

Explorando conceitos de Cálculo

Uma oficina baseada em modelagem
matemática de fenômenos físicos a partir
de aplicativos digitais

Kremmellin Barbosa dos Santos

Moisés Ceni de Almeida



PPG EduCIMAT

Apresentação

Apresentamos aqui a oficina “Explorando conceitos de Cálculo”, concebida como produto educacional no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEDUCIMAT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ).

Este material constitui um produto educacional desenvolvido no âmbito de uma pesquisa de dissertação vinculada ao PPGEDUCIMAT da UFRRJ. A pesquisa teve como objetivo promover a compreensão de conceitos fundamentais do cálculo infinitesimal por meio de uma abordagem exploratória, investigativa e mediada por tecnologias digitais.

A proposta fundamenta-se nos pressupostos da Educação Matemática Crítica, da Teoria dos Campos Conceituais e da Modelagem Matemática, articulando o uso de aplicativos digitais interativos desenvolvidos na plataforma Geogebra com atividades investigativas. Busca-se, assim, favorecer a construção de significados para conceitos como limites, derivadas e integrais, superando abordagens centradas exclusivamente na aplicação mecânica de técnicas.

A pesquisa investigou de que forma uma oficina estruturada a partir desses referenciais pode contribuir para o desenvolvimento de uma compreensão mais ampla, articulada e crítica dos conceitos de cálculo, promovendo o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem.

Neste material, você encontrará a descrição da oficina, organizada em momentos interdependentes, bem como atividades que podem ser aplicadas em sala de aula ou em outros contextos educativos. As propostas apresentadas visam estimular a exploração, a problematização e a reflexão, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa.

Espera-se que este material possa servir de apoio e inspiração para professores e estudantes, favorecendo práticas pedagógicas que integrem tecnologia, investigação e criticidade no ensino de matemática.

Desejo a todos e todas uma excelente experiência de aprendizagem.
Kremmellin Barbosa dos Santos

Sumário

01. Introdução	4
02. Referencial Teórico	5
03. Aplicativos digitais da oficina	7
Aplicativo 1: Visualização dinâmica de limites	7
Aplicativo 2: Explorando a derivada	8
Aplicativo 3: Derivabilidade	9
Aplicativo 4: Comportamento de funções	10
Aplicativo 5: Somas de Riemann	11
Aplicativo 6: Teorema do Valor Médio	12
Aplicativo 7: Teorema de Bolzano	13
Aplicativo 8: Teorema de Lagrange	14
Aplicativo 9: Teorema de Rolle	15
Aplicativo 10: Teorema Fundamental do Cálculo	16
Aplicativo 11: Visualização dinâmica de limites	17
Aplicativo 12: Visualização dinâmica de limites	18
Aplicativo 13: Visualização dinâmica de limites	19
Aplicativo 14: Visualização dinâmica de limites	20
04. Resultados	21
05. Conclusão	23
06. Referência	25
Anexo - Questionário	26

01. Introdução

O ensino de cálculo diferencial e integral tem sido historicamente marcado por abordagens centradas na aplicação de técnicas e na manipulação algébrica, o que, frequentemente, dificulta a compreensão conceitual por parte dos estudantes. Conceitos fundamentais como limite, derivada e integral são, muitas vezes, apresentados de forma descontextualizada e pouco articulada, o que contribui para a construção de conhecimentos fragmentados e de difícil aplicação em diferentes situações.

Diante desse cenário, torna-se necessário desenvolver propostas pedagógicas que favoreçam a construção de significados, a articulação entre diferentes representações matemáticas e o engajamento ativo dos estudantes no processo de aprendizagem. Nesse contexto, propomos que o uso de tecnologias digitais, aliado a abordagens investigativas, pode se apresentar como uma alternativa promissora para promover uma aprendizagem mais dinâmica, interativa e significativa.

É nesse sentido que se insere o presente trabalho, que tem como objetivo desenvolver e analisar a oficina, concebida como um produto educacional voltado a estudantes do ensino superior. A proposta fundamenta-se na utilização de aplicativos interativos desenvolvidos na plataforma Geogebra, associados a atividades exploratórias e investigativas que buscam promover a problematização e a reflexão sobre os conceitos abordados.

A oficina está estruturada em três momentos interdependentes: o primeiro é voltado à exploração de limites e derivadas, o segundo é dedicado à construção do conceito de integral e o terceiro se concentra na aplicação integrada desses conceitos em situações contextualizadas, por meio de atividades de modelagem matemática. Essa organização busca favorecer a compreensão progressiva dos conceitos, bem como sua articulação em diferentes contextos.

A fundamentação teórica que sustenta a proposta articula a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, a Educação Matemática Crítica, de Ole Skovsmose, e a Modelagem Matemática, compreendida como uma

abordagem que integra teoria e prática e valoriza o papel ativo do estudante na construção do conhecimento. Essa articulação permite compreender a aprendizagem como um processo dinâmico e socialmente relevante.

Esperamos que a oficina contribua para a construção de uma compreensão mais ampla, articulada e crítica dos conceitos de cálculo infinitesimal, promovendo não apenas o domínio técnico, mas também o desenvolvimento de uma postura investigativa e reflexiva diante da matemática.

02. Referencial Teórico

A proposta da oficina fundamenta-se na articulação entre a Modelagem Matemática, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e a Educação Matemática Crítica (EMC), constituindo uma abordagem que integra construção conceitual, investigação e reflexão crítica no processo de ensino e aprendizagem.

A modelagem matemática é compreendida como o processo de transformação de situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas no contexto original (Bassanezi, 2002). Nessa perspectiva, o ensino de matemática deixa de se restringir à aplicação de técnicas e passa a envolver a investigação de fenômenos, favorecendo a construção de significados. Conforme destacam Biembengut e Hein (2000), essa abordagem contribui para tornar a aprendizagem mais significativa, ao possibilitar que os estudantes estabeleçam relações entre os conceitos matemáticos e situações relevantes. No contexto da oficina, a modelagem orienta a organização das atividades, nas quais os conceitos de cálculo emergem da análise de situações que envolvem variação e acumulação, muitas vezes associadas a fenômenos que podem ser explorados por meio de aplicativos digitais.

A utilização desses aplicativos amplia as possibilidades da modelagem, permitindo a simulação de fenômenos físicos, a manipulação de variáveis e a visualização dinâmica de diferentes representações matemáticas. Nesse sentido, conforme argumentam Borba e Penteado (2010), as tecnologias digitais não apenas auxiliam o ensino, mas reorganizam as formas de pensar e produzir conhecimento matemático. Assim, os estudantes são incentivados a

formular hipóteses, testar relações e interpretar resultados, aproximando-se de práticas investigativas características da produção do conhecimento científico.

Essa perspectiva articula-se diretamente com a TCC, proposta por Vergnaud (2012), que compreende a aprendizagem como um processo que envolve a mobilização de esquemas, conceitos em ação e teoremas em ação em diferentes situações. Na oficina, os conceitos de cálculo (limite, derivada e integral) são explorados em múltiplos contextos, favorecendo a construção progressiva de significados. Os aplicativos digitais desempenham um papel central nesse processo, ao possibilitar a integração entre representações gráficas, simbólicas e numéricas, o que contribui para a formação de invariantes operatórios e para a consolidação dos conceitos.

Além disso, a proposta busca trabalhar esses conceitos como parte de um mesmo campo conceitual, promovendo a articulação entre ideias de variação, acumulação e representação. Estudos como os de Lima e Santos (2015) indicam que muitas dificuldades no ensino de cálculo estão relacionadas à fragmentação desses conceitos, reforçando a importância de abordagens que priorizem sua integração. Nesse sentido, a diversidade de situações propostas na oficina, aliada ao uso de representações múltiplas, contribui para o desenvolvimento de esquemas mais consistentes e flexíveis.

Paralelamente, a EMC, proposta por Skovsmose (2001), amplia essa discussão ao enfatizar a necessidade de promover uma aprendizagem que envolva reflexão, problematização e compreensão do papel social da matemática. Na oficina, essa perspectiva se concretiza na criação de cenários de investigação, nos quais os estudantes são convidados a explorar, questionar e interpretar os conceitos matemáticos trabalhados, indo além da simples aplicação de procedimentos.

Defendemos que o uso de aplicativos digitais potencializa esses cenários investigativos, ao permitir a experimentação e a análise de diferentes situações em tempo real, favorecendo a construção de argumentos e a reflexão sobre os resultados obtidos. Conforme discutem Bairral (2017) e Borba e Penteadó (2010), as tecnologias digitais ampliam as possibilidades de interação e colaboração, contribuindo para a construção coletiva do conhecimento.

A articulação entre os três referenciais teóricos constitui um elemento central da proposta da presente oficina. Enquanto a modelagem fornece o contexto e orienta a investigação, a TCC contribui para a compreensão dos processos de construção conceitual e a EMC amplia o olhar para a dimensão crítica e reflexiva da aprendizagem. Integradas ao uso de aplicativos digitais, essas abordagens favorecem uma aprendizagem mais significativa, na qual os estudantes não apenas desenvolvem competências matemáticas, mas também constroem uma compreensão mais ampla, articulada e crítica dos conceitos de cálculo.

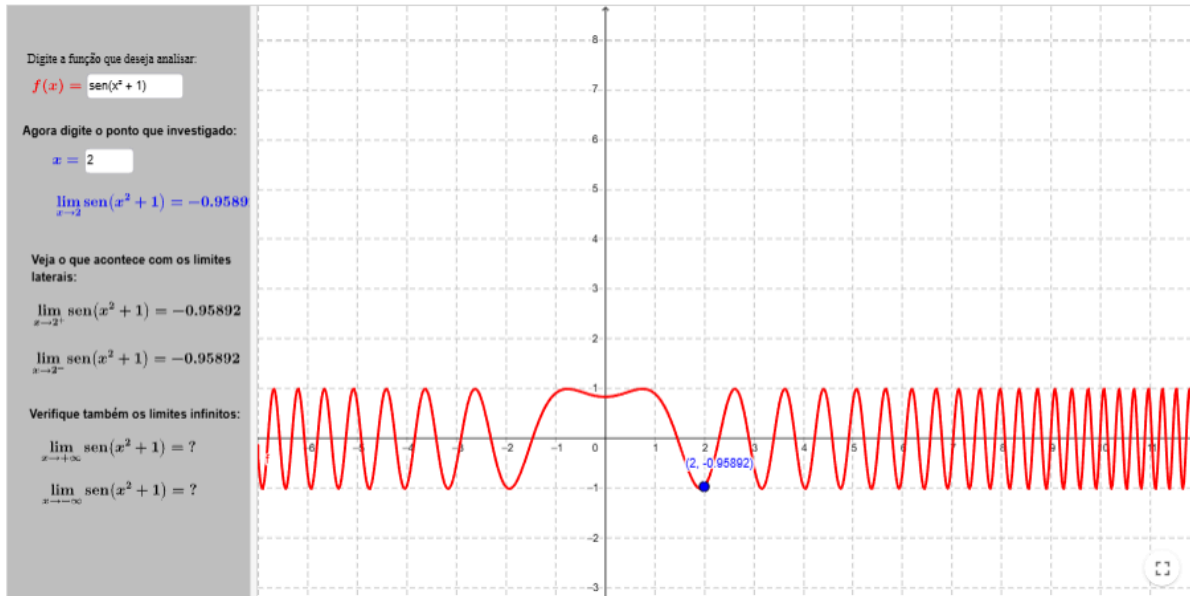
03. Aplicativos digitais da oficina

A seguir, apresenta-se a organização dos aplicativos que compõem a oficina desenvolvida nesta pesquisa.

Aplicativo 1: Visualização dinâmica de limites

O primeiro aplicativo permite a visualização dinâmica do comportamento de uma função à medida que x se aproxima de um determinado valor, favorecendo a compreensão intuitiva do conceito de limite. A manipulação interativa dos valores de x possibilita ao estudante observar o comportamento de $f(x)$, promovendo a construção do conceito em ação de aproximação e o desenvolvimento de invariantes operatórios associados à ideia de “tender a”. Além disso, o aplicativo cria um cenário investigativo que problematiza o significado do limite, incentivando a reflexão sobre o comportamento da função para além da definição formal, em consonância com uma perspectiva mais interpretativa e exploratória do conceito.

Figura 1 - Visualização dinâmica de limites com o aplicativo 1

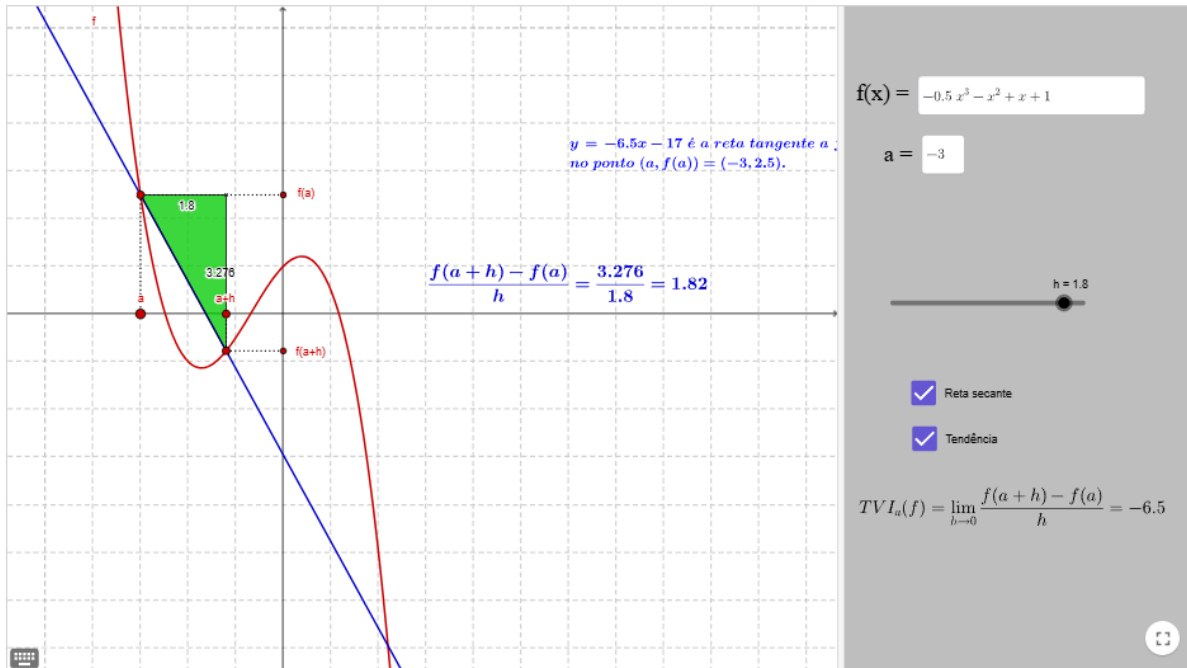


Fonte: Autor

Aplicativo 2: Explorando a derivada

O segundo aplicativo auxilia na construção do conceito de derivada a partir de sua definição como limite, permitindo a manipulação do parâmetro h (conforme ilustra a Figura 2), que tende a zero, por meio de um controle deslizante. Essa interação possibilita a visualização da transição da reta secante para a reta tangente, tornando perceptível o processo de variação associado à derivada. O recurso favorece a articulação entre representações gráficas e simbólicas, contribuindo para a compreensão do conceito como taxa de variação e não apenas do procedimento algorítmico. Além disso, o ambiente investigativo estimula a interpretação do significado geométrico da tangente em diferentes funções, promovendo uma compreensão mais conceitual e reflexiva do cálculo diferencial.

Figura 2 - Explorando a derivada: da secante à tangente com o aplicativo 2

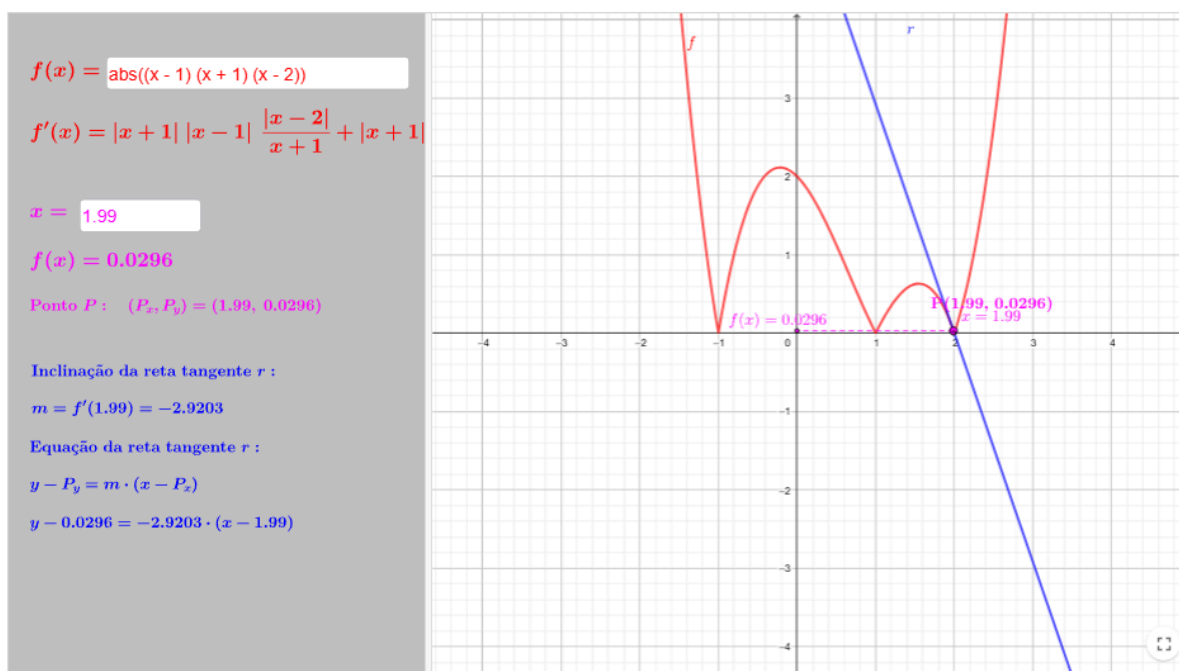


Fonte: Autor

Aplicativo 3: Derivabilidade

O aplicativo aprofunda o conceito de derivada ao possibilitar a análise da derivabilidade de funções em diferentes contextos, por meio da inserção livre de funções e da visualização instantânea de seus gráficos. O recurso permite investigar a existência ou não de reta tangente em pontos críticos, especialmente em situações com descontinuidades, quinas ou saltos. Essa exploração favorece a compreensão das condições de derivabilidade e evidencia os limites de aplicação do conceito de derivada. A análise visual do comportamento das funções, articulada a interpretações conceituais, contribui para uma compreensão mais crítica e fundamentada do cálculo diferencial.

Figura 3 - Investigando a derivabilidade com o aplicativo 3

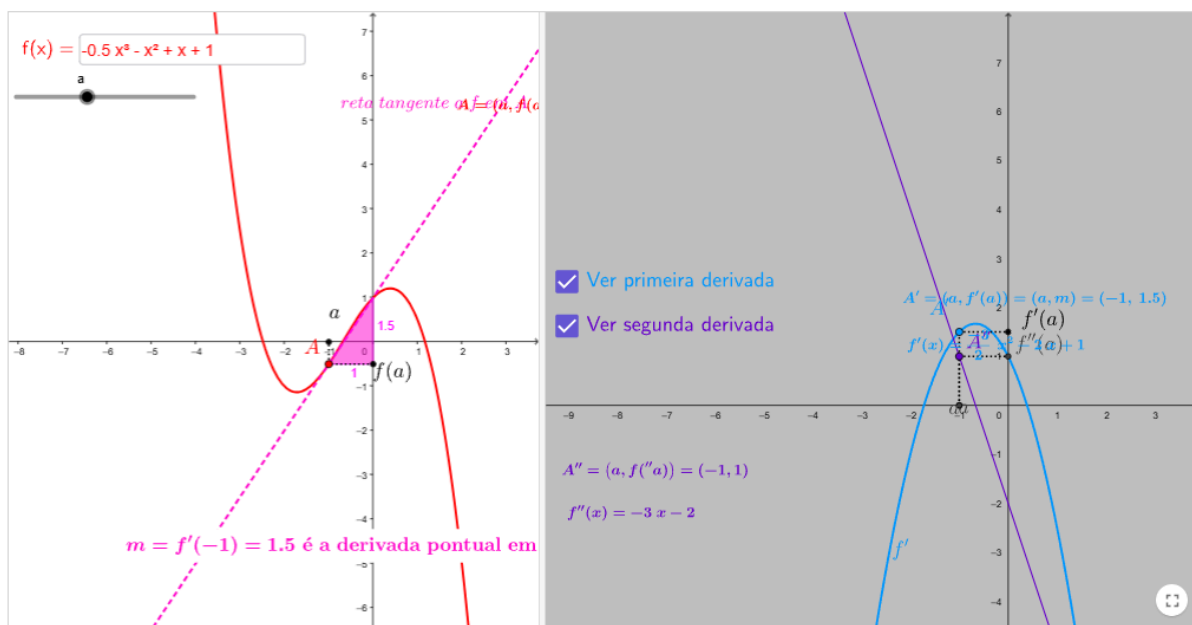


Fonte: Autor

Aplicativo 4: Comportamento de funções

O aplicativo 4 explora simultaneamente a função, sua primeira derivada e sua segunda derivada, permitindo a visualização integrada dessas três representações. Essa configuração possibilita aos estudantes identificar padrões de comportamento relacionados ao crescimento, decrescimento, concavidade e pontos de inflexão. A análise conjunta dos gráficos favorece a compreensão das relações entre o sinal da derivada e o comportamento da função, bem como entre a segunda derivada e a concavidade. A interação com o aplicativo promove a construção de generalizações a partir da observação dinâmica das funções, aproximando o processo de práticas de modelagem matemática baseadas em investigação, análise de padrões e formulação de conjecturas.

Figura 4 - Analisando o comportamento de funções com o aplicativo 4

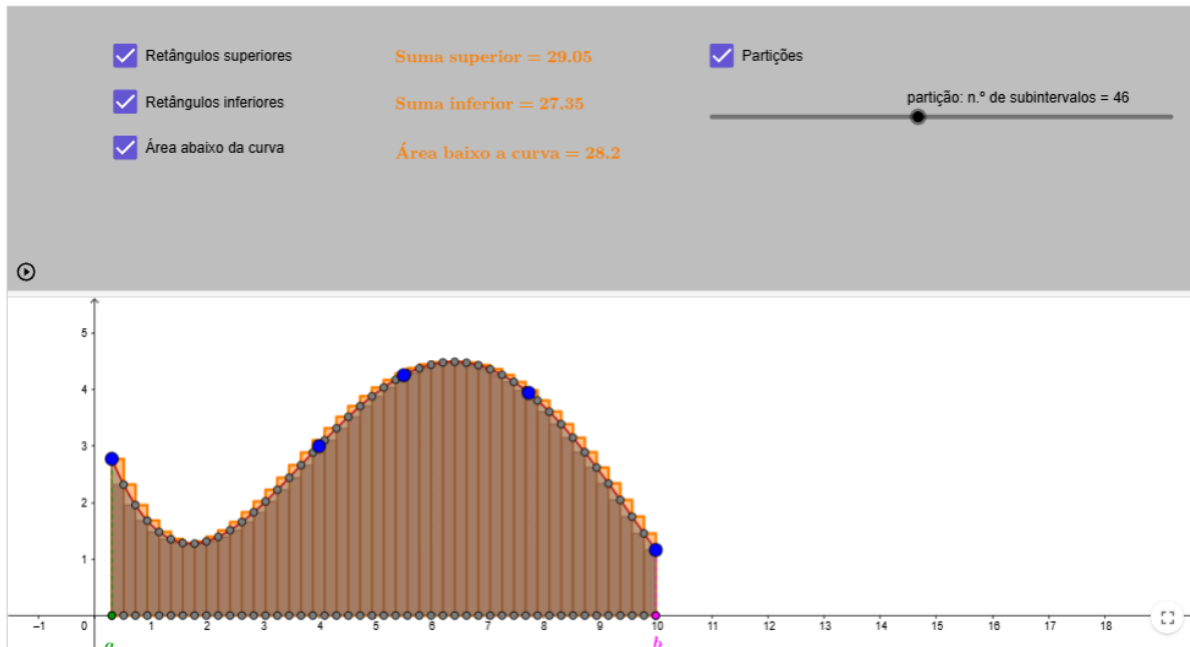


Fonte: Autor

Aplicativo 5: Somas de Riemann

O aplicativo simula somas de Riemann, permitindo a aproximação da área sob uma curva por meio de somas inferiores e superiores de retângulos, cujo refinamento é controlado pela variação do número de subdivisões. A interação com a ferramenta possibilita observar, de forma dinâmica, como o aumento dessas subdivisões melhora a estimativa da área, evidenciando o caráter aproximativo do processo. Nesse contexto, a integral definida é compreendida como o limite dessas somas, o que favorece a construção do conceito em ação de aproximação e a internalização da relação entre erro e refinamento. O ambiente investigativo estimula os estudantes a refletirem sobre as limitações das aproximações finitas e a compreenderem o papel do limite na formalização da integral, promovendo a articulação entre representações visuais e numéricas na construção progressiva do conceito.

Figura 5 - Aproximando áreas com somas de Riemann no aplicativo 5

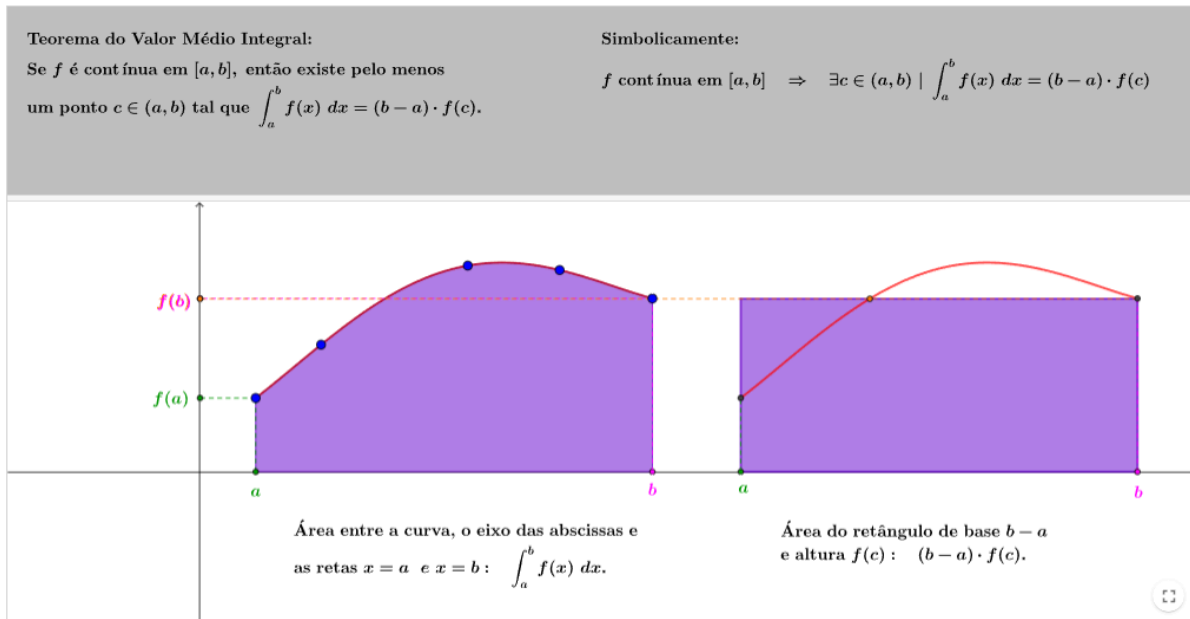


Fonte: Autor

Aplicativo 6: Teorema do Valor Médio

O aplicativo 6, sobre o Teorema do Valor Médio Integral, permite que os estudantes manipulem funções contínuas em um intervalo já determinado e visualizem a existência de um ponto c no qual a função assume um valor médio representativo, equivalente à razão entre a área sob a curva e o comprimento do intervalo. Ao variar a função e o intervalo, torna-se possível observar que esse valor médio não é arbitrário, mas resulta de uma relação geométrica consistente entre área e altura constante equivalente. Essa interação favorece a articulação entre intuição e formalização, na medida em que os estudantes podem experimentar, formular conjecturas e verificar propriedades antes da enunciação rigorosa do teorema. Assim, conceitos como área, média e integral são mobilizados de forma integrada, promovendo a construção de significados por meio de múltiplas representações e estimulando a reflexão sobre as condições de validade das afirmações matemáticas.

Figura 6 - Teorema do Valor Médio ilustrado no aplicativo 6

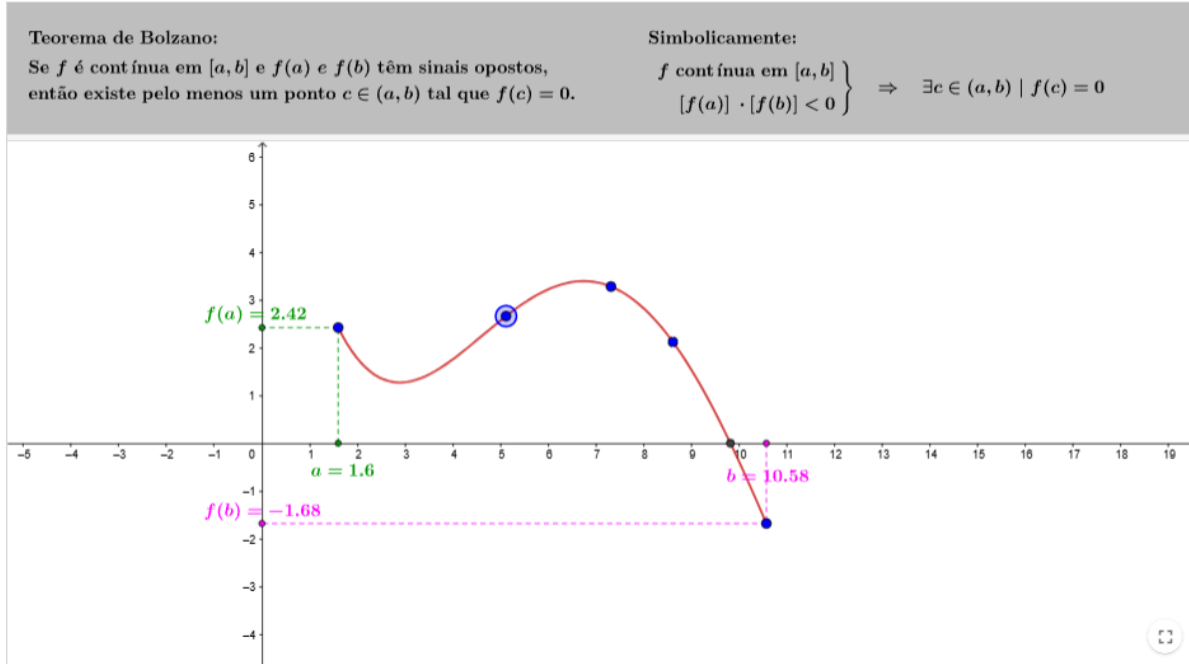


Fonte: Autor

Aplicativo 7: Teorema de Bolzano

O aplicativo 7, do Teorema de Bolzano, possibilita a manipulação de funções contínuas que apresentam mudança de sinal em um intervalo, permitindo aos estudantes identificar visualmente pontos nos quais a função se anula ao cruzar o eixo x . Essa visualização imediata favorece a compreensão intuitiva da existência de raízes antes da formalização algébrica, articulando experiências gráficas com a formulação simbólica do teorema. Ao transitar entre diferentes representações, os estudantes consolidam a ideia de continuidade como condição essencial para a existência de zeros da função, mobilizando invariantes operatórios relacionados ao comportamento do sinal. Além disso, o ambiente investigativo incentiva a reflexão sobre a validade do teorema em situações nas quais suas hipóteses não são satisfeitas, promovendo uma compreensão mais crítica e contextualizada do resultado matemático.

Figura 7 - Teorema de Bolzano ilustrado no aplicativo 7

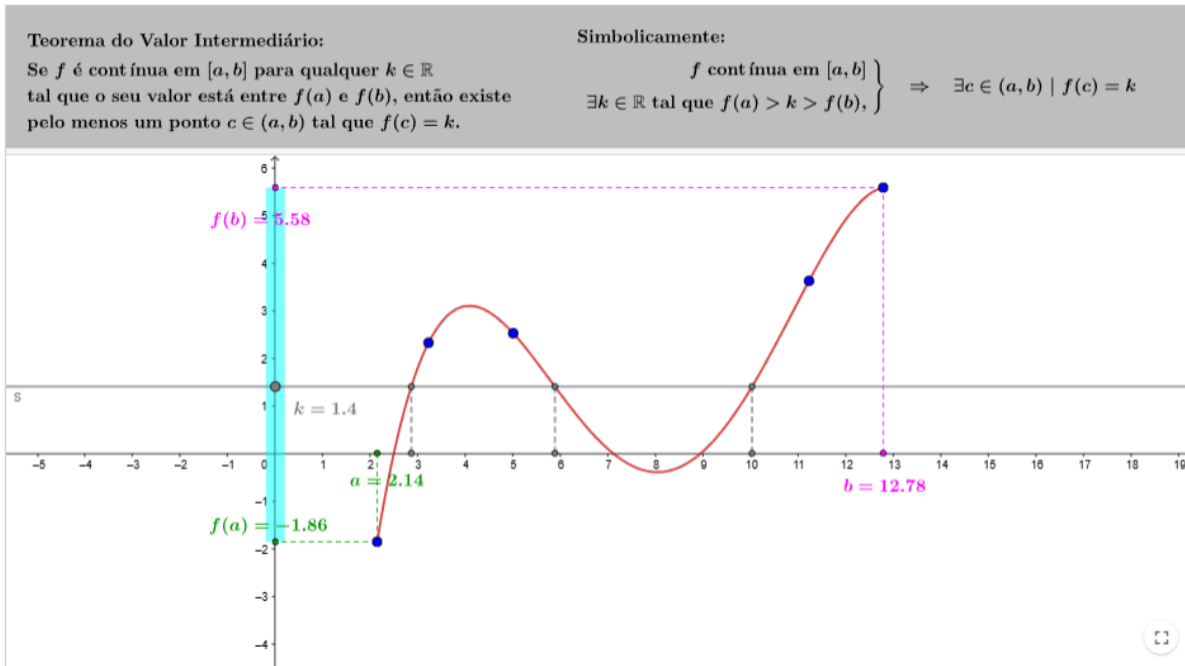


Fonte: Autor

Aplicativo 8: Teorema de Lagrange

O aplicativo do Teorema de Lagrange permite explorar a relação entre a reta secante que liga os pontos extremos de um intervalo e as retas tangentes em pontos intermediários da função, possibilitando a identificação de valores c nos quais a inclinação da tangente coincide com a inclinação média da secante. Por meio da manipulação dinâmica das funções, os estudantes podem visualizar esse ponto de equilíbrio como uma propriedade geométrica das funções deriváveis, anterior à formalização algébrica do teorema. Essa experiência reforça a compreensão da derivada como taxa de variação instantânea e promove a articulação entre representações gráficas, numéricas e simbólicas, favorecendo a construção conceitual. Ao mesmo tempo, o ambiente investigativo estimula a reflexão sobre as condições de continuidade e derivabilidade necessárias ao teorema, ampliando a compreensão crítica de sua validade e significado.

Figura 8 - Teorema de Lagrange ilustrado no aplicativo 8

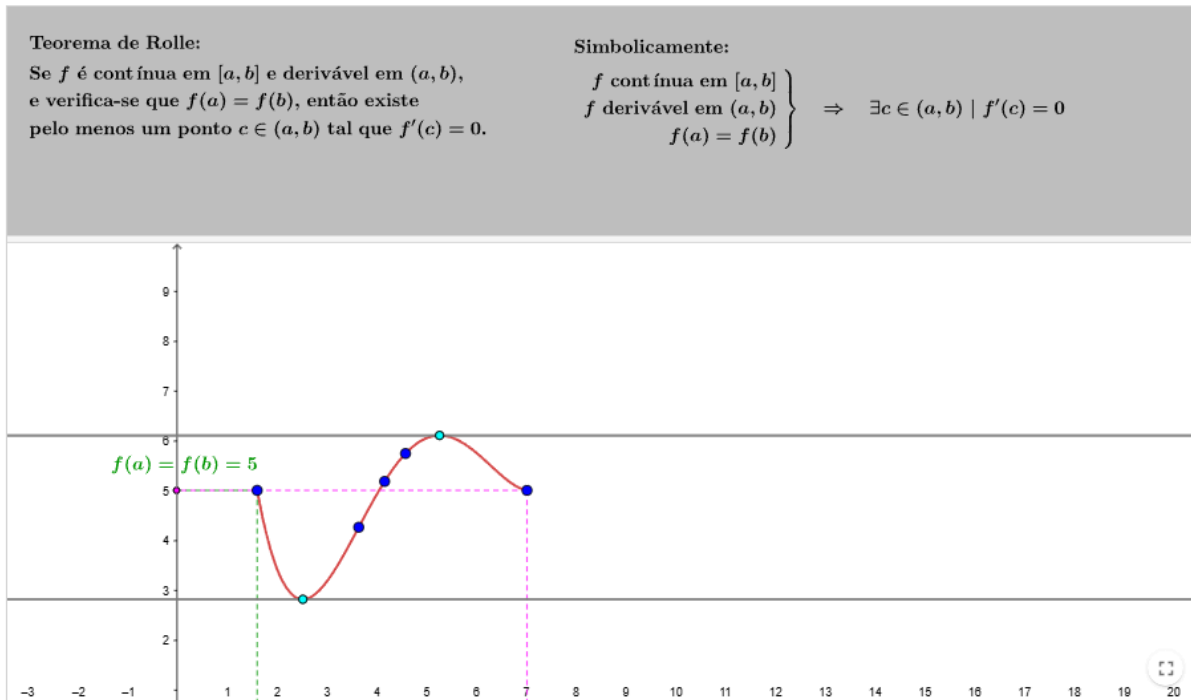


Fonte: Autor

Aplicativo 9: Teorema de Rolle

O aplicativo do Teorema de Rolle permite que os estudantes explorem funções deriváveis que assumem o mesmo valor nos extremos de um intervalo, possibilitando a identificação de pontos nos quais a tangente é horizontal. Ao manipular diferentes funções e intervalos, torna-se possível observar que a existência desses pontos decorre diretamente da combinação entre continuidade e derivabilidade, o que favorece a compreensão do resultado como uma propriedade estrutural das funções, antes de sua formalização simbólica. A experiência visual e interativa contribui para a internalização da noção de derivada como taxa de variação instantânea nula em pontos específicos, promovendo a articulação entre representações gráficas e conceituais. Além disso, o ambiente investigativo incentiva a reflexão sobre a necessidade das hipóteses do teorema, ao permitir que os estudantes analisem o que ocorre quando tais condições são modificadas, ampliando a compreensão crítica e contextualizada do conceito.

Figura 9 - Teorema de Rolle ilustrado no aplicativo 9

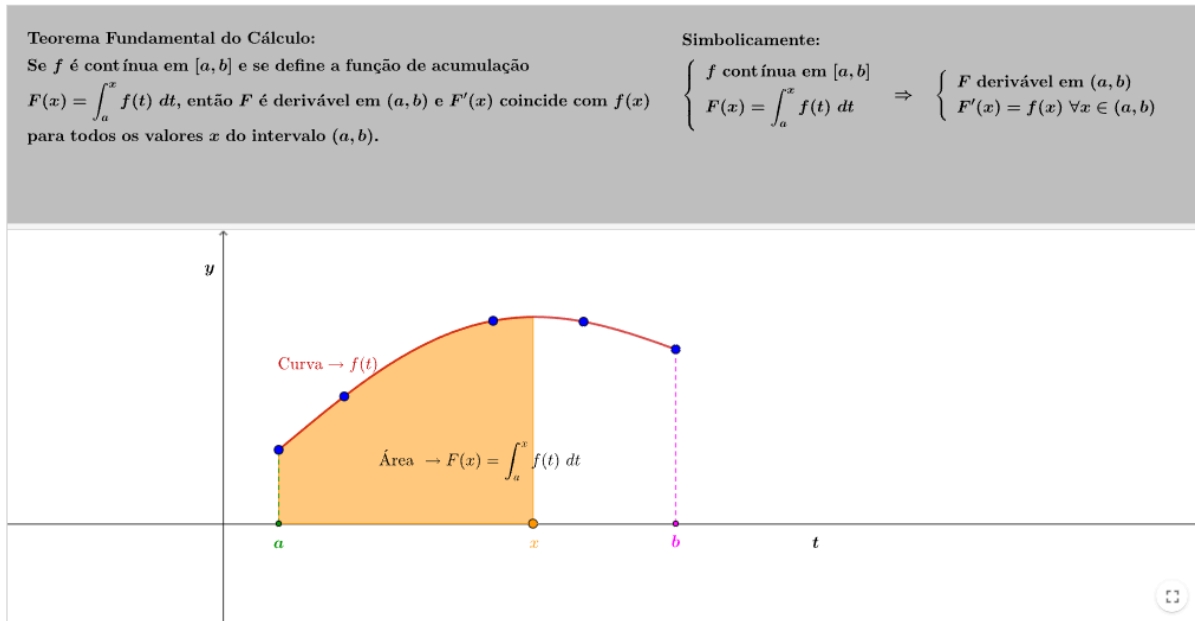


Fonte: Autor

Aplicativo 10: Teorema Fundamental do Cálculo

O aplicativo do Teorema Fundamental do Cálculo permite explorar interativamente a relação entre a integral definida e a função primitiva, ao possibilitar que os estudantes alterem funções e intervalos e observem como a derivada da função acumulada coincide com a função original ao longo do domínio. Essa visualização dinâmica do processo de acumulação e de derivação favorece a compreensão da integração e da diferenciação como operações inversas, articulando de forma progressiva o entendimento intuitivo e formal do conceito. Nesse contexto, conceitos como área, integral, derivada e função acumulativa são integrados na construção de significados múltiplos, sustentados pela articulação de diferentes representações. Ao mesmo tempo, o ambiente investigativo promove a reflexão sobre as condições de continuidade necessárias ao teorema, incentivando uma compreensão mais crítica e fundamentada de sua validade e de seu papel na modelagem de fenômenos.

Figura 10 - Teorema Fundamental do Cálculo no aplicativo 10

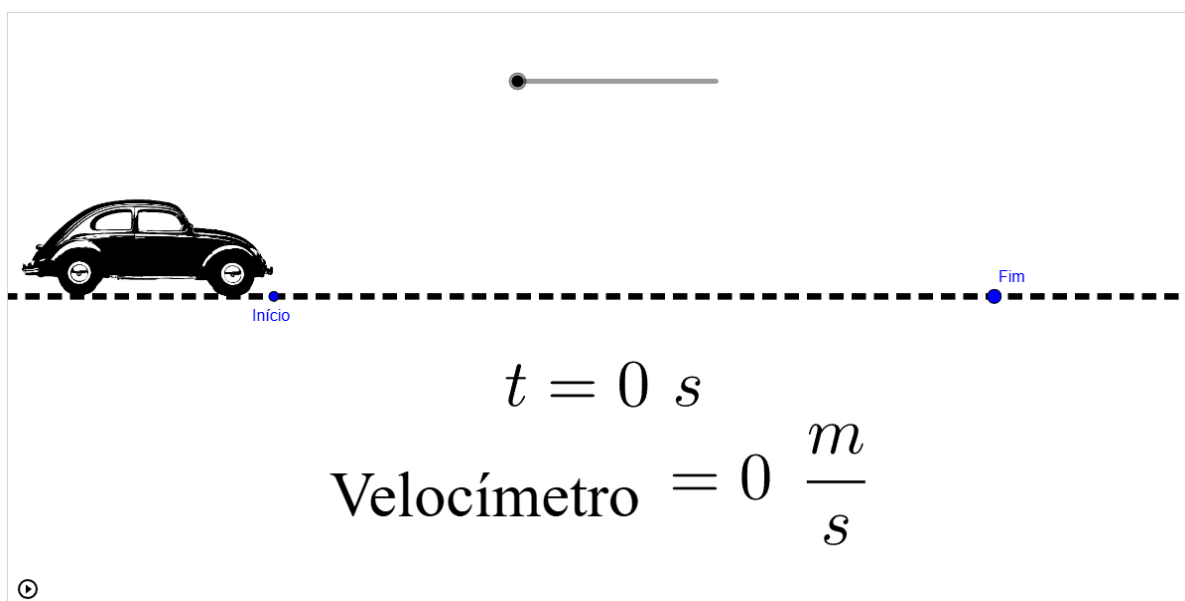


Fonte: Autor

Aplicativo 11: Movimento de autom vel

A atividade de modelagem com o movimento do autom vel coloca os estudantes diante de uma situa o din mica em que posi o, velocidade e tempo s o relacionados por fun es que descrevem o deslocamento ao longo do intervalo observado. A an lise do movimento em intervalos cada vez menores conduz   interpreta o da varia o da posi o como uma aproxima o local, introduzindo o conceito de diferencial como ferramenta para descrever varia es instant neas. Nesse contexto, o diferencial emerge como um conceito em a o associado   ideia de aproxima o do movimento, permitindo compreender que, para pequenos intervalos de tempo, o deslocamento pode ser aproximado por $ds \approx v(t) dt$. Essa abordagem favorece a articula o entre o fen meno f sico e sua representa o matem tica, promovendo a transi o do racioc nio baseado em m dias para um racioc nio infinitesimal, sustentado pela mobiliza o de diferentes representa es e esquemas operat rios no processo de modelagem.

Figura 11 - Análise do movimento de um automóvel no aplicativo 11

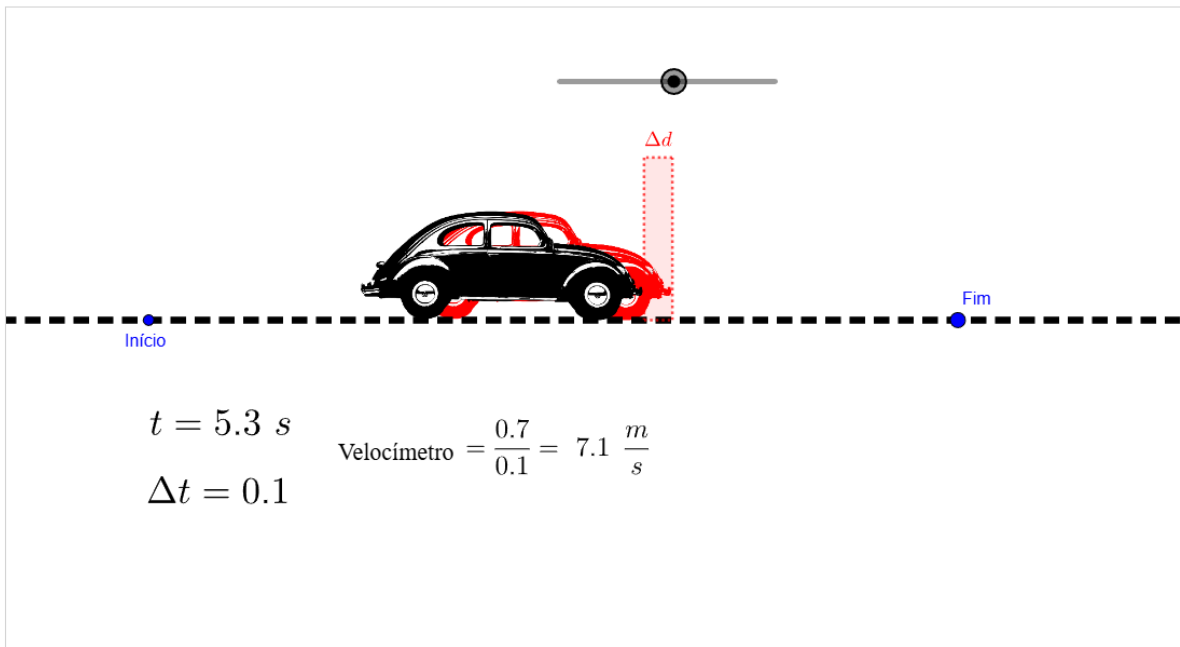


Fonte: Autor

Aplicativo 12: Diferencial na taxa de deslocamento

O aplicativo apresenta o conceito de diferencial de forma explícita durante a simulação do movimento de um automóvel, permitindo acompanhar em tempo real como pequenas variações no tempo produzem variações correspondentes na posição e na velocidade. Ao exibir simultaneamente os valores ds , o ambiente favorece a compreensão do diferencial como representação de variações infinitesimais associadas à taxa de variação instantânea, inserida no contexto da modelagem de movimentos contínuos. Essa visualização dinâmica contribui para que o conceito deixe de ser visto apenas como formalismo algébrico, passando a ser interpretado como ferramenta para descrever processos de mudança. A articulação entre representações gráficas, simbólicas e físicas possibilita a construção de significados mais integrados, ao mesmo tempo em que estimula a reflexão sobre o caráter aproximativo dos modelos matemáticos e seu papel na interpretação de fenômenos reais idealizados.

Figura 12 - Análise do diferencial na taxa de deslocamento ao longo do tempo no aplicativo 12

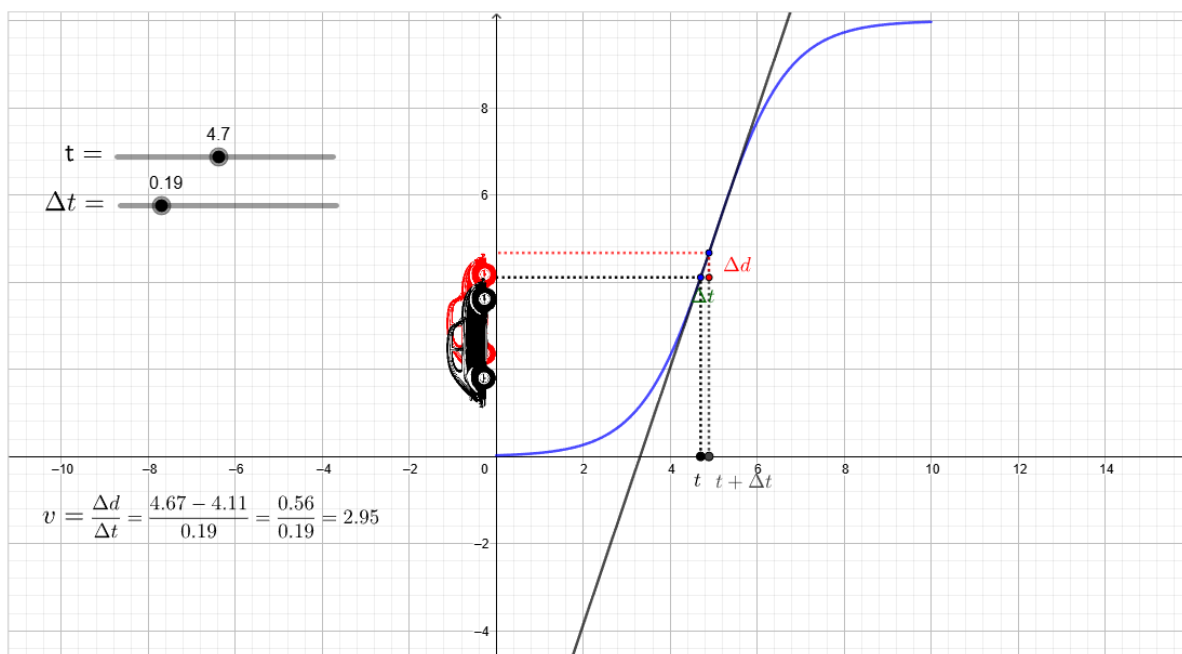


Fonte: Autor

Aplicativo 13: Visualização dinâmica de limites

O aplicativo 13 permite a visualização simultânea das variações de ds e dt associadas ao movimento do automóvel, evidenciando graficamente a relação entre essas grandezas no contexto de um processo contínuo de variação. Ao acompanhar essa dinâmica, os estudantes observam como pequenas variações no tempo correspondem a variações proporcionais no deslocamento, reforçando a interpretação de ds/dt como velocidade instantânea. Essa abordagem amplia a compreensão do diferencial como um objeto matemático que articula grandezas físicas para descrever o movimento, indo além da manipulação algébrica isolada. A integração entre representações gráficas, simbólicas e fenomenológicas favorece a construção de esquemas operatórios mais consistentes, ao mesmo tempo em que promove a reflexão sobre o caráter local das aproximações diferenciais e seus limites de interpretação.

Figura 13 - Análise gráfica do diferencial utilizando eixo de coordenadas no aplicativo 13

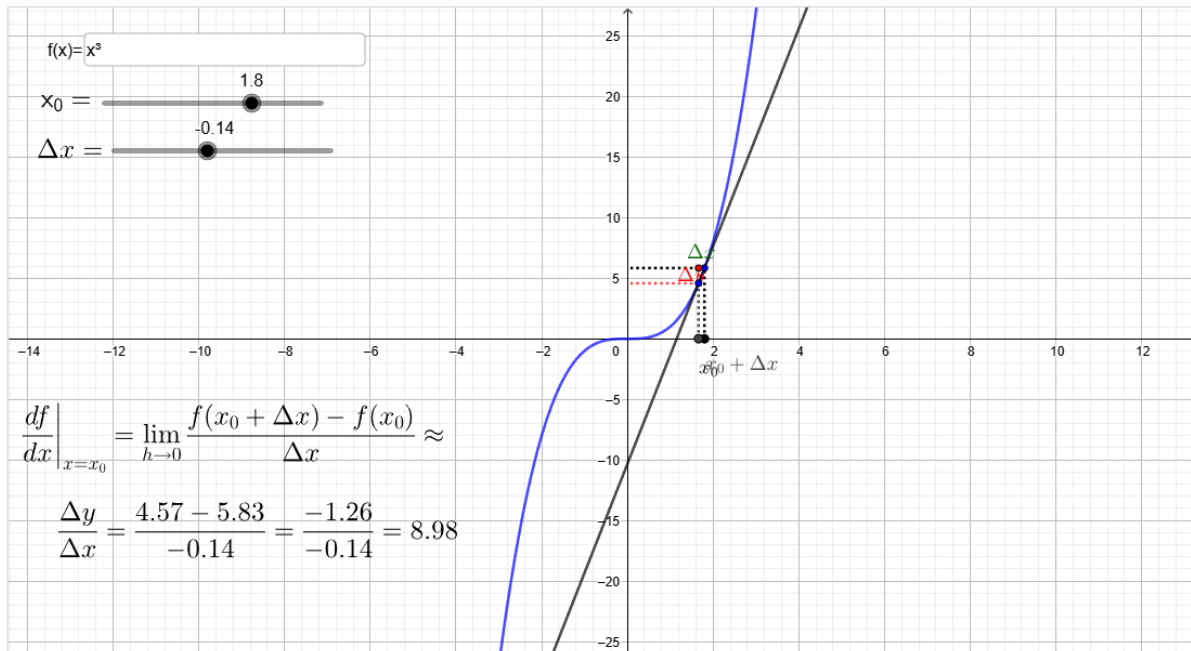


Fonte: Autor

Aplicativo 14: Visualização dinâmica de limites

O último aplicativo amplia o conceito de diferencial ao permitir que os estudantes criem funções livremente e observem, em tempo real, os diferenciais associados a pontos específicos do gráfico. Essa dinâmica favorece a generalização do conceito para além do contexto do movimento, ao evidenciar sua aplicação em diferentes tipos de funções e situações matemáticas. A manipulação simultânea de expressões simbólicas e representações gráficas permite reconhecer regularidades, como a relação entre a inclinação da curva e a magnitude do diferencial. Com isso, ocorre uma transição do contexto físico para o matemático abstrato, ampliando o campo conceitual dos estudantes e consolidando o diferencial como um conjunto de invariantes operatórios ligados à variação local. Ao mesmo tempo, o ambiente estimula uma leitura crítica dos modelos construídos, incentivando a reflexão sobre seus significados e limites em diferentes contextos de aplicação.

Figura 14 - Análise gráfica do diferencial no aplicativo 14



Fonte: Autor

04. Resultados

Os aplicativos digitais desenvolvidos na oficina revelam-se como ambientes dinâmicos de produção de significados, nos quais o cálculo infinitesimal deixa de ser um conjunto estático de procedimentos para se constituir como um campo vivo de experimentação, visualização e problematização conceitual.

A análise dos aplicativos desenvolvidos no Geogebra evidencia que eles não funcionam apenas como recursos auxiliares de visualização, mas como dispositivos didático-epistemológicos, nos quais se articulam os princípios da modelagem matemática, da TCC e da EMC. Em conjunto, esses elementos configuram ambientes de aprendizagem em que os conceitos do cálculo são mobilizados, testados e ressignificados de forma dinâmica.

Os aplicativos permitem observar uma progressão conceitual ao longo da oficina, iniciando-se em níveis mais intuitivos e avançando para formas mais

estruturadas e críticas de compreensão. Essa progressão pode ser interpretada, em analogia aos “panoramas” propostos por Santos e Barbosa (2019), como diferentes modos de realização do cálculo infinitesimal.

No caso do limite, os aplicativos favorecem um panorama intuitivo, centrado na ideia de aproximação e comportamento dinâmico das funções, especialmente pela manipulação direta de variáveis no Geogebra. Em seguida, emerge um panorama estruturado, no qual a distinção entre valor da função e valor do limite, bem como a análise de limites laterais, passa a ser visualmente explorada e conceitualmente refinada.

Na derivada, os aplicativos intensificam a articulação entre registros gráficos e simbólicos, permitindo a transição entre secantes e tangentes. Isso configura um panorama variacional e geométrico, no qual a derivada é compreendida como taxa de variação e comportamento local da função. Em etapas mais avançadas, especialmente nas relações entre primeira e segunda derivada, observa-se um panorama analítico, no qual os estudantes passam a interpretar crescimento, concavidade e comportamento global de funções.

No caso da integral, os aplicativos baseados em somas de Riemann favorecem um panorama geométrico-acumulativo, no qual a integral é compreendida como área sob a curva e soma de pequenas parcelas. A manipulação do número de subdivisões fortalece a compreensão do processo de limite, ampliando a noção de aproximação sucessiva.

Quando os aplicativos passam a integrar teoremas fundamentais do cálculo, observa-se um avanço para um panorama estrutural, no qual limites, derivadas e integrais são articulados como partes de um sistema conceitual coerente. Já nos aplicativos contextualizados (como o movimento de um automóvel), emerge um panorama de modelagem, em que os conceitos deixam de ser apenas objetos matemáticos e passam a operar como ferramentas para interpretar fenômenos reais.

De forma geral, os aplicativos também materializam fortemente a perspectiva da TCC (Vergnaud, 2012), ao favorecer a mobilização de esquemas de ação, conceitos em ação e teoremas em ação em diferentes situações. Paralelamente, incorporam a dimensão crítica da EMC (Skovsmose, 2001) ao

deslocarem o foco da execução de procedimentos para a investigação, interpretação e problematização de situações matemáticas e extra-matemáticas. Os aplicativos constituem uma rede de experiências que articula visualização, experimentação e modelagem, permitindo compreender o cálculo infinitesimal não como um conjunto fixo de regras, mas como um campo dinâmico de significações, em constante reorganização.

Mais do que ilustrar conceitos, os aplicativos operam como espaços de reconfiguração do pensamento matemático, em que diferentes panoramas do cálculo se entrelaçam e evidenciam a aprendizagem como um processo dinâmico, situado e conceitualmente integrado.

05. Conclusão

A conclusão desta pesquisa evidencia que os aplicativos desenvolvidos constituem um conjunto articulado de dispositivos didático-epistemológicos voltados à construção progressiva dos conceitos do cálculo diferencial e integral, promovendo a transição entre diferentes níveis de abstração por meio da interação dinâmica com representações múltiplas.

De forma geral, os aplicativos permitem a operacionalização de ideias centrais do cálculo como processos de aproximação, variação e acumulação, articulando visualização gráfica, manipulação simbólica e interpretação de fenômenos matemáticos. Observa-se que cada ferramenta foi concebida para evidenciar um aspecto específico dos conceitos, favorecendo uma abordagem gradual e integrada da aprendizagem matemática.

Os aplicativos voltados ao limite e à derivada priorizaram a noção de aproximação e variação local, ao passo que aqueles relacionados à integral enfatizaram o caráter acumulativo e sua formalização como limite de somas. Já os recursos associados aos teoremas clássicos do cálculo possibilitam a exploração das condições de validade das proposições matemáticas,

articulando aspectos estruturais como continuidade, derivabilidade e comportamento global das funções.

No conjunto, as ferramentas relacionadas ao diferencial e à modelagem de movimentos ampliaram o campo de atuação conceitual ao relacionar variações infinitesimais a grandezas físicas, promovendo a transição entre interpretações geométricas, simbólicas e fenomenológicas. Em níveis mais gerais, os aplicativos com funções livres e representações dinâmicas favoreceram a generalização dos conceitos, consolidando o diferencial como operador de variação local em diferentes contextos matemáticos.

Assim, o conjunto de aplicativos evidencia uma progressão conceitual que vai da intuição à formalização, passando pela experimentação e pela generalização, sustentada por múltiplas representações e pela exploração dinâmica dos objetos matemáticos. Essa organização reforça o potencial dos ambientes digitais como mediadores da construção conceitual no cálculo, ao permitir a integração entre diferentes formas de significação matemática e a ampliação do campo de compreensão dos fenômenos de variação e acumulação.

06. Referência

BAIRRAL, M. A. As manipulações em tela compoem a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 99-106, 2017.

BASSANEZI, C. B. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2000.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

VERGNAUD, G. Forme opératoire et forme prédictive de la connaissance. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 17, n. 2, p. 287-304, 2012.

LIMA, M. S.; SANTOS, J. V. C. **A teoria dos campos conceituais e o ensino de cálculo**. 1. ed. Curitiba: Appris, 2015.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Papyrus editora, 2001.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de Artigos Científicos. **Boletim GEPEN**, n. 74, p. 127-143, 2019.

Anexo - Questionário

OFICINA - EXPLORANDO CONCEITOS DE CÁLCULO

OBJETIVO: Promover o desenvolvimento de conceitos fundamentais do cálculo infinitesimal por meio de uma abordagem exploratória, crítica e investigativa, ancorada em aplicativos digitais desenvolvidos com fins didáticos e fundamentada em três pilares: Modelagem Matemática, Teoria dos Campos Conceituais e Educação Matemática Crítica.

Etapa 1 - Derivada como taxa de variação e inclinação da reta tangente

Objetivo específico: Explorar a construção conceitual da derivada por meio de situações-problema e visualizações gráficas que favoreçam a compreensão de sua definição formal e interpretação geométrica.

Etapa	Atividades	Fundamento teórico
1.1	Revisão dos conceitos de limite, com apoio do App 1: visualização do comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de um valor.	Conceito em ação: aproximação; Representações simbólicas: gráfico e expressão algébrica; Cenário investigativo: o que significa “tender a”?
<p style="text-align: center;"><i>App 1 - Visualização dinâmica de limites</i></p> <p><u>Questionário:</u></p> <p>1ª parte: exploração intuitiva da aproximação</p> <p>Considere inicialmente a função:</p> $f(x) = x^2 - 1$ <p>1. Utilizando o aplicativo, observe o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 pela esquerda.</p> <ul style="list-style-type: none">Quais valores $f(x)$ assume?		

- O que você observa na representação gráfica?

2. Agora aproxime x de 2 pela direita.

- O comportamento de $f(x)$ se altera?

- O que significa aproximar “pela direita” e “pela esquerda”?

3. Com base na visualização, complete:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

4. Sem realizar substituição direta, explique:

O que significa dizer que $f(x)$ “tende a um valor”?

2ª parte: problematizando o “tender a”

Considere agora a função:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

5. Utilize o aplicativo para investigar o comportamento de $g(x)$ quando $x \rightarrow 2$.

- O ponto $x = 2$ pertence ao domínio?
- O que acontece com os valores de $g(x)$ próximos de 2?

6. Determine, com base na exploração gráfica:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

7. Compare as funções f e g :

- O limite depende do valor da função no ponto?
- O que isso revela sobre o conceito de limite?

3ª parte: quando o limite não existe

Considere a função definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$$

8. Utilizando o aplicativo:

- Investigue o comportamento de $h(x)$ quando $x \rightarrow 2$ pela esquerda.

- Investigue quando $x \rightarrow 2$ pela direita.

9. O limite existe? Justifique com base na definição informal construída anteriormente.

10. O que essa situação revela sobre a necessidade de analisar aproximações laterais?

4ª parte: construção conceitual

11. Com suas palavras, explique o que significa:

“ $f(x)$ tende a L quando x se aproxima de a ”.

12. O limite depende:

- Do valor da função no ponto?

- Do comportamento da função próximo ao ponto? Justifique.

13. Explique a diferença entre:

- “ $x = a$ ”
- “ $x \rightarrow a$ ”

1.2	Construção da derivada via definição de limite com App 2 (controle deslizante para $h \rightarrow 0$).	<p>Teorema em ação: $f(x + h) - f(x) / h \rightarrow f'(x)$;</p> <p>Exploração investigativa: qual o significado da reta tangente? O que ocorre com diferentes funções?</p>
-----	---	--

App 2 - [Explorando a derivada: da secante à tangente](#)

Questionário:

Considere inicialmente a função:

$$f(x) = x^2$$

Escolha $a = 1$ no aplicativo.

1. Observe a reta secante determinada por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- O que essa razão representa geometricamente?
- O que ela mede?

2. Diminua gradativamente o valor de h utilizando o controle deslizante.

- O que acontece com a inclinação da secante?
- O que acontece com a posição da reta no gráfico?

3. Quando h se aproxima de zero, o que a reta secante se torna? Explique com base na visualização.

4. Calcule analiticamente:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

5. Compare o valor obtido com a inclinação observada no aplicativo. O que isso revela sobre o significado da derivada?

6. Explique, com suas palavras:

- Qual é o significado da reta tangente?
- Por que a derivada pode ser interpretada como taxa de variação instantânea?

7. Teste agora uma função diferente (por exemplo, $f(x) = x^3$ ou $f(x) = \sqrt{x}$).

- O comportamento da tangente muda?
- O que permanece conceitualmente igual?

2ª parte: Função descontínua

Digite a função:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Analise no ponto $x = 1$:

- Existe reta tangente?
- A função é contínua nesse ponto?
- O que você observa sobre a relação entre continuidade e derivabilidade?

3ª parte: função suave

Digite a função:

$$h(x) = x^3$$

Analise no ponto $x = 0$:

- Existe reta tangente?
- Qual é o coeficiente angular?

- O que diferencia esse caso dos anteriores?

4ª parte: generalização

Com base nas explorações anteriores, responda:

- Toda função contínua é derivável?

- Toda função derivável é contínua? Justifique a partir das evidências observadas no aplicativo.

Explique:

- Por que analisar apenas a “fórmula” da função pode não ser suficiente para garantir a existência da derivada?

- O que essa investigação revela sobre os limites de aplicação do conceito de derivada?

1.4

Observação da primeira e segunda derivada em App 4. Análise do comportamento de concavidade e ponto de inflexão.

Conceitos em ação: concavidade, inflexão;
Modelagem: prever e analisar comportamento de gráficos.

App 4 - [Analisando o comportamento de funções](#)

Questionário:

Considere inicialmente a função:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Digite a função no aplicativo e observe simultaneamente os gráficos de f , f' e f'' .

1ª parte: crescimento e primeira derivada

Utilizando o controle deslizante para variar x :

- Em quais intervalos $f'(x)$ é positiva?
- O que acontece com o gráfico de f nesses intervalos?
- Formule uma regra relacionando o sinal de $f'(x)$ ao comportamento de $f(x)$.

2ª parte: concavidade e segunda derivada

Observe o gráfico de $f''(x)$:

- Onde $f''(x)$ é positiva?
- Como está a concavidade de f nesses intervalos?
- Estabeleça a relação entre o sinal de $f''(x)$ e a concavidade da função.

3ª parte: pontos de inflexão

Identifique os valores de x onde $f''(x) = 0$.

- O que acontece com a concavidade de f nesses pontos?
- Todo ponto onde $f''(x) = 0$ é ponto de inflexão? Justifique com base no que observa.

4ª parte: interpretação

Escolha outros exemplos de função: $f(x) = x^4$ e $f(x) = e^x$.

- O que muda no comportamento dos três gráficos?

- O que permanece conceitualmente igual?

Explique:

- Como o gráfico da segunda derivada permite prever o comportamento da função original?
- Em que sentido essa análise pode ser útil na interpretação de fenômenos reais (crescimento, aceleração, variação)?

Etap a 2 - Integral como área sob a curva e como função acumulada

Objetivo específico: Desenvolver a compreensão da integral definida como área sob a curva e da integral indefinida como função primitiva, partindo de noções intuitivas e construindo formalizações progressivamente.

Etap a	Atividades	Fundamento teórico
2.1	Discussão aberta: "O que é área?" – análise qualitativa de áreas de quadrados com lados 1, $1/2$ e $\sqrt{2}$.	Cenário para investigação: desconstrução da noção de área. Conceito em ação: comparação e medida.

[Comparando quadrados para repensar o conceito de área](#)

Observação: não existe aplicativo aqui. O link serve apenas para auxiliar, caso queira construir os quadrados para visualizar na tela do GeoGebra.

Questionário:

Considere três quadrados com lados (você pode utilizar o GeoGebra para auxiliar):

- 1
- $1/2$
- $\sqrt{2}$

1ª parte: comparação e estimativa

Sem utilizar fórmula inicialmente:

- Qual dos três quadrados possui maior área?

- Como você justifica sua resposta?

2ª parte: cálculo e validação

Agora calcule a área de cada quadrado.

- Os resultados confirmam sua estimativa inicial?

- O que significa “medir” uma área nesse contexto?

3ª parte: problematização

	entre somas inferiores e superiores. Exploração de erros de aproximação.	áreas de retângulos como aproximação da área sob a curva. Representações: visual e numérica.
--	--	---

App 5 - [Aproximando áreas com somas de Riemann](#)

Questionário:

1. Observe os retângulos superiores e inferiores no gráfico. Qual é a relação entre essas somas e a área real sob a curva?

2. O que acontece com as somas superior e inferior quando você aumenta o número de subdivisões (n)?

3. Como você explicaria a integral definida de uma função para alguém que nunca estudou cálculo, usando o que observou no aplicativo?

4. Por que as aproximações com poucos retângulos podem ser inadequadas? Como isso se relaciona com o conceito de erro?

5. Qual é a importância de visualizar somas inferiores e superiores em vez de apenas calcular uma área aproximada?

2.3	Uso do App 5: determinação e interpretação do valor médio de uma função em um intervalo.	Integral definida, valor médio de função, área equivalente, interpretação geométrica.
<p style="text-align: center;"><i>App 6 - Teorema do Valor Médio</i></p> <p><u>Questionário:</u></p> <p>1. O valor médio da função muda se você alterar as posições dos pontos? Explique.</p> <p>2. Por que o valor médio da função não pode ser escolhido arbitrariamente?</p>		
2.4	Uso do App 6: verificação da existência de raiz em um intervalo com mudança de sinal. Exploração da relação entre continuidade e zeros da função.	Continuidade, mudança de sinal, zeros da função, intervalo fechado.
<p style="text-align: center;"><i>App 7 - Teorema de Bolzano</i></p> <p><u>Questionário:</u></p> <p>1. Mova os pontos sobre a curva e observe onde a função muda de sinal. Qual é a importância desses pontos em relação ao Teorema de Bolzano?</p>		

2. O que acontece se a função não for contínua no intervalo escolhido? O Teorema de Bolzano ainda se aplica?

3. Por que o Teorema de Bolzano é útil mesmo sem calcular exatamente o zero da função?

2.5

Uso do App 8: identificação de ponto com derivada igual à taxa média de variação no intervalo.

Derivada, taxa média de variação, taxa instantânea de variação, reta secante e

App 8 - [Teorema de Lagrange](#)

Questionário:

1. Mova os pontos a e b sobre a curva e observe onde a inclinação da tangente coincide com a da secante. O que representa esse ponto c na função?

2. Teste funções com descontinuidades ou não deriváveis no intervalo. O teorema ainda se aplica? Por quê?

3. Por que o Teorema de Lagrange é útil para entender o comportamento de uma função, mesmo sem calcular c explicitamente?

2.6

Uso do App 9: verificação das condições de continuidade e derivabilidade em um intervalo fechado.

Continuidade, derivabilidade, zeros da derivada, ponto crítico, reta tangente horizontal.

App 9 - Teorema de Rolle

Questionário:

1. Ao movimentar os pontos extremos da função, observe onde a tangente é horizontal. O que representa esse ponto c ?
2. Experimente funções que não sejam contínuas ou não deriváveis no intervalo. O ponto c ainda existe? Explique.
3. Por que o Teorema de Rolle é importante para entender o comportamento de funções, mesmo sem calcular o ponto c ?

2.7

Uso do App 10: conexão entre integral definida e derivada. Exploração da função área e sua relação com a taxa de variação.

Integral definida, função área, derivada, antiderivada, acumulação, relação entre variação e área.**

App 10 - Teorema Fundamental do Cálculo

Questionário:

1. Observe a função acumulada $F(x)$ e sua derivada $F'(x)$. O que acontece com $F'(x)$ em relação à função original $f(x)$?
2. Ao alterar o intervalo $[a,b]$, como muda a área sob a curva e o valor da integral? O que isso indica sobre a função acumulada?
3. O que acontece se a função não for contínua em algum ponto do intervalo? O que isso sugere sobre a aplicação do teorema?



Etapa 3 - Aplicações integradas da derivada e da integral

Objetivo específico: Modelar e resolver problemas reais envolvendo variação e acumulação, compreendendo o papel da matemática na interpretação e transformação da realidade.

Etapa	Atividades	Fundamento teórico
3.1	Uso do App 11: investigação das relações entre posição, velocidade e aceleração ao longo do tempo.	Função posição, velocidade, aceleração, derivada, integral definida, taxa de variação, acumulação, interpretação gráfica.
<p style="text-align: center;"><i>App 11 - Análise do movimento de um automóvel</i></p> <p><u>Questionário:</u></p> <p>1. Observe o deslocamento do automóvel ao longo do tempo. Como podemos relacionar pequenas variações de posição ds com pequenas variações de tempo dt?</p> <p>2. Se você observar a posição do automóvel ao longo do tempo, o que o gráfico da posição indica sobre a velocidade?</p> <p>3. Por que o conceito de diferencial é importante para descrever movimentos contínuos?</p>		
3.2	Uso do App 12: exploração da variação infinitesimal do deslocamento e sua relação com a velocidade instantânea.	Diferencial, derivada, variação infinitesimal, aproximação linear, taxa instantânea de variação.**
<p style="text-align: center;"><i>App 12 - Análise do diferencial na taxa de deslocamento ao longo do tempo</i></p> <p><u>Questionário:</u></p>		

1. À medida que o automóvel se movimenta, observe o valor de ds que aparece na tela. Como ele se relaciona com o diferencial de tempo dt e com a velocidade $v(t)$?

2. Como a visualização do diferencial ds no movimento do carro ajuda a compreender melhor a função posição $s(t)$?

3. Por que é importante considerar ds e dt como aproximações infinitesimais ao modelar movimentos contínuos?

3.3

Uso do App 13: visualização da variação infinitesimal de uma função no gráfico.

Diferencial, derivada, aproximação linear, reta tangente, variação infinitesimal, interpretação gráfica.

App 13 - [Análise gráfica do diferencial utilizando eixo de coordenadas](#)

Questionário:

1. Ao diminuir o valor de Δt no controle deslizante, o que acontece com a razão $\Delta s/\Delta t$ e como isso se relaciona com o valor da velocidade mostrado no gráfico?

2. Ao variar o tempo no controle deslizante, como a inclinação da curva posição \times tempo se relaciona com os valores de deslocamento e velocidade apresentados

simultaneamente?

3. Por que é importante que o valor de Δt seja pequeno para interpretar corretamente a relação entre Δs e Δt como velocidade instantânea? O que acontece se Δt for grande?

3.4

Uso do App 14: observação da relação entre a variação da função e sua derivada.

Diferencial, derivada, incremento linear, reta tangente, variação infinitesimal, interpretação gráfica.

App 14 - [Análise gráfica do diferencial](#)

Questionário:

1. Ao criar uma função $f(x)$ qualquer e interpretar x como tempo, como podemos relacionar a derivada $f'(x_0)$ com o conceito de velocidade em um movimento?

2. Ao alterar o valor de Δx , o que acontece com a aproximação da derivada no ponto x_0 ? Como isso pode ser interpretado em termos de velocidade média e velocidade instantânea em um movimento?

3. Se a derivada de uma função pode representar a velocidade de um móvel, o que a integral dessa função pode representar em termos físicos? Como o aplicativo pode

ajudar a visualizar essa relação?

4. Ao criar livremente uma função para representar a posição de um móvel, como podemos avaliar se esse modelo é fisicamente plausível? Que papel a derivada desempenha nessa análise?

QUESTIONÁRIO FINAL:

1. Explique, com suas palavras, o conceito de limite.
2. Explique o conceito de derivada como taxa de variação.
3. Explique o conceito de integral como acumulação.
4. Defina o conceito de diferencial.

