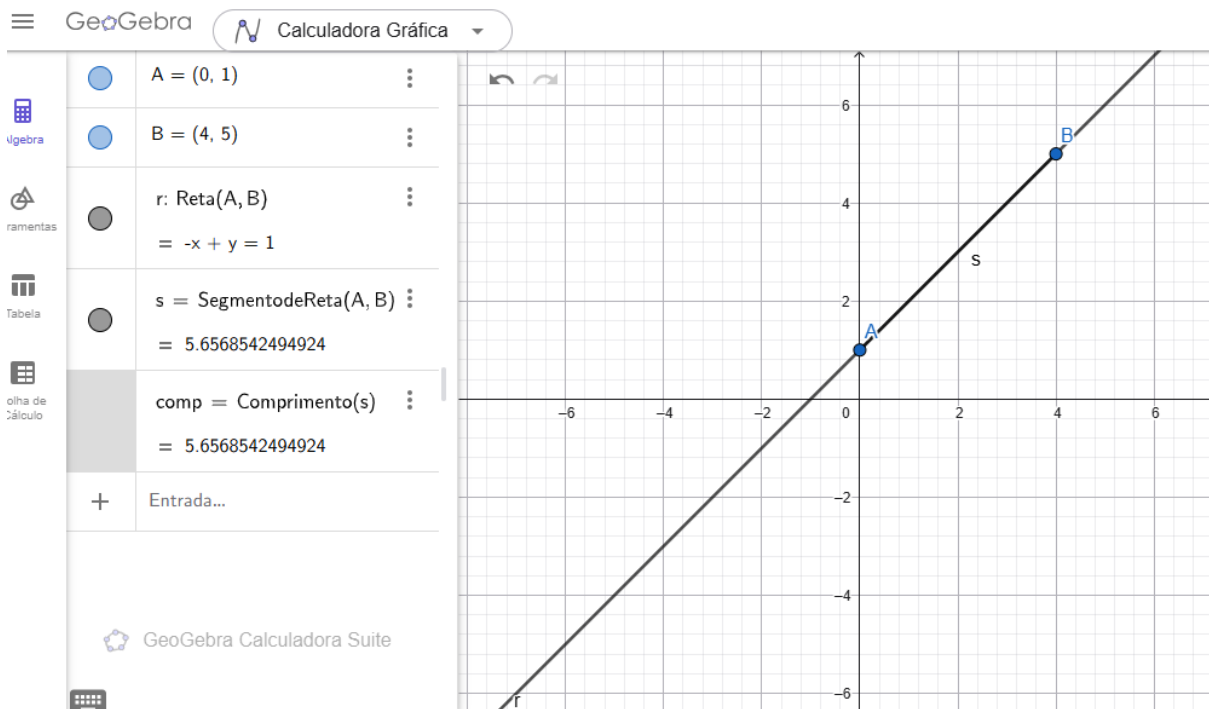


Figura 2.1: Construção no GeoGebra

Atividade 2.1.1 (Exploração). 1. O que acontece se você tentar mover o ponto A com o mouse?

2. Qual a diferença visual entre o objeto r e o objeto s ?

3. Altere as coordenadas de A para (0,0) e B para (3,4). Qual o novo valor de $comp$?

2.2 Retas Perpendiculares e Paralelas

Objetivo: Construir relações de perpendicularidade e paralelismo a partir de uma reta base.

Comando GeoGebra

```
A = (0, 0)
B = (5, 0)
s = Reta(A, B)
C = (2, 3)
p = Perpendicular(C, s) ou p = RetaPerpendicular(C, s)
D = (1, -2)
q = Paralela(D, s) ou q = Reta(D, s)
I = Intersecção(p, s) ou I = Intersectar(p, s)
```

Observação 2.2.1. O comando `Perpendicular(P, s)` cria uma reta que forma ângulo de 90° com s . O comando `Paralela(P, s)` cria uma reta que nunca cruzará s .

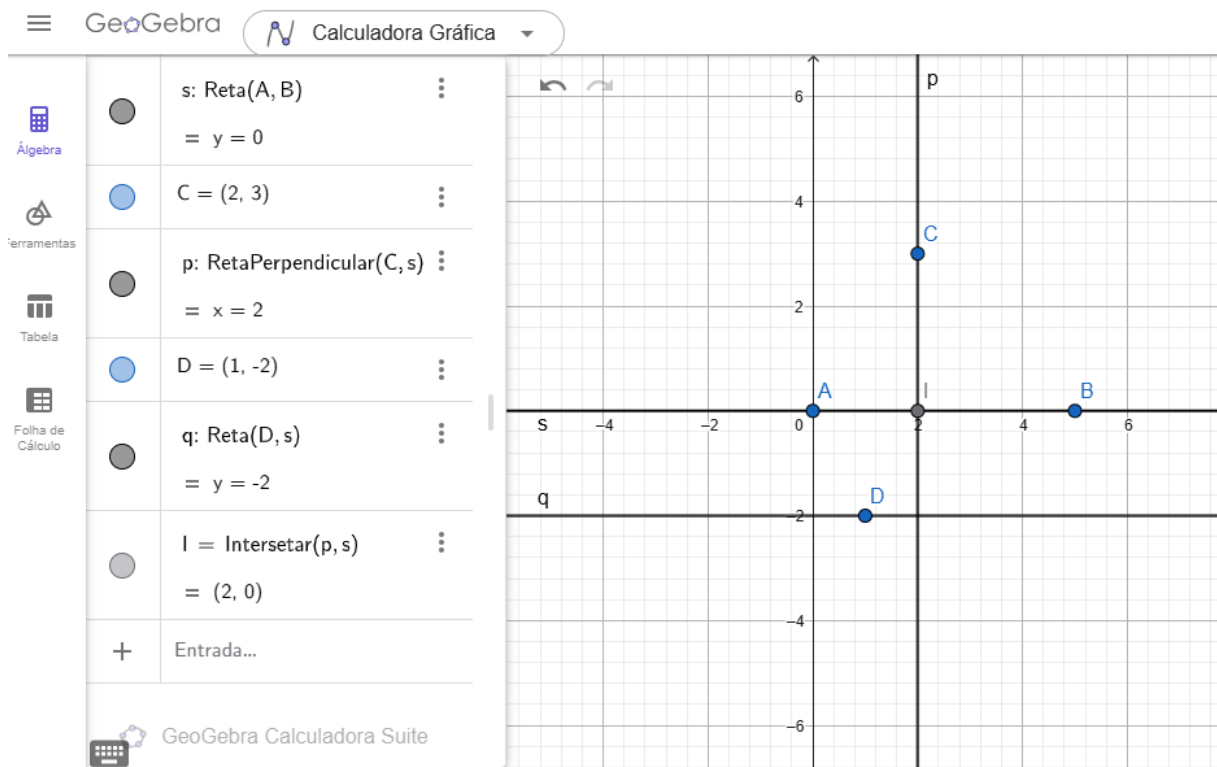


Figura 2.2: construção no GeoGebra

Desafio 2.2.1. Meça o ângulo formado entre a reta s e a reta p usando a ferramenta **Ângulo** do GeoGebra. O valor confirmado é 90° ?

Atividade 2.2.1 (Exploração). 1. Considere que você iniciou uma construção com os pontos $A = (0,0)$ e $B = (5,0)$ e a reta $s = \text{Reta}(A, B)$. Para finalizar um retângulo com altura 3, complete os comandos abaixo:

Comando GeoGebra

$$C = (0, 3)$$

$$q = \text{Perpendicular}(C, s)$$

$$r = \text{Perpendicular}(B, s)$$

$$D = \text{Intersecção}(q, r)$$

Quais são as coordenadas do ponto D encontradas após a execução desses comandos?

2. Um estudante executou a seguinte sequência de comandos na Janela de Álgebra:

$$A = (1, 1)$$

$$B = (5, 1)$$

$$r = \text{Reta}(A, B)$$

$$p = \text{Perpendicular}(A, r)$$

$$C = (1, 5)$$

$$t = \text{Paralela}(C, r)$$

Com base na definição de que o comando *Perpendicular*(P, s) cria um ângulo de 90° e o comando *Paralela*(P, s) mantém a mesma inclinação da reta base, a figura formada pelos vértices que se interceptam será um:

- a) Quadrado de lado 4.
 - b) Retângulo de base 5 e altura 1.
 - c) Triângulo Isósceles.
 - d) Trapézio Retângulo.
3. Deseja-se construir um quadrado de lado 2. Se a base foi definida pelos pontos $A = (2, 2)$ e $B = (4, 2)$, e a reta suporte é s , explique a função dos comandos abaixo para garantir as propriedades do quadrado:

- (a) Por que devemos usar *Perpendicular*(A, s) em vez de apenas criar um ponto aleatório para a altura?
- (b) Se utilizarmos o comando *Paralela*(D, s) para criar o topo do quadrado, como garantimos que a distância entre as retas paralelas seja exatamente 2 unidades?

Observação 2.2.2. O uso correto dos comandos *Perpendicular* e *Paralela* é fundamental para que a figura geométrica não se deforme ao arrastar os pontos livres A ou B no GeoGebra.

2.3 Polígonos (Triângulo e Quadrado)

Objetivo: Construir polígonos livres e regulares.

Comando GeoGebra

```
A = (0, 0)
B = (4, 0)
C = (2, 3)
tri = Polígono(A, B, C)
D = (6, 0)
E = (9, 0)
quad = PolígonoRegular(D, E, 4)
areaTri = Área(tri)
areaQuad = Área(quad)
```

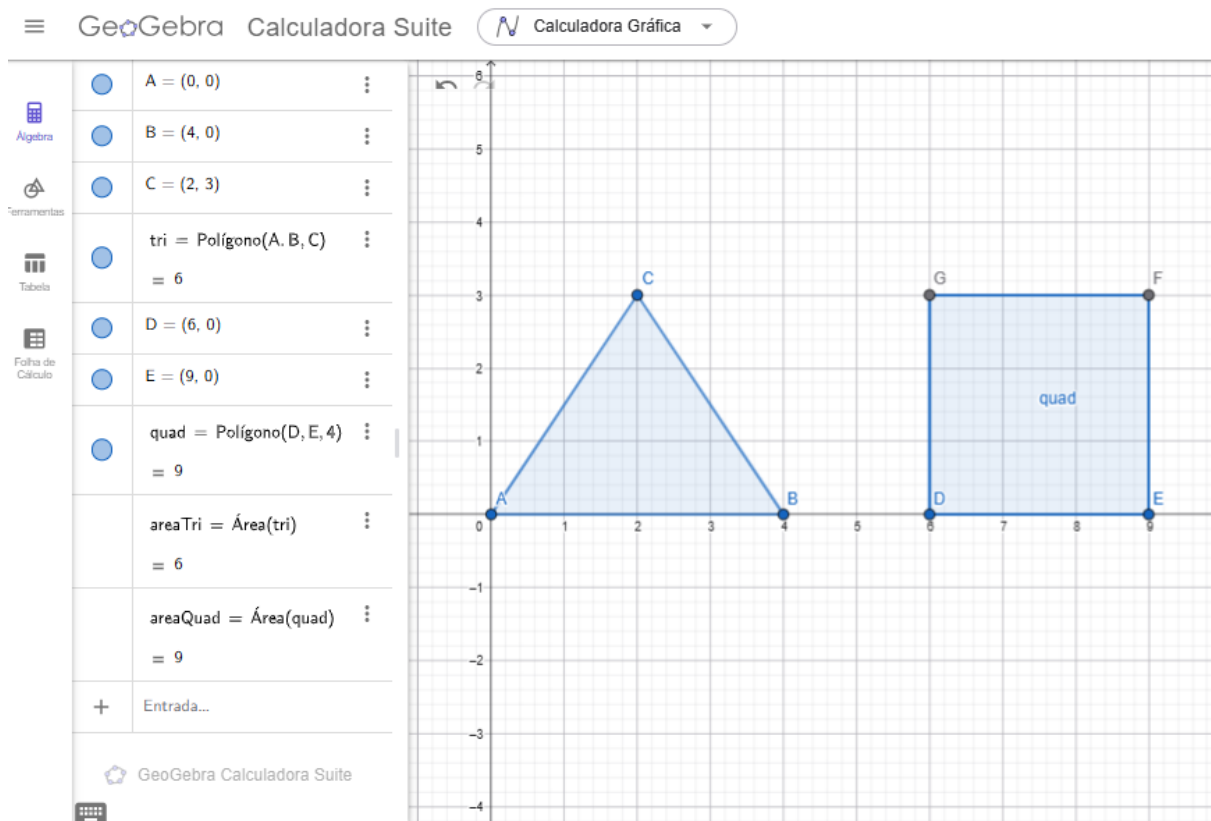


Figura 2.3: construção no GeoGebra

- Atividade 2.3.1** (Investigação). 1. Mova o ponto C do triângulo. A área areaTri muda? Por que?
2. Mova o ponto E do quadrado. O tamanho do quadrado muda? O formato permanece quadrado?
3. Quantos lados tem o polígono criado por $\text{PolígonoRegular}(D, E, 5)$? (Teste no GeoGebra).

Capítulo 3

Módulo 2: Introdução à Trigonometria

Agora que dominamos os comandos básicos, aplicaremos isso ao estudo do círculo e ângulos.

3.1 O Círculo Unitário

Objetivo: Construir a base para o ciclo trigonométrico.

Comando GeoGebra

```
O = (0, 0)
DefinirComoFixo(O)
c = Círculo(O, 1)
A = (1, 0)
B = (0, 1)
C = (-1, 0)
D = (0, -1)
eixoX = Reta(A, C)
eixoY = Reta(B, D)
```

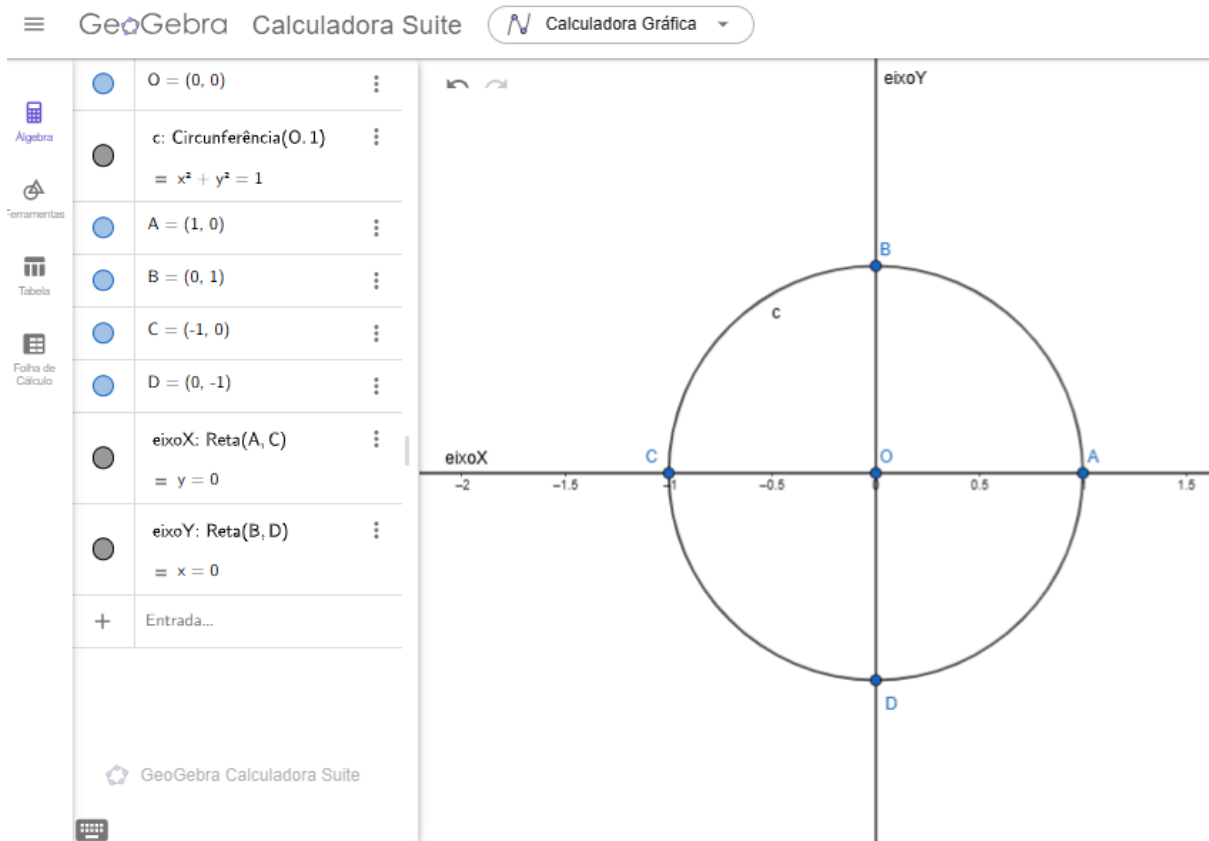


Figura 3.1: Construção no GeoGebra

Alinhamento BNCC

Esta construção prepara o terreno para a habilidade EM13MAT303, relacionando o ciclo com funções.

- Atividade 3.1.1** (Construindo Círculos). 1. Construa um círculo de raio $r = 4$ com centro no ponto $(0, 0)$.
2. Construa um círculo de raio $r = 1$ com centro no ponto $(2, -3)$.
3. Construa um círculo de raio $r = 3$ com centro no ponto $(-4, 2)$.

3.2 Medindo Ângulos

Objetivo: Utilizar o comando ângulo para medir aberturas a partir de um ponto vinculado a uma construção anterior.

Comando GeoGebra

$P = \text{Ponto}(c)$
 $r = \text{Segmento}(O, P)$ ou $r = \text{SegmentoReta}(O, P)$
 $\text{Ang} = \hat{\text{Ângulo}}(A, O, P)$

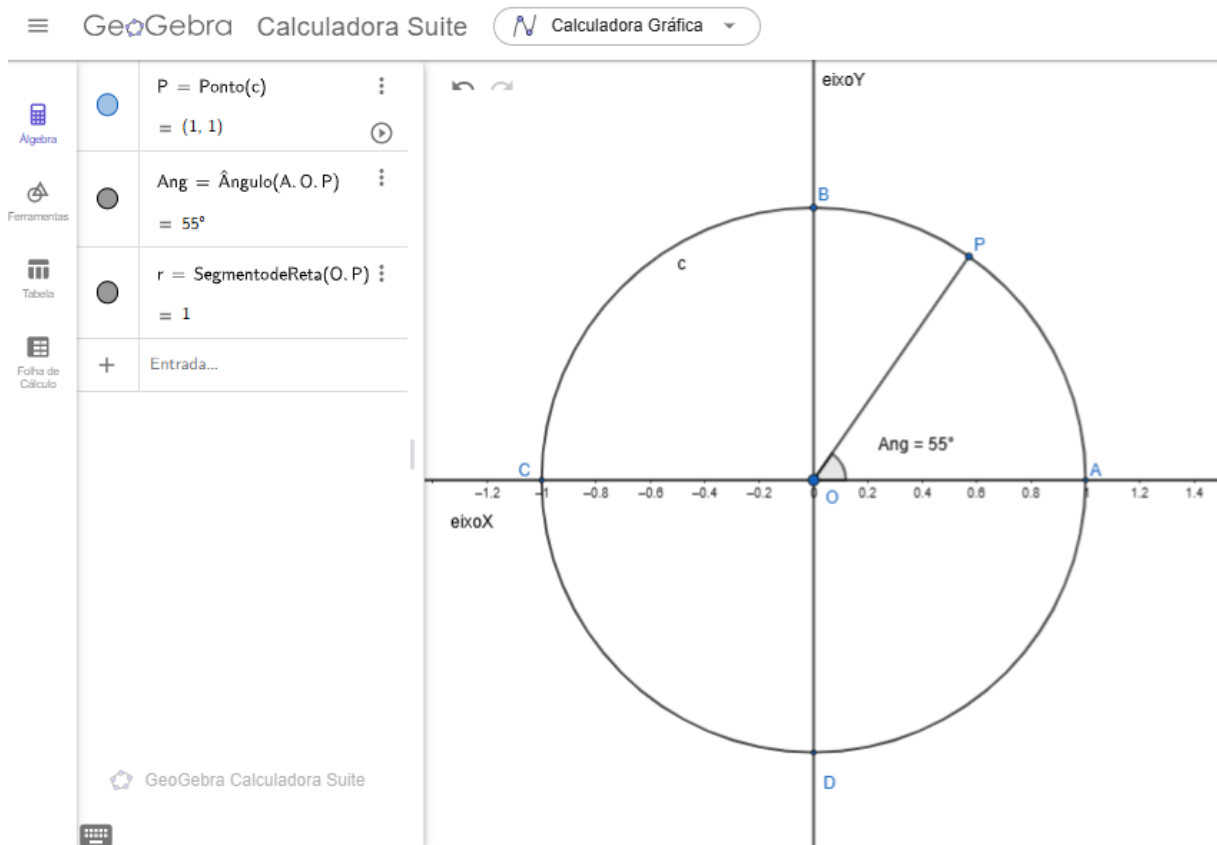


Figura 3.2: Construção no GeoGebra

Observação 3.2.1. O comando `Ponto(c)` restringe o movimento de P à linha da circunferência do círculo c . Ao arrastar P , o valor de α será atualizado automaticamente na Janela de Álgebra.

- Atividade 3.2.1** (Explorando Ângulos e Posições).
1. *Mova o ponto P sobre o círculo c até que o ângulo α marque aproximadamente 90° . Qual é a posição do ponto P em relação ao centro O e ao ponto de referência A ?*
 2. *Desloque o ponto P no sentido anti-horário até que o ângulo α atinja 180° . Onde o ponto P está localizado em relação ao ponto inicial A ? Descreva essa posição como "oposta", "coincidente" ou "perpendicular".*
 3. *Ajuste a posição de P para que o ângulo marque aproximadamente 270° . Considerando o círculo c centrado na origem $(0, 0)$ e o ponto A em $(4, 0)$, quais seriam as coordenadas aproximadas de P neste momento?*

Capítulo 4

Módulo 3: Trigonometria Avançada

Neste módulo, implementamos as construções principais da dissertação de mestrado.

4.1 Radianos e Comprimento de Arco

Objetivo: Visualizar que 1 radiano é o arco de comprimento igual ao raio.

Comando GeoGebra

```
A = (0, 0)
B = (2pi, 0)
regua = Segmento(A, B)
M = Ponto(regua)
X = x(M)
O = (0, 1)
c = Círculo(O, 1)
Ang = 180°/pi * X
P = Girar((1,1), ang, 0) ou P = Rotação((1,1), ang, 0) ou
segAM = Segmento(A, M)
arcoAP = ArcoCircular(O, (1,1), P)
DefinirCor(segAM, "Vermelho")
DefinirCor(arcoAP, "Vermelho")
```

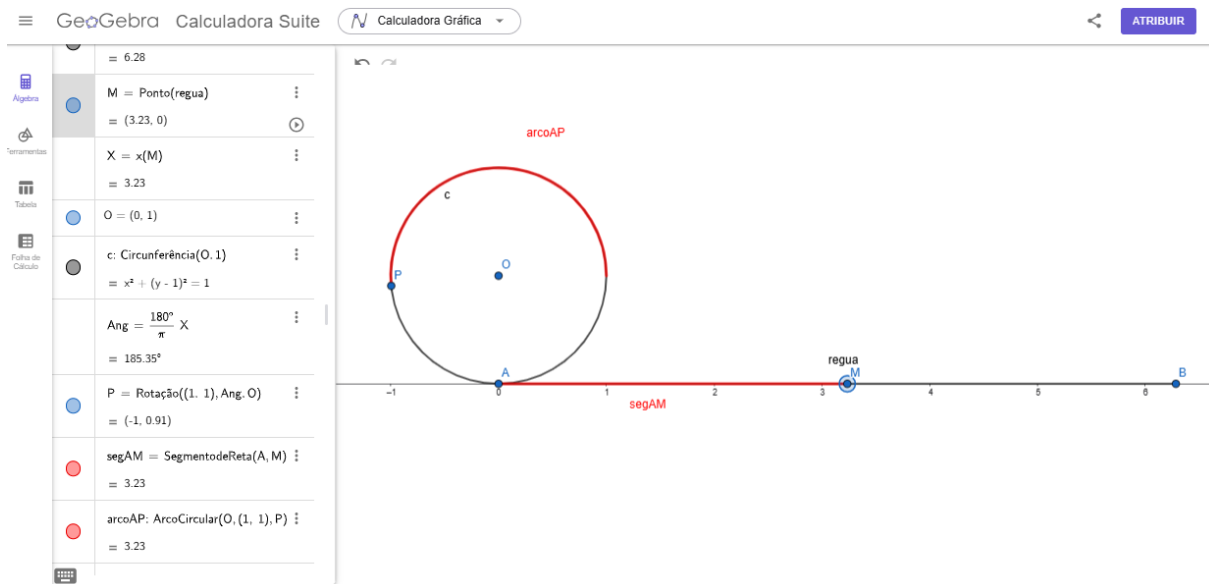


Figura 4.1: Construção no GeoGebra

Atividade 4.1.1 (Verificação). 1. *Mova M até que $X = 1$. Compare o tamanho do segmento vermelho reto com o arco vermelho curvo.*

2. *Qual o valor de X quando P completa meia volta (180°)?*

4.2 Linhas Trigonométricas (Seno e Cosseno)

Objetivo: Projetar o ponto do ciclo nos eixos para encontrar seno e cosseno.

Comando GeoGebra

```

a = ControleDeslizante(0, 2pi, 0.05) ou a = Seletor(0, 2pi, 0.05)
O = (0, 0)
A = (1, 0)
P = Girar(A, a * 180° / pi, O) ou P = Rotação(A, a * 180° / pi, O)
perpX = Perpendicular(P, EixoX) ou perpX = Perpendicular(P, y=0)
Xp = Intersecção(EixoX, perpX) ou Xp = Interseção(EixoX, perpX) ou
Cos = Segmento(O, Xp)
DefinirCor(Cos, Vermelho)
paralX = Paralela(P, eixoX)
Yp = Intersecção(paralX, eixoY) ou Yp = Interseção(paralX, eixoY)
Sen = Segmento(O, Yp)
DefinirCor(Sen, azul)
Texto("cos = "+ x(Xp))
Texto("sen = "+ y(Yp))

```

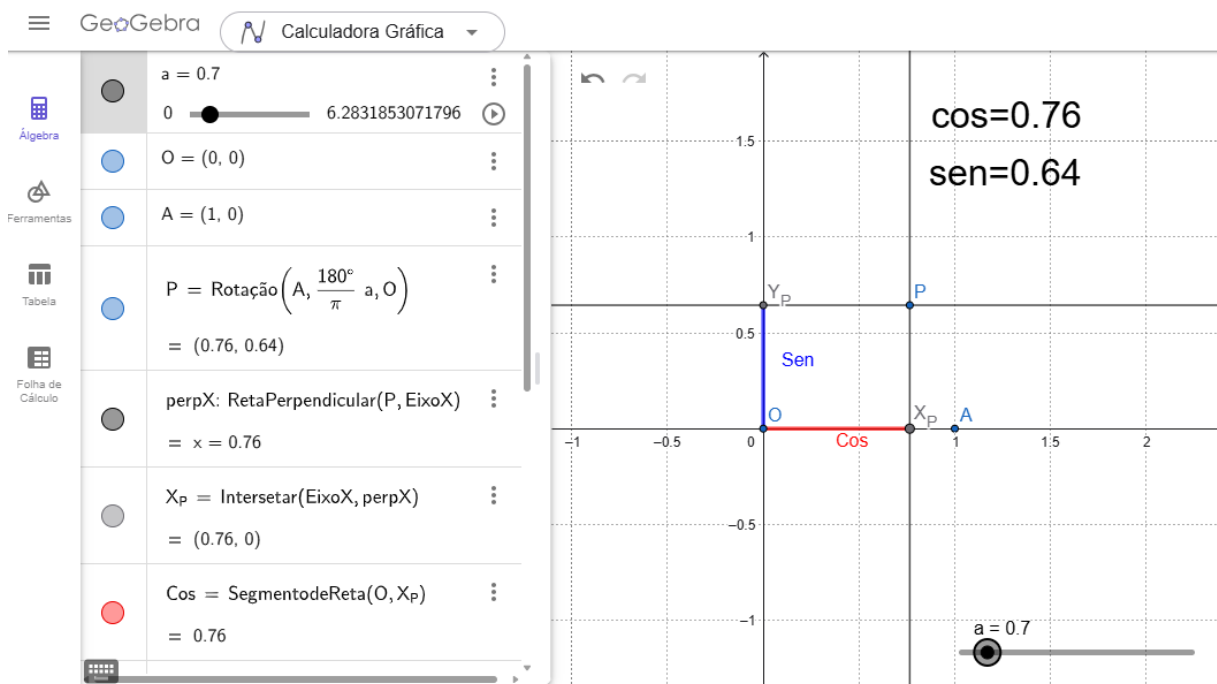


Figura 4.2: Construção no GeoGebra

- Atividade 4.2.1** (Projeções, Seno e Cosseno). 1. No GeoGebra, o ciclo trigonométrico é um círculo unitário. Digite na entrada a equação da circunferência centrada na origem $(0, 0)$ com raio 1. Qual é a forma algébrica dessa equação e como ela garante que a distância do ponto P até a origem seja sempre constante?
2. Ao mover o ponto P sobre o ciclo, observamos que ele projeta um segmento no eixo horizontal (vermelho) e outro no eixo vertical (azul). Qual desses eixos representa geometricamente o valor do **cosseno** do ângulo a ? Justifique sua resposta observando a coordenada x do ponto X_P .
3. Sabendo que o raio do ciclo é 1, explique por que podemos afirmar que a ordenada (altura) do ponto P no eixo y corresponde ao valor do $\text{sen}(a)$. O que acontece com o comprimento do segmento azul quando o ângulo a atinge 90° ($\pi/2$ rad)?
4. Desloque o controle deslizante até que o ponto P esteja no segundo quadrante (entre 90° e 180°).
- O segmento vermelho (cosseno) está posicionado sobre a parte positiva ou negativa do eixo x ?
 - O que isso indica sobre o sinal do cosseno e do seno para ângulos nesse quadrante?

Observação 4.2.1. Note que as coordenadas do ponto P são dadas por $(\cos(a), \sin(a))$. A projeção ortogonal de P sobre os eixos permite visualizar essas grandezas como comprimentos de **segmentos orientados**: o segmento vermelho representa o cosseno no eixo x , e o azul representa o seno no eixo y .

Capítulo 5

Exercícios de Fixação

Atividades Práticas de Geometria e Trigonometria

- **Nível Básico**

1. Construa um triângulo equilátero usando `PolígonoRegular`. Qual o comando necessário?
2. Trace uma reta perpendicular a $y = 2x$ passando pela origem.
3. Meça a distância entre $(0, 0)$ e $(3, 4)$.

- **Nível Avançado**

1. Construa um ângulo de 750° e encontre sua primeira determinação positiva usando comandos.
2. Demonstre visualmente que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ medindo os segmentos da Atividade 3.2.
3. Crie um controle deslizante que faça o ponto P girar automaticamente (Animação).

Capítulo 6

Considerações Finais para o Docente

6.1 Gestão de Sala de Aula

- **Laboratório de Informática:** Ideal para que cada aluno ou dupla construa sua própria figura.
- **Sala Comum:** Use um projetor para construir coletivamente, pedindo que os alunos ditem os comandos.
- **Celulares:** O aplicativo GeoGebra funciona bem em smartphones para visualização.

6.2 Avaliação

Sugere-se avaliar não apenas o produto final (a construção), mas o processo:

- Capacidade de digitar os comandos corretamente.
- Participação na exploração das perguntas da atividade.
- Relato escrito sobre o que foi aprendido com a visualização dinâmica.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- SOUSA, F. I. C. *Trigonometria em Movimento: explorando animações no geogebra com comandos em português*. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) - UNILAB, 2026.
- POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- GeoGebra Team. *Manual de Comandos*. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/pt>.
- DUVAL, R. *Registros de Representação Semiótica*. UNESP, 2003.