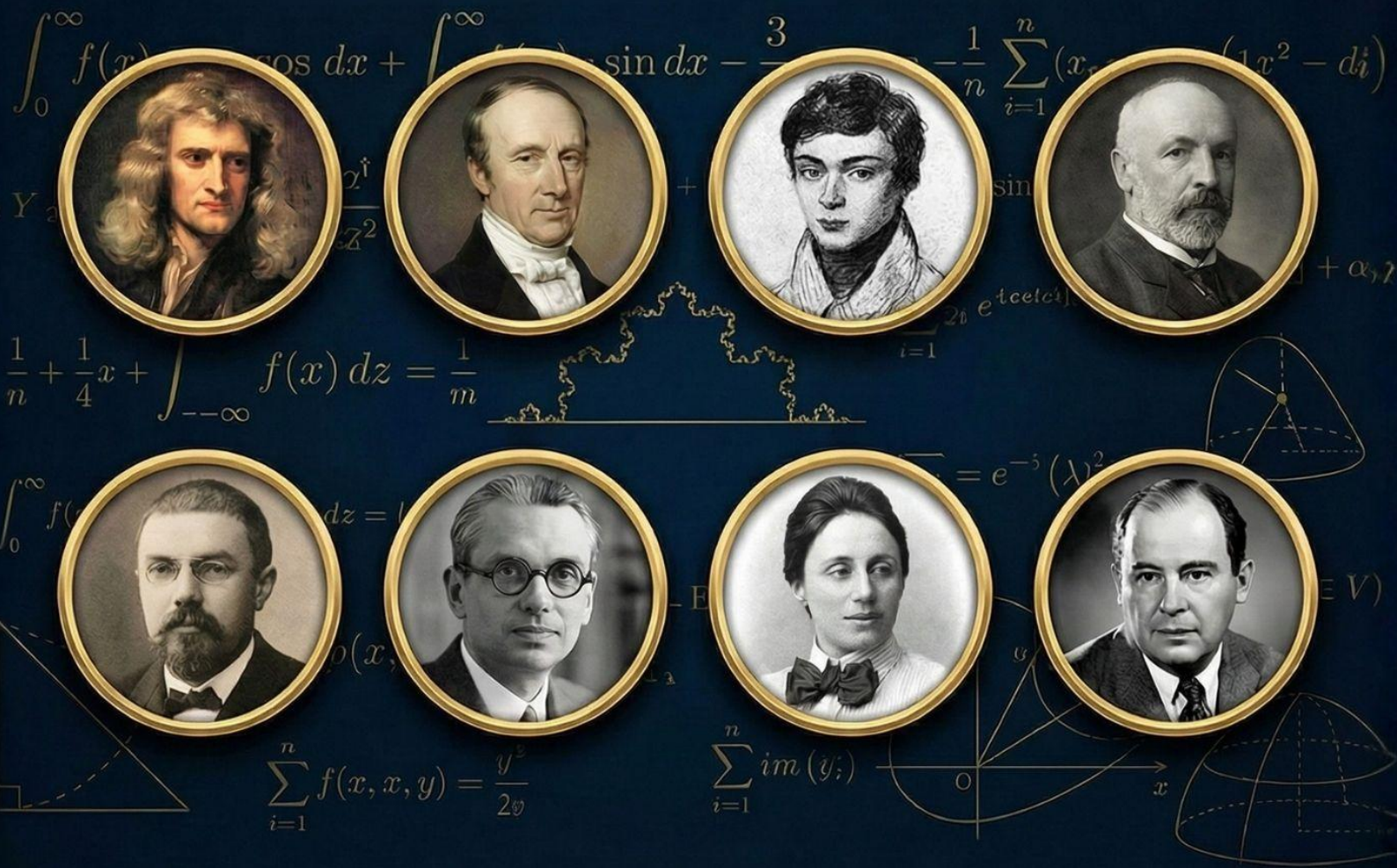


DE ISAAC NEWTON A JOHN VON NEUMANN

UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA



Francilino Paulo De Sousa - Rildo Alves Do Nascimento
Adeilson José Da Silva - Neila Gomes Mota
Anderson Amaro Vieira - Jonas Guerra De Araújo
Caio Lima Silva - Marinês Alves Gondim Do Nascimento
Ewando José De Sousa
(ORG.)

DE ISAAC NEWTON A JOHN VON NEUMANN

UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

1ª Edição



ORGANIZADORES

Francilino Paulo De Sousa
Rildo Alves Do Nascimento
Adeilson José Da Silva
Neila Gomes Mota
Anderson Amaro Vieira
Jonas Guerra De Araújo
Caio Lima Silva
Marinês Alves Gondim Do Nascimento
Ewando José De Sousa

DOI: 10.47538/AC-2026.39



Ano 2026

DE ISAAC NEWTON A JOHN VON NEUMANN

UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

1ª Edição

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

D32

De Isaac Newton a John Von Neumann [recurso eletrônico] : um breve passeio pela história da matemática / organização Francilino Paulo de Sousa ... [et al.]. - 1. ed. - Natal [RN] : Amplamente, 2026.
recurso digital

Formato: ebook
Modo de acesso: world wide web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5321-118-6
DOI 10.47538/AC-2026.39

1. Matemática - História. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Matemáticos. 4. Livros eletrônicos. I. Sousa, Francilino Paulo de.

26-104520.0

CDD: 510
CDU: 51



Carla Rosa Martins Gonçalves - Bibliotecária - CRB-7/4782

Editora Amplamente
Empresarial Amplamente Ltda.
CNPJ: 35.719.570/0001-10
E-mail: publicacoes@editoraamplamente.com.br
www.editoraamplamente.com
Telefone: (84) 999707-2900
Caixa Postal: 3402
CEP: 59082-971
Natal- Rio Grande do Norte – Brasil
Copyright do Texto © 2026 Os autores
Copyright da Edição © 2026 Editora Amplamente
Declaração dos autores/ Declaração da Editora: disponível em:
<https://www.amplamentecursos.com/politicas-editoriais>
Editora-Chefe: Dayana Lúcia Rodrigues de Freitas
Assistentes Editoriais: Caroline Rodrigues de F. Fernandes; Margarette Freitas Baptista
Bibliotecária: Carla Rosa Martins Gonçalves - CRB-7/4782
Projeto Gráfico, Edição de Arte e Diagramação: Luciano Luan Gomes Paiva; Caroline Rodrigues de F. Fernandes
Capa: Canva®/Freepik®
Parecer e Revisão por pares: Revisores
Creative Commons. Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional (CC-BY-NC-ND).



Ano 2026

INFORMAÇÕES SOBRE OS/AS ORGANIZADORES/AS

FRANCILINO PAULO DE SOUSA

Mestrando em Ciências da Educação e Ética Cristã
Ivy Enber Christian University
fpslm@yahoo.com.br

RILDO ALVES DO NASCIMENTO

Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática
Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA)
rildo.alves23@gmail.com

ADEILSON JOSÉ DA SILVA

Mestre em Matemática
Instituto Federal do Piauí (IFPI)
adeilsonprofessor452@gmail.com

NEILA GOMES MOTA

Especialista em Ciências da Natureza, Suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho
Universidade Federal do Piauí (UFPI)
neilamota421@gmail.com

ANDERSON AMARO VIEIRA

Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade de Passo Fundo (UPF)
anderson.avieira@escola.seduc.pa.gov.br

JONAS GUERRA DE ARAÚJO

Especialista em Ensino de Matemática
Instituto Federal do Maranhão (IFMA)
jonas1987 fla@gmail.com

CAIO LIMA SILVA

Bacharel em Administração
Universidade estadual do Ceará (UECE)
caio07limasilva@gmail.com

MARINÊS ALVES GONDIM DO NASCIMENTO

Mestra em Gestão em Organizações Aprendentes
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)
marines3598@gmail.com

EWANDO JOSÉ DE SOUSA

Mestre em Matemática
Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF)
ewandojose@gmail.com



Ano 2026

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	7
CAPÍTULO I.....	9
ISAAC NEWTON: A MATEMÁTICA DA NATUREZA, LEIS E MOVIMENTO	
Francilino Paulo de Sousa	
Rildo Alves do Nascimento	
José Marreiros de Souza Neto	
Alan Derick de Araújo Lima	
Alessandro Rodrigues Rocha	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-01	
CAPÍTULO II	25
AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY: O RIGOR COMO LINGUAGEM DA ANÁLISE MODERNA	
Rildo Alves do Nascimento	
Ícaro Jael Mendonça Moura	
Daiane Fabrício dos Santos	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
Francisco Cleuton de Araújo	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-02	
CAPÍTULO III.....	43
SIMETRIA E ESTRUTURA NA ÁLGEBRA DE ÉVARISTE GALOIS	
Ewando José de Sousa	
Rildo Alves do Nascimento	
Francisco Cleuton de Araújo	
Katywsse Alves de Carvalho	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-03	
CAPÍTULO IV	59
O INFINITO TORNADO CONCEITO: GEORG CANTOR E OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA	
Rildo Alves do Nascimento	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
Luiz Edson Pinheiro Távora Neto	
Alessandro Rodrigues Rocha	
Juliana Alves dos Santos	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-04	
CAPÍTULO V.....	76
HENRI POINCARÉ: FORMA, DINÂMICA E INTUIÇÃO NO PENSAMENTO MATEMÁTICO	
Ewando José de Sousa	
Rildo Alves do Nascimento	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
Francisco Cleuton de Araújo	
Rodrigo Malan Loureiro Lima	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-05	

CAPÍTULO VI.....	92
VERDADE, PROVA E LIMITE: A VIRADA CONCEITUAL DE KURT GÖDEL	
Francilino Paulo de Sousa	
Rildo Alves do Nascimento	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
Ewando José de Sousa	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-06	
CAPÍTULO VII.....	108
EMMY NOETHER: ESTRUTURAS, SIMETRIAS E A NOVA ÁLGEBRA	
Francilino Paulo de Sousa	
Rildo Alves do Nascimento	
Daiane Fabrício dos Santos	
Ícaro Jael Mendonça Moura	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-07	
CAPÍTULO VIII.....	125
JOHN VON NEUMANN: CÁLCULO, DECISÃO E A MATEMÁTICA DO MUNDO CONTEMPORÂNEO	
Francilino Paulo de Sousa	
Rildo Alves do Nascimento	
Carlos Daniel Chaves Mourão	
Ewando José de Sousa	
Francisco Cleuton de Araújo	
DOI: 10.47538/AC-2026.39-08	
POSFÁCIO.....	143

APRESENTAÇÃO

Este *e-book* propõe um percurso pela Matemática a partir de ideias que transformaram profundamente a maneira de pensar o mundo. Mais do que uma sucessão cronológica de biografias, a obra constrói uma narrativa conceitual, na qual cada matemático representa um momento de inflexão na relação entre linguagem, estrutura, rigor e interpretação da realidade.

O primeiro capítulo inaugura esse percurso com Isaac Newton, situando a Matemática como chave interpretativa da natureza. Em um cenário de ruptura com tradições escolásticas, emerge uma ciência que busca leis universais expressas por relações matemáticas, inaugurando uma nova forma de compreender o movimento, o espaço e o tempo. Aqui, a Matemática deixa de ser apenas descritiva e passa a organizar a própria inteligibilidade do mundo físico.

No segundo capítulo, Augustin-Louis Cauchy ocupa o centro da narrativa ao representar a exigência de rigor como princípio estruturante da Matemática. Em resposta às fragilidades conceituais herdadas do cálculo infinitesimal, consolida-se uma linguagem mais precisa, na qual definições e demonstrações passam a assumir papel normativo, redefinindo os critérios de validade do conhecimento matemático.

O terceiro capítulo desloca o foco dos procedimentos para as estruturas com Évariste Galois. Ao reinterpretar problemas clássicos sob a ótica das simetrias, inaugura-se uma nova racionalidade algébrica, na qual compreender as relações internas entre objetos torna-se mais significativo do que encontrar soluções explícitas. Trata-se de uma virada conceitual que antecipa a Matemática abstrata moderna.

No quarto capítulo, Georg Cantor conduz o leitor a um dos terrenos mais desafiadores do pensamento matemático: o infinito. Ao torná-lo objeto legítimo de investigação rigorosa, Cantor amplia as fronteiras do concebível, provocando debates que atravessam a Matemática, a lógica e a Filosofia, e redefinem os próprios fundamentos da disciplina.

O quinto capítulo apresenta Henri Poincaré como um pensador de transição, cuja obra revela os limites da previsibilidade e da solução exata. Ao privilegiar a análise

qualitativa e as estruturas globais dos sistemas, emerge uma nova sensibilidade matemática, aberta à complexidade, à instabilidade e à intuição como componentes legítimos do fazer científico.

No sexto capítulo, Kurt Gödel surge evidenciando os limites internos dos sistemas formais. Ao mostrar que nem toda verdade é demonstrável, sua obra provoca uma reconfiguração profunda das expectativas depositadas na formalização matemática, introduzindo uma reflexão duradoura sobre verdade, prova e racionalidade.

O sétimo capítulo dedica-se a Emmy Noether, cuja abordagem estrutural reorganiza a álgebra e estabelece conexões profundas entre Matemática e Física. Ao privilegiar invariâncias e relações, sua obra consolida uma linguagem capaz de unificar diferentes domínios, tornando visível a arquitetura abstrata que sustenta a matemática contemporânea.

Por fim, o oitavo capítulo encerra a obra com John von Neumann, figura que sintetiza a Matemática do século XX em sua dimensão teórica, aplicada e tecnológica. Articulado lógica, computação, física e tomada de decisão, sua produção aponta para novos horizontes, nos quais a Matemática se afirma como linguagem central de um mundo cada vez mais complexo e interconectado.

Espera-se que esta obra contribua para uma compreensão mais ampla da Matemática como construção histórica, cultural e intelectual, evidenciando que seus conceitos não aparecem de forma neutra ou isolada, mas resultam de tensões, rupturas e continuidades ao longo do tempo. Articulado biografia, contexto histórico e ideias matemáticas, o livro convida o leitor a reconhecer a Matemática como um campo vivo, marcado por escolhas teóricas e modos específicos de pensar. Nesse sentido, almeja-se que a leitura favoreça não apenas a apropriação de conhecimentos, mas também o desenvolvimento de uma postura crítica e reflexiva diante da ciência, ampliando o entendimento sobre o papel da Matemática na produção do conhecimento e na interpretação do mundo no qual vivemos.

Os Organizadores

CAPÍTULO I

ISAAC NEWTON: A MATEMÁTICA DA NATUREZA, LEIS E MOVIMENTO

Francilino Paulo de Sousa¹

Rildo Alves do Nascimento²

José Marreiros de Souza Neto³

Alan Derick de Araújo Lima⁴

Alessandro Rodrigues Rocha⁵

DOI: 10.47538/AC-2026.39-01

Resumo

Neste texto, propõe-se um mergulho na obra e no tempo de Isaac Newton, personagem decisivo na reorganização do pensamento científico moderno. Situado em um período de transição profunda, no qual antigas explicações naturais cediam lugar a modelos baseados na experimentação e na formalização matemática, Newton emerge como um articulador singular entre diferentes campos do saber. Sua produção não apenas respondeu às questões científicas de seu tempo, como também redefiniu os modos de formular problemas e de compreendê-los teoricamente. A narrativa do capítulo articula elementos biográficos e históricos à análise de suas contribuições intelectuais, evidenciando como a formação de Newton, suas escolhas metodológicas e os debates científicos do século XVII moldaram uma nova linguagem para a ciência. Nesse percurso, a matemática ocupa posição central, não como ferramenta acessória, mas como estrutura organizadora de sua visão de mundo. O desenvolvimento de métodos infinitesimais, o estudo sistemático das séries e a matematização dos fenômenos naturais são apresentados como expressões de um mesmo projeto intelectual, no qual rigor formal e interpretação da natureza se entrelaçam. Ao acompanhar a construção de ideias que sustentaram a mecânica clássica e influenciaram gerações posteriores, o capítulo convida o leitor a compreender Newton para além do gênio isolado, reconhecendo-o como parte de uma rede histórica, conceitual e científica mais ampla. Objetiva-se analisar a obra de Isaac Newton à luz de seu contexto histórico e intelectual, evidenciando como a matematização dos fenômenos naturais constituiu um princípio estruturante de seu pensamento científico. Dessa forma, delineia-se um quadro em que a Matemática não apenas descreve a realidade, mas passa a constituir um modo privilegiado de pensá-la.

Palavras-chave: Isaac Newton; Pensamento Científico Moderno; Matemática e Natureza; História da Ciência.

¹ Ivy Enber Christian University. fpslm@yahoo.com.br.

² Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

³ Universidade Federal do Maranhão (UFMA). jmarreiros999@gmail.com.

⁴ Universidade Estadual do Ceará (UECE). alanderickalima@gmail.com.

⁵ Universidade Cândido Mendes (UCAM). arrsandro@gmail.com.

Introdução

O século XVII assinala uma inflexão decisiva na história do conhecimento ocidental: explicações de matriz aristotélica, ancoradas em qualidades e finalidades naturais, passam a ser progressivamente substituídas por modelos que privilegiam a experimentação, a quantificação e a formalização matemática. Nesse cenário de reorganização intelectual, a investigação da natureza deixa de se orientar por analogias qualitativas e adota uma linguagem capaz de exprimir regularidades por meio de relações mensuráveis. É nesse ambiente de transição, simultaneamente marcado por controvérsias filosóficas, inovações instrumentais e reconfigurações institucionais da ciência, que se consolida um novo ideal de inteligibilidade: compreender o mundo como sistema regido por leis (Bergamo, 2016; Lima Vaz, 2002; Deus Malta, 2022).

A emergência de uma física matematizada não se deu sem tensões conceituais. Como traduzir o movimento e a mudança, fenômenos contínuos e, em muitos aspectos, elusivos, em estruturas formais rigorosas? De que modo a matemática, tradicionalmente associada a entes ideais, poderia descrever processos naturais com poder explicativo e preditivo? Tais questões sintetizam o problema central que atravessa a constituição da ciência moderna: a articulação entre experiência sensível e formalização teórica, entre observação e demonstração, entre natureza e número.

Neste contexto, a obra de Isaac Newton representa uma resposta de extraordinária abrangência a esse desafio. Ao propor leis gerais do movimento, ao estabelecer um princípio de gravitação universal e ao desenvolver métodos infinitesimais capazes de lidar com grandezas variáveis, Newton não apenas ofereceu soluções técnicas para problemas específicos, mas também instituiu um modo de pensar no qual a matemática assume função estruturante na interpretação dos fenômenos naturais. A natureza, assim concebida, torna-se inteligível na medida em que pode ser expressa por relações formais que conectam causas e efeitos sob a forma de leis.

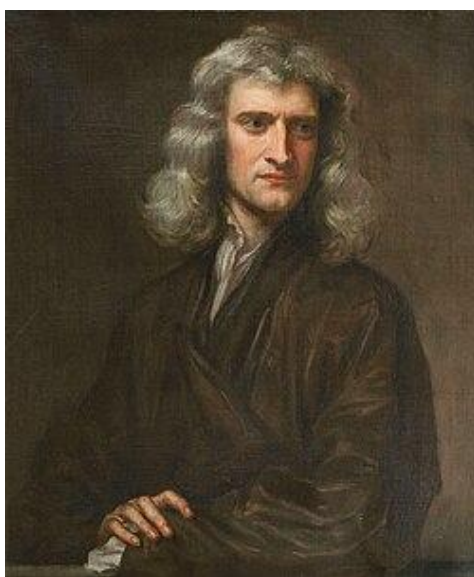
O objetivo deste capítulo é analisar a produção intelectual de Newton à luz de seu contexto histórico e conceitual, evidenciando como a matematização da natureza se configura como princípio organizador de seu pensamento científico. Busca-se compreender de que maneira sua formação, seus métodos e os debates de seu tempo contribuíram para a formulação de uma nova linguagem para a ciência, uma linguagem em que rigor formal e descrição empírica se implicam mutuamente.

A relevância deste estudo reside em oferecer uma leitura integrada das contribuições newtonianas, articulando história da ciência, fundamentos matemáticos e implicações epistemológicas. Ao examinar o processo pelo qual a matemática passa de instrumento auxiliar a matriz de inteligibilidade do real, pretende-se iluminar não apenas a gênese da mecânica clássica, mas também a consolidação de um paradigma que continua a informar práticas científicas contemporâneas. Com isso, a análise propõe compreender Newton não como figura isolada, mas como agente de uma transformação mais ampla que redefiniu os modos de formular problemas e de produzir conhecimento sobre a natureza.

Formação histórica do pensamento newtoniano

A constituição do programa científico associado a Isaac Newton insere-se no contexto mais amplo da Revolução Científica europeia dos séculos XVI e XVII, período caracterizado pela reorganização dos fundamentos epistemológicos da investigação natural. Nesse cenário, a explicação dos fenômenos físicos passa gradualmente de modelos qualitativos de inspiração aristotélica para estruturas baseadas em mensuração, experimentação controlada e formalização matemática (Koyré, 2006; Westfall, 1980). Tal transição não representou apenas um acúmulo de descobertas empíricas, mas uma transformação profunda nos critérios de verdade científica e nos modos de construção do conhecimento.

Figura 1: Newton retratado por G. Kneller (1689)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

A Inglaterra do século XVII, ambiente intelectual no qual Newton foi formado, apresentava condições favoráveis ao desenvolvimento de uma nova filosofia natural. A consolidação de instituições científicas, como a *Royal Society*, estimulou práticas experimentais sistemáticas e a circulação de ideias matemáticas oriundas do continente europeu. Nesse contexto, a Universidade de Cambridge desempenhou papel decisivo ao permitir o contato simultâneo com a tradição escolástica tardia e com as inovações introduzidas pela mecânica galileana e pela geometria analítica cartesiana (Hall, 1992; Guicciardini, 2009; Henry, 1998).

A elaboração teórica de Newton pode ser compreendida como uma síntese criativa dessas influências. De um lado, a herança da matemática clássica forneceu o modelo de demonstração rigorosa e o ideal de certeza dedutiva; de outro, a física experimental moderna evidenciou a necessidade de instrumentos conceituais capazes de descrever variações contínuas de grandezas físicas. A resposta newtoniana consistiu em conceber a natureza como um sistema regido por leis universais expressáveis por relações matemáticas entre grandezas mensuráveis, deslocando o foco explicativo das essências qualitativas para as relações dinâmicas entre corpos (Cohen, 1980; Santos, 2023).

Essa reorganização intelectual alcança sua formulação madura na obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), na qual Newton estabelece os fundamentos da mecânica clássica por meio de definições operacionais, axiomas e proposições demonstradas matematicamente. O tratado não apenas apresenta resultados científicos, mas institui um modelo de cientificidade no qual a dedução matemática e a confirmação empírica operam de modo complementar (Barra, 1994; Assis, 2008). Conforme Cohen (1980), o *Principia* representa a consolidação de um novo padrão de explicação científica, no qual a matemática deixa de ser instrumento auxiliar e passa a constituir a própria estrutura da inteligibilidade natural.

Sob perspectiva histórica, o pensamento newtoniano não emerge como ruptura isolada, mas como reorganização de tradições científicas anteriores sob novas condições epistemológicas. Ao integrar geometria clássica, experimentação sistemática e reflexão metodológica, Newton contribuiu decisivamente para estabilizar o paradigma da matematização da natureza, que se tornaria fundamento duradouro da ciência moderna e referência para o desenvolvimento posterior da física e da matemática (Koyré, 2006; Westfall, 1980).

Fundamentos matemáticos: leis, métodos e formalização do movimento

A arquitetura conceitual da mecânica clássica funda-se em um conjunto de definições operacionais, axiomas dinâmicos e procedimentos matemáticos que permitem descrever a variação de grandezas físicas no tempo. No cerne dessa estrutura estão as três leis do movimento, a lei da gravitação universal e os métodos infinitesimais que viabilizam o tratamento rigoroso de quantidades variáveis. A formalização apresentada no *Principia* institui um modelo no qual a matemática não apenas organiza resultados empíricos, mas estabelece as condições de inteligibilidade dos próprios fenômenos (Newton, 1687; 2008; Cohen, 1980).

As leis do movimento constituem princípios gerais que relacionam força, massa e aceleração, oferecendo uma estrutura unificada para a análise de sistemas físicos.

Primeira Lei (Inércia):

Um corpo preserva seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, salvo quando forças externas resultantes atuam sobre ele. Em linguagem moderna, trata-se da conservação do estado cinemático na ausência de interação líquida.

Segunda Lei (Dinâmica):

A variação temporal do momento linear é proporcional à força resultante aplicada:

$$F = \frac{dp}{dt}, \text{ com } p = mv$$

Para massa constante, obtém-se a forma usual:

$$F = ma$$

Esse princípio introduz uma relação funcional entre grandezas mensuráveis e permite formular problemas de movimento como equações diferenciais.

Terceira Lei (Ação e Reação):

Para toda força exercida por um corpo sobre outro, há uma força de mesma intensidade e direção, porém de sentido oposto. O princípio assegura a conservação do momento linear em sistemas isolados.

Lei da gravitação universal:

A interação gravitacional é descrita por uma lei de alcance universal que relaciona massas e distância:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Aqui, G é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos e r é a distância entre seus centros. A formulação estabelece um vínculo matemático entre fenômenos terrestres e celestes, unificando a dinâmica sob um mesmo princípio quantitativo (Westfall, 1980).

Métodos infinitesimais e cálculo das variações

Para tratar grandezas que variam continuamente, Newton desenvolveu o método das fluxões, concepção que interpreta variáveis como quantidades fluentes e suas taxas de variação como fluxões. Em notação contemporânea, essas ideias correspondem ao cálculo diferencial e integral, cujo núcleo é o conceito de limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Esse formalismo permite deduzir trajetórias, velocidades e acelerações a partir de equações diferenciais, transformando problemas físicos em problemas matemáticos bem postos (Guicciardini, 2009).

Séries infinitas e o teorema binomial generalizado

No âmbito analítico, Newton investigou expansões em séries e generalizou o teorema binomial para expoentes racionais:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

válido para $|x| < 1$. Tais expansões fornecem aproximações eficazes para funções não polinomiais e ampliam o repertório de técnicas para resolver equações diferenciais e problemas de quadratura (Hall, 1992).

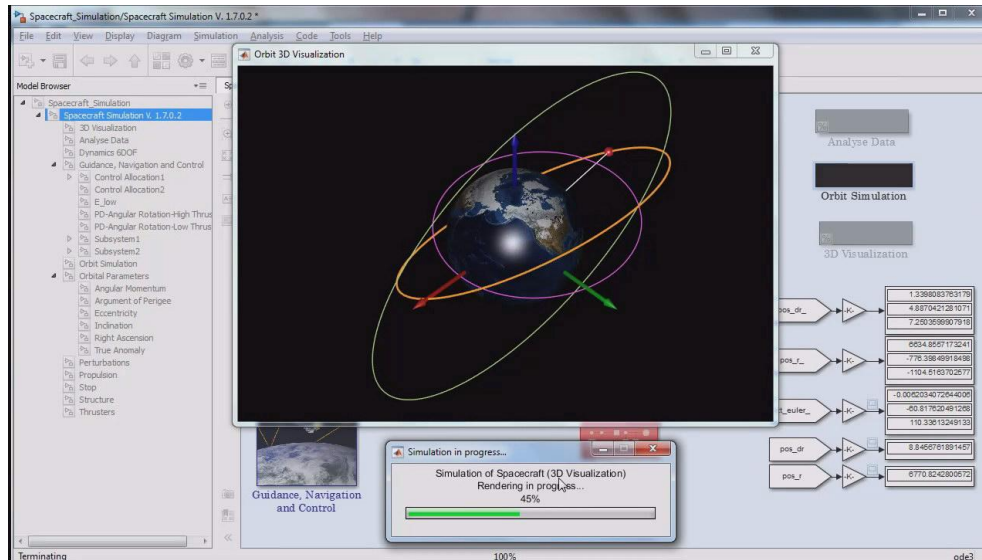
Estrutura axiomática e demonstração

A apresentação axiomática, definições, leis e proposições demonstradas, confere à mecânica um estatuto dedutivo análogo ao da geometria clássica. Resultados sobre órbitas, como a dedução das leis de Kepler a partir da gravitação e das leis do movimento, exemplificam o poder explicativo do método: proposições matemáticas geram previsões empíricas testáveis, articulando demonstração e observação em um mesmo quadro teórico (Cohen, 1980).

Aplicações, conexões e desdobramentos interdisciplinares

A matematização do movimento inaugurada por Newton ultrapassou o domínio da filosofia natural e tornou-se matriz de inteligibilidade para múltiplas áreas do conhecimento. A mecânica clássica forneceu instrumentos formais capazes de unificar fenômenos distintos sob leis gerais, permitindo previsões quantitativas e o desenvolvimento de tecnologias baseadas em modelagem matemática. Nesta seção, examinam-se três eixos de projeção do paradigma newtoniano: (i) aplicações na física e na engenharia, (ii) conexões com outros campos matemáticos e (iii) impactos científicos e tecnológicos de longo alcance.

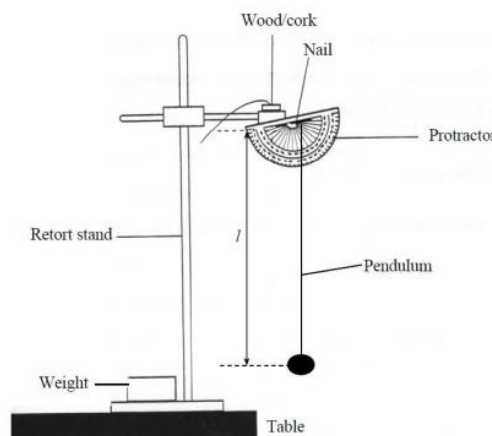
Figura 2: Física Celeste



Fonte: <https://mappingignorance.org/2021/03/24/homa-a-space-orbit-simulator/>

A unificação entre fenômenos terrestres e celestes constitui uma das aplicações mais emblemáticas da mecânica newtoniana. A dedução matemática das leis empíricas do movimento planetário formuladas por Kepler demonstrou que órbitas elípticas decorrem de interações regidas por uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância (Newton, 1687; 2008). Essa síntese inaugurou a mecânica celeste como disciplina rigorosamente dedutiva, capaz de prever trajetórias e perturbações orbitais com elevada precisão (Cohen, 1980).

Figura 3: Pêndulo - Universidade de Assosa

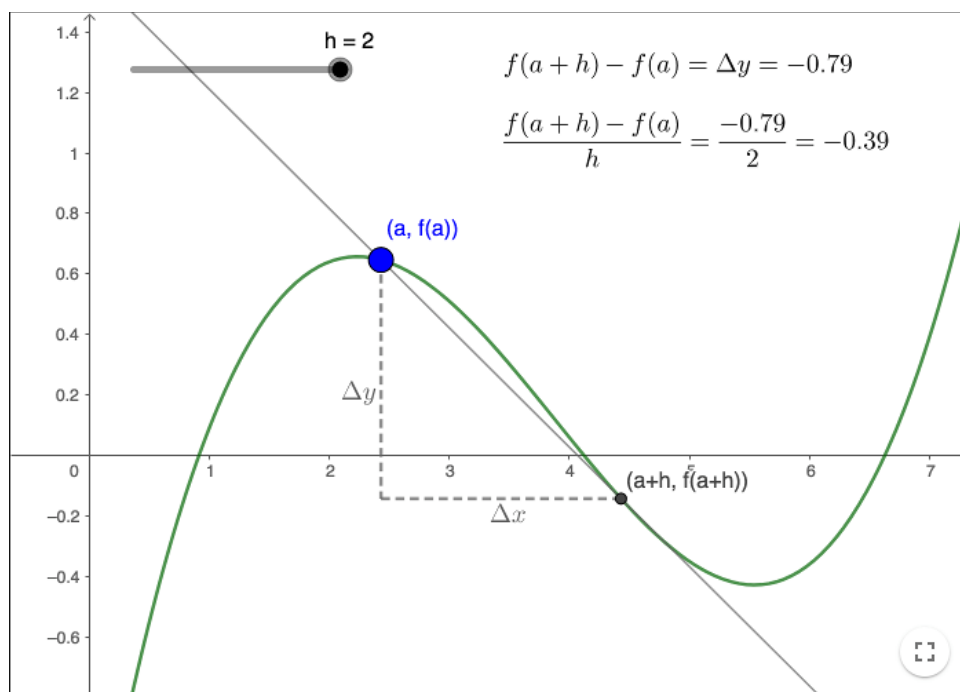


Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Experimental-setup-of-pendulum-Assosa-university-physics-department_fig2_386030995

No âmbito terrestre, os mesmos princípios sustentam a análise de sistemas mecânicos em engenharia. A determinação de esforços em estruturas, a estabilidade de pontes, o comportamento vibracional de máquinas e o projeto de mecanismos dependem de equações diferenciais derivadas das leis do movimento. A formalização matemática permite transformar problemas físicos em sistemas de equações cuja solução fornece previsões quantitativas verificáveis, fundamento metodológico da engenharia moderna (Timoshenko; Young, 1955).

O tratamento de grandezas variáveis implicou o desenvolvimento de ferramentas matemáticas que ultrapassaram o domínio da física. O cálculo diferencial e integral consolidou-se como linguagem universal para descrever variações contínuas, conectando geometria, análise e teoria das equações diferenciais (Guicciardini, 2009). A noção de derivada como taxa instantânea de variação e o conceito de integral como soma contínua estabeleceram uma ponte conceitual entre processos físicos e estruturas analíticas.

Figura 4: Derivada

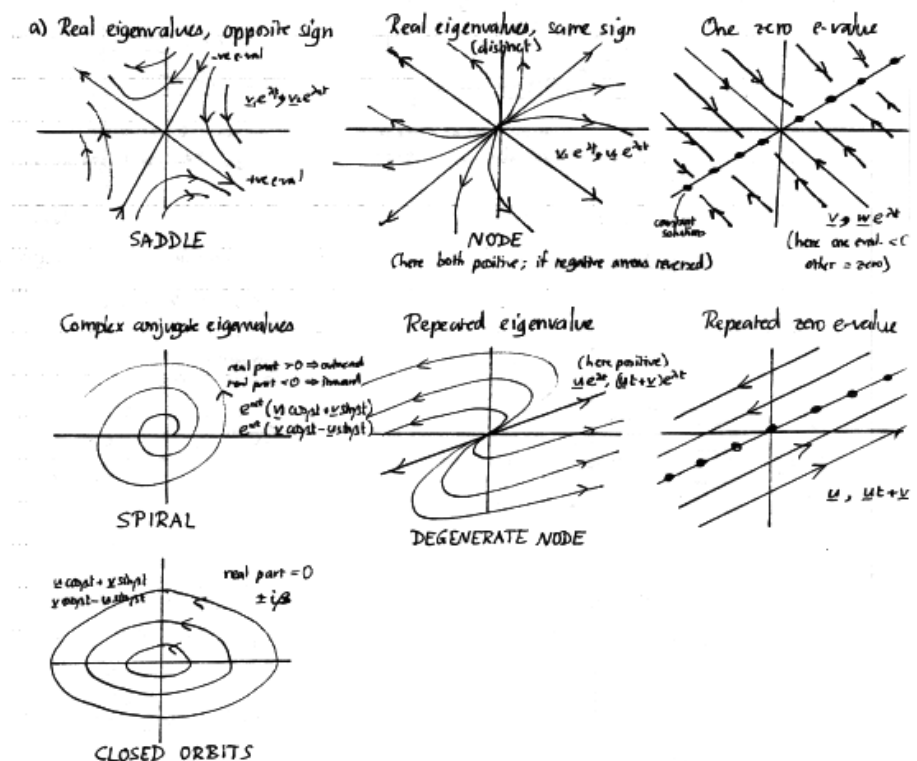


Fonte: <https://www.geogebra.org/>

As séries infinitas e os métodos de aproximação introduziram procedimentos fundamentais para a análise funcional e a matemática aplicada. A expansão de funções em séries de potências, a resolução aproximada de equações e a modelagem de sistemas

dinâmicos abriram caminho para o desenvolvimento posterior da análise matemática e da matemática computacional, evidenciando a fecundidade do paradigma newtoniano para além de sua motivação física original (Hall, 1992).

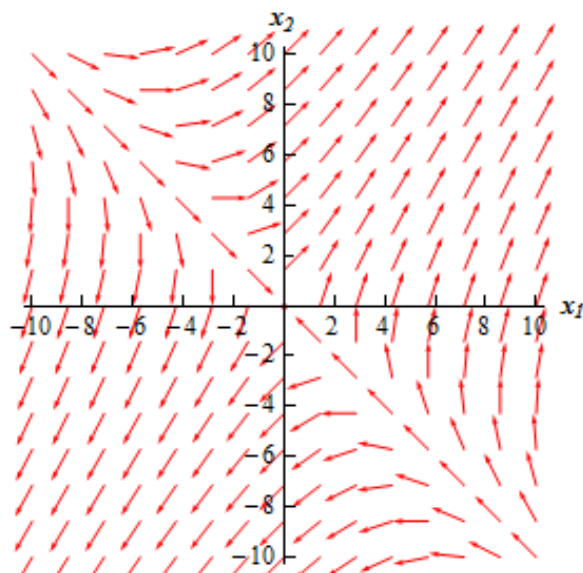
Figura 5: Equações Diferenciais Homogêneas com Coeficientes Constantes



Fonte: <https://www.mathstat.dal.ca/~selinger/courses/2000W-316/handouts/phaseplane.html>

A herança conceitual da mecânica clássica estende-se a campos científicos e tecnológicos que dependem de modelagem matemática precisa. A dinâmica de satélites artificiais, o planejamento de missões espaciais e os sistemas de navegação global baseiam-se em equações de movimento derivadas diretamente das leis newtonianas, frequentemente complementadas por correções relativísticas em regimes de alta precisão (Westfall, 1980).

Figura 6: Sistemas de Equações Diferenciais



Fonte: <https://tutorial.math.lamar.edu/>

Além da Física, o formalismo de sistemas dinâmicos influenciou áreas como química teórica, economia matemática e ciência da computação. Modelos de evolução temporal, estabilidade e equilíbrio, estruturados por equações diferenciais, constituem instrumentos analíticos transversais que refletem a persistência do ideal newtoniano de explicar processos naturais e artificiais por leis quantitativas gerais.

As aplicações e conexões do pensamento newtoniano evidenciam a transformação da matemática em linguagem privilegiada para a descrição e a previsão de fenômenos. Ao instituir um modelo em que compreender significa formalizar, a mecânica clássica tornou-se não apenas uma teoria física, mas um paradigma de racionalidade científica cujos efeitos permanecem estruturantes no conhecimento contemporâneo.

Aspectos Metodológicos

Este texto fundamenta-se em uma revisão narrativa da literatura, abordagem qualitativa orientada pela interpretação histórica e conceitual das contribuições de Isaac Newton e de seus comentadores. Diferentemente de revisões sistemáticas, que seguem protocolos rígidos de busca e seleção, a revisão narrativa permite integrar textos clássicos, estudos historiográficos e análises filosóficas, privilegiando a coerência interpretativa e a articulação entre contexto histórico, formulação matemática e impacto científico (Grant; Booth, 2009).

O *corpus* foi constituído por três conjuntos de fontes: 1) obras primárias: textos originais de Newton, com destaque para o tratado que sistematiza os fundamentos da mecânica clássica e apresenta a formalização matemática do movimento. Essas obras foram analisadas quanto à estrutura argumentativa, ao vocabulário técnico e às estratégias de demonstração; 2) estudos historiográficos e biográficos: pesquisas que examinam o desenvolvimento intelectual de Newton no contexto da Revolução Científica, abordando influências teóricas, debates metodológicos e a recepção de suas ideias; 3) literatura filosófica e matemática: trabalhos que investigam os fundamentos conceituais do cálculo, da mecânica e da matematização da natureza, permitindo compreender o alcance epistemológico do programa newtoniano.

A seleção considerou relevância acadêmica, reconhecimento na área de História e Filosofia da Ciência e pertinência temática para a análise da relação entre matemática e natureza.

Desenvolveu-se a análise em três etapas complementares: leitura contextual: exame das obras à luz do ambiente intelectual do século XVII, considerando debates metodológicos e transformações institucionais da ciência; reconstrução conceitual: identificação e sistematização de conceitos centrais, como lei natural, força, movimento e método matemático, enfatizando sua função explicativa; integração interpretativa: articulação entre dados históricos e estruturas matemáticas, buscando compreender a matematização da natureza como princípio organizador do pensamento científico moderno.

A revisão narrativa, ao privilegiar a síntese interpretativa, não pretende esgotar a totalidade da produção bibliográfica sobre Newton. Seu objetivo consiste em construir um quadro analítico coerente que evidencie a convergência entre história, matemática e epistemologia. Tal abordagem mostra-se adequada ao propósito deste capítulo, que busca compreender a obra newtoniana como fenômeno intelectual complexo, inserido em uma rede histórica e conceitual mais ampla.

Discussão

Evidencia-se que o projeto intelectual de Isaac Newton não se limita à formulação de resultados particulares, mas institui um modelo de explicação científica em que a inteligibilidade da natureza depende de sua expressabilidade matemática. A força desse

modelo reside na convergência entre três dimensões: (i) a universalidade das leis do movimento, (ii) a operacionalização de conceitos físicos por grandezas mensuráveis e (iii) a dedução de consequências empíricas a partir de princípios gerais. Tal convergência consolidou um padrão de cientificidade que passou a orientar a investigação em física, matemática e engenharia ao longo dos séculos subsequentes (Cohen, 1980; Westfall, 1980).

Do ponto de vista epistemológico, a obra *Principia* explicita uma forma peculiar de articulação entre experiência e demonstração. A observação fornece os fenômenos a serem explicados, enquanto a matemática estabelece a estrutura lógica que permite inferir leis e prever comportamentos. Essa relação não é hierárquica, mas complementar: a evidência empírica legitima os princípios, e a dedução matemática amplia seu alcance explicativo. Nesse sentido, a matematização da natureza não aparece como mera técnica descritiva, mas como condição de possibilidade da própria explicação científica moderna (Koyré, 1991).

A discussão historiográfica também revela que o êxito do programa newtoniano dependeu de sua capacidade de unificação conceitual. Ao submeter fenômenos celestes e terrestres às mesmas leis, a mecânica clássica dissolveu distinções tradicionais entre domínios naturais e instaurou uma visão de mundo regida por regularidades universais. Essa unificação, contudo, não elimina tensões filosóficas relevantes, como o estatuto ontológico da força e a natureza do espaço e do tempo. Tais questões motivaram debates posteriores na física e na filosofia natural, demonstrando que a obra newtoniana, além de resolver problemas, também redefiniu o horizonte das indagações científicas (Guicciardini, 2009).

Outro aspecto central diz respeito ao impacto metodológico duradouro da formalização matemática. A tradução de processos naturais em equações diferenciais instituiu um paradigma analítico que transcende a física, influenciando modelos em química, economia e ciências aplicadas. A matemática passa, assim, de linguagem auxiliar a matriz organizadora do conhecimento científico, papel que permanece estruturante mesmo diante de reformulações teóricas posteriores, como a física relativística e a mecânica quântica. Ainda que tais teorias tenham revisado pressupostos clássicos, mantiveram o ideal newtoniano de descrever a natureza por leis quantitativas gerais.

Sugere-se que compreender Newton implica situá-lo em uma rede histórica e conceitual ampla, marcada por continuidades e reinterpretações. Sua obra pode ser vista como ponto de inflexão em um processo coletivo de transformação do pensamento científico, no qual a matematização do mundo natural se estabelece como princípio regulador da investigação. A permanência desse paradigma atesta não apenas a fecundidade de suas formulações, mas também a força de um projeto intelectual que redefiniu a própria noção de explicação científica.

Considerações finais

Desenvolveu-se uma análise ao longo deste artigo que permite reconhecer que o legado de Newton ultrapassa a formulação de resultados específicos e se configura como uma transformação duradoura nos modos de produzir conhecimento científico. Ao instituir a matematização dos fenômenos naturais como princípio organizador da investigação, Newton consolidou um modelo de inteligibilidade no qual a natureza se torna compreensível por meio de relações formais entre grandezas mensuráveis. Nesse sentido, sua obra não apenas respondeu a problemas científicos de seu tempo, mas redefiniu os próprios critérios de explicação e demonstração na ciência moderna.

A reconstrução histórica evidenciou que tal transformação não se deu de forma isolada, mas no interior de um ambiente intelectual marcado por mudanças epistemológicas profundas. A articulação entre experimentação, rigor matemático e formulação de leis universais produziu uma síntese conceitual que permitiu unificar fenômenos diversos sob princípios gerais. Essa unificação constituiu o fundamento da mecânica clássica e estabeleceu um paradigma de racionalidade científica que permanece influente mesmo diante das reformulações teóricas introduzidas pela ciência contemporânea.

No plano matemático, o desenvolvimento de métodos para tratar variações contínuas e a formalização do movimento converteram a matemática em linguagem constitutiva da investigação natural. O cálculo, as séries infinitas e a estrutura axiomática da mecânica evidenciam que, no pensamento newtoniano, compreender a natureza significa expressar regularidades por meio de estruturas formais capazes de gerar previsões verificáveis. A matemática deixa, assim, de ser um instrumento auxiliar e passa a desempenhar função estruturante na produção do conhecimento científico.

As aplicações e desdobramentos interdisciplinares analisados demonstram a extensão e a vitalidade desse paradigma. A mecânica clássica forneceu não apenas explicações para fenômenos físicos, mas também um modelo metodológico que orienta práticas científicas e tecnológicas até o presente. A permanência de suas categorias conceituais, mesmo quando reformuladas ou ampliadas, atesta a fecundidade de um projeto intelectual que redefiniu a relação entre teoria e experiência.

Desse modo, conclui-se que a contribuição de Newton deve ser compreendida como um marco na história da ciência, não apenas por seus resultados específicos, mas pela reorganização conceitual que promoveu. Ao transformar a matemática em matriz de inteligibilidade do real, seu pensamento estabeleceu as bases de um modo de conhecer que continua a orientar a investigação científica contemporânea. A compreensão dessa herança revela que a ciência moderna não se constitui apenas como acúmulo de descobertas, mas como construção histórica de formas de pensar a natureza, formas nas quais a matemática ocupa lugar central e estruturante.

Referências

ASSIS, Emerson Ferreira de. **Axiomata Sive Leges Motus**: a mecânica racional newtoniana sob a ótica da metodologia dos programas de pesquisa científica. 2008. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

BARRA, Eduardo Salles de Oliveira. **Omnis philosophiae difficultas**: o conceito de força na filosofia natural de Newton. 1994. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

BERGAMO, Maurício Sérgio. **Da não mensuração à mensuração da natureza no ocidente no início da modernidade**. 2016. 164 f. Dissertação (Mestrado em Geografia) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Francisco Beltrão, 2016.

COHEN, I. Bernard. **The Newtonian Revolution**. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

DEUS MALTA, Alexandre de. **O Surgimento da Geometria Analítica no Século XVII**: o problema das relações entre descoberta científica, linguagem, autoridade, coletivo de pensamento e estilo de pensamento nas trajetórias intelectuais de Descartes e Fermat, tomando como base a epistemologia de Ludwik Fleck. São Paulo: Editora Dialética, 2022.

GRANT, Maria J.; BOOTH, Andrew. A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. **Health Information and Libraries Journal**, v. 26, n. 2, p. 91–108, 2009.

GUICCIARDINI, Niccolò. **Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method**. Cambridge, MA: MIT Press, 2009.

HALL, A. Rupert. **Isaac Newton: Adventurer in Thought**. Oxford: Blackwell, 1992.

HENRY, John. **A revolução científica**. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

KOYRÉ, Alexandre. **Do Mundo Fechado ao Universo Infinito**. 4 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2006.

LIMA VAZ, Henrique C. **Raízes da modernidade** - Escritos de filosofia VII. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

NEWTON, Isaac. **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**. London, 1687.

NEWTON, Isaac. **Principia: princípios matemáticos de filosofia natural**. São Paulo: Edusp, 2008.

SANTOS, Joel Gonçalves dos. **Um estudo hermenêutico sobre as demonstrações no movimento da matemática moderna**. 2023. Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. 2023.

TIMOSHENKO, Stephen; YOUNG, D. H. **Vibration Problems in Engineering**. **Princeton**: Van Nostrand, 1955.

WESTFALL, Richard S. **Never at Rest: A Biography of Isaac Newton**. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

CAPÍTULO II

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY: O RIGOR COMO LINGUAGEM DA ANÁLISE MODERNA

*Rildo Alves do Nascimento*⁶

*Ícaro Jael Mendonça Moura*⁷

*Daiane Fabrício dos Santos*⁸

*Carlos Daniel Chaves Mourão*⁹

*Francisco Cleuton de Araújo*¹⁰

DOI: 10.47538/AC-2026.39-02

Resumo

Augustin-Louis Cauchy foi um matemático cuja atuação foi decisiva para a consolidação do rigor na Matemática do século XIX. Inserido em um contexto marcado pelas transformações políticas e intelectuais do período pós-Revolução Francesa, Cauchy desenvolveu sua obra em meio a um cenário de reestruturação das instituições científicas e de redefinição dos fundamentos do conhecimento matemático. Nesse ambiente, sua produção representa um ponto de inflexão na forma de compreender, justificar e formalizar conceitos até então tratados de maneira intuitiva. A abordagem do capítulo articula distintos aspectos à análise de suas contribuições científicas, destacando o papel de Cauchy na transição entre uma Matemática fortemente apoiada em argumentos geométricos e uma Matemática orientada por definições precisas e demonstrações sistemáticas. A emergência de noções como limite, continuidade e convergência, bem como a formalização da análise matemática, são apresentadas como respostas a problemas conceituais herdados do cálculo infinitesimal dos séculos anteriores. Mais do que propor novos resultados, Cauchy reorganizou o próprio discurso matemático, estabelecendo critérios de validade que se tornariam normativos para a disciplina. Ao longo do capítulo, objetiva-se evidenciar como essa busca por rigor não se restringe a um aspecto técnico, mas reflete uma concepção particular de ciência, na qual clareza conceitual e coerência lógica assumem centralidade. Assim, a Matemática aparece não apenas como um campo em expansão, mas como um sistema que exige fundamentos sólidos, capazes de sustentar seu desenvolvimento futuro.

Palavras-chave: Augustin-Louis Cauchy; Rigor Matemático; Análise Matemática; Fundamentos do Cálculo.

⁶ Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

⁷ Universidade Estadual do Ceará (UECE). icaro.moura@uece.br.

⁸ Instituto Federal do Ceará (IFCE). daiane.fabricio03@aluno.ifce.edu.br.

⁹ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

¹⁰ Universidade Federal do Ceará (UFC). cleutonaraujo86@gmail.com.

Introdução

A história da Matemática revela momentos em que não apenas novos resultados são alcançados, mas o próprio modo de produzir conhecimento é transformado. O século XIX constitui um desses pontos de inflexão, marcado pela transição de uma prática matemática ainda apoiada em intuições geométricas e procedimentos heurísticos para uma ciência estruturada por definições rigorosas e demonstrações logicamente encadeadas. Nesse processo de redefinição dos fundamentos da análise matemática, destaca-se a atuação de Augustin-Louis Cauchy, cuja obra contribuiu decisivamente para a consolidação de critérios formais de validade e para a reorganização conceitual do cálculo infinitesimal (Roque, 2012; Silva *et al.*, 2025).

O surgimento dessa nova postura metodológica não ocorreu em um vazio intelectual. A Matemática herdara dos séculos XVII e XVIII um conjunto expressivo de resultados obtidos por Newton, Leibniz, Euler e Lagrange, mas também um legado de ambiguidades conceituais, sobretudo no tratamento dos infinitésimos, das séries infinitas e da noção de função (Santos, 2023; Correia, 1999). Paralelamente, o contexto pós-Revolução Francesa promoveu a reestruturação das instituições científicas e a valorização de um ideal de conhecimento pautado pela precisão, pela sistematicidade e pela universalidade. Nesse ambiente de reorganização epistemológica e institucional, emergiu a necessidade de fundamentar a análise matemática em bases conceituais inequívocas, capazes de sustentar seu desenvolvimento e de garantir a confiabilidade de seus resultados.

A problemática que orienta este estudo decorre justamente dessa tensão histórica entre intuição e rigor. Como se processa a passagem de uma matemática operacional, frequentemente eficaz, porém conceitualmente instável, para um sistema teórico dotado de definições precisas e critérios formais de demonstração? Em que medida a obra de Cauchy não apenas resolve problemas técnicos do cálculo, mas redefine o próprio discurso matemático, instituindo padrões que se tornariam normativos para a disciplina? A investigação dessas questões permite compreender o rigor não como mero refinamento metodológico, mas como transformação profunda na estrutura do pensamento matemático.

Diante desse panorama, o objetivo deste capítulo consiste em analisar o papel de Augustin-Louis Cauchy na constituição do rigor como linguagem estruturante da análise

moderna. Busca-se evidenciar como suas formulações relativas a limite, continuidade, convergência e séries infinitas respondem a dificuldades conceituais herdadas do cálculo clássico e inauguram um novo regime de justificação matemática. A abordagem proposta enfatiza não apenas os resultados obtidos, mas o modo como esses resultados se articulam a uma concepção específica de ciência, caracterizada pela centralidade da clareza conceitual e da coerência lógica.

A relevância deste estudo reside na compreensão de que os fundamentos estabelecidos por Cauchy transcendem o âmbito histórico e permanecem operantes na prática matemática contemporânea. A formalização da análise não apenas possibilitou o avanço de áreas como a teoria das funções, a análise funcional e a matemática aplicada, mas também contribuiu para a consolidação de um paradigma de rigor que orienta a produção científica até o presente. Assim, examinar a obra de Cauchy significa investigar a gênese de um princípio estruturante da Matemática moderna: a exigência de que o conhecimento matemático se sustente em definições precisas, demonstrações sistemáticas e coerência interna.

Fundamentos históricos do rigor na análise: a obra de Augustin-Louis Cauchy

A consolidação do rigor matemático no século XIX está profundamente associada ao contexto intelectual e institucional da França pós-revolucionária. As reformas educacionais promovidas após 1789 culminaram na criação de instituições como a *École Polytechnique*, concebida para formar engenheiros e cientistas capazes de sustentar o desenvolvimento técnico do Estado. Nesse ambiente, a Matemática passou a ser compreendida não apenas como instrumento aplicado, mas como sistema teórico que exige fundamentos seguros e universalmente comunicáveis (Belhoste, 2012; Matos *et al.*, 2026).

Inserido nesse cenário, Cauchy (1789-1857) desenvolveu uma produção científica que redefiniu os padrões de argumentação matemática. Sua formação ocorreu sob a influência de uma tradição que incluía resultados extraordinários obtidos por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, seguidos pelas sistematizações analíticas de Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange. Contudo, embora esses autores tenham expandido significativamente o cálculo infinitesimal, muitos de seus métodos apoiavam-se em noções intuitivas de infinitésimos e em procedimentos operacionais cuja

justificativa lógica permanecia incompleta (Grattan-Guinness, 2000; Sílvia; Garcia, 2009).

Figura 1: Augustin-Louis Cauchy



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

A emergência de dificuldades conceituais, especialmente no estudo de séries infinitas, continuidade e comportamento de funções, tornou evidente a necessidade de redefinir os fundamentos da análise. Divergências em resultados obtidos por manipulações formais de séries e a ausência de critérios gerais de convergência revelaram fragilidades epistemológicas que comprometiam a consistência da disciplina. Foi nesse contexto que Cauchy propôs uma reorganização sistemática do cálculo, substituindo argumentos intuitivos por definições explícitas e demonstrações baseadas em propriedades quantitativas precisas (Boyer; Merzbach, 2019).

O marco inaugural dessa transformação encontra-se na obra *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, publicada em 1821. Nesse tratado, Cauchy introduziu definições formais de limite e continuidade fundamentadas em variações arbitrariamente pequenas das grandezas envolvidas. Ao redefinir o conceito de função contínua e

estabelecer critérios rigorosos para a convergência de séries, ele instituiu um modelo de exposição matemática no qual a demonstração assume papel central, subordinando a intuição à coerência lógica (Cauchy, 1821; Tavares de Campos, 2014).

A relevância histórica dessa proposta reside na mudança de estatuto da própria linguagem matemática. Antes frequentemente descrita por analogias geométricas ou argumentos físicos, a análise passa a ser formulada por meio de definições abstratas e propriedades deduzidas logicamente. Essa transformação não se restringe a resultados específicos, mas configura uma nova epistemologia da Matemática, na qual a validade de um enunciado depende de sua inserção em um sistema conceitual rigorosamente estruturado (Kline, 1990).

Além de sua atuação teórica, Cauchy exerceu influência institucional decisiva por meio de sua atividade docente e de sua participação em academias científicas. Suas lições na *École Polytechnique* difundiram uma nova forma de exposição matemática, marcada pela clareza conceitual e pela exigência de demonstrações completas. Esse modelo pedagógico contribuiu para a formação de uma geração de matemáticos que consolidaria o programa de fundamentação rigorosa da análise, posteriormente aprofundado por Karl Weierstrass e outros autores do século XIX (Grabiner, 2012; Vianna, 2010).

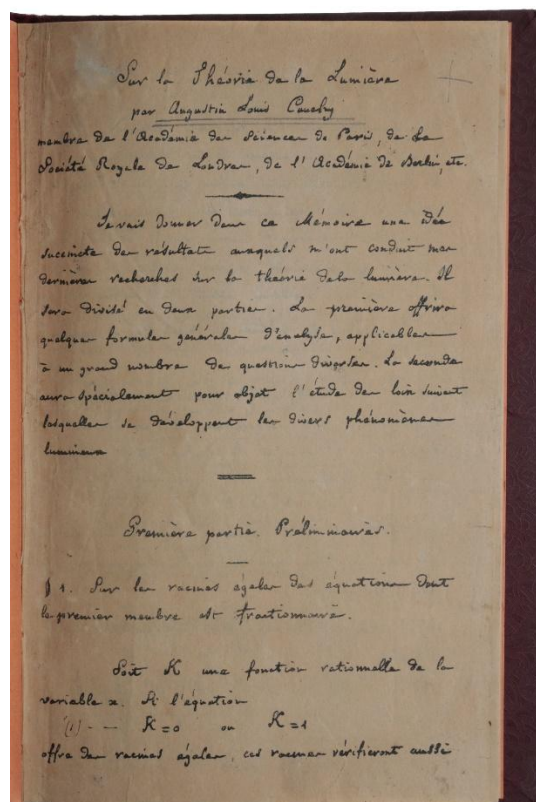
Assim, a contribuição histórica de Cauchy ultrapassa a introdução de resultados específicos e deve ser compreendida como reorganização estrutural da prática matemática. Sua obra representa a passagem de uma matemática orientada por procedimentos eficazes, porém conceitualmente flexíveis, para um sistema em que definições precisas e demonstrações rigorosas se tornam critérios normativos. Esse deslocamento estabelece as bases da análise moderna e inaugura um paradigma de cientificidade que permanece vigente na Matemática contemporânea.

Limite, continuidade e convergência na análise de Augustin-Louis Cauchy

A reorganização conceitual promovida por Cauchy fundamenta-se na formalização de noções centrais da análise matemática por meio de definições quantitativas precisas e critérios gerais de demonstração. Ao substituir a linguagem intuitiva dos infinitésimos por relações entre grandezas variáveis, sua abordagem inaugura um padrão de rigor que estrutura a análise moderna. Nesta seção, apresentam-

se os principais conceitos e resultados associados a essa reformulação, com ênfase em suas formulações originais e em sua interpretação contemporânea.

Figura 2: Manuscrito de Cauchy (litografia)



Fonte: <https://www.abebooks.co.uk>

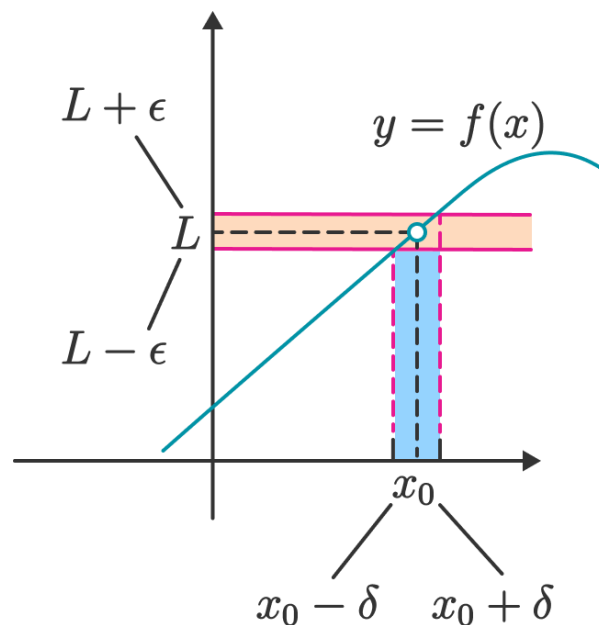
Cauchy introduziu uma concepção operacional de limite baseada no comportamento de uma variável quando suas variações se tornam arbitrariamente pequenas. Em formulação moderna, diz-se que uma função $f(x)$ admite limite L quando x tende a a se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Embora a notação $(\varepsilon - \delta)$ tenha sido sistematizada posteriormente por Weierstrass, a essência conceitual dessa definição encontra-se nas formulações de Cauchy, nas quais o limite é descrito como o valor ao qual uma variável se aproxima indefinidamente (Cauchy, 1821).

Essa definição permite estabelecer propriedades fundamentais do cálculo, tais como a unicidade do limite e as regras operatórias para limites de somas, produtos e quocientes de funções convergentes. O conceito de limite passa, assim, a constituir o eixo lógico a partir do qual derivam as noções de continuidade, derivabilidade e integrabilidade (Grabiner, 2012; Rachidi; Freitas; Mongelli, 2020).

Figura 3: Interpretação geométrica da definição ϵ - δ de limite



Fonte: <https://brilliant.org/wiki/epsilon-delta-definition-of-a-limit/>

Com base na noção de limite, Cauchy formulou uma definição de continuidade que substitui interpretações geométricas por uma caracterização analítica. Uma função f é contínua em um ponto a quando variações infinitamente pequenas da variável independente produzem variações igualmente pequenas no valor da função. Em linguagem contemporânea:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Essa definição estabelece a continuidade como propriedade intrínseca da relação funcional, independente de representações gráficas ou interpretações físicas. A formalização desse conceito possibilitou demonstrar resultados estruturais da análise,

como o teorema do valor intermediário para funções contínuas em intervalos fechados (Boyer; Merzbach, 2019).

Um dos campos em que o rigor cauchyano se revela mais decisivo é o estudo das séries infinitas. Cauchy definiu a convergência de uma sequência a_n afirmando que ela converge para um valor L quando a diferença $a_n - L$ pode tornar-se menor do que qualquer quantidade previamente fixada, para índices suficientemente grandes. Em termos atuais:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

A partir dessa definição, formulou o critério de convergência de Cauchy, segundo o qual uma sequência é convergente se, e somente se, satisfaz a propriedade:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, n \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Esse resultado representa um marco conceitual, pois caracteriza a convergência sem referência explícita ao limite, enfatizando a coerência interna da sequência. O mesmo princípio foi estendido ao estudo de séries, fornecendo um critério geral de convergência que substituiu procedimentos formais anteriores (Cauchy, 1821; Kline, 1990; Schickling, 2019).

Entre os resultados que expressam a nova estrutura lógica da análise, destacam-se:

Teorema da convergência uniforme (forma cauchyana):

Se uma série de funções contínuas converge uniformemente em um intervalo, então sua soma é contínua nesse intervalo.

Teorema fundamental do cálculo (formulação analítica):

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

é derivável e satisfaz $F'(x) = f(x)$.

Embora esses resultados tenham sido posteriormente generalizados, sua formulação inicial dentro de um sistema de definições precisas constitui parte essencial do projeto de fundamentação rigorosa da análise (Grattan-Guinness, 2011).

A importância matemática dessas contribuições não reside apenas nos teoremas estabelecidos, mas no método que os sustenta. Ao subordinar resultados à clareza definicional e à demonstração dedutiva, Cauchy institui um modelo de cientificidade que transforma a análise em um sistema formalmente estruturado. A matemática deixa de ser um conjunto de técnicas eficazes para tornar-se um corpo teórico coerente, regido por critérios explícitos de validade (Grabiner, 2012; Vianna, 2009).

Essa reorganização conceitual fornece a base sobre a qual se desenvolverão, posteriormente, a teoria das funções reais, a análise complexa e a topologia, confirmando o papel estruturante das definições de limite, continuidade e convergência na matemática moderna.

Desdobramentos e Aplicações do Rigor Cauchyano

A formalização dos conceitos de limite, continuidade e convergência não apenas reorganizou a análise matemática, mas também forneceu um arcabouço conceitual que permeia múltiplos domínios científicos e tecnológicos. O rigor introduzido por Cauchy estabelece condições de validade que se tornaram estruturantes para a matemática moderna e para disciplinas que dependem de modelagem quantitativa precisa (Messias; Brandemberg; Moraes, 2023; Silva, 2019). Nesta seção, examinam-se os principais campos de aplicação e as conexões teóricas decorrentes dessa reformulação.

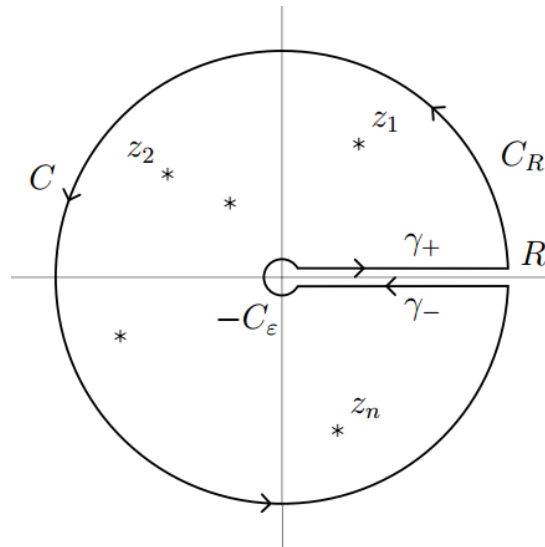
Um dos desdobramentos mais significativos da abordagem cauchyana ocorre na análise complexa. A introdução de critérios rigorosos para a convergência de séries e a formalização da continuidade permitiram o desenvolvimento sistemático da teoria das funções de variável complexa. Entre os resultados centrais associados a esse programa destacam-se o teorema integral de Cauchy e a fórmula integral de Cauchy, que estabelecem relações profundas entre diferenciação e integração no plano complexo (Silva, 2018; Santos, 2024).

A fórmula integral de Cauchy, em sua forma clássica, afirma que, para uma função holomorfa f definida em uma região contendo uma curva fechada simples γ e um ponto a interior a essa curva,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Esse resultado não apenas garante a existência de derivadas de todas as ordens para funções holomorfas, como também inaugura uma teoria estruturalmente distinta da análise real, na qual propriedades locais determinam comportamentos globais. A consistência lógica dessa teoria depende diretamente das definições rigorosas de limite e continuidade estabelecidas por Cauchy (Conway, 2012; Kline, 1990).

Figura 4: Integração de contorno no plano complexo



Fonte: <https://www.johndcook.com/blog/applied-complex-analysis/>

O critério de convergência de Cauchy para sequências desempenha papel fundamental na construção de espaços métricos completos, conceito que se tornaria central na análise funcional. A noção de sequência de Cauchy permite caracterizar espaços nos quais toda sequência fundamental converge, conduzindo à definição de completude, propriedade essencial em estruturas como espaços de Banach e espaços de Hilbert (Rudin, 1976).

Essas construções estabelecem conexões diretas com a topologia, área que investiga propriedades invariantes sob transformações contínuas. A formalização da continuidade como preservação de proximidade entre elementos constitui um dos pilares da topologia geral, evidenciando a influência estrutural do rigor analítico do século XIX na matemática abstrata do século XX (Munkres, 2000).

No domínio das ciências naturais, a formalização da análise tornou possível expressar leis físicas em linguagem matemática consistente. Equações diferenciais que modelam fenômenos como propagação de calor, dinâmica de fluidos e comportamento eletromagnético dependem de noções rigorosas de limite e convergência para garantir existência e unicidade de soluções.

Na mecânica clássica e na teoria de campos, a definição precisa de derivada como limite de quocientes incrementais permite descrever variações contínuas de grandezas físicas. Analogamente, a teoria de séries converge para a representação de soluções de equações diferenciais por expansões funcionais, amplamente utilizadas em métodos de aproximação numérica (Boyer; Merzbach, 2019).

Na engenharia e nas tecnologias computacionais, algoritmos de análise numérica baseiam-se em critérios de convergência derivados diretamente do programa de rigor analítico. Métodos iterativos para solução de sistemas lineares, aproximação de raízes e otimização dependem de garantias formais de estabilidade e convergência, cuja origem conceitual remonta à definição cauchyana de sequência convergente (Burden; Faires, 2011).

A influência do rigor cauchyano transcende resultados específicos e manifesta-se na própria estrutura do raciocínio científico moderno. A exigência de definições explícitas, hipóteses claramente formuladas e demonstrações logicamente consistentes tornou-se paradigma metodológico não apenas na matemática, mas em diversas áreas que buscam modelização formal de fenômenos complexos (Silva, 2018; Sousa, 2014; Da Silva Reis, 2001).

Nesse sentido, a contribuição de Cauchy pode ser compreendida como transformação epistemológica: a Matemática passa a oferecer um modelo de conhecimento caracterizado por coerência interna e verificabilidade lógica, estabelecendo padrões de precisão que influenciam a física teórica, a ciência da computação e a engenharia contemporânea (Grattan-Guinness, 2011).

Caminhos da investigação: uma abordagem histórico-conceitual

A presente investigação adota como procedimento metodológico a revisão da literatura, estratégia qualitativa que permite integrar contribuições históricas, conceituais e técnicas relativas à constituição do rigor na análise matemática e ao papel de Cauchy nesse processo. Diferentemente de revisões sistemáticas orientadas por protocolos estatísticos de seleção e metanálise, a revisão narrativa privilegia a interpretação crítica e a articulação teórica de fontes relevantes, visando compreender a evolução de conceitos e a estruturação de tradições intelectuais (Rother, 2007).

O *corpus* documental foi constituído por obras clássicas de história da matemática, estudos historiográficos especializados e textos originais do século XIX relacionados à formalização da análise. A seleção das fontes considerou três critérios principais: relevância histórica, privilegiando documentos que tratam da emergência do rigor matemático no contexto europeu do século XIX; consistência conceitual, incluindo trabalhos que analisam definições e métodos introduzidos na reformulação do cálculo; e reconhecimento acadêmico, priorizando publicações amplamente referenciadas na historiografia matemática.

Foram incluídos tratados originais, monografias históricas e manuais teóricos que discutem a evolução dos conceitos de limite, continuidade e convergência, bem como suas implicações epistemológicas.

A análise das fontes ocorreu em três etapas interdependentes. Inicialmente, realizou-se a leitura interpretativa dos textos com o objetivo de identificar a formulação original dos conceitos analíticos e o contexto de sua produção. Em seguida, procedeu-se à comparação entre interpretações historiográficas contemporâneas, buscando evidenciar convergências e divergências quanto ao significado do rigor na obra de Cauchy. Por fim, os elementos identificados foram articulados em uma síntese teórica orientada pelo problema de pesquisa, enfatizando relações entre desenvolvimento conceitual, prática matemática e concepção de ciência.

Essa abordagem permite compreender o rigor não apenas como conjunto de técnicas formais, mas como transformação histórica do discurso matemático. A revisão narrativa, nesse sentido, funciona como instrumento de reconstrução interpretativa, possibilitando examinar a constituição de um paradigma científico em sua dimensão histórica e epistemológica (Lakatos; Marconi, 2003).

A escolha da revisão narrativa fundamenta-se na natureza do objeto investigado. O estudo do rigor matemático envolve processos históricos, mudanças conceituais e reconfigurações institucionais que não podem ser reduzidos a dados quantitativos ou a critérios experimentais. Assim, a análise interpretativa de fontes teóricas revela-se mais adequada para compreender a complexidade das transformações que conduziram à formalização da análise moderna.

Além disso, essa metodologia favorece a integração entre história da ciência e análise conceitual, permitindo examinar simultaneamente o desenvolvimento interno das ideias matemáticas e o contexto intelectual em que emergem. Desse modo, a investigação busca não apenas descrever contribuições específicas, mas compreender a reorganização estrutural do pensamento matemático que caracteriza o século XIX.

Entre a heurística e a demonstração: Cauchy como ponto de inflexão

Permite-se compreender, a partir da análise das fontes históricas e conceituais, que a centralidade do rigor na matemática do século XIX não decorre apenas de um refinamento técnico, mas de uma reconfiguração epistemológica mais ampla. A obra de Augustin-Louis Cauchy emerge como ponto de articulação entre duas tradições distintas: de um lado, a matemática operatória dos séculos XVII e XVIII, caracterizada por grande eficácia heurística; de outro, uma matemática fundada em definições explícitas e demonstrações sistemáticas. O deslocamento entre esses regimes não elimina a intuição, mas redefine seu papel, subordinando-a a critérios formais de validação (Grabiner, 2012).

Os resultados apresentados nas seções teóricas indicam que a formalização dos conceitos de limite, continuidade e convergência desempenha função estruturante na reorganização da análise. Ao introduzir critérios gerais para a convergência de sequências e séries, Cauchy estabelece condições de consistência interna que reduzem ambiguidades herdadas do cálculo infinitesimal clássico. Essa transformação não apenas resolve dificuldades específicas, como também institui um modelo de cientificidade baseado na dedução rigorosa e na transparência conceitual (Boyer; Merzbach, 2019).

Entretanto, a historiografia contemporânea tem enfatizado que o rigor cauchyano não coincide plenamente com a formalização posterior desenvolvida por Karl Weierstrass e pela aritmetização da análise. Embora Cauchy tenha introduzido definições quantitativas precisas, sua linguagem ainda conserva elementos associados à noção de

infinitamente pequeno, o que indica um estágio intermediário na consolidação do rigor moderno. Nesse sentido, sua contribuição pode ser interpretada como transição histórica entre práticas analíticas intuitivas e a formalização axiomática que caracterizaria a matemática do final do século XIX (Grattan-Guinness, 2011).

A discussão evidencia também a dimensão institucional e pedagógica dessa transformação. A sistematização da análise em manuais e cursos destinados à formação científica contribuiu para a difusão de novos padrões de argumentação. O rigor passa a ser não apenas exigência lógica, mas norma disciplinar que regula a produção e a comunicação do conhecimento matemático. Esse aspecto revela que a mudança não ocorre exclusivamente no plano conceitual, mas envolve práticas de ensino, publicação e validação científica (Belhoste, 2012).

A permanência das estruturas conceituais introduzidas no século XIX confirma o caráter fundacional dessa reorganização. A análise funcional, a teoria das funções complexas e a modelagem matemática em ciências aplicadas dependem de noções de convergência e continuidade cuja formulação remonta ao programa de rigor cauchyano. Assim, a herança de Cauchy não se limita à história da matemática, mas integra a própria infraestrutura teórica da ciência moderna (Kline, 1990).

Dessa perspectiva, o rigor revela-se simultaneamente instrumento metodológico e princípio epistemológico. Ele não apenas garante a validade de resultados específicos, mas define o modo pelo qual o conhecimento matemático se constitui e se legitima. A análise da obra de Cauchy, portanto, permite compreender a emergência de um paradigma científico em que clareza conceitual, coerência lógica e demonstrabilidade se tornam condições estruturais do saber matemático.

Últimos apontamentos

A trajetória científica de Augustin-Louis Cauchy evidencia que a consolidação do rigor na análise matemática constitui um processo de transformação estrutural do pensamento científico. Ao redefinir conceitos fundamentais por meio de critérios quantitativos precisos e demonstrações sistemáticas, sua obra não apenas solucionou dificuldades herdadas do cálculo infinitesimal, mas estabeleceu um modelo de validação do conhecimento que se tornaria normativo para a Matemática moderna.

A investigação realizada permitiu compreender que o rigor cauchyano não se reduz a um aprimoramento técnico, mas representa uma mudança epistemológica profunda. A passagem de uma matemática apoiada em intuições operatórias para um sistema fundado em definições explícitas e coerência lógica inaugura uma nova forma de racionalidade científica. Nesse sentido, a análise deixa de ser apenas um conjunto de métodos eficazes e passa a constituir um domínio teórico cuja legitimidade depende de sua estrutura interna.

As seções teóricas demonstraram que a formalização dos conceitos de limite, continuidade e convergência desempenha papel organizador na matemática contemporânea e sustenta desenvolvimentos posteriores em áreas como análise funcional, teoria das funções complexas e modelagem matemática aplicada. A permanência desses fundamentos confirma o alcance duradouro da reorganização conceitual promovida no século XIX.

A revisão narrativa da literatura evidenciou, por sua vez, que a emergência do rigor deve ser compreendida em articulação com transformações institucionais, pedagógicas e intelectuais do período. O estabelecimento de padrões de demonstração, a sistematização do ensino da análise e a redefinição do discurso matemático constituem dimensões complementares de um mesmo processo histórico. Assim, a contribuição de Cauchy revela-se simultaneamente científica e cultural, integrando a história das ideias e a história das instituições.

Conclui-se que o rigor, longe de representar mera exigência formal, constitui princípio estruturante da Matemática enquanto forma de conhecimento. A obra de Cauchy marca o momento em que a clareza conceitual e a coerência lógica passam a definir o horizonte de legitimidade da disciplina. Com isso, a análise matemática se consolida como linguagem capaz de sustentar, com precisão e consistência, a expansão contínua do saber científico.

Referências

- BELHOSTE, Bruno. **Augustin-Louis Cauchy: A Biography**. New York: Springer, 2012.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

CAUCHY, Augustin Louis Baron. **Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique**. Paris: Imprimerie Royale, 1821.

CONWAY, John B. **Functions of one complex variable II**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.

CORREIA, José Manuel Teixeira. **A Evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII**. 1999. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 1999.

DA SILVA REIS, Frederico. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores**. 2001. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

GRABINER, Judith V. **The origins of Cauchy's rigorous calculus**. New York: Courier Corporation, 2012.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. **The search for mathematical roots, 1870-1940: logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel**. 2011. Princeton: Princeton University Press.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1990.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MATOS, Jacinto da Silva Gomes *et al.* A vanguarda do rigor: uma visão panorâmica da tradição matemática francesa. **Revista Tópicos**, v. 4, n. 30, p. 1-20, 2026.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; BRANDEMBERG, João Cláudio; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de. Potencialidades de uma abordagem histórica do cálculo para o ensino dos conceitos de limite e continuidade de uma função. **Revista Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, v. 19, n. 33, p. e23042-e23042, 2023.

MUNKRES, James R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

RACHIDI, Mustapha; FREITAS, José Luiz Magalhães de; MONGELLI, Magda Cristina Junqueira Godinho. **Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações**. Campo Grande: Editora da UFMS, 2020.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. São Paulo: Companhia das Letras, 2012.

ROTHER, Edna Terezinha. Revisão sistemática X revisão narrativa. **Acta Paulista de Enfermagem**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. v-vi, 2007.

RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

SANTOS, Charles F. Análise complexa, séries de Fourier e translações de sequências: um convite aos espaços vetoriais de funções holomorfas. In: XI Bienal de Matemática da SBM., 2024, São Carlos. **Anais...** São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2024. Disponível em: https://sbm.org.br/xi-bienal/wp-content/uploads/sites/31/2024/07/XI_BM_MINICURSO_Charles_F_Santos.pdf. Acesso em: 6 jan. 2026.

SANTOS, Ronaldo Alberto Lima dos. **Newton versus Leibniz: uma luz sobre a controvérsia intelectual na descoberta do cálculo**. 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2023.

SILVA, Jarde Moisés Rodrigues *et al.* **Gigantes da matemática: história, teorias e o legado das mentes que moldaram a ciência**. v. 2. Natal: Editora Amplamente, 2025.

SILVA, Marcos Afonso da. **Análise complexa e aplicações**. 2018. 220 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2018.

SILVA, Rafael Siqueira. **Um estudo sobre o movimento lógico-histórico do conceito de continuidade**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019.

SÍLVIO, Rosa Lúcia Sverzut Baroni; GARCIA, César Otero. **Análise Matemática No Século XIX**. São Paulo: Clube de Autores, 2009.

SCHICKLING, Eduarda. **A Convergência de sequências e séries sob uma perspectiva histórica: de Zenão a Cauchy**. 2019. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2019.

SOUSA, Alana Cruz de. **Aspectos elementares e aplicações do cálculo com funções de variável complexa**. 2014. 50 f. TCC (Graduação) - Curso de Física, Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2014.

TAVARES DE CAMPOS, Maria Lúcia. **Discursos sobre continuidade de funções reais de variável real em ambiente virtual colaborativo: uma perspectiva da cognição corporificada**. 2014. 508 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-Graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN, 2014. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/bitstream/123456789/3488/1/MARIA%20L%C3%9ACIA%20TAVARES%20DE%20CAMPOS.pdf>. Acesso: 5 jan. 2026.

VIANNA, Rubem Nunes Galvarro. **Um estudo do cours d'analyse algébrique de Cauchy em face das demandas do ensino superior científico na École Polytechnique.** 2010. 116 f. Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de pós-graduação em Ensino da Matemática, Rio de Janeiro, 2010.

SIMETRIA E ESTRUTURA NA ÁLGEBRA DE ÉVARISTE GALOIS

Ewando José de Sousa¹¹

Rildo Alves do Nascimento¹²

Francisco Cleuton de Araújo¹³

Katywsse Alves de Carvalho¹⁴

Carlos Daniel Chaves Mourão¹⁵

DOI: 10.47538/AC-2026.39-03

Resumo

O terceiro capítulo dedica-se à trajetória breve e intensa de Évariste Galois, cuja obra redefiniu de maneira profunda a compreensão das estruturas algébricas no século XIX. Inserido em um contexto político instável e intelectualmente efervescente da França pós-napoleônica, Galois produziu uma matemática que rompia com tradições estabelecidas, deslocando o foco dos procedimentos de cálculo para as relações internas entre objetos matemáticos. Sua contribuição, embora pouco reconhecida em vida, inaugurou uma nova forma de pensar a álgebra. O texto articula os acontecimentos que marcaram a vida de Galois com a emergência de ideias que transformaram problemas clássicos, como a resolução de equações polinomiais, em questões de natureza estrutural. Ao substituir a busca por soluções explícitas pela análise das simetrias envolvidas, Galois introduziu conceitos que antecipam o pensamento abstrato característico da matemática moderna. Grupos, permutações e invariantes aparecem como elementos centrais de uma abordagem que transcende o problema original e amplia seu alcance conceitual. Assim, o objetivo é evidenciar como a matemática de Galois não se limita a resultados isolados, mas inaugura uma linguagem capaz de unificar diferentes domínios algébricos. Sua obra revela uma mudança de paradigma, na qual compreender as condições de possibilidade de um problema torna-se tão relevante quanto sua resolução. Desse modo, o capítulo propõe uma leitura que reconhece em Galois não apenas um talento precoce, mas um dos arquitetos de uma nova racionalidade matemática, cujos efeitos se estendem muito além de seu tempo.

Palavras-chave: Évariste Galois; Álgebra Moderna; Teoria dos Grupos; Estruturas Matemáticas.

¹¹ Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF). ewandojose@gmail.com.

¹² Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

¹³ Universidade Federal do Ceará (UFC). cleutonaraujo86@gmail.com.

¹⁴ MUST University. kakazinha067@hotmail.com.

¹⁵ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

Introdução

A história da álgebra no século XIX testemunha uma inflexão decisiva: a passagem de uma disciplina orientada por técnicas de resolução explícita para um campo preocupado com as estruturas internas que organizam os objetos matemáticos. Nesse cenário, a obra de Évariste Galois emerge como um marco teórico que reconfigura a compreensão das equações algébricas e inaugura uma linguagem fundada na noção de simetria (Costa, 2020). Produzidas em meio às tensões políticas e intelectuais da França pós-napoleônica, suas ideias deslocam o foco da manipulação operacional para a análise das relações entre soluções, antecipando o paradigma estrutural que viria a caracterizar a matemática moderna.

A temática da simetria algébrica, central na teoria de Galois, insere-se em um contexto mais amplo de busca por critérios gerais que determinem quando e como uma equação polinomial pode ser resolvida por radicais. Problemas clássicos herdados da tradição europeia, como a impossibilidade de soluções gerais para equações de grau superior ao quarto, suscitaram questionamentos que ultrapassavam os limites dos métodos conhecidos. Nesse ambiente intelectual, a contribuição de Galois consistiu em reinterpretar tais problemas sob uma perspectiva relacional, examinando as permutações das raízes e as estruturas que permanecem invariantes sob essas transformações (Pires, 2023; Boyer; Merzbach, 2019; Zaldívar, 1996).

A problematização que orienta este texto decorre justamente dessa mudança de enfoque: de que modo a introdução de estruturas algébricas associadas às simetrias de uma equação transforma a própria natureza do problema da resolução algébrica? E em que medida essa abordagem inaugura uma concepção de matemática na qual compreender as condições estruturais de existência de soluções se torna tão fundamental quanto obtê-las explicitamente? Tais questões conduzem à análise de uma matemática que não se limita a técnicas específicas, mas que propõe um novo modo de organizar o pensamento algébrico.

O objetivo consiste em examinar a emergência do pensamento estrutural na álgebra a partir da obra de Galois, evidenciando como a noção de grupo, as ideias de permutação e o estudo dos invariantes configuram um sistema conceitual capaz de unificar problemas aparentemente distintos. Busca-se, assim, interpretar sua contribuição

não apenas como resposta a desafios específicos da teoria das equações, mas como fundamento de uma racionalidade matemática orientada por relações e estruturas.

A relevância deste estudo reside no reconhecimento de que a teoria de Galois não apenas resolve questões clássicas, mas redefine os próprios critérios de inteligibilidade na matemática. Sua influência estende-se para além da álgebra, alcançando áreas como a teoria dos números, a geometria e, posteriormente, diversos campos das ciências e tecnologias. Compreender a gênese e o alcance dessas ideias permite iluminar o processo histórico de formação da matemática contemporânea e situar a obra de Galois como um dos pilares conceituais que sustentam o pensamento abstrato moderno.

Emergência histórica do pensamento estrutural na álgebra de Évariste Galois

A constituição da álgebra moderna está profundamente vinculada ao problema da resolução de equações polinomiais, cuja investigação atravessa séculos e atinge um ponto de inflexão no início do século XIX. A tradição inaugurada por matemáticos renascentistas, como Cardano e Ferrari, havia demonstrado a possibilidade de resolução por radicais para equações até o quarto grau. Entretanto, o fracasso persistente em generalizar tais métodos para graus superiores produziu uma tensão conceitual que exigia uma reformulação mais profunda da própria natureza do problema (Ribeiro; Cury, 2021; Pellejero, 2024; Garbi, 2009).

Figura 1: Évariste Galois



Fonte: <https://www.britannica.com/biography/Evariste-Galois>

É nesse horizonte que se insere a contribuição de Galois. Diferentemente de seus predecessores, sua abordagem não se orientava pela busca de expressões explícitas para as raízes, mas pela análise das relações entre elas. Essa mudança de perspectiva foi estimulada por desenvolvimentos anteriores decisivos, especialmente os trabalhos de Joseph-Louis Lagrange, que havia observado que as soluções de equações algébricas podiam ser estudadas por meio das permutações de suas raízes. Lagrange identificou que certas combinações algébricas permaneciam invariantes sob transformações específicas, antecipando, ainda que de forma embrionária, a ideia de estrutura subjacente às equações (Lagrange, 1771; Ribeiro; Cury, 2021; Magossi, 2020).

No contexto intelectual da França pós-napoleônica, marcado por instabilidade política e intensa renovação científica, Galois desenvolveu uma teoria que deslocava o centro da álgebra da operação para a relação. Sua concepção fundamental consistia em associar a cada equação um conjunto de permutações das raízes que preservam as relações algébricas entre elas. Esse conjunto, posteriormente denominado grupo de Galois, torna-se o objeto central de investigação, pois suas propriedades estruturais determinam a possibilidade de resolução por radicais (Bourbaki, 2007; Pellejero, 2024).

A originalidade dessa formulação reside no fato de que o problema da resolubilidade deixa de ser uma questão de cálculo e passa a ser uma questão de simetria. Ao investigar as transformações que preservam certas propriedades, Galois inaugura uma abordagem na qual a compreensão de um objeto matemático depende da análise das operações que podem ser realizadas sobre ele sem alterar sua natureza essencial (Ávila, 2006). Tal concepção antecipa o princípio estrutural que, no século XX, seria formalizado pela teoria dos grupos e pela álgebra abstrata.

Embora suas ideias tenham sido pouco compreendidas em vida, os manuscritos deixados por Galois foram posteriormente editados e divulgados por Joseph Liouville em 1846, tornando possível o reconhecimento de sua contribuição científica (Liouville, 1846; Boyer; Merzbach, 2019). A recepção tardia de sua obra não diminui seu impacto: ao estabelecer uma correspondência entre equações e estruturas de permutação, Galois transforma um problema específico da teoria algébrica em um princípio organizador de amplo alcance.

Historicamente, portanto, a teoria de Galois representa uma ruptura epistemológica. A álgebra deixa de ser apenas uma técnica de manipulação simbólica e

passa a constituir um estudo das estruturas e das simetrias que organizam os sistemas matemáticos (Panossian, 2014). Essa transformação não apenas redefine o campo algébrico, mas também estabelece fundamentos conceituais que influenciariam decisivamente a matemática moderna.

Fundamentos Matemáticos da Teoria de Galois: Grupos, Extensões e Critérios de Resolubilidade

A teoria de Galois estabelece uma ponte rigorosa entre duas estruturas fundamentais: corpos algébricos e grupos de permutações. Essa correspondência transforma o problema da resolução de equações polinomiais em uma questão sobre propriedades estruturais de grupos associados às raízes. O núcleo formal da teoria apoia-se em conceitos de extensão de corpos, automorfismos e invariância algébrica.

Extensões de Corpos e Automorfismos:

Seja K um corpo e $f(x) \in K[x]$ um polinômio. Um corpo de decomposição L de f sobre K é a menor extensão de K que contém todas as raízes de f . A relação $K \subseteq L$ constitui uma extensão de corpos.

Um automorfismo de L que fixa K é uma aplicação bijetiva

$$\sigma: L \rightarrow L$$

tal que:

1. $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$;
2. $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$;
3. $\sigma(k) = k$, para todo $k \in K$.

O conjunto de todos esses automorfismos forma um grupo sob composição, denominado grupo de Galois da extensão L/K :

Esse grupo codifica as simetrias algébricas das raízes do polinômio.

Teorema Fundamental da Teoria de Galois:

O resultado central da teoria estabelece uma correspondência entre subestruturas algébricas e subgrupos de simetria.

Se L/K é uma extensão finita, normal e separável, então existe uma correspondência biunívoca entre:

- i) subcorpos intermediários $K \subseteq E \subseteq L$;
- ii) subgrupos $H \leq \text{Gal}(L/K)$.

Essa correspondência é dada por:

$$E \leftrightarrow \text{Gal}(L/E), H \leftrightarrow L^H = \{x \in L \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\}$$

Além disso:

$$[L:E] = |\text{Gal}(L/E)|, [E:K] = [\text{Gal}(L/K):H]$$

Esse teorema estabelece que propriedades algébricas das extensões podem ser investigadas por meio da estrutura do grupo associado.

Resolubilidade por Radicais e Grupos Resolúveis:

Uma equação polinomial é resolúvel por radicais se suas raízes podem ser expressas a partir dos coeficientes por meio de operações algébricas e extração de raízes sucessivas.

A teoria de Galois fornece um critério estrutural preciso:

Teorema de Galois sobre Resolubilidade

Um polinômio é resolúvel por radicais se, e somente se, seu grupo de Galois é um grupo resolúvel.

Um grupo G é resolúvel quando existe uma cadeia de subgrupos normais:

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G,$$

tal que cada quociente G_{i+1}/G_i é abeliano.

Esse resultado explica por que equações gerais de grau cinco não admitem solução por radicais: o grupo simétrico S_5 , associado ao caso genérico, não é resolúvel.

Permutações e Invariantes

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são raízes de um polinômio, o grupo de Galois atua por permutações:

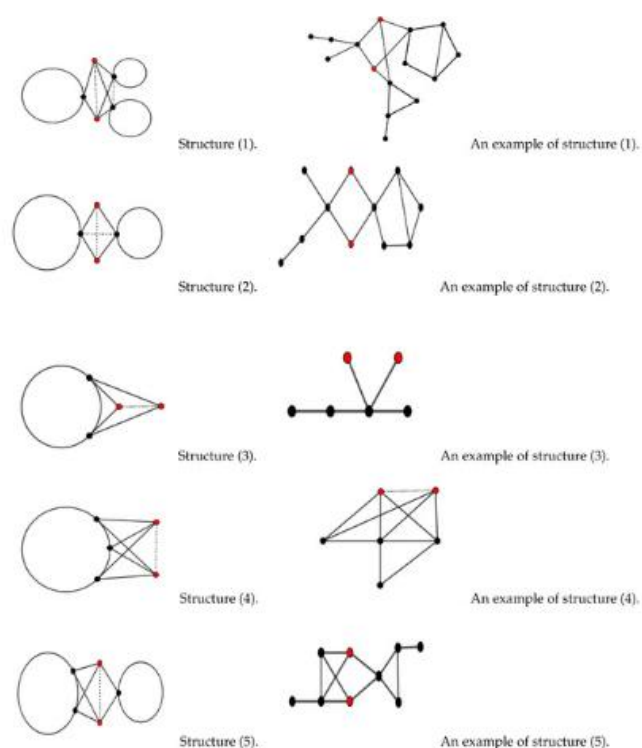
$$\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}.$$

Uma expressão algébrica $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é invariante sob um subgrupo H quando:

$$\sigma(P) = P, \forall \sigma \in H.$$

O estudo dessas quantidades invariantes permite identificar subcorpos intermediários e compreender a estrutura interna da extensão.

Figura 2: Ação de Permutações sobre as Raízes de um Polinômio



Fonte: <https://www.mdpi.com/2227-7390/11/13/2876>

Grau da Extensão e Ordem do Grupo

Se L/K é uma extensão de Galois finita, então:

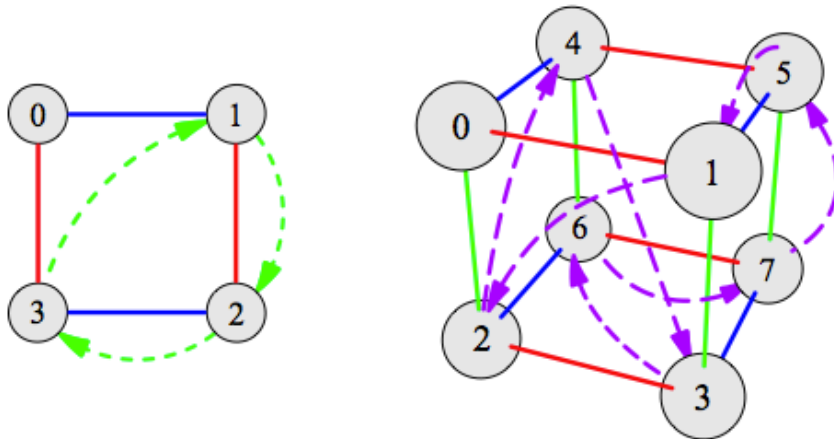
$$[L:K] = |Gal(L/K)|.$$

Essa igualdade revela a equivalência entre dimensão algébrica e complexidade das simetrias, constituindo um dos pilares conceituais da álgebra moderna.

Aplicações e conexões interdisciplinares da teoria de Galois

A teoria desenvolvida por Évariste Galois ultrapassa o âmbito original da resolução de equações polinomiais e consolida um paradigma estrutural que permeia diversos ramos da matemática e das ciências contemporâneas. Ao interpretar problemas em termos de simetrias e invariantes, a teoria fornece instrumentos conceituais capazes de unificar domínios aparentemente distintos por meio de correspondências formais entre estruturas.

Figura 3: Estrutura de Corpos Finitos e Aplicações em Criptografia



Fonte: <https://math.stackexchange.com/questions/508945/visualising-finite-fields>

Na teoria algébrica dos números, extensões de corpos e grupos de Galois desempenham papel central na compreensão das propriedades aritméticas de números algébricos. A decomposição de ideais primos em extensões finitas e o comportamento de corpos de números são descritos por meio de automorfismos que preservam estruturas aritméticas fundamentais (Ribeiro, 2025; Dos Santos, 2024).

A teoria de corpos de classes, por exemplo, estabelece correspondências entre extensões abelianas de corpos de números e certos grupos aritméticos associados,

generalizando o princípio de que propriedades numéricas profundas podem ser codificadas por estruturas de simetria. Esse enfoque estrutural foi decisivo para o desenvolvimento da teoria moderna dos números e para resultados de grande alcance, como a classificação de extensões abelianas de corpos globais (Neukirch, 2013).

A linguagem de grupos e invariantes introduzida pela teoria de Galois encontra paralelos profundos na geometria moderna. Em geometria algébrica, extensões de corpos de funções e seus grupos de automorfismos permitem estudar variedades algébricas por meio de suas simetrias internas. O conceito de cobertura ramificada, por exemplo, pode ser analisado com ferramentas análogas às extensões de Galois (Schmitz, 2022; Barreiros, 2005).

Na topologia algébrica, a noção de grupo fundamental apresenta afinidades estruturais com a ideia de grupo de Galois: ambos descrevem simetrias de objetos matemáticos sob transformações admissíveis. A correspondência entre coberturas topológicas e subgrupos do grupo fundamental reflete um princípio formal semelhante ao teorema fundamental da teoria de Galois, evidenciando uma convergência conceitual entre áreas distintas (Hatcher, 2002).

A influência da teoria de Galois foi decisiva para a formação da álgebra abstrata do século XX. O estudo sistemático de grupos, anéis e corpos consolidou uma abordagem axiomática na qual propriedades estruturais são investigadas independentemente da natureza específica dos objetos considerados (Panossian, 2014).

Essa orientação permitiu o desenvolvimento de teorias unificadoras, como a álgebra homológica e a teoria das representações, nas quais simetrias são estudadas por meio de ações lineares sobre espaços vetoriais. A ideia de que um objeto matemático pode ser compreendido por suas transformações admissíveis constitui um princípio organizador que se estende por toda a matemática contemporânea (Lang, 2002).

O alcance conceitual da teoria de Galois não se limita à matemática pura. Em criptografia moderna, estruturas algébricas de corpos finitos são fundamentais para sistemas de codificação e segurança digital. Protocolos criptográficos utilizam propriedades de extensões de corpos e operações algébricas em contextos computacionais, explorando a dificuldade de certos problemas estruturais como base de segurança (Washington, 2008).

Na teoria da informação e na codificação de sinais, campos finitos e polinômios irreduzíveis são empregados na construção de códigos corretores de erros, essenciais em telecomunicações e armazenamento digital. A análise de simetrias e invariantes permite projetar sistemas robustos capazes de detectar e corrigir perturbações em dados transmitidos (Araújo, 2019).

Além disso, a física teórica utiliza estruturas de grupo para descrever simetrias fundamentais da natureza, desde transformações espaciais até interações elementares. Embora não diretamente derivadas da teoria de Galois, essas aplicações compartilham o princípio estruturante de que leis e propriedades podem ser compreendidas por meio das transformações que as preservam (Silva, 2018).

A contribuição mais duradoura da teoria de Galois reside na consolidação de um paradigma segundo o qual problemas matemáticos são interpretados em termos de estruturas e simetrias. Essa perspectiva favorece a transferência de métodos entre áreas distintas e estabelece uma linguagem comum capaz de articular fenômenos diversos sob princípios formais compartilhados (Silva, 2025; Cordeiro, 2024).

Ao transformar um problema específico da teoria das equações em um modelo geral de investigação estrutural, a teoria de Galois inaugura uma racionalidade que continua a orientar o desenvolvimento da matemática e suas aplicações científicas.

Apontamentos metodológicos

Este trabalho adota como procedimento metodológico a revisão da literatura, com o objetivo de interpretar, articular e contextualizar contribuições teóricas relacionadas à emergência do pensamento estrutural na álgebra, particularmente no âmbito da obra de Galois. A revisão narrativa distingue-se por privilegiar a integração conceitual e histórica de diferentes fontes, permitindo uma compreensão interpretativa de processos intelectuais complexos, em vez de uma síntese quantitativa de resultados.

O levantamento bibliográfico concentrou-se em três eixos principais: fontes primárias históricas, incluindo escritos matemáticos e registros editoriais do século XIX, que permitem compreender a formulação original das ideias galoisianas e sua recepção inicial; tratados clássicos de álgebra e teoria de Galois, responsáveis pela sistematização formal da teoria e pela explicitação de seus fundamentos matemáticos; e estudos

históricos e epistemológicos da matemática, que analisam o impacto conceitual da teoria de Galois na formação da álgebra moderna e do pensamento estrutural.

A seleção das obras considerou critérios de relevância científica, reconhecimento acadêmico e contribuição direta para a compreensão histórica ou conceitual do tema.

A análise seguiu uma abordagem interpretativa baseada em três movimentos complementares: contextualização histórica, situando os textos em seus ambientes científicos e culturais; reconstrução conceitual, identificando a evolução das noções de simetria, grupo e invariância; e articulação interdisciplinar, examinando a expansão das ideias galoisianas para outros domínios matemáticos e científicos.

Os textos foram examinados comparativamente, buscando identificar continuidades, reformulações conceituais e mudanças de enfoque ao longo do desenvolvimento da teoria.

A escolha da revisão de literatura justifica-se pela natureza teórica e histórica do objeto investigado. A teoria de Galois não constitui apenas um conjunto de resultados formais, mas um processo de transformação conceitual que exige análise interpretativa das condições intelectuais que possibilitaram sua formulação e difusão.

Esse método permite integrar dimensões históricas, matemáticas e epistemológicas em uma estrutura explicativa unificada, favorecendo a compreensão da teoria não apenas como um sistema formal, mas como um marco na evolução do pensamento matemático.

Ruptura epistemológica e paradigma estrutural

A releitura histórica e conceitual da obra de Évariste Galois permite reconhecer que sua contribuição ultrapassa os limites de um avanço técnico circunscrito à teoria das equações algébricas. O que se delineia, com maior profundidade, é uma transformação nos próprios critérios de compreensão matemática. A centralidade anteriormente atribuída aos algoritmos de resolução cede lugar à investigação das estruturas subjacentes, nas quais a noção de relação se sobrepõe à de procedimento (Bourbaki, 1994; Van der Waerden, 1985).

Nesse sentido, a teoria de Galois instaura uma mudança epistemológica que pode ser descrita em dois níveis complementares. Por um lado, o foco desloca-se das soluções em si para o conjunto de transformações que as preservam, conferindo aos automorfismos

um papel explicativo central. Por outro, a ideia de simetria assume função organizadora, permitindo que diferentes problemas sejam reinterpretados sob uma linguagem comum. Tal perspectiva é amplamente reconhecida na formalização posterior da teoria dos grupos, onde estruturas abstratas passam a ser analisadas independentemente de suas representações concretas (Artin, 1942; Lang, 2002).

A correspondência entre extensões de corpos e grupos de automorfismos, formalizada no teorema fundamental da teoria de Galois, exemplifica um padrão metodológico que se consolidaria na matemática do século XX: o estudo de objetos por meio das relações estruturais que os conectam. Essa abordagem não apenas esclarece o problema da resolubilidade por radicais, mas também estabelece um modelo explicativo no qual propriedades globais emergem da organização interna das estruturas envolvidas (Stewart, 2015).

Do ponto de vista histórico, a recepção tardia das ideias galoisianas evidencia um descompasso frequente entre inovação conceitual e reconhecimento institucional. Como apontado por estudos historiográficos, a publicação póstuma de seus trabalhos por Liouville, em meados do século XIX, foi decisiva para a difusão de uma teoria cuja linguagem ultrapassava os padrões matemáticos vigentes à época (Bourbaki, 1994). Apenas com o amadurecimento da álgebra abstrata, especialmente no início do século XX, tornou-se possível compreender plenamente o alcance de sua proposta.

No plano interdisciplinar, a influência da teoria de Galois manifesta-se na difusão do conceito de simetria como ferramenta analítica em múltiplos campos. Na teoria dos números, na geometria algébrica e na criptografia, por exemplo, estruturas inspiradas na correspondência galoisiana desempenham papel fundamental na formulação de problemas e soluções (Neukirch, 1999; Washington, 2008). Esse fenômeno sugere que a contribuição de Galois não se limita a um domínio específico, mas constitui um núcleo metodológico capaz de irradiar princípios para diferentes áreas do conhecimento.

Entretanto, a expansão desse paradigma estrutural também levanta questões críticas. O aumento do nível de abstração, embora tenha possibilitado generalizações poderosas, pode afastar a matemática de suas motivações originais, tornando-a menos acessível e mais dependente de formalismos sofisticados. A teoria de Galois ilustra esse movimento: originada em um problema concreto, a resolução de equações, evolui para uma estrutura conceitual altamente abstrata, cuja compreensão exige um aparato teórico

elaborado. Esse tensionamento entre abstração e concretude permanece como tema relevante na reflexão contemporânea sobre a prática matemática (Lang, 2002).

A teoria de Galois não deve ser entendida apenas como solução de um problema clássico, mas como a inauguração de uma nova orientação intelectual. Sua importância reside na introdução de uma forma de pensar que privilegia estruturas e simetrias como elementos fundamentais de explicação. Ao fazê-lo, estabelece um paradigma duradouro que continua a moldar a matemática e suas aplicações.

Considerações finais

A trajetória intelectual de Évariste Galois revela que a inovação científica pode consistir menos na solução direta de problemas e mais na reformulação dos próprios termos em que eles são compreendidos. Ao deslocar o centro da álgebra da manipulação simbólica para a análise das relações entre objetos, a teoria de Galois instituiu um modo de investigação que privilegia estruturas, simetrias e invariantes como fundamentos explicativos.

O percurso desenvolvido neste capítulo permitiu evidenciar que a relevância da teoria não se restringe ao problema clássico da resolução de equações polinomiais. Sua contribuição mais profunda reside na introdução de um princípio organizador capaz de unificar domínios distintos sob uma mesma linguagem conceitual. A correspondência entre extensões de corpos e grupos de automorfismos estabelece um modelo de pensamento no qual compreender um sistema significa identificar as transformações que preservam suas propriedades essenciais.

A análise histórica mostrou que essa mudança de perspectiva emergiu em um contexto intelectual específico, mas adquiriu alcance duradouro ao influenciar decisivamente a formação da álgebra abstrata e o desenvolvimento da matemática contemporânea. A abordagem estrutural inaugurada por Galois tornou-se um eixo metodológico que atravessa a teoria dos números, a geometria, a topologia e diversas aplicações científicas e tecnológicas.

Do ponto de vista epistemológico, a teoria de Galois exemplifica uma transformação mais ampla na racionalidade matemática: o conhecimento passa a ser concebido como compreensão das condições de possibilidade de um fenômeno, e não apenas como determinação de resultados particulares. Essa orientação favorece a

generalização, a unificação e a transferência de métodos entre áreas distintas, consolidando uma visão da matemática como ciência das estruturas.

Assim, reconhecer o alcance da obra de Galois significa compreender o surgimento de um paradigma que redefiniu os critérios de explicação e organização do pensamento matemático. Sua contribuição permanece viva não apenas nos resultados que produziu, mas sobretudo na forma de inteligibilidade que instituiu, uma forma na qual a simetria se converte em princípio de conhecimento e a estrutura em fundamento da compreensão científica.

Referências

ARAÚJO, Hugo Bruno Santos. **Análise de desempenho de códigos corretores de erros em redes de sensores sem fio para aplicações em smart grid**. 2019. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica, Macapá.

ARTIN, Emil. **Galois Theory**. 2. ed. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1942.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

BARREIROS, Gabriela Alexandra da Cruz. **Grupos e extensões de Galois**. 2005. 91 f. Tese (doutorado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Mestrado em Ensino da Matemática, Departamento de Matemática Pura Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

BOURBAKI, Nicolas. **Éléments d'histoire des mathématiques**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2019.

CORDEIRO, Luciano Amorim. **Tópicos de matemática**. São Paulo: Editora Senac, 2024.

COSTA, Ueslei Ferreira. **Equações algébricas: do Papiro de Ahmes até Évariste Galois**. 2020. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2020.

DOS SANTOS, Marcos Paulo. **Teoria dos números**. São Paulo: Editora Senac, 2024.

DUMMIT, David S.; FOOTE, Richard M. **Abstract Algebra**. 3. ed. Hoboken: Wiley, 2004.

- GALOIS, Évariste. **Écrits et mémoires mathématiques**. Paris: Gauthier-Villars, 1962.
- GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- HUNGERFORD, Thomas W. **Algebra**. New York: Springer, 1974.
- MAGOSSI, José Carlos. O sonho de Lagrange. **Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 231, p. 23X, 2020.
- LAGRANGE, Joseph-Louis. **Réflexions sur la résolution algébrique des équations**. Berlin: Académie Royale des Sciences, 1771.
- LANG, Serge. **Algebra**. 3. ed. New York: Springer, 2002.
- LIOUVILLE, Joseph. Sur la théorie des équations numériques. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Paris, v. 11, p. 381-444, 1846.
- NEUKIRCH, Jürgen. **Algebraic Number Theory**. Berlin: Springer, 2013.
- PANOSSIAN, Maria Lúcia. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- PELLEJERO, Alan Uchoa. **Solubilidade de Equações Algébricas por Radicais**. 2024. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.
- PIRES, Felipe Quaresma. **Teoria de Galois: teorema fundamental e alguns exemplos**. Orientadora: Juliana Silva Canella. 2023. 123 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2023.
- RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2021.
- RIBEIRO, Willian. **Estruturas algébricas**. São Paulo: Editora Senac, 2025.
- ROTMAN, Joseph J. **An Introduction to the Theory of Groups**. 4. ed. New York: Springer, 1995.

SCHMITZ, Victor. **Um normal estudo sobre a teoria de Galois**. 2022. 141 f. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

SILVA, Ana Paula Costa e. **Introdução à teoria de grupos e aplicação no grafeno**. 2018. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física de Materiais) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018.

SILVA, Jarde Moisés Rodrigues *et al.* **Gigantes da matemática: história, teorias e o legado das mentes que moldaram a ciência**. v. 2. Natal: Editora Amplamente, 2025.

STEWART, Ian. **Galois Theory**. 4. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.

TIGNOL, Jean-Pierre. **Galois' Theory of Algebraic Equations**. Singapore: World Scientific, 2001.

VAN DER WAERDEN, B. L. **A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether**. Berlin: Springer, 1985.

WASHINGTON, Lawrence C. **Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2008.

WEIL, André. **Number Theory: An Approach through History**. Boston: Birkhäuser, 1984.

ZALDÍVAR, Felipe. **Teoría de Galois**. Barcelona: Anthropos Editorial, 1996.

O INFINITO TORNADO CONCEITO: GEORG CANTOR E OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

*Rildo Alves do Nascimento*¹⁶

*Carlos Daniel Chaves Mourão*¹⁷

*Luiz Edson Pinheiro Távora Neto*¹⁸

*Alessandro Rodrigues Rocha*¹⁹

*Juliana Alves dos Santos*²⁰

DOI: 10.47538/AC-2026.39-04

Resumo

Esse trabalho dedica-se à obra de Georg Cantor, responsável por uma das rupturas mais profundas na história da matemática ao introduzir uma nova compreensão do infinito. Em um contexto marcado pelo avanço da análise matemática e por intensos debates sobre seus fundamentos, Cantor propôs ideias que desafiaram concepções filosóficas e matemáticas consolidadas, deslocando o infinito do campo do indizível para o da investigação rigorosa. Sua atuação insere-se em um momento de crescente preocupação com a consistência lógica e a natureza dos objetos matemáticos. O capítulo articula elementos biográficos e históricos à apresentação de conceitos que emergem da teoria dos conjuntos, destacando como a noção de cardinalidade permitiu comparar conjuntos infinitos de maneira precisa. A distinção entre diferentes “tamanhos” de infinito, bem como a introdução dos números transfinitos, é apresentada como expressão de uma nova linguagem matemática, capaz de formalizar ideias até então tratadas apenas de forma intuitiva. Essas inovações, contudo, não se desenvolveram sem resistência, sendo acompanhadas por controvérsias intelectuais e profundas tensões pessoais. Objetiva-se, desse modo, mostrar que o impacto do pensamento cantoriano ultrapassa os limites da teoria dos conjuntos, influenciando decisivamente os rumos da lógica, da análise e da filosofia da matemática. O capítulo busca, assim, uma leitura que compreende Cantor como um pensador que redefiniu as fronteiras do matematicamente concebível, inaugurando questões que permanecem centrais para a compreensão dos fundamentos da matemática contemporânea.

Palavras-chave: Georg Cantor; Infinito; Teoria dos Conjuntos; Fundamentos da Matemática.

¹⁶ Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

¹⁷ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

¹⁸ Universidade Federal do Ceará (UFC). luizedson23@hotmail.com.

¹⁹ Universidade Cândido Mendes (UCAM). arrsandro@gmail.com.

²⁰ Universidade Federal de Rondonópolis (UFR). jujuliana001@hotmail.com.

Introdução

A matemática moderna consolidou-se por meio de sucessivas expansões conceituais que redefiniram aquilo que pode ser legitimamente pensado, demonstrado e formalizado. Entre essas transformações, poucas foram tão profundas quanto a reelaboração do conceito de infinito promovida por Georg Cantor no final do século XIX (Grattan-Guinness, 1990; González, 2025). Em um ambiente intelectual marcado pela consolidação da análise matemática, pela busca de rigor e pela emergência de debates sobre os fundamentos do conhecimento matemático, Cantor deslocou o infinito do domínio do meramente potencial, associado a processos sem término, para o campo do objeto matemático passível de investigação sistemática.

Historicamente, o infinito ocupava posição ambígua na tradição filosófica e científica. Desde a distinção aristotélica entre infinito potencial e infinito atual até as cautelas expressas por matemáticos do século XIX, prevalecia a ideia de que o infinito deveria ser tratado com prudência, como limite conceitual e não como entidade manipulável (Novaes, 2018). Nesse contexto, o desenvolvimento da análise, especialmente o estudo das séries e funções, expôs tensões internas relativas à natureza dos conjuntos de pontos e à estrutura do contínuo. Foi nesse terreno de incertezas conceituais que emergiu o programa cantoriano de investigação sistemática dos conjuntos infinitos, inaugurando uma nova linguagem matemática capaz de distinguir, comparar e classificar diferentes formas de infinitude.

A problematização central que orienta este capítulo reside na seguinte questão: de que modo a formalização do infinito, proposta por Cantor, transformou não apenas a teoria dos conjuntos, mas também os fundamentos epistemológicos da matemática? Tal questão implica examinar o duplo movimento que caracteriza sua obra: de um lado, a criação de instrumentos conceituais rigorosos, como cardinalidade e números transfinitos e, de outro, a redefinição do estatuto ontológico dos objetos matemáticos. A recepção dessas ideias foi marcada por intensos debates, incluindo resistências expressivas de contemporâneos como Leopold Kronecker, evidenciando que a emergência da teoria dos conjuntos não foi apenas um avanço técnico, mas uma transformação filosófica de largo alcance (Carvalho, 2025).

O objetivo deste estudo consiste em analisar a contribuição de Cantor para a constituição do infinito como conceito matemático rigoroso, articulando elementos

históricos, formais e epistemológicos. Busca-se compreender como a introdução da noção de cardinalidade possibilitou comparar conjuntos infinitos com precisão, como os números transfinitos ampliaram a aritmética clássica e como essas inovações influenciaram a lógica matemática, a análise e a filosofia da matemática. Ao situar a teoria cantoriana no contexto de debates sobre consistência, rigor e natureza dos objetos matemáticos, pretende-se evidenciar seu papel estruturante na formação do pensamento matemático contemporâneo.

A relevância desta investigação decorre do fato de que os fundamentos estabelecidos por Cantor continuam a sustentar áreas centrais da matemática e das ciências formais. A linguagem dos conjuntos tornou-se elemento estruturador de teorias modernas, ao passo que as questões por ele inauguradas, relativas ao contínuo, à hierarquia dos infinitos e à fundamentação lógica, permanecem vivas em pesquisas atuais. Assim, compreender o surgimento do infinito como conceito matemático não constitui apenas um exercício histórico, mas um passo essencial para interpretar a arquitetura conceitual da matemática contemporânea e suas implicações filosóficas mais amplas.

A emergência histórica da teoria dos conjuntos e a revolução cantoriana

A constituição da teoria dos conjuntos no final do século XIX representa uma inflexão decisiva na história da matemática, marcada pela transformação do infinito em objeto legítimo de investigação rigorosa. O protagonista desse processo foi Georg Cantor (1845-1918), cuja obra emergiu em um contexto intelectual caracterizado pela consolidação da análise matemática e pela crescente exigência de fundamentação lógica (Grattan-Guinness, 1990).

A gênese de suas ideias encontra-se em investigações sobre séries trigonométricas e conjuntos de pontos reais. Ao estudar as condições sob as quais uma função pode ser representada por uma série trigonométrica, Cantor deparou-se com questões relativas à estrutura dos conjuntos infinitos de números reais. Esse problema técnico conduziu, de modo progressivo, à formulação de uma nova disciplina matemática: a teoria dos conjuntos (Cantor, 1874).

Figura 1: Georg Cantor



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

A tradição matemática anterior havia tratado o infinito com cautela. Desde a distinção aristotélica entre infinito potencial e infinito atual, predominava a concepção de que o infinito não deveria ser considerado entidade completa, mas processo aberto. No século XIX, essa prudência ainda era compartilhada por diversos matemáticos. A ruptura proposta por Cantor consistiu precisamente na aceitação do infinito atual como objeto matemático plenamente determinado e suscetível de comparação quantitativa (Dauben, 1979).

Um marco decisivo dessa transformação foi a demonstração, publicada em 1874, de que o conjunto dos números reais não é enumerável, ao passo que o conjunto dos números naturais o é. Essa descoberta inaugurou a ideia de que existem diferentes “tamanhos” de infinito, conceito que rompeu com a tradição que concebia o infinito como unidade indiferenciada. A introdução da noção de cardinalidade permitiu estabelecer critérios rigorosos para comparar conjuntos infinitos por meio de correspondências biunívocas (Cantor, 1874).

A recepção dessas ideias foi marcada por forte controvérsia intelectual. Parte significativa da comunidade matemática reagiu com ceticismo diante da legitimidade ontológica dos números transfinitos. Entre os críticos mais influentes destacou-se Leopold Kronecker, defensor de uma concepção construtiva da matemática segundo a qual apenas os números inteiros possuíam existência plenamente justificada. A tensão entre a perspectiva construtivista e a abordagem abstrata de Cantor ilustra a dimensão filosófica do debate, que ultrapassava questões técnicas e alcançava o estatuto dos objetos matemáticos (Ferreirós, 2007; Carvalho, 2025).

Apesar das resistências iniciais, a teoria dos conjuntos gradualmente consolidou-se como linguagem estruturante da matemática moderna. A formalização dos conceitos de conjunto, elemento e correspondência abriu caminho para novas investigações sobre continuidade, estrutura e fundamentação lógica. No início do século XX, tais desenvolvimentos influenciaram decisivamente a emergência da lógica matemática contemporânea e os programas de fundamentação do conhecimento matemático, evidenciando que a revolução cantoriana não constituiu apenas um avanço técnico, mas uma reconfiguração profunda do horizonte conceitual da matemática (Hallett, 1984; Duarte, 2007).

A dimensão histórica da teoria dos conjuntos revela a transformação de um problema filosófico milenar em domínio matemático rigoroso. Ao conferir estatuto conceitual ao infinito, Cantor inaugurou uma nova etapa na compreensão da estrutura do pensamento matemático, cujos efeitos permanecem centrais na investigação contemporânea dos fundamentos da matemática.

Teoria cantoriana dos infinitos

A formalização do infinito como objeto matemático rigoroso alcança sua expressão mais precisa na teoria dos conjuntos desenvolvida por Georg Cantor. O núcleo dessa construção repousa sobre três ideias estruturantes: correspondência biunívoca, cardinalidade e números transfinitos. Tais noções permitiram estabelecer uma aritmética do infinito dotada de regras próprias, ampliando significativamente o alcance da matemática clássica.

A comparação entre conjuntos, finitos ou infinitos, é realizada por meio de correspondências um a um. Dois conjuntos A e B possuem a mesma cardinalidade quando existe uma função bijetora:

$$f: A \rightarrow B$$

tal que cada elemento de A corresponde a exatamente um elemento de B , e vice-versa.

Definição (Equivalência de conjuntos):

Diz-se que $A \sim B$ quando existe uma bijeção entre eles.

Essa definição permite afirmar, por exemplo, que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números pares possuem o mesmo tamanho infinito, pois a função

$$f(n) = 2n$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre ambos (Cantor, 1895).

Um dos resultados mais decisivos da teoria cantoriana consiste na distinção entre infinitos enumeráveis e não enumeráveis.

Definição (Enumerabilidade):

Um conjunto A é enumerável quando existe uma bijeção entre A e $\mathbb{N}$.

Cantor demonstrou que:

Teorema 1 — Enumerabilidade dos racionais

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável (Cantor, 1874).

Esse resultado revela que conjuntos densos na reta real podem, ainda assim, possuir o mesmo cardinal dos números naturais.

Em contraste, Cantor provou:

Teorema 2 — Não enumerabilidade dos reais

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável.

A demonstração clássica utiliza o argumento diagonal, que constrói um número real diferente de cada elemento de qualquer lista supostamente completa de reais, gerando contradição (Cantor, 1891).

Consequentemente, estabelece-se a existência de diferentes magnitudes de infinito:

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

Números Cardinais Transfinitos

Cantor introduziu símbolos específicos para designar os tamanhos de conjuntos infinitos.

- i) O cardinal do conjunto dos naturais é denotado por:

$$\aleph_0$$

- ii) O cardinal do contínuo (números reais) é denotado por:

$$c$$

Surge então uma hierarquia de infinitos:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Teorema 3 — Teorema do Conjunto das Partes

Para qualquer conjunto A , o conjunto das partes $P(A)$ possui cardinal estritamente maior que A :

$$|A| < |P(A)|$$

Esse resultado garante a existência de infinitos cada vez maiores, estabelecendo uma progressão ilimitada de cardinalidades (Cantor, 1891).

Números Ordinais Transfinitos

Além da medida de tamanho, Cantor formalizou a noção de ordem em sequências infinitas.

O primeiro ordinal transfinito é:

$$\omega$$

que representa a ordem dos números naturais. A aritmética ordinal possui propriedades distintas da aritmética usual, como:

$$1 + \omega = \omega \text{ mas } \omega + 1 > \omega$$

Esse comportamento evidencia que a ordem dos elementos influencia o resultado das operações em contextos infinitos (Hallett, 1984).

A Hipótese do Contínuo

Uma das questões mais profundas formuladas por Cantor é a seguinte:

Existe um conjunto cujo cardinal esteja estritamente entre $\aleph_0$ e c ?

Essa proposição, conhecida como Hipótese do Contínuo, pode ser expressa como:

$$c = \aleph_1$$

Posteriormente, demonstrou-se que essa hipótese é independente dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos, revelando limites intrínsecos da demonstração matemática formal (Gödel, 1940; Cohen, 1963).

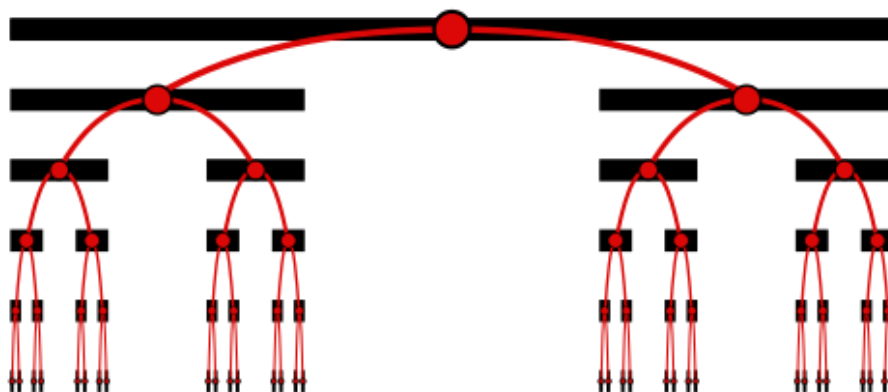
A formalização matemática do infinito realizada por Cantor produziu uma nova estrutura conceitual para a matemática. Ao introduzir critérios rigorosos de comparação entre conjuntos infinitos e estabelecer uma hierarquia transfinita, a teoria dos conjuntos forneceu instrumentos fundamentais para a lógica moderna, para a análise e para os programas de fundamentação da matemática.

Desdobramentos da teoria dos conjuntos nas ciências e na tecnologia

A teoria dos conjuntos, ao formalizar o infinito e instituir a linguagem das cardinalidades e ordinais transfinitos, ultrapassou o âmbito estritamente fundacional e tornou-se matriz conceitual para diversos ramos da matemática e das ciências formais. As ideias desenvolvidas por Georg Cantor permeiam, direta ou indiretamente, áreas que vão da topologia à computação teórica, da lógica matemática à física matemática, configurando um arcabouço comum para o tratamento de estruturas infinitas.

Na análise matemática, a noção de conjunto infinito estruturado tornou-se indispensável para a compreensão do contínuo. A topologia geral, por exemplo, fundamenta-se na ideia de conjuntos e de relações entre subconjuntos, como abertos, fechados e compactos. A caracterização moderna de continuidade, limite e convergência depende de conceitos que emergem diretamente da teoria dos conjuntos (Munkres, 2000).

Figura 2: Árvore binária infinitamente profunda



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

Um exemplo emblemático da fecundidade conceitual da abordagem cantoriana é o conjunto de Cantor, obtido pela remoção iterativa do terço médio de intervalos. Trata-se de um conjunto não enumerável, perfeito e totalmente desconexo, que desempenha papel central na análise real e na teoria das medidas. Sua existência revela que propriedades intuitivas do contínuo, como densidade e conectividade, não são equivalentes, contribuindo para a reformulação rigorosa da noção de dimensão e estrutura espacial (Kechris, 1995).

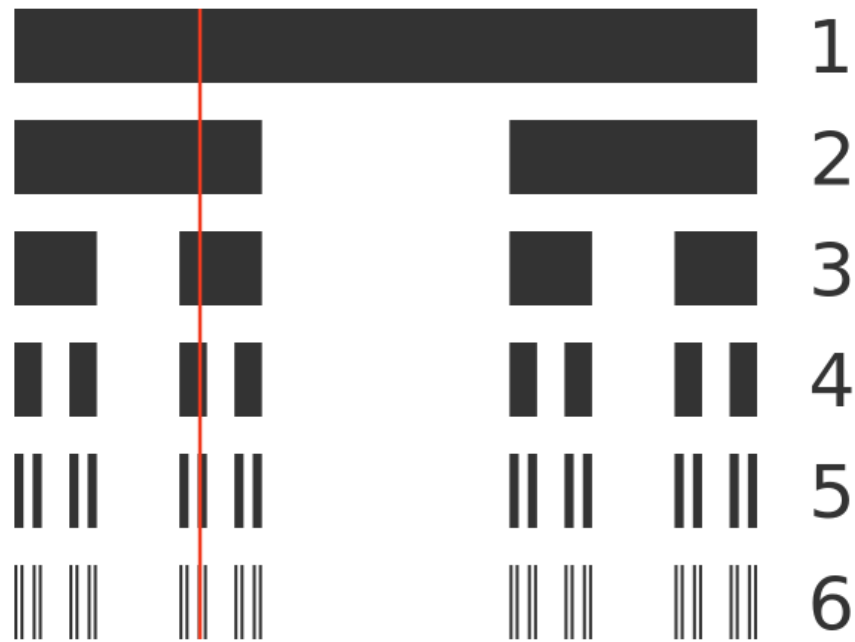
Além disso, a teoria da medida e a integração moderna, particularmente na formulação de Lebesgue, dependem da classificação de conjuntos infinitos e da comparação entre suas cardinalidades, evidenciando a influência estrutural do pensamento cantoriano na análise funcional e na teoria das probabilidades (Halmos, 1974).

O impacto da teoria dos conjuntos manifesta-se de maneira particularmente profunda na lógica matemática do século XX. Os programas de fundamentação da matemática, incluindo o formalismo e o logicismo, adotaram a linguagem dos conjuntos como base para a definição de objetos matemáticos e para a análise de sistemas formais.

Nesse contexto, destacam-se resultados relativos à completude, consistência e independência de axiomas. A demonstração da consistência relativa da Hipótese do Contínuo por Kurt Gödel e a prova de sua independência por Paul Cohen evidenciam limites intrínsecos da demonstração matemática, mostrando que determinadas proposições sobre o infinito não podem ser decididas a partir de axiomas usuais da teoria dos conjuntos (Gödel, 1940; Cohen, 2008).

A teoria da computação também herda elementos fundamentais da estrutura cantoriana. A distinção entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis fundamenta a separação entre problemas computáveis e não computáveis. O conceito de enumerabilidade, introduzido por Cantor, tornou-se instrumento central na formalização de algoritmos e linguagens formais, influenciando a teoria da recursividade e a definição de limites do cálculo efetivo (Davis, 1982; Cafezeiro; Da Costa; Kubrusly, 2016).

Figura 3: Pontos no conjunto Cantor



Fonte: <https://graphicmaths.com/fractals/fractals/cantor-set/>

No domínio das aplicações científicas, a teoria dos conjuntos fornece a base formal para modelos matemáticos que descrevem fenômenos contínuos e discretos. Em física matemática, o tratamento de espaços de estados, funções de onda e estruturas de fase depende da manipulação de conjuntos infinitos e de suas propriedades topológicas e métricas (Reed; Simon, 1980).

Na ciência da informação e nas tecnologias digitais, a linguagem conjuntista sustenta a estrutura lógica de bancos de dados, linguagens de programação e sistemas formais de verificação. A modelagem de tipos de dados, relações e estruturas discretas remete diretamente a noções de conjunto, função e correspondência, evidenciando a permanência do paradigma cantoriano no funcionamento da tecnologia contemporânea (Enderton, 1977; Brandão; Da Silva; Coutinho, 2025).

Adicionalmente, em áreas como inteligência artificial e teoria da informação, a análise de espaços de estados potencialmente infinitos exige instrumentos conceituais derivados da teoria dos conjuntos, especialmente no tratamento de hierarquias, classificações e processos iterativos.

A amplitude dessas aplicações demonstra que a teoria dos conjuntos não constitui apenas um capítulo da matemática pura, mas um fundamento transversal das ciências

formais e das tecnologias modernas. Ao transformar o infinito em objeto manipulável e comparável, Cantor instituiu uma linguagem capaz de descrever estruturas complexas com precisão inédita. Assim, a influência de sua obra manifesta-se tanto na investigação abstrata quanto na modelagem científica e tecnológica do mundo contemporâneo.

Percurso metodológico

A presente investigação adota como procedimento metodológico a revisão da literatura, escolhida por sua adequação à análise histórica, conceitual e epistemológica da obra de Georg Cantor e de seus desdobramentos na matemática moderna. Tal abordagem permite articular diferentes tradições interpretativas, integrar contribuições de naturezas distintas, históricas, técnicas e filosóficas, e construir uma leitura sintética e crítica do desenvolvimento da teoria dos conjuntos e do conceito de infinito (Prodanov; Freitas, 2013).

E caracteriza-se pela seleção intencional e analítica de fontes relevantes, sem a pretensão de exaustividade estatística, privilegiando a profundidade interpretativa e a coerência argumentativa (Prodanov; Freitas, 2013). Nesse sentido, o levantamento bibliográfico concentrou-se em obras clássicas e contemporâneas que tratam diretamente da produção cantoriana, de sua recepção histórica e de suas implicações teóricas. Foram incluídos textos originais de Cantor, estudos historiográficos especializados, manuais de teoria dos conjuntos, bem como trabalhos que abordam as consequências lógicas e filosóficas de suas ideias.

As fontes primárias compreendem artigos e tratados publicados por Cantor entre as décadas de 1870 e 1890, nos quais são introduzidos conceitos como enumerabilidade, cardinalidade e números transfinitos. Essas obras foram analisadas à luz de comentários críticos produzidos por historiadores da matemática e filósofos, permitindo contextualizar os resultados técnicos em seu ambiente intelectual e institucional. As fontes secundárias incluem estudos de referência sobre a história da teoria dos conjuntos, textos de lógica matemática e trabalhos que discutem aplicações contemporâneas do arcabouço cantoriano.

O processo de análise seguiu três eixos complementares. O primeiro, de natureza histórica, buscou situar a emergência da teoria dos conjuntos no contexto das transformações da matemática do século XIX. O segundo eixo concentrou-se na

exposição conceitual dos principais resultados matemáticos associados à obra de Cantor, respeitando o rigor formal sem perder de vista sua inteligibilidade. O terceiro eixo examinou os desdobramentos dessas ideias em outras áreas da matemática, das ciências e da tecnologia, evidenciando sua permanência e fecundidade.

A interpretação dos textos foi conduzida de forma crítica, evitando leituras anacrônicas e privilegiando a compreensão das categorias conceituais em seus próprios termos. Ao mesmo tempo, buscou-se estabelecer conexões com debates contemporâneos sobre os fundamentos da matemática, de modo a ressaltar a atualidade das questões inauguradas por Cantor.

Dessa forma, a metodologia adotada não se limita à compilação de resultados, mas visa à construção de uma narrativa analítica capaz de revelar a unidade interna do pensamento cantoriano e seu impacto duradouro.

Implicações epistemológicas e limites da formalização na teoria cantoriana

A análise histórica e conceitual desenvolvida nas seções anteriores evidencia que a teoria dos conjuntos não deve ser compreendida apenas como um novo domínio técnico da matemática, mas como uma reconfiguração profunda de seus fundamentos epistemológicos. A obra de Georg Cantor instaurou uma mudança de paradigma ao transformar o infinito em objeto matemático formalmente manipulável, deslocando a matemática de uma tradição predominantemente construtiva para uma estrutura conceitual mais abstrata e ontologicamente ampliada.

Um dos pontos centrais do debate reside na tensão entre rigor formal e aceitabilidade filosófica. A introdução dos números transfinitos e a hierarquia das cardinalidades suscitaram questionamentos acerca do estatuto ontológico dos objetos matemáticos. A resistência de correntes construtivistas, que defendiam a primazia de entidades finitamente geráveis, revela que a teoria dos conjuntos operou não apenas como avanço técnico, mas como desafio à própria natureza do conhecimento matemático. Nesse sentido, a controvérsia histórica não foi mero episódio de discordância metodológica, mas expressão de concepções divergentes sobre a existência matemática.

Outro aspecto relevante diz respeito às consequências lógicas do programa cantoriano. A formalização rigorosa dos conjuntos abriu caminho para investigações sobre consistência e completude dos sistemas formais, culminando em resultados que

redefiniram os limites da demonstração matemática. A demonstração da independência da Hipótese do Contínuo por Paul Cohen (1963; 2008), em continuidade aos resultados de consistência relativa estabelecidos por Kurt Gödel (1940), revelou que determinadas proposições sobre o infinito transcendem o poder decisório de sistemas axiomáticos amplamente aceitos. Esse cenário introduz uma dimensão metamatemática que altera profundamente a compreensão tradicional da verdade matemática, substituindo a expectativa de completude por um horizonte de pluralidade axiomática.

Do ponto de vista estrutural, a teoria dos conjuntos consolidou-se como linguagem unificadora da matemática. Sua capacidade de formalizar objetos diversos, números, funções, espaços e relações, permitiu a construção de um quadro conceitual comum para áreas antes tratadas de maneira fragmentada. Tal unificação, contudo, não ocorreu sem custos teóricos: paradoxos associados à noção ingênua de conjunto evidenciaram a necessidade de sistemas axiomáticos cuidadosamente delimitados, reforçando a centralidade do problema da fundamentação.

Além disso, a análise das aplicações contemporâneas (Munkres, 2000; Enderton, 1977; Reed; Simon, 1980) demonstra que a fecundidade do pensamento cantoriano ultrapassa o âmbito da matemática pura. A presença estrutural da linguagem dos conjuntos na lógica formal, na computação teórica e em modelos científicos sugere que a formalização do infinito constitui um dos pilares conceituais da ciência moderna. A teoria dos conjuntos, ao fornecer instrumentos para tratar estruturas ilimitadas com precisão, tornou-se componente essencial da modelagem abstrata que sustenta tanto a investigação científica quanto o desenvolvimento tecnológico.

Evidencia-se que o legado de Cantor não se limita aos resultados específicos que produziu, mas reside sobretudo na abertura de um novo horizonte conceitual. A matemática passou a reconhecer a existência de múltiplos níveis de infinitude, a conviver com limites internos à demonstração formal e a incorporar a reflexão filosófica como dimensão inseparável de seus fundamentos. Nesse sentido, a teoria dos conjuntos não apenas ampliou o conteúdo da matemática, mas transformou a maneira pela qual a disciplina compreende a si mesma.

Últimas considerações

A trajetória intelectual de Georg Cantor evidencia que a formalização do infinito constituiu uma das mais decisivas transformações conceituais da matemática moderna. Ao introduzir instrumentos rigorosos para comparar conjuntos infinitos e ao instituir a aritmética dos números transfinitos, Cantor deslocou o infinito do plano da especulação filosófica para o domínio da investigação matemática sistemática. Esse deslocamento não apenas ampliou o repertório técnico da disciplina, mas redefiniu o horizonte do matematicamente concebível.

Mostra-se que a emergência da teoria dos conjuntos ocorreu em um contexto de intensificação das exigências de rigor e de crescente preocupação com os fundamentos da análise. A dimensão matemática, por sua vez, revelou que conceitos como cardinalidade, enumerabilidade e hierarquia de infinitos produziram uma nova arquitetura teórica, capaz de organizar estruturas antes tratadas de modo intuitivo. As aplicações examinadas confirmam a abrangência dessa transformação, demonstrando que a linguagem conjuntista tornou-se fundamento transversal de áreas centrais da matemática, da lógica e das ciências formais.

A discussão dos desdobramentos epistemológicos permite compreender que o impacto da teoria cantoriana não se restringe a resultados específicos, mas reside na reformulação do próprio estatuto do conhecimento matemático. A coexistência de proposições independentes de sistemas axiomáticos consagrados, bem como a necessidade de explicitar pressupostos ontológicos, evidencia que a matemática contemporânea passou a reconhecer limites internos à formalização e à demonstração. Nesse cenário, a reflexão filosófica deixa de ocupar posição periférica e passa a integrar o núcleo da investigação fundacional.

Diante desse panorama, conclui-se que a contribuição de Cantor ultrapassa o campo da teoria dos conjuntos e insere-se na própria constituição da matemática como sistema de pensamento abstrato rigorosamente estruturado. Sua obra inaugurou um modo de compreender o infinito como objeto matemático legítimo, dotado de propriedades próprias e suscetível de tratamento formal. Ao fazê-lo, estabeleceu as bases conceituais sobre as quais se edificam amplos setores da matemática contemporânea.

Assim, o estudo do pensamento cantoriano não se limita à reconstrução histórica de uma teoria específica, mas oferece uma chave interpretativa para compreender a

evolução dos fundamentos da matemática. A permanência de suas questões, relativas à estrutura do contínuo, à hierarquia dos infinitos e aos limites da formalização, demonstra que a revolução conceitual iniciada por Cantor permanece aberta, constituindo ainda hoje um dos eixos centrais da reflexão matemática e filosófica.

Referências

BRANDÃO, Daniel Nicolau; DA SILVA, Gabriel Rodrigues; COUTINHO, Gilson Santos. A Teoria dos Conjuntos e sua aplicação na modelagem de bancos de dados relacionais: uma abordagem matemática e educacional. **Cadernos Cajuína**, v. 10, n. 6, p. e1434-e1434, 2025.

CAFEZEIRO, Isabel; DA COSTA, Leonardo Cruz; KUBRUSLY, Ricardo. Modos contemporâneos de aprendizado e construção do conhecimento: reflexões sobre o ensino de Teoria da Computação para Sistemas de Informação. In: **Workshop sobre Educação em Computação (WEI)**. SBC, 2016. p. 2245-2254. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/9668>. Acesso em: 02 fev. 2026.

CANTOR, Georg. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. **Mathematische Annalen**, v. 46, p. 481–512, 1895.

CANTOR, Georg. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 77, p. 258–262, 1874.

CARVALHO, Cinthia Rodrigues de. **Jogos de diagonalização**: uma abordagem para o estudo de sequências. 2025. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2025.

COHEN, Paul J. **Set theory and the continuum hypothesis**. New York: Courier Corporation, 2008.

COHEN, Paul J. The independence of the continuum hypothesis. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 50, n. 6, p. 1143–1148, 1963.

DAVIS, Martin. **Computability and Unsolvability**. New York: Dover, 1982.

DAUBEN, Joseph W. **Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite**. Princeton: Princeton University Press, 1979.

DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva. **Matemática e educação matemática**: a dinâmica de suas relações ao tempo do movimento da matemática moderna no Brasil. 2007. 438 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ENDERTON, Herbert B. **Elements of Set Theory**. New York: Academic Press, 1977.

FERREIRÓS, José. **Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics**. 2. ed. Basel: Birkhäuser, 2007.

GÖDEL, Kurt. **The consistency of the continuum hypothesis**. Princeton: Princeton University Press, 1940.

GONZÁLEZ, Fredy Enrique. **Aproximação fenomenológica às ideias de George Cantor sobre o infinito em matemática**. 2025. Relatório (Pós-Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2025.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. Hacia una biografía de Georg Cantor. **Mathesis**, v. 6, p. 1-44, 1990.

HALLETT, Michael. **Cantorian Set Theory and Limitation of Size**. Oxford: Clarendon Press, 1984.

HALMOS, Paul R. **Measure Theory**. New York: Springer, 1974.

KECHRIS, Alexander S. **Classical Descriptive Set Theory**. New York: Springer, 1995.

NOVAES, Karina Martins. **O infinito e sua constituição histórico-filosófica na ciência matemática**. 2018. 60 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.

MUNKRES, James R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas de Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

REED, Michael; SIMON, Barry. **Methods of Modern Mathematical Physics**. New York: Academic Press, 1980.

HENRI POINCARÉ: FORMA, DINÂMICA E INTUIÇÃO NO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Ewando José de Sousa²¹

Rildo Alves do Nascimento²²

Carlos Daniel Chaves Mourão²³

Francisco Cleuton de Araújo²⁴

Rodrigo Malan Loureiro Lima²⁵

DOI: 10.47538/AC-2026.39-05

Resumo

O presente artigo centra-se na figura de Henri Poincaré, intelectual cuja obra ocupa uma posição singular na transição entre a matemática clássica e as formas de pensamento que caracterizam a ciência do século XX. Atuando em um período de intensa especialização disciplinar, Poincaré destacou-se justamente por sua capacidade de atravessar fronteiras, articulando matemática, física e filosofia em um mesmo horizonte conceitual. Sua produção revela uma concepção dinâmica do conhecimento científico, na qual intuição, rigor e criatividade se entrelaçam. Os estudos em equações diferenciais, topologia e sistemas dinâmicos são apresentados como parte de uma investigação mais ampla sobre a estabilidade, o comportamento qualitativo das soluções e os limites da previsibilidade. Nesse contexto, Poincaré desloca o interesse do cálculo exato para a compreensão global das estruturas envolvidas, antecipando ideias que mais tarde se consolidariam na teoria do caos. Ao longo do texto, objetiva-se abordar como essa abordagem inaugura uma nova sensibilidade matemática, atenta às relações, às formas e aos padrões emergentes, mesmo quando a solução explícita se mostra inalcançável. O texto, assim, convida o leitor a reconhecer em Poincaré não apenas um matemático prolífico, mas um pensador que problematizou os próprios fundamentos da ciência, contribuindo para uma visão mais aberta, crítica e plural do fazer matemático.

Palavras-chave: Henri Poincaré; Sistemas Dinâmicos; Topologia; Pensamento Científico.

²¹ Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF). ewandojose@gmail.com.

²² Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

²³ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

²⁴ Universidade Federal do Ceará (UFC). cleutonaraujo86@gmail.com.

²⁵ Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB). rodrigomalana@hotmail.com.

Introdução

A virada do século XIX para o XX marcou uma inflexão profunda no modo de conceber a ciência e a matemática. Em meio à crescente especialização disciplinar e à consolidação de métodos formais rigorosos, emergiram vozes capazes de atravessar fronteiras conceituais e reconfigurar os próprios critérios de inteligibilidade científica (Pellicer, 2004). Nesse cenário, a obra de Henri Poincaré ocupa lugar singular ao articular, com rara coerência, investigações matemáticas de alta complexidade, reflexões epistemológicas e intuições físicas acerca do comportamento do mundo natural. Sua produção não apenas ampliou domínios específicos do conhecimento, como também reformulou a própria imagem do fazer científico, deslocando o foco da determinação exata para a compreensão estrutural dos fenômenos.

O desenvolvimento de estudos sobre equações diferenciais, estabilidade de sistemas e propriedades qualitativas das soluções introduziu uma sensibilidade matemática voltada às formas globais de comportamento, em contraste com a tradição centrada em soluções analíticas explícitas (Boyer; Merzbach, 2019). Tal deslocamento suscita uma problemática central: de que modo a matemática pode oferecer conhecimento significativo quando a solução precisa é inalcançável? A resposta proposta por Poincaré consiste em reconhecer a legitimidade científica da análise qualitativa, da intuição construtiva e da investigação das relações internas que organizam os sistemas dinâmicos. Nesse horizonte, previsibilidade, ordem e irregularidade deixam de ser categorias opostas e passam a compor um campo contínuo de investigação.

A presente pesquisa tem como objetivo examinar a contribuição de Poincaré para a constituição de uma concepção dinâmica do conhecimento matemático, na qual rigor formal e intuição criadora se articulam como dimensões complementares do pensamento científico. Busca-se evidenciar como suas formulações inauguram uma nova perspectiva sobre estabilidade, complexidade e estrutura, influenciando não apenas a matemática pura, mas também a física teórica e a reflexão filosófica sobre os fundamentos da ciência.

A relevância deste estudo reside na possibilidade de compreender a gênese de noções que se tornaram centrais para a ciência contemporânea, tais como sensibilidade às condições iniciais, comportamento global de sistemas e limites da previsibilidade. Ao investigar a obra de Poincaré sob uma perspectiva histórica, conceitual e interdisciplinar, pretende-se demonstrar que sua contribuição ultrapassa resultados técnicos específicos,

configurando uma transformação duradoura no modo de pensar a matemática e sua relação com a realidade. Assim, mais do que um capítulo da história da ciência, seu pensamento constitui um ponto de inflexão na compreensão moderna das formas, dos processos e das estruturas que organizam o conhecimento.

Contexto histórico e intelectual

A trajetória intelectual de Henri Poincaré insere-se em um período de transformação estrutural da matemática e das ciências naturais. A segunda metade do século XIX foi marcada pela consolidação do rigor formal, pelo desenvolvimento de novos ramos matemáticos e pela crescente especialização do conhecimento científico. Nesse ambiente, Poincaré destacou-se por uma produção que, embora profundamente técnica, manteve constante diálogo com problemas filosóficos e físicos, conferindo unidade a campos que tendiam à fragmentação disciplinar (Boyer; Merzbach, 2019; Vecchio Junior, 2005).

A formação matemática do período estava fortemente influenciada pelo legado do cálculo diferencial e integral, pelas teorias analíticas de funções e pelos avanços na mecânica clássica. Contudo, emergiam também tensões epistemológicas relacionadas ao estatuto da certeza matemática e ao papel da intuição no processo de descoberta científica. Enquanto correntes formalistas buscavam fundamentar a matemática em estruturas rigorosamente dedutivas, Poincaré defendia que a intuição desempenha função constitutiva na criação de conceitos e na orientação da investigação (Poincaré, 1902).

Cabe ressaltar que a formação matemática do período estava fortemente influenciada pelo legado do cálculo diferencial e integral, pelas teorias analíticas de funções e pelos avanços na mecânica clássica (Stillwell, 2010).

Sua contribuição inicial no estudo das equações diferenciais ocorreu no contexto da mecânica celeste, especialmente na análise do problema dos três corpos. A tentativa de compreender o comportamento de sistemas gravitacionais revelou limites fundamentais da previsão determinista. Em vez de buscar soluções exatas, Poincaré introduziu métodos qualitativos capazes de descrever o comportamento global das trajetórias no espaço de fases, inaugurando um novo modo de investigar sistemas dinâmicos (Barrow-Green, 1997).

Figura 1: Henri Poincaré



Fonte: <https://metode.es/revistas-metode/monograficos/la-conjectura-de-poincare.html>

A emergência da topologia constitui outro marco histórico associado à sua obra. Embora ideias sobre propriedades invariantes de figuras já estivessem presentes em trabalhos anteriores, foi Poincaré quem sistematizou o estudo das características globais dos espaços matemáticos. Em seu trabalho *Analysis Situs*, publicado em 1895, estabeleceu fundamentos conceituais para a topologia algébrica ao investigar propriedades que permanecem invariantes sob deformações contínuas (Poincaré, 1895). Essa perspectiva deslocou o foco da geometria tradicional, centrada em medidas e coordenadas, para a análise estrutural das formas.

No plano epistemológico, sua reflexão filosófica representou resposta crítica ao positivismo científico predominante. Poincaré argumentou que as leis científicas não constituem simples descrições da realidade, mas construções conceituais organizadas por convenções úteis à inteligibilidade dos fenômenos. Essa concepção, posteriormente denominada convencionalismo, atribui papel ativo ao sujeito cognoscente na estruturação do conhecimento científico (Poincaré, 1905; Vecchio Junior, 2005).

A originalidade histórica de sua obra reside, portanto, na convergência entre três dimensões fundamentais: a formalização matemática, a investigação de sistemas

complexos e a reflexão sobre os fundamentos do conhecimento científico. Tal convergência contribuiu para a transição da matemática clássica, orientada pela solução explícita e pela linearidade, para uma matemática atenta à estrutura global, à estabilidade e ao comportamento qualitativo dos sistemas (Vecchio Junior, 2005; Poincaré, 2023).

Essa transformação não ocorreu de modo isolado, mas integrou um movimento mais amplo de renovação científica que preparou o terreno para o surgimento da física moderna e das teorias da complexidade no século XX. Nesse sentido, Poincaré não apenas produziu resultados específicos, mas reformulou o horizonte epistemológico da matemática, ampliando suas possibilidades de aplicação e seu alcance interpretativo (Trindade, 1996).

Sistemas dinâmicos, topologia e estabilidade

A contribuição matemática de Henri Poincaré caracteriza-se pela formulação de métodos que privilegiam a análise estrutural dos sistemas em detrimento da obtenção de soluções explícitas. Tal orientação manifesta-se sobretudo na teoria qualitativa das equações diferenciais, na análise da estabilidade e na fundação da topologia algébrica.

Sistemas dinâmicos e equações diferenciais

Considere um sistema dinâmico contínuo descrito por uma equação diferencial ordinária autônoma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

onde f é uma função suficientemente regular. A abordagem clássica buscava soluções analíticas $x(t)$. Poincaré introduziu o estudo do comportamento global das trajetórias no espaço de fases, enfatizando propriedades invariantes sob a evolução temporal (Poincaré, 1881).

Um conceito central introduzido nesse contexto é o de órbita periódica. Se existe $T > 0$ tal que

$$x(t + T) = x(t),$$

a solução é periódica. O problema fundamental consiste em determinar a existência, estabilidade e estrutura dessas órbitas em sistemas não lineares.

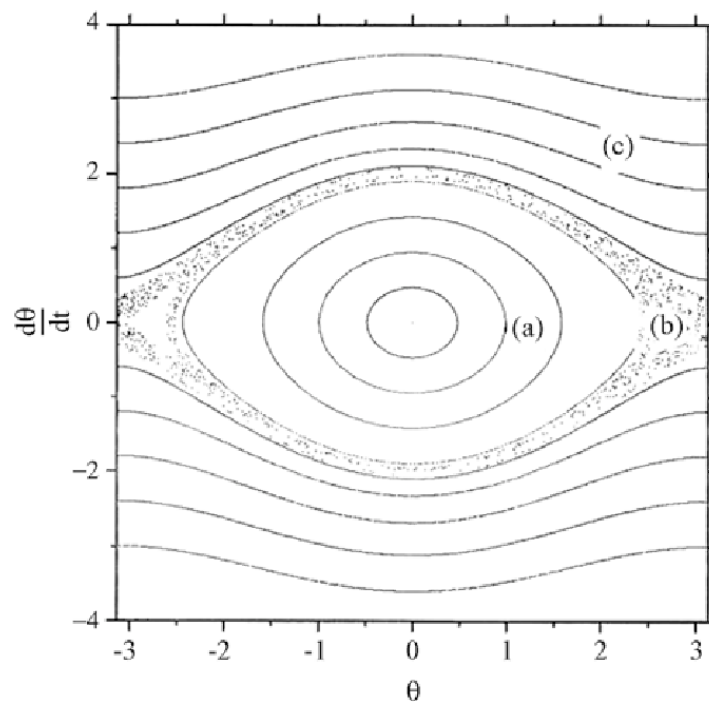
Seção de Poincaré e mapa de retorno

Para reduzir a complexidade do fluxo contínuo, Poincaré introduziu a noção de seção transversal e o correspondente mapa de retorno. Seja Σ uma superfície transversal ao fluxo do sistema. Define-se o operador de retorno:

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma,$$

que associa a cada ponto sua próxima interseção com Σ . A dinâmica contínua é, assim, convertida em um sistema discreto, preservando propriedades qualitativas essenciais (Poincaré, 1892).

Figura 2: Mapa de Poincaré



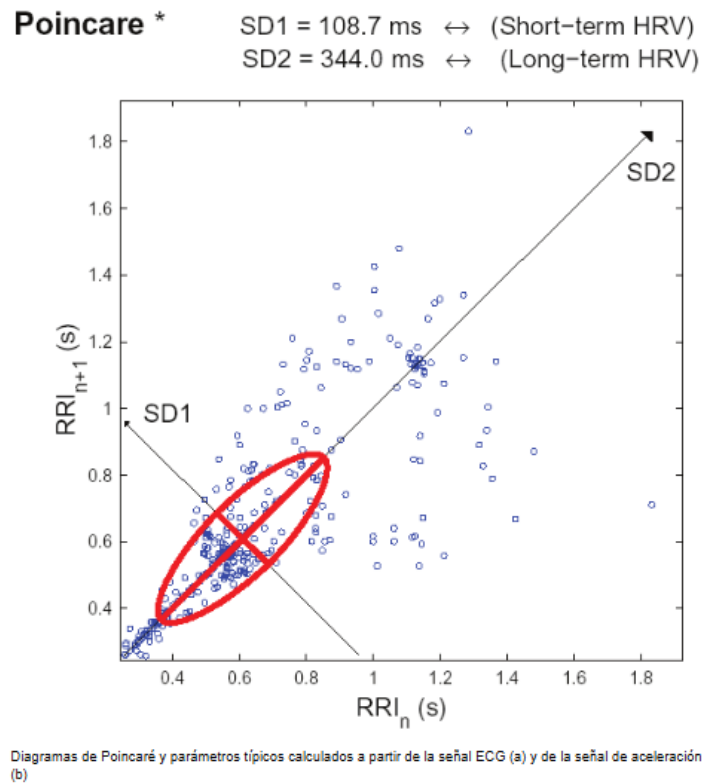
Fonte: <https://www.researchgate.net/profile/Jose-Rino-2>

A estabilidade de uma órbita periódica pode ser analisada pelos autovalores da derivada do mapa de retorno:

$$DP(x_0).$$

Se todos os autovalores satisfazem $|\lambda| < 1$, a órbita é assintoticamente estável.

Figura 3: Diagrama de Poincaré



Fonte: <https://www.researchgate.net/figure/Figura-95-Diagramas-de-Poincare>

No contexto de sistemas conservativos, Poincaré demonstrou um resultado fundamental sobre o comportamento a longo prazo das trajetórias.

Teorema (Recorrência de Poincaré):

Considere um sistema dinâmico que preserva o volume em um espaço de fases limitado. Então, para quase todo ponto inicial x , a trajetória retorna arbitrariamente próxima de sua posição inicial infinitas vezes.

Formalmente, dado $\varepsilon > 0$, existe $t > 0$ tal que:

$$\|x(t) - x(0)\| < \varepsilon.$$

Esse resultado estabelece limites intrínsecos à previsibilidade determinista, antecipando conceitos centrais da teoria ergódica e da dinâmica caótica (Poincaré, 1890).

Invariantes topológicos e características globais

No campo da topologia, Poincaré introduziu ferramentas para caracterizar propriedades globais de espaços geométricos. Um conceito fundamental é o de grupo fundamental, que descreve classes de caminhos fechados sob deformação contínua.

Seja X um espaço topológico $x_0 \in X$. O grupo fundamental é definido como:

$$\pi_1(X, x_0).$$

Esse objeto algébrico captura informações sobre conectividade e estrutura global do espaço (Poincaré, 1895).

A conjectura de Poincaré, que afirma que toda variedade tridimensional simplesmente conexa e fechada é homeomorfa à esfera tridimensional, tornou-se um dos problemas centrais da topologia do século XX, sendo resolvida apenas em 2003 por Grigori Perelman (Small, 2007).

Outro resultado central é a fórmula da característica de Euler-Poincaré para complexos celulares:

$$\chi = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k,$$

onde b_k são os números de Betti, representando dimensões de grupos de homologia. Essa relação estabelece um vínculo profundo entre topologia e álgebra.

Estabilidade estrutural e comportamento qualitativo

Poincaré introduziu a análise da estabilidade sem recorrer à solução explícita das equações. Um ponto de equilíbrio x_0 satisfaz:

$$f(x_0) = 0.$$

A estabilidade local pode ser investigada pela linearização:

$$\frac{d\xi}{dt} = Df(x_0)\xi.$$

O sinal das partes reais dos autovalores de $Df(x_0)$ determina o comportamento das trajetórias próximas (Hadamard, 1901; Arnold, 1992).

Essa abordagem estabelece o princípio metodológico que orienta grande parte da teoria moderna dos sistemas dinâmicos: compreender a geometria do fluxo antes de buscar soluções analíticas.

Aplicações, conexões interdisciplinares e projeções científicas

A obra de Henri Poincaré não se limita à formulação de estruturas abstratas; ela inaugura modos de análise que atravessam a matemática pura e alcançam campos diversos da ciência e da tecnologia. Seus métodos qualitativos para o estudo de equações diferenciais, a noção de estabilidade e a abordagem topológica dos sistemas tornaram-se fundamentos conceituais de áreas que apenas se consolidariam décadas após sua produção original (Pellicer, 2004; Poincaré, 2023).

As investigações de Poincaré sobre o problema dos três corpos constituem um marco na compreensão do comportamento de sistemas gravitacionais. Ao demonstrar a inexistência geral de soluções integráveis para sistemas não lineares complexos, evidenciou que o determinismo clássico não implica previsibilidade prática. Pequenas variações nas condições iniciais podem produzir trajetórias qualitativamente distintas, fenômeno que mais tarde seria formalizado como sensibilidade às condições iniciais na teoria do caos (Barrow-Green, 1997; Poincaré, 1890).

Essa perspectiva transformou o estudo da dinâmica orbital, influenciando diretamente a astrofísica, a engenharia aeroespacial e a modelagem de sistemas planetários. A noção de estabilidade orbital passou a ser investigada não apenas por

soluções explícitas, mas por propriedades geométricas do espaço de fases (Nunes, 2020; Fialho, 2025).

A reflexão de Poincaré sobre invariância, simetria e estrutura matemática das leis físicas exerceu influência decisiva na formulação da física moderna. Seus estudos sobre transformações que preservam a forma das equações do eletromagnetismo anteciparam elementos centrais da teoria da relatividade restrita. Ao enfatizar a invariância das leis físicas sob transformações específicas, introduziu um princípio metodológico que se tornaria estruturante na física do século XX (Poincaré, 1905; Gray, 2013).

Além disso, sua análise da estabilidade e da dinâmica não linear forneceu instrumentos conceituais para a física estatística e para a teoria ergódica, áreas que investigam o comportamento coletivo de sistemas com muitos graus de liberdade.

A topologia algébrica, sistematizada por Poincaré, tornou-se uma linguagem central para a matemática contemporânea. O estudo de invariantes topológicos e da estrutura global de espaços influencia hoje a geometria diferencial, a teoria das variedades e a análise global (Spanier, 1966).

Nas últimas décadas, esses conceitos passaram a desempenhar papel relevante em áreas aplicadas. Métodos topológicos são empregados na análise de dados de alta dimensão, no reconhecimento de padrões e na modelagem de redes complexas. A ideia de caracterizar objetos por propriedades invariantes sob deformações contínuas revelou-se particularmente útil em contextos nos quais a estrutura global contém mais informação que medidas locais (Ghys, 2013).

A abordagem qualitativa de sistemas dinâmicos estabelecida por Poincaré constitui o alicerce da teoria moderna do caos. Modelos não lineares utilizados em meteorologia, biologia matemática, economia e engenharia baseiam-se em princípios introduzidos em suas investigações: espaço de fases, estabilidade estrutural, recorrência e comportamento global das trajetórias (Katok; Hasselblatt, 1995).

Em tecnologia, tais conceitos são aplicados na modelagem de circuitos eletrônicos, na criptografia baseada em sistemas caóticos, na robótica e no controle de sistemas complexos. A compreensão de regimes dinâmicos instáveis tornou-se essencial para o desenvolvimento de métodos de previsão e de controle em ambientes não lineares.

A influência interdisciplinar de Poincaré não se restringe ao plano técnico. Sua concepção do conhecimento científico como construção estrutural mediada por

convenções e intuições continua a orientar debates contemporâneos em filosofia da ciência. Ao reconhecer que modelos matemáticos não reproduzem a realidade de forma literal, mas organizam a experiência por meio de estruturas conceituais, Poincaré antecipou discussões modernas sobre modelos científicos, representação e pluralismo metodológico (Poincaré, 1902).

Assim, sua contribuição não apenas ampliou domínios matemáticos específicos, mas redefiniu o papel da matemática como instrumento de inteligibilidade do mundo natural, estabelecendo pontes duradouras entre teoria, experiência e tecnologia.

Metodologia

A presente investigação adota como procedimento metodológico a revisão narrativa da literatura, estratégia adequada para a análise de trajetórias intelectuais e de construções conceituais de longo alcance histórico. Diferentemente de revisões sistemáticas orientadas por protocolos rígidos de seleção e quantificação de resultados, a revisão narrativa privilegia a interpretação contextualizada de obras, conceitos e debates, permitindo integrar dimensões históricas, epistemológicas e matemáticas em um mesmo quadro analítico (Rother, 2007).

O *corpus* documental foi constituído por três conjuntos principais de fontes: obras originais de Henri Poincaré, incluindo textos matemáticos técnicos e escritos de reflexão filosófica, selecionados por sua relevância para a teoria qualitativa das equações diferenciais, para a topologia e para a epistemologia da ciência; estudos históricos e biográficos especializados, destinados a contextualizar a produção de Poincaré no cenário científico de sua época e a examinar o impacto de suas ideias na matemática e na física modernas; literatura contemporânea em sistemas dinâmicos, topologia e filosofia da ciência, utilizada para analisar a recepção e o desenvolvimento posterior dos conceitos introduzidos por Poincaré.

A seleção das obras considerou critérios de relevância histórica, influência científica reconhecida e consistência teórica com o tema central do estudo.

A análise desenvolveu-se em três níveis complementares: análise histórica contextual, voltada à identificação das condições intelectuais e científicas que moldaram o surgimento das ideias de Poincaré; análise conceitual, centrada na reconstrução de noções matemáticas fundamentais e de seus desdobramentos teóricos; análise

interpretativa interdisciplinar, destinada a examinar as relações entre matemática, física e filosofia no pensamento de Poincaré.

Esses níveis foram articulados por leitura crítica comparativa, permitindo examinar continuidades e transformações conceituais ao longo do tempo.

A revisão narrativa adotada não busca exaustividade documental, mas coerência interpretativa. O foco recai sobre a compreensão das ideias em seu desenvolvimento histórico e em suas implicações epistemológicas (Rother, 2007). Tal orientação justifica-se pela natureza do objeto de estudo: a obra de Poincaré constitui um sistema intelectual integrado, cuja compreensão exige articulação entre resultados técnicos e reflexões filosóficas.

Como toda revisão de caráter interpretativo, o presente estudo está sujeito a limites inerentes à seleção bibliográfica e à perspectiva analítica adotada. A ausência de procedimentos quantitativos de síntese impede generalizações de caráter estatístico, mas preserva a profundidade conceitual necessária à investigação histórica e filosófica do pensamento matemático.

A revisão narrativa mostra-se particularmente adequada para estudos de história e filosofia da matemática, pois permite reconstruir processos de formação conceitual e examinar a evolução de ideias em contextos científicos amplos. Ao privilegiar a articulação entre conteúdo técnico e reflexão epistemológica, o método adotado possibilita compreender a contribuição de Poincaré não apenas como conjunto de resultados matemáticos, mas como transformação do horizonte interpretativo da ciência moderna.

Poincaré e a reconfiguração do conhecimento científico

Ao longo deste estudo permite reconhecer que a contribuição de Henri Poincaré não se reduz à introdução de novos resultados matemáticos, mas configura uma transformação metodológica e epistemológica de amplo alcance. Seu trabalho desloca o eixo da investigação científica da busca por soluções explícitas e fechadas para a compreensão das estruturas, das relações e do comportamento global dos sistemas. Tal mudança de perspectiva revela uma redefinição do que se entende por explicação científica, substituindo a exatidão local pela inteligibilidade estrutural.

No plano matemático, a ênfase na análise qualitativa das equações diferenciais e na estabilidade dos sistemas representa uma ruptura com o paradigma analítico dominante no século XIX. A impossibilidade de integração geral de sistemas não lineares, evidenciada nos estudos sobre a mecânica celeste, não é interpretada como limitação da matemática, mas como indicação de que o conhecimento científico pode assumir formas não redutíveis ao cálculo explícito (Poincaré, 1890). Essa postura inaugura uma concepção dinâmica do rigor, na qual a validade do conhecimento decorre da coerência estrutural das descrições e de sua capacidade explicativa.

No âmbito epistemológico, a articulação entre intuição e formalização constitui um dos aspectos mais fecundos do pensamento de Poincaré. Ao defender que a intuição orienta a descoberta e que o rigor organiza a demonstração, Poincaré propõe uma visão integrada do processo científico, superando dicotomias entre criação e verificação. Essa concepção encontra ressonância em debates contemporâneos sobre o papel dos modelos matemáticos na ciência e sobre a natureza construtiva do conhecimento científico (Gray, 2013).

A recepção posterior de suas ideias confirma o caráter antecipatório de sua obra. A teoria moderna dos sistemas dinâmicos, a topologia algébrica e a física matemática incorporaram conceitos originalmente formulados por Poincaré como instrumentos fundamentais de análise. Em particular, a noção de comportamento global e a investigação de regimes instáveis tornaram-se centrais na compreensão de fenômenos complexos, desde sistemas físicos até modelos biológicos e tecnológicos (Katok; Hasselblatt, 1995).

Outro aspecto relevante refere-se à dimensão filosófica de sua produção. O convencionalismo científico proposto por Poincaré sugere que as leis da ciência não são meras cópias da realidade, mas estruturas conceituais construídas para organizar a experiência. Essa posição não implica relativismo, mas destaca o papel ativo da mente na constituição do conhecimento. Tal perspectiva antecipa discussões contemporâneas sobre pluralismo teórico e sobre a função heurística dos modelos científicos (Poincaré, 1902).

Observa-se, portanto, que a originalidade de Poincaré reside na convergência entre formalismo matemático, análise qualitativa e reflexão epistemológica. Essa síntese permitiu reconfigurar o campo da matemática e ampliar suas interfaces com outras áreas do saber. Ao reconhecer os limites da previsão exata e valorizar a compreensão estrutural,

sua obra inaugura uma nova sensibilidade científica orientada pela complexidade, pela relação e pela forma.

A discussão conduz, assim, à compreensão de que o legado de Poincaré permanece ativo não apenas como patrimônio histórico, mas como matriz conceitual que continua a orientar investigações contemporâneas sobre sistemas complexos, estruturas matemáticas e fundamentos do conhecimento científico.

Considerações finais

A obra de Henri Poincaré representa um ponto de inflexão na história da matemática e das ciências naturais. Sua contribuição não se limita à produção de resultados técnicos em áreas específicas, mas configura uma transformação duradoura na maneira de conceber o conhecimento científico. Ao deslocar o foco da resolução explícita para a compreensão qualitativa dos sistemas, Poincaré ampliou o horizonte metodológico da matemática e redefiniu o papel da intuição no processo de descoberta.

Evidenciou-se que suas investigações emergem em um contexto de transição entre a matemática clássica e as formas de pensamento que caracterizam a ciência contemporânea. Ao introduzir métodos para o estudo global das equações diferenciais e ao fundar a topologia algébrica como campo sistemático de investigação, estabeleceu instrumentos conceituais que permitiram compreender fenômenos complexos sem recorrer necessariamente à determinação analítica completa. Essa abordagem revelou que a inteligibilidade científica pode derivar da estrutura e das relações internas de um sistema, mesmo quando a previsão exata permanece inacessível.

No plano conceitual, a articulação entre rigor formal e intuição criadora mostrou-se elemento estruturante do pensamento poincariano. Longe de constituírem dimensões opostas, essas instâncias são apresentadas como complementares na construção do conhecimento matemático. Tal concepção contribui para uma visão mais dinâmica da ciência, na qual modelos, estruturas e invariantes desempenham papel central na organização da experiência.

As análises também indicam que a influência de Poincaré transcende os limites disciplinares da matemática. Seus métodos e conceitos fundamentaram o desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos, da topologia moderna e de diversos campos da física matemática. Além disso, sua reflexão epistemológica continua a

oferecer instrumentos teóricos para o debate contemporâneo sobre a natureza das leis científicas e sobre o estatuto dos modelos matemáticos.

Diante dessas considerações, conclui-se que o legado de Poincaré consiste menos em um conjunto fechado de resultados e mais em uma orientação intelectual: compreender a ciência como investigação de formas, relações e padrões emergentes. Tal perspectiva permanece fecunda para a matemática contemporânea e para as ciências que lidam com sistemas complexos, reafirmando a atualidade de um pensamento que concebe o conhecimento como construção dinâmica e estruturada.

Referências

ARNOLD, Vladimir I. **Ordinary Differential Equations**. Berlin: Springer, 1992.

BARROW-GREEN, June. **Poincaré and the Three Body Problem**. Providence: American Mathematical Society, 1997.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2019.

FIALHO, Yasmin Tami. **Gravitação-Revisão Histórica e Estudo das Teorias de Newton e Einstein**. 2025. 89 f. Trabalho de Conclusão de Curso (bacharelado em Física) - Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, 2025.

GHYS, Étienne. The Legacy of Poincaré in Dynamical Systems. *In*: GRAY, Jeremy; WALTER, Scott (org.). **Henri Poincaré, 1912–2012: His Science and Philosophy**. Basel: Birkhäuser, 2013. p. 75–102.

GRAY, Jeremy. **Henri Poincaré: A Scientific Biography**. Princeton: Princeton University Press, 2013.

HADAMARD, Jacques. Sur la stabilité des mouvements. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Paris, v. 7, p. 331–387, 1901.

KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

NUNES, Ricardo Capiberibe. **Um estudo histórico-social das contribuições de Henri Poincaré à Teoria da Relatividade**: subsídios para o ensino de física. 2020. 344 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Programa de Pós-Graduação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. 2020.

PELLICER, Manuel López. Presentación de la obra de H. Poincaré (1854-1912). **Arbor**, v. 178, n. 704, p. 621-624, 2004.

POINCARÉ, Henri. Analysis Situs. **Journal de l'École Polytechnique**, Paris, v. 1, p. 1–123, 1895.

POINCARÉ, Henri. **La Science et l'Hypothèse**. Paris: Flammarion, 1902.

POINCARÉ, Henri. **La Valeur de la Science**. Paris: Flammarion, 1905.

POINCARÉ, Henri. **Méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. Paris: Gauthier-Villars, 1892.

POINCARÉ, Henri. **Últimos pensamentos**. Biguaçu: Editora 93, 2023.

POINCARÉ, Henri. Sur les courbes définies par une équation différentielle. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Paris, v. 7, p. 375–422, 1881.

POINCARÉ, Henri. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Mathematica**, Stockholm, v. 13, p. 1–270, 1890.

ROTHER, Edna Terezinha. Revisão sistemática X revisão narrativa. **Acta Paulista**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. v–vi, 2007.

SMALL, David. **The Poincaré Conjecture**. Providence: American Mathematical Society, 2007.

SPANIER, Edwin H. **Algebraic Topology**. New York: McGraw-Hill, 1966.

STILLWELL, John. **Mathematics and Its History**. 3. ed. New York: Springer, 2010.

TRINDADE, José Analio de Oliveira. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. 1996. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

VECCHIO JUNIOR, Jacintho Del. **A filosofia de Henri Poincaré: a natureza do conhecimento científico e os paradoxos da teoria dos conjuntos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

VERDADE, PROVA E LIMITE: A VIRADA CONCEITUAL DE KURT GÖDEL

*Francilino Paulo de Sousa*²⁶

*Rildo Alves do Nascimento*²⁷

*Carlos Daniel Chaves Mourão*²⁸

*Ewando José de Sousa*²⁹

DOI: 10.47538/AC-2026.39-06

Resumo

Esse capítulo aborda a obra de Kurt Gödel, cuja contribuição alterou de forma decisiva a compreensão dos limites do conhecimento matemático formal. Inserido no ambiente intelectual do início do século XX, marcado pela busca de fundamentos absolutos para a matemática, Gödel desenvolveu seu trabalho em diálogo direto com os grandes programas logicistas e formalistas da época. Suas ideias emergem em um momento em que se acreditava ser possível estabelecer sistemas matemáticos completos, coerentes e plenamente demonstráveis. O capítulo articula elementos biográficos e históricos à análise das condições intelectuais que possibilitaram o surgimento dos famosos teoremas da incompletude. Ao demonstrar que, em sistemas formais suficientemente expressivos, existem proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas dentro do próprio sistema, Gödel introduziu uma inflexão profunda na relação entre verdade, prova e formalização. Essa constatação não apenas redefiniu os rumos da lógica matemática, mas também provocou impactos duradouros na filosofia da matemática e na epistemologia científica. O objetivo é evidenciar que o pensamento de Gödel não se limita à negação de um ideal de completude, mas inaugura uma nova maneira de compreender a estrutura interna dos sistemas formais. O capítulo propõe, assim, uma leitura que reconhece em Gödel um pensador que, ao revelar os limites da formalização, ampliou o horizonte da própria racionalidade matemática, abrindo espaço para reflexões que permanecem centrais na ciência contemporânea.

Palavras-chave: Kurt Gödel; Lógica Matemática; Teoremas da Incompletude; Fundamentos da Matemática.

²⁶ Ivy Enber Christian University. fpslm@yahoo.com.br.

²⁷ Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

²⁸ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

²⁹ Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF). ewandojose@gmail.com.

Introdução

No alvorecer do século XX, a matemática atravessava um período de intensa autocrítica metodológica e filosófica. Após a crise dos fundamentos desencadeada por paradoxos da teoria dos conjuntos e pelas tensões entre intuição e formalização, consolidou-se o projeto de assegurar à matemática uma base absolutamente rigorosa (Silva *et al.*, 2025). Nesse cenário, programas como o logicismo de Frege e Russell e o formalismo de Hilbert buscavam demonstrar que toda verdade matemática poderia, em princípio, ser derivada de um conjunto finito de axiomas por meio de regras de inferência precisas. A crença na possibilidade de sistemas formais completos e consistentes parecia não apenas plausível, mas necessária para sustentar a confiabilidade do conhecimento matemático (De Assis *et al.*, 2022; Franco, 2022).

É nesse contexto intelectual que emerge a obra de Kurt Gödel, cuja investigação introduziu uma reconfiguração profunda da relação entre verdade, prova e formalização. Ao analisar sistemas formais capazes de expressar a aritmética elementar, Gödel demonstrou que a noção de verdade matemática transcende os limites da demonstrabilidade interna a tais sistemas. Sua abordagem não representou apenas uma resposta técnica a problemas específicos da lógica, mas instaurou uma mudança conceitual que redefiniu a própria ideia de fundamentação (Batistela; Silva, 2025; Lannes, 2009; Batistela, 2017).

Figura 1: Kurt Gödel, 1926



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del

A problemática central que orienta este estudo reside na tensão entre três noções tradicionalmente associadas no pensamento matemático: verdade, prova e completude formal. Se a matemática pretendia constituir-se como o paradigma do conhecimento rigoroso, seria razoável esperar que toda proposição verdadeira pudesse ser demonstrada a partir de princípios fundamentais claros. Contudo, os resultados de Gödel indicam que essa expectativa não pode ser universalmente satisfeita. Surge, então, uma questão filosófica e epistemológica de grande alcance: quais são os limites intrínsecos de qualquer sistema formal destinado a capturar a totalidade das verdades matemáticas?

O objetivo deste capítulo consiste em examinar a virada conceitual introduzida por Gödel, articulando seu trabalho ao ambiente histórico em que foi concebido e analisando suas implicações teóricas e epistemológicas. Pretende-se evidenciar que os teoremas da incompletude não devem ser interpretados apenas como resultados negativos, mas como revelações estruturais acerca da natureza da formalização matemática. Ao deslocar o foco da busca por fundamentos absolutos para a investigação dos limites do formalismo, Gödel inaugurou uma nova perspectiva sobre a racionalidade matemática.

A relevância deste estudo ultrapassa o domínio da lógica formal. As consequências do pensamento gödeliano repercutem na filosofia da matemática, na teoria da computação, na epistemologia científica e nos debates contemporâneos sobre inteligência artificial e limites do conhecimento automatizável. Compreender a inflexão introduzida por Gödel significa, portanto, compreender uma transformação decisiva na maneira como a ciência concebe a relação entre linguagem formal, verdade e conhecimento.

Ao desenvolver essa análise, esse trabalho propõe tanto uma exposição conceitual, como também uma interpretação que reconhece em Gödel um pensador cuja obra redefine o horizonte do que pode ser legitimamente esperado de qualquer sistema de conhecimento formalizado.

Fundamentos históricos da incompletude: crise, programa e ruptura

A formulação dos teoremas da incompletude deve ser compreendida no interior de uma crise conceitual que atravessou a matemática entre o final do século XIX e as primeiras décadas do século XX. A descoberta de paradoxos na teoria dos conjuntos,

notadamente o paradoxo de Russell, colocou em questão a confiabilidade das bases lógicas da disciplina, estimulando a emergência de programas fundacionais distintos e, em certos aspectos, concorrentes (Lannes, 2009; Batistela, 2017; Pinheiro; Batistela, 2021).

O logicismo, associado a Gottlob Frege e posteriormente desenvolvido por Bertrand Russell, sustentava que a matemática poderia ser integralmente reduzida à lógica pura. Em *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege buscou deduzir as leis da aritmética a partir de princípios lógicos gerais, projeto que foi severamente abalado pela identificação de inconsistências internas ao sistema (Frege, 1893/1903). Russell, em colaboração com Whitehead, procurou reconstruir a matemática por meio de uma teoria dos tipos que evitasse tais paradoxos, empreendimento monumental apresentado em *Principia Mathematica* (Whitehead; Russell, 1910-1913).

Em paralelo, o formalismo, liderado por David Hilbert, propôs uma estratégia distinta: em vez de reduzir a matemática à lógica, seria necessário formalizá-la integralmente e demonstrar, por métodos finitos e seguros, a consistência dos sistemas axiomáticos que a sustentam. O chamado “Programa de Hilbert” visava garantir que nenhum enunciado falso pudesse ser derivado das regras formais adotadas, preservando assim a certeza do raciocínio matemático (Hilbert, 1928).

Esse ambiente intelectual foi intensamente debatido no seio do Círculo de Viena, cujos integrantes defendiam uma concepção lógico-empirista da ciência e viam na formalização lógica um instrumento privilegiado de clarificação conceitual (Hahn; Neurath; Carnap, 1929). A confiança na possibilidade de sistemas formais completos, isto é, capazes de decidir toda proposição expressável em sua linguagem, tornou-se um pressuposto amplamente compartilhado no período.

É nesse contexto que surge o trabalho de Kurt Gödel. Em 1931, ao publicar *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Gödel demonstrou que qualquer sistema formal consistente, recursivamente enumerável e suficientemente expressivo para conter a aritmética elementar é necessariamente incompleto: existem proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas dentro do próprio sistema (Gödel, 1931). Ao empregar uma engenhosa técnica de aritmetização da sintaxe, hoje conhecida como numeração de Gödel, o autor mostrou como enunciados podem referir-se, de modo indireto, à própria estrutura demonstrativa do sistema.

O resultado não apenas limitou o alcance do Programa de Hilbert, mas também redefiniu a natureza do empreendimento fundacional. A matemática deixou de ser concebida como um domínio plenamente capturável por regras formais fechadas, passando a ser entendida como um campo em que a verdade ultrapassa a prova formalmente derivável. A ruptura introduzida por Gödel não destruiu o ideal de rigor, mas deslocou seu significado: a investigação dos limites tornou-se parte constitutiva da própria racionalidade matemática (Nagel; Newman, 1958).

Assim, o surgimento dos teoremas da incompletude representa menos o colapso de um projeto específico e mais a inauguração de uma nova fase na reflexão sobre os fundamentos. A matemática permaneceu formalizável em grande medida, porém deixou de ser concebida como totalmente formalizável, distinção sutil que marca a transição de um otimismo fundacional para uma consciência estrutural dos limites do método axiomático.

Formalização, autorreferência e limites demonstrativos

A virada conceitual introduzida por Kurt Gödel assenta-se em uma construção rigorosa que articula três elementos fundamentais: a formalização sintática de teorias aritméticas, a aritmetização da metalinguagem e a produção de sentenças autorreferentes. Esses componentes convergem na demonstração dos teoremas da incompletude, os quais estabelecem limites intrínsecos à demonstrabilidade em sistemas formais suficientemente expressivos.

Sistemas formais e representabilidade aritmética

Considere uma teoria formal T que satisfaça as seguintes condições:

- i. Consistência: não existem fórmulas φ tais que $T \vdash \varphi$ e $T \vdash \neg\varphi$.
- ii. Efetividade: o conjunto de axiomas de T é recursivamente enumerável.
- iii. Suficiente expressividade aritmética: T interpreta a aritmética de Robinson Q ou, de forma equivalente, representa funções recursivas básicas.

A estratégia de Gödel consiste em codificar fórmulas, provas e sequências sintáticas por números naturais. Essa correspondência, a numeração de Gödel, permite

tratar propriedades metamatemáticas como predicados aritméticos internos ao próprio sistema (Gödel, 1931; Ferreira, 2006; Marochi, 2021).

Um resultado técnico essencial é o Teorema da Representabilidade: para toda função recursiva primitiva f , existe uma fórmula $\Phi_f(x_1, \dots, x_n, y)$ tal que, para quaisquer números naturais $a_1, \dots, a_n, b$,

$$f(a_1, \dots, a_n) = b \Rightarrow T \vdash \Phi_f(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{b})$$

e, se $f(a_1, \dots, a_n) \neq b$, então $T \vdash \neg \Phi_f(a_1, \dots, a_n, b)$ (Mendelson, 2015).

O Lema do Ponto Fixo (Diagonalização)

A autorreferência controlada é obtida por meio do Lema do Ponto Fixo (ou Lema da Diagonalização): para qualquer fórmula $\psi(x)$ com uma variável livre, existe uma sentença θ tal que

$$T \vdash \theta \leftrightarrow \psi(\ulcorner \theta \urcorner),$$

onde $\ulcorner \theta \urcorner$ denota o número de Gödel de θ . Em termos conceituais, o lema garante a existência de enunciados que “falam” sobre si mesmos dentro do sistema formal (Smullyan, 1992; Marochi, 2021; Silveira, 2022).

Primeiro Teorema da Incompletude

Seja $Prov_T(x)$ um predicado aritmético que representa “ x é o número de Gödel de uma fórmula demonstrável em T ”. Aplicando o Lema do Ponto Fixo à fórmula $\neg Prov_T(x)$, obtém-se uma sentença G_T tal que

$$T \vdash G_T \leftrightarrow \neg Prov_T(\ulcorner G_T \urcorner).$$

Interpretação: G_T afirma sua própria não-demonstrabilidade em T .

Teorema 1 (Incompletude de Gödel).

Se T é consistente e satisfaz as condições de efetividade e expressividade aritmética, então G_T não é demonstrável em T . Ademais, se T é ω -consistente (ou simplesmente consistente em formulações modernas), então $\neg G_T$ também não é demonstrável em T . Logo, T é incompleto (Gödel, 1931; Nagel; Newman, 1958).

Segundo Teorema da Incompletude

A aritmetização permite ainda formalizar, no interior de T , a afirmação “ T é consistente”, usualmente denotada por $Con(T)$. Utilizando técnicas de derivabilidade e a representabilidade de $Prov_T$, obtém-se:

Teorema 2 (Incompletude de Gödel):

Se T é consistente e suficientemente expressivo, então $T \not\vdash Con(T)$. Ou seja, nenhum sistema formal que contenha aritmética elementar pode provar, por seus próprios meios, a própria consistência (Gödel, 1931; Mendelson, 2015).

Relações com decidibilidade e computabilidade

Os resultados de Gödel articulam-se com a noção de decidibilidade: uma teoria é decidível quando existe um procedimento efetivo que determina, para qualquer sentença, se ela é demonstrável. O trabalho de Alan Turing formalizou o conceito de procedimento efetivo por meio das máquinas de Turing e mostrou a indecidibilidade do problema da parada, reforçando o panorama de limites algorítmicos da prova formal (Turing, 1936). Em conjunto, tais resultados delineiam um quadro em que verdade aritmética, demonstrabilidade e computabilidade não coincidem em geral.

Do ponto de vista matemático, a incompletude emerge da interação entre três princípios: (i) a capacidade de um sistema representar sua própria sintaxe, (ii) a construção diagonal que produz autorreferência sem contradição e (iii) a exigência de consistência. A consequência é estrutural: sempre que a formalização alcança certo limiar

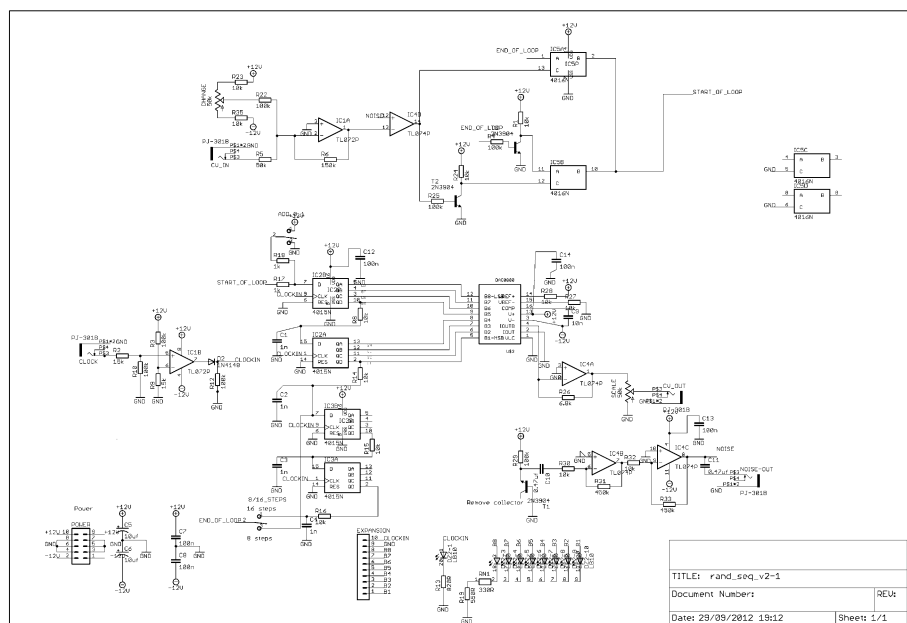
expressivo, surgem proposições verdadeiras não capturáveis pela prova interna ao sistema.

Da Lógica aos limites da computação e da inteligência artificial

Os resultados de Kurt Gödel não permaneceram confinados ao domínio da lógica matemática. Ao revelar limites estruturais da demonstrabilidade formal, os teoremas da incompletude estabeleceram vínculos duradouros com a teoria da computação, a filosofia da ciência, a inteligência artificial e áreas aplicadas que dependem de formalização simbólica. A incompletude não é apenas um resultado interno à aritmética formalizada; ela delinea fronteiras conceituais que atravessam diversas disciplinas científicas.

A conexão entre incompletude e computabilidade tornou-se explícita com os trabalhos de Alan Turing e de Alonzo Church, que formalizaram a noção de procedimento efetivo. A tese de Church–Turing estabelece que funções computáveis coincidem com aquelas realizáveis por máquinas de Turing ou expressáveis em cálculo lambda (Church, 1936; Turing, 1936).

Figura 2: Máquina de Turing (*Random Looping Sequencer*)



Fonte: https://www.musicthing.co.uk/retired/turing_v1.html

O Problema da Parada, determinar se um programa arbitrário termina sua execução, é indecidível. Essa indecidibilidade reflete, em termos computacionais, o

mesmo fenômeno estrutural identificado por Gödel: sistemas suficientemente expressivos contêm verdades não capturáveis por procedimentos mecânicos universais (Davis, 1958). Assim, a incompletude fornece a moldura conceitual para compreender por que certos problemas computacionais são intrinsecamente insolúveis por algoritmos gerais.

Figura 3: *Desktop* (computador)



Fonte: <https://www.pingdom.com/blog/retro-delight-gallery-of-early-computers-1940s-1960s/>

Na inteligência artificial simbólica clássica, o raciocínio era concebido como manipulação formal de símbolos segundo regras lógicas. Nesse contexto, os resultados gödelianos suscitaram debates sobre a possibilidade de sistemas artificiais capturarem integralmente a racionalidade matemática humana. Argumentos filosóficos posteriores, notadamente os de Roger Penrose, sugeriram que a mente humana poderia reconhecer verdades não demonstráveis por sistemas formais fixos (Penrose, 1989). Embora tais interpretações permaneçam controversas, elas evidenciam a influência da incompletude na reflexão contemporânea sobre cognição, consciência e automação do raciocínio.

Em termos técnicos, a lógica matemática continua sendo fundamento de áreas como verificação formal de *software*, prova automática de teoremas e linguagens formais. Contudo, a incompletude implica que nenhum sistema lógico universal pode capturar toda verdade expressável em estruturas aritméticas complexas, o que reforça a necessidade de

métodos heurísticos, probabilísticos e empíricos na inteligência artificial moderna (Russell; Norvig, 2021).

A repercussão filosófica da incompletude manifesta-se na reavaliação das concepções de verdade matemática. O formalismo estrito, que identificava verdade com demonstrabilidade, torna-se insustentável em sistemas suficientemente expressivos. Em contraste, perspectivas platonistas ganharam novo impulso ao sustentar que a verdade matemática transcende qualquer sistema formal específico (Hale; Wright, 2001; Bandini, 2010).

Na epistemologia científica, os resultados de Gödel introduzem uma distinção crucial entre completude metodológica e validade racional. Uma teoria pode ser internamente coerente e ainda assim incapaz de responder a todas as questões formuláveis em sua própria linguagem. Esse insight contribuiu para uma visão mais dinâmica da ciência, na qual teorias são compreendidas como estruturas abertas e revisáveis, e não como sistemas dedutivos encerrados (Feferman, 2006).

Na matemática moderna, a influência da incompletude manifesta-se em áreas como teoria dos modelos, lógica computacional e fundamentos da matemática. O desenvolvimento da teoria da prova, por exemplo, investiga a força dedutiva de diferentes sistemas formais e suas hierarquias de consistência. Resultados de independência, como aqueles na teoria dos conjuntos envolvendo o axioma da escolha e a hipótese do contínuo, refletem a mesma estrutura conceitual inaugurada por Gödel: a existência de proposições indecidíveis em sistemas axiomáticos robustos (Cohen, 1966).

Os teoremas da incompletude não constituem apenas um marco lógico, mas um princípio organizador para compreender os limites da formalização em múltiplos níveis: algorítmico, epistemológico e tecnológico. Ao demonstrar que verdade e prova não coincidem universalmente, a obra de Gödel redefine o alcance e a natureza da racionalidade formal nas ciências contemporâneas (Batistela, 2017).

Caminho metodológico

Este estudo adota o método de revisão narrativa da literatura, apropriado para investigações de natureza teórica e histórico-conceitual cujo objetivo consiste em integrar interpretações, reconstruir contextos intelectuais e examinar implicações interdisciplinares de um conjunto de resultados científicos. Diferentemente de revisões

sistemáticas estritamente protocoladas, a revisão narrativa permite a articulação crítica entre fontes primárias e secundárias, favorecendo a compreensão da evolução conceitual e da densidade filosófica do tema investigado (Rother, 2007).

O *corpus* foi composto por três tipos de fontes: fontes primárias, textos originais de lógica matemática e fundamentos, especialmente artigos e obras em que são apresentados os teoremas da incompletude e seus desdobramentos formais; literatura secundária especializada, estudos interpretativos em lógica, filosofia da matemática e teoria da computação, utilizados para contextualização histórica e análise conceitual; obras de síntese interdisciplinar, trabalhos que examinam repercussões epistemológicas, computacionais e filosóficas da incompletude.

A seleção das fontes seguiu critérios de relevância teórica, impacto acadêmico reconhecido e contribuição para a compreensão estrutural do problema investigado.

Procedimentos de análise

A análise desenvolveu-se em três etapas complementares: reconstrução histórica-conceitual: identificação das condições intelectuais que motivaram a investigação dos fundamentos da matemática, com ênfase nos programas formalistas e logicistas; análise lógico-matemática: exame das estruturas formais envolvidas na demonstração da incompletude, com atenção aos mecanismos de representabilidade e autorreferência; integração interdisciplinar: interpretação das consequências dos resultados para áreas como teoria da computação, filosofia da matemática e epistemologia científica.

A abordagem interpretativa adotada é analítico-conceitual, buscando explicitar relações estruturais entre noções de verdade, prova e formalização, sem recorrer a procedimentos empíricos ou experimentais.

A escolha da revisão narrativa fundamenta-se na natureza do objeto de estudo: a incompletude não constitui apenas um resultado técnico, mas um marco conceitual que exige leitura contextualizada e síntese interpretativa. O método permite examinar não apenas o conteúdo formal dos teoremas, mas também suas implicações filosóficas e científicas, preservando a complexidade histórica do problema (Grant; Booth, 2009).

Além disso, a revisão narrativa favorece a integração de tradições disciplinares distintas, lógica matemática, filosofia da ciência e teoria da computação, o que é essencial para compreender o alcance da virada conceitual examinada neste trabalho.

Análise e discussão

Os resultados de Kurt Gödel redefinem o estatuto epistemológico da matemática ao dissociar, de modo estrutural, as noções de verdade e demonstrabilidade. Essa dissociação não implica relativismo lógico nem fragiliza o rigor matemático; ao contrário, revela que a exigência de consistência e a expressividade aritmética suficiente conduzem, inevitavelmente, a lacunas demonstrativas internas. Em termos conceituais, a incompletude não é uma anomalia contingente, mas uma propriedade intrínseca de sistemas formais robustos (Gödel, 1931; Mendelson, 2015).

Do ponto de vista histórico-filosófico, a incompletude desloca o horizonte do projeto fundacional do início do século XX. O formalismo, que buscava assegurar a matemática por meio de provas finitas de consistência, vê-se confrontado com a impossibilidade de uma autoverificação plena em teorias capazes de formalizar a aritmética. A consequência não é o abandono da formalização, mas a reformulação de seu alcance: sistemas formais tornam-se instrumentos poderosos e indispensáveis, porém reconhecidamente limitados em sua pretensão de exaustividade (Nagel; Newman, 1958).

No âmbito da teoria da computação, a afinidade entre incompletude e indecidibilidade esclarece por que certos problemas escapam a qualquer procedimento algorítmico geral. A impossibilidade de um método universal para decidir todas as proposições aritméticas encontra paralelo na inexistência de algoritmos que resolvam, em geral, problemas como o da parada. Tal convergência indica que limites lógicos e limites computacionais compartilham uma mesma matriz estrutural: a capacidade de sistemas suficientemente expressivos representarem aspectos de sua própria sintaxe e dinâmica (Turing, 1936; Davis, 1958).

Na filosofia da matemática, o debate desloca-se do ideal de fundamentação absoluta para a análise das condições de possibilidade da prova e da verdade. Interpretações platonistas encontram apoio na ideia de que há verdades aritméticas independentes de qualquer sistema axiomático fixo, ao passo que perspectivas estruturalistas e *proof-theoretic* enfatizam o papel dos sistemas formais como quadros de inferência localmente adequados, porém globalmente abertos (Hale; Wright, 2001; Feferman, 2006). A incompletude, assim, não prescreve uma ontologia única, mas impõe restrições a qualquer teoria que identifique verdade com derivabilidade.

No campo das tecnologias contemporâneas, especialmente na verificação formal e na inteligência artificial, a lição gödeliana sugere cautela diante de pretensões de total automatização do raciocínio matemático. Sistemas de prova automática e métodos formais de verificação são extraordinariamente eficazes em domínios bem especificados; contudo, a expectativa de um aparato formal universal e completo para toda matemática é incompatível com a estrutura demonstrada pela incompletude (Russell; Norvig, 2021). Em termos práticos, isso legitima a convivência entre métodos formais, heurísticas e abordagens empíricas na produção de conhecimento confiável.

A discussão permite compreender a incompletude como um princípio organizador de alcance transversal: ela articula história, técnica e filosofia em uma mesma matriz explicativa. Ao tornar explícitos os limites internos da formalização, os teoremas de Gödel não encerram o projeto racional da matemática; antes, ampliam seu escopo crítico, convidando à investigação sistemática das fronteiras entre o que pode ser provado, o que pode ser computado e o que pode ser conhecido (Silva; De Sá, 2011; Lannes, 2009).

Considerações finais

A análise desenvolvida ao longo deste capítulo evidenciou que a contribuição de Kurt Gödel não consiste apenas na demonstração técnica de limites formais, mas na reconfiguração do próprio horizonte epistemológico da matemática. A incompletude revelou que a aspiração a sistemas formais simultaneamente completos, consistentes e capazes de expressar a aritmética elementar não pode ser universalmente satisfeita. Em vez de representar um impasse, essa constatação inaugurou uma compreensão mais sofisticada da racionalidade matemática: a formalização permanece um instrumento indispensável, porém reconhecidamente finito em seu alcance explicativo.

Sob perspectiva histórica, a crise dos fundamentos não culminou no abandono do rigor, mas em sua redefinição. A matemática contemporânea passou a incorporar a investigação dos limites como parte constitutiva de sua prática teórica. Essa mudança deslocou o debate filosófico da busca por fundamentos absolutos para a análise das condições estruturais de prova, verdade e consistência. A relação entre sintaxe formal e conteúdo semântico deixou de ser concebida como identidade necessária, tornando-se objeto permanente de reflexão.

No plano interdisciplinar, os resultados discutidos mostraram-se decisivos para a teoria da computação, para a epistemologia científica e para o desenvolvimento de tecnologias baseadas em formalização simbólica. A impossibilidade de procedimentos universais de decisão e de autoverificação completa impõe uma compreensão mais realista dos alcances da automação lógica e do conhecimento formalizado. Assim, a herança gödeliana não se limita à lógica matemática, mas configura um princípio orientador para a investigação científica contemporânea.

A virada conceitual examinada neste estudo não restringe a racionalidade matemática; ao contrário, amplia seu campo ao explicitar as fronteiras que a definem. Compreender a coexistência entre verdade demonstrável e verdade não demonstrável significa reconhecer que o conhecimento formal é simultaneamente poderoso e aberto. Nesse sentido, a obra de Gödel permanece como um dos marcos intelectuais mais profundos da ciência moderna, não por estabelecer limites definitivos ao saber, mas por revelar que a própria ideia de limite constitui uma dimensão essencial da razão científica.

Referências

BATISTELA, Rosemeire de Fátima. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de Licenciatura em Matemática**. 2017. 139 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2017.

BATISTELA, Rosemeire de fatima; SILVA, Ana Maria Mota Pereira. As ideias fundantes do teorema da incompletude de Gödel: uma análise fenomenológica. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 13, n. 37, p. 57-87, 2025.

CARNAP, Rudolf; HAHN, Hans; NEURATH, Otto. **A concepção científica do mundo: o Círculo de Viena**. 1929.

CHURCH, Alonzo. An unsolvable problem of elementary number theory. **American Journal of Mathematics**, v. 58, n. 2, p. 345–363, 1936.

COHEN, Paul J. **Set Theory and the Continuum Hypothesis**. New York: W. A. Benjamin, 1966.

DAVIS, Martin (org.). **The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions**. New York: Raven Press, 1958.

DE ASSIS, Maria de Lourdes Rocha *et al.* **Hilbert e os Fundamentos da Matemática: o Sucesso de um Fracasso**. São Paulo: Editora Dialética, 2022.

FEFERMAN, Solomon. **In the Light of Logic**. Oxford: Oxford University Press, 2006.

FERREIRA, Fernando. A matemática de Kurt Gödel. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, v. 55, p. 39-62, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Fernando-Ferreira-17/publication/267664271_A_matematica_de_Kurt_Godel/links/0046352b5812b43089000000/A-matematica-de-Kurt-Goedel.pdf. Acesso 13 mar. 2026.

FRANCO, José Henrique Fonseca. **Os desdobramentos dos Teoremas de Incompletude de Gödel na Filosofia da Matemática**. 2022. 115 f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Federal de São João Del Rei, 2022. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/ppgfil/2022%20Jose%20Henrique%20Fonseca%20Franco.pdf>. Acesso 12 mar. 2026.

FREGE, Gottlob. **Grundgesetze der Arithmetik**. Jena: Hermann Pohle, 1893–1903.

GÖDEL, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. **Monatshefte für Mathematik und Physik**, v. 38, p. 173–198, 1931.

GRANT, Maria J.; BOOTH, Andrew. A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. **Health Information & Libraries Journal**, v. 26, n. 2, p. 91–108, 2009.

HALE, Bob; WRIGHT, Crispin. **The Reason's Proper Study**. Oxford: Clarendon Press, 2001.

HILBERT, David. Die Grundlagen der Mathematik. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**, v. 6, p. 65–85, 1928.

LANNES, Wagner. **A incompletude além da matemática: impactos culturais do teorema de Gödel no Século XX**. 2009. 207 f. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, 2009.

MAROCHI, Marcello. **Incompletude concreta de sistemas aritméticos: um estudo sobre os Teoremas de Gödel e suas consequências para o 'fazer matemático'**. 2021. 140 f. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática e Computação Científica, Florianópolis, 2021.

MENDELSON, Elliott. **Introduction to Mathematical Logic**. 6. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **Gödel's Proof**. New York: New York University Press, 1958.

PENROSE, Roger. **The Emperor's New Mind**. Oxford: Oxford University Press, 1989.

PINHEIRO, José Milton Lopes; BATISTELA, Rosemeire de Fátima. A relevância de conhecer e compreender a incompletude da Matemática: um olhar fenomenológico sobre o teorema da incompletude de Gödel. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 21, p. 44-63, 2021.

ROTHER, Edna Terezinha. Revisão sistemática X revisão narrativa. **Acta Paulista**, v. 20, n. 2, p. v-vi, 2007.

RUSSELL, Stuart; NORVIG, Peter. **Artificial Intelligence: A Modern Approach**. 4. ed. Hoboken: Pearson, 2021.

SILVA, Jarde Moisés Rodrigues *et al.* **Gigantes da matemática: história, teorias e o legado das mentes que moldaram a ciência**. v. 2. Natal: Editora Amplamente, 2025.

SILVA, Silvio Tadeu Teles da; DE SÁ, Pedro Franco. Gödel e sua contribuição para os fundamentos da matemática. *In: Encontro Paraense de Educação Matemática*, 2011. Disponível em: <https://cognicaoeducacaomatematica.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/02/cc0406.pdf>. Acesso 12 fev. 2026.

SILVEIRA, Max Paulo P. B da. **Fronteiras do pensamento: lógica e linguagem na crise dos sistemas formais**. 2022. Trabalho de conclusão (graduação em Filosofia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Filosofia e Ciências Sociais, Departamento de Filosofia, 2022.

SMULLYAN, Raymond M. **Gödel's Incompleteness Theorems**. New York: Oxford University Press, 1992.

TURING, Alan M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 42, p. 230–265, 1936.

WHITEHEAD, Alfred North; RUSSELL, Bertrand. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 1910–1913.

EMMY NOETHER: ESTRUTURAS, SIMETRIAS E A NOVA ÁLGEBRA

*Francilino Paulo de Sousa*³⁰

*Rildo Alves do Nascimento*³¹

*Daiane Fabrício dos Santos*³²

*Ícaro Jael Mendonça Moura*³³

*Carlos Daniel Chaves Mourão*³⁴

DOI: 10.47538/AC-2026.39-07

Resumo

O presente texto dedica-se à obra de Emmy Noether, cuja produção intelectual redefiniu profundamente o modo de compreender estruturas algébricas e suas relações com a física teórica. Atuando em um contexto acadêmico marcado por fortes restrições institucionais e de gênero, Noether construiu uma matemática que deslocou o foco de objetos isolados para os princípios estruturais que os organizam. Sua abordagem inaugura uma nova racionalidade, centrada na abstração e na generalidade. A exposição do capítulo articula aspectos biográficos e históricos à análise de contribuições que se tornaram fundamentais para a álgebra moderna. Conceitos como ideais, anéis e homomorfismos aparecem não como técnicas pontuais, mas como elementos de uma linguagem capaz de unificar diferentes domínios matemáticos. Ao privilegiar relações e invariâncias, Noether promoveu uma reorganização profunda da álgebra, influenciando decisivamente gerações posteriores de matemáticos. O objetivo é mostrar também o alcance de seu pensamento para além da matemática pura, particularmente por meio do teorema que leva seu nome, no qual simetrias e leis de conservação passam a ser compreendidas como expressões de um mesmo princípio estrutural. O texto convida, assim, o leitor a reconhecer em Emmy Noether uma das arquitetas da matemática contemporânea, cuja obra exemplifica a passagem de uma matemática orientada por procedimentos para uma matemática fundada em estruturas, com impacto duradouro sobre as ciências do século XX.

Palavras-chave: Emmy Noether; Álgebra Moderna; Estruturas Matemáticas; Simetria.

³⁰ Ivy Enber Christian University. fpslm@yahoo.com.br.

³¹ Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

³² Instituto Federal do Ceará (IFCE). daiane.fabricio03@aluno.ifce.edu.br.

³³ Universidade Estadual do Ceará (UECE). icaro.moura@uece.br.

³⁴ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

Introdução

A virada estrutural que marcou a matemática do século XX encontra uma de suas expressões mais decisivas na obra de Emmy Noether. Em um cenário intelectual ainda fortemente orientado por métodos computacionais e por uma concepção operacional dos objetos matemáticos, sua produção introduziu uma mudança de perspectiva: o foco desloca-se do estudo de elementos particulares para a análise das relações que os organizam. Tal reorientação não apenas redefiniu o campo da álgebra, mas também estabeleceu pontes conceituais duradouras com a física teórica, especialmente no contexto das teorias de invariância e conservação (Jesus; Gomes, 2020; Andrade; Oliveira, 2020).

A emergência dessa nova racionalidade matemática ocorre em um período historicamente denso, marcado por transformações científicas profundas, como o desenvolvimento da relatividade e da mecânica quântica. Nesse ambiente, a busca por princípios gerais capazes de explicar regularidades físicas e estruturas formais impulsionou uma matemática mais abstrata e unificadora. Inserida nesse movimento, a produção de Noether contribui para consolidar uma linguagem algébrica fundada em estruturas, na qual conceitos como anéis, ideais e homomorfismos passam a desempenhar papel central na organização do conhecimento matemático.

A problemática que orienta o presente capítulo consiste em compreender de que modo a reformulação conceitual promovida por Noether redefiniu simultaneamente a álgebra moderna e a relação entre matemática e física. Mais precisamente, investiga-se como sua abordagem estrutural tornou possível interpretar simetrias como princípios geradores de leis de conservação, articulando níveis distintos de formalização científica sob um mesmo arcabouço teórico.

O objetivo deste estudo é examinar a contribuição de Noether a partir de três eixos complementares: o contexto histórico de sua produção intelectual, os fundamentos matemáticos que consolidam sua proposta estrutural e as repercussões de seu pensamento em diferentes domínios do conhecimento científico. Busca-se, assim, evidenciar não apenas a originalidade de suas formulações, mas também sua capacidade de reorganizar profundamente o modo de pensar a matemática.

A relevância desta investigação justifica-se pelo reconhecimento de que a matemática contemporânea, em sua ênfase na abstração, na generalidade e na

interconexão entre estruturas, não pode ser plenamente compreendida sem a contribuição noetheriana. Ao explicitar a unidade subjacente entre simetria e conservação, sua obra transcende fronteiras disciplinares e oferece um paradigma conceitual que continua a orientar pesquisas em álgebra, geometria, física teórica e áreas tecnológicas emergentes. Nesse sentido, examinar o pensamento de Noether significa também compreender um dos fundamentos intelectuais da ciência moderna.

Fundamentos históricos da nova álgebra estrutural

A consolidação da álgebra estrutural no século XX está intimamente associada à trajetória intelectual de Emmy Noether, cuja obra se desenvolveu em um ambiente científico marcado por transformações conceituais profundas e por significativas barreiras institucionais. Formada em Erlangen e posteriormente vinculada ao círculo matemático de Göttingen, Noether atuou em um dos centros mais influentes da matemática europeia, ao lado de figuras como David Hilbert e Felix Klein. Nesse contexto, emergia a necessidade de uma reformulação conceitual capaz de unificar resultados dispersos em teoria dos invariantes, álgebra e física matemática (Row, 1988; Kluth, 2005).

Noether ingressa na matemática em um momento de transição epistemológica. Durante o século XIX, a álgebra havia se expandido significativamente com o desenvolvimento da teoria dos grupos por Évariste Galois e com os avanços em teoria dos invariantes. Contudo, muitos resultados permaneciam dependentes de procedimentos computacionais específicos, carecendo de um quadro conceitual geral. A contribuição noetheriana consiste justamente em substituir métodos particulares por princípios estruturais universais, promovendo uma reorganização da disciplina baseada em propriedades internas e relações formais entre objetos matemáticos (Corry, 1996; Milies, 2004).

Sua atuação em Göttingen coincidiu com o esforço de axiomatização que caracterizou a matemática do início do século XX. Inspirada por essa atmosfera intelectual, Noether desenvolveu uma abordagem que privilegiava a generalidade e a abstração como instrumentos de compreensão. Em vez de estudar equações ou expressões isoladas, passou a investigar estruturas algébricas definidas por operações e propriedades invariantes. Tal mudança de perspectiva encontra expressão sistemática em seus trabalhos

sobre teoria dos ideais em anéis comutativos, nos quais demonstra que propriedades fundamentais podem ser deduzidas de princípios estruturais relativamente simples (Noether, 1921).

Figura 1: Emmy Noether



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether

O impacto histórico dessa reformulação é amplificado por sua interlocução com a física teórica. Em 1918, ao investigar problemas relacionados à relatividade geral, Noether estabelece um resultado que transformaria profundamente a compreensão das leis físicas: a correspondência entre simetrias contínuas e leis de conservação. Esse teorema introduz uma conexão conceitual inédita entre invariância matemática e estrutura das teorias físicas, contribuindo para a consolidação de uma visão unificada das ciências exatas (Noether, 1918; Kosmann-Schwarzbach, 2011).

Além de suas contribuições técnicas, o contexto histórico da produção de Noether revela dimensões institucionais relevantes para a história da ciência. Durante anos, lecionou sem remuneração formal e apenas tardiamente obteve reconhecimento acadêmico oficial, circunstância que evidencia os limites estruturais impostos às mulheres no meio científico da época. Paradoxalmente, tais restrições não impediram que sua obra influenciasse decisivamente o desenvolvimento da matemática moderna, formando uma

geração de pesquisadores que difundiram sua abordagem estrutural pela Europa e pelos Estados Unidos (Dick, 1981).

A contribuição de Noether, sob uma perspectiva histórica ampla, representa a passagem de uma matemática orientada por procedimentos para uma matemática fundada em estruturas. Esse deslocamento não apenas redefiniu a álgebra, mas também estabeleceu os fundamentos conceituais de áreas que se desenvolveriam posteriormente, como a álgebra abstrata, a geometria algébrica moderna e a teoria das representações. Assim, a emergência da nova álgebra estrutural não pode ser compreendida sem reconhecer o papel central desempenhado por Noether na reformulação dos próprios critérios de rigor, generalidade e explicação matemática.

Ideais, anéis noetherianos e princípios de invariância

A formulação estrutural da álgebra moderna consolida-se por meio de conceitos e resultados que privilegiam propriedades internas e relações entre objetos matemáticos. No centro dessa reformulação está a obra de Emmy Noether, cuja abordagem introduz critérios de finitude, estabilidade e invariância como fundamentos organizadores da teoria algébrica (Kluth, 2005).

Anéis e Ideais

Um anel R é um conjunto munido de duas operações binárias, adição e multiplicação, tal que $(R, +)$ é um grupo abeliano, a multiplicação é associativa e distribui-se sobre a adição. Um ideal $I \subseteq R$ é um subconjunto não vazio que satisfaz:

- i. $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$.
- ii. $r \in R, a \in I \Rightarrow ra \in I \text{ e } ar \in I$.

A introdução sistemática de ideais permite estudar propriedades globais do anel a partir de suas subestruturas, substituindo o tratamento de elementos individuais por relações estruturais. Essa perspectiva possibilita, por exemplo, a definição de anel quociente R/I , no qual classes laterais de I organizam a informação algébrica de modo mais abstrato e geral (Hungerford, 1974; Ribeiro, 2025).

Condição de Cadeia Ascendente e Anéis Noetherianos

Um anel R é denominado noetheriano quando toda cadeia ascendente de ideais estabiliza, isto é, para qualquer sequência

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

Essa propriedade é equivalente à afirmação de que todo ideal de R é finitamente gerado. Tal equivalência estabelece um critério de controle estrutural que permite generalizações poderosas em teoria algébrica e geometria algébrica (Atiyah; Macdonald, 1969).

Teorema (Caracterização de Noether):

Um anel comutativo R é noetheriano se, e somente se, todo ideal de R é finitamente gerado.

Esse resultado confere à noção de finitude um papel estrutural, não meramente quantitativo, e constitui um dos pilares da álgebra abstrata contemporânea.

Um dos resultados mais influentes associados à abordagem noetheriana é o Teorema da Base de Hilbert, cuja demonstração foi profundamente reformulada por Noether em termos estruturais.

Teorema (Base de Hilbert)

Se R é um anel noetheriano, então o anel de polinômios $R[x]$ também é noetheriano.

Como consequência, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o anel $R[x_1, \dots, x_n]$ preserva a propriedade noetheriana.

Esse teorema estabelece a estabilidade estrutural sob extensões polinomiais e fundamenta a teoria moderna de variedades algébricas, permitindo descrever conjuntos

geométricos por meio de sistemas finitos de equações polinomiais (Cox; Little; O'Shea, 2007).

Homomorfismos e Estrutura

Um homomorfismo de anéis é uma aplicação $f: R \rightarrow S$ que preserva as operações:

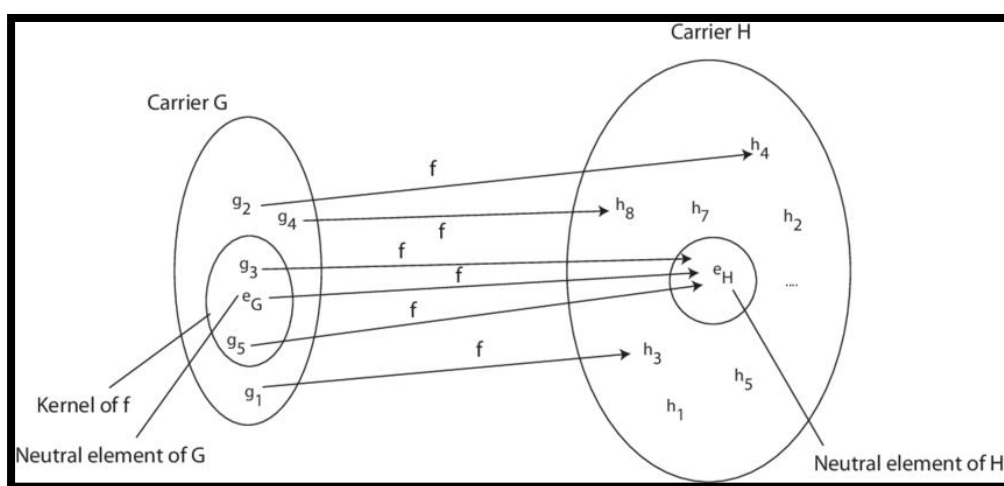
$$f(a + b) = f(a) + f(b), f(ab) = f(a)f(b).$$

O núcleo de f , definido por $\ker(f) = \{a \in R: f(a) = 0\}$, é um ideal de R . O Teorema do Isomorfismo estabelece:

$$R/\ker(f) \cong \text{Im}(f).$$

Tal resultado expressa uma correspondência estrutural entre quocientes e imagens, exemplificando a centralidade das relações de equivalência na álgebra moderna (Lang, 2002).

Figura 2: Homomorfismo de Anéis



Fonte: <https://www.researchgate.net/figure/The-kernel-of-a-group-homomorphism>

Princípio de Invariância:

A dimensão estrutural da matemática noetheriana estende-se à física matemática por meio de um princípio de invariância que conecta simetria e conservação.

Considere uma ação S definida por uma integral lagrangiana:

$$S = \int L(q, \dot{q}, t) dt.$$

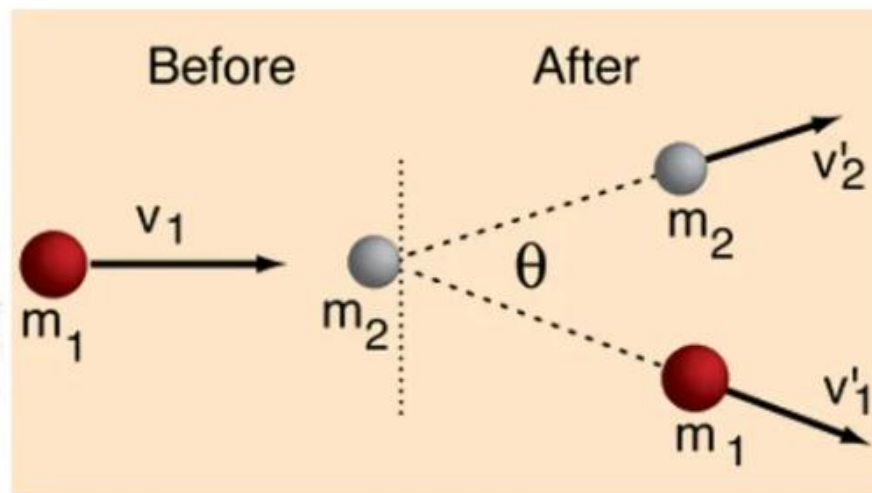
Teorema (Noether):

Se a ação é invariante sob um grupo contínuo de transformações parametrizadas, então existe uma quantidade conservada associada a essa simetria.

Exemplos fundamentais incluem:

- Invariância temporal $\Rightarrow$ conservação da energia;
- Invariância espacial $\Rightarrow$ conservação do momento linear;
- Invariância rotacional $\Rightarrow$ conservação do momento angular.

Figura 3: Conservação do Momento Linear (invariância por translação espacial)



Fonte: <https://medium.com/starts-with-a-bang/ask-ethan-how-do-symmetries-lead-to-conservation-laws>

Esse resultado formaliza matematicamente a noção de que leis físicas emergem de propriedades de simetria, estabelecendo uma ponte conceitual entre álgebra, análise variacional e física teórica (Kosmann-Schwarzbach, 2011).

Da álgebra estrutural às ciências e tecnologias

A abordagem estrutural consolidada por Emmy Noether ultrapassa os limites da álgebra abstrata e se projeta como linguagem unificadora em diversos domínios da matemática, das ciências naturais e das tecnologias contemporâneas. Ao privilegiar invariâncias, relações e propriedades de finitude, a teoria noetheriana fornece instrumentos conceituais para descrever sistemas complexos por meio de estruturas formais estáveis (Kluth, 2005; Silva; Mesquita Assis, 2022).

Uma das aplicações mais diretas da noção de anel noetheriano ocorre na geometria algébrica moderna, onde variedades são descritas por ideais em anéis de polinômios. O Teorema da Base de Hilbert garante que tais ideais são finitamente gerados, permitindo que conjuntos geométricos definidos por infinitas relações sejam representados por sistemas finitos de equações. Essa propriedade constitui o fundamento da correspondência entre objetos geométricos e estruturas algébricas, formalizada na teoria de esquemas e na noção de espectro de um anel (Hartshorne, 1977; Cox; Little; O'Shea, 2007).

Além disso, a estabilidade estrutural dos anéis noetherianos possibilita o estudo de dimensões algébricas, decomposições primárias e propriedades de regularidade, conceitos essenciais para a compreensão da geometria de espaços algébricos e de singularidades (Schwarz, 2014; Gularte, 2021).

Na física matemática, a contribuição noetheriana introduz um princípio metodológico de largo alcance: leis físicas podem ser derivadas de simetrias estruturais. O teorema que estabelece a correspondência entre simetrias contínuas e quantidades conservadas tornou-se um dos pilares conceituais da mecânica clássica, da teoria quântica de campos e da relatividade geral. Em termos formais, grupos de simetria associados à ação lagrangiana determinam correntes conservadas, oferecendo um critério unificado para a formulação de leis físicas (Kosmann-Schwarzbach, 2011).

Essa perspectiva influencia profundamente o desenvolvimento de teorias gauge, nas quais interações fundamentais são descritas por invariâncias locais. A estrutura matemática subjacente a esses modelos, grupos de Lie, álgebras e representações, reflete diretamente o paradigma estrutural introduzido pela álgebra noetheriana (Weinberg, 1995).

A noção de estrutura invariável sob transformações encontra expressão sistemática na teoria das representações, área que investiga como grupos atuam sobre espaços vetoriais. A finitude estrutural assegurada por condições noetherianas permite classificar representações por meio de módulos finitamente gerados, estabelecendo conexões entre álgebra, topologia e análise funcional (Fulton; Harris, 1991).

Em matemática pura, essas ideias sustentam avanços na teoria dos números algébricos, na cohomologia e na topologia algébrica, campos nos quais propriedades globais são deduzidas a partir de relações estruturais locais.

O impacto da álgebra estrutural estende-se às tecnologias contemporâneas. Em criptografia moderna, estruturas algébricas como anéis e corpos finitos são empregadas na construção de algoritmos de segurança digital, incluindo sistemas baseados em curvas elípticas e códigos corretores de erros (Stinson, 2006; Kluth, 2005). A noção de finitude e decomposição estrutural, típica do pensamento noetheriano, orienta a análise de complexidade e a eficiência de algoritmos simbólicos.

Na computação algébrica, métodos para cálculo com ideais, bases de Gröbner e decomposições estruturais derivam diretamente de princípios estabelecidos pela álgebra noetheriana. Esses instrumentos são aplicados em robótica, modelagem geométrica, teoria de controle e otimização polinomial (Cox; Little; O'Shea, 2007).

Além disso, em ciência de dados e aprendizado de máquina, conceitos de simetria e invariância, formalizados matematicamente a partir do paradigma estrutural, orientam o desenvolvimento de modelos que preservam propriedades essenciais sob transformações, como redes neurais equivariantes e métodos baseados em teoria de grupos (Ferreira, 2024; Levada, 2025).

As aplicações discutidas revelam que a contribuição noetheriana não se restringe a resultados técnicos isolados, mas institui um modo de pensar orientado por estruturas, invariâncias e relações formais (Lima, 2022; Santos, 2016). Essa perspectiva promove a circulação de conceitos entre áreas distintas, permitindo que princípios desenvolvidos na álgebra abstrata operem como ferramentas explicativas na física, na computação e em tecnologias emergentes.

Dessa forma, a álgebra estrutural não apenas reorganiza a matemática, mas também oferece um arcabouço conceitual capaz de articular diferentes níveis de descrição científica sob princípios comuns de simetria, finitude e invariância.

Metodologia

A presente investigação adota como procedimento metodológico a revisão narrativa da literatura, abordagem qualitativa voltada à interpretação crítica de contribuições teóricas e históricas relacionadas à obra de Emmy Noether e ao desenvolvimento da álgebra estrutural. Diferentemente de revisões sistemáticas, a revisão narrativa não se orienta por protocolos rígidos de seleção quantitativa, mas pela construção de um percurso interpretativo capaz de articular contextos históricos, formulações matemáticas e repercussões conceituais em diferentes campos do conhecimento (Prodanov; Freitas, 2013; Rother, 2007).

O levantamento bibliográfico concentrou-se em três eixos temáticos principais: história da matemática e biografia intelectual, incluindo estudos sobre o ambiente científico de Göttingen, o movimento de axiomatização e a trajetória acadêmica de Noether; fundamentos da álgebra abstrata e teoria dos anéis, com ênfase em textos clássicos que sistematizam conceitos estruturais como ideais, anéis noetherianos e homomorfismos; interações entre matemática e física teórica, particularmente trabalhos que discutem o princípio de invariância e suas implicações para leis de conservação.

Foram priorizadas obras de referência amplamente reconhecidas na literatura internacional, artigos históricos originais e monografias especializadas. O critério de seleção considerou relevância conceitual, impacto acadêmico e pertinência ao objetivo interpretativo do estudo.

A análise do material bibliográfico foi conduzida segundo três movimentos complementares: reconstrução histórica, buscando situar a produção noetheriana em seu contexto científico e institucional; exame conceitual, voltado à identificação de princípios estruturais recorrentes nas formulações matemáticas; e integração interdisciplinar, destinada a compreender a circulação de ideias entre álgebra, física e outras áreas científicas.

A leitura interpretativa privilegiou a identificação de continuidades conceituais entre diferentes autores e tradições teóricas, evitando uma apresentação meramente cronológica dos resultados.

A escolha da revisão de literatura justifica-se pela natureza do objeto investigado. A obra de Noether não constitui apenas um conjunto de resultados técnicos, mas um deslocamento epistemológico que redefine critérios de generalidade e explicação

matemática. Tal fenômeno exige um tratamento interpretativo capaz de articular dimensões históricas, formais e filosóficas em uma perspectiva integrada (Corry, 1996; Carvalho; Silva; Bianchi, 2021).

Discussão

A análise histórica e conceitual desenvolvida nas seções anteriores permite compreender a obra de Emmy Noether como um ponto de inflexão epistemológica na matemática moderna. Mais do que introduzir novos resultados, sua produção reformula o próprio critério de inteligibilidade matemática: a explicação passa a residir nas relações estruturais entre objetos, e não em propriedades isoladas ou em procedimentos computacionais particulares. Tal deslocamento tem implicações profundas tanto para a organização interna da álgebra quanto para a articulação entre matemática e física.

A emergência da álgebra estrutural, do ponto de vista histórico, evidencia um movimento mais amplo de axiomatização que atravessa a matemática do início do século XX. Contudo, a originalidade da abordagem noetheriana reside na combinação entre abstração formal e capacidade de generalização operacional. A noção de anel noetheriano, por exemplo, não constitui apenas uma definição técnica, mas um princípio de finitude que possibilita controlar estruturas potencialmente infinitas por meio de condições internas relativamente simples. Essa concepção estabelece uma nova forma de economia teórica, na qual a generalidade não compromete a eficácia explicativa (Corry, 1996).

Sob a perspectiva matemática, os resultados analisados revelam uma profunda reorganização da disciplina em torno de propriedades invariantes. A equivalência entre a condição de cadeia ascendente e a geração finita de ideais exemplifica essa mudança de enfoque: o comportamento global de uma estrutura passa a ser deduzido de princípios formais de estabilidade. Essa lógica estrutural, posteriormente incorporada pela geometria algébrica e pela teoria das representações, redefine a noção de objeto matemático como entidade relacional, cuja identidade depende das transformações que preserva (Atiyah; Macdonald, 1969; Hartshorne, 1977).

A articulação entre simetria e conservação, formalizada no teorema de Noether, amplia ainda mais o alcance dessa racionalidade. Ao demonstrar que leis físicas emergem de invariâncias estruturais da ação, a matemática deixa de ser apenas instrumento descritivo e passa a desempenhar função constitutiva na formulação de teorias físicas. A

discussão contemporânea em torno de teorias gauge e da estrutura das interações fundamentais confirma a permanência desse paradigma, no qual a simetria opera como princípio organizador do conhecimento científico (Kosmann-Schwarzbach, 2011; Weinberg, 1995).

Outro aspecto relevante diz respeito à circulação interdisciplinar das ideias noetherianas. Conceitos originalmente desenvolvidos no interior da álgebra abstrata tornaram-se ferramentas essenciais em áreas como criptografia, teoria de códigos, computação simbólica e modelagem matemática. Essa difusão evidencia que a noção de estrutura não constitui apenas um recurso formal, mas um modo de organização do pensamento científico capaz de transitar entre diferentes domínios teóricos e tecnológicos (Cox; Little; O'Shea, 2007).

Entretanto, a consolidação da álgebra estrutural também suscita questões interpretativas. Alguns historiadores da matemática argumentam que a crescente abstração pode distanciar a teoria de sua intuição geométrica original, enquanto outros defendem que tal abstração representa precisamente o mecanismo que possibilita unificação conceitual e expansão disciplinar. Nesse debate, a obra de Noether aparece como exemplo paradigmático de como a generalidade formal pode coexistir com fertilidade matemática concreta (Row, 1988).

A discussão evidencia que o legado noetheriano não se limita a um conjunto de teoremas ou técnicas, mas constitui uma transformação nos fundamentos epistemológicos da matemática e de sua relação com as ciências naturais. A centralidade das estruturas, a primazia das invariâncias e a busca por princípios gerais configuram um modelo de racionalidade que continua a orientar a pesquisa científica contemporânea.

Conclusões

A análise desenvolvida ao longo deste capítulo permite reconhecer que a obra de Emmy Noether representa uma das transformações mais profundas na história da matemática moderna. Sua contribuição não se limita à introdução de novos resultados técnicos, mas redefine os próprios fundamentos da explicação matemática ao privilegiar estruturas, relações e invariâncias como princípios organizadores do conhecimento. Esse deslocamento conceitual inaugura uma forma de racionalidade científica orientada pela generalidade e pela coerência interna das teorias.

Evidenciou-se, do ponto de vista histórico, que a emergência da álgebra estrutural ocorre em um momento de intensas transformações científicas, no qual a matemática passa a assumir papel constitutivo na formulação de teorias físicas e na organização de novos campos do saber. A reformulação dos conceitos de anel, ideal e homomorfismo, bem como a introdução de critérios de finitude estrutural, consolidaram um vocabulário matemático capaz de unificar domínios anteriormente dispersos.

No plano conceitual, os resultados associados à condição noetheriana e ao princípio de invariância revelam uma profunda convergência entre matemática e física. A correspondência entre simetria e conservação exemplifica a potência explicativa de uma abordagem fundada em propriedades estruturais, mostrando que regularidades empíricas podem ser compreendidas como manifestações de princípios formais gerais. Tal perspectiva permanece central em áreas contemporâneas como teoria quântica de campos, geometria algébrica e computação algébrica.

As aplicações discutidas indicam ainda que o legado noetheriano transcende a matemática pura, influenciando tecnologias e metodologias científicas que dependem de modelagem abstrata e análise estrutural. A circulação de conceitos entre disciplinas confirma que a noção de estrutura opera como linguagem comum para a descrição de sistemas complexos, promovendo integração conceitual entre diferentes áreas do conhecimento.

Diante desse panorama, conclui-se que a obra de Noether constitui não apenas um marco na evolução da álgebra, mas também um paradigma duradouro para a ciência contemporânea. Ao estabelecer a primazia das relações sobre os objetos e das invariâncias sobre as formas particulares, sua produção intelectual oferece um modelo de pensamento que continua a orientar investigações matemáticas e científicas no século XXI. A compreensão desse legado revela, portanto, não apenas um capítulo da história da matemática, mas um dos fundamentos conceituais da ciência moderna.

Referências

ANDRADE, Maria Helena de; OLIVEIRA, Rannyelly Rodrigues de. Amalie Emmy Noether: a presença matemática feminina na história da matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 20, p. 105-116, 2020.

- ATIYAH, Michael F.; MACDONALD, Ian G. **Introduction to Commutative Algebra**. Reading: Addison-Wesley, 1969.
- CARVALHO, Tássio Mascarenhas de; SILVA, Cristiane Rodrigues da; BIANCHI, Eliane Maria Pires Giavina. Análise crítica da pesquisa narrativa. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 8, p. e54510817743-e54510817743, 2021.
- CORRY, Leo. **Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures**. 2. ed. Basel: Birkhäuser, 1996.
- COX, David; LITTLE, John; O'SHEA, Donal. **Ideals, Varieties, and Algorithms**. 3. ed. New York: Springer, 2007.
- DANTAS, Natanael Oliveira. **Estruturas Algébricas I**. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009. Disponível em: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/09113809042014Estruturas_Algebricas_I_Aula_1.pdf. Acesso 14 fev. 2026.
- DICK, Auguste. **Emmy Noether 1882–1935**. Boston: Birkhäuser, 1981.
- FERREIRA, Poliana N. **Aprendizado de máquina**. São Paulo: Editora Senac, 2024.
- FULTON, William; HARRIS, Joe. **Representation Theory: A First Course**. New York: Springer, 1991.
- GULARTE, Gabriela Gomes. **Conjuntos Algébricos: propriedades e resultados**. 2021. 61 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.
- HARTSHORNE, Robin. **Algebraic Geometry**. New York: Springer, 1977.
- HUNGERFORD, Thomas W. **Algebra**. New York: Springer, 1974.
- JESUS, Samara; GOMES, Leonardo. A importância de Emmy Noether para a inclusão das mulheres no Ensino Superior e no desenvolvimento dos estudos matemáticos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 798-808, 2020.
- KLUTH, Verilda Speridião. **Estruturas da álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento**. 2005. vii, 192 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005.
- KOSMANN-SCHWARZBACH, Yvette. **The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century**. New York: Springer, 2011.
- LANG, Serge. **Algebra**. 3. ed. New York: Springer, 2002.

LEVADA, Alexandre LM. Algoritmos essenciais para aprendizado de máquina. Apostila Departamento de Computação – UFSCar, 2025. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/397332111_Algoritmos_essenciais_para_aprendizado_de_maquina. Acesso 14 fev. 2026.

LIMA, Renata Oliveira de. **A invisibilidade das mulheres na matemática: um estudo de caso desde primórdios até a contemporaneidade**. 2022. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal da Paraíba UFPB/CCAE, Rio Tinto, 2022.

MILIES, César Polcino. Breve história da álgebra abstrata. **Minicurso apresentado na II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática–SBM**. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/m18.pdf>. Acesso 14 fev. 2026.

NOETHER, Emmy. Idealtheorie in Ringbereichen. **Mathematische Annalen**, Berlin, v. 83, p. 24–66, 1921.

NOETHER, Emmy. Invariante Variationsprobleme. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, Göttingen, p. 235–257, 1918.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas de Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RIBEIRO, Willian. **Estruturas algébricas**. São Paulo: Editora Senac, 2025.

ROTHER, Edna Terezinha. Revisão sistemática X revisão narrativa. **Acta Paulista de Enfermagem**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. v–vi, 2007.

ROW, Jeremy Gray; ROW, Wolfgang. **Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work**. New York: Springer, 1988.

SANTOS, Daniela Miranda Fernandes. **A relação entre a álgebra acadêmica e a álgebra escolar em um curso de licenciatura em matemática: concepções de alunos e professores**. 2016 228 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2016.

SCHWARZ, Joao Fernando. **Problema de Noether não-comutativo**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, Isadora Ferreira; MESQUITA ASSIS, Aline Mota de. O movimento histórico da vida de Emmy Noether. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, n. 44, p. 25-44, 2022.

STINSON, Douglas R. **Cryptography: Theory and Practice**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2006.

WEINBERG, Steven. **The Quantum Theory of Fields**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

JOHN VON NEUMANN: CÁLCULO, DECISÃO E A MATEMÁTICA DO MUNDO CONTEMPORÂNEO

*Francilino Paulo de Sousa*³⁵

*Rildo Alves do Nascimento*³⁶

*Carlos Daniel Chaves Mourão*³⁷

*Ewando José de Sousa*³⁸

*Francisco Cleuton de Araújo*³⁹

DOI: 10.47538/AC-2026.39-08

Resumo

O capítulo dedica-se à obra de John von Neumann, pensador cuja atuação multifacetada sintetiza muitas das transformações científicas do século XX. Em um contexto marcado pela consolidação da matemática abstrata, pelo avanço da física moderna e pelo surgimento das primeiras tecnologias computacionais, von Neumann destacou-se pela capacidade de transitar entre diferentes campos, articulando rigor matemático, modelagem teórica e aplicações concretas. Sua produção reflete uma ciência cada vez mais interligada a problemas de ordem técnica, econômica e social. O texto relaciona elementos biográficos e históricos à análise de contribuições que atravessam a lógica, a teoria dos conjuntos, a mecânica quântica e a matemática aplicada. A formalização dos fundamentos da mecânica quântica, o desenvolvimento da teoria dos jogos e a concepção de arquiteturas computacionais são apresentados como expressões de uma mesma racionalidade matemática, orientada pela abstração estrutural e pela capacidade de modelar sistemas complexos. Nesse sentido, a matemática aparece como linguagem central para compreender e intervir em fenômenos diversos. Objetiva-se, assim, revelar como o pensamento de von Neumann antecipa questões que se tornariam centrais na ciência contemporânea, como a computação, a tomada de decisão e a análise de sistemas dinâmicos complexos. O texto busca, assim, uma leitura que reconhece em von Neumann um dos principais articuladores entre a matemática teórica e o mundo tecnológico moderno.

Palavras-chave: John von Neumann; Matemática do Século XX; Computação; Teoria dos Jogos.

³⁵ Ivy Enber Christian University. fpslm@yahoo.com.br.

³⁶ Instituto Superior de Teologia Aplicada (INTA). rildo.alves23@gmail.com.

³⁷ Instituto Federal do Ceará (IFCE). carlosdaniel.math@gmail.com.

³⁸ Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF). ewandojose@gmail.com.

³⁹ Universidade Federal do Ceará (UFC). cleutonaraujo86@gmail.com.

Introdução

A história da ciência do século XX revela uma mudança decisiva no estatuto da matemática: de disciplina voltada predominantemente à estruturação interna de seus próprios objetos, ela passa a desempenhar papel central na modelagem de fenômenos físicos, econômicos e tecnológicos (Proença Rosa, 2010; Pianezzer, 2025). Nesse cenário de crescente interdependência entre teoria e aplicação, a figura de John von Neumann emerge como uma síntese singular dessa transformação. Sua produção intelectual percorre áreas diversas, da lógica matemática à mecânica quântica, da teoria dos jogos à arquitetura de computadores, e evidencia uma forma de pensamento orientada pela abstração estrutural aliada à eficácia operacional. O estudo de sua obra permite compreender como a matemática se consolidou como linguagem privilegiada para descrever sistemas complexos e orientar decisões em contextos de incerteza (Muniz Junior, 2021; Vonneuman, 1996; Kowaltowski, 1996).

O contexto histórico no qual se insere a atuação de von Neumann é marcado por profundas reconfigurações científicas e tecnológicas. A formalização dos fundamentos da matemática, impulsionada pelos programas logicistas e formalistas, coincide com a emergência da física quântica e com o desenvolvimento das primeiras máquinas computacionais. Paralelamente, as transformações econômicas e geopolíticas do período demandam novos instrumentos analíticos capazes de lidar com estratégias, probabilidades e processos dinâmicos. Nesse ambiente, a matemática deixa de ser apenas uma linguagem de descrição para tornar-se também uma ferramenta de previsão, simulação e decisão.

A problematização que orienta este estudo parte da seguinte questão: de que modo a obra de John von Neumann articula rigor matemático e aplicabilidade científica, antecipando formas contemporâneas de pensar a relação entre cálculo, decisão e tecnologia? Investigar essa questão implica examinar não apenas resultados específicos, mas também a racionalidade subjacente ao seu trabalho, uma racionalidade que privilegia estruturas formais capazes de representar sistemas complexos e interdependentes.

O objetivo deste trabalho consiste em analisar a contribuição de von Neumann como elo entre a matemática teórica e o mundo tecnológico moderno, evidenciando a unidade conceitual que atravessa suas investigações. Busca-se compreender como seus desenvolvimentos na fundamentação da mecânica quântica, na teoria dos jogos e na concepção de arquiteturas computacionais expressam uma mesma visão da matemática

como instrumento de modelagem universal. Pretende-se, ainda, situar tais contribuições no contexto histórico de sua produção, articulando elementos biográficos, científicos e filosóficos.

A relevância do estudo reside na possibilidade de reconhecer, na obra de von Neumann, a antecipação de temas que se tornariam centrais na ciência contemporânea, como a computação digital, a análise de decisões estratégicas e o estudo de sistemas dinâmicos complexos. Ao examinar a convergência entre abstração matemática e aplicabilidade tecnológica em seu pensamento, o capítulo contribui para a compreensão do papel estruturante da matemática na configuração do mundo contemporâneo, evidenciando como conceitos formais podem orientar práticas científicas, técnicas e sociais em escala global.

Trajetória histórica e intelectual de John von Neumann

A compreensão do pensamento de John von Neumann exige situá-lo no ambiente intelectual que moldou a matemática e as ciências exatas nas primeiras décadas do século XX. Nascido em 1903, em Budapeste, von Neumann foi formado em um contexto cultural marcado pela excelência da escola matemática húngara, cuja tradição combinava rigor formal e inventividade técnica. Sua formação precoce incluiu estudos em química e matemática, realizados simultaneamente em instituições europeias de destaque, refletindo desde cedo uma disposição para a transversalidade disciplinar (Macrae, 1992).

Figura 1: John von Neumann (anos 1940)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

O período entre as duas guerras mundiais constituiu um momento decisivo para a reorganização dos fundamentos da matemática. O surgimento da teoria axiomática dos conjuntos e o desenvolvimento da lógica matemática impulsionaram debates sobre consistência, completude e formalização do conhecimento científico. Nesse ambiente, von Neumann contribuiu significativamente para a teoria dos conjuntos, especialmente por meio da construção hierárquica conhecida como universo cumulativo, que oferece uma estrutura para evitar paradoxos associados a definições auto-referenciais (Kanamori, 2009). Tal contribuição insere-se no esforço mais amplo de consolidação da matemática como sistema formal rigorosamente estruturado.

A migração de von Neumann para os Estados Unidos, no início da década de 1930, coincidiu com a institucionalização da pesquisa científica moderna e com o fortalecimento de centros de investigação interdisciplinares. No Institute for Advanced Study, em Princeton, sua produção alcança amplitude notável, abrangendo desde a análise funcional até a física matemática. Nesse período, publica *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (1932), obra que estabelece uma formulação axiomática da mecânica quântica baseada na teoria de operadores em espaços de Hilbert. Essa abordagem representa um marco na formalização matemática da física quântica, ao fornecer um arcabouço conceitual que integra observáveis, estados e medições em uma estrutura unificada (Von Neumann, 1932).

A década de 1940 inaugura uma nova etapa em sua trajetória, caracterizada pela intensificação do diálogo entre matemática e problemas estratégicos. Em colaboração com Oskar Morgenstern, von Neumann publica *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), obra fundadora da teoria dos jogos moderna. Nesse trabalho, a análise matemática de decisões estratégicas sob condições de conflito e cooperação passa a ser tratada de modo sistemático, inaugurando um campo que influenciaria profundamente a economia, a ciência política e a teoria da decisão (Von Neumann; Morgenstern, 1944).

A sua participação no desenvolvimento dos primeiros computadores eletrônicos consolida uma das mais duradouras contribuições à ciência contemporânea: o modelo lógico de arquitetura computacional baseado no armazenamento de programas na memória. Essa concepção, frequentemente associada à chamada “arquitetura de von Neumann”, estabelece princípios estruturais que orientam o funcionamento da

computação digital até os dias atuais (Aspray, 1990). O projeto de computadores eletrônicos não representou, em sua trajetória, um afastamento da matemática teórica, mas antes a extensão natural de um programa intelectual voltado à modelagem formal de processos complexos.

A amplitude de sua atuação revela uma característica distintiva: a recusa de fronteiras rígidas entre disciplinas. Em vez de compartimentar problemas, von Neumann buscava estruturas matemáticas capazes de operar em múltiplos domínios. Tal postura corresponde a uma mudança mais ampla no estatuto da ciência do século XX, na qual a matemática passa a desempenhar função organizadora de sistemas teóricos e tecnológicos (Araujo, 2017; Ribeiro, 2025). Nesse sentido, sua obra pode ser compreendida não apenas como conjunto de resultados específicos, mas como expressão de um novo paradigma científico, no qual abstração e aplicação constituem dimensões complementares de um mesmo empreendimento intelectual.

Desse modo, a trajetória histórica de von Neumann ilustra o processo pelo qual a matemática se transforma em instrumento central para a compreensão e a intervenção no mundo contemporâneo. Sua produção não apenas reflete as transformações científicas de sua época, mas contribui decisivamente para moldar o horizonte conceitual no qual a ciência e a tecnologia modernas se desenvolveriam.

Estruturas, teoremas e formulações

A contribuição de John von Neumann à matemática caracteriza-se pela construção de estruturas formais capazes de unificar problemas provenientes de diferentes domínios científicos. Em vez de privilegiar técnicas isoladas, sua abordagem enfatiza a organização axiomática e o estudo de operadores, espaços funcionais e modelos de decisão. Nesta seção, apresentam-se alguns dos principais resultados matemáticos associados à sua obra, destacando teoremas, formulações e conceitos que se tornaram pilares da matemática aplicada contemporânea (Silva; Puhl, 2022; Muniz Junior, 2021).

Operadores em Espaços de Hilbert e o Teorema Espectral

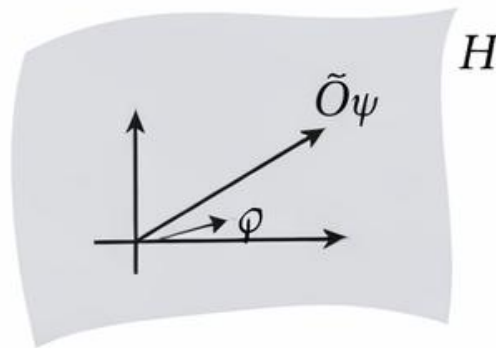
A formalização matemática da mecânica quântica proposta por von Neumann baseia-se na teoria de operadores lineares em espaços de Hilbert. Seja H um espaço de

Hilbert complexo e $A: H \rightarrow H$ um operador linear auto-adjunto. O Teorema Espectral estabelece que tal operador pode ser representado por uma decomposição integral em termos de projeções espectrais:

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE(\lambda),$$

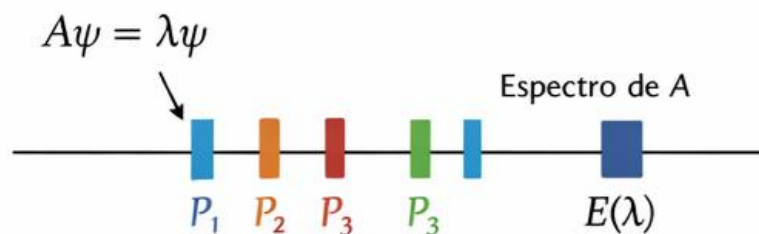
onde $\sigma(A)$ é o espectro de A e $E(\lambda)$ é uma medida espectral projetiva. Essa formulação permite interpretar observáveis físicos como operadores auto-adjuntos e estados quânticos como vetores ou operadores de densidade no espaço de Hilbert (Von Neumann, 1932).

Figura 2: Representação Esquemática (Espaço de Hilbert)



Fonte: Elaboração Própria (2026)

Figura 3: Decomposição Espectral



Fonte: Elaboração Própria (2026)

Tal estrutura fornece a base para a regra de medição na mecânica quântica, segundo a qual o valor esperado de um observável A em um estado descrito por um vetor normalizado $\psi \in H$ é dado por:

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle.$$

Essa formalização representa uma síntese entre álgebra funcional e teoria da medida, configurando um dos primeiros exemplos de matematização completa de uma teoria física.

Álgebras de Operadores e Fatores de von Neumann

No desenvolvimento da análise funcional, von Neumann introduziu, em colaboração com Francis Murray, o conceito de álgebras de operadores fechadas na topologia fraca, hoje conhecidas como álgebras de von Neumann. Formalmente, uma álgebra de von Neumann é uma subálgebra M de operadores limitados em um espaço de Hilbert que é fechada sob adjunção e sob limites na topologia fraca de operadores.

Um resultado central dessa teoria é a classificação dos fatores, álgebras de operadores com centro trivial, em tipos I, II e III, distinção baseada na estrutura das projeções e na noção de dimensão não inteira. Essa classificação possui implicações profundas na teoria quântica de campos e na mecânica estatística (Murray; Von Neumann, 1936).

Teorema Minimax e Fundamentos da Teoria dos Jogos

No campo da matemática aplicada à decisão estratégica, destaca-se o Teorema Minimax, demonstrado por von Neumann em 1928. Seja A uma matriz de pagamentos de um jogo de soma zero com estratégias mistas representadas por distribuições de probabilidade. O teorema afirma que:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y,$$

onde X e Y são os conjuntos convexos de estratégias mistas dos jogadores. O resultado garante a existência de um valor do jogo e de estratégias ótimas em equilíbrio.

Esse teorema constitui um marco na análise matemática de decisões racionais sob conflito, introduzindo técnicas de convexidade, dualidade e otimização que posteriormente influenciariam a programação linear e a teoria econômica (Von Neumann; Morgenstern, 1944).

Entropia Quântica e Estados Mistos

Outra contribuição conceitual relevante é a formulação da entropia quântica, definida para um operador de densidade ρ por:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho).$$

Essa expressão generaliza a entropia de Shannon ao contexto quântico e permite quantificar incerteza e informação em sistemas físicos microscópicos. A noção de estado misto, representado por operadores positivos de traço unitário, constitui elemento central na descrição estatística de sistemas quânticos (Von Neumann, 1932; Nielsen; Chuang, 2010).

Teorema Ergódico Médio

No estudo de sistemas dinâmicos, von Neumann demonstrou o Teorema Ergódico Médio, que estabelece a convergência, em média quadrática, de sequências de operadores unitários associadas à evolução temporal de um sistema. Seja U um operador unitário em um espaço de Hilbert H . Então, para qualquer $x \in H$, a média temporal

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x$$

converge para a projeção de x no subespaço dos vetores invariantes por U . Esse resultado fornece base matemática para a relação entre médias temporais e propriedades estatísticas de sistemas físicos (Von Neumann, 1932; Petersen, 1983).

Unidade Conceitual das Formulações

Os resultados apresentados, embora situados em campos distintos, compartilham um princípio metodológico comum: a tradução de fenômenos complexos em estruturas formais passíveis de análise rigorosa. Operadores, espaços funcionais, convexidade e medidas espectrais constituem instrumentos recorrentes em sua produção. Essa recorrência revela uma concepção estrutural da matemática, na qual diferentes problemas são compreendidos como manifestações de propriedades formais análogas.

Desse modo, a obra matemática de von Neumann não se limita à resolução de questões específicas, mas propõe um modo de organização do conhecimento científico baseado na abstração operacional e na generalidade estrutural.

Conexões interdisciplinares e impacto tecnológico

A produção de John von Neumann distingue-se pela capacidade de converter estruturas matemáticas abstratas em instrumentos operacionais para a análise de sistemas reais. Suas contribuições ultrapassam a formulação teórica, alcançando áreas como economia, ciência da computação, física aplicada, teoria dos sistemas e engenharia. Esta seção examina como conceitos desenvolvidos por von Neumann se articulam com diferentes campos científicos e tecnológicos, evidenciando a centralidade da modelagem matemática na organização do mundo contemporâneo.

O desenvolvimento dos primeiros computadores eletrônicos introduziu um novo paradigma para o tratamento da informação. A concepção de arquitetura baseada em programa armazenado, frequentemente associada ao modelo de von Neumann, estabelece que instruções e dados são representados numericamente e armazenados na mesma memória. Essa estrutura pode ser formalizada como um sistema dinâmico discreto, no qual o estado da máquina evolui por aplicação iterada de funções computáveis sobre cadeias finitas de símbolos (Aspray, 1990).

Tal concepção aproxima-se da teoria da computabilidade e da lógica formal, ao tratar processos físicos como sequências de transformações simbólicas regidas por regras explícitas. A ideia de máquina universal, capaz de simular qualquer algoritmo, conecta a arquitetura computacional à noção de função efetivamente calculável, consolidando a base teórica da ciência da computação moderna (Davis, 2000).

Além disso, o modelo de armazenamento de programas permite a implementação de métodos numéricos para resolução aproximada de equações diferenciais, otimização e simulação estocástica. A computação torna-se, assim, extensão operacional da análise matemática, ampliando o alcance empírico de teorias abstratas.

A formalização matemática de interações estratégicas constitui uma das contribuições mais influentes de von Neumann. A teoria dos jogos fornece instrumentos para modelar decisões interdependentes em contextos de conflito ou cooperação, estruturando problemas econômicos, políticos e sociais em termos de estratégias, utilidades e equilíbrios.

Em economia, a noção de equilíbrio estratégico possibilita analisar mercados, negociações e mecanismos de alocação de recursos. A estrutura matemática introduzida por von Neumann e Morgenstern fundamenta a teoria da utilidade esperada, segundo a qual escolhas racionais sob incerteza podem ser representadas por funções de valor definidas sobre distribuições de probabilidade (Von Neumann; Morgenstern, 1944).

Esse formalismo estende-se à biologia evolutiva, na qual estratégias são interpretadas como comportamentos adaptativos sujeitos à seleção natural. Modelos evolutivos de competição e cooperação utilizam estruturas matemáticas derivadas da teoria dos jogos para descrever dinâmicas populacionais e estabilidade de estratégias (Smith, 1982).

A formulação axiomática da mecânica quântica proposta por von Neumann estabelece uma ponte duradoura entre matemática pura e física teórica. O uso de operadores em espaços de Hilbert não apenas fornece descrição rigorosa de sistemas microscópicos, mas também fundamenta o conceito moderno de informação quântica.

A teoria da informação quântica, ao generalizar a noção de informação clássica para estados físicos, baseia-se diretamente na representação de estados por operadores de densidade e na entropia quântica. Esses conceitos permitem quantificar correlações não

clássicas, como o emaranhamento, e constituem base teórica para criptografia quântica e computação quântica (Nielsen; Chuang, 2010).

Na física estatística, métodos ergódicos e operadores lineares são utilizados para descrever a evolução macroscópica de sistemas com grande número de graus de liberdade. A abordagem operatorial contribui para a compreensão de irreversibilidade, equilíbrio e transições de fase, demonstrando a eficácia da análise funcional na descrição de fenômenos físicos complexos (Ruelle, 2004).

Um aspecto particularmente atual do legado de von Neumann reside na modelagem de sistemas complexos, caracterizados por múltiplos elementos interdependentes e comportamento emergente. A combinação de teoria da decisão, dinâmica não linear e computação numérica fornece ferramentas para analisar fenômenos como redes econômicas, sistemas ecológicos e estruturas tecnológicas.

Sua proposta de autômatos autorreprodutores, formulada no contexto da teoria da computação, antecipa estudos contemporâneos sobre vida artificial e sistemas auto-organizados. Esses modelos descrevem entidades capazes de replicar sua própria estrutura por meio de regras locais, estabelecendo conexões entre biologia teórica, lógica e ciência da computação (Burks, 1966).

A interdisciplinaridade característica de sua obra manifesta-se, portanto, na capacidade de traduzir processos naturais e sociais em estruturas matemáticas passíveis de simulação e análise formal. Tal perspectiva sustenta a visão da matemática como linguagem universal para a investigação de sistemas dinâmicos e adaptativos.

As aplicações examinadas evidenciam que o trabalho de von Neumann não consiste em uma coleção dispersa de contribuições, mas em um programa intelectual orientado pela modelagem formal de processos complexos. Computação, decisão estratégica e física matemática compartilham uma base conceitual comum: a representação abstrata de sistemas por meio de estruturas operacionais e a análise de sua evolução sob regras definidas (Silva, 1998).

Essa unidade conceitual contribuiu para redefinir o papel da matemática na ciência contemporânea, deslocando-a de instrumento descritivo para mecanismo estruturante da investigação científica e tecnológica. O impacto de suas ideias permanece visível na organização dos sistemas computacionais, na análise econômica e na física teórica,

demonstrando a permanência de um paradigma matemático voltado à compreensão e à transformação do mundo.

Metodologia

O presente estudo adota como procedimento metodológico a revisão narrativa da literatura, abordagem qualitativa voltada à interpretação crítica e à integração conceitual de produções científicas relevantes para um determinado tema. Diferentemente de revisões sistemáticas, que seguem protocolos rígidos de seleção e análise estatística de evidências, a revisão narrativa permite examinar a evolução histórica de ideias, identificar convergências teóricas e reconstruir contextos intelectuais mais amplos (Grant; Booth, 2009; Rother, 2007).

O *corpus* analisado foi constituído por obras primárias de John von Neumann e por literatura secundária especializada em história da matemática, física matemática, teoria dos jogos e ciência da computação. Foram priorizados textos considerados fundamentais para a compreensão de sua produção intelectual, incluindo monografias clássicas, artigos fundadores e estudos historiográficos amplamente reconhecidos.

Entre as fontes primárias, destacam-se trabalhos relacionados à fundamentação da mecânica quântica, à teoria dos jogos e à análise funcional. A literatura secundária inclui estudos interpretativos que situam essas contribuições no contexto científico do século XX, permitindo uma leitura que articula desenvolvimento conceitual e transformações históricas (Aspray, 1990; Macrae, 1992).

A seleção das obras baseou-se em três critérios principais: relevância histórica, considerando textos que marcaram mudanças conceituais duradouras; impacto interdisciplinar, privilegiando contribuições que influenciaram múltiplos campos científicos; e consistência teórica, priorizando trabalhos que apresentam formalizações matemáticas estruturadas.

Após a seleção, o material foi organizado segundo eixos analíticos correspondentes às dimensões histórica, matemática e aplicada do pensamento de von Neumann. Essa organização permitiu identificar padrões conceituais recorrentes, como o uso de estruturas operatoriais, a formalização axiomática e a modelagem de sistemas complexos.

Conduziu-se a análise por meio de leitura interpretativa e comparativa das fontes, buscando reconstruir a lógica interna das formulações matemáticas e suas implicações epistemológicas. O procedimento incluiu: identificação de conceitos fundamentais e sua evolução ao longo das obras; comparação entre formulações teóricas e contextos de aplicação; análise de convergências entre diferentes áreas de investigação; e interpretação das contribuições à luz da história da ciência e da filosofia da matemática.

Esse método privilegia a compreensão da unidade conceitual subjacente à diversidade temática da produção de von Neumann, enfatizando relações estruturais entre resultados matemáticos e problemas científicos concretos (Goldstine, 1972).

Como toda revisão, o estudo não pretende esgotar a totalidade da produção bibliográfica existente, nem estabelecer hierarquias quantitativas entre contribuições. A ênfase recai na interpretação teórica e histórica, o que implica seleção orientada por relevância conceitual. Tal abordagem favorece a profundidade analítica, embora não permita generalizações estatísticas ou sínteses quantitativas de evidências (Baumeister; Leary, 1997).

A escolha da revisão narrativa mostra-se adequada ao objetivo do capítulo, que consiste em compreender a unidade intelectual da obra de von Neumann e seu impacto na ciência contemporânea. A natureza interdisciplinar de suas contribuições requer um método capaz de integrar perspectivas históricas, matemáticas e tecnológicas em um quadro interpretativo coerente. Nesse sentido, a revisão narrativa possibilita examinar a continuidade entre abstração teórica e aplicação científica, elemento central do problema investigado.

Implicações teóricas e limites da formalização

É possível perceber uma coerência interna que transcende a diversidade temática de sua produção. Em diferentes domínios, fundamentos da mecânica quântica, teoria dos jogos, análise funcional e computação, observa-se a recorrência de um mesmo princípio metodológico: a construção de estruturas formais capazes de representar sistemas complexos e de orientar decisões sob condições de incerteza. Essa unidade conceitual permite interpretar sua obra como expressão de uma racionalidade matemática orientada pela modelagem operacional do mundo.

Do ponto de vista epistemológico, destaca-se a substituição progressiva de descrições qualitativas por representações estruturais baseadas em operadores, espaços funcionais e modelos probabilísticos. Tal movimento indica uma transformação no papel da matemática na ciência contemporânea. Em vez de linguagem auxiliar, a matemática passa a constituir o próprio ambiente conceitual no qual teorias científicas são formuladas. A formalização da mecânica quântica exemplifica esse deslocamento: a teoria física não apenas utiliza ferramentas matemáticas, mas é estruturada por elas (Von Neumann, 1932).

A teoria dos jogos fornece outro exemplo de integração entre formalização e aplicabilidade. Ao representar interações estratégicas por estruturas matemáticas rigorosas, von Neumann introduz um modelo de racionalidade que pode ser aplicado a contextos econômicos, políticos e biológicos. A noção de equilíbrio, derivada de propriedades de convexidade e otimização, transforma decisões humanas em objetos de análise formal. Esse processo contribui para a matematização das ciências sociais e para o desenvolvimento de métodos quantitativos de previsão e planejamento (Von Neumann; Morgenstern, 1944).

No âmbito tecnológico, a arquitetura computacional baseada em programa armazenado evidencia a transição da matemática do plano teórico para a esfera da implementação material. O computador digital pode ser interpretado como realização física de um sistema formal, no qual operações simbólicas são executadas automaticamente. Essa perspectiva reforça a ideia de continuidade entre lógica, cálculo e tecnologia, característica central da ciência contemporânea (Aspray, 1990).

Entretanto, a amplitude das aplicações de suas ideias suscita questões críticas. A formalização de decisões e processos sociais, embora amplie a capacidade de previsão e controle, também levanta problemas relativos aos limites da modelagem matemática. Sistemas sociais e naturais apresentam níveis de complexidade que frequentemente excedem a capacidade de representação de modelos formais. A própria teoria dos jogos, em suas aplicações econômicas, enfrenta desafios relacionados à racionalidade limitada, à informação incompleta e à instabilidade dinâmica dos sistemas reais (Smith, 1982).

Outro aspecto relevante refere-se à relação entre abstração matemática e responsabilidade tecnológica. A participação de von Neumann em projetos científicos ligados à engenharia militar evidencia o potencial ambivalente do conhecimento matemático quando incorporado a sistemas tecnológicos de grande escala. Tal dimensão

histórica reforça a necessidade de compreender a matemática não apenas como empreendimento intelectual, mas como força estruturante de práticas sociais e políticas.

A discussão das contribuições de von Neumann permite, assim, identificar três eixos interpretativos principais: a centralidade da estrutura matemática na organização do conhecimento científico; a integração entre teoria e aplicação como característica definidora da ciência moderna; e a emergência de um paradigma no qual computação, decisão e modelagem constituem dimensões interdependentes.

Desse modo, a obra de von Neumann não apenas acompanha transformações científicas do século XX, mas participa ativamente de sua configuração conceitual. Seu legado evidencia a consolidação de uma ciência orientada por estruturas formais, capaz de operar simultaneamente nos planos teórico, tecnológico e social.

À Guisa de conclusão

A trajetória intelectual de John von Neumann mostra uma transformação profunda no papel da matemática na ciência contemporânea. Ao articular formalização rigorosa, modelagem abstrata e aplicação tecnológica, sua obra estabelece um paradigma no qual estruturas matemáticas não apenas descrevem fenômenos, mas organizam a própria investigação científica. A análise desenvolvida ao longo deste capítulo permitiu reconhecer a unidade conceitual subjacente à diversidade de suas contribuições, evidenciando a centralidade de operadores, estruturas funcionais e modelos estratégicos como instrumentos de compreensão de sistemas complexos.

Verificou-se que a produção de von Neumann está intrinsecamente ligada às transformações científicas do século XX, período marcado pela consolidação da matemática abstrata, pela formalização da física moderna e pelo surgimento da computação digital. Sua atuação não se limita à participação nesses processos, mas contribui decisivamente para sua configuração, especialmente ao estabelecer pontes entre teoria matemática e implementação tecnológica.

No plano teórico, a formalização da mecânica quântica, o desenvolvimento da teoria dos jogos e a estruturação da análise funcional revelam uma concepção unificada da matemática como linguagem de sistemas dinâmicos. Esses resultados demonstram que fenômenos aparentemente heterogêneos podem ser compreendidos por meio de

princípios estruturais comuns, reforçando a ideia de que a abstração matemática constitui ferramenta privilegiada para a investigação científica.

No âmbito aplicado, as contribuições de von Neumann evidenciam a expansão da matemática para domínios tradicionalmente considerados externos ao seu campo, como economia, ciência da computação e engenharia. A arquitetura computacional baseada em programas armazenados, a modelagem de decisões estratégicas e o tratamento matemático de sistemas físicos complexos demonstram a capacidade da matemática de operar como tecnologia intelectual, orientando práticas científicas e sociais.

A partir dessa análise, conclui-se que o legado de von Neumann reside menos em resultados isolados do que na formulação de um modo de pensar caracterizado pela integração entre abstração e aplicação. Sua obra antecipa questões que permanecem centrais na ciência contemporânea, como a relação entre informação e realidade física, a modelagem de sistemas complexos e o papel da computação na produção do conhecimento.

Portanto, compreender o pensamento de von Neumann implica reconhecer a matemática como estrutura organizadora do mundo tecnológico moderno. Seu trabalho exemplifica a passagem de uma matemática voltada à consistência interna para uma matemática orientada à intervenção no real, consolidando um horizonte científico no qual cálculo, decisão e tecnologia constituem dimensões inseparáveis da experiência contemporânea.

Referências

ARAUJO, André Luis de. **Complexidade e emergência em estruturas espaciais**. 2017. 235 f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Campinas, 2017.

ASPRAY, William. **John von Neumann and the origins of modern computing**. Cambridge: MIT Press, 1990.

BAUMEISTER, Roy F.; LEARY, Mark R. Writing narrative literature reviews. **Review of General Psychology**, Washington, v. 1, n. 3, p. 311-320, 1997.

BURKS, Arthur W. (ed.). **Theory of self-reproducing automata**. Urbana: University of Illinois Press, 1966.

DAVIS, Martin. **The universal computer**: the road from Leibniz to Turing. 2. ed. New York: W. W. Norton, 2000.

GOLDSTINE, Herman H. **The computer from Pascal to von Neumann**. Princeton: Princeton University Press, 1972.

GRANT, Maria J.; BOOTH, Andrew. A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. **Health Information and Libraries Journal**, v. 26, n. 2, p. 91–108, 2009.

KANAMORI, Akihiro. **The higher infinite**: large cardinals in set theory from their beginnings. 2. ed. Berlin: Springer, 2009.

KOWALTOWSKI, Tomasz. Von Neumann: suas contribuições à Computação. **Estudos Avançados**, v. 10, n. 26, p. 237-260, 1996.

MACRAE, Norman. **John von Neumann**: the scientific genius who pioneered the modern computer, game theory, nuclear deterrence, and much more. New York: Pantheon Books, 1992.

MUNIZ JUNIOR, Ricardo de Oliveira. **História da Matemática e tecnologias digitais**: biografias e contextos. 2021. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2021.

MURRAY, Francis J.; VON NEUMANN, John. On rings of operators. **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 37, n. 1, p. 116–229, 1936.

NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

PETERSEN, Karl. **Ergodic theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

PIANEZZER, Guilherme Augusto. **História e Filosofia das Ciências e da Matemática**. Curitiba: IESDE, 2025.

PROENÇA ROSA, Carlos Augusto de. **História da ciência**. v. 3. 2 ed. Brasília: Fundação Alexandre de Gusmão, 2010.

RIBEIRO, Willian. **Estruturas algébricas**. São Paulo: Editora Senac, 2025.

ROTHER, Edna Terezinha. Revisão sistemática x revisão narrativa. **Acta Paulista**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. v-vi, 2007.

RUELLE, David. **Thermodynamic formalism**: the mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

SILVA, Carla Martins da; PUHL, Cassiano Scott. **Ensino de ciências da natureza e de matemática: contribuições teóricas e pedagógicas das tecnologias digitais**. Porto Alegre: Editora da PUCRS, 2022.

SIMON, Imre; CORDANI, Umberto G. A obra e o legado de John von Neumann. **Estudos Avançados**, v. 10, n. 26, p. 175-177, 1996.

SILVA, Evaldo Serra da. **Elementos da agenda de transformação estratégica das empresas para ambientes em transição**. 1998. 134 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 1998.

SMITH, John Maynard. **Evolution and the theory of games**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

VON NEUMANN, John. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. **Mathematische Annalen**, Berlin, v. 100, p. 295–320, 1928.

VON NEUMANN, John. **Mathematical foundations of quantum mechanics**. Princeton: Princeton University Press, 1932.

VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. **Theory of games and economic behavior**. Princeton: Princeton University Press, 1944.

VONNEUMAN, Nicholas A. O legado filosófico de John von Neumann. **Estudos avançados**, v. 10, n. 26, p. 189-204, 1996.

POSFÁCIO

A travessia proposta por este livro conduziu-nos por um percurso que não se limitou a justapor biografias ou a enumerar descobertas isoladas. Procuramos, ao longo destes capítulos, reconstituir linhas de continuidade e ruptura que configuram a matemática moderna como um empreendimento intelectual singular. De Isaac Newton a John von Neumann, passando por Cauchy, Galois, Cantor, Poincaré, Gödel e Noether, delineou-se um arco no qual a matemática se transforma de instrumento de descrição da natureza em linguagem estruturante do pensamento científico.

O exame da obra de Newton revelou como a matematização dos fenômenos naturais estabeleceu um novo regime de inteligibilidade, no qual a natureza se torna compreensível por meio de relações formais entre grandezas mensuráveis. As leis do movimento e o método das fluxões não apenas responderam a questões de seu tempo, mas instituíram um modelo de cientificidade que orientaria a física e a matemática por séculos.

A consolidação do rigor na análise, examinada a partir de Cauchy, expôs a transição de uma matemática operacional, eficaz, porém conceitualmente instável, para um sistema fundado em definições precisas e demonstrações sistemáticas. Limite, continuidade e convergência passaram a constituir não apenas instrumentos técnicos, mas os próprios alicerces sobre os quais a análise matemática se edificaria como disciplina autônoma.

Com Évariste Galois, testemunhamos uma inflexão decisiva na álgebra: o deslocamento do centro de gravidade da resolução de equações para a investigação das estruturas subjacentes. A noção de grupo, as permutações das raízes e a correspondência entre corpos e automorfismos inauguraram um modo de pensar no qual a compreensão de um objeto matemático depende da análise das transformações que o preservam.

A obra de Georg Cantor, por sua vez, desafiou concepções milenares ao transformar o infinito em objeto matemático rigoroso. A distinção entre diferentes cardinalidades e a introdução dos números transfinitos ampliaram o horizonte do matematicamente concebível, ao mesmo tempo que suscitaram questões sobre os limites da formalização que ressoariam nos desenvolvimentos posteriores da lógica e dos fundamentos.

Henri Poincaré, situado na encruzilhada entre a matemática clássica e a ciência do século XX, ofereceu uma síntese singular entre intuição e rigor, entre análise qualitativa e formalização. Seus métodos para o estudo de sistemas dinâmicos e sua fundação da topologia algébrica revelaram que o conhecimento científico pode assumir formas não redutíveis ao cálculo explícito, inaugurando uma sensibilidade matemática atenta às estruturas globais e aos comportamentos emergentes.

Os teoremas da incompletude de Kurt Gödel foram um ponto de virada na compreensão dos fundamentos da matemática. Demonstrando que sistemas formais suficientemente expressivos não podem provar sua própria consistência e contêm proposições indecidíveis, Gödel estabeleceu limites estruturais à formalização, deslocando a reflexão filosófica da busca por fundamentos absolutos para a investigação das condições de possibilidade da prova e da verdade.

Em Emmy Noether, a virada estrutural alcançou sua expressão mais sistemática. Substituindo procedimentos particulares por princípios universais, sua obra consolidou a álgebra abstrata como disciplina autônoma e estabeleceu pontes conceituais duradouras com a física teórica. O teorema que leva seu nome, ao conectar simetrias e leis de conservação, exemplifica a capacidade da matemática de revelar estruturas profundas que organizam fenômenos aparentemente diversos.

Finalmente, a trajetória de John von Neumann sintetizou muitas das transformações examinadas ao longo do livro. Em sua obra, a matemática abstrata, a física teórica, a teoria da decisão e a arquitetura computacional convergem para um mesmo horizonte conceitual. Ao demonstrar que estruturas formais podem operar simultaneamente como instrumentos de descrição, previsão e intervenção no mundo, von Neumann antecipou questões centrais da ciência contemporânea, nas quais computação, modelagem e decisão constituem dimensões interdependentes.

Ao concluir este percurso, torna-se evidente que a história da matemática moderna não se reduz a uma sucessão de descobertas ou a um acúmulo de resultados. Ela é, antes, uma história de transformações conceituais que redefiniram os próprios critérios do que significa conhecer, demonstrar e compreender. Cada um dos pensadores aqui examinados contribuiu, a seu modo, para consolidar uma visão da matemática como linguagem estruturante do conhecimento científico, capaz de articular rigor formal e inteligibilidade do real.

A matemática, talvez mais do que qualquer outro campo do saber, nos ensina que o limite não é obstáculo, mas condição de possibilidade do conhecimento; que a estrutura não é mero formalismo, mas chave de inteligibilidade; e que a relação entre teoria e realidade não é de espelhamento, mas de construção conceitual mediada por linguagens que se refazem continuamente. Que os caminhos abertos por esses mestres da matemática continuem a inspirar novas gerações a investigar as estruturas que organizam o real e a reinventar, sempre que necessário, os instrumentos conceituais com os quais nos aproximamos do mundo.

Os organizadores

Isaac Newton

Augustin-Louis Cauchy

Évariste Galois

Georg Cantor

Henri Poincaré

Kurt Gödel

Emmy Noether

John Von Neumann



Entre revoluções científicas e rupturas conceituais, esta obra convida o leitor a percorrer a história da Matemática por meio de ideias que redefiniram a forma de compreender o mundo.

De Isaac Newton a John von Neumann, o livro ultrapassa a simples narrativa biográfica e apresenta uma trajetória marcada por transformações profundas na linguagem, no rigor e nas estruturas matemáticas.

Cada capítulo revela um momento decisivo em que novos modos de pensar emergem, evidenciando a Matemática como protagonista na construção do conhecimento científico e na interpretação da realidade.

Ao articular contexto histórico, contribuições teóricas e reflexões filosóficas, o e-book oferece uma leitura instigante e acessível, capaz de dialogar tanto com iniciantes quanto com estudiosos da área.

Mais do que apresentar conceitos, a obra propõe uma compreensão crítica da Matemática como um campo dinâmico, construído a partir de tensões, desafios e avanços contínuos. Trata-se de um convite a enxergar a Matemática não apenas como ferramenta, mas como linguagem essencial para compreender a complexidade do mundo contemporâneo.

