

ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos manipuláveis e Digitais



BELÉM-PA 2026

Vitor Vasconcelos Silva
Fábio José da Costa Alves
Alan Marcel Fernandes de Souza

Vitor Vasconcelos Silva
Fábio José da Costa Alves
Alan Marcel Fernandes de Souza

ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos manipuláveis e Digitais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.

Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves;

Co-orientador: Prof. Dr. Alan Marcel Fernandes de Souza.

***Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará***

S586a Silva, Vitor Vasconcelos

Área e volume de uma esfera: experimentação matemática com recursos manipuláveis e digitais / Vitor Vasconcelos Silva, Fábio José da Costa Alves, Alan Marcel Fernandes de Souza. — Belém, 2026.

30 f. : il. color.

Produto educacional vinculado à dissertação “Área e volume de uma esfera: experimentação matemática com recursos manipuláveis e digitais” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGEM) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Belém, 2026.

1. Volume da esfera. 2. Sequência de atividade. 3. Software geogebra. 4. Sólidos geométricos de revolução. 5. Geometria espacial.
I. Alves, Fábio José da Costa. II. Souza, Alan Marcel Fernandes de.
III. Título.

ISBN: 978-65-02-15667-4

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: “ÁREA E VOLUME DE UMA ESFERA: Experimentação Matemática com Recursos manipuláveis e Digitais”.

Mestrando: VITOR VASCONCELOS SILVA

Data da avaliação: 26/03/2026

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

() Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

() Professores do Ensino Fundamental (X) Professores do Ensino Médio

() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo
() Texto Didático (alunos/professores) () Jogo Didático () Aplicativo
() Software () Outro: _____

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: _____
() Não () Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim () Não () Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim () Não () Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:* (X) Sim () Não () Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim () Não () Não se aplica
e) *Possui referências:* (X) Sim () Não () Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim () Não () Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim () Não () Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

(X) Sim, onde: Em uma turma da educação básica

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

(x) Sim, onde: Em ambientes com objetivos educacionais

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

(X) Sim, onde: Em uma turma da educação básica

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

(X) na escola, como atividade regular de sala de aula

() na escola, como um curso extra

() outro: _____

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

() Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

() Professores do Ensino Fundamental

() Professores do Ensino Médio

() outros membros da comunidade escolar, tais como _____

() outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO () APROVADO COM MODIFICAÇÕES () REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Prof^o. FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES (Presidente)
Doutor em Geofísica - IES de Obtenção do Título: UFPA



Assinatura e
Documento assinado digitalmente
FABIO JOSE DA COSTA ALVES
Data: 29/04/2025 21:16:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA (Membro Interno)
Doutora em Bioinformática - IES de Obtenção do Título: UFPA



Documento assinado digitalmente
CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA
Data: 16/04/2026 22:07:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^o. JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES (Membro Externo1)
Doutor em Educação Matemática - IES de Obtenção do Título: PUC/SP



Documento assinado digitalmente
JOSE MESSILDO VIANA NUNES
Data: 10/04/2026 19:13:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^o. ALAN MARCEL FERNANDES DE SOUZA (Membro Externo2) _____
Doutor em Computação Aplicada - IES de Obtenção do Título: UFPA



Documento assinado digitalmente
ALAN MARCEL FERNANDES DE SOUZA
Data: 12/04/2026 19:52:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO	7
2 - CONHECENDO OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS	8
3 - A INTERFACE DO GEOGEBRA (MODALIDADE ON-LINE)	10
4. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	11
Atividade 1 - Calcular as medidas do cilindro e da esfera.	11
Atividade 2 - Manipulação com modelos físicos (esfera e cilindro)	15
Atividade 3. Dedução da fórmula do volume da esfera por meio do raciocínio próprio.	19
Atividade 4. Construção de uma esfera no Geogebra como estímulo à criatividade.	21
Atividade 5. Dedução da fórmula da área da superfície da esfera a partir de construções no Geogebra.	24
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	27
REFERÊNCIAS	28

1. APRESENTAÇÃO

O presente Produto Educacional constitui um material didático devidamente testado com o intuito de orientar os professores durante as aulas de Matemática para o ensino do Cálculo da Área e Volume da Esfera, oferecendo estratégias metodológicas diversificadas para o estudo da Geometria Espacial, o produto atende às diretrizes da BNCC (BRASIL, 2018), promovendo uma prática pedagógica que garante ao estudante o papel central no processo de aprendizagem.

Sob essa perspectiva, este material orienta a execução sistemática das atividades, detalhando a dedução das fórmulas de volume e de área da superfície esférica. A proposta articula a experimentação prática, por meio de materiais manipuláveis (cilindro, esfera e arroz), à modelagem digital no software Geogebra. O objetivo é oferecer ao professor um roteiro didático fundamentado, que viabilize o ensino diferenciado para a aprendizagem da Geometria Espacial em sala de aula.

Dessa forma, utilizam-se Materiais Manipuláveis de baixo custo, como um recipiente cilíndrico transparente e uma esfera de borracha, ambos com dimensões equivalentes (10 cm de diâmetro e de altura). Essa isometria entre o diâmetro da esfera e a altura do cilindro é fundamental para que a experimentação prática permita que a relação métrica entre os sólidos deixe de ser uma abstração e se torne um conhecimento adquirido, permitindo ao estudante deduzir, de forma indutiva, a expressão matemática do volume da esfera a partir da observação direta das proporções.

Este Produto Educacional integra, ainda, o Software Geogebra, acessível via navegadores ou dispositivos móveis. O App pode ser acessado pelo site: <<https://www.geogebra.org>>. A plataforma destaca-se pela oferta de recursos interativos que possibilitam a exploração dinâmica de conceitos complexos. No âmbito da Geometria Espacial, as ferramentas de visualização tridimensional 3D permitem a construção e a manipulação de objetos, facilitando a transição entre o registro geométrico e o algébrico, conforme preconizado pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Reymond Duval (2012).

Portanto, este Produto Educacional contribui para a prática pedagógica ao oferecer ao professor de Matemática uma estratégia didática estruturada, facilitando a abordagem e a compreensão referente ao cálculo do volume e da superfície da esfera. Este produto é fruto dos resultados obtidos em Silva (2026).

2 - CONHECENDO OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

O uso de objetos concretos isométricos (esfera e cilindro) faz com que a teoria seja vista de maneira empírica, permitindo que o estudante deduza a expressão matemática do volume da esfera por meio da observação direta das proporções espaciais já conhecidas. O objeto concreto torna-se um instrumento quando o aluno desenvolve esquemas de utilização para compreender a teoria, caracterizando a gênese instrumental proposta por Rabardel (1995). Nesse processo, a manipulação física (artefato) é convertida em meio de abstração matemática para a construção do conhecimento (instrumentalização). Neste capítulo, apresentaremos os objetos concretos simples utilizados na manipulação.

Figura 1 - Recipientes cilíndricos, bola de mesmo diâmetro e régua.



Fonte: O autor, 2026.

Muitas vezes restritos ao uso doméstico ou recreativo, os recipientes e a bolinha de borracha foram adaptados às nossas necessidades pedagógicas. Em conjunto com régua e uma trena, esse material compõem uma proposta didática em que a trena é utilizada exclusivamente pelo professor, servindo como instrumento de validação para as medições e relações estabelecidas pelos alunos. Em conjunto com esse material, para preenchimento do recipiente cilíndrico fizemos uso de sementes de arroz integral que permitiu a visualização da capacidade dos objetos que estão representando os sólidos “Cilindro e Esfera”.

O docente deve dividir as sementes de arroz em sacos, garantindo que cada porção preencha completamente o cilindro, sem deixar espaços vazios.

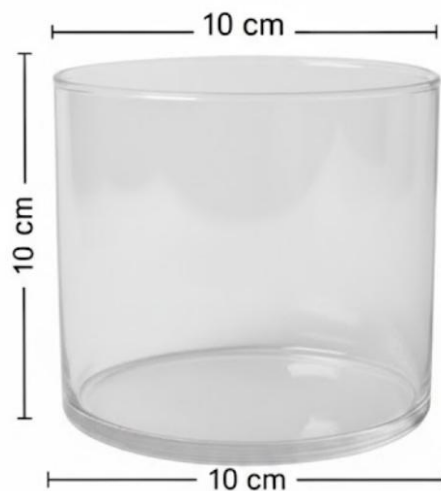
Figura 2 - Porção de arroz para cada Cilindro.



Fonte: O autor, 2026.

Essa porção de semente que servirá para preencher o cilindro deverá ser entregue ao aluno em momento propício, separado em um saco que receberão outra função no decorrer da atividade, pois quando o aluno for introduzir a esfera no recipiente, necessitará armazenar o arroz excedente que será deslocado após a introdução completa da esfera no cilindro.

Figura 3 - Recipiente representando o Cilindro.

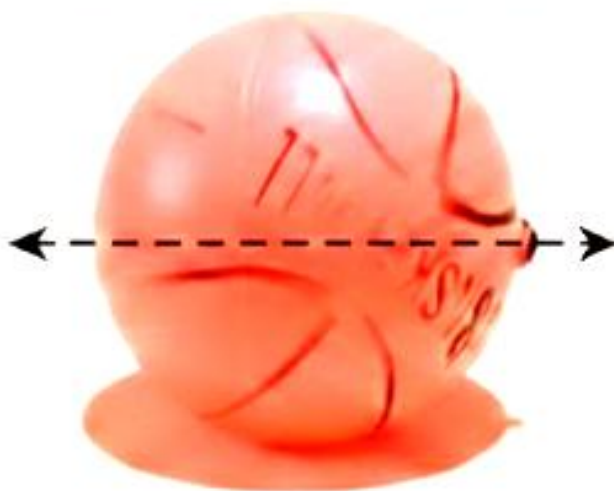


Fonte: O autor, 2026.

A Bola, na gênese instrumental, é o artefato. Ela existe independentemente do uso matemático que nós podemos dar a ela. Ela é apenas um objeto produzido pela indústria. A Esfera é o conceito geométrico ideal. Quando o aluno olha para a bola e decide utilizá-la para demonstrar propriedades matemáticas (como raio, diâmetro ou volume), ele está aplicando um esquema de utilização.

Figura 4 - Bola de borracha representando a esfera

DIÂMETRO = 10 cm



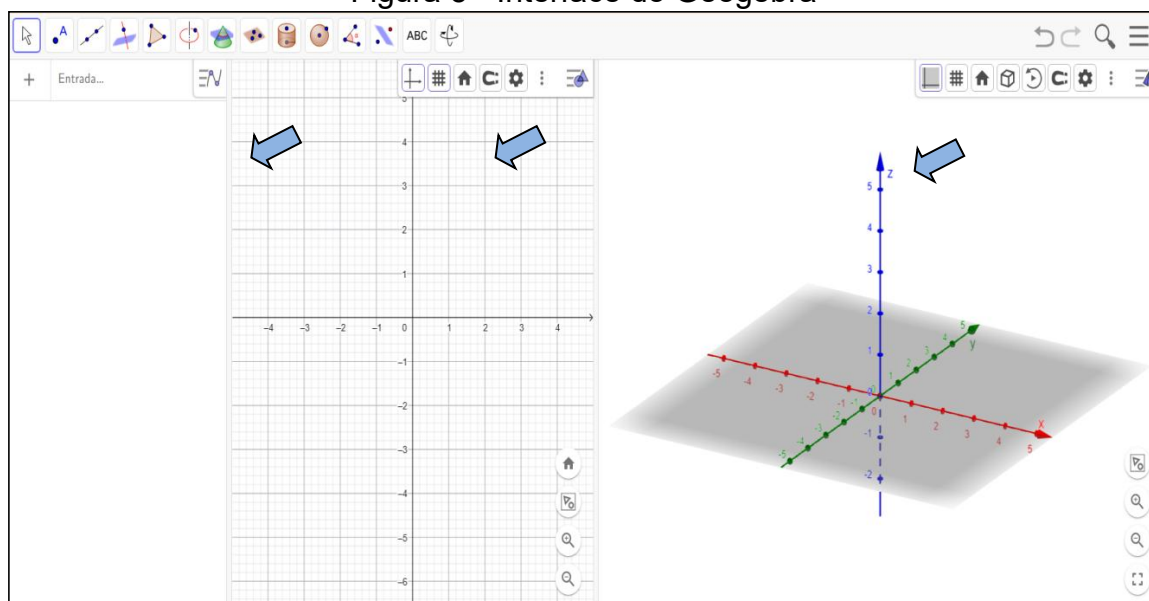
Fonte: O autor, 2026.

3 - A INTERFACE DO GEOGEBRA (MODALIDADE ON-LINE)

O Geogebra¹ é uma das ferramentas tecnológicas mais completas e versáteis para o ensino da Matemática, integrando em um único ambiente recursos de geometria dinâmica, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo. O software destaca-se pela acessibilidade e praticidade, permitindo que professores e alunos explorem conceitos complexos diretamente no navegador, sem a necessidade de instalações locais. Sua interface é intuitiva e organizada por janelas funcionais que se comunicam em tempo real: ao alterar um objeto na Janela de Visualização (geometria), sua representação simbólica é instantaneamente atualizada na Janela de Álgebra. A figura 5 a seguir mostra a interface completa e aponta cada janela com a seta azul.

¹<https://www.geogebra.org/classic>

Figura 5 - Interface do Geogebra



Fonte: O autor, 2026.

Para o docente da rede de ensino, a interface on-line oferece um ecossistema colaborativo robusto, onde é possível criar, adaptar e compartilhar recursos interativos com facilidade. A tela principal apresenta uma Barra de Ferramentas simplificada no topo, que agrupa ícones por categorias (pontos, retas, polígonos, circunferências), facilitando a manipulação direta. O professor pode adquirir algumas habilidades fazendo uma pequena leitura de um Produto Educacional² que apresenta muitos desses ícones e como fazer uso desses recursos.

4. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Apresentaremos a sequência de atividades proposta para o ensino da área e volume da esfera. A sequência de atividades é composta de 5 atividades, que deverá ser mediada pelo professor. A turma se organiza em duplas.

Atividade 1 - Calcular as medidas do cilindro e da esfera.

Nome do(a) aluno(a) 1: _____

Nome do(a) aluno(a) 2: _____

Objetivo: Compreender de forma mental que os elementos que compõe a esfera e o cilindro estão relacionados com o volume.

Material Utilizado: Uma folha contendo a atividade, esfera, cilindro, régua e caneta.

²<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/739119/1/Vitor%20Vasconcelos%20Livro.pdf>

Conceitos Envolvidos: Elementos de um cilindro (base, raio, altura, área da base, volume do cilindro) elementos da esfera (raio e diâmetro, noção de volume da esfera).

Figura 6 -Medindo os objetos



Fonte: O autor, 2026

Dica: Neste primeiro momento cada dupla de alunos deve receber um cilindro, uma esfera e uma folha contendo a instrução da atividade. A atividade 1 sugere 5 (cinco) problemas simples. Importante que cada problema esteja em uma folha isolada para discussão em grupo e seja entregue ao aluno um problema por vez. A seguir serão listados os 5 (cinco) problemas desta atividade 1:

[P₁] Qual o comprimento do raio da base do cilindro? Descreva com suas palavras a relação que há entre o raio e a altura desse cilindro.

[P₂] Quais as medidas da esfera? Descreva como você chegou aos resultados.

[P₃] Quanto mede a distância que vai do centro da esfera ao topo da esfera? Explique como você chegou a essa resposta.

[P₄] Quanto mede o comprimento que vai do centro da esfera a base da esfera? Justifique como você chegou a essa resposta.

[P₅] Sabe-se que para calcular o volume do cilindro temos que multiplicar a área da base pela altura. Explique com suas palavras qual seria o procedimento para encontrar o volume da esfera.

Sugestões ao professor

A atividade pode ocorrer em dupla ou em trio. Inicialmente, procede-se à distribuição do material impresso juntamente com os materiais manipuláveis

(Réguas, Cilindro transparente e esfera de borracha, ambos de mesma altura 10cm e largura 10cm), após deixá-los curiosos inicie a leitura mediada para o nivelamento das instruções.

Resolução do problema inicial (P_1) Como referencial exemplificador, cujo propósito é orientar a atuação do docente frente aos procedimentos e raciocínios esperados por parte dos estudantes. Este modelo serve como um guia para que o professor identifique os marcos de aprendizagem e as possíveis dificuldades que podem surgir durante a manipulação dos materiais.

Durante o processo, incentiva-se a participação ativa e o debate sobre as estratégias de resolução, fundamentais para a negociação de significados entre os pares. Paralelamente, o professor deve mediar a elaboração do registro das respostas, garantindo que os dados observados sejam sistematicamente transpostos para a linguagem escrita ou algébrica, conforme demonstrado na resolução apresentada a seguir.

[P₁] Qual o comprimento do raio da base do cilindro? Descreva com suas palavras a relação que há entre o raio e a altura desse cilindro.

Resposta falada e escrita esperada: *“O raio da base do cilindro mede 5 cm e a relação entre esse raio e a altura do cilindro é que a altura do cilindro é o dobro desse raio.”*

Observações: Neste primeiro problema, cabe ao professor apenas suscitar o conceito de diâmetro durante o diálogo com a turma, mas se possível deixar que eles se lembrem de maneira autônoma, uma vez que se trata de um conteúdo já consolidado no currículo do terceiro ano, a palavra “Diâmetro” deve ser lembrado e falado em voz alta por um ou mais aluno.

O objetivo dessa breve mediação é permitir que o aluno mobilize esse conhecimento prévio para identificar a largura da base do cilindro e, conseqüentemente, determinar o raio. A ênfase da atividade recai sobre a autonomia do discente em deduzir, por meio de seu próprio raciocínio geométrico, a relação $h = 2r$, caso nenhum aluno chegue a essa formalização, o professor precisará induzi-los a construir a formalização reconhecendo que o comprimento da altura do cilindro, na matemática, é representado pela letra “h” minúscula e que a

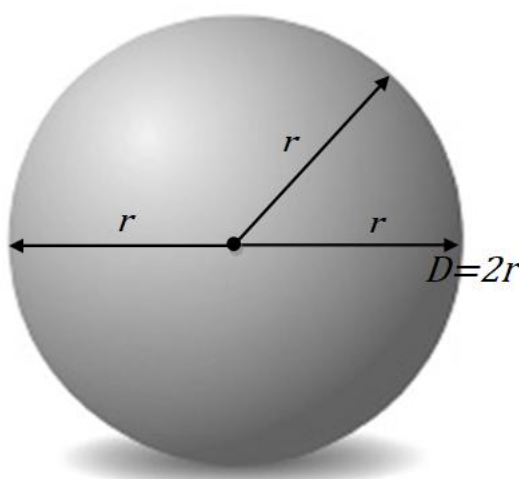
metade da largura do cilindro corresponde ao raio, que em matemática é representado pela letra “r” minúscula, e em último caso mostrar que a altura do recipiente equivale ao dobro do seu raio com a própria medida da régua. O aluno pode, neste momento, ser capaz também de perceber que a largura e a altura do cilindro são iguais, ou seja, que o Diâmetro é igual a altura isto é $D=h$.

É fundamental atentar para as propriedades físicas do instrumento de medida utilizado. Muitas réguas escolares apresentam uma margem técnica antes da marcação do zero, conhecido como espaço morto, o que pode induzir a erros sistemáticos de leitura e ao acréscimo impreciso nos valores coletados. Nesse sentido, a mediação docente torna-se imprescindível para orientar o aluno sobre o correto alinhamento do objeto ao ponto de origem da escala graduada, garantindo a fidedignidade dos dados necessários para o cálculo do raio e da altura.

Formalização: O professor deverá apresentar o conceito de cada elemento e mostrar uma esfera como na Figura 7 para apresentar a imagem de cada elemento:

- **Centro (C):** O ponto interno equidistante de toda a superfície.
- **Raio (r):** A distância do centro a qualquer ponto da superfície.
- **Diâmetro (D):** O segmento que passa pelo centro e une dois pontos opostos ($D = 2r$).

Figura 7: Esfera e seus elementos



Fonte: O autor, 2026.

Nesta etapa, o aluno deve ser capaz de identificar o diâmetro e o raio da esfera. O mais importante, ele deve chegar a conclusão de que a altura do cilindro é igual a duas vezes o tamanho do raio, ou seja:

$$h = 2r \quad (1)$$

Ainda nesta atividade, no problema [P₅], o aluno é lembrado sobre como calcular o volume de um cilindro, ou seja, ele deve saber que ao multiplicarmos a área da base de um cilindro pela própria altura encontraremos o volume deste cilindro, na forma algébrica fica assim:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \times h \quad (2)$$

Atividade 2 - Manipulação com modelos físicos (esfera e cilindro)

Nome do(a) aluno(a) 1: _____

Nome do(a) aluno(a) 2: _____

Objetivo: Relacionar o conceito do volume do cilindro com a ideia de volume da esfera; Compreendendo que a quantidade de grãos que deverá ser retirada do cilindro corresponde ao volume da esfera.

Material Utilizado: Uma folha contendo os problemas da atividade, Esfera, Cilindro, grãos de arroz, régua e caneta.

Conceitos Envolvidos: Relação do volume do cilindro com o volume da esfera. Noção intuitiva de cognição experimental com base no Princípio de Cavalieri e nos processos de Arquimedes para medir volumes, descoberto em 300 a.C.. Nesta etapa, o aluno explora conceitos matemáticos manipulando sólidos geométricos. Ao comparar os volumes do cilindro e da esfera e responder a perguntas mediadoras, ele é levado a refletir sobre os resultados e a construir o próprio conhecimento de forma ativa.

Figura 8-Inclusão da esfera no cilindro cheio de arroz



Fonte: O autor, 2026.

Dica: Nesta etapa cada dupla de alunos receberá os materiais e a folha de atividade 2 contendo as instruções. Importante que cada problema esteja em uma folha isolada para discussão entre os alunos e que cada problema só seja entregue ao aluno após a resolução do anterior. A seguir serão listados os 4 (quatro) problemas desta atividade 2:

[Q₁] Descreva como você introduziria completamente a esfera no cilindro cheio de grão de arroz. Introduza e explique com suas palavras como é possível efetuar essa atividade?

[Q₂] Retire a esfera do cilindro, observe a quantidade de grãos que ficou no cilindro e explique com suas palavras quantas partes do volume do cilindro está sendo ocupado por grãos.

[Q₃] Quantas partes do volume do cilindro foi preciso esvaziar para introduzir a esfera no cilindro? Explique com suas palavras.

[Q₄] A quantidade de grãos de arroz retirados do cilindro para introdução da esfera possui uma relação direta com a esfera. Explique com suas palavras qual é essa relação. Justifique sua resposta.

Observação:

Nesta etapa o professor deve observar de perto o preenchimento deste cilindro e garantir que a descrição do que fariam para introduzir a esfera no cilindro seja registrada e falada pelo aluno, antes de realmente introduzir-la. A quantidade de arroz entregue ao aluno deve preencher completamente o cilindro e após a leitura mediada pelo professor para o nivelamento das instruções, o aluno preenche o cilindro como na figura 9 e segue as instruções da atividade resolvendo os problemas apresentados.

Figura 9 - Cilindro completamente cheio de arroz



Fonte: O autor, 2026.

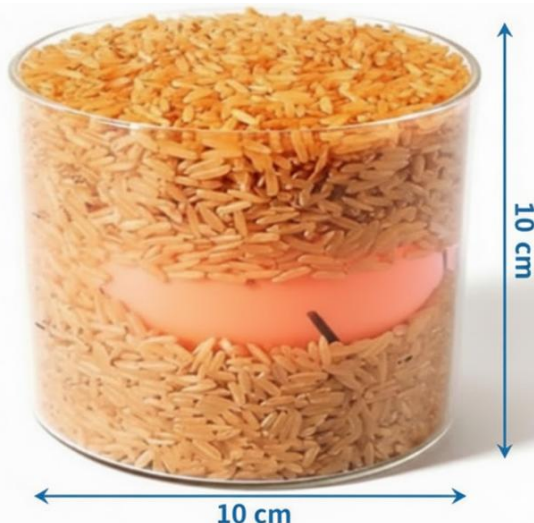
O professor deve mediar a elaboração do registro das respostas, garantindo que os dados observados sejam sistematicamente transpostos para a linguagem escrita ou algébrica, conforme demonstrado na resolução do problema [Q₁] apresentado a seguir e solicitar que o aluno efetive a tarefa de introduzir a esfera no cilindro, para solução do problema. Para a execução desta etapa, o aluno utilizará o próprio saco vazio do arroz para o armazenamento do excedente de arroz deslocado do cilindro.

[Q₁] Descreva como você introduziria completamente a esfera no cilindro cheio de grão de arroz. Agora efetue a introdução e explique com suas palavras como é possível realizar essa atividade?

Resposta falada e escrita esperada: *“Primeiro retiraria uma parte de arroz do cilindro para a introdução da esfera e retornaria com uma quantidade suficiente para preencher os espaços vagos.”*

A estratégia pedagógica reside em levar o estudante a inferir que o volume de arroz expelido guarda uma relação de equivalência direta com o volume da esfera nela introduzida. O objetivo central, neste momento, é a constatação intuitiva de que o espaço ocupado pelo sólido submerso corresponde exatamente à quantidade de material deslocado, consolidando a noção física de volume por meio da observação empírica. O professor deve acompanhar a introdução da esfera no cilindro como na Figura 10 com a esfera completamente imersa no cilindro e completada com arroz para não haver espaços vazios.

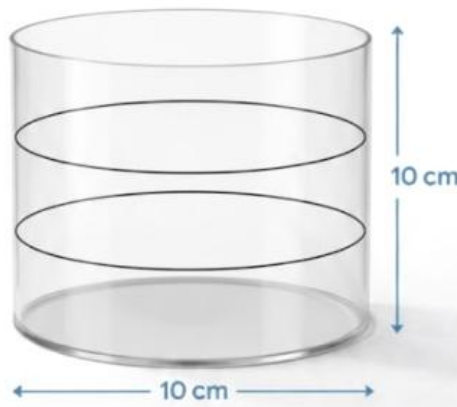
Figura 10 – Cilindro cheio de arroz com esfera imersa



Fonte: O autor, 2026.

O objetivo central, neste momento, é a constatação intuitiva de que o espaço ocupado pelo sólido submerso corresponde exatamente à quantidade de material deslocado, consolidando a noção física de volume por meio da observação empírica. Esse fato pode ser melhor observado se o cilindro for marcado, ver Figura 11.

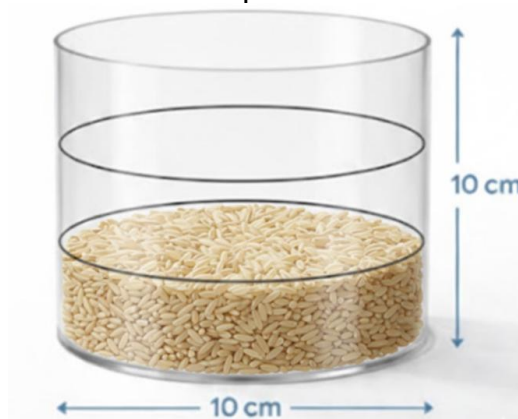
Figura 11 - Cilindro dividido em três partes iguais



Fonte: O autor, 2026.

Após o aluno efetuar a retirada da esfera do cilindro, estará diante da relação de proporcionalidade entre o volume da esfera e o volume do cilindro e poderá inferir que a esfera deslocou dois terços do volume do cilindro, logo o volume de uma esfera equivale a $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro como na Figura 12 que mostra a quantidade de arroz que restou no cilindro.

Figura 12 - Cilindro após a esfera ser retirada



Fonte: O autor, 2026.

Formalização: Ao final da Atividade 2, espera-se que o estudante identifique, de forma autônoma, a relação de proporcionalidade entre o volume da esfera e do

cilindro. O papel do professor, neste estágio, é mediar o processo para que os alunos deduzam, por meio do raciocínio lógico e da experimentação, que o volume de arroz deslocado pela esfera corresponde exatamente a dois terços da capacidade do cilindro. A formalização desse conceito deve ocorrer apenas após a constatação pelos alunos, consolidando a compreensão sobre essa importante propriedade geométrica.

As questões [Q₃] e [Q₄] poderão ser respondidas pelos alunos com tranquilidade. Os quais devem perceber que foi deslocado duas quantidades daquela que restou no cilindro. O professor pode finalizar concluindo que a quantidade deslocada de arroz se trata do mesmo volume da esfera e que corresponde a 2/3 do volume do cilindro.

$$V_e = \frac{2}{3} V_c \quad (3)$$

Dessa forma, pela equação (2), que gera o volume do cilindro lembrada na atividade anterior, onde o volume do cilindro corresponde ao produto entre a área da base e a altura do cilindro, a qual pode ser encontrada na forma algébrica:

$$V_c = \pi r^2 \times h \quad (2)$$

Neste momento o aluno apenas é induzido a pensar nessas proporções, formalizando a relação entre os dois volumes, relacionando as equações (2) e (3) encontra a seguinte expressão representada na equação (4).

$$V_e = \frac{2}{3} (\pi r^2 \times h) \quad (4)$$

Atividade 3. Dedução da fórmula do volume da esfera por meio do raciocínio próprio.

Nome do(a) aluno(a) 1: _____

Nome do(a) aluno(a) 2: _____

Objetivo: Induzir os alunos a formalizarem a expressão do volume da esfera usando materiais concretos (Arroz, Esfera e Cilindro).

Material Utilizado: Uma folha contendo os problemas da atividade, Esfera, Cilindro, grãos de arroz, régua e caneta.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Altura, diâmetro, raio e volume do cilindro; diâmetro, raio e volume da esfera; relação entre o volume da esfera e o volume do cilindro. O aluno poderá deduzir tanto de forma intuitiva como de forma algébrica a fórmula do volume da esfera como sendo $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro, ou seja, $V_e = \frac{2}{3}V_c$ (3). Nessa atividade o aluno irá generalizar a fórmula que nos fornece o volume da esfera.

PROCEDIMENTOS: O aluno receberá o cilindro, a esfera, o arroz e a régua, juntamente com a folha de atividade contendo as seguintes instruções:

[M₁] Qual relação você percebe entre o raio (r) da esfera e a altura (h) do cilindro? Explique como você chegou a essa conclusão.

[M₂] Você já estudou como encontrar o volume do cilindro (V_c), basta multiplicar a área da base (πr^2) pela altura (h). Ao acrescentar a esfera no cilindro cheio de arroz ocorre um deslocamento desse arroz, pense como você faria para calcular o volume de arroz que foi retirado do cilindro. Explique com suas palavras como realizaria essa tarefa.

[M₃] Sabendo que a altura do cilindro é igual a duas vezes o raio da esfera, ou seja, que $h=2r$. Explique com suas palavras como fica a fórmula resultante para encontrar esse volume, sabendo que o h que representa a altura na fórmula do volume do cilindro ($V_c = \pi r^2 \times h$) pode ser substituído por $2r$.

[M₄] Você percebeu que das três partes em que o cilindro foi dividido, duas dessas três partes, ou seja, dois terços do volume total do cilindro $\frac{2}{3}(\pi r^2 \times 2r)$ precisaram ser retirados para introdução da esfera. Então, baseado nesse fato, explique com suas palavras como você faria para encontrar a Fórmula Geral do volume da esfera que deslocou o arroz.

Sugestões para o professor

Nesta terceira atividade a turma continua com a mesma configuração mantendo as duplas, em seguida procede-se à distribuição do material impresso. Neste momento o professor inicia a leitura mediada para o nivelamento das instruções.

O professor deve mediar a elaboração do registro das respostas, garantindo que os dados observados sejam sistematicamente transpostos para a linguagem escrita ou algébrica, conforme demonstrado na resolução da questão [M₁] como exemplo a seguir.

[M₁] Qual relação você percebe entre o raio (r) da esfera e a altura (h) do cilindro? Explique como você chegou a essa conclusão.

Resposta esperada: “A altura do cilindro é igual a duas vezes o raio da esfera, ou seja, $h_c=2r_e$. Cheguei a essa conclusão pelo fato de o raio da esfera ser 5 cm e a altura do cilindro ser 10cm, configurando o dobro do raio.”

Observações e Formalização

Ao concluir a terceira atividade, espera-se que o aluno tenha consolidado a compreensão acerca da proporcionalidade entre os sólidos envolvidos. O objetivo pedagógico é que o discente realize a síntese cognitiva de que a esfera ocupa, exatamente, dois terços do espaço interno do cilindro circunscrito. A partir dessa constatação, o aluno deverá ser capaz de formalizar a relação geométrica, deduzindo que o volume da esfera é definido pela razão:

$$V_e = \frac{2}{3}V_c = \frac{2}{3}(\pi r^2 \times 2r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (5)$$

Atividade 4. Construção de uma esfera no Geogebra como estímulo à criatividade.

OBJETIVOS: Obter uma visão ampla tridimensional dos elementos correspondentes na criação de uma esfera no espaço, observando durante a construção da esfera a relação que há entre o raio o tamanho da esfera.

MATERIAL UTILIZADO: Folha de atividade contendo os problemas, Computador, Software Geogebra, caneta.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Além das habilidades com o Geogebra na construção da esfera tridimensional, serão envolvidos nessa atividade conceitos sobre raio, eixo, diâmetro e centro de uma esfera. O volume poderá ser explorado nesse momento de forma intuitiva, ao propor ao aluno que aumente e diminua o raio, construindo diversas esferas de tamanhos diferentes.

PROCEDIMENTOS: Essa atividade será conduzida na sala de informática e poderá ser realizada em dupla, conforme a preferência dos participantes. Os alunos receberão as folhas de atividade contendo as instruções necessárias para a realização da tarefa. A seguir os problemas que farão parte dessa atividade:

[B₁] *Ao criar uma esfera no espaço tridimensional. Qual o elemento que dá início a formação da esfera? Explique com suas palavras qual a relação desse elemento com o tamanho da esfera.*

[B₂] *Na construção de uma esfera no Geogebra, como se chama a distância entre os dois pontos que formam a esfera? Justifique sua resposta.*

[B₃] *Para você, o que é uma esfera? Explique com suas palavras mediante todo conhecimento adquirido ao longo das aulas. Cite três objetos do seu dia a dia que lembram uma esfera.*

[B₄] *Verifique a largura da esfera que você criou e explique com suas palavras qual a relação dessa largura com o raio.*

Sugestões para o professor

Nesta quarta etapa, a organização da turma deve se manter em duplas. O docente deve mediar³ o acesso dos estudantes ao *software* Geogebra, reservando um período inicial para a exploração livre da interface. Este momento de familiarização é fundamental para que os alunos reconheçam as ferramentas e as funcionalidades da plataforma, reduzindo a carga cognitiva voltada ao manuseio do sistema e permitindo que, posteriormente, o foco recaia sobre a investigação geométrica proposta.

Concluída a etapa inicial de exploração do *software*, o docente deve proceder à distribuição do roteiro de atividades impresso, dando início à leitura mediada para o nivelamento das instruções. Durante o processo, é importante sempre manter o incentivo a participação ativa e o debate sobre as estratégias de resolução. Mediando a elaboração do registro das respostas, garantindo sempre que os dados observados sejam sistematicamente transpostos para a linguagem escrita ou

³ O professor necessitará fazer uma leitura inicial sobre o Geogebra:
<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/739119/1/Vitor%20Vasconcelos%20Livro.pdf>

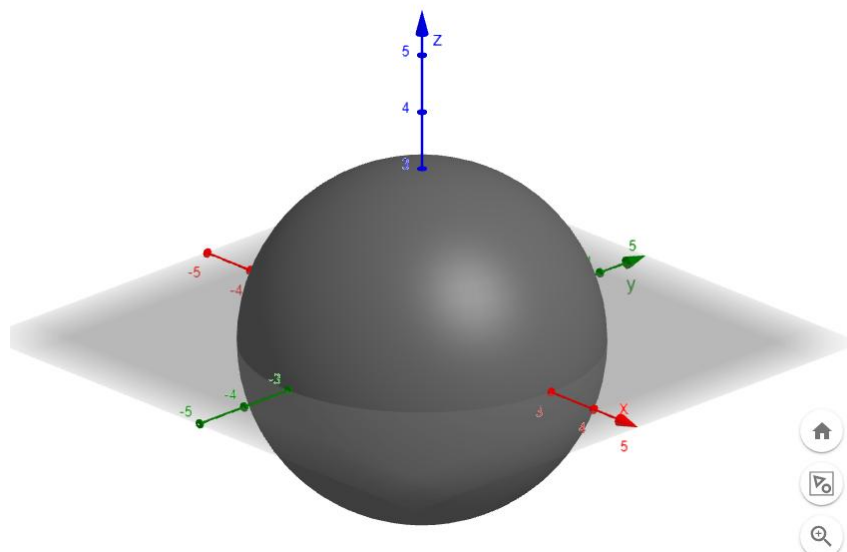
algébrica. Com o intuito de esclarecer a dinâmica de investigação no ambiente digital, a seguir a resolução do primeiro Problema [B₁] da atividade.

[B₁] Ao criar uma esfera no espaço tridimensional. Qual o elemento que dá início a formação da esfera? Explique com suas palavras qual a relação desse elemento com o tamanho da esfera.

Resposta esperada: “O elemento é o raio. Quando aumentamos o tamanho do raio a esfera também cresce”.

Dica: Muitos alunos responderão de início que o elemento é o ponto. O aluno tende a reduzir a esfera ao seu ponto inicial de construção. Cabe ao professor mediar a transição dessa percepção pontual para a compreensão da esfera como um lugar geométrico definido pela equidistância radial, onde o “raio”, e não apenas o centro, é o elemento constituinte da formação da esfera.

Figura 13: Esfera criada no Geogebra com raio 3



Fonte: O autor, 2026.

Observações e formalização

Ao finalizar a quarta atividade, espera-se que o aluno tenha consolidado o domínio sobre a construção da esfera em ambiente virtual, compreendendo a manipulação de suas propriedades métricas. O objetivo pedagógico central é que o discente realize a síntese cognitiva sobre a variabilidade do sólido, percebendo que a alteração dos parâmetros, como o raio, permite a geração de esferas de diferentes

dimensões. Além disso, a atividade visa à compreensão das relações de inclusão espacial, dando a opção de o aluno construir uma esfera e inscrevê-la em outra, desenvolvendo assim uma visão mais complexa da tridimensionalidade.

Ao concluir essa atividade, o professor poderá formalizar o conceito de esfera como sendo: “o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a uma distância r (raio) de um ponto fixo C (centro)”.

Atividade 5. Dedução da fórmula da área da superfície da esfera a partir de construções no Geogebra.

OBJETIVO: Induzir os alunos a formalizarem a expressão algébrica que nos fornece a área da superfície da esfera fazendo uso do software Geogebra.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades com os problemas; computador; sala de informática; software Geogebra instalado ou on-line; caneta.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: volume da esfera; área da superfície esférica.

PROCEDIMENTOS: O aluno já de posse de um computador receberá a folha de atividade contendo as seguintes instruções e questionamentos.

[D₁] *Crie uma esfera no software Geogebra de raio 5 e faça o registro de qual o volume dessa esfera calculado pela fórmula já deduzida anteriormente?*

[D₂] *Crie agora uma sequência de 3 esferas de raios consecutivamente 2, 3, 4 e registre o volume de cada uma.*

[D₃] *Imagine uma esfera comum, depois imagine retirar uma outra esfera só um pouquinho menor de dentro dela. Registre com suas palavras o que sobra.*

[D₄] *Faça uma subtração do volume de uma esfera menor V_{E2} de raio r de dentro de uma esfera maior V_{E1} de raio $r + x$. Monte a equação do volume das duas esferas e expresse a equação que representa essa subtração.*

[D₅] *Simplificando a equação anterior você chega a expressão $\frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 - x^3)$, neste caso você despreza os termos x^2 e x^3 para simplificar ainda mais a expressão. Daí você simplifica mais um pouquinho e mostre o resultado. Com suas palavras explique o que significa o x nessa equação.*

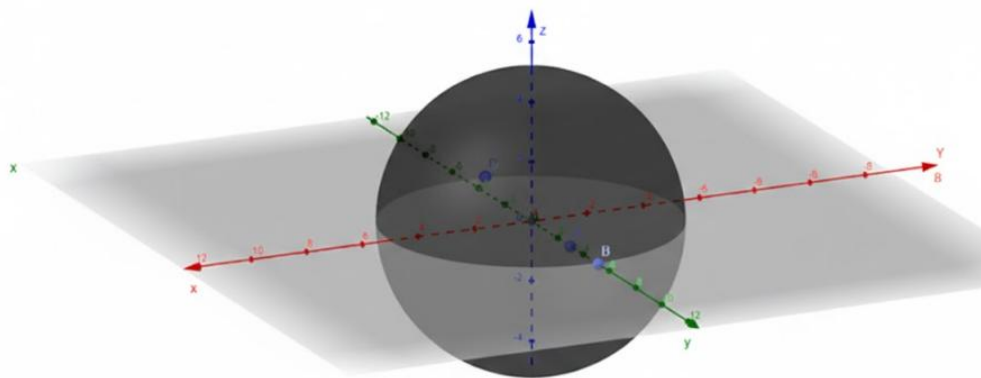
Sugestões para o professor

Nessa etapa da sequência que finaliza essa proposta, mantém-se a configuração em dupla, preservando a continuidade do trabalho no ambiente computacional. A entrega do roteiro (ficha com os problemas) é acompanhada por uma nova leitura mediada, visando à padronização das orientações para esta fase. A mediação docente, sempre deve fomentar o engajamento cognitivo e o debate acerca das estratégias resolutivas. Paralelamente, cabe ao professor orientar a sistematização das respostas, assegurando a transposição das observações para as linguagens escrita e algébrica. A dinâmica proposta é ilustrada pela resolução do primeiro item, apresentada a seguir.

[D₁] Crie uma esfera no software Geogebra de raio 5 e faça o registro de qual o volume dessa esfera calculado pela fórmula já deduzida anteriormente?

Resposta esperada para criação da esfera:

Figura 14: Esfera criada no Geogebra de raio 5



Fonte: O autor, 2026.

Resposta esperada para o cálculo do volume dessa esfera da Figura 14: $V_e =$

$$\frac{1570}{3} \approx 523,33... \text{unidades de volume}$$

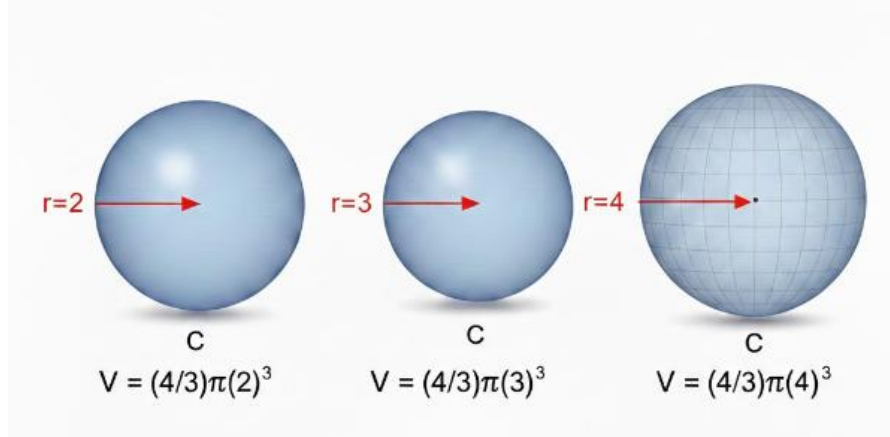
Dica: Para criação dessa esfera representada na Figura 14 o professor poderá sugerir que o aluno utilize o comando Superfície Esférica (Centro, Raio)



Observações e formalização

As questões propostas nesta etapa visam consolidar a transição da observação empírica para a abstração algébrica. Ao solicitar que o aluno crie esferas com raios específicos no *software* [D1 e D2], o professor fomenta a validação experimental de propriedades numéricas já deduzidas.

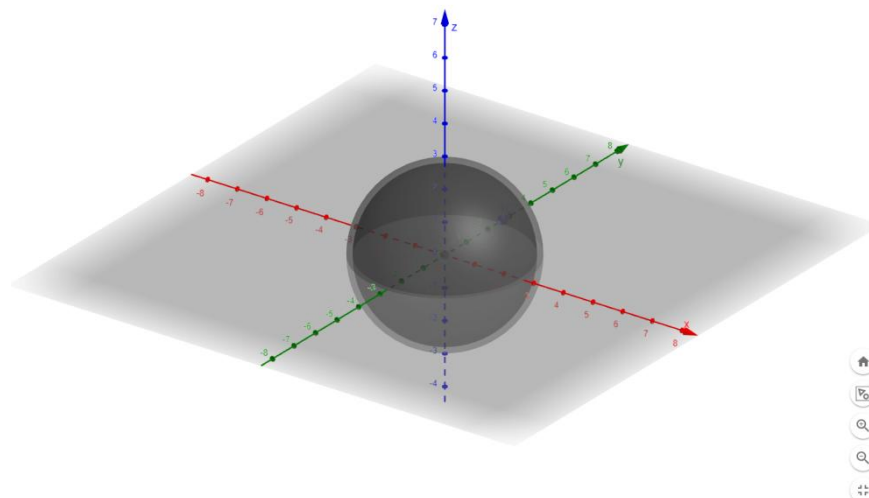
Figura 15: Esferas de raios consecutivos e seus respectivos volumes



Fonte: O autor, 2026.

A sequência evolui para uma investigação de caráter infinitesimal [D3 e D4], em que o estudante é instigado a mentalizar a subtração de volumes de esferas concêntricas. Esta estratégia pedagógica busca o desenvolvimento de um raciocínio que antecipa conceitos de cálculo diferencial, permitindo que o discente identifique o que “sobra” nesse processo de subtração, não apenas como um valor numérico, mas como uma estrutura geométrica, em outras palavras uma casca esférica.

Figura 16: Esferas Concêntricas



Fonte: O autor, 2026.

Por fim, o processo de simplificação algébrica no problema [D5] exige que o aluno interprete o significado físico dos termos matemáticos, culminando na compreensão da área da superfície como a taxa de variação do volume em relação ao raio. O professor fará a mediação da dedução algébrica da fórmula da área da superfície esférica (A):

$$A = 4\pi r^2 \quad (6)$$

A formalização desse conceito poderá ser feito após a generalização da fórmula algébrica, sendo apresentado ao aluno o seguinte conceito de área superficial de uma esfera: “A superfície esférica é o lugar geométrico de todos os pontos do espaço que estão à mesma distância r de um ponto fixo C .”

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este roteiro de atividades, que está sendo apresentado para validação no âmbito da pesquisa de mestrado de Silva (2026), apresenta os desdobramentos de uma intervenção prática realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio na rede pública de Belém-PA. A aplicação demonstrou resultados positivos na aprendizagem de geometria espacial, consolidando-se como um recurso didático-pedagógico relevante para professores e alunos. Ao disponibilizar este produto, pretende-se incentivar a inovação metodológica no ambiente escolar, oferecendo caminhos que permitam ao estudante transcender a memorização de fórmulas e engajar-se em uma trajetória de construção do próprio saber.

REFERÊNCIAS

AFONSO, Henriques; et al. **Abordagem instrumental e aplicações no ensino da BRASIL.Base Nacional Comum Curricular: educação é a base.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<https://bncc.mec.gov.br>>. Acesso em: 08 mar. 2024.

DANTES, Luiz Roberto. **Matemática: Volume único Livro didático.** 504f. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

DENARDI, Vânia Bolzan. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática.** XX EBRAPEM, Pelotas, 2018. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd04_vania_denardi.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2024.

DUVAL, RAYMOND. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** [trad. MércilesThadeu Moretti]. Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat. vol. 7, n. 2. Santa Catarina: Florianópolis, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acessado: 05/06/2024.

MARQUES, G. E. de A..**Ensino de Esfera por Meio de Applets do Software Geogebra.** 2019. 134f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

RABARDEL, PIERRE .**Leshommes et lestecnologies; approchecognitivedesinstruments contemporains**,1995, Centre National de laRechercheScientifique; Linguagem: Francês, Disponível em: www.periodicos.capes.gov.br/index.php/acervo/buscaador.html?task=detalhes&id=W1555538354. Acessado: 05/06/2024.

SILVA, Vitor Vasconcelos. Área e volume de uma esfera: **experimentação matemática com recursos manipuláveis e digitais.** 2026. Dissertação (Mestrado em Ensinode Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2026.



Mestrando do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) pelo Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará - UEPA (2023). Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA (2012). Foi Professor monitor na Escola municipal Almerindo Trindade, no Programa Mais Educação (2011, 2012 e 2013); Foi Mentor no programa Decola - Núcleo de Empreendedorismo e Inovação, que atuou em conjunto com a Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Educação Profissional e Tecnológica - SECTET pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2022-2023). Servidor Público da Universidade Estadual do Pará (UEPA).



Pós-Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Doutor e Mestre em Geofísica pela Universidade Federal do Pará. Licenciado em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará UNESPa, Engenheiro Civil pela Universidade Federal do Pará, Licenciado em Ciências de 1 Grau pela União das Escolas Superiores do Pará UNESPa. Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA, Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e Docente do Mestrado Profissional em Processos e Tecnologias Educacionais/UEPA. Foi Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UEPA de 2019 à 2023. Foi Vice-Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UEPA de 2017 à 2019. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice Líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e Ensino de Matemática, e na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: deconvolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.



Possui graduação em Engenharia da Computação pelo Instituto de Estudos Superiores da Amazônia (2008), especialização em Gerência de Projetos de Software pela UFPA (2009), mestrado em Processos Industriais pela UFPA (2011) e doutorado em Engenharia Elétrica (ênfase em Computação Aplicada - 2020). Atualmente, é professor efetivo na Universidade do Estado do Pará (UEPA). Além de experiência na docência, possui experiência profissional como Analista de Sistemas. Em relação a pesquisa científica, possui um perfil interdisciplinar, com atuação em projetos nas áreas de ciência de dados, inteligência artificial e desenvolvimento de ferramentas computacionais. Também participa de projetos voltados à educação e tecnologia, bem como de iniciativas que integram computação e meio ambiente.