



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: ENSINO MÉDIO**

RENATO MORAES DA SILVA

**SIMULADOR DIGITAL PARA ENSINAR RELAÇÃO DE
DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS POR MEIO DO
VOLUME DE SÓLIDOS**

**BELÉM/PA
2026**

RENATO MORAES DA SILVA

**SIMULADOR DIGITAL PARA ENSINAR RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA
ENTRE GRANDEZAS POR MEIO DO VOLUME DE SÓLIDOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, na Linha de Pesquisa Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto de Miranda Pinheiro.

Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Cinthia Cunha Maradei Pereira.

RENATO MORAES DA SILVA

SIMULADOR DIGITAL PARA ENSINAR RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS POR MEIO DO VOLUME DE SÓLIDOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemá-
tica pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de
Matemática da Universidade do Estado do Pará, na
Linha de Pesquisa Ensino Médio.

Data de aprovação: _____ / _____ / _____

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto de Miranda Pinheiro (Orientador)
Universidade do Estado do Pará

Prof.^a Dr.^a Cinthia Cunha Maradei Pereira (Coorientadora)
Universidade do Estado do Pará

Prof. Dr. Wanderson Alexandre da Silva Quinto (Examinador Externo)
Universidade do Estado do Pará

Prof. Dr. José Carlos de Souza Pereira (Examinador Externo)
Centro de Formação de Profissionais da Educação Básica do Estado do Pará (CEFOP-
SEDUC)

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S586s Silva, Renato Moraes da
SIMULADOR DIGITAL PARA ENSINAR RELAÇÃO DE
DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS POR MEIO DO VOLUME DE
SÓLIDOS / Renato Moraes da Silva. — Belém, 2026.
196 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto de Miranda Pinheiro
Coorientadora: Prof^a. Dr. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA - PPGEM) - Universidade do Estado do Pará, Campus I -
Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2026.

1. Ensino de matemática. 2. Variação de grandezas. 3. Nterpretação
de gráficos. 4. Tecnologias digitais. 5. Simulador educacional. I. Título.

DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho ao meu Deus, por tantas bênçãos,
e à maravilhosa Ana, por existir.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, e acima de todas as coisas, agradeço a Deus, que tem guiado minha vida e me conduzido por caminhos que jamais imaginei trilhar. A Ele dedico toda honra e toda glória pela conclusão desta importante etapa.

À Elielma Albuquerque, por todo o suporte oferecido durante essa caminhada, permitindo que eu pudesse viajar e cumprir meus compromissos acadêmicos com tranquilidade, sabendo que nossa filha, Ana Lívia, estaria recebendo todo o cuidado e carinho necessários. Ana Lívia é uma das minhas maiores motivações para buscar constantemente o aprimoramento em todas as dimensões da vida. Sem esse apoio fundamental, a conclusão desta etapa teria sido muito mais difícil.

Aos meus pais, por tudo o que fizeram por mim desde o momento em que cheguei a este mundo, oferecendo amor, cuidado, educação e, acima de tudo, ensinando-me a confiar em Deus. Estendo também minha gratidão aos meus irmãos e sobrinhos, pelos quais tenho profundo carinho e admiração.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), que conduzem cada disciplina com competência, dedicação e excelência, demonstrando, em cada aula, o compromisso com a formação de mestres capazes de contribuir significativamente para a melhoria da educação em nossa sociedade.

À Universidade do Estado do Pará (UEPA), pela oportunidade de ofertar um curso de mestrado de reconhecida excelência, possibilitando que profissionais oriundos de diferentes regiões do estado tenham acesso à formação acadêmica de alto nível e possam ampliar seus conhecimentos e perspectivas de atuação.

Aos colegas da turma de 2024, que se tornaram verdadeiros amigos ao longo dessa jornada. Sou grato a Deus por ter compartilhado esse percurso com um grupo tão diverso e ao mesmo tempo tão unido, formado por pessoas que sempre estiveram dispostas a contribuir para o crescimento acadêmico e pessoal umas das outras.

À Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA) e à Secretaria Municipal de Educação e Desporto de Curralinho, pela concessão da licença que possibilitou minha dedicação integral às atividades do mestrado. Reafirmo meu compromisso de aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo desta formação em benefício da educação e das instituições nas quais exerço minha atuação profissional.

Aos membros das bancas de qualificação e de defesa, pelas valiosas contribuições que proporcionaram o aprimoramento do simulador desenvolvido e da dissertação como um todo, enriquecendo significativamente os resultados desta pesquisa.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto de Miranda Pinheiro, e à minha coorientadora, Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira, pela parceria, confiança e dedicação ao longo de todo este

processo. Considero-me privilegiado por ter contado com a orientação de profissionais tão competentes e comprometidos. Agradeço pelos conhecimentos compartilhados, pelas orientações seguras, pela disponibilidade em cada etapa da pesquisa e por todos os ensinamentos que levarei para minha trajetória acadêmica e profissional.

RESUMO

RENATO MORAES DA SILVA. **Simulador Digital para Ensinar Relação de Dependência entre Grandezas por meio do Volume de Sólidos**. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2026.

Esta dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, tem como objetivo conceber, desenvolver e validar um simulador educacional voltado ao ensino da relação de dependência entre grandezas, com foco na interpretação de gráficos no Ensino Médio, especialmente na Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM. A pesquisa parte da identificação de dificuldades recorrentes dos estudantes na compreensão de situações que envolvem variação de grandezas, evidenciadas por baixos índices de acerto em questões do exame, particularmente aquelas relacionadas ao enchimento de recipientes com diferentes geometrias. Do ponto de vista metodológico, caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, fundamentada na abordagem *Design Science Research* (DSR), que orienta a construção e avaliação de artefatos voltados à resolução de problemas práticos. Nesse contexto, foi desenvolvido o simulador SENVG (Simulador para o Ensino de Noções de Variação de Grandezas), estruturado a partir de modelos matemáticos que representam o comportamento da altura de líquidos em função do tempo, considerando diferentes formas geométricas e condições de vazão constante, permitindo a visualização dinâmica das relações entre variáveis por meio da articulação entre representações gráficas, geométricas e numéricas. A validação do simulador foi realizada com professores de Matemática atuantes no Ensino Médio, por meio de questionários estruturados, escala *Likert* e questões abertas, cujos resultados indicam avaliação positiva do artefato quanto à clareza conceitual, organização didática e potencial para favorecer a compreensão das relações entre grandezas. As análises indicaram que o simulador, contribui para deslocar o foco da atividade matemática da obtenção de resultados para a interpretação de relações, possibilitando ao estudante acompanhar o comportamento das variáveis em tempo real e estabelecer conexões entre diferentes formas de representação. Conclui-se que o SENVG constitui um Produto Educacional com potencial para contribuir com o ensino da interpretação de gráficos e da variação de grandezas, ao promover uma abordagem baseada na exploração, visualização e análise de fenômenos dinâmicos, além de apontar possibilidades de continuidade da pesquisa por meio do desenvolvimento de sequências didáticas e de estudos empíricos com estudantes.

Palavras-chave: ensino de matemática. variação de grandezas. interpretação de gráficos. tecnologias digitais. simulador educacional.

ABSTRACT

RENATO MORAES DA SILVA. **Digital Simulator for Teaching Dependency Relationships Between Quantities Through the Volume of Solids**. Dissertation presented to the Graduate Program in Mathematics Education – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2026.

This dissertation, developed within the scope of the Professional Master's Program in Mathematics Education, aims to conceive, develop, and pedagogically validate an educational simulator designed for teaching dependency relationships between quantities, with emphasis on graph interpretation in High School education, particularly focusing on Skill 15 of the ENEM Reference Matrix. The research is grounded in the identification of recurring student difficulties in understanding situations involving variation between quantities, evidenced by low performance rates in exam questions, especially those related to the filling of containers with different geometric shapes. From a methodological perspective, this study is characterized as applied research based on the *Design Science Research* (DSR) approach, which guides the construction and evaluation of artifacts aimed at solving practical problems. In this context, the SENVG simulator (*Simulator for Teaching Notions of Variation Between Quantities*) was developed, structured upon mathematical models representing the behavior of liquid height as a function of time, considering different geometric forms and constant flow conditions, enabling dynamic visualization of relationships between variables through the articulation of graphical, geometric, and numerical representations. The validation process involved High School Mathematics teachers and was conducted through structured questionnaires, *Likert* scale items, and open-ended questions. The results indicated a positive evaluation of the artifact regarding conceptual clarity, didactic organization, and its potential to support the understanding of relationships between quantities. The analyses also revealed that the simulator contributes to shifting the focus of mathematical activity from merely obtaining results toward interpreting relationships, allowing students to observe variable behavior in real time and establish connections between different forms of representation. It is concluded that the SENVG constitutes an Educational Product with significant potential to contribute to the teaching of graph interpretation and variation between quantities by promoting an approach grounded in exploration, visualization, and analysis of dynamic phenomena. Furthermore, the study points to possibilities for continuing the research through the development of didactic sequences and empirical studies involving students.

Keywords: mathematics education. variation between quantities. graph interpretation. digital technologies. educational simulator.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Questão do ENEM 2017 sobre preenchimento de dois reservatórios interligados	7
Figura 2 – Questão do ENEM 2020 sobre envasamento de espumantes	8
Figura 3 – Questão do ENEM 2024 sobre recipiente compartimentado internamente	9
Figura 4 – Interação entre ambiente do problema, processo de design e base de conhecimento na Design Science Research	18
Figura 5 – Princípios orientadores da Design Science Research	19
Figura 6 – Fluxo metodológico da pesquisa baseado na Design Science Research	20
Figura 7 – Fluxograma para criação do programa	33
Figura 8 – Questão do ENEM 2014 envolvendo variação de grandezas	34
Figura 9 – Trecho do código representando a importação das bibliotecas utilizadas no desenvolvimento do simulador SENVG	36
Figura 10 – Interface do simulador de grandezas (SENVG)	37
Figura 11 – Estrutura da classe responsável pela simulação do paralelepípedo	39
Figura 12 – Apresentação de sliders de dimensões e botões de controle	40
Figura 13 – Trecho do código que implementa a relação matemática entre vazão, área da base e variação da altura no paralelepípedo	41
Figura 14 – Execução da simulação do paralelepípedo com visualização tridimensional do enchimento do recipiente	42
Figura 15 – Trecho do código responsável pelo armazenamento das execuções anteriores e pela criação de novas simulações	45
Figura 16 – Múltiplas representações lineares, permitindo a comparação entre diferentes simulações do paralelepípedo	46
Figura 17 – Cilindro no processo de enchimento	47
Figura 18 – Estrutura da classe responsável pela simulação do cilindro e definição dos parâmetros iniciais	48
Figura 19 – Botões e controles de interação da simulação do cilindro	49
Figura 20 – Trecho do código que implementa a relação matemática entre vazão, área da base circular e variação da altura no cilindro	50
Figura 21 – Execução da simulação do cilindro com visualização tridimensional do enchimento do recipiente	51
Figura 22 – Execução da simulação do cilindro com visualização tridimensional do enchimento do recipiente	52
Figura 23 – Cone no processo de enchimento	53
Figura 24 – Estrutura da classe responsável pela simulação do cone e definição dos parâmetros iniciais	54

Figura 25 – Interface da simulação do cone com controles de parâmetros geométricos	55
Figura 26 – Trecho do código responsável pelo cálculo do raio do cone em função da altura	56
Figura 27 – Trecho do código que implementa o cálculo do volume do tronco de cone	58
Figura 28 – Trecho do código que implementa o método numérico para determinar a altura do líquido no cone	59
Figura 29 – Visualização tridimensional do cone durante o enchimento, com indicação da altura do líquido	60
Figura 30 – Interface do simulador do cone com comparação de múltiplas simulações no gráfico altura $\times$ tempo	61
Figura 31 – Tela inicial do cone invertido	62
Figura 32 – Trecho do código responsável pelo cálculo do raio em função da altura no cone invertido	63
Figura 33 – Trecho do código responsável pela atualização numérica da altura durante a simulação	64
Figura 34 – Gráfico altura $\times$ tempo para cone invertido	65
Figura 35 – Visualização inicial da esfera	66
Figura 36 – Trecho do código responsável pelo cálculo do volume do segmento esférico	67
Figura 37 – Trecho do código responsável pela construção do líquido na visualização 3D da esfera	68
Figura 38 – Interface da simulação da esfera durante o enchimento	69
Figura 39 – Interface da simulação da esfera durante o enchimento	70
Figura 40 – Simulação e gráfico altura $\times$ tempo para a esfera	71
Figura 41 – Menu das situações contextualizadas inspiradas em questões do ENEM	73
Figura 42 – Interface inicial da Questão 161 da prova azul do segundo dia do ENEM 2024	76
Figura 43 – Execução da Questão 161 do ENEM 2024 com geração do gráfico altura $\times$ tempo	77
Figura 44 – Interface inicial da Questão 143 da prova azul do segundo dia do ENEM 2014	79
Figura 45 – Execução da Questão 143 do ENEM 2014 com geração do gráfico altura $\times$ tempo	80
Figura 46 – Interface inicial da Questão 152 da prova azul do segundo dia do ENEM 2017	82
Figura 47 – Execução da Questão 152 do ENEM 2017 com geração do gráfico altura $\times$ volume total	83

Figura 48 – Interface inicial da Questão 166 da prova azul do segundo dia do ENEM 2020	85
Figura 49 – Execução da Questão 166 do ENEM 2020 com geração do gráfico altura $\times$ tempo	86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Frequência de uso de recursos digitais	92
Quadro 2 – Dificuldades no ensino da relação entre grandezas	93
Quadro 3 – Formas de abordagem do conteúdo em sala de aula	94
Quadro 4 – Limitações dos materiais utilizados no ensino	95
Quadro 5 – Distribuição das respostas dos especialistas na escala <i>Likert</i> . . .	98
Quadro 6 – Percepções sobre a contribuição do simulador para a compreensão das relações entre grandezas	100
Quadro 7 – Sugestões para aprimoramento do produto educacional	101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Questão de pesquisa	3
1.2	Objetivos da pesquisa	3
2	ENEM E A HABILIDADE 15 DA MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA	5
3	REVISÃO DA LITERATURA	11
4	USO DE AMBIENTE DE APRENDIZAGENS DINÂMICOS E LINGUAGENS PARA PROGRAMAÇÃO	15
5	METODOLOGIA DA PESQUISA	17
6	TECNOLOGIAS DIGITAIS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	24
6.1	A centralidade do conhecimento na aprendizagem mediada por tecnologias	24
6.2	Interação, modelização e construção do conhecimento	26
6.3	Transposição informática e ambientes digitais de aprendizagem	28
6.4	Didática computacional e validação dos processos de aprendizagem	30
7	UM SIMULADOR PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE VARIAÇÃO DE GRANDEZAS (SENVG)	33
7.1	Paralelepípedo	38
7.2	Cilindro	47
7.3	Cone	53
7.4	Cone Invertido	62
7.5	Esfera	66
7.6	Questões do ENEM no SENVG	72
7.6.1	Questão 161 da prova azul do segundo dia do ENEM 2024	75
7.6.2	Questão 143 da prova azul do segundo dia do ENEM 2014	77
7.6.3	Questão 152 da prova azul do segundo dia do ENEM 2017	81
7.6.4	Questão 166 da prova azul do segundo dia do ENEM 2020	84
8	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	89
8.1	Caracterização dos especialistas participantes	89
8.2	Diagnóstico pedagógico sobre o ensino da relação entre grandezas.	93

8.3	Avaliação do produto educacional	96
8.4	Discussão e implicações para o desenvolvimento do simulador	102
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
	Bibliografia	108
APÊNDICES		110
A	ROTEIRO DE CONSULTA AOS ESPECIALISTAS	111
B	CADERNO DE EXPLORAÇÃO DO SENVG	126

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática enfrenta desafios que vão além da execução de procedimentos e da aplicação direta de fórmulas. Muitos estudantes demonstram dificuldades quando as situações propostas exigem a mobilização de diferentes ideias, a construção de um raciocínio próprio e a compreensão do problema como um todo.

Nessas situações os entraves vão além da compreensão do objeto matemático em si, fazendo com que se apresente a necessidade de desenvolver um pensamento que permita interpretar o contexto, organizar informações, formular relações e atribuir sentido às representações utilizadas. Trata-se de um processo cognitivo mais complexo, que exige do estudante a capacidade de modelar mentalmente o problema e de relacioná-lo com situações da realidade, algo que nem sempre é favorecido pelas práticas pedagógicas que utilizam apenas quadro e pincel.

Para nós esse tipo de dificuldade aponta para a necessidade de repensar práticas pedagógicas que se apoiam predominantemente na exposição verbal e na repetição de exercícios padronizados. Em muitos casos, a linguagem matemática excessivamente formal e abstrata dificulta a compreensão dos processos envolvidos, afastando o estudante da construção de significados. Acreditamos, assim, na necessidade de que sejam adotadas estratégias que simplifiquem a representação dos fenômenos, favoreçam a visualização dos processos e permitam ao aluno acompanhar, passo a passo, a forma como as relações matemáticas se estabelecem. A possibilidade de visualizar e manipular essas relações contribuirá para que os estudantes compreendam melhor os conceitos envolvidos e estabeleçam conexões com situações do cotidiano.

Nesse sentido, os ambientes de aprendizagem dinâmicos têm se mostrado uma alternativa promissora para o ensino de Matemática, especialmente por possibilitarem a exploração, a experimentação e a visualização de relações matemáticas de forma interativa. Conforme discutem Borba e Penteado (2001), a inserção das tecnologias digitais amplia as possibilidades de investigação e produção de conhecimento matemático, favorecendo formas mais exploratórias de aprendizagem.

Nossa compreensão é que esses ambientes permitem que os estudantes acompanhem certas relações matemáticas, observem padrões, construam interpretações a partir da manipulação de parâmetros e testem diferentes possibilidades, favorecendo uma postura mais ativa diante do conhecimento. Nesse contexto, as discussões de Balacheff (1994) sobre ambientes informatizados de aprendizagem contribuem para compreender como as possibilidades de interação e manipulação influenciam a forma como o sujeito se relaciona com o conhecimento matemático.

Nossa experiência profissional, atuando como professores em escolas públicas de Ensino Médio e em cursinhos preparatórios para o Exame Nacional do Ensino Médio

(ENEM), tem mostrado dificuldades recorrentes dos estudantes na resolução de questões que exigem interpretação, abstração e análise de relações entre grandezas. Em contextos de sala de aula e de avaliações diagnósticas voltadas ao exame, observa-se que itens que demandam leitura e interpretação de gráficos, compreensão de variação de grandezas e articulação entre diferentes registros de representação matemática apresentam, de modo geral, baixos índices de acerto, mesmo entre estudantes que demonstram domínio de procedimentos algébricos básicos.

Essa constatação encontra respaldo nos dados oficiais disponibilizados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), a partir da análise dos microdados do ENEM. Conforme apontam os documentos produzidos pelo INEP (2024), itens associados à área de Matemática e suas Tecnologias que mobilizam competências relacionadas à interpretação de gráficos, tabelas e relações funcionais apresentam percentuais de acerto significativamente inferiores quando comparados a itens de aplicação direta de fórmulas ou cálculos aritméticos simples.

Estudos como os desenvolvidos por Ferreira (2014), ao analisarem a abrangência da matriz de referência do ENEM, indicam que habilidades relacionadas à interpretação de representações gráficas figuram entre aquelas que concentram maior incidência de erros, revelando fragilidades conceituais persistentes na formação matemática dos estudantes.

Sob a perspectiva pedagógica, Passos, Oliveira e Salvi (2011) destacam que as questões de Matemática do ENEM exigem do estudante, além do reconhecimento de informações explícitas, a capacidade de compreender situações-problema contextualizadas, interpretar representações gráficas e estabelecer relações entre variáveis. Essa exigência amplia o nível cognitivo das tarefas propostas e impõe desafios adicionais ao ensino da Matemática na Educação Básica.

Embora essas dificuldades não se restrinjam a um único conteúdo matemático, elas se manifestam de forma significativa em temas que envolvem conceitos mais abstratos e processos de variação. Entre os diversos objetos de ensino abordados na Matemática do Ensino Médio, destaca-se aquele associado à Habilidade 15 da Competência 4 da matriz de referência do ENEM, que envolve a interpretação de gráficos e a compreensão da relação entre grandezas em diferentes contextos. A recorrência desse tipo de item nas provas e o baixo desempenho dos estudantes reforçam a pertinência de investigações que busquem novas formas de abordagem desses objetos.

O texto está organizado da seguinte forma: após esta introdução é apresentada a questão de pesquisa e objetivos, seguido de uma seção dedicada ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com ênfase na Habilidade 15 da Matriz de Referência de Matemática, discutindo sua recorrência, características e implicações para o ensino médio. Posteriormente, é desenvolvida a revisão da literatura, na qual se abordam

estudos relacionados ao uso de tecnologias digitais, visualização e ambientes de aprendizagem dinâmicos no ensino de Matemática.

Na continuidade, discute-se o uso de ambientes de aprendizagem dinâmicos e linguagens de programação, fundamentando as escolhas metodológicas adotadas. Em seguida, descreve-se detalhadamente o simulador educacional SENVG, contemplando sua concepção, modelagem matemática, implementação computacional e potencialidades didáticas. Após essa etapa, apresenta-se a metodologia da pesquisa, explicitando o tipo e a abordagem do estudo, o contexto, os participantes, os instrumentos, os procedimentos adotados e os aspectos éticos. Na sequência, são desenvolvidas a análise e a discussão dos resultados. Por fim, nas considerações finais, são retomados os principais achados do trabalho, discutidos seus limites e apontadas possibilidades de aprofundamento e continuidade da pesquisa.

1.1 Questão de pesquisa

Nesse contexto, esta pesquisa parte da seguinte questão: como o desenvolvimento de um ambiente de aprendizagem dinâmico, fundamentado na transposição informática, pode contribuir para o ensino da relação de dependência entre grandezas por meio da interpretação de gráficos no Ensino Médio, com foco na Competência 4 e na Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM?

A formulação dessa questão decorre da necessidade de compreender de que maneira recursos computacionais podem favorecer a interpretação de gráficos, a análise da variação entre grandezas e a construção de significados matemáticos em ambientes dinâmicos de aprendizagem. Além disso, busca-se compreender como a utilização de ambientes digitais pode contribuir para superar dificuldades frequentemente observadas no ensino da interpretação gráfica, especialmente aquelas relacionadas à compreensão qualitativa das relações entre variáveis e ao reconhecimento do comportamento das funções representadas em gráficos.

1.2 Objetivos da pesquisa

Diante dessa problemática, o objetivo geral deste trabalho consiste em desenvolver e validar pedagogicamente um ambiente de aprendizagem dinâmico, fundamentado na transposição informática, voltado ao ensino da relação de dependência entre grandezas por meio da interpretação de gráficos, com foco na Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM.

Para alcançar esse objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Realizar um estudo nos itens do ENEM que tratam de variação de grandezas;

- Analisar a Competência 4 e a Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM, considerando sua relação com a interpretação de gráficos e a variação entre grandezas;
- Discutir a escolha da Competência 4 e da Habilidade 15 como foco deste trabalho, considerando as demandas do Ensino Médio e sua relação com o uso de ambientes de aprendizagem dinâmicos;
- Verificar as potencialidades das linguagens de programação para criação de ambientes dinâmicos voltados ao ensino e à aprendizagem;
- Desenvolver protótipos envolvendo sólidos geométricos e a variação de grandezas entre alturas e volumes;
- Validar pedagogicamente o ambiente desenvolvido, considerando as percepções de especialistas da área de Ensino de Matemática acerca das potencialidades do simulador para o ensino da interpretação de gráficos e das relações entre grandezas.

Concluída esta seção, o texto avança para examinar o contexto do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e, em particular, da Habilidade 15 da Matriz de Referência de Matemática. Essa etapa justifica-se pela relevância dessa habilidade para a interpretação de relações entre grandezas, reforçada pelos estudos de Ferreira (2014) e Passos, Oliveira e Salvi (2011). Assim, situa-se a pesquisa nas competências avaliadas pelo ENEM, preparando o terreno para as análises posteriores e garantindo continuidade entre a fundamentação teórica inicial e o enfoque específico da investigação.

2 ENEM E A HABILIDADE 15 DA MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) com a finalidade de avaliar o desempenho dos estudantes ao término da Educação Básica. Ao longo de sua trajetória, o exame passou por reformulações que ampliaram seu escopo, assumindo, a partir de 2009, papel central nos processos de acesso ao ensino superior, além de subsidiar políticas públicas educacionais (Brasil; Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, s.d.).

A reformulação ocorrida em 2009 introduziu uma Matriz de Referência organizada por áreas do conhecimento, competências e habilidades, que passou a orientar a elaboração dos itens do exame. Essa matriz explicita os conhecimentos e capacidades que se espera que os estudantes desenvolvam ao longo da Educação Básica, alinhando o ENEM aos documentos curriculares nacionais e a uma concepção de avaliação centrada em competências (Brasil; Ministério da Educação, 2009).

Na área de Matemática e suas Tecnologias, a matriz estrutura-se em competências gerais desdobradas em habilidades específicas, que articulam conteúdos matemáticos a situações contextualizadas. O foco desloca-se da aplicação de procedimentos algorítmicos para a interpretação de situações-problema, a análise de representações matemáticas e a compreensão da relação entre grandezas envolvidas (Brasil; Ministério da Educação, 2009).

Entre essas habilidades, a Habilidade 15 ocupa lugar de destaque, pois envolve a interpretação de informações apresentadas em gráficos e tabelas que relacionam variáveis mensuráveis. Essa habilidade exige do estudante a compreensão da dependência entre grandezas, a leitura de comportamentos globais de funções e a análise de variações ao longo do tempo ou de outros parâmetros relevantes.

Ferreira (2014), ao analisar os itens de Matemática do ENEM aplicados entre 2009 e 2013, aponta que a Habilidade 15 figura entre as mais recorrentes na prova. Segundo o autor, essa frequência revela a centralidade da interpretação gráfica no exame, mas também mostra dificuldades persistentes dos estudantes em lidar com situações que exigem a articulação entre gráficos, tabelas e contextos matemáticos.

A análise de Ferreira (2014) indica que muitos itens associados à Habilidade 15 demandam mais do que a leitura direta de valores, exigindo a compreensão do comportamento das grandezas representadas ao longo de um intervalo. O autor destaca que esse tipo de exigência nem sempre é contemplado de forma sistemática nas práticas escolares, o que contribui para os baixos percentuais de acerto observados nesses itens.

Em estudo complementar, Passos, Oliveira e Salvi (2011) analisaram questões

de Matemática e suas Tecnologias do chamado “novo ENEM” e identificaram que os itens frequentemente requerem a interpretação integrada de texto, gráfico e contexto. Os autores ressaltam que essa característica amplia as demandas cognitivas impostas ao estudante, especialmente quando o gráfico representa processos dinâmicos.

De acordo com Passos, Oliveira e Salvi (2011), muitos estudantes demonstram dificuldades em atribuir significado aos gráficos apresentados nas questões, sobretudo quando estes expressam relações de variação contínua ou não linear. Essas dificuldades refletem fragilidades na compreensão do papel das representações gráficas como ferramentas de análise de fenômenos matemáticos e físicos.

No período compreendido entre 2015 e 2024, observa-se a permanência de itens vinculados à Habilidade 15 nas provas do ENEM, mobilizando diferentes objetos de conhecimento e contextos. Entre esses, destacam-se as situações-problema que envolvem a variação da altura ou do volume de líquidos em função do tempo, frequentemente associadas ao enchimento de recipientes.

As questões que tratam do enchimento de recipientes geralmente consideram uma vazão constante de entrada de líquido e recipientes com formatos geométricos específicos. Em algumas situações, a altura do líquido não cresce de maneira uniforme ao longo do tempo, pois sua variação depende da área da seção transversal do recipiente em cada nível considerado.

Esse tipo de questão exige que o estudante compreenda que o gráfico que relaciona altura e tempo não representa diretamente o volume acumulado, mas o efeito da geometria do recipiente sobre a variação da altura. Assim, a interpretação correta do gráfico pressupõe a articulação entre conhecimentos de funções, geometria espacial e proporcionalidade. Para ilustrar essas exigências cognitivas, faremos a exposição e breve análise de algumas dessas questões.

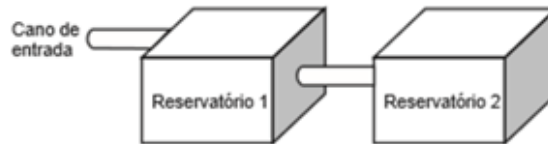
Nesse contexto, observa-se que a interpretação de gráficos em questões do ENEM envolve a compreensão das relações entre grandezas ao longo de todo o domínio considerado. Isso implica reconhecer padrões de crescimento, estabilidade ou variação, bem como compreender os fatores que influenciam essas mudanças. Assim, o estudante é levado a mobilizar diferentes conhecimentos matemáticos de forma articulada, estabelecendo conexões entre conceitos e representações. Essa exigência reforça a necessidade de abordagens pedagógicas que favoreçam a construção de significados, possibilitando que o aluno compreenda o comportamento das grandezas para além de uma leitura superficial dos dados apresentados.

No ENEM 2017, uma das questões mais representativas da Habilidade 15 tratava de um sistema com dois reservatórios conectados. A água, entrando a uma vazão constante, preenchia primeiro o Reservatório 1, e apenas após atingir certo nível, passava a escoar para o Reservatório 2. O item pedia ao candidato que identificasse o gráfico que melhor descrevia a altura da água no primeiro reservatório em função do

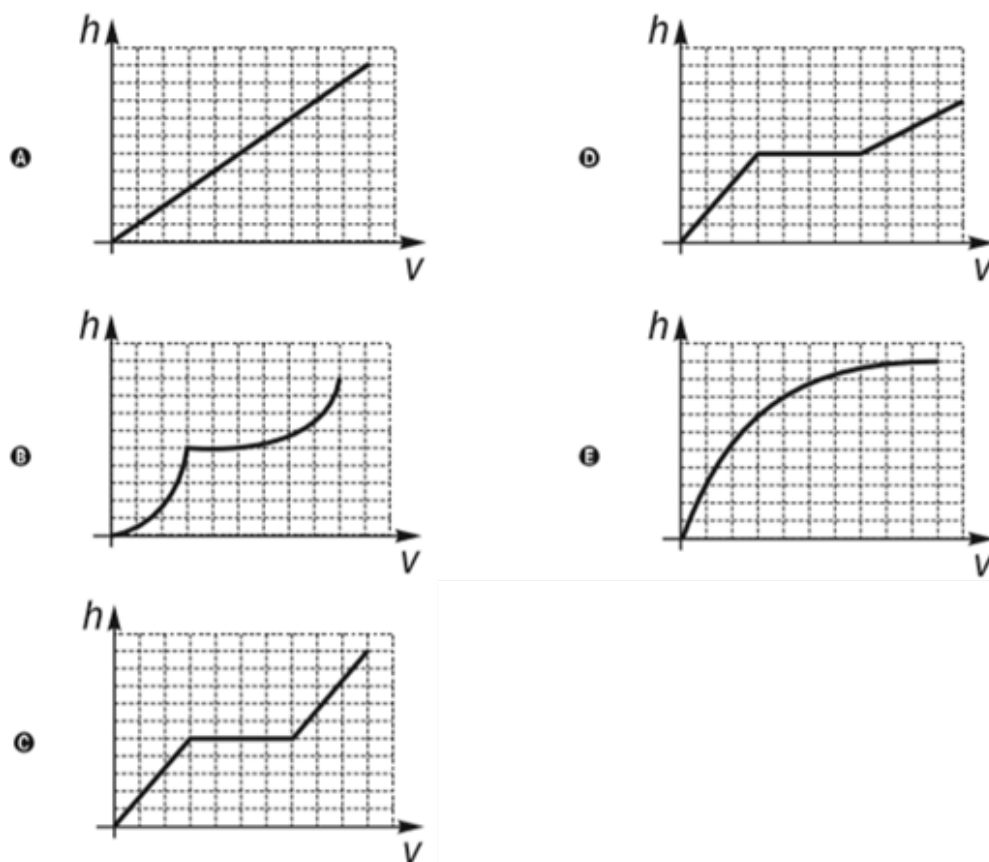
volume total inserido no sistema, como se pode verificar na Figura 1.

Figura 1 – Questão do ENEM 2017 sobre preenchimento de dois reservatórios interligados

A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.



A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios. Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V de água no sistema?

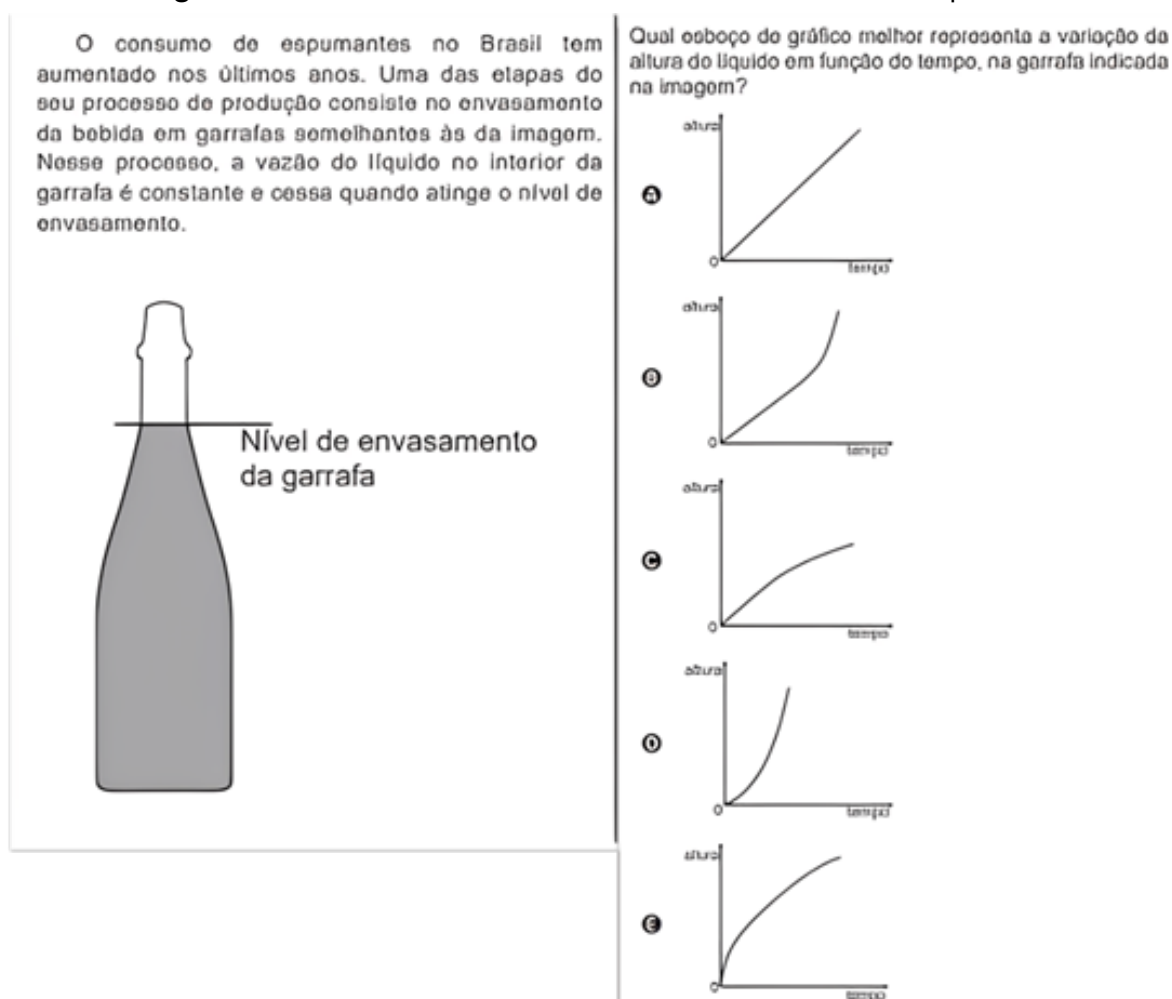


Fonte: INEP (2017).

A resolução exigia compreender que, embora a vazão de entrada fosse constante, o gráfico da altura do líquido deveria apresentar dois comportamentos distintos: crescimento linear enquanto apenas o primeiro reservatório estivesse sendo preenchido e, após o nível de transbordamento, estabilização da altura enquanto a água se dirigia para o segundo reservatório. Essa interpretação gráfica por trechos mostrou-se desafiadora, refletida no percentual de acerto de 38,6%, indicando que uma parcela significativa dos participantes não compreendeu a correspondência entre o fenômeno descrito e sua representação gráfica.

A figura 2 traz uma das questões aplicadas no ENEM 2020 que mobilizou diretamente a Habilidade 15 da Matriz de Referência de Matemática, ao apresentar uma situação de envasamento de espumantes em garrafas de formato não cilíndrico. O enunciado informava que o líquido era despejado com vazão constante até atingir um determinado nível da garrafa, ilustrada com uma silhueta semelhante à de garrafas reais de espumante. Em seguida, o estudante deveria indicar qual gráfico melhor representava a variação da altura do líquido em função do tempo, a partir das curvas apresentadas nas alternativas.

Figura 2 – Questão do ENEM 2020 sobre envasamento de espumantes



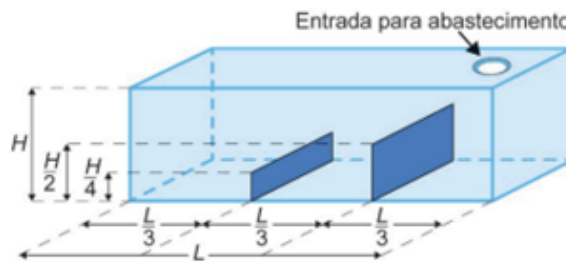
Fonte: INEP (2020).

A resolução desse item exigia que o estudante compreendesse que, mesmo com a vazão constante, a altura do líquido não aumenta uniformemente, pois a área da seção transversal da garrafa varia ao longo de sua altura. Isso altera diretamente a inclinação da curva. Apesar da contextualização visual clara, o percentual de acerto foi de apenas 24,4%, um dos mais baixos daquele exame, o que retrata a dificuldade dos participantes em compreender esse tipo de relação funcional.

No ENEM 2024 o item da habilidade 15 propõe uma situação em que o recipiente é compartimentado internamente por anteparos verticais, de modo que diferentes regiões são preenchidas em tempos distintos, ainda que com vazão constante. A figura 3 ilustra o enunciado completo da questão, incluindo as alternativas gráficas que o estudante deveria analisar.

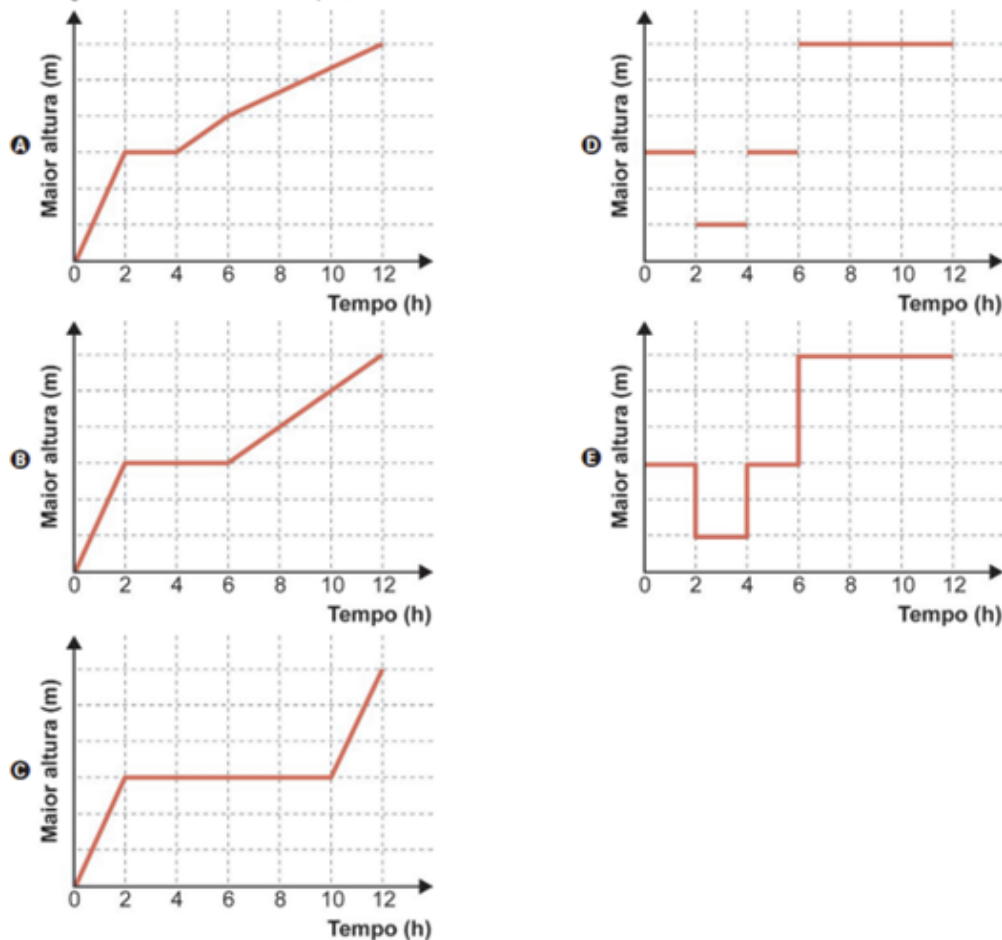
Figura 3 – Questão do ENEM 2024 sobre recipiente compartimentado internamente

Um tanque, em formato de paralelepípedo reto retângulo, tem em seu interior dois anteparos verticais, fixados na sua base e em duas paredes opostas, sendo perpendiculares a elas, conforme a figura.



Esses anteparos, de espessuras desprezíveis, estão instalados de maneira a dividir a base do tanque em três retângulos congruentes, tendo suas alturas iguais à metade e a um quarto da altura do tanque. O tanque é abastecido por uma entrada situada no teto, através de um duto que despeja água a uma vazão constante, sendo necessárias 12 horas para finalizar o seu enchimento.

O gráfico que descreve, em cada instante, a maior altura de coluna de água, dentre aquelas que vão sendo formadas ao longo do enchimento do tanque, é



Fonte: INEP (2024).

A complexidade desse item reside no fato de que a maior altura da coluna de água varia por trechos, refletindo a disposição geométrica dos anteparos. O gráfico correto deveria considerar momentos em que o crescimento da altura se estabiliza e outros em que volta a aumentar, acompanhando a passagem da água de um compartimento para o outro. Essa variação não linear e segmentada exige do estudante a articulação entre visualização espacial, interpretação de fenômenos contínuos e representação gráfica. O percentual de acerto foi de apenas 29,7%, reforçando que situações que envolvem múltiplas fases e leitura de gráficos por trechos ainda representam um desafio significativo para grande parte dos participantes.

Esse tipo de item demonstra a complexidade cognitiva associada à Habilidade 15 quando vinculada a situações de enchimento de recipientes. A resolução exige a leitura cuidadosa do enunciado, a visualização espacial do recipiente e a interpretação de gráficos definidos por trechos, articulando diferentes registros de representação.

Os baixos percentuais de acerto observados entre 2015 e 2024 indicam que as habilidades relacionadas à interpretação de gráficos e à variação de grandezas não têm sido plenamente consolidadas ao longo da Educação Básica. Em especial, as dificuldades associadas a processos contínuos revelam fragilidades na articulação entre Matemática e situações concretas.

Nesse sentido, a análise das questões do ENEM que abordam o enchimento de recipientes se apresenta como um vasto campo de pesquisa em Ensino de Matemática. Esses itens permitem identificar padrões de erro recorrentes e compreender as operações cognitivas exigidas dos estudantes diante desse tipo de situação-problema.

Após contextualizar o ENEM e a Habilidade 15, a pesquisa procede à revisão da literatura. Nesta parte, exploram-se estudos envolvendo tecnologias digitais, visualização matemática e ambientes de aprendizagem dinâmicos no ensino de Matemática. Contribuições de Borba e Penteado (2001), Basniak, Silva e Gaulovski (2017) e Lós (2021) são incorporadas para fundamentar teoricamente as potencialidades pedagógicas desses recursos.

3 REVISÃO DA LITERATURA

As dificuldades enfrentadas no ensino de Matemática têm sido amplamente discutidas na literatura, especialmente quando os conteúdos exigem interpretação, compreensão de processos e articulação entre diferentes representações. Borba e Penteado (2001) indicam que os estudantes apresentam maior desempenho em tarefas procedimentais, mas encontram obstáculos quando precisam compreender o significado das situações-problema e estabelecer relações entre variáveis envolvidas.

Essas dificuldades têm motivado reflexões sobre a necessidade de reorganização das práticas pedagógicas, buscando estratégias que favoreçam a construção de significados matemáticos. Nesse contexto, Basniak, Silva e Gaulovski (2017) apontam que o uso de tecnologias digitais surge como possibilidade de ampliar as formas de abordagem dos conteúdos, desde que integrado a propostas que valorizem a investigação, a exploração e a reflexão por parte dos estudantes.

Borba e Penteado (2001) discutem que as tecnologias não devem ser compreendidas apenas como ferramentas auxiliares, mas como elementos que transformam as formas de produção do conhecimento matemático. Segundo os autores, o uso de recursos computacionais amplia as possibilidades de representação e permite ao estudante experimentar, formular conjecturas e validar ideias, modificando qualitativamente o processo de aprendizagem.

A partir dessa perspectiva, os ambientes de aprendizagem dinâmicos ganham destaque por possibilitarem a visualização de processos matemáticos em tempo real. Como destacam Pereira, Costa e Alves (2019), esses ambientes permitem que o estudante acompanhe a variação simultânea de grandezas, observe regularidades e identifique padrões a partir da manipulação direta de parâmetros, contribuindo para a compreensão de conceitos que envolvem dependência funcional.

Lós (2021) argumenta que a dificuldade em compreender relações matemáticas não está necessariamente relacionada à complexidade dos cálculos, mas à incapacidade de interpretar o problema e construir uma representação mental coerente da situação apresentada. Em muitos casos, o estudante não consegue relacionar o modelo matemático ao fenômeno que ele representa, comprometendo a compreensão conceitual.

Nesse sentido, ao analisar ambientes computacionais voltados à aprendizagem, Basniak, Silva e Gaulovski (2017) é notório que a visualização e a experimentação contribuem para reduzir a distância entre o problema matemático e a realidade que ele busca representar, favorecendo a construção de modelos mentais mais consistentes e a atribuição de significado às representações gráficas.

A visualização matemática é compreendida como um processo cognitivo que

envolve a construção e a interpretação de imagens mentais, diagramas e representações gráficas. Conforme Lós (2021), trata-se de uma habilidade essencial para a compreensão de conceitos abstratos e para a resolução de problemas que exigem análise e interpretação.

De acordo com Lós (2021), a ausência de práticas pedagógicas que valorizem a visualização compromete a aprendizagem matemática, especialmente em conteúdos que envolvem gráficos e relações espaciais. A autora destaca que muitos erros cometidos pelos estudantes decorrem da dificuldade em interpretar representações visuais, e não da falta de domínio de procedimentos algébricos. Nesse sentido, a autora afirma:

Visualização matemática é a capacidade visual de se relacionar com o processo em si, que vai desde uma questão puramente mental a uma figura, ou representação de um problema, escrito. Isso quer dizer que, essa capacidade visual envolve a visualização e a translação de relações abstratas em formação não figurativa para termos visuais. Inclui também a manipulação e transformação de representações e imagens visuais (Lós, 2021, p. 37).

A partir dessa compreensão, Borba e Penteado (2001) mostram que ambientes digitais interativos favorecem a construção de estratégias de resolução mais elaboradas, ao permitir que o estudante explore diferentes possibilidades, teste conjecturas e analise os efeitos das alterações realizadas, deslocando o foco do resultado para a compreensão do processo matemático envolvido.

Pesquisas que analisam o uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática indicam que esses recursos podem favorecer a autonomia dos estudantes, desde que as atividades propostas incentivem a investigação e a reflexão. Como apontam Basniak, Silva e Gaulovski (2017), o uso descontextualizado da tecnologia tende a reproduzir práticas já utilizadas antes em um novo suporte, sem promover avanços significativos na aprendizagem.

Nesse contexto, o papel do professor permanece central. Borba e Penteado (2001) defendem que cabe ao docente planejar situações didáticas que favoreçam a exploração conceitual, orientar a interpretação dos resultados obtidos e promover a articulação entre as representações utilizadas e os conceitos matemáticos envolvidos.

A integração entre tecnologia e ensino de Matemática implica repensar a organização das aulas, o tempo dedicado às atividades e as formas de avaliação da aprendizagem. Conforme indicam Pereira, Costa e Alves (2019), práticas avaliativas coerentes com esse tipo de abordagem devem considerar o processo de construção do conhecimento, e não apenas o produto.

No estudo das relações entre grandezas, os ambientes de aprendizagem dinâmicos apresentam potencial para tornar visíveis processos que são abstratos. Lós (2021) apontam que a possibilidade de observar como a variação de uma grandeza

influencia o comportamento de outra contribui para a construção de explicações mais consistentes e para a compreensão do significado das representações gráficas.

Esse aspecto torna-se especialmente relevante em situações que exigem interpretação de gráficos e análise de problemas contextualizados, comuns em avaliações externas. Segundo Lós (2021), o baixo desempenho dos estudantes nesses itens está associado à dificuldade em compreender o comportamento das grandezas envolvidas.

Ao discutir o uso de tecnologias digitais no ensino, Viseu e Rocha (2018) ressaltam a importância da integração entre diferentes registros de representação, como o numérico e o gráfico. Segundo os autores, essa integração favorece a compreensão conceitual e contribui para a formação de estudantes mais autônomos. Nesse sentido, os autores destacam que:

a conexão entre diferentes representações cria uma visão global, que é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações e a tecnologia propicia uma exploração plena das abordagens numérica e gráfica de uma forma que até então não era possível, favorecendo assim uma abordagem integrada das diferentes representações e consequentemente o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda (Viseu; Rocha, 2018, p. 117).

A dificuldade em realizar articulações entre diferentes representações compromete a aprendizagem de conceitos que envolvem variação e dependência entre grandezas. Nesse sentido, Borba e Penteado (2001) enfatizam que a compreensão desses conceitos exige experiências que permitam ao estudante observar, manipular e interpretar os processos envolvidos.

Os ambientes de aprendizagem dinâmicos, ao possibilitarem a manipulação direta de parâmetros, favorecem a compreensão dos processos matemáticos subjacentes às representações gráficas. Conforme apontam Pereira, Costa e Alves (2019), ao observar o comportamento das grandezas em diferentes situações, o estudante pode construir argumentos matemáticos mais fundamentados.

A literatura converge ao indicar que a aprendizagem matemática é favorecida quando o estudante assume uma postura ativa, explorando, testando e refletindo sobre as situações propostas. Nesse contexto, Basniak, Silva e Gaulovski (2017) destacam que a tecnologia atua como mediadora do processo de aprendizagem, ampliando as possibilidades de interação com os conceitos matemáticos.

Entretanto, os estudos também apontam desafios relacionados ao uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática, como a necessidade de formação docente contínua, planejamento pedagógico cuidadoso e adequação das propostas ao contexto escolar. Como ressaltam Borba e Penteado (2001), esses fatores são determinantes para que o uso desses recursos contribua efetivamente para a aprendizagem.

Portanto, a revisão da literatura demonstra que os ambientes de aprendizagem dinâmicos constituem uma alternativa pedagógica consistente para o ensino

de Matemática, especialmente no que se refere à compreensão de relações entre grandezas e à interpretação de representações gráficas. Ao favorecer a visualização, a experimentação e a reflexão, esses ambientes contribuem para a construção de aprendizagens mais significativas e coerentes com as demandas contemporâneas da Educação Matemática.

A revisão da literatura indica que ambientes de aprendizagem dinâmicos favorecem a visualização de processos matemáticos complexos. Borba e Penteado (2001) destacam esse potencial. Dando sequência, a seção subsequente foca no uso desses ambientes e de linguagens de programação como ferramenta pedagógica. Discute-se, por exemplo, como a programação permite criar simuladores autorais e personalizados, como indicam Pereira, Costa e Alves (2019), expandindo as possibilidades de intervenção docente. Esse debate fundamenta a decisão de desenvolver um simulador próprio no presente estudo, alinhando a concepção do produto às demandas específicas do ensino de grandezas.

4 USO DE AMBIENTE DE APRENDIZAGENS DINÂMICOS E LINGUAGENS PARA PROGRAMAÇÃO

O uso de ambientes de aprendizagem dinâmicos no ensino de Matemática tem se consolidado como uma prática recorrente em diferentes contextos educacionais, especialmente pela possibilidade de favorecer a visualização, a exploração e a interpretação de conceitos matemáticos. Borba e Penteado (2001) destacam que ferramentas digitais amplamente utilizadas no meio educacional permitem que estudantes manipulem objetos matemáticos, observem padrões e acompanhem processos de variação de forma interativa, o que contribui para uma aprendizagem mais significativa.

Entre os recursos mais utilizados nesse contexto, destacam-se softwares prontos que oferecem ambientes dinâmicos previamente estruturados, como aqueles voltados à construção de gráficos, manipulação geométrica e análise de funções. Como apontam Basniak, Silva e Gaulovski (2017), essas ferramentas têm papel relevante no ensino de Matemática, pois possibilitam ao professor incorporar recursos tecnológicos às aulas sem a necessidade de conhecimentos avançados em programação, ampliando as possibilidades de abordagem dos conteúdos.

No entanto, embora esses ambientes prontos apresentem inúmeras potencialidades pedagógicas, a literatura aponta que eles também impõem limites ao professor no que se refere à autoria e à personalização das situações didáticas. Pereira, Costa e Alves (2019) mostram que, em geral, o docente utiliza modelos previamente definidos, com pouca possibilidade de intervenção no funcionamento interno do recurso, o que pode restringir a criação de situações muito específicas ou alinhadas a determinados objetivos de aprendizagem.

A utilização de linguagens de programação na construção de ambientes de aprendizagem dinâmicos apresenta-se como uma alternativa metodológica que amplia as possibilidades de autoria docente. Ao desenvolver um ambiente a partir de uma linguagem de programação, o professor-pesquisador passa a ter controle direto sobre o modelo matemático implementado, sobre as variáveis envolvidas e sobre o comportamento do sistema, possibilitando a criação de simuladores ajustados a contextos específicos de ensino.

A programação, nesse contexto, não deve ser compreendida como um fim em si mesma, nem como uma exigência a ser imposta aos professores em geral. Trata-se, antes, de um meio para a construção de produtos educacionais que possam ser utilizados pedagogicamente sem que o usuário final precise dominar conhecimentos técnicos de computação. O processo de programação ocorre na etapa de desenvolvimento do produto, enquanto o uso pedagógico do simulador pode ser realizado de forma intuitiva pelos professores e estudantes.

Algumas linguagens de programação como o *Python* se apresentam como fa-

cilitadores deste processo por sua sintaxe acessível e vasta documentação. Como discutem Borba e Penteado (2001), essa linguagem possibilita a implementação explícita de modelos matemáticos, o controle da dinâmica das grandezas envolvidas e a criação de simulações que representam processos contínuos de forma visual e interativa, aspectos relevantes para o ensino de Matemática.

Além disso, o uso de uma linguagem de programação permite representar situações matemáticas que, em *softwares* prontos, nem sempre estão disponíveis ou são facilmente configuráveis. Ao programar o próprio *software*, torna-se possível definir regras específicas de funcionamento, explorar diferentes condições iniciais e adaptar o ambiente às necessidades didáticas do professor e ao perfil dos estudantes, ampliando as possibilidades de abordagem dos conteúdos.

É importante reconhecer que o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem dinâmicos por meio de programação exige conhecimentos específicos, nem sempre presentes na formação inicial dos professores. Essa constatação não invalida a proposta, mas reforça o caráter autoral e investigativo do produto educacional desenvolvido no âmbito desta pesquisa. O professor-pesquisador, ao assumir esse papel, contribui para a ampliação do repertório de recursos disponíveis à comunidade escolar.

Nesse sentido, a inovação desta proposta reside na construção de um simulador educacional a partir de um modelo matemático explicitamente programado. Pereira, Costa e Alves (2019) destacam que essa abordagem possibilita discutir o comportamento das grandezas envolvidas e os processos que dão origem às representações apresentadas, favorecendo uma compreensão mais profunda dos conceitos trabalhados.

Ao articular ambientes de aprendizagem dinâmicos e linguagens de programação, este trabalho propõe uma alternativa que amplia as possibilidades de exploração de conceitos matemáticos relacionados à variação de grandezas. A construção do simulador educacional permite integrar modelagem matemática, visualização e interação, criando um ambiente que favorece a interpretação dos fenômenos representados e a construção de significados por parte dos estudantes.

Na sequência, o texto avança para a metodologia da pesquisa. Esse capítulo detalha a natureza aplicada do estudo, justificando a opção pelo método *Design Science Research* (DSR). Conforme Dresch, Lacerda e Antunes (2015), essa abordagem se configura como estruturante para o desenvolvimento de artefatos voltados à solução de problemas práticos. Também são detalhados elementos do processo metodológico, garantindo consistência entre as etapas de desenvolvimento do artefato e a investigação sistemática proposta.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

A presente investigação caracteriza-se como pesquisa de natureza aplicada, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade do Estado do Pará, tendo como finalidade a concepção, o desenvolvimento, o aprimoramento e a validação de um simulador educacional destinado ao ensino da relação de dependência entre grandezas e à interpretação de gráficos no Ensino Médio. O estudo parte da identificação de uma problemática recorrente na prática pedagógica e propõe uma solução fundamentada teoricamente, articulando modelagem matemática, desenvolvimento computacional e análise didática.

O caráter aplicado da pesquisa decorre da intenção explícita de intervir em uma dificuldade observada no contexto do ensino de Matemática, especialmente em situações associadas à Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM. Essa habilidade envolve a leitura, análise e interpretação de gráficos que expressam relações entre grandezas variáveis, exigindo do estudante a compreensão de processos dinâmicos e a articulação entre diferentes registros de representação. A análise de questões aplicadas entre 2015 e 2024, bem como a consulta a dados oficiais de desempenho, trazem percentuais de acerto reduzidos em itens dessa natureza, indicando obstáculos persistentes na compreensão da covariação entre grandezas.

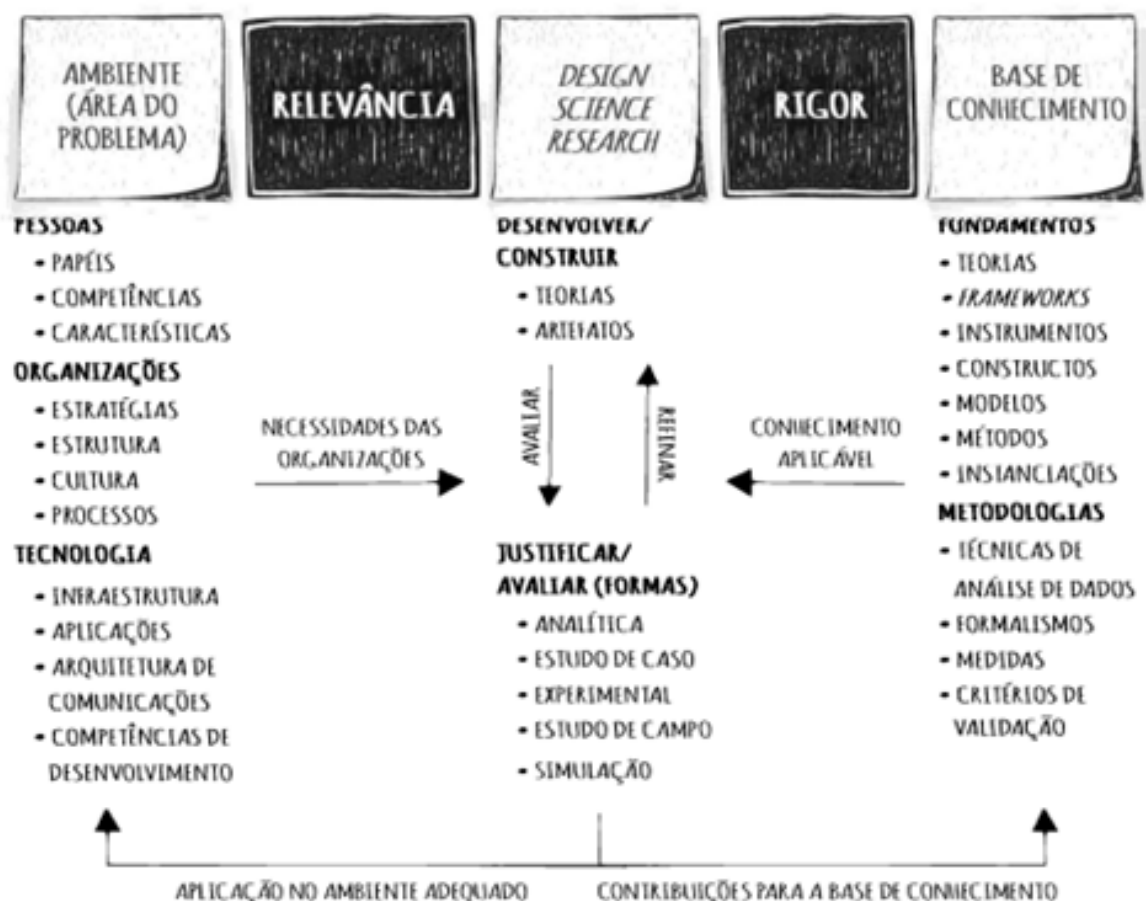
Diante dessa problemática, optou-se pela adoção da *Design Science Research* (DSR) como abordagem metodológica, por sua adequação a investigações cujo objetivo central consiste na criação e avaliação de artefatos destinados à resolução de problemas práticos. Como destacam Dresch, Lacerda e Antunes (2015), a DSR fundamenta pesquisas orientadas à transformação de situações problemáticas por meio da construção de soluções teoricamente sustentadas, articulando relevância prática e rigor científico. Conforme afirmam os autores:

A Design Science Research, por sua vez, é o método que fundamenta e operacionaliza a condução da pesquisa quando o objetivo é ser alcançado um artefato ou uma prescrição. Como método de pesquisa orientado à solução de problemas, a design science research busca, a partir do entendimento do problema, construir e avaliar artefatos que permitem transformar situações, alterando suas condições para estados melhores ou desejáveis. Ela é utilizada nas pesquisas como forma de diminuir o distanciamento entre teoria e prática (Dresch; Lacerda; Antunes, 2015, p. 67).

A articulação entre relevância e rigor, característica da DSR, encontra-se sintetizada na Figura 4, que mostra a interação entre o ambiente do problema, o processo de design e a base de conhecimento científico. Essa interação fundamenta o desenvolvimento do simulador, assegurando que as decisões técnicas adotadas estejam ancoradas em referenciais teóricos consistentes e em critérios sistemáticos de validação. Além disso, essa articulação deixa claro que a construção do artefato resulta de um processo contínuo de diálogo entre teoria e prática. Nesse sentido, as soluções

desenvolvidas são constantemente confrontadas com o problema inicial, permitindo ajustes e refinamentos que contribuem para sua adequação ao contexto educacional em que serão aplicadas.

Figura 4 – Interação entre ambiente do problema, processo de design e base de conhecimento na Design Science Research



Fonte: Adaptado de Dresch, Lacerda e Antunes (2015).

A análise apresentada mostra que a aplicação da *Design Science Research* no contexto desta investigação envolve a compreensão de uma lógica de construção do conhecimento orientada à resolução de problemas. Nesse sentido, a articulação entre os elementos apresentados na figura anterior permite compreender como o desenvolvimento do simulador se insere em um processo mais amplo, no qual o problema educacional, o conhecimento teórico e o processo de design se inter-relacionam de forma dinâmica. Essa relação reforça a importância de considerar todo o percurso investigativo que conduz à sua construção.

Nesse contexto, torna-se necessário aprofundar a compreensão dos princípios que orientam a condução de pesquisas baseadas na *Design Science Research*, os quais estruturam de maneira mais detalhada as etapas e decisões envolvidas no desenvolvimento do artefato. Esses princípios, apresentados por Dresch, Lacerda e

Antunes (2015) e sintetizados na Figura 5, explicitam dimensões fundamentais como relevância do problema, rigor metodológico, avaliação do design e comunicação dos resultados, oferecendo uma base teórica consistente para a organização e validação do percurso metodológico adotado nesta pesquisa.

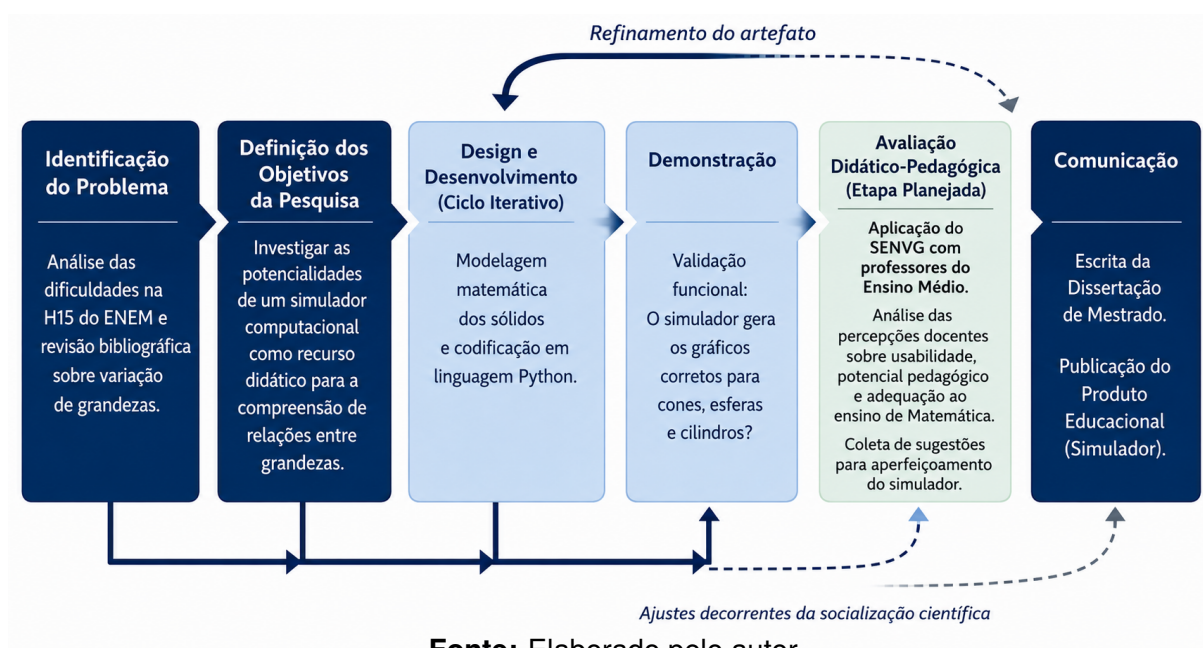
Figura 5 – Princípios orientadores da Design Science Research



Fonte: Adaptado de Dresch, Lacerda e Antunes (2015).

Com base nesses referenciais, elaborou-se um fluxo metodológico próprio, adaptado às especificidades do Ensino de Matemática e às exigências do Mestrado Profissional, conforme representado na Figura 6. Esse fluxo organiza a pesquisa em etapas interdependentes, que se articulam de forma iterativa, permitindo o refinamento progressivo do simulador.

Figura 6 – Fluxo metodológico da pesquisa baseado na Design Science Research



A etapa inicial consistiu na identificação e delimitação do problema. A análise de questões do ENEM revelou que, em situações envolvendo enchimento de recipientes, muitos estudantes demonstram dificuldade em compreender que a variação da altura do líquido depende da área da seção transversal do recipiente, o que implica comportamentos gráficos distintos para diferentes geometrias. Essa dificuldade sugere uma compreensão fragmentada da relação entre grandezas, frequentemente restrita à interpretação estática do gráfico, sem a devida articulação com o fenômeno representado.

A partir desse diagnóstico, foram definidos os objetivos do simulador, contemplando tanto aspectos matemáticos quanto pedagógicos. Buscou-se desenvolver um ambiente que representasse dinamicamente o enchimento de recipientes com diferentes formas geométricas, explicitando a relação entre volume acumulado e variação da altura ao longo do tempo. Além disso, incorporaram-se ao ambiente situações reais extraídas de questões do ENEM, atendendo à recomendação apresentada na banca de qualificação, com o intuito de aproximar o simulador das demandas concretas enfrentadas pelos professores em sala de aula.

A fase de design e desenvolvimento constituiu o núcleo da investigação. Nessa etapa, foram definidos os modelos matemáticos correspondentes aos sólidos geométri-

cos considerados, formalizadas as relações em linguagem algorítmica e implementadas representações gráficas e tridimensionais que permitissem a interação do usuário com o ambiente. O desenvolvimento ocorreu de forma iterativa, com ciclos sucessivos de implementação, testes e ajustes, assegurando coerência entre a modelagem matemática adotada, a lógica computacional implementada e as representações visuais produzidas. Sobre essa etapa, destacam Dresch, Lacerda e Antunes (2015):

A etapa de design e desenvolvimento envolve a criação do simulador. Esta fase incluiu a determinação da funcionalidade e da arquitetura do artefato, bem como a sua construção real. O pesquisador utilizou o conhecimento teórico fundamentado para propor a solução (Dresch; Lacerda; Antunes, 2015, p. 129).

A primeira avaliação formal do simulador ocorreu durante a banca de qualificação. Nesse momento, o simulador foi submetido à análise crítica de docentes das áreas de Educação Matemática e de Computação. As contribuições apresentadas resultaram em ajustes estruturais significativos, entre os quais se destacam a inclusão de situações reais do ENEM no ambiente, a reorganização das representações gráficas e o refinamento da interface com vistas à eliminação de lacunas que poderiam comprometer sua eficácia didática. A incorporação dessas sugestões configurou um processo de refinamento que integra formalmente a etapa de avaliação prevista na *DSR*, demonstrando o caráter iterativo da metodologia adotada.

Após a implementação dos ajustes decorrentes da qualificação, iniciou-se a etapa de validação externa do artefato. Essa fase foi realizada com a participação de quatro professores que atuam na preparação de estudantes do Ensino Médio para o ENEM. A escolha desse público justifica-se pela experiência dos docentes no ensino de objetos direcionados ao ENEM e pela familiaridade com as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na interpretação de gráficos associados à variação de grandezas.

A validação foi conduzida em três momentos articulados. Inicialmente, foi aplicado um questionário diagnóstico com o objetivo de identificar as metodologias atualmente utilizadas no ensino da Habilidade 15, bem como as principais dificuldades enfrentadas na mediação desse conteúdo. Esse levantamento permitiu compreender o contexto no qual o simulador pode ser inserido e serviu como referência para a análise das contribuições percebidas pelos participantes.

O percurso metodológico descrito articulou diagnóstico do problema, desenvolvimento iterativo do artefato, avaliação interna, validação externa e comunicação científica dos resultados. Essa organização assegura coerência com os fundamentos da *Design Science Research* e consolida o simulador como resultado de um processo investigativo sistemático, fundamentado e orientado à melhoria das práticas de ensino da Matemática.

O processo de validação do simulador foi organizado a partir de um roteiro estruturado de consulta destinado aos especialistas participantes da pesquisa, apresentado no Apêndice A desta dissertação. Esse instrumento foi elaborado com o objetivo de orientar a análise pedagógica do ambiente desenvolvido e foi dividido em etapas complementares, contemplando desde a caracterização profissional dos participantes até a avaliação das potencialidades pedagógicas do simulador. Inicialmente, o roteiro buscou identificar aspectos relacionados à formação acadêmica, ao tempo de atuação docente e às experiências dos participantes com o ensino voltado ao ENEM. Em seguida, foram propostas questões relacionadas às metodologias utilizadas no ensino da Habilidade 15, às principais dificuldades observadas na interpretação de gráficos e às estratégias geralmente empregadas no trabalho com relações entre grandezas.

Além da etapa diagnóstica, o roteiro também orientou os participantes a explorar o simulador por meio do Caderno de Exploração do Ambiente SENVG, apresentado no Apêndice B. Nesse momento, os especialistas puderam executar as atividades propostas, interagir com os sólidos geométricos, observar o comportamento dos gráficos gerados e analisar as relações entre volume, vazão e crescimento da altura do líquido nos recipientes simulados. Após essa etapa de exploração, os participantes responderam às questões avaliativas estruturadas em escala *Likert*, além de perguntas abertas destinadas ao registro de percepções, sugestões e considerações sobre as potencialidades e limitações do ambiente desenvolvido. Essa organização permitiu articular dados quantitativos e qualitativos, favorecendo uma análise mais abrangente do processo de validação pedagógica do simulador.

A escala *Likert* consiste em um instrumento psicométrico utilizado em pesquisas educacionais e sociais para medir opiniões, atitudes, percepções e níveis de concordância dos participantes diante de determinadas afirmações. Sua relevância está associada à possibilidade de organizar e interpretar dados subjetivos por meio de categorias graduais de resposta, permitindo transformar percepções qualitativas em informações sistematizadas e analisáveis. Conforme destacam (Costa Júnior; Santos; Silva, 2024), a utilização da escala *Likert* torna-se importante em pesquisas cujo objetivo envolve compreender percepções, expectativas, valores e interpretações dos participantes sobre determinado fenômeno, favorecendo a catalogação e análise de dados qualitativos.

Originalmente proposta por Rensis Likert em 1932, essa escala foi concebida para medir atitudes de forma cientificamente validada, estruturando-se a partir de afirmações diante das quais os participantes expressam seus níveis de concordância ou discordância em graus variados. Segundo Singh (2006), a escala *Likert* também pode ser caracterizado como um conjunto de declarações relacionadas a uma situação real ou hipotética, no qual os participantes manifestam sua percepção por meio de uma escala métrica ordenada. De acordo com (Costa Júnior; Santos; Silva, 2024),

a escala caracteriza-se como uma escala ordinal organizada em níveis graduais de concordância e discordância, sendo frequentemente utilizada para medir atitudes e opiniões em pesquisas acadêmicas. Em sua configuração mais comum, a escala apresenta cinco níveis de resposta, geralmente distribuídos entre discordância total e concordância total, podendo incluir também uma categoria intermediária neutra. Os autores destacam ainda que a adoção de um número ímpar de categorias favorece a inclusão de posicionamentos neutros ou indecisos, contribuindo para maior flexibilidade interpretativa dos dados obtidos.

Na presente pesquisa, a escala *Likert* foi utilizada como estratégia para obtenção de dados quantitativos relacionados à percepção dos especialistas acerca da clareza conceitual, organização didática, coerência matemática, potencial pedagógico e possibilidades de utilização do simulador em contexto escolar. Os participantes puderam manifestar seus níveis de concordância em relação às afirmações apresentadas no roteiro de validação, contribuindo para a análise quantitativa das percepções acerca do ambiente de aprendizagem desenvolvido. Além das questões estruturadas em escala, o instrumento também contemplou perguntas abertas, possibilitando complementar as informações quantitativas com observações descritivas sobre as potencialidades e limitações do simulador.

Além das questões estruturadas em escala *Likert*, o roteiro também contemplou perguntas abertas, permitindo que os especialistas descrevessem suas percepções sobre as potencialidades, limitações e possibilidades de aprimoramento do simulador. Essa articulação entre dados quantitativos e qualitativos possibilitou uma análise mais abrangente do processo de validação, permitindo interpretar não apenas os níveis de concordância apresentados, mas também os significados atribuídos pelos participantes à utilização do recurso digital.

A aplicação do instrumento ocorreu após a exploração do simulador e do caderno de atividades pelos especialistas participantes. Durante esse processo, os docentes puderam interagir com o ambiente digital, analisar as situações propostas e registrar suas avaliações no roteiro de consulta apresentado no Apêndice A desta dissertação.

No que se refere aos aspectos éticos, a etapa de desenvolvimento do simulador não envolveu participação de seres humanos. Para a fase de validação com professores, foram observadas as diretrizes estabelecidas pela Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde, assegurando consentimento livre e esclarecido e preservação da identidade dos participantes.

6 TECNOLOGIAS DIGITAIS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O avanço das tecnologias digitais tem promovido transformações nos processos de ensino e aprendizagem, incluindo o campo da Educação Matemática. No entanto, tais transformações não podem ser compreendidas unicamente a partir da introdução de ferramentas tecnológicas em contextos educativos, sendo necessário considerar os fundamentos teóricos que orientam seu uso. Nesse sentido, o presente capítulo adota como base teórica os estudos de Nicolas Balacheff, cujas contribuições se concentram na articulação entre tecnologia, aprendizagem e conhecimento, especialmente no contexto dos ambientes informatizados de aprendizagem.

Balacheff é um pesquisador da Didática da Matemática no cenário internacional, com forte atuação nas áreas de epistemologia, modelização do conhecimento, inteligência artificial aplicada à educação e tecnologias digitais no ensino. Seus estudos propõem uma compreensão da aprendizagem mediada por tecnologias a partir da centralidade do conhecimento, da interação entre sujeito e meio e dos processos de modelização envolvidos na construção do saber. A partir dessa perspectiva, este referencial teórico organiza-se em torno de conceitos fundamentais desenvolvidos pelo autor, tais como a transposição informática, os ambientes informatizados de aprendizagem, a modelização do aprendiz e a didática computacional, buscando estabelecer relações diretas com o desenvolvimento e a análise do produto educacional desta pesquisa.

6.1 A centralidade do conhecimento na aprendizagem mediada por tecnologias

A incorporação de tecnologias digitais no campo educacional tem sido acompanhada por discursos que enfatizam suas potencialidades técnicas, muitas vezes associando inovação tecnológica à melhoria automática dos processos de ensino e aprendizagem. No entanto, ao analisar esse movimento, Balacheff (2004) chama atenção para a necessidade de deslocar o foco da tecnologia para o conhecimento, entendido como elemento estruturante das práticas educativas. Para o autor, a compreensão do papel das tecnologias na educação exige uma análise mais aprofundada sobre o que se aprende, e não apenas sobre os meios utilizados.

O encontro entre educação e tecnologias da informação e comunicação foi inicialmente conduzido pela tecnologia e por suas promessas. [...] Uma das lições aprendidas desse primeiro período é que o impulso tecnológico não é suficiente e não constitui, de forma alguma, uma garantia de sucesso. A introdução de tecnologias mais avançadas na educação não é suficiente se não houver atenção ao objetivo central da educação: a aprendizagem (tradução nossa). (Balacheff, 2004, p. 4)

Essa crítica aponta para um movimento histórico em que a tecnologia ocupou

uma posição central nos projetos educacionais, enquanto o conhecimento permaneceu, muitas vezes, implícito ou secundarizado. Ao retomar esse percurso, Balacheff (2004) propõe uma inversão dessa lógica, afirmando que o desenvolvimento de ambientes digitais de aprendizagem deve ser orientado pela natureza do conhecimento envolvido. Essa mudança de perspectiva implica reconhecer que diferentes conteúdos demandam formas distintas de abordagem, tanto do ponto de vista pedagógico quanto tecnológico.

Não é a aprendizagem em si que deve ser colocada no centro da problemática, mas a aprendizagem de algo. [...] Não é a aprendizagem que é central, mas o conhecimento. A compreensão do conhecimento constitui uma condição estratégica para o desenvolvimento dos ambientes de aprendizagem mediados por tecnologia (tradução nossa) (Balacheff, 2004, p. 5).

Ao aprofundar essa discussão, Balacheff (2004) introduz uma distinção conceitual que se mostra particularmente relevante para a compreensão do fenômeno educativo: a diferença entre *knowledge* e *knowing*. Essa diferenciação busca superar uma visão estática do conhecimento, permitindo considerá-lo como um processo dinâmico, situado e dependente das condições de sua produção.

“Knowledge” refere-se tanto às construções intelectuais institucionalizadas pela sociedade quanto às construções produzidas pelos indivíduos ao resolver problemas ou realizar tarefas. [...] Para recuperar essa distinção, proponho o uso do termo “knowing” como substantivo, como contraponto cognitivo de “knowledge”. [...] Uma “conception” pode ser entendida como uma instância contextual de um knowing, podendo ser adequada ou não, dependendo das condições em que se manifesta (tradução nossa) (Balacheff, 2004, p. 6).

Essa formulação permite compreender que o conhecimento, em sua dimensão institucional, não se confunde com os processos pelos quais os sujeitos constroem sentido em situações concretas. Nesse contexto, o conceito de “concepção” assume papel importante, pois possibilita analisar as diferentes formas pelas quais um mesmo conteúdo pode ser compreendido em função das situações de aprendizagem.

A partir dessa perspectiva, o foco da análise desloca-se para os processos pelos quais o conhecimento é mobilizado, transformado e interpretado pelos aprendentes. Em vez de considerar apenas a presença de conteúdos em ambientes digitais, passa-se a investigar como esses conteúdos são apropriados, quais significados são produzidos e de que maneira se manifestam nas ações dos alunos (Balacheff, 2004).

Essa abordagem ganha relevância no ensino de matemática, uma vez que os conhecimentos matemáticos envolvem a construção de significados, a interpretação de representações e a validação de resultados, deixando de ser unicamente procedimentos formais. Em ambientes digitais, essas dimensões assumem características específicas, uma vez que as interações são mediadas por sistemas computacionais que operam a partir de determinadas formas de representação (Balacheff, 2006).

Nesse sentido, a análise do erro mostra-se fundamental, pois permite acessar indícios das concepções dos aprendentes. Para Balacheff (2004), os erros não constituem somente desvios em relação a um modelo correto, eles expressam formas particulares de organização do pensamento, que precisam ser compreendidas no contexto das situações em que surgem.

6.2 Interação, modelização e construção do conhecimento

A análise dos processos de aprendizagem em ambientes digitais exige considerar que as interações realizadas pelos sujeitos nesses contextos não se reduzem a operações técnicas ou respostas a estímulos previamente definidos. Em seus estudos, Balacheff (2004) compreende essas interações como momentos em que o conhecimento se atualiza em ação, assumindo formas específicas conforme as condições da atividade. Assim, a aprendizagem passa a ser investigada a partir das relações entre as tarefas propostas, os sistemas de representação disponíveis e as estratégias mobilizadas pelos aprendentes.

Ao tratar da relação entre didática e informática, Balacheff (1994) destaca que a modelização dos processos didáticos constitui um campo de investigação compartilhado com a inteligência artificial. Essa aproximação é fruto da necessidade de representar formalmente aspectos do conhecimento e da atividade cognitiva, de modo que possam ser operacionalizados em sistemas computacionais. Nesse sentido, a modelização define o que pode ser considerado, interpretado e processado pelo sistema.

A modelização dos processos didáticos constitui um domínio de questionamento comum aos didatas e aos pesquisadores em inteligência artificial. [...] Trata-se de construir representações que permitam a implementação de dispositivos capazes de tratar informações relativas ao conhecimento e à atividade dos aprendentes (tradução nossa) (Balacheff, 1994, p. 2).

Essa questão reaparece quando se considera que todo ambiente informatizado de aprendizagem opera a partir de escolhas implícitas sobre o conhecimento que se pretende tratar. Como observa Balacheff (2006), essas escolhas se materializam nas formas de representação adotadas, nos tipos de tarefa propostos e nas possibilidades de ação oferecidas ao usuário. Em outras palavras, o sistema organiza um espaço de atividade que orienta, ainda que de forma indireta, os modos de pensar e agir dos aprendentes.

A discussão torna-se mais específica quando o foco recai sobre a modelização do aprendiz. Nesse ponto, Balacheff (1994) propõe distinguir dois níveis de análise que não se confundem, embora estejam articulados. O primeiro diz respeito ao comportamento observável, enquanto o segundo se refere à interpretação desses

comportamentos em termos de concepções. Essa distinção é apresentada de forma mais explícita quando o autor afirma que:

A modelização do aprendente pode ser abordada em dois níveis: um nível comportamental, que visa reproduzir, por meio do cálculo, os comportamentos observáveis do sujeito, e um nível epistêmico, que busca dar conta do significado desses comportamentos, isto é, da natureza das concepções que os sustentam. A passagem de um nível a outro constitui o objeto do diagnóstico (tradução nossa) (Balacheff, 1994, p. 6).

A introdução desses dois níveis permite ajustar a análise da aprendizagem para além da simples identificação de respostas. O interesse passa a recair sobre os modos de organização do pensamento que orientam a atividade do sujeito em determinada situação. Isso exige considerar o que é feito, e em que condições a ação ocorre além de quais recursos são mobilizados (Balacheff, 2004).

No campo da Educação Matemática, essa abordagem se mostra pertinente quando se analisam tarefas que envolvem múltiplas formas de representação. A leitura e interpretação de gráficos, por exemplo, pressupõem a coordenação entre diferentes registros, a identificação de relações entre grandezas e a produção de inferências. Essas operações não são diretamente observáveis, sendo inferidas a partir das ações realizadas pelos alunos em situações específicas.

Balacheff (2006) chama atenção para o fato de que, em ambientes digitais, essas situações são estruturadas por sistemas que operam com representações próprias, o que interfere nas possibilidades de ação e interpretação. Assim, a forma como o conhecimento é modelizado no sistema condiciona, em certa medida, os tipos de atividade que podem emergir durante a interação.

Outro aspecto relevante diz respeito ao papel do diagnóstico. Ao considerar a passagem do nível comportamental para o nível epistêmico, Balacheff (1994) aponta que interpretar a atividade do sujeito implica estabelecer relações entre dados observáveis e hipóteses sobre suas concepções. Esse processo envolve incertezas e exige critérios teóricos que orientem a análise.

Essa problemática deixa claro que a interação com o sistema produz um conjunto de informações que, quando analisadas à luz de um referencial teórico consistente, permitem compreender aspectos do processo de aprendizagem que não seriam acessíveis por outros meios. Nesse sentido, a modelização desempenha uma dupla função: orienta o funcionamento do sistema e fundamenta a interpretação dos dados gerados em sua utilização (Balacheff, 2004).

No âmbito desta pesquisa, essa perspectiva possibilita examinar o uso do simulador digital considerando os registros das ações dos alunos como indícios de suas formas de compreender a relação entre grandezas. A análise dessas ações,

articulada aos níveis de modelização propostos por Balacheff, contribui para uma leitura mais consistente dos processos de aprendizagem envolvidos.

6.3 Transposição informática e ambientes digitais de aprendizagem

A compreensão das transformações que ocorrem quando um conhecimento passa a ser ensinado em um contexto escolar encontra, na teoria da transposição didática, um referencial importante no campo da Didática da Matemática. Proposta por Chevallard (1991), essa teoria descreve o processo pelo qual um saber produzido em um determinado contexto, denominado saber sábio, é reorganizado para se tornar ensinável, dando origem ao saber a ensinar e, posteriormente, ao saber ensinado. Esse percurso envolve adaptações, simplificações e reorganizações que permitem a inserção do conhecimento em instituições de ensino.

Ao tratar desse processo, Chevallard (1991) destaca que o conhecimento sofre transformações condicionadas pelas exigências institucionais, pelos objetivos pedagógicos e pelas condições concretas de ensino. Como resultado, o saber ensinado apresenta características próprias, distintas daquelas presentes no saber científico de referência.

Toda transposição de um saber implica transformações que o tornam apto a ser ensinado. O saber ensinado não é o saber sábio, mas uma reconstrução desse saber, condicionada pelas exigências e restrições do sistema didático (tradução nossa) (Chevallard, 1991, p. 39).

Essa formulação permite compreender que o ensino envolve necessariamente um processo de reconstrução do conhecimento. No entanto, com a incorporação das tecnologias digitais, novas camadas de transformação passam a intervir nesse processo. É nesse ponto que os trabalhos de Nicolas Balacheff introduzem um desdobramento dessa problemática, ao considerar as especificidades da mediação computacional.

Balacheff (1994) observa que, ao ser implementado em um sistema informático, o conhecimento passa por um tipo particular de transformação que não se reduz àquela descrita por Chevallard. Nesse caso, o conhecimento precisa ser representado de forma compatível com o funcionamento de uma máquina, o que implica decisões relacionadas à formalização, à codificação e à definição de operações possíveis. Esse processo é denominado transposição informática.

Diferentemente da transposição didática, que ocorre no âmbito das instituições de ensino e envolve a adaptação do saber para fins pedagógicos, a transposição informática introduz uma dimensão adicional: a necessidade de tornar o conhecimento tratável por um sistema computacional. Isso implica considerar o que será ensinado e como esse conhecimento será representado, manipulado e validado dentro do ambiente digital.

Essa diferença pode ser observada na natureza das restrições envolvidas em cada processo. Enquanto a transposição didática é condicionada por fatores institucionais e pedagógicos, a transposição informática incorpora restrições técnicas e formais, relacionadas à capacidade do sistema de representar e operar sobre o conhecimento. Essas restrições influenciam diretamente as formas de interação disponíveis e, conseqüentemente, as possibilidades de aprendizagem.

A implementação de um conhecimento em um sistema informático não consiste em uma simples tradução. Trata-se de uma transformação que implica escolhas relativas à representação, às operações possíveis e às condições de uso. Essas escolhas definem um domínio de validade para o conhecimento assim representado (tradução nossa) (Balacheff, 1994, p. 41).

A noção de domínio de validade introduz um elemento importante nessa discussão. Ao ser representado em um sistema, o conhecimento passa a operar dentro de limites definidos pelas escolhas realizadas durante sua implementação. Isso significa que o ambiente digital não oferece acesso ao conhecimento em sua totalidade, mas a uma versão que depende das condições estabelecidas pelo próprio sistema.

Esse aspecto torna-se ainda mais característico quando se considera que os sistemas computacionais trabalham com representações formais. No caso da matemática, isso envolve a tradução de conceitos e relações para estruturas que possam ser manipuladas por algoritmos. Esse processo exige simplificações e reorganizações que podem alterar a forma como o conhecimento é apresentado e compreendido (Balacheff, 2004).

Ao retomar essa discussão no contexto dos ambientes informatizados de aprendizagem, Balacheff (2006) destaca que esses sistemas funcionam como mediadores da atividade do sujeito. O ambiente organiza as condições de interação, definindo as tarefas possíveis, as formas de representação e os tipos de resposta disponíveis.

Os ambientes informatizados de aprendizagem organizam a interação do sujeito com o conhecimento por meio de representações e operações específicas. O conhecimento acessível ao aprendente depende daquilo que o sistema é capaz de representar e tratar (tradução nossa) (Balacheff, 2006, p. 6).

Essa mediação introduz uma nova dimensão no processo de ensino, pois o conhecimento passa a ser acessado por meio de estruturas previamente definidas. As possibilidades de ação do usuário são condicionadas pelas funcionalidades do sistema, o que influencia as estratégias que podem ser desenvolvidas durante a atividade.

No contexto desta pesquisa, a noção de transposição informática permite analisar o aplicativo desenvolvido como resultado de um processo de reorganização do conhecimento matemático. As escolhas realizadas na definição das representações, das tarefas e das formas de interação configuram um espaço de ação que orienta

a atividade dos alunos. A análise dessas condições contribui para compreender as possibilidades e os limites do sistema no que se refere à aprendizagem da relação de dependência entre grandezas.

Para possibilitar a construção dinâmica do gráfico que representa a relação entre grandezas foi necessário incorporar ao sistema um conjunto de procedimentos matemáticos e algoritmos que garantem o funcionamento interno da simulação. Esses elementos, embora fundamentais para o comportamento do sistema, não são apresentados ao usuário. A interface privilegia a visualização da relação entre as variáveis e a interpretação do gráfico gerado, sem explicitar os cálculos que sustentam essa construção.

Essa escolha está diretamente relacionada aos objetivos de aprendizagem definidos para a atividade, em consonância com a Habilidade 15 da matriz de referência de Matemática do ENEM. Nesse contexto, a transposição informática precisa definir o que será visível ou não ao aprendente. Ao ocultar determinados procedimentos e destacar outros aspectos, o sistema organiza um campo de atenção que orienta a atividade do aluno para a compreensão da relação entre grandezas. Esse recorte mostra que a implementação computacional do conhecimento corresponde a uma configuração específica, construída em função de objetivos didáticos.

6.4 Didática computacional e validação dos processos de aprendizagem

A incorporação de sistemas computacionais ao ensino de matemática coloca em questão a necessidade de compreender como esses dispositivos se inserem no processo didático. Nos trabalhos de Nicolas Balacheff, essa questão é tratada na perspectiva da chamada didática computacional, entendida como um campo que investiga as condições de concepção, implementação e funcionamento de sistemas destinados à aprendizagem. Nesse contexto, o interesse volta-se para a análise dos processos que estruturam a atividade didática quando mediados por dispositivos informatizados (Balacheff, 1994).

Ao propor essa abordagem, Balacheff (1994) destaca que o desenvolvimento de sistemas educacionais não pode ser conduzido somente por critérios técnicos. A construção de um ambiente digital envolve escolhas que dizem respeito ao conhecimento, às formas de interação e aos modos de interpretação das ações dos aprendentes. Essas escolhas precisam ser explicitadas e analisadas, pois influenciam diretamente as possibilidades de aprendizagem que o sistema pode oferecer.

O objeto da didática computacional é o estudo dos problemas relacionados à construção, à implementação e ao controle de processos didáticos representados por modelos simbólicos calculáveis. [...] Privada de um questionamento epistemológico e de validação experimental, ela não seria senão uma forma erudita de engenharia pedagógica baseada no senso comum (tradução nossa)(Balacheff, 1994, p. 5).

Essa observação introduz um ponto importante para a discussão: a necessidade de validação. Um sistema pode apresentar funcionamento estável do ponto de vista técnico e, ainda assim, não contribuir de forma consistente para a aprendizagem. A avaliação de sua eficácia exige considerar como o conhecimento é tratado, quais interações são promovidas e de que maneira as ações dos usuários são interpretadas.

A validação, nesse contexto envolve a análise das condições em que a aprendizagem ocorre, das tarefas propostas e das formas de resposta construídas pelos alunos. Como aponta Balacheff (2006), a compreensão desses processos requer a articulação entre diferentes dimensões, incluindo aspectos cognitivos, tecnológicos e epistemológicos.

Essa abordagem implica reconhecer que o sistema integra um conjunto mais amplo de elementos que compõem o sistema didático, no qual o professor mantém um papel fundamental na organização das atividades, na interpretação das respostas dos alunos e na condução do processo de ensino. A presença da tecnologia introduz novas possibilidades de ação, mas não elimina a necessidade de mediação pedagógica.

A relação entre sistema e professor pode assumir diferentes configurações, dependendo das funções atribuídas ao ambiente digital. Em alguns casos, o sistema fornece informações que auxiliam na análise da aprendizagem, permitindo ao professor identificar padrões de resposta e possíveis dificuldades. Em outros, organiza situações de interação que favorecem a exploração de determinados conceitos.

As possíveis cooperações entre ambientes informatizados de aprendizagem e professores colocam questões relativas ao controle, à circulação de informações e à gestão da memória da atividade didática. Essas dimensões devem ser consideradas na concepção dos sistemas (tradução nossa) (Balacheff, 1994, p. 7).

A forma como o sistema é integrado às práticas pedagógicas influencia diretamente os resultados obtidos, exigindo uma reflexão que articule teoria e prática. No desenvolvimento do aplicativo proposto nesta pesquisa, essas questões foram consideradas desde as etapas iniciais de concepção. As escolhas relacionadas às representações, às tarefas e às formas de interação foram orientadas por objetivos de aprendizagem específicos, buscando favorecer a compreensão da relação entre grandezas. Ao mesmo tempo, reconhece-se que o uso do sistema não esgota o processo de ensino, sendo necessário considerar sua articulação com outras práticas desenvolvidas pelo professor.

Esse aspecto pode ser aprofundado ao considerar que o sistema produz registros das ações dos alunos que podem ser utilizados na análise da aprendizagem. Esses registros permitem observar padrões de resposta, identificar dificuldades recorrentes e levantar hipóteses sobre as concepções mobilizadas pelos aprendentes. A interpretação desses dados exige um referencial teórico consistente, capaz de orientar a

leitura das evidências produzidas durante a interação com o ambiente digital (Balacheff, 2004).

Sobre este processo avaliativo, o autor relata:

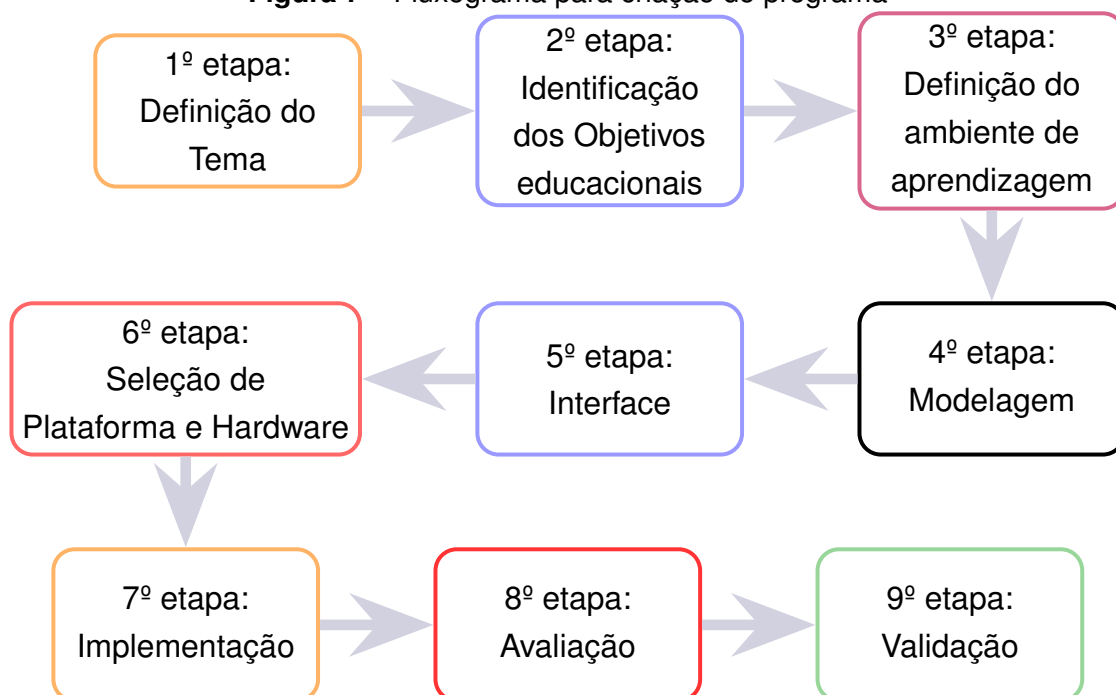
A avaliação dos ambientes de aprendizagem mediados por tecnologia deve articular diferentes níveis de análise, incluindo aspectos tecnológicos, cognitivos e epistemológicos, considerando as condições reais de uso e a natureza das interações que se desenvolvem (tradução nossa) (Balacheff, 2006, p. 9).

A partir dessa perspectiva, a didática computacional oferece um quadro teórico que orienta o desenvolvimento do sistema e a interpretação dos dados produzidos em sua utilização. Esse enquadramento contribui para uma análise mais consistente do papel das tecnologias digitais no ensino de matemática, evitando abordagens centradas exclusivamente na ferramenta e permitindo compreender as condições em que a aprendizagem pode ocorrer.

7 UM SIMULADOR PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE VARIAÇÃO DE GRANDEZAS (SENVG)

Esta seção apresenta o processo de desenvolvimento do simulador educacional SENVG. A organização da seção segue um fluxo de desenvolvimento de software educacional, conforme proposto por Santos (1999), possibilitando explicitar as decisões didáticas, matemáticas e computacionais adotadas ao longo do processo. O diagrama desenhado por Braum e Nassif (2022) resume estes passos adotados.

Figura 7 – Fluxograma para criação do programa



Fonte: Braum e Nassif (2022, p. 8).

O desenvolvimento do SENVG teve início com a definição do tema, centrado no estudo da variação de grandezas associada ao enchimento de recipientes geométricos. Essa escolha decorre da recorrência desse tipo de situação em problemas que envolvem interpretação de gráficos cartesianos e análise de relações entre grandezas, especialmente no ensino médio. O tema permite articular conteúdos de geometria espacial, funções e análise gráfica em um mesmo contexto didático, especialmente em relação à Habilidade 15 da matriz de referência do ENEM, como já apresentada anteriormente neste trabalho.

Na etapa seguinte, foram definidos os objetivos educacionais do simulador. Estabeleceu-se que o SENVG deveria possibilitar ao estudante acompanhar, de forma dinâmica, a variação da altura de um líquido em função do tempo, relacionando essa variação com a geometria do recipiente. Pretendeu-se, ainda, favorecer a comparação

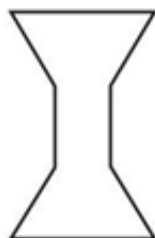
entre comportamentos lineares e não lineares, bem como estimular a interpretação de gráficos construídos a partir de processos dinâmicos.

Esse objetivo está diretamente relacionado ao que é proposto em itens do Exame Nacional do Ensino Médio. Como exemplo, apresenta-se a seguir uma questão extraída da prova regular aplicada no ano de 2014, a qual ilustra o tipo de situação-problema que fundamenta o desenvolvimento do simulador.

Figura 8 – Questão do ENEM 2014 envolvendo variação de grandezas

QUESTÃO 143

Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.



No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

Fonte: INEP (2014).

A definição do ambiente de aprendizagem considerou a utilização do simulador em computadores pessoais, tanto em contextos escolares quanto em atividades extra-classe. Optou-se por um ambiente que não dependesse de conexão com a internet e que pudesse ser executado localmente, garantindo maior acessibilidade. Nesse sentido, a escolha por ferramentas de código aberto e multiplataforma mostrou-se adequada às condições reais das escolas.

Concluídas essas definições iniciais, passou-se à etapa de modelagem das situações simuladas. Em todas as simulações, adotou-se a hipótese de vazão constante, o que implica que o volume do líquido varia linearmente em função do tempo. A partir dessa relação fundamental, buscou-se determinar o comportamento da altura do líquido, que depende diretamente da geometria do recipiente considerado.

Para os casos do paralelepípedo e do cilindro, a área da seção transversal permanece constante ao longo do enchimento. Como consequência, a relação entre a altura do líquido e o tempo é linear. Essa característica permitiu uma modelagem matemática direta, em que a altura é obtida dividindo-se o volume acumulado pela área da base do recipiente.

Nos casos do cone normal e do cone invertido, a modelagem exigiu maior cuidado, uma vez que a área da seção transversal varia em função da altura. A tentativa inicial de simular o enchimento por meio do crescimento de um cone interno mostrou-se inadequada, pois não representa corretamente o processo físico. Para contornar essa dificuldade, optou-se por modelar o enchimento por meio de troncos de cone sucessivos, recalculando-se o raio da seção transversal a cada incremento de volume.

A simulação da esfera apresentou complexidade adicional, pois não existe uma expressão simples que relacione diretamente o volume preenchido à altura do líquido. Nesse caso, adotou-se uma estratégia baseada na decomposição do volume em seções transversais horizontais, permitindo aproximar o processo contínuo de enchimento por meio de incrementos sucessivos de volume.

Definida a modelagem matemática, iniciou-se a etapa de implementação computacional do simulador, que exigiu a escolha de uma linguagem de programação capaz de integrar cálculos matemáticos, visualizações gráficas e interação com o usuário em um único ambiente. Nesse contexto, optou-se pela linguagem *Python*, em razão de sua sintaxe simples, legibilidade e ampla utilização em contextos educacionais e científicos. Além disso, essa linguagem oferece um conjunto consolidado de bibliotecas voltadas à computação científica e ao desenvolvimento de interfaces gráficas, o que favorece a construção de aplicações educacionais de forma modular e extensível.

Inicialmente, foi considerada a utilização da biblioteca *VPython*, devido à qualidade visual de sua renderização tridimensional. No entanto, ao longo da implementação, observaram-se limitações relacionadas à integração com os cálculos geométricos necessários à simulação, bem como dificuldades de controle do modelo matemático e da execução do programa. Diante disso, optou-se pela substituição da *VPython* pela *matplotlib*, que ofereceu maior controle matemático e melhor integração com a interface gráfica desenvolvida.

Na etapa inicial de implementação do simulador, procedeu-se à importação das bibliotecas necessárias para viabilizar o desenvolvimento do sistema. Essa etapa foi fundamental para disponibilizar os recursos computacionais empregados na construção da interface gráfica, na realização dos cálculos matemáticos e na geração das representações gráficas e tridimensionais dos sólidos geométricos. As bibliotecas selecionadas forneceram funcionalidades específicas para o processamento numérico, manipulação de dados, criação de elementos interativos e visualização gráfica, permitindo integrar, em um único ambiente computacional, os diferentes componentes que compõem o simulador. Dessa forma, a importação dessas bibliotecas constituiu a base para as etapas subsequentes de programação, possibilitando a implementação dos algoritmos responsáveis pela modelagem matemática, pela interação do usuário com o sistema e pela representação visual das relações entre as grandezas estudadas. A Figura 9

apresenta o trecho de código correspondente a essa etapa inicial de configuração do ambiente de desenvolvimento.

Figura 9 – Trecho do código representando a importação das bibliotecas utilizadas no desenvolvimento do simulador SENVG

```
1  import tkinter as tk
2  from tkinter import ttk, messagebox
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg
5  import numpy as np
6  import time
7  from matplotlib.figure import Figure
8  import random
9  from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
10 from matplotlib.patches import Rectangle
11 from matplotlib.collections import PatchCollection
12 import math
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A biblioteca *tkinter* foi empregada para o desenvolvimento da interface gráfica do simulador, possibilitando a criação de janelas, botões e controles deslizantes. A biblioteca *matplotlib* foi utilizada tanto na construção dos gráficos cartesianos quanto na renderização dos sólidos geométricos em três dimensões, por meio do módulo *mpl_toolkits.mplot3d*. Para os cálculos numéricos e operações matemáticas, utilizaram-se as bibliotecas *numpy* e *math*, enquanto as bibliotecas *time* e *random* auxiliaram, respectivamente, no controle do tempo de simulação e na diferenciação visual das curvas apresentadas nos gráficos.

Para a geração dos gráficos cartesianos e das visualizações tridimensionais, utilizou-se a biblioteca *matplotlib*. Essa biblioteca possibilitou a construção dos gráficos que relacionam a altura do líquido ao tempo, bem como a renderização dos sólidos geométricos em três dimensões. A utilização do *backend TkAgg* permitiu integrar essas visualizações diretamente à interface desenvolvida em *tkinter*, garantindo que os elementos gráficos fossem atualizados dinamicamente durante a execução da simulação.

A implementação do simulador foi organizada em classes, cada uma responsável pela simulação de um tipo específico de recipiente. Essa organização favoreceu a reutilização de código e a manutenção do software. Cada classe define os parâmetros iniciais da simulação, os métodos de cálculo do volume e da altura do líquido, bem como as rotinas de atualização da interface e dos gráficos.

Durante a execução da simulação, o volume do líquido é incrementado em pequenos passos de tempo, de acordo com a vazão definida pelo usuário. A cada incremento, o programa calcula a altura correspondente e atualiza tanto a visualização

tridimensional do recipiente quanto o gráfico altura X tempo. Esse procedimento permite ao usuário acompanhar o processo de enchimento de forma contínua.

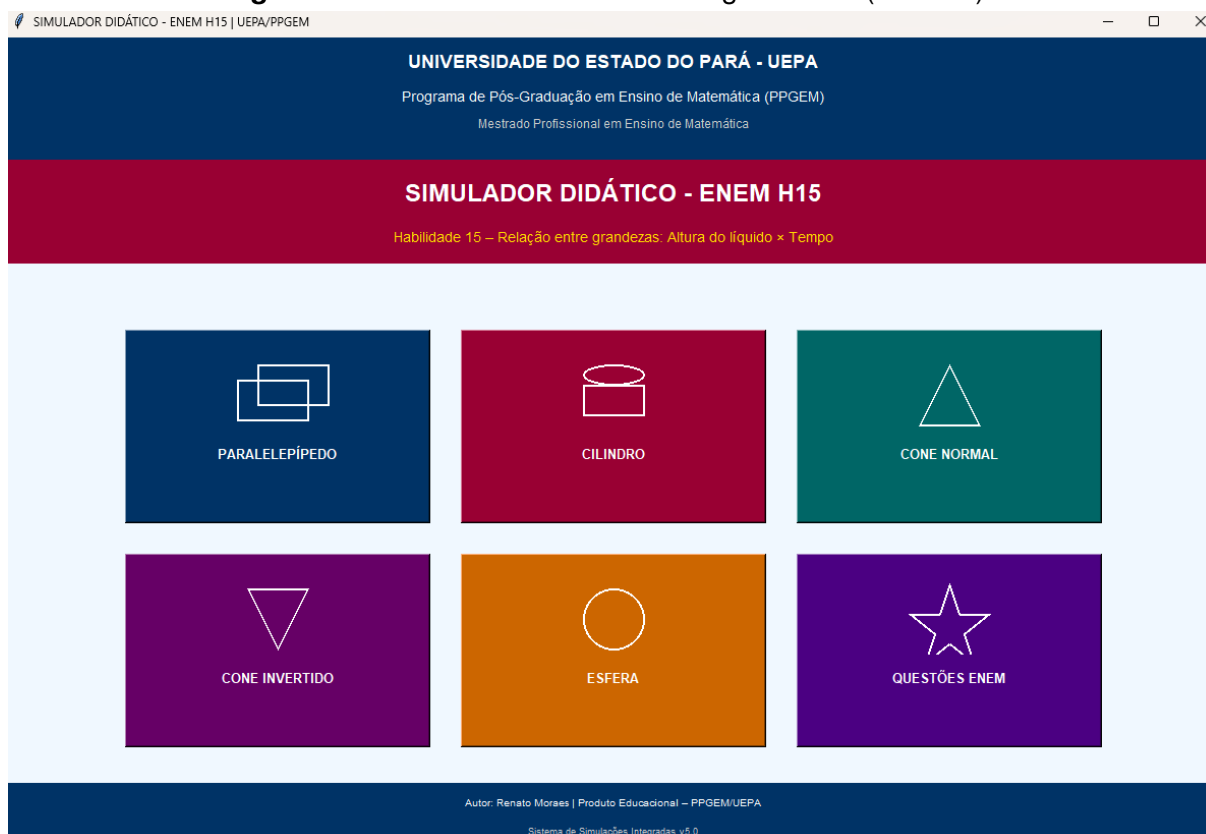
Embora o simulador permita o ajuste do valor da vazão pelo usuário, em cada simulação a vazão é considerada constante ao longo do tempo, de modo que a variação da altura do líquido decorra exclusivamente da geometria do recipiente analisado. Essa escolha é coerente com o foco da Habilidade 15, que privilegia a interpretação da relação entre grandezas a partir do comportamento do gráfico, isolando a influência da forma do recipiente.

Do ponto de vista didático, essa funcionalidade amplia as possibilidades de uso do produto em outras atividades, para além do escopo desta pesquisa. Do ponto de vista computacional, o ajuste da vazão permite controlar a resolução da simulação, uma vez que vazões muito elevadas podem comprometer a representação adequada de curvas não lineares, especialmente nos casos do cone e da esfera.

A partir dessas definições, estruturou-se a interface gráfica do simulador, organizada em painéis que permitem ao usuário interagir diretamente com os parâmetros da simulação e acompanhar simultaneamente as representações gráfica e tridimensional do fenômeno.

A Figura 10 apresenta a interface do simulador, mostrando a disposição dos elementos de interação e visualização.

Figura 10 – Interface do simulador de grandezas (SENVG)



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir da visualização geral da interface, torna-se possível compreender como os elementos apresentados se articulam durante a execução das simulações. A organização em painéis permite que o usuário acompanhe simultaneamente os diferentes aspectos do fenômeno, estabelecendo relações entre os parâmetros definidos, a representação gráfica e a visualização tridimensional do recipiente. Essa estrutura favorece uma leitura integrada do processo de enchimento, permitindo que as alterações realizadas sejam imediatamente refletidas nas representações exibidas.

Com base nessa organização, o simulador foi estruturado em diferentes telas, cada uma dedicada à análise de um tipo específico de recipiente geométrico. Em cada uma dessas telas, mantêm-se os elementos centrais da interface, enquanto são incorporadas particularidades relacionadas à geometria analisada. A seguir, apresentam-se as telas correspondentes às simulações desenvolvidas, mostrando como o comportamento das grandezas varia em função da forma do recipiente.

7.1 Paralelepípedo

A simulação do paralelepípedo foi concebida como o primeiro caso explorado no SENVG, por apresentar uma relação linear entre o volume de líquido acumulado e a altura preenchida no decorrer de determinado período de tempo. Essa linearidade decorre do fato de a área da base do recipiente permanecer constante ao longo de todo o processo de enchimento, o que permite estabelecer uma proporcionalidade direta entre as grandezas envolvidas. Nesse contexto, a altura do líquido cresce de forma uniforme ao longo do tempo quando a vazão é mantida constante, que é o caso dessas questões no ENEM, resultando em um gráfico altura $\times$ tempo representado por uma reta.

Do ponto de vista didático, esse caso introdutório desempenha um papel fundamental no percurso de aprendizagem proposto pelo simulador. Ao iniciar pelo paralelepípedo, o estudante tem a oportunidade de observar uma situação em que a relação entre as grandezas é mais simples e previsível, favorecendo a compreensão inicial da ideia de variação e dependência entre grandezas. Essa abordagem possibilita que o aluno estabeleça conexões diretas entre a vazão, as dimensões do recipiente e o comportamento do gráfico, criando uma base conceitual sólida para a análise posterior de recipientes com comportamento não linear, ou seja aqui é possível que ele perceba fenômenos que vão além daqueles que devem ser mobilizados na H15.

A compreensão dessa relação linear também contribui para a interpretação do gráfico como representação de um fenômeno contínuo, no qual cada ponto corresponde a um estado específico do processo de enchimento. Ao acompanhar a construção do gráfico ao longo do tempo, o estudante pode relacionar o crescimento uniforme da altura com a regularidade da reta, estabelecendo vínculos entre o comportamento

observado e os parâmetros que o determinam. Essa leitura favorece a construção de significados para a representação gráfica, indo além da identificação de formas e permitindo interpretar o gráfico como expressão de uma relação funcional entre grandezas, analisando suas especificidades e percebendo seu caráter de dependência direta.

Sob o aspecto computacional, a simulação do paralelepípedo foi implementada por meio de uma classe específica, responsável por organizar os parâmetros geométricos do recipiente, as variáveis de controle da simulação e os métodos de atualização da interface gráfica e das representações visuais. Nessa classe são definidos, inicialmente, os valores da largura, da profundidade, da altura total do recipiente, da vazão e do passo de tempo utilizado no processo de enchimento.

A adoção dessa estrutura orientada a objetos favorece a clareza do código, a reutilização de componentes em outras simulações do SENVG e a manutenção do software, além de explicitar de forma consistente a relação entre o modelo matemático e sua implementação computacional, como pode ser observado na Figura 11.

Figura 11 – Estrutura da classe responsável pela simulação do paralelepípedo

```
class SimulacaoParalelepipedo:
    def __init__(self, master, voltar_callback):
        self.master = master
        self.voltar_callback = voltar_callback

        # Limpar frame anterior
        for widget in master.winfo_children():
            widget.destroy()

        # Variáveis da simulação
        self.A = 4.0 # largura
        self.B = 4.0 # profundidade
        self.H = 5.0 # altura
        self.Q = 0.6 # vazão constante
        self.dt = 0.05

        # Limites da visualização (ajustam automaticamente)
        self.x_lim = 8
        self.y_lim = 8
        self.z_lim = 8

        self.t = 0.0
        self.h = 0.0
        self.rodando = False

        # Histórico para comparação (múltiplas execuções)
        self.execucoes = []
        self.cor_liquido = '#1E90FF' # Azul Dodger
        self.alpha_liquido = 0.6
        self.execucao_atual = None

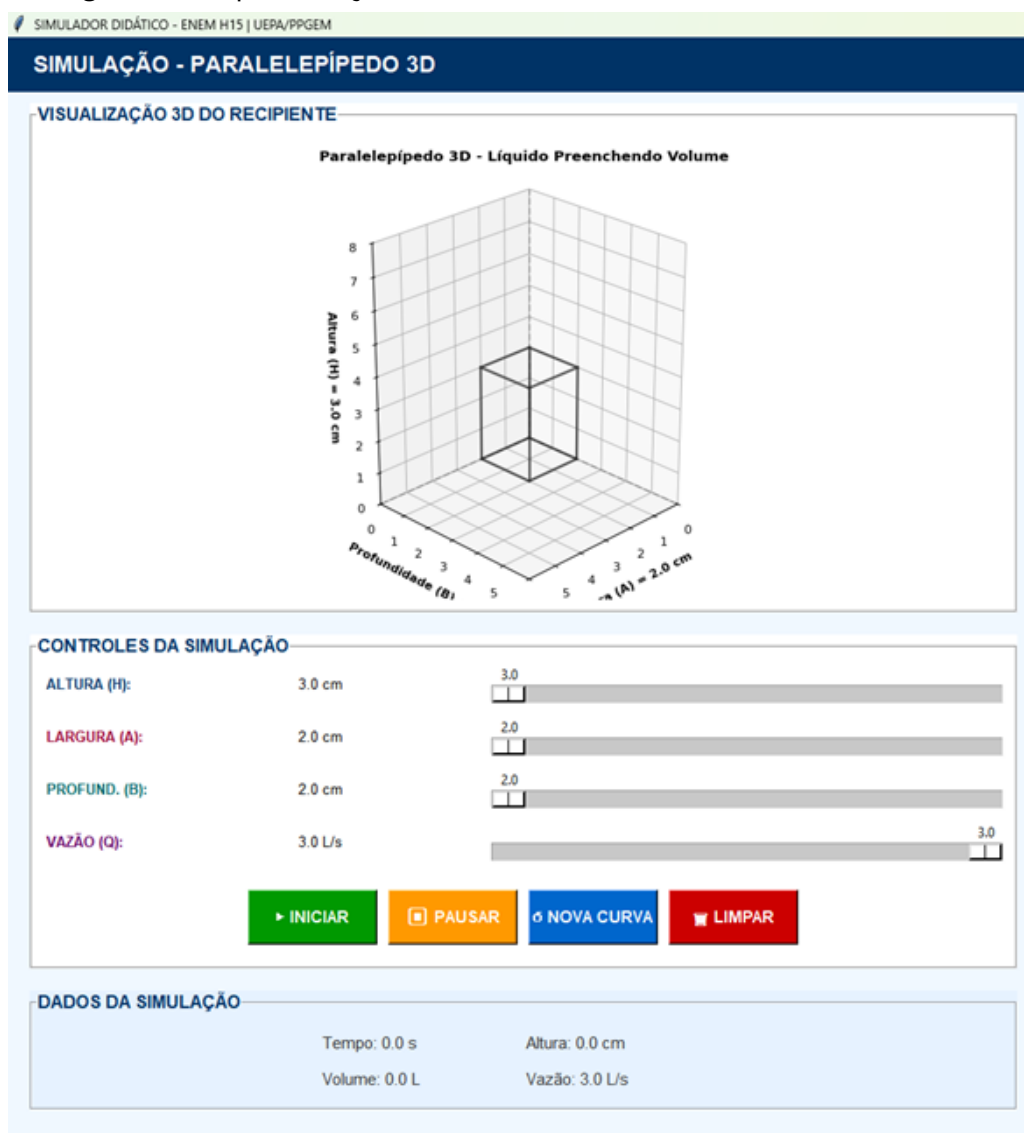
        self.setup_ui()
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A interface gráfica da simulação do paralelepípedo foi construída no método responsável pela organização dos elementos visuais e dos controles de interação. Nesse método são definidos os painéis da interface, os controles deslizantes para ajuste das dimensões do recipiente e da vazão, bem como os botões que controlam a execução da simulação.

Esses elementos permitem ao usuário modificar os parâmetros geométricos antes de iniciar a simulação ou entre diferentes execuções, favorecendo a exploração de múltiplas configurações do mesmo sólido geométrico. A possibilidade de ajuste direto desses parâmetros contribui para uma interação mais ativa com o simulador, permitindo observar como pequenas variações nas dimensões do recipiente impactam o comportamento do gráfico e da simulação como um todo, como pode ser observado na Figura 12.

Figura 12 – Apresentação de sliders de dimensões e botões de controle



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A execução da simulação é baseada em um processo iterativo, no qual o tempo avança em pequenos incrementos e o volume do líquido é atualizado a cada passo. O cálculo matemático central da simulação é implementado diretamente no código, explicitando a relação entre a vazão, a área da base do recipiente e a variação da altura do líquido. No caso do paralelepípedo, essa relação resulta em um incremento de altura proporcional ao quociente entre a vazão e a área da base, caracterizando uma relação linear entre altura e tempo, como pode ser observado na Figura 13.

Figura 13 – Trecho do código que implementa a relação matemática entre vazão, área da base e variação da altura no paralelepípedo

```
# >>> RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA H15 <<<
self.t += self.dt
dh = (self.Q / (self.A * self.B)) * self.dt
self.h += dh

if self.h > self.H:
    self.h = self.H
    self.rodando = False

# Adicionar ponto à execução atual
if self.execucao_atual:
    self.execucao_atual['tempo'].append(self.t)
    self.execucao_atual['altura'].append(self.h)

# Calcular volume
volume = self.h * self.A * self.B

# Atualizar displays
self.atualizar_displays()

# Atualizar visualização 3D (com líquido preenchendo volume)
self.desenhar_paralelepipedo_3d()
```

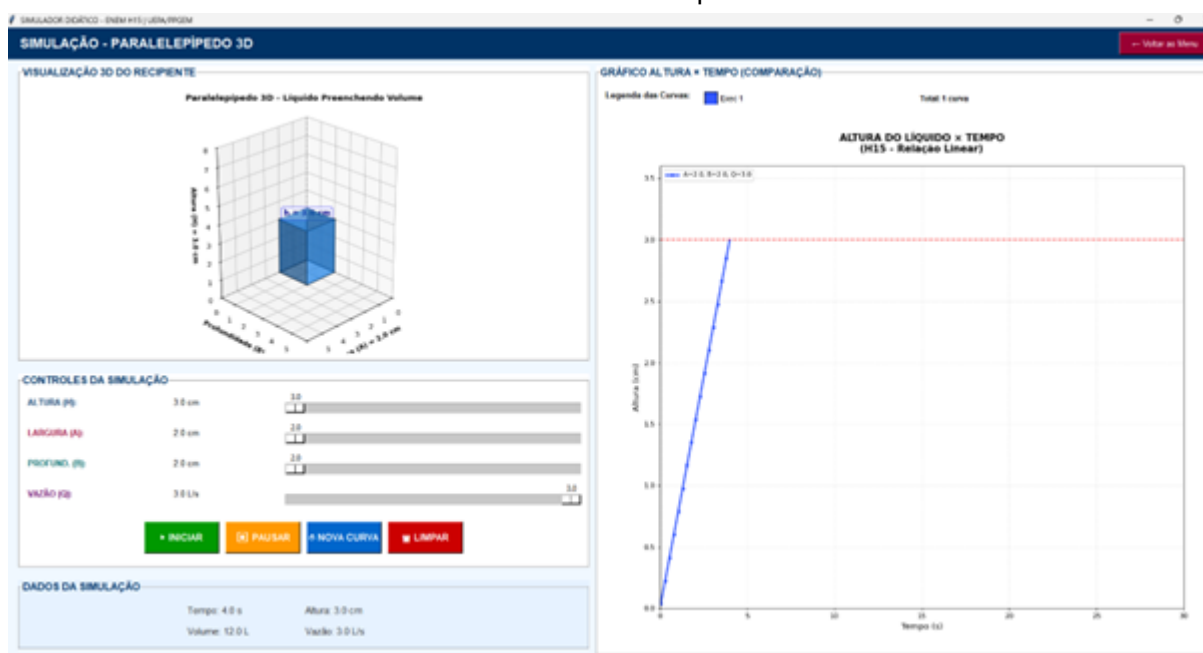
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir do cálculo da altura correspondente ao volume acumulado, o simulador realiza a atualização simultânea dos principais elementos visuais da interface. De um lado, o gráfico altura $\times$ tempo é redesenhado a cada iteração, incorporando os novos pontos calculados e permitindo acompanhar, em tempo real, o comportamento da altura do líquido ao longo do processo de enchimento. Essa atualização contínua

favorece a percepção da relação funcional entre as grandezas envolvidas e possibilita a comparação entre diferentes execuções da simulação, quando múltiplas curvas são mantidas no mesmo sistema de eixos.

Paralelamente, a visualização tridimensional do recipiente é atualizada de modo a representar um paralelepípedo interno crescente, que simula o volume ocupado pelo líquido abaixo da superfície. Essa representação visual foi concebida de forma a manter correspondência direta com os valores numéricos calculados no modelo matemático, permitindo ao usuário relacionar o resultado das operações realizadas no código com o comportamento observado na tela. Assim, a articulação entre cálculo, gráfico e visualização tridimensional contribui para a construção de uma compreensão mais integrada do fenômeno estudado, aproximando o tratamento matemático da interpretação geométrica do enchimento do recipiente, como pode ser observado na Figura 14.

Figura 14 – Execução da simulação do paralelepípedo com visualização tridimensional do enchimento do recipiente



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A interface do simulador disponibiliza botões específicos para o controle da simulação. O botão Iniciar dá início ao processo de enchimento, acionando o ciclo de atualização das variáveis e das representações gráficas. O botão Pausar interrompe temporariamente a simulação, preservando o estado atual do recipiente e do gráfico, permitindo ao usuário observar um determinado instante do processo com maior atenção ou até mesmo interromper em situações específicas para análise de situações propostas, devido à diversidade de possibilidades contextuais encontradas na Habilidade 15. Esse conjunto de controles possibilita ao usuário conduzir o ritmo

da simulação de acordo com seus objetivos de análise, favorecendo a observação de momentos específicos do processo e a retomada da execução a partir de diferentes pontos.

O botão Nova simulação desempenha um papel didático central no simulador. Ao ser acionado, o recipiente é esvaziado e uma nova execução é iniciada com parâmetros possivelmente distintos, enquanto as representações gráficas anteriormente geradas permanecem visíveis no plano cartesiano. Essa funcionalidade permite comparar diferentes simulações em um mesmo gráfico, favorecendo a análise das alterações provocadas pelas mudanças nas dimensões do paralelepípedo.

Do ponto de vista computacional, a funcionalidade de criação de novas simulações foi implementada por meio de rotinas responsáveis pelo controle do estado da execução, armazenamento dos dados gerados e atualização das representações gráficas. Quando o usuário aciona o comando para iniciar uma nova simulação, os valores associados ao nível do líquido são reinicializados, enquanto os dados da execução anterior são preservados em uma estrutura de armazenamento específica. Esse procedimento permite que os resultados previamente obtidos continuem disponíveis para visualização e comparação, possibilitando a construção de um histórico de execuções ao longo da interação com o simulador.

A preservação das execuções anteriores foi concebida não apenas como uma solução técnica para o gerenciamento dos dados produzidos pelo software, mas também como um recurso didático voltado à promoção da análise comparativa. Em situações de ensino envolvendo a interpretação de gráficos, a possibilidade de visualizar simultaneamente diferentes representações favorece a identificação de regularidades, diferenças e tendências, aspectos essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Assim, ao permitir que diversas curvas permaneçam registradas no mesmo plano cartesiano, o simulador oferece condições para que o usuário estabeleça relações entre as alterações realizadas nos parâmetros do recipiente e os comportamentos observados nos gráficos produzidos.

Essa funcionalidade assume especial relevância no contexto da Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM, uma vez que essa habilidade exige do estudante a capacidade de interpretar gráficos que representam relações entre grandezas. Em muitas situações, as dificuldades dos estudantes decorrem da observação isolada de uma única representação gráfica, sem oportunidades para comparação com outros comportamentos possíveis. Ao disponibilizar múltiplas curvas em um mesmo ambiente visual, o simulador amplia as possibilidades de exploração matemática, permitindo que sejam observadas semelhanças e diferenças decorrentes das modificações nas dimensões do sólido analisado.

Além disso, a manutenção do histórico das simulações contribui para que o usuário formule e teste hipóteses acerca do comportamento das grandezas envolvi-

das. Por exemplo, ao alterar a largura ou a profundidade do recipiente e iniciar uma nova execução, torna-se possível verificar imediatamente os efeitos dessas mudanças sobre a inclinação da curva representada no gráfico. Esse processo de observação, comparação e verificação favorece uma postura investigativa diante do fenômeno estudado, aproximando a utilização do simulador de práticas exploratórias frequentemente recomendadas pela literatura sobre o ensino de Matemática mediado por tecnologias digitais.

Sob a perspectiva da aprendizagem, a comparação simultânea entre diferentes execuções pode contribuir para a construção de significados relacionados à variação e à dependência entre grandezas. Ao observar diversas curvas sobrepostas, o usuário é levado a refletir sobre quais características permanecem invariáveis e quais se modificam em função dos parâmetros adotados em cada simulação. Esse processo favorece a compreensão de que os gráficos não constituem apenas representações visuais isoladas, mas expressam relações matemáticas associadas a fenômenos específicos, permitindo interpretar como alterações em determinadas variáveis influenciam o comportamento das demais.

Outro aspecto relevante refere-se ao caráter dinâmico proporcionado pela interação entre os controles do simulador e as representações gráficas. Diferentemente de atividades tradicionais baseadas exclusivamente em gráficos estáticos presentes em livros didáticos ou avaliações, o ambiente desenvolvido possibilita que o usuário manipule parâmetros, observe resultados instantaneamente e realize sucessivas comparações entre diferentes cenários. Essa característica amplia as oportunidades de exploração conceitual e favorece a construção de conhecimentos por meio da experimentação e da análise de situações variadas.

Dessa forma, o simulador possibilita a sobreposição de diferentes curvas em um mesmo plano cartesiano, favorecendo análises comparativas e contribuindo para a compreensão das relações entre as dimensões do paralelepípedo e o comportamento gráfico associado ao processo de enchimento. Mais do que uma funcionalidade operacional, esse mecanismo constitui um elemento pedagógico relevante do artefato desenvolvido, uma vez que amplia as possibilidades de investigação matemática e potencializa a interpretação de gráficos relacionados à variação entre grandezas.

A Figura 15 apresenta um trecho do código responsável por essas operações. Observa-se que o algoritmo realiza o salvamento das informações da execução corrente antes da reinicialização dos parâmetros da simulação, além de promover a atualização das representações gráficas exibidas ao usuário. O código evidencia a lógica utilizada para armazenar os dados das curvas previamente geradas, permitindo que permaneçam disponíveis para visualização mesmo após o início de uma nova execução. Também é possível observar os procedimentos relacionados à redefinição das variáveis do sistema e à atualização das informações apresentadas na interface.

Figura 15 – Trecho do código responsável pelo armazenamento das execuções anteriores e pela criação de novas simulações

```
def iniciar_simulacao(self):
    if not self.rodando:
        self.rodando = True

    # Gerar nova cor para esta execução
    cores_grafico = ['#FF5733', '#33FF57', '#3357FF', '#F033FF', '#FF33A1', '#33FFFF',
                    '#FF8C33', '#33FF8C', '#8C33FF', '#FF338C', '#33FFD6', '#D633FF']
    cor_grafico = random.choice(cores_grafico)

    # Iniciar nova execução
    self.execucao_atual = {
        'tempo': [],
        'altura': [],
        'cor': cor_grafico,
        'params': {'A': self.A, 'B': self.B, 'H': self.H, 'Q': self.Q},
        'label': f"A={self.A:.1f}, B={self.B:.1f}, Q={self.Q:.1f}"
    }

    self.executar_simulacao()

def pausar_simulacao(self):
    self.rodando = False

def nova_curva(self):
    """Inicia uma nova curva mantendo as anteriores"""
    self.rodando = False
    self.t = 0.0
    self.h = 0.0

    # Salvar execução atual se existir
    if self.execucao_atual and len(self.execucao_atual['tempo']) > 0:
        self.execucoes.append(self.execucao_atual)
        self.execucao_atual = None

    # Resetar líquido no 3D
    self.desenhar_paralelepipedo_3d()

    # Atualizar dados
    self.atualizar_displays()

    # Atualizar gráfico (mostrar todas as curvas)
    self.configurar_grafico()

def limpar_grafico(self):
    """Limpa todas as curvas do gráfico"""
    self.execucoes = []
    self.execucao_atual = None
    self.configurar_grafico()
    self.atualizar_legenda()

def executar_simulacao(self):
    if not self.rodando or (self.h >= self.H and self.execucao_atual):
        # Finalizar execução atual
        if self.execucao_atual and len(self.execucao_atual['tempo']) > 0:
            self.execucoes.append(self.execucao_atual)
            self.execucao_atual = None
            self.configurar_grafico()
        return

    # Atualizar parâmetros
    self.Q = float(self.slider_vazao.get())
    self.A = float(self.slider_largura.get())
    self.B = float(self.slider_profundidade.get())
    self.H = float(self.slider_altura.get())
```

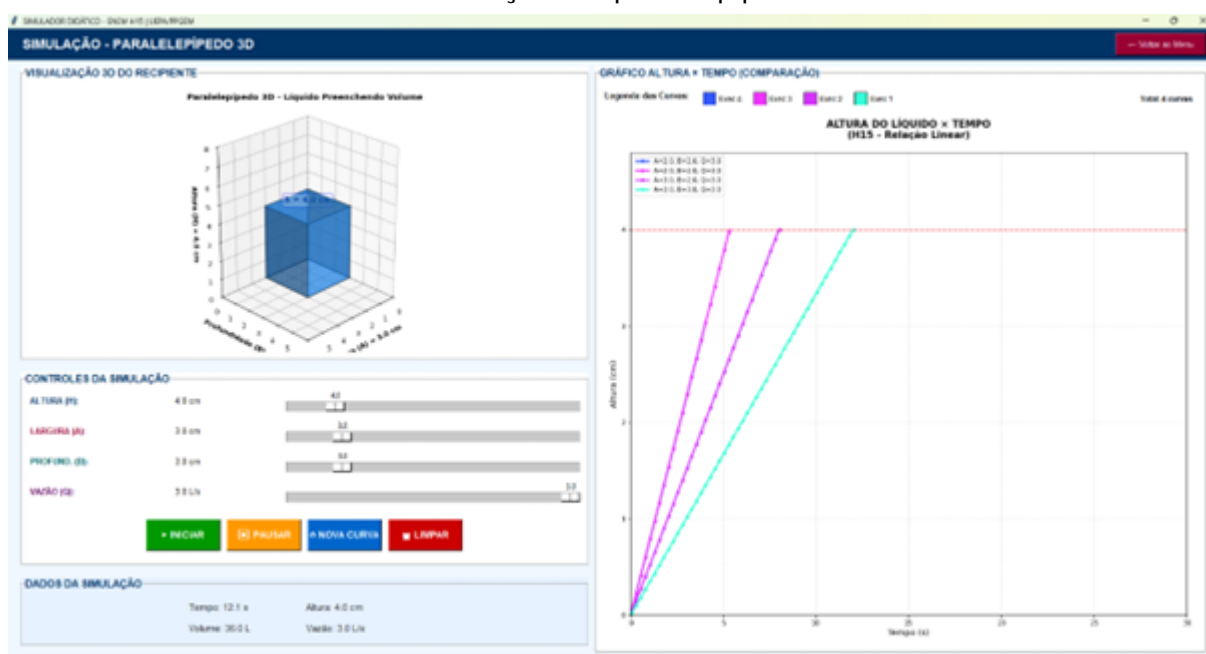
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

O botão Limpar, por sua vez, reinicia completamente o ambiente de simulação, removendo todas as representações gráficas armazenadas e restaurando os parâmetros iniciais. Essa funcionalidade possibilita retomar a exploração desde o início, sendo

especialmente útil em contextos de uso coletivo, como em atividades realizadas em sala de aula.

Ao ajustar as dimensões do paralelepípedo e realizar novas simulações, observa-se que os gráficos gerados apresentam sempre comportamento linear, representado por retas no plano cartesiano. No entanto, essas retas possuem inclinações distintas, decorrentes das alterações na área da base do recipiente. Quanto maior a área da base, menor é a inclinação da reta, pois a mesma vazão se distribui por uma área maior, resultando em um aumento mais lento da altura ao longo do tempo. De forma inversa, recipientes com bases menores produzem retas mais inclinadas, indicando uma variação mais rápida da altura, como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 – Múltiplas representações lineares, permitindo a comparação entre diferentes simulações do paralelepípedo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Essa comparação entre diferentes simulações favorece a compreensão do coeficiente angular do gráfico como resultado da razão entre a vazão e a área da base do recipiente. Ao observar retas com inclinações distintas em um mesmo plano cartesiano, o estudante é conduzido a atribuir significado matemático à inclinação do gráfico no contexto da situação simulada, articulando os parâmetros geométricos do paralelepípedo com a representação gráfica da variação de grandezas.

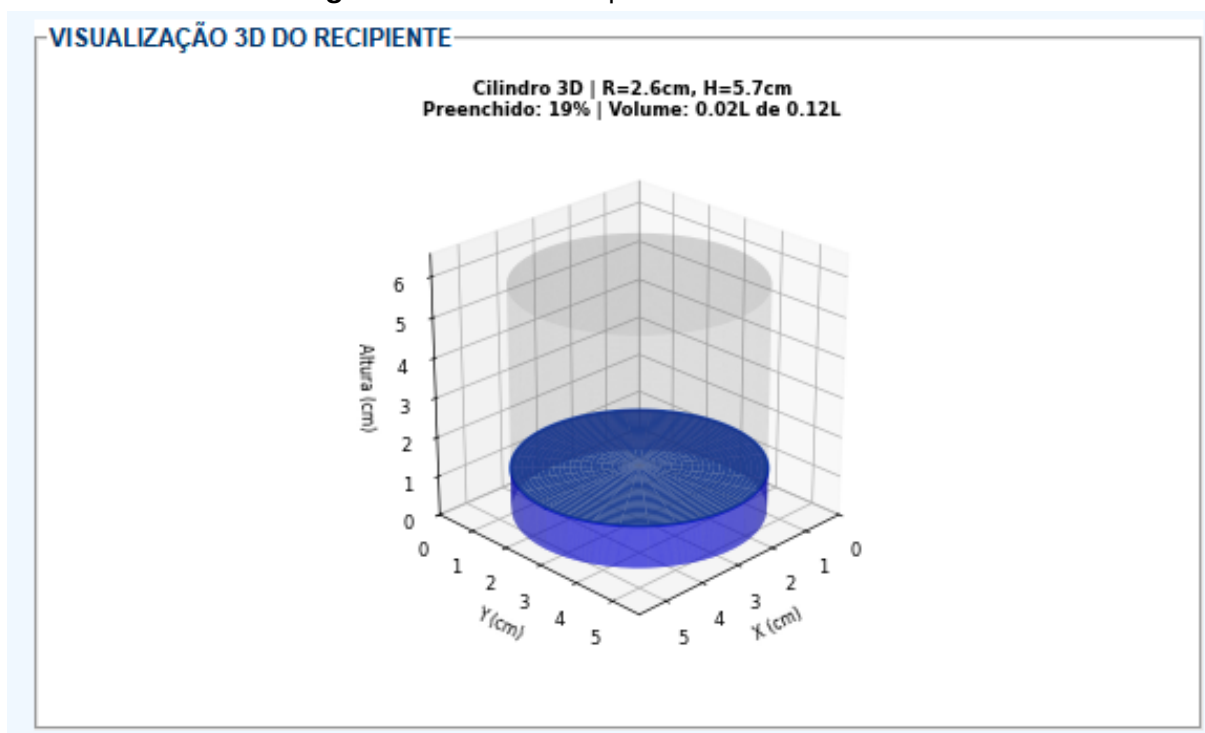
Dessa forma, a simulação do paralelepípedo no SENVG cumpre um papel introdutório fundamental no ambiente de aprendizagem, permitindo articular cálculo matemático, implementação computacional e interpretação gráfica. A exploração das diferentes simulações e a comparação entre as representações geradas contribuem

para que o estudante compreenda o gráfico como resultado de um processo dinâmico, em consonância com os objetivos da Habilidade 15.

7.2 Cilindro

A simulação do cilindro no SENVG dá continuidade à exploração das noções de variação de grandezas iniciada com o paralelepípedo, mantendo como referência inicial uma situação em que a relação entre as grandezas envolvidas é linear. Assim como no caso anterior, a área da base do recipiente permanece constante ao longo de todo o processo de enchimento, o que implica que, para uma vazão constante, a altura do líquido cresce de forma proporcional ao tempo. Essa característica possibilita ao estudante reconhecer padrões já observados anteriormente, consolidando a interpretação de gráficos que representam relações lineares, como pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 – Cilindro no processo de enchimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Apesar dessa semelhança estrutural, o cilindro introduz novos elementos geométricos que ampliam a análise didática proposta pelo simulador. Ao considerar uma base circular, o cálculo da área passa a envolver o raio do recipiente, o que permite discutir de forma mais explícita a influência dessa grandeza no comportamento do gráfico altura $\times$ tempo. A comparação entre simulações com diferentes valores de raio demonstra que, quanto maior a área da base do cilindro, menor será a inclinação da reta representada no gráfico, uma vez que um mesmo volume de líquido distribuído em uma base maior resulta em um crescimento mais lento da altura.

A simulação do cilindro foi implementada por meio de uma classe específica, responsável por organizar os parâmetros geométricos do recipiente, as variáveis de controle da simulação e os métodos de atualização da interface gráfica e das representações visuais. Nessa classe são definidos o raio da base, a altura total do cilindro, a vazão do líquido e o passo de tempo utilizado na simulação. A adoção de uma estrutura semelhante à utilizada no paralelepípedo contribui para a coerência interna do simulador, facilita a manutenção do código e retrata a correspondência entre o modelo matemático adotado e sua implementação computacional, como pode ser observado na Figura 18.

Figura 18 – Estrutura da classe responsável pela simulação do cilindro e definição dos parâmetros iniciais

```
class SimulacaoCilindro:
    def __init__(self, master, voltar_callback):
        self.master = master
        self.voltar_callback = voltar_callback

        # Limpar frame anterior
        for widget in master.winfo_children():
            widget.destroy()

        # Variáveis da simulação (CILINDRO)
        self.raio = 3.0      # raio da base
        self.altura = 10.0   # altura do cilindro
        self.vazao = 1.0     # vazão constante
        self.dt = 0.05      # passo de tempo

        # Estado da simulação
        self.tempo = 0.0
        self.altura_liquido = 0.0
        self.rodando = False
        self.volume_total = 0.0

        # Histórico para múltiplas curvas
        self.execucoes = []
        self.cor_liquido = '#1E90FF' # Azul Dodger
        self.alpha_liquido = 0.7
        self.execucao_atual = None

        # Cores para as curvas do gráfico
        self.cores_grafico = ['#FF5733', '#33FF57', '#3357FF', '#F033FF', '#FF33A1',
                               '#33FFFF', '#FF8C33', '#33FF8C', '#8C33FF', '#FF338C']

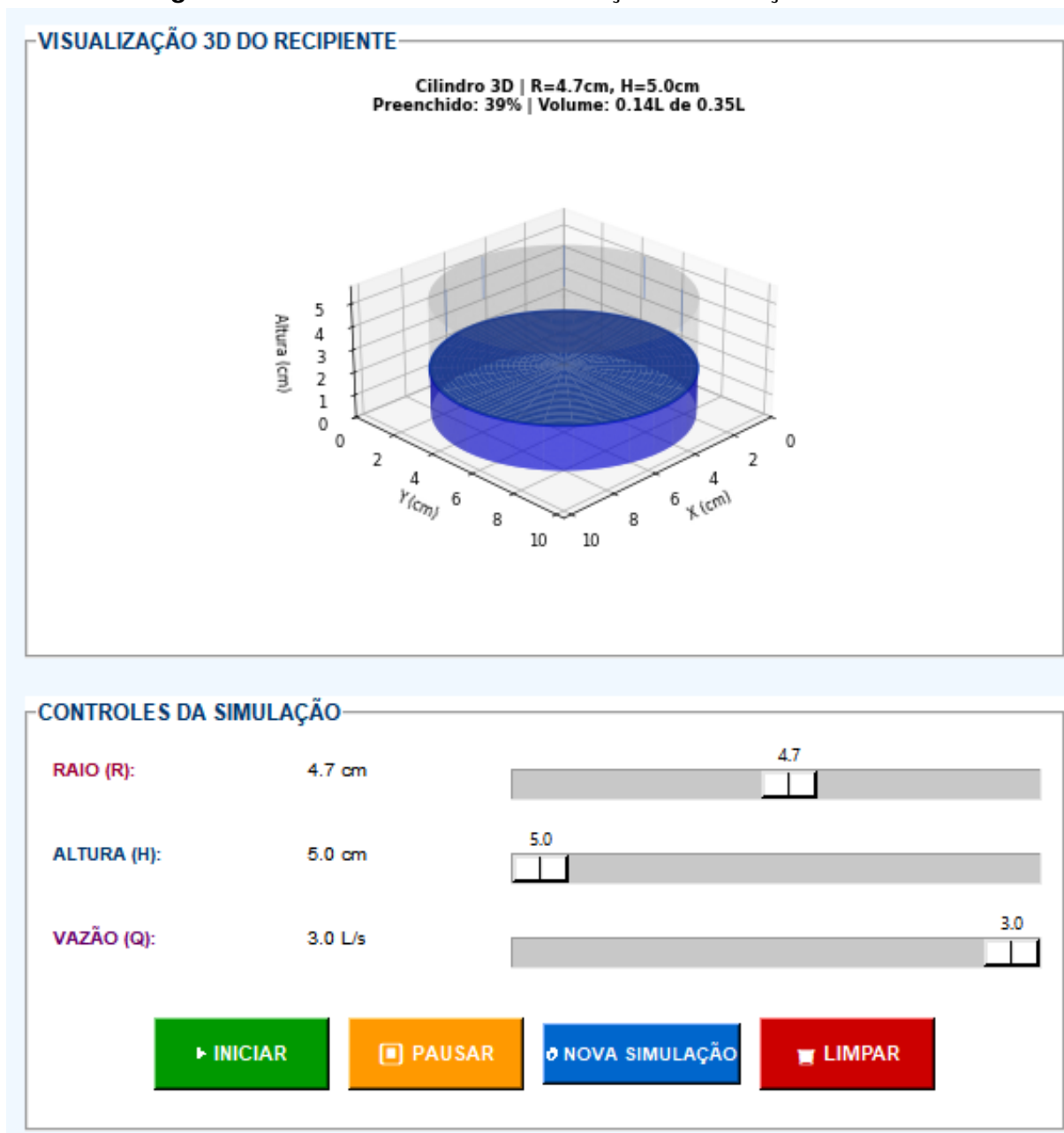
        self.setup_ui()
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A interface gráfica do cilindro mantém a organização geral utilizada na simulação do paralelepípedo, permitindo ao usuário ajustar o raio da base, a altura do recipiente e a vazão do líquido por meio de controles deslizantes. Além disso, são disponibilizados botões para iniciar, pausar, realizar uma nova simulação e limpar o gráfico, garantindo

consistência na forma de interação ao longo do simulador, como pode ser observado na Figura 19.

Figura 19 – Botões e controles de interação da simulação do cilindro



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A execução da simulação baseia-se em um processo iterativo, no qual o tempo é incrementado em passos discretos previamente definidos e, a cada iteração, são atualizadas as grandezas físicas associadas ao enchimento do recipiente. No caso específico do cilindro, o código implementa diretamente a relação matemática fundamental entre volume, área da base e altura do líquido. Inicialmente, calcula-se a área da base circular a partir do raio do cilindro, utilizando a expressão $A = \pi r^2$. Em seguida, a variação da altura do líquido em cada passo de tempo é obtida pela razão

entre a vazão volumétrica e essa área, multiplicada pelo intervalo de tempo adotado na simulação. Esse procedimento garante que, para uma vazão constante e uma área de base fixa, o crescimento da altura ocorra de forma uniforme ao longo do tempo, resultando em um gráfico linear de altura em função do tempo. O código também inclui uma verificação que impede que a altura ultrapasse o valor máximo do recipiente, assegurando a coerência física da simulação e a consistência entre o modelo matemático e a implementação computacional, como pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 – Trecho do código que implementa a relação matemática entre vazão, área da base circular e variação da altura no cilindro

```
# >>> RELAÇÃO FUNDAMENTAL PARA CILINDRO <<<
# Para cilindro:  $V = \pi \times R^2 \times h$ 
#  $dh/dt = Q / (\pi \times R^2)$ 
self.tempo += self.dt
area_base = math.pi * (self.raio ** 2)
dh = (self.vazao / area_base) * self.dt
self.altura_liquido += dh

if self.altura_liquido > self.altura:
    self.altura_liquido = self.altura
    self.rodando = False

# Calcular volume atual
self.volume_total = area_base * self.altura_liquido / 1000 # Converter para litros

# Adicionar ponto à execução atual
if self.execucao_atual:
    self.execucao_atual['tempo'].append(self.tempo)
    self.execucao_atual['altura'].append(self.altura_liquido)

# Atualizar displays
self.atualizar_displays()

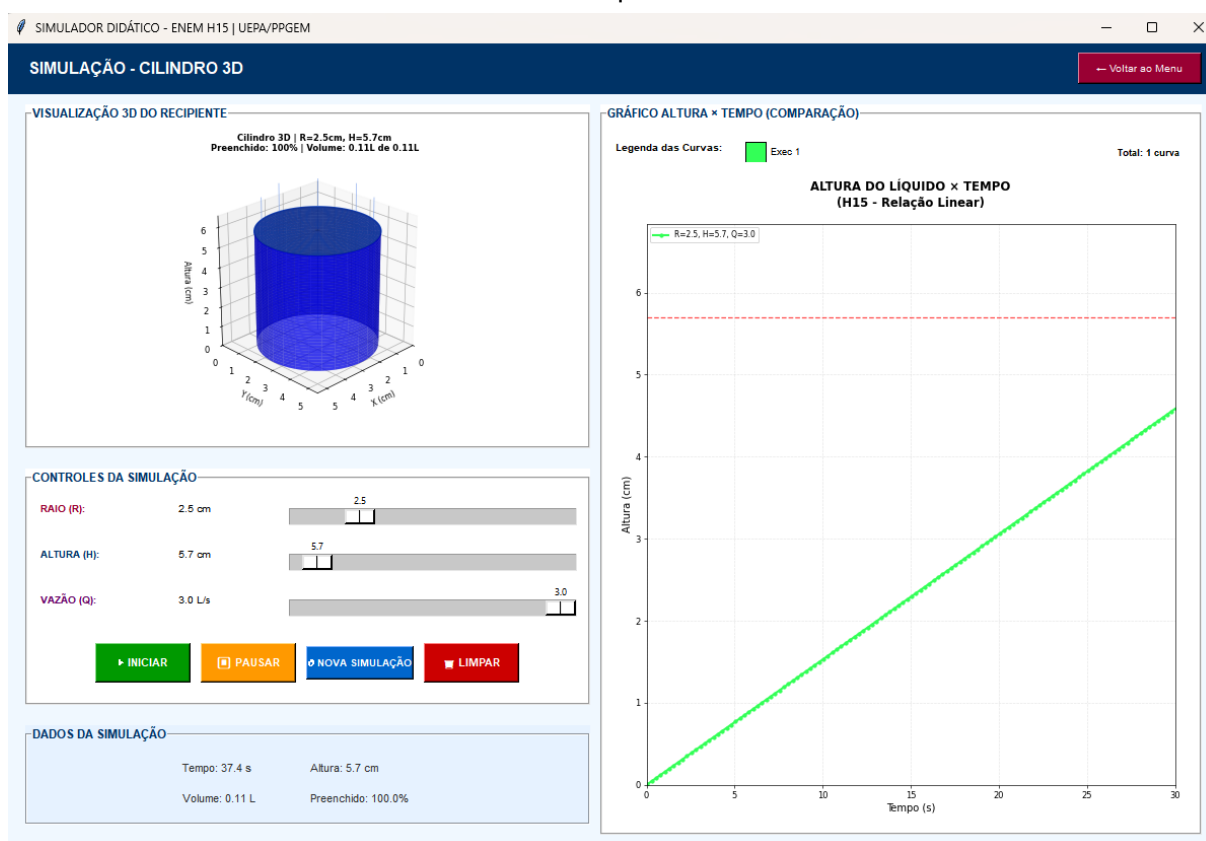
# Atualizar visualização 3D
self.desenhar_cilindro_3d()
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir desse cálculo, o simulador realiza a atualização simultânea da visualização tridimensional do cilindro e do gráfico que relaciona a altura do líquido ao tempo. A cada incremento temporal, as novas informações calculadas no código são imediatamente refletidas tanto na representação gráfica quanto na animação do recipiente, garantindo a coerência entre os diferentes registros de representação mobilizados pelo simulador. Essa atualização síncrona permite que o usuário perceba, em tempo real, como as variações numéricas decorrentes do modelo matemático se manifestam visualmente no processo de enchimento.

A visualização tridimensional foi construída de modo a representar o cilindro com paredes semitransparentes, de forma que o líquido seja claramente visível em seu interior, preenchendo todo o volume abaixo da superfície livre. Essa escolha favorece a observação da elevação progressiva do nível do líquido e contribui para a compreensão da relação entre volume acumulado e altura preenchida. Ao acompanhar simultaneamente o comportamento da animação e do gráfico, o usuário pode estabelecer conexões diretas entre o crescimento linear da altura no gráfico cartesiano e o movimento uniforme observado no interior do recipiente, fortalecendo a interpretação dos dados gerados pela simulação, como pode ser observado na Figura 21.

Figura 21 – Execução da simulação do cilindro com visualização tridimensional do enchimento do recipiente

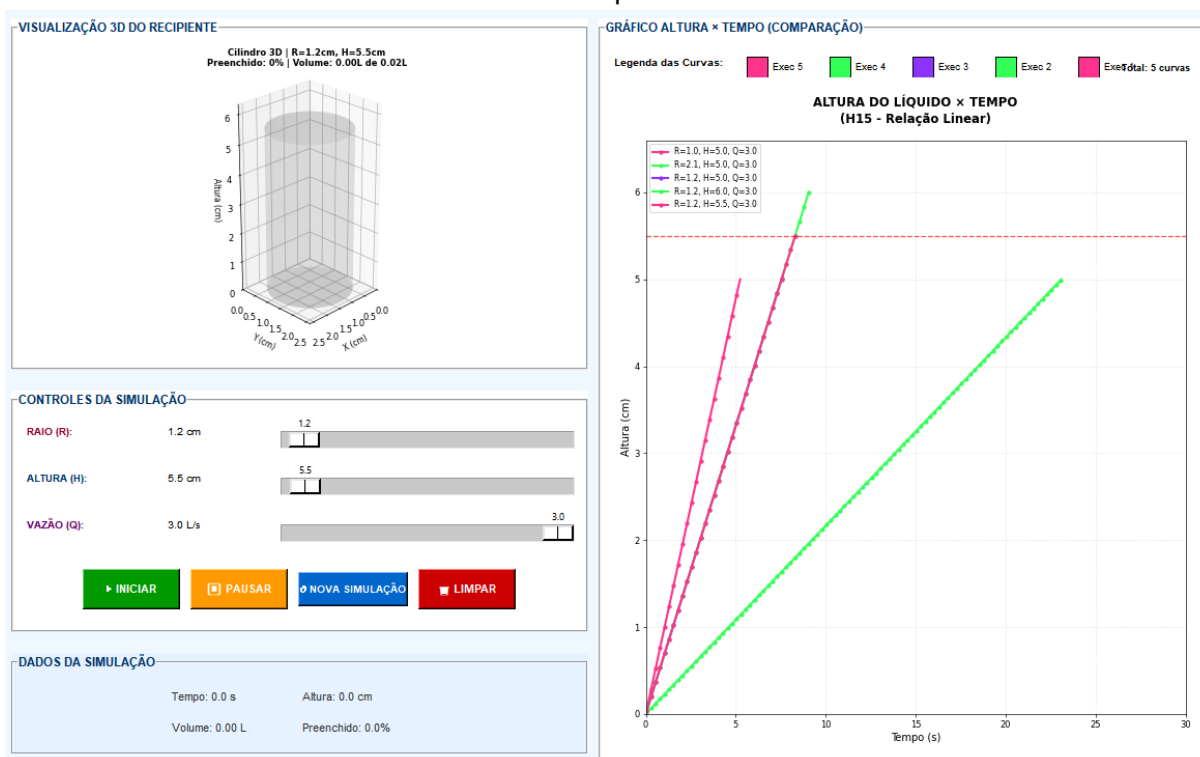


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir desse cálculo, o simulador realiza a atualização simultânea da visualização tridimensional do cilindro e do gráfico que relaciona a altura do líquido ao tempo. A cada incremento temporal, as novas informações calculadas no código são imediatamente refletidas tanto na representação gráfica quanto na animação do recipiente, garantindo a coerência entre os diferentes registros de representação mobilizados pelo simulador. Essa atualização síncrona permite que o usuário perceba, em tempo real, como as variações numéricas decorrentes do modelo matemático se manifestam visualmente no processo de enchimento.

A visualização tridimensional foi construída de modo a representar o cilindro com paredes semitransparentes, de forma que o líquido seja claramente visível em seu interior, preenchendo todo o volume abaixo da superfície livre. Essa escolha favorece a observação da elevação progressiva do nível do líquido e contribui para a compreensão da relação entre volume acumulado e altura preenchida. Ao acompanhar simultaneamente o comportamento da animação e do gráfico, o usuário pode estabelecer conexões diretas entre o crescimento linear da altura no gráfico cartesiano e o movimento uniforme observado no interior do recipiente, fortalecendo a interpretação dos dados gerados pela simulação, como pode ser observado na Figura 22.

Figura 22 – Execução da simulação do cilindro com visualização tridimensional do enchimento do recipiente



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Essa comparação entre diferentes simulações favorece a compreensão do coeficiente angular do gráfico como resultado da razão entre a vazão e a área da base do recipiente. Ao analisar retas com inclinações distintas em um mesmo plano cartesiano, o estudante é levado a compreender que, embora a forma do gráfico permaneça linear, suas características quantitativas dependem diretamente dos parâmetros geométricos do cilindro.

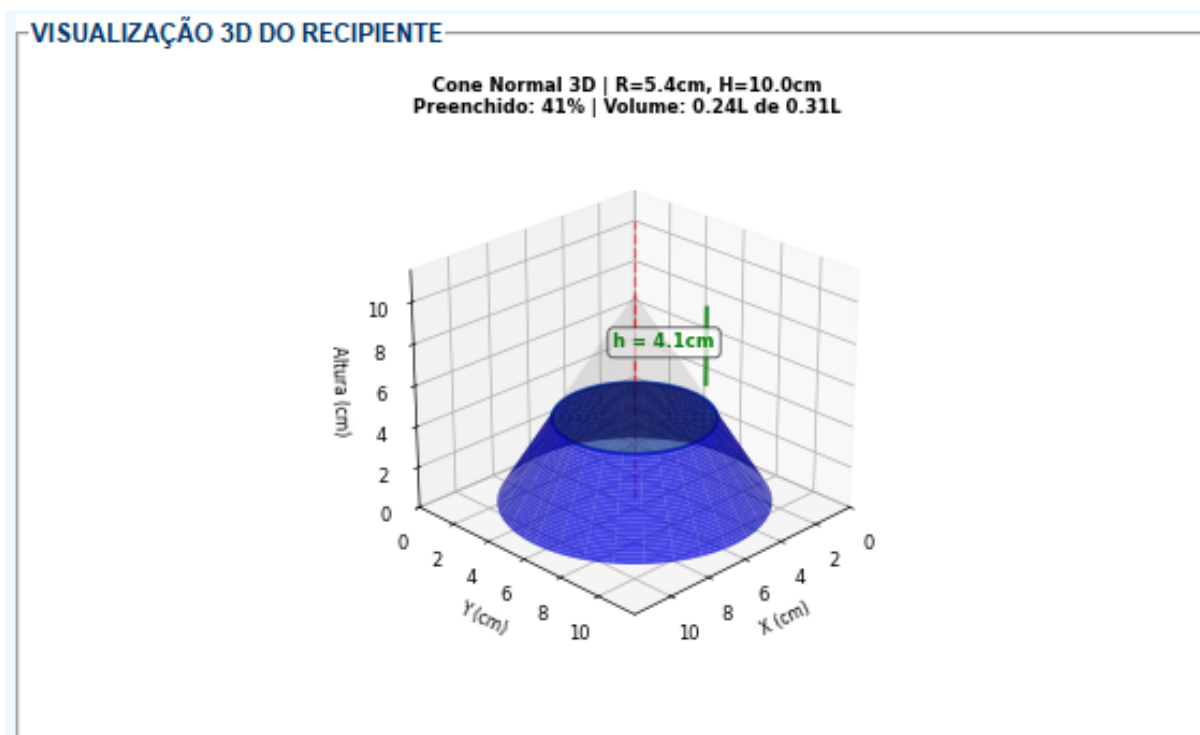
Dessa forma, a simulação do cilindro amplia a análise iniciada com o paralelepípedo, reforçando a interpretação da relação linear entre grandezas, retirando a possibilidade de compreensões errôneas onde o aluno poderia relacionar o formato circular da base com algum gráfico no formato de curva, além de que a partir de

agora o estudante estará preparado para a compreensão de recipientes cuja geometria resulta em comportamentos não lineares, abordados nas simulações subsequentes do simulador.

7.3 Cone

A simulação do cone representa um ponto de inflexão no desenvolvimento do SENVG, na medida em que introduz uma situação em que a relação entre a altura do líquido e o tempo deixa de apresentar comportamento linear. Diferentemente do que ocorre no paralelepípedo e no cilindro, a área da seção transversal do cone varia continuamente ao longo da altura do recipiente. Essa variação geométrica altera de forma significativa o modo como a altura do líquido cresce durante o enchimento, produzindo um gráfico cuja forma exige uma interpretação mais cuidadosa por parte do estudante, como pode ser observado na Figura 23.

Figura 23 – Cone no processo de enchimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

No cone, cuja base está situada na parte inferior e o vértice na parte superior, o raio da seção transversal diminui linearmente à medida que a altura aumenta. Essa característica implica que, conforme o líquido sobe, a área disponível para o escoamento torna-se progressivamente menor. Como consequência, para uma vazão constante, a altura do líquido tende a aumentar de maneira cada vez mais rápida, o que se reflete na curvatura do gráfico altura $\times$ tempo. Esse comportamento contrasta com os casos

anteriores e permite visualizar, de forma clara, a influência da geometria do recipiente sobre a variação das grandezas envolvidas.

Do ponto de vista matemático, o volume do líquido acumulado até uma determinada altura não pode ser expresso como um produto simples entre área da base e altura. No caso do cone, esse volume corresponde ao volume de um tronco de cone, o que estabelece uma relação de natureza cúbica entre o volume e a altura. Tal relação inviabiliza a obtenção direta da altura em função do tempo por meio de uma expressão algébrica elementar, justificando a adoção de métodos numéricos na implementação computacional. Essa complexidade reforça a pertinência do cone como objeto de estudo da Habilidade 15, ao exigir do estudante uma leitura mais aprofundada e reflexiva dos gráficos produzidos, como pode ser observado na Figura 24.

Figura 24 – Estrutura da classe responsável pela simulação do cone e definição dos parâmetros iniciais

```
class SimulacaoConeNormal:
    def __init__(self, master, voltar_callback):
        self.master = master
        self.voltar_callback = voltar_callback

        # Limpar frame anterior
        for widget in master.winfo_children():
            widget.destroy()

        # Variáveis da simulação (CONE NORMAL)
        self.raio_base = 4.0      # raio da base
        self.altura = 10.0       # altura do cone
        self.vazao = 1.0         # vazão constante
        self.dt = 0.05           # passo de tempo

        # Estado da simulação
        self.tempo = 0.0
        self.altura_liquido = 0.0
        self.rodando = False
        self.volume_total = 0.0

        # Histórico para múltiplas curvas
        self.execucoes = []
        self.cor_liquido = '#1E90FF' # Azul Dodger
        self.alpha_liquido = 0.7
        self.execucao_atual = None

        # Cores para as curvas do gráfico
        self.cores_grafico = ['#FF5733', '#33FF57', '#3357FF', '#F033FF', '#FF33A1',
                               '#33FF66', '#FF8C33', '#33FF8C', '#8C33FF', '#FF338C']

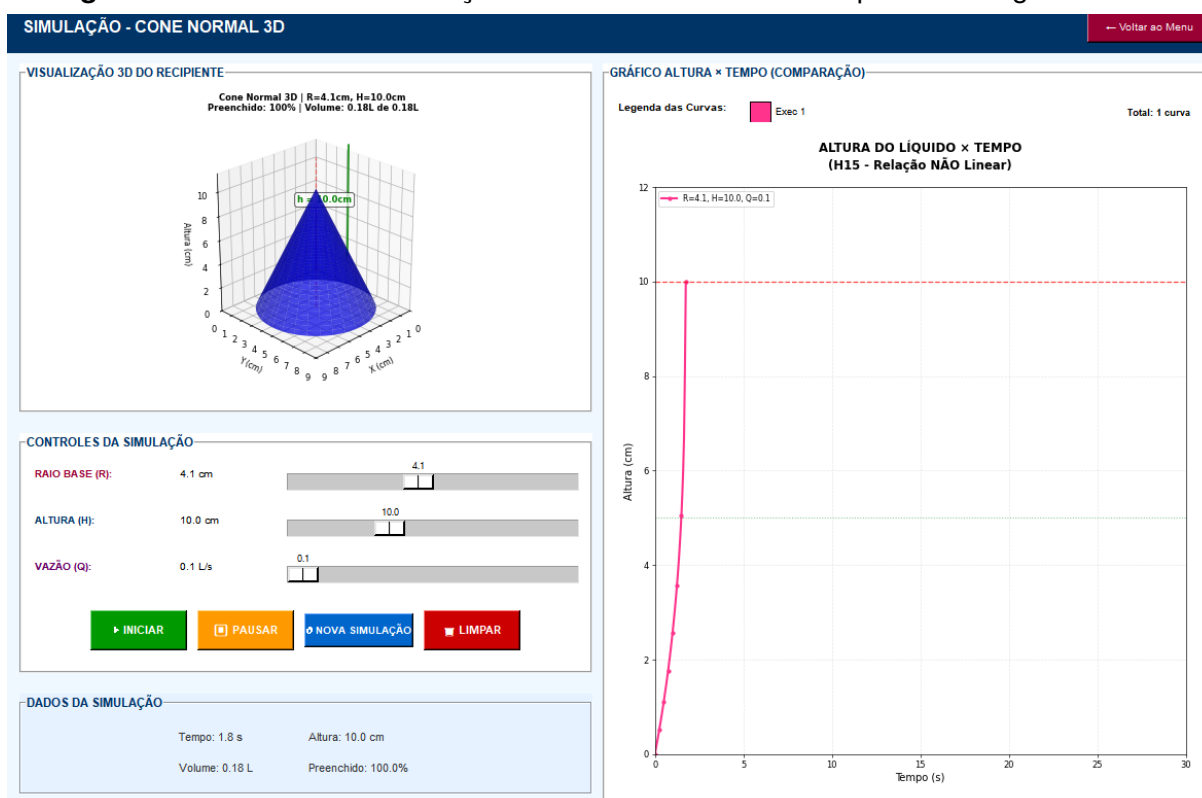
        self.setup_ui()
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Na implementação computacional do cone, optou-se por manter a organização geral da interface gráfica utilizada nos sólidos anteriores, de modo a preservar a familiaridade do usuário com o ambiente. No entanto, embora a interface apresente

controles semelhantes, como ajuste do raio da base, da altura e da vazão, a lógica interna da simulação passa a ser substancialmente diferente. Os parâmetros utilizados necessitaram de ajustes por não ser possível mais fazer com que um cone fosse "crescendo dentro do original", como foi realizado nos sólidos anteriores, isso tiraria a percepção de um enchimento real do recipiente. Então a decisão de ajustar foi tomada para que a complexidade matemática considerasse o comportamento do sistema, e não da interface em si, como pode ser observado na Figura 25.

Figura 25 – Interface da simulação do cone com controles de parâmetros geométricos



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Uma etapa fundamental da implementação do cone consistiu na definição de funções matemáticas auxiliares capazes de representar, de forma fiel, a geometria variável do recipiente ao longo de sua altura. Diferentemente dos casos anteriores, em que as dimensões da seção transversal permanecem constantes, o cone exige que o raio seja recalculado a cada nível de altura do líquido.

Para atender a essa necessidade, foi implementada uma função específica que determina o raio da seção transversal em função da altura, com base no princípio da semelhança de triângulos, característico desse sólido geométrico. Essa abordagem permite modelar corretamente a redução progressiva do raio à medida que o líquido se aproxima do vértice do cone, e foi obtida após várias tentativas de modelar corretamente o crescimento do que equivale ao líquido dentro de recipiente.

Essa função matemática desempenha um papel fundamental na simulação, pois é utilizada simultaneamente em diferentes etapas do processo computacional. Ela é empregada tanto no cálculo do volume acumulado do líquido, por meio da expressão correspondente ao tronco de cone, quanto na construção da visualização tridimensional do recipiente e do líquido em seu interior. Dessa forma, assegura-se a coerência entre o modelo matemático adotado, os cálculos realizados pelo simulador e a representação visual apresentada ao usuário, evitando discrepâncias entre o comportamento teórico esperado e a simulação observada, como pode ser observado na Figura 26.

Figura 26 – Trecho do código responsável pelo cálculo do raio do cone em função da altura

```
def raio_em_altura(self, h):
    """Calcula o raio do cone na altura h (cone normal: base grande, vértice pequeno)"""
    # Para cone normal: raio diminui linearmente com a altura
    # Na base (h=0): raio = R_base
    # No vértice (h=H): raio = 0
    return self.raio_base * (1 - h/self.altura)

def volume_tronco_cone(self, h):
    """Volume do tronco de cone de altura h"""
    # Volume do cone completo:  $V_{total} = (\pi \cdot R^2 \cdot H) / 3$ 
    # Volume do cone pequeno acima do líquido:  $V_{pequeno} = (\pi \cdot r^2 \cdot (H-h)) / 3$ 
    # Volume do líquido =  $V_{total} - V_{pequeno}$ 

    if h <= 0:
        return 0
    if h >= self.altura:
        return (math.pi * self.raio_base**2 * self.altura) / 3

    # Raio na altura h
    r = self.raio_em_altura(h)

    # Fórmula do tronco de cone:  $V = (\pi \cdot h / 3) \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$ 
    volume = (math.pi * h / 3) * (self.raio_base**2 + self.raio_base * r + r**2)
    return volume

def volume_total_cone(self):
    """Volume total do cone"""
    return (math.pi * self.raio_base**2 * self.altura) / 3
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir dessa função que relaciona o raio à altura, foi implementado o cálculo do volume do líquido considerando-o como o volume de um tronco de cone. Essa opção decorre diretamente da geometria do recipiente, uma vez que, durante o enchimento, a porção ocupada pelo líquido corresponde à parte inferior do cone, enquanto a região superior permanece vazia. Assim, o volume efetivamente preenchido pode ser compreendido como a diferença entre o volume do cone completo e o volume do cone menor situado acima do nível do líquido, o que permite representar de forma

mais intuitiva o processo físico simulado. Essa modelagem torna possível acompanhar matematicamente o comportamento do enchimento sem simplificar excessivamente a geometria do recipiente, preservando as características fundamentais da relação entre volume e altura no cone.

Além disso, essa estratégia permitiu manter uma correspondência mais consistente entre o comportamento geométrico observado na visualização tridimensional e os cálculos realizados internamente pelo simulador. Ao trabalhar com a ideia de decomposição do cone em partes geometricamente relacionadas, o algoritmo passa a representar o enchimento como um processo dinâmico de transformação volumétrica, no qual a redução progressiva da região vazia superior influencia diretamente o crescimento da altura do líquido. Essa abordagem favorece não apenas a precisão matemática da simulação, mas também a interpretação visual do fenômeno modelado. Ao acompanhar simultaneamente o enchimento do recipiente e a atualização do gráfico, o usuário pode perceber que pequenas variações na área da seção transversal produzem alterações significativas na taxa de crescimento da altura ao longo do tempo.

Em vez de recorrer exclusivamente a uma fórmula que expressa o volume diretamente em função da altura, optou-se por estruturar o código de modo a tornar explícito esse raciocínio geométrico. A implementação destaca a ideia de decomposição do sólido, evidenciando a subtração entre dois volumes geometricamente semelhantes, o que contribui para a clareza conceitual do modelo matemático adotado. Do ponto de vista educacional, essa escolha favorece a compreensão dos princípios envolvidos no cálculo do volume e aproxima o código da lógica matemática que pode ser discutida em sala de aula, facilitando a articulação entre a simulação computacional e o conteúdo matemático trabalhado com os estudantes. Além disso, a organização do algoritmo em etapas geometricamente interpretáveis contribui para que o estudante compreenda que o comportamento do gráfico decorre diretamente das propriedades estruturais do sólido analisado.

Outro aspecto relevante dessa implementação é a possibilidade de mostrar a relação entre diferentes conceitos matemáticos frequentemente abordados de forma isolada no contexto escolar. Ao analisar a lógica empregada pelo simulador, torna-se possível perceber que a determinação do volume não depende apenas da aplicação mecânica de fórmulas, mas da compreensão das relações geométricas que caracterizam o cone.

Sob a perspectiva da interpretação gráfica, a utilização dessa estratégia de cálculo também auxilia na compreensão do comportamento não linear da curva associada ao enchimento do recipiente. Como a área da seção transversal do cone varia ao longo da altura, a quantidade de líquido necessária para provocar um mesmo incremento vertical não permanece constante durante todo o processo. Consequentemente, a taxa de crescimento da altura do líquido sofre alterações à medida que o enchimento avança,

produzindo um comportamento gráfico característico que pode ser observado tanto na representação bidimensional quanto na visualização tridimensional do simulador. Essa característica reforça o potencial do simulador para o estudo de relações entre grandezas e para a interpretação de situações envolvendo variação, tema central da Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM.

A organização das etapas de cálculo permite identificar com clareza como cada variável é obtida e de que forma os resultados intermediários participam da construção do modelo. Tal característica é importante em pesquisas que envolvem o desenvolvimento de produtos educacionais, uma vez que possibilita documentar o funcionamento interno do artefato e justificar as decisões tomadas durante sua implementação.

A Figura 27 apresenta um trecho do código responsável pela implementação desse procedimento. Nela é possível observar as etapas utilizadas para determinar as dimensões do cone superior não preenchido, calcular seu volume e, posteriormente, obter o volume efetivamente ocupado pelo líquido por meio da diferença entre os volumes considerados.

Figura 27 – Trecho do código que implementa o cálculo do volume do tronco de cone

```
# >>> RELAÇÃO FUNDAMENTAL PARA CONE NORMAL <<<
# Para cone:  $V(h) = (\pi \cdot R^2 \cdot h^3) / (3 \cdot H^2)$  - mas usaremos método numérico
self.tempo += self.dt

# Método numérico: incrementar volume e encontrar altura correspondente
volume_incremento = self.vazao * self.dt * 1000 # Converter L → cm³
volume_atual = self.volume_tronco_cone(self.altura_liquido)
volume_atual += volume_incremento

# Encontrar altura correspondente ao novo volume (método de busca)
# Cone normal: quanto maior a altura, MAIS RÁPIDO sobe (área diminui)
h_tentativa = self.altura_liquido
passo = 0.001 * self.altura

while self.volume_tronco_cone(h_tentativa) < volume_atual and h_tentativa < self.altura:
    h_tentativa += passo

self.altura_liquido = min(h_tentativa, self.altura)

if self.altura_liquido >= self.altura:
    self.altura_liquido = self.altura
    self.rodando = False
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

No processo de enchimento do cone, a principal dificuldade computacional surge no cálculo da altura correspondente a um determinado volume acumulado. Como não há uma expressão algébrica simples que forneça diretamente essa altura, adotou-se um método numérico baseado em incrementos sucessivos. A cada passo

de tempo, o volume é incrementado de acordo com a vazão, e o programa busca a altura correspondente por meio de um procedimento iterativo, avançando em pequenos passos até que o volume calculado se aproxime do volume acumulado, como pode ser observado na Figura 28.

Figura 28 – Trecho do código que implementa o método numérico para determinar a altura do líquido no cone

```
def desenhar_cone_3d(self):
    """Desenha um cone 3D normal (base na parte inferior) com líquido"""
    self.ax_3d.clear()

    # Parâmetros atuais
    R = self.raio_base
    H = self.altura
    h_liquido = self.altura_liquido

    # Resolução para qualidade
    n_theta = 60
    n_r = 30

    # =====
    # 1. CONE VAZIO (PAREDES TRANSPARENTES)
    # =====
    theta = np.linspace(0, 2*np.pi, n_theta)
    z = np.linspace(0, H, n_r)
    theta_grid, z_grid = np.meshgrid(theta, z)

    # Raio diminui linearmente com z (cone normal)
    r_cone = R * (1 - z_grid/H)

    x_cone = r_cone * np.cos(theta_grid)
    y_cone = r_cone * np.sin(theta_grid)

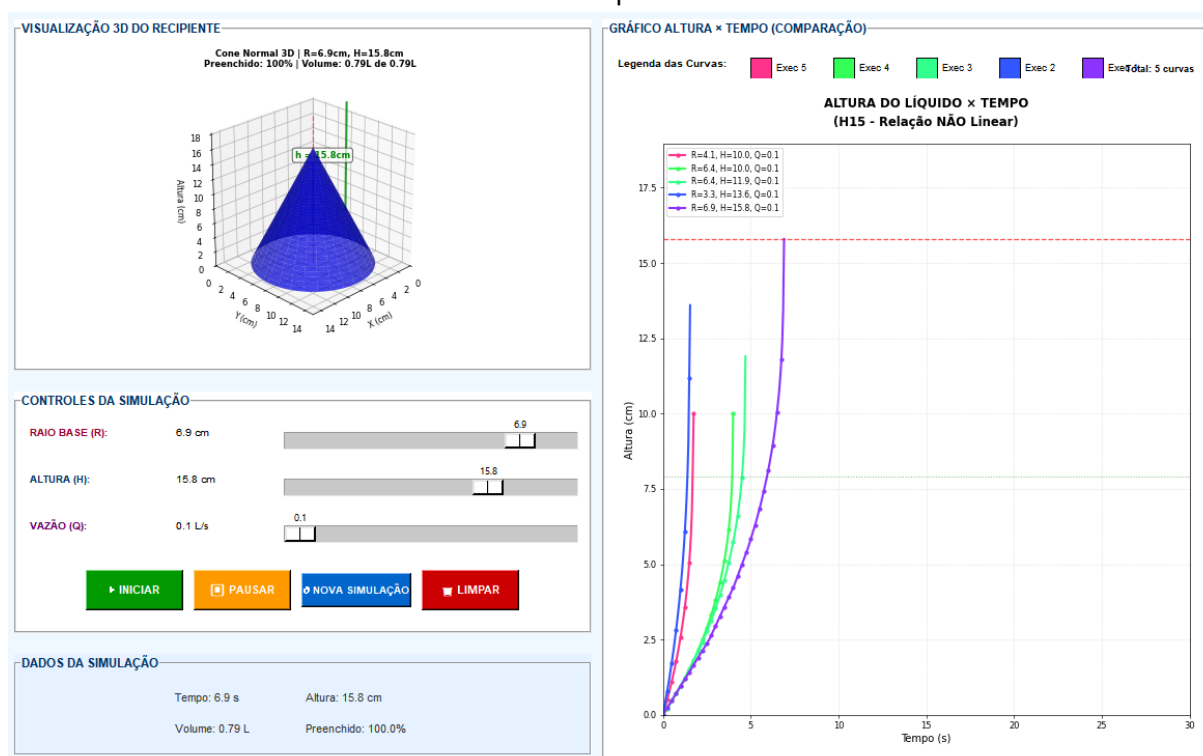
    # Desenhando paredes do cone (transparentes)
    self.ax_3d.plot_surface(x_cone, y_cone, z_grid,
                           alpha=0.08, color='gray', linewidth=0.05)
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Essa estratégia computacional reflete diretamente o comportamento físico do sistema. No cone, à medida que o líquido sobe, a área da seção transversal diminui, o que faz com que a altura passe a aumentar mais rapidamente com o tempo. Esse efeito é capturado pelo método numérico implementado e se manifesta de forma clara no gráfico altura $\times$ tempo, que apresenta uma curvatura característica, distinta das retas observadas nos sólidos anteriores.

A visualização tridimensional do cone foi construída de modo a demonstrar essa variação geométrica. O recipiente é representado com paredes transparentes, enquanto o líquido é desenhado como um sólido cujo raio diminui progressivamente à medida que a altura aumenta. Além disso, foram incluídas linhas de referência e indicações visuais da altura do líquido, de modo a auxiliar o usuário na interpretação do processo de enchimento, como pode ser observado na Figura 29.

Figura 29 – Visualização tridimensional do cone durante o enchimento, com indicação da altura do líquido



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

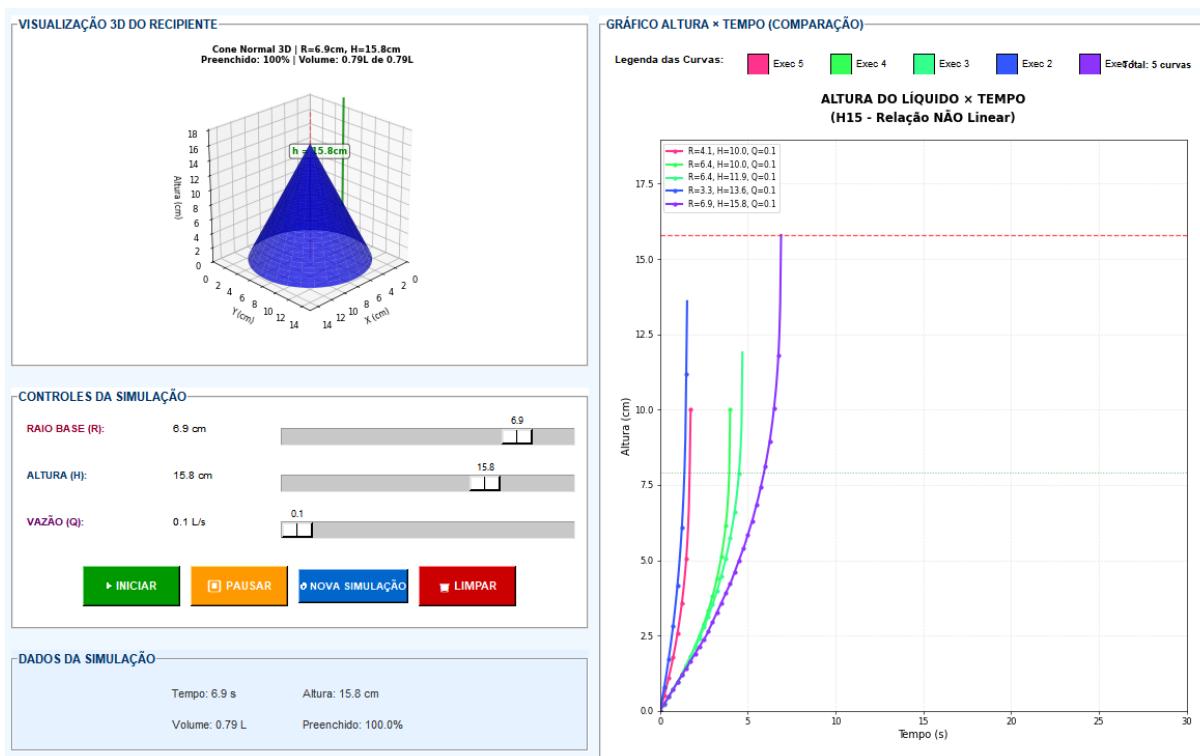
No gráfico que relaciona a altura do líquido ao tempo, o comportamento não linear torna-se claramente perceptível no caso do cone. Diferentemente do paralelepípedo e do cilindro, nos quais a inclinação da reta permanece constante, o gráfico do cone apresenta uma curva cuja inclinação se modifica ao longo do tempo. Nos instantes iniciais, quando a área da seção transversal é maior, a altura do líquido cresce de forma mais lenta; à medida que o enchimento avança e a seção transversal diminui, observa-se um aumento progressivo da inclinação da curva, indicando que a altura passa a crescer mais rapidamente.

Essa característica do gráfico possibilita uma discussão conceitual importante com o estudante, ao mostrar que a taxa de variação da altura não é constante, mesmo quando a vazão é mantida fixa. O simulador permite, assim, explicitar que a forma do recipiente exerce influência direta sobre o comportamento das grandezas envolvidas, rompendo com a ideia intuitiva de que uma vazão constante implica necessariamente

um crescimento uniforme da altura. Essa leitura do gráfico contribui para o desenvolvimento da habilidade de interpretar relações de dependência entre grandezas em contextos não lineares.

Nesse cenário, a funcionalidade de nova simulação assume um papel didático ainda mais relevante. Ao variar o raio da base ou a altura total do cone e realizar novas execuções, o estudante pode comparar diferentes curvas em um mesmo plano cartesiano, observando como mudanças nos parâmetros geométricos afetam tanto o tempo total de enchimento quanto o formato da curva gerada. Essa possibilidade de comparação favorece uma análise mais aprofundada dos gráficos, incentivando o estudante a identificar diferenças de comportamento, justificar essas diferenças a partir da geometria do sólido e estabelecer conexões mais sólidas entre o modelo matemático, a representação gráfica e a situação física simulada, como pode ser observado na Figura 30.

Figura 30 – Interface do simulador do cone com comparação de múltiplas simulações no gráfico altura $\times$ tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

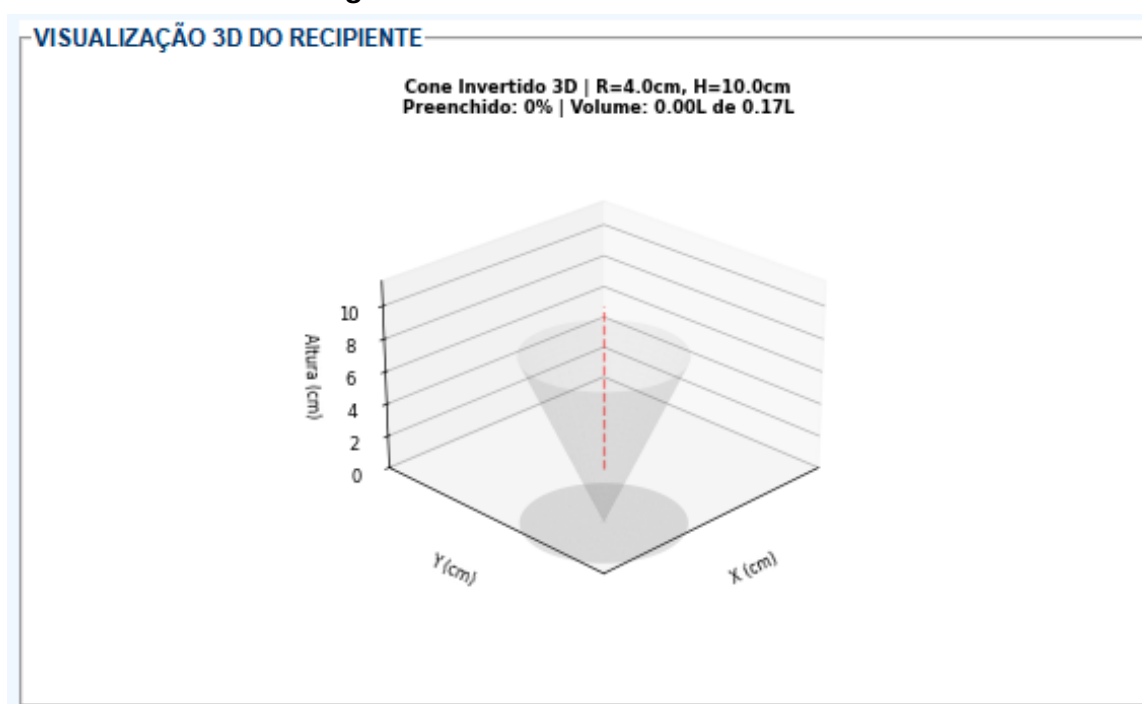
Do ponto de vista didático, a simulação do cone permite explorar a ideia de que gráficos representam resultados e processos dinâmicos. Ao acompanhar o enchimento do recipiente e a construção simultânea do gráfico, o estudante é levado a compreender que a forma da curva está diretamente associada à variação da área da seção transversal ao longo da altura do cone.

Dessa forma, a simulação do cone cumpre um papel importante no SENVG, pois introduz uma situação em que a interpretação da relação entre grandezas exige um nível mais elevado de abstração. Ao contrastar esse comportamento com os casos lineares do paralelepípedo e do cilindro, o ambiente favorece a construção de significados mais consistentes sobre variação de grandezas, em consonância com os objetivos da Habilidade 15.

7.4 Cone Invertido

Após a implementação do cone, desenvolveu-se a simulação do cone invertido, mantendo a organização geral da interface e dos controles, de modo a favorecer a comparação entre os diferentes recipientes. A principal distinção nesse caso está relacionada à geometria do sólido, uma vez que o vértice se encontra na parte inferior e a área da seção transversal aumenta à medida que a altura do líquido cresce, como pode ser observado na Figura 31.

Figura 31 – Tela inicial do cone invertido



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista da modelagem matemática, essa configuração implica que o raio da seção transversal passa a ser uma função crescente da altura. Diferentemente do cone, no qual o raio diminui progressivamente à medida que o líquido se aproxima do vértice superior, no cone invertido ocorre o comportamento oposto: conforme a altura aumenta, a área da seção transversal torna-se cada vez maior. Essa diferença geométrica altera diretamente a dinâmica do enchimento, uma vez que volumes iguais

de líquido passam a produzir incrementos de altura progressivamente menores ao longo do tempo. Essa relação foi incorporada ao código por meio da expressão que define o raio em função da altura do líquido, utilizada tanto nos cálculos de volume quanto na visualização tridimensional do enchimento, permitindo recalcular continuamente o raio correspondente a cada nível de altura, assegurando que o comportamento geométrico do recipiente seja representado de forma coerente durante toda a simulação.

Essa abordagem também possibilitou reutilizar parte da estrutura lógica desenvolvida anteriormente para o cone, adaptando-a às particularidades geométricas do cone invertido. Embora os dois recipientes apresentem relações geométricas semelhantes baseadas na semelhança de triângulos, os efeitos produzidos sobre o gráfico altura $\times$ tempo são substancialmente distintos. Enquanto no cone a inclinação da curva tende a aumentar ao longo do enchimento, no cone invertido ocorre o comportamento inverso, mostrando a influência direta da geometria sobre a taxa de variação da altura do líquido, como pode ser observado na Figura 32.

Figura 32 – Trecho do código responsável pelo cálculo do raio em função da altura

```
def raio_em_altura(self, h):
    """Calcula o raio do cone na altura h (cone invertido: base pequena na parte inferior)"""
    # Para cone invertido: raio aumenta linearmente com a altura
    # Na base inferior (h=0): raio = 0 (vértice)
    # No topo (h=H): raio = R_base
    return self.raio_base * (h/self.altura)

def volume_tronco_cone_invertido(self, h):
    """Volume do tronco de cone invertido de altura h"""
    # Cone invertido: é um cone normal mas com base na parte inferior
    # Volume =  $(\pi \cdot h / 3) \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$ 
    # onde  $r_1 = 0$  (vértice) e  $r_2 =$  raio na altura h

    if h <= 0:
        return 0
    if h >= self.altura:
        return (math.pi * self.raio_base**2 * self.altura) / 3

    # Raio na altura h
    r = self.raio_em_altura(h)

    # Fórmula do tronco de cone:  $V = (\pi \cdot h / 3) \cdot (R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$ 
    # Para cone invertido:  $R_1 = 0$  (vértice),  $R_2 = r$ 
    volume = (math.pi * h / 3) * (0 + 0 * r + r**2)
    return (math.pi * h * r**2) / 3

def volume_total_cone(self):
    """Volume total do cone invertido (mesma fórmula do cone normal)"""
    return (math.pi * self.raio_base**2 * self.altura) / 3
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir da definição da relação entre o raio e a altura, o simulador realiza a atualização contínua do nível do líquido durante o enchimento. O procedimento numérico responsável por esse processo pode ser observado na Figura 33.

Figura 33 – Trecho do código responsável pela atualização numérica da altura

```
def iniciar_simulacao(self):
    if not self.rodando:
        self.rodando = True

        # Gerar nova cor para esta execução
        cor_grafico = random.choice(self.cores_grafico)

        # Iniciar nova execução
        self.execucao_atual = {
            'tempo': [],
            'altura': [],
            'cor': cor_grafico,
            'params': {'raio': self.raio_base, 'altura': self.altura, 'vazao': self.vazao},
            'label': f"R={self.raio_base:.1f}, H={self.altura:.1f}, Q={self.vazao:.1f}"
        }

        self.executar_simulacao()

def pausar_simulacao(self):
    self.rodando = False

def nova_curva(self):
    """Inicia uma nova curva mantendo as anteriores"""
    self.rodando = False
    self.tempo = 0.0
    self.altura_liquido = 0.0
    self.volume_total = 0.0

    # Salvar execução atual se existir
    if self.execucao_atual and len(self.execucao_atual['tempo']) > 0:
        self.execucoes.append(self.execucao_atual)
        self.execucao_atual = None

    # Resetar líquido no 3D
    self.desenhar_cone_invertido_3d()

    # Atualizar dados
    self.atualizar_displays()

    # Atualizar gráfico (mostrar todas as curvas)
    self.configurar_grafico()
    self.atualizar_legenda()

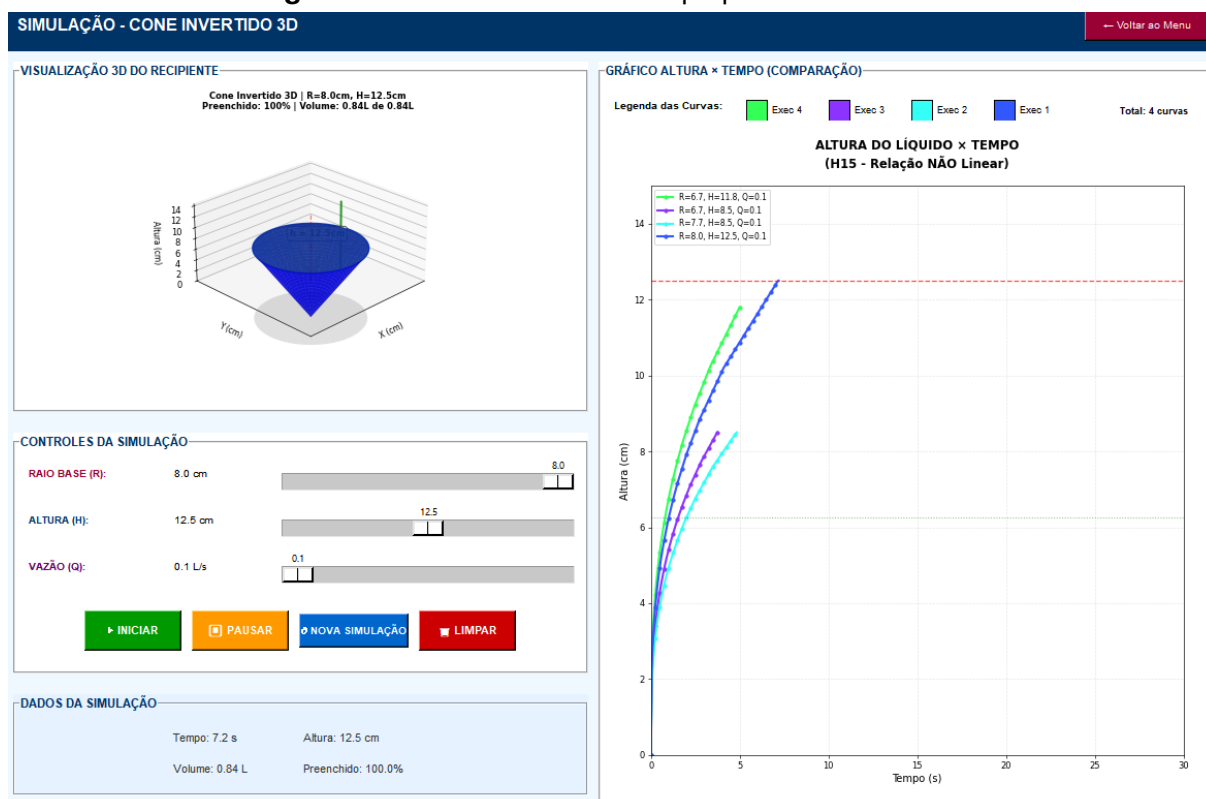
def limpar_grafico(self):
    """Limpa todas as curvas do gráfico"""
    self.execucoes = []
    self.execucao_atual = None
    self.configurar_grafico()
    self.atualizar_legenda()

def executar_simulacao(self):
    if not self.rodando or (self.altura_liquido >= self.altura and self.execucao_atual):
        # Finalizar execução atual
        if self.execucao_atual and len(self.execucao_atual['tempo']) > 0:
            self.execucoes.append(self.execucao_atual)
            self.execucao_atual = None
            self.configurar_grafico()
            self.atualizar_legenda()
        return
```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Em seguida é apresentada a interface do simulador durante a execução de diferentes experimentos com o cone invertido, mantendo-se inicialmente a altura do recipiente e variando-se o raio da base superior. Observa-se que, à medida que o raio aumenta, as curvas no gráfico altura $\times$ tempo tornam-se progressivamente mais afastadas, indicando que, para recipientes mais largos, o crescimento da altura ocorre de forma mais lenta ao longo do tempo, como pode ser observado na Figura 34.

Figura 34 – Gráfico altura $\times$ tempo para cone invertido



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Esse comportamento possibilita o entendimento de que o aumento da área da seção transversal reduz a taxa de variação da altura do líquido, mesmo com vazão constante. A permanência das curvas anteriores no gráfico permite ao aluno comparar visualmente essas situações, favorecendo a interpretação da relação entre as grandezas envolvidas.

Na sequência, ao fixar o maior valor disponível para o raio da base e alterar a altura do cone de 10 cm para 15 cm, observa-se uma mudança significativa no comportamento do gráfico. Diferentemente do que ocorre quando apenas o raio é aumentado, a elevação da altura total do recipiente modifica o domínio vertical da simulação, fazendo com que a curva deixe de se afastar progressivamente e passe a apresentar um crescimento mais acentuado da altura ao longo do tempo.

Esse resultado reforça a ideia de que a forma do gráfico depende da interação entre a geometria do sólido e suas dimensões. No contexto didático, essa situação

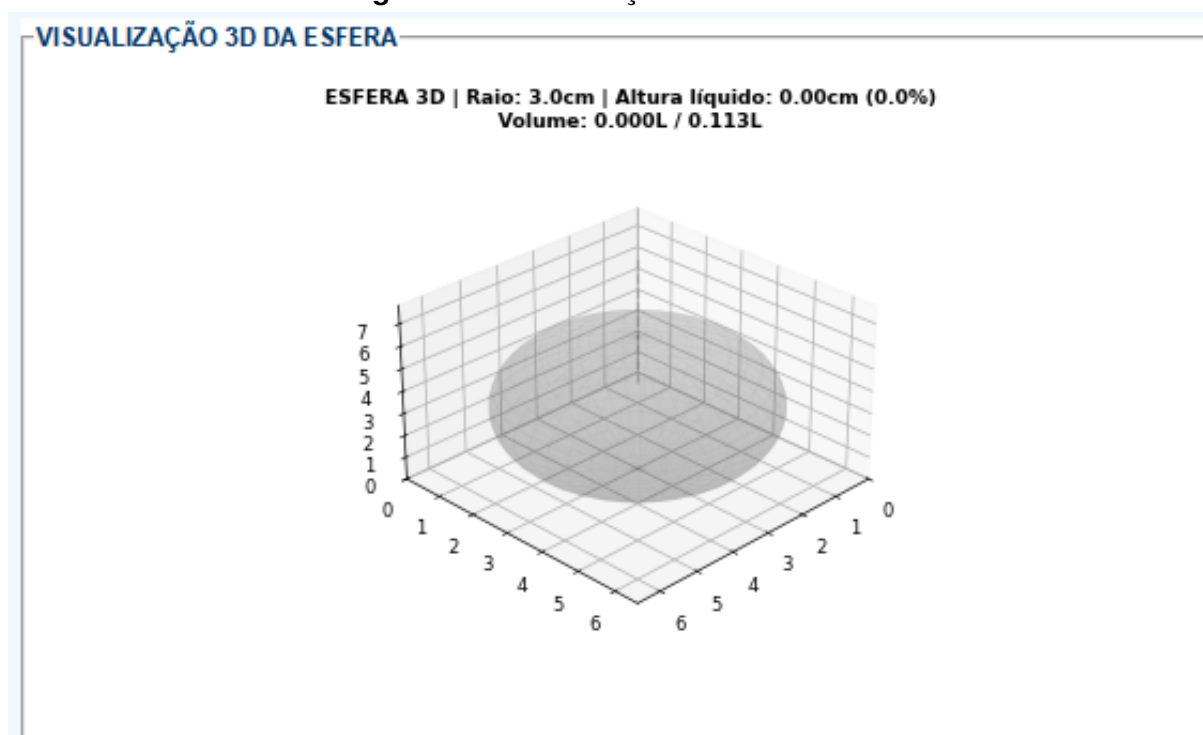
é particularmente relevante, pois permite ao aluno perceber que alterações distintas nos parâmetros geométricos produzem efeitos diferentes no comportamento do gráfico, mesmo quando o tipo de recipiente permanece o mesmo.

7.5 Esfera

A simulação da esfera foi concebida como a etapa mais complexa do simulador, tanto do ponto de vista matemático quanto computacional. Diferentemente dos recipientes anteriormente analisados, a esfera apresenta uma variação contínua da área da seção transversal ao longo de toda a altura, o que implica um comportamento não linear da relação entre a altura do líquido e o tempo de enchimento.

Na modelagem adotada, considerou-se a esfera apoiada sobre uma base plana, de modo que o enchimento ocorre a partir da região inferior até atingir a altura máxima correspondente ao diâmetro do sólido. Nessa configuração, a variável altura do líquido assume valores no intervalo de zero até duas vezes o raio da esfera, o que exigiu cuidados adicionais na implementação da simulação, como pode ser observado na Figura 35.

Figura 35 – Visualização inicial da esfera



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista matemático, o volume do líquido em função da altura foi calculado a partir da expressão clássica do volume do segmento esférico. Essa relação permite determinar, para cada altura do líquido, o volume correspondente, levando em conta a geometria específica da esfera, como pode ser observado na Figura 36.

Figura 36 – Trecho do código responsável pelo cálculo do volume do segmento esférico

```

def volume_segmento_esferico(self, h):
    """Volume do segmento esférico de altura h"""
    R = self.raio
    if h <= 0:
        return 0
    return (math.pi * h**2 * (3*R - h)) / 3

def volume_total_esfera(self):
    """Volume total da esfera"""
    return (4/3) * math.pi * self.raio**3

def calcular_raio_circulo(self, y):
    """Raio do círculo na altura y"""
    R = self.raio
    radicando = 2 * R * y - y**2
    if radicando < 0:
        return 0
    return math.sqrt(radicando)

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Além do cálculo do volume, foi necessário determinar o raio da seção circular do líquido em cada altura, uma vez que a visualização tridimensional depende dessa informação. Essa relação foi implementada a partir da equação que define o raio do círculo obtido pela interseção de um plano horizontal com a esfera, em função da altura medida a partir da base.

A visualização tridimensional da esfera exigiu uma abordagem distinta daquela adotada nos demais sólidos simulados no SENVG. Enquanto no cilindro e nos cones o líquido pode ser representado por superfícies laterais relativamente simples, definidas por seções transversais constantes ou linearmente variáveis, na esfera a geometria impõe uma variação contínua e não linear da seção transversal ao longo da altura.

Em razão disso, o volume do líquido não pode ser representado por uma única superfície contínua de fácil parametrização. Optou-se, então, pela construção do volume por meio da justaposição de múltiplas fatias horizontais sucessivas, cada uma associada a um raio específico calculado em função da altura considerada. Esse procedimento possibilita uma representação visual mais fiel do processo de enchimento da esfera, ao mesmo tempo em que mantém a coerência entre o modelo matemático adotado no código e a visualização apresentada ao usuário, como pode ser observado na Figura 37.

Figura 37 – Trecho do código responsável pela construção do líquido na visualização 3D da esfera

```
def executar_simulacao(self):
    """Executa passo da simulação"""
    if not self.rodando:
        return

    # Verificar se atingiu altura máxima
    if self.altura_liquido >= 2 * self.raio:
        self.rodando = False
        if self.execucao_atual and len(self.execucao_atual['tempo']) > 0:
            self.execucoes.append(self.execucao_atual)
            self.execucao_atual = None
            self.atualizar_grafico()
            self.atualizar_legenda_visual()
        return

    # Atualizar parâmetros dos sliders
    self.raio = self.raio_var.get()
    self.vazao = self.vazao_var.get()

    # Algoritmo de simulação (método VPython)
    self.tempo += self.dt
    self.volume_atual += self.vazao * self.dt * 1000 # L → cm³

    # Encontrar altura h (método incremental como VPython)
    passo_h = 0.001 * self.raio # Passo proporcional ao raio
    while (self.volume_segmento_esferico(self.altura_liquido) < self.volume_atual and
           self.altura_liquido < 2*self.raio):
        self.altura_liquido += passo_h

    self.altura_liquido = min(self.altura_liquido, 2*self.raio)

    # Adicionar ponto ao gráfico
    if self.execucao_atual:
        self.execucao_atual['tempo'].append(self.tempo)
        self.execucao_atual['altura'].append(self.altura_liquido)
```

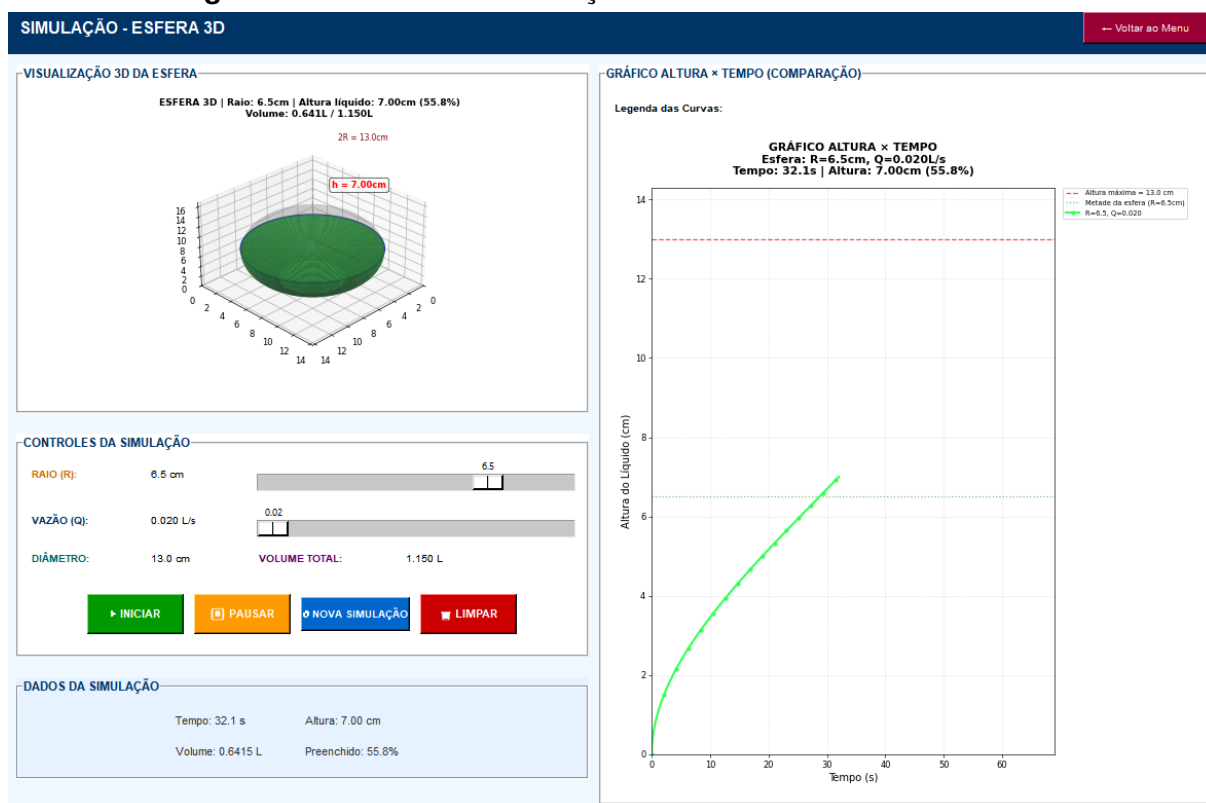
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A interface do simulador durante a execução da simulação da esfera mostra o crescimento progressivo do líquido no interior do recipiente e a atualização simultânea do gráfico que relaciona a altura do líquido ao tempo. Na visualização tridimensional, a esfera é representada com paredes transparentes, permitindo observar o volume ocupado pelo líquido à medida que a altura aumenta a partir da base. Essa representação favorece a associação entre o comportamento geométrico do recipiente e a forma assumida pela curva no gráfico, destacando o caráter não linear da relação entre as grandezas envolvidas.

A seguir é apresentada a tela com controles que permitem ao usuário ajustar os parâmetros da simulação, como o raio da esfera e a vazão do líquido, antes ou

durante a execução. Os botões de controle possibilitam iniciar, pausar e reiniciar a simulação, bem como realizar novas execuções mantendo os gráficos anteriormente gerados para fins de comparação. Essa organização da interface contribui para uma exploração mais sistemática do fenômeno, permitindo ao estudante observar como alterações nas dimensões da esfera influenciam o tempo de enchimento e o formato do gráfico altura $\times$ tempo, reforçando a compreensão da dependência entre as grandezas físicas e geométricas modeladas no simulador, como pode ser observado na Figura 39.

Figura 38 – Interface da simulação da esfera durante o enchimento



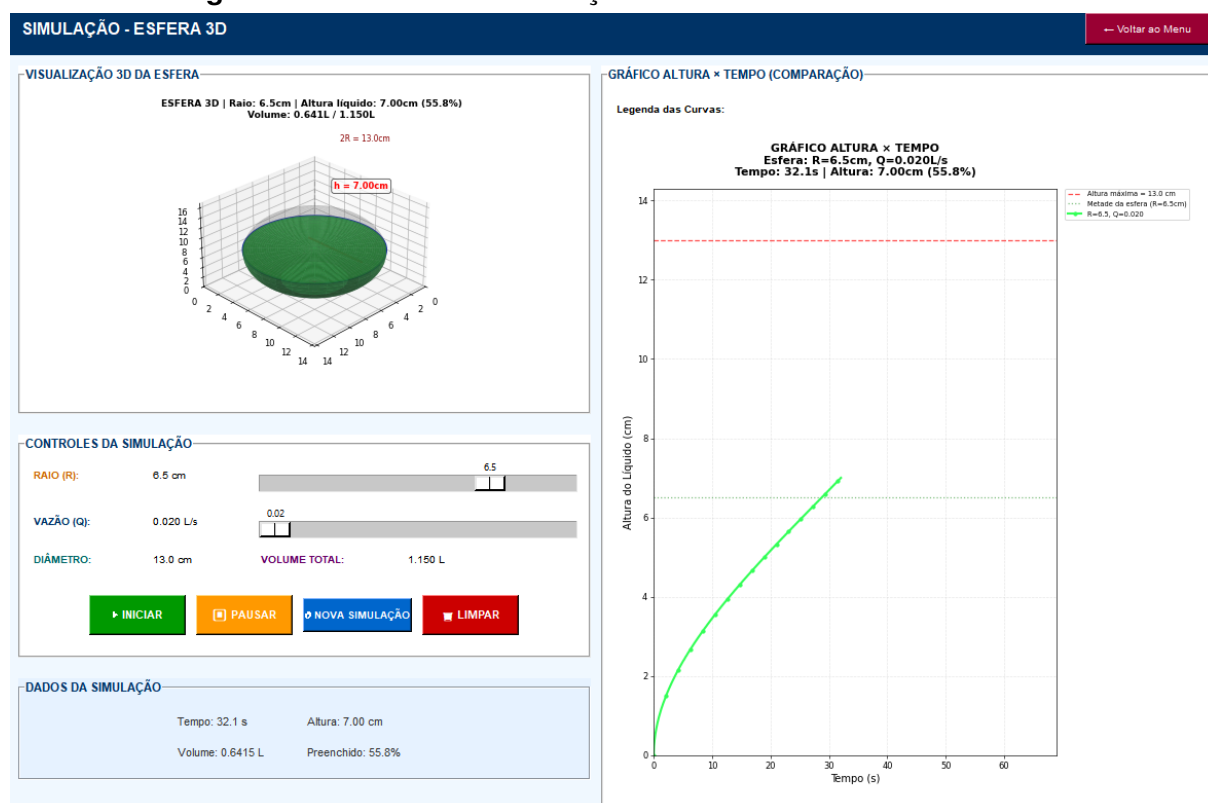
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A interface do simulador durante a execução da simulação da esfera destaca o crescimento progressivo do líquido no interior do recipiente e a atualização simultânea do gráfico que relaciona a altura do líquido ao tempo. Na visualização tridimensional, a esfera é representada com paredes transparentes, permitindo observar o volume ocupado pelo líquido à medida que a altura aumenta a partir da base. Essa representação favorece a associação entre o comportamento geométrico do recipiente e a forma assumida pela curva no gráfico, destacando o caráter não linear da relação entre as grandezas envolvidas.

A seguir é apresentada a tela com controles que permitem ao usuário ajustar os parâmetros da simulação, como o raio da esfera e a vazão do líquido, antes ou durante a execução. Os botões de controle possibilitam iniciar, pausar e reiniciar a simulação, bem como realizar novas execuções mantendo os gráficos anteriormente

gerados para fins de comparação. Essa organização da interface contribui para uma exploração mais sistemática do fenômeno, permitindo ao estudante observar como alterações nas dimensões da esfera influenciam o tempo de enchimento e o formato do gráfico altura $\times$ tempo, reforçando a compreensão da dependência entre as grandezas físicas e geométricas modeladas no simulador, como pode ser observado na Figura 39.

Figura 39 – Interface da simulação da esfera durante o enchimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Outro aspecto explorado na simulação diz respeito à variação do raio da esfera. Ao modificar o valor do raio e manter a vazão constante, observa-se que o tempo total de enchimento aumenta significativamente, assim como a forma da curva se torna mais “achatada” ao longo do tempo. Esse efeito mostra a influência direta do volume total do recipiente na relação entre as grandezas envolvidas.

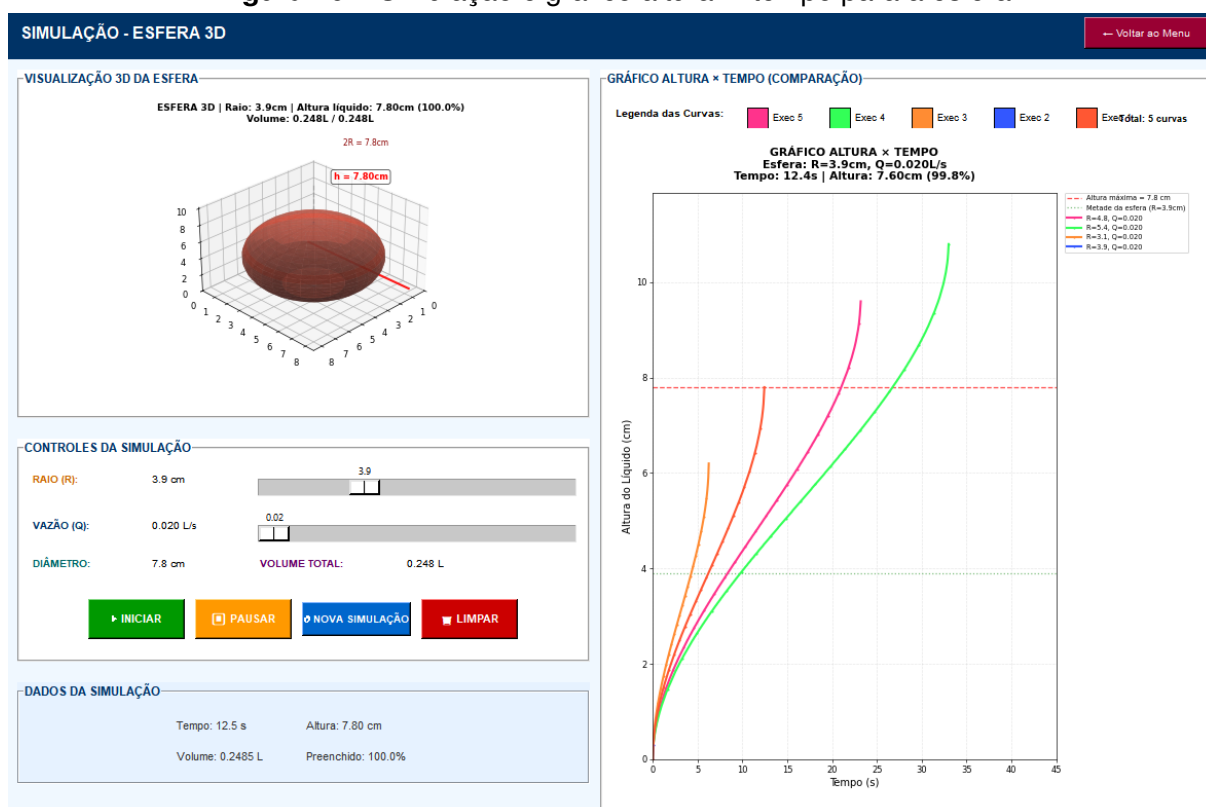
Além disso, o simulador permite a sobreposição de múltiplas execuções no mesmo gráfico. Ao utilizar o comando de nova execução, o recipiente é esvaziado, mas as curvas anteriores permanecem visíveis, possibilitando a comparação entre diferentes configurações de raio e vazão. Essa funcionalidade foi mantida intencionalmente, pois favorece a análise comparativa e a interpretação gráfica, aspectos centrais da Habilidade 15.

Do ponto de vista didático, a simulação da esfera constitui um momento privilegiado para discutir com os alunos situações em que a relação entre grandezas não pode ser descrita por funções lineares simples. A visualização simultânea do processo físico,

do modelo geométrico e do gráfico contribui para que o estudante compreenda que a forma do recipiente é um fator determinante no comportamento da variação da altura ao longo do tempo.

A simulação da esfera destaca ainda mais a complexidade da relação entre volume e altura, resultando em curvas não lineares que variam significativamente ao longo do tempo. Esse caso permite explorar a interpretação qualitativa de gráficos e a relação entre seções transversais e volume acumulado, como pode ser observado na Figura 40.

Figura 40 – Simulação e gráfico altura $\times$ tempo para a esfera



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

O simulador desenvolvido articula, de forma integrada, a modelagem matemática, a implementação computacional e a representação gráfica de fenômenos envolvendo a variação da altura do líquido em recipientes de diferentes geometrias. Ao permitir a manipulação direta de parâmetros como dimensões geométricas e vazão, o ambiente favorece a exploração de relações entre grandezas e a interpretação de gráficos altura $\times$ tempo, elementos centrais da Habilidade 15. A presença simultânea da visualização tridimensional e do gráfico possibilita ao estudante estabelecer conexões entre a forma do recipiente, o comportamento do enchimento e a representação gráfica correspondente.

Outro aspecto relevante do simulador consiste na possibilidade de realização de múltiplas execuções sucessivas, mantendo os resultados anteriores no plano cartesiano.

Essa funcionalidade amplia o potencial investigativo da ferramenta, pois permite a comparação direta entre diferentes configurações de um mesmo recipiente ou entre recipientes distintos. Ao observar a sobreposição ou o afastamento das curvas no gráfico, o aluno é levado a refletir sobre como alterações nas dimensões geométricas influenciam a taxa de crescimento da altura do líquido, favorecendo uma leitura mais qualitativa e interpretativa dos gráficos.

A organização do simulador em classes específicas para cada sólido geométrico contribui tanto para a clareza da implementação quanto para a coerência didática do produto. Cada classe encapsula as particularidades matemáticas do recipiente analisado, preservando uma lógica comum de funcionamento da interface e dos controles. Essa estrutura permite que o foco da análise recaia sobre as diferenças conceituais entre os sólidos, e não sobre mudanças arbitrárias na forma de interação com o software.

Do ponto de vista pedagógico, o simulador favorece uma abordagem exploratória do conteúdo, na qual o aluno pode formular hipóteses, testá-las por meio de simulações e confrontar os resultados obtidos com suas expectativas iniciais. O controle do ritmo da simulação, por meio dos botões de iniciar, pausar e reiniciar a execução, permite que o processo de enchimento seja observado em diferentes escalas temporais, ajustando-se às necessidades da atividade didática proposta.

7.6 Questões do ENEM no SENVG

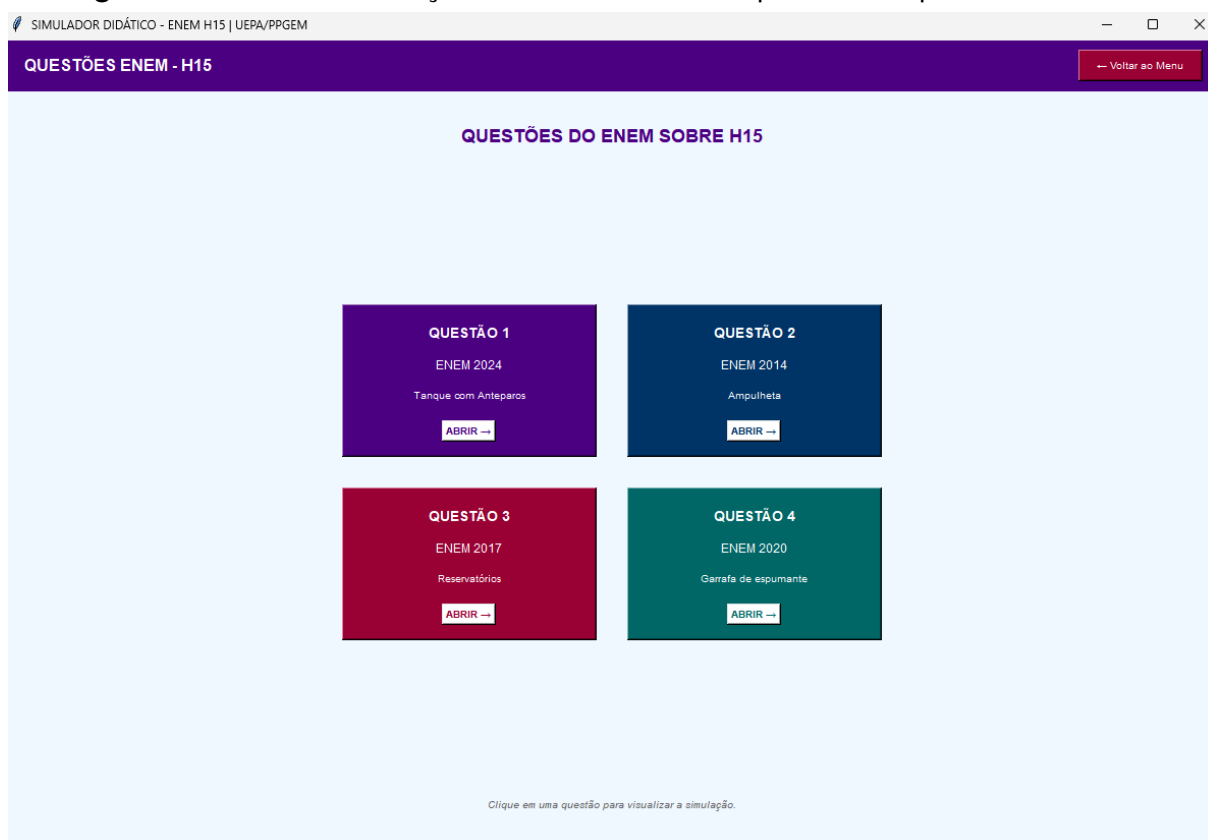
Após a implementação das simulações envolvendo sólidos geométricos isolados, foram incorporadas ao SENVG situações contextualizadas inspiradas em questões reais do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Essa ampliação do simulador ocorreu posteriormente ao processo inicial de desenvolvimento do software e foi motivada pelas discussões realizadas durante a banca de qualificação da pesquisa, na qual se destacou a importância de aproximar o ambiente das situações efetivamente encontradas pelos estudantes em avaliações externas.

A inclusão dessas questões teve como objetivo ampliar o potencial didático do simulador, permitindo que os conceitos explorados anteriormente em recipientes geométricos específicos fossem mobilizados em contextos mais complexos e estruturalmente distintos. Enquanto as primeiras simulações focalizavam sólidos individuais, como paralelepípedos, cilindros, cones e esferas, as situações contextualizadas passaram a envolver recipientes compostos, mudanças de regime de enchimento, variações abruptas da área transversal e combinações entre diferentes comportamentos geométricos.

Para possibilitar o acesso a essas atividades, foi desenvolvido um menu específico denominado “Questões ENEM - H15”, no qual o usuário pode selecionar

diretamente as situações contextualizadas disponíveis no simulador. Essa organização foi concebida de modo a diferenciar as simulações exploratórias dos sólidos geométricos das atividades inspiradas em questões reais do ENEM, preservando a coerência estrutural do ambiente e favorecendo uma navegação mais intuitiva. A interface inicial desse módulo pode ser observada na Figura 41.

Figura 41 – Menu das situações contextualizadas inspiradas em questões do ENEM



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista matemático, essas situações possibilitam aprofundar a análise da relação entre área transversal e taxa de variação da altura do líquido. Em todas as questões implementadas, manteve-se a condição de vazão constante, de modo que as alterações observadas nos gráficos decorrem exclusivamente das mudanças geométricas do sistema modelado. Dessa forma, o simulador permite observar que o comportamento gráfico depende, principalmente, da forma como a área disponível para ocupação do líquido varia ao longo da altura.

Sob o aspecto computacional, a implementação dessas situações exigiu uma reorganização parcial da estrutura do simulador. Diferentemente das simulações anteriores, nas quais os parâmetros geométricos podiam ser livremente alterados pelo usuário, as questões contextualizadas passaram a operar com configurações previamente definidas, reproduzindo situações específicas inspiradas nos itens do ENEM. Em razão disso, cada questão foi implementada por meio de uma classe

própria, responsável por controlar tanto os cálculos matemáticos quanto a atualização da visualização tridimensional e do gráfico correspondente.

Além disso, a implementação dessas situações demandou o desenvolvimento de modelos híbridos, nos quais diferentes comportamentos geométricos passaram a coexistir em uma mesma simulação. Em alguns casos, o enchimento ocorre em regiões distintas do recipiente ao longo do tempo, produzindo mudanças abruptas na inclinação da curva; em outros, a própria geometria do sólido provoca alterações graduais na taxa de crescimento da altura. Essa diversidade de comportamentos exigiu adaptações específicas nos algoritmos responsáveis pelo cálculo da altura do líquido e pela atualização dinâmica das representações gráficas.

Outro aspecto importante da implementação consistiu na preservação da coerência visual e operacional do ambiente. Embora as situações contextualizadas apresentem estruturas matemáticas mais complexas, manteve-se a mesma lógica de funcionamento utilizada nas simulações anteriores, permitindo ao usuário acompanhar simultaneamente a visualização tridimensional do sistema e o gráfico correspondente. Essa continuidade estrutural foi importante para que a atenção do estudante permanecesse concentrada na interpretação das relações entre grandezas, e não na aprendizagem de novos mecanismos de interação com o software.

As situações contextualizadas implementadas no SENVG envolvem diferentes tipos de comportamento gráfico. Algumas delas apresentam mudanças abruptas de taxa, associadas à alteração repentina da área transversal efetiva do sistema, como ocorre em reservatórios interligados ou recipientes com anteparos internos. Outras produzem curvas compostas por trechos lineares e não lineares, resultantes da combinação entre sólidos geométricos distintos em um mesmo recipiente, como ocorre na simulação da escultura em formato de ampulheta e no modelo de envasamento de espumantes.

Do ponto de vista didático, essas situações ampliam significativamente o potencial investigativo do simulador. Ao interpretar gráficos produzidos por sistemas compostos, o estudante precisa mobilizar conhecimentos construídos nas explorações anteriores e relacioná-los a novas estruturas geométricas e novos regimes de funcionamento. Essa articulação favorece uma compreensão mais abrangente da Habilidade 15, especialmente no que se refere à interpretação qualitativa de gráficos envolvendo relações não lineares e mudanças de comportamento ao longo do processo analisado.

Nas subseções seguintes, serão apresentadas as situações contextualizadas implementadas no SENVG, descrevendo-se tanto os princípios matemáticos envolvidos em cada modelo quanto as estratégias computacionais utilizadas em sua implementação.

7.6.1 Questão 161 da prova azul do segundo dia do ENEM 2024

A implementação da Questão 161 da prova azul do segundo dia do ENEM 2024 no SENVG exigiu a ampliação dos conceitos explorados anteriormente na simulação do paralelepípedo. Enquanto no modelo inicial o recipiente apresentava uma única área de base constante durante todo o enchimento, nessa questão tornou-se necessário considerar diferentes regiões internas do tanque, delimitadas por anteparos verticais que alteram a área efetivamente ocupada pela água ao longo do processo.

Do ponto de vista matemático, a questão mantém como fundamento a relação entre vazão, volume acumulado e área transversal do recipiente. Entretanto, diferentemente do paralelepípedo simples, a área disponível para ocupação da água deixa de permanecer constante durante todo o enchimento. Nos instantes iniciais, a água ocupa apenas uma região mais estreita do tanque, fazendo com que a altura cresça rapidamente. À medida que o líquido ultrapassa os anteparos internos, novas regiões passam a ser preenchidas, aumentando a área disponível e alterando a taxa de crescimento da altura máxima da coluna líquida.

Essa característica faz com que o gráfico altura $\times$ tempo apresente mudanças abruptas de inclinação. Em determinados intervalos, a altura cresce rapidamente; em outros, o crescimento torna-se mais lento ou até temporariamente constante. Assim, a questão mobiliza diretamente a compreensão desenvolvida anteriormente nas simulações do paralelepípedo, especialmente no que se refere à relação entre área da base e inclinação da reta no gráfico cartesiano.

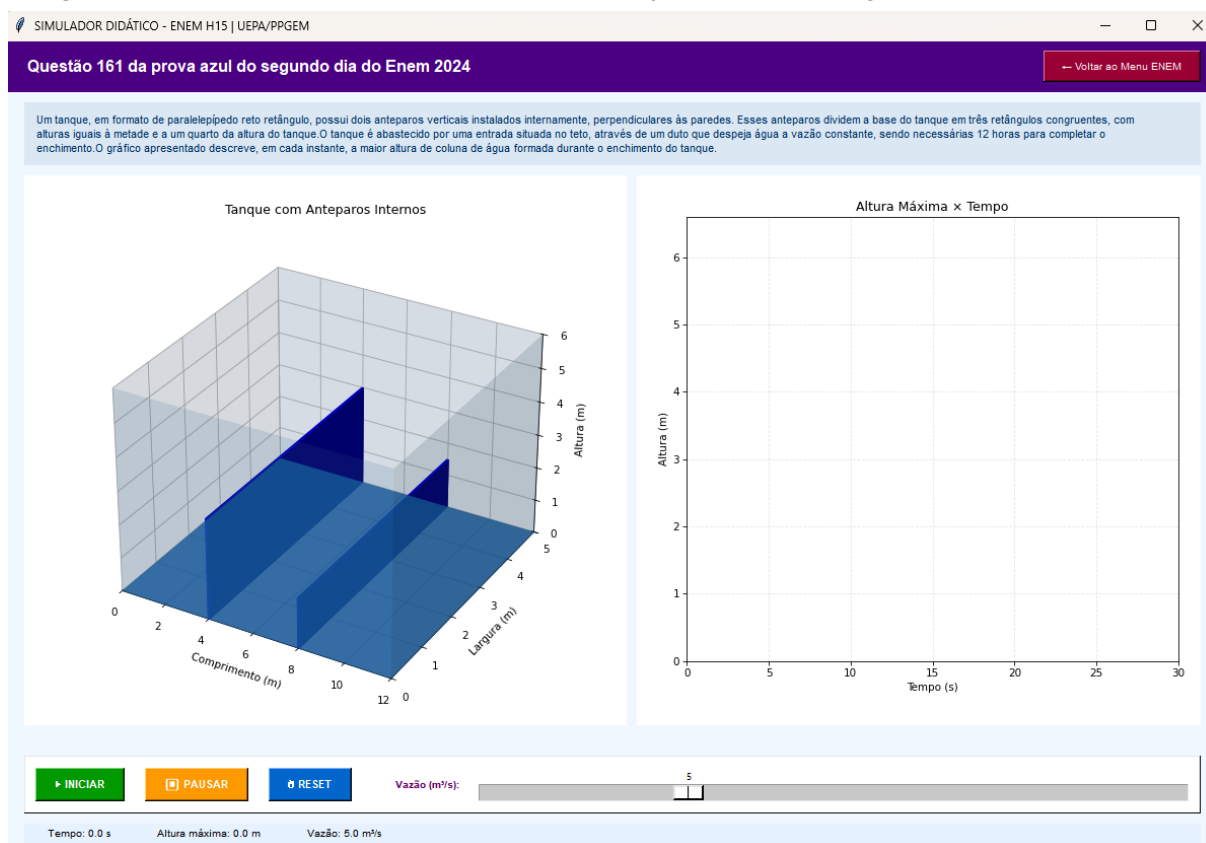
Na implementação computacional da questão, utilizou-se como base a mesma lógica matemática presente na simulação do paralelepípedo. O algoritmo calcula continuamente a razão entre a vazão e a área efetivamente ocupada pela água em cada instante da simulação. Entretanto, nesse caso, a área transversal deixa de ser fixa e passa a depender da região do tanque que está sendo preenchida naquele momento.

Para representar esse comportamento, o programa foi estruturado em etapas de enchimento. Inicialmente, a água ocupa apenas uma região do tanque delimitada pelos anteparos internos, produzindo crescimento acelerado da altura máxima. Quando o nível da água atinge a altura dos anteparos, ocorre uma redistribuição do líquido para outras regiões do reservatório. Nesse instante, a área transversal efetiva aumenta abruptamente, reduzindo a taxa de crescimento da altura e modificando imediatamente a inclinação da curva apresentada no gráfico.

Essa lógica computacional permitiu representar, de forma consistente, o comportamento esperado na questão original do ENEM. A implementação preserva a ideia central de que recipientes com áreas menores produzem crescimento mais rápido da altura, enquanto áreas maiores resultam em crescimento mais lento. Assim, o estudante é levado a mobilizar os conhecimentos construídos anteriormente no estudo do paralelepípedo para interpretar agora um sistema geometricamente mais complexo.

A Figura 42 apresenta a interface inicial da simulação, mostrando a estrutura interna do tanque e os anteparos responsáveis pelas mudanças de comportamento durante o enchimento.

Figura 42 – Interface inicial da Questão 161 da prova azul do segundo dia do ENEM 2024



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

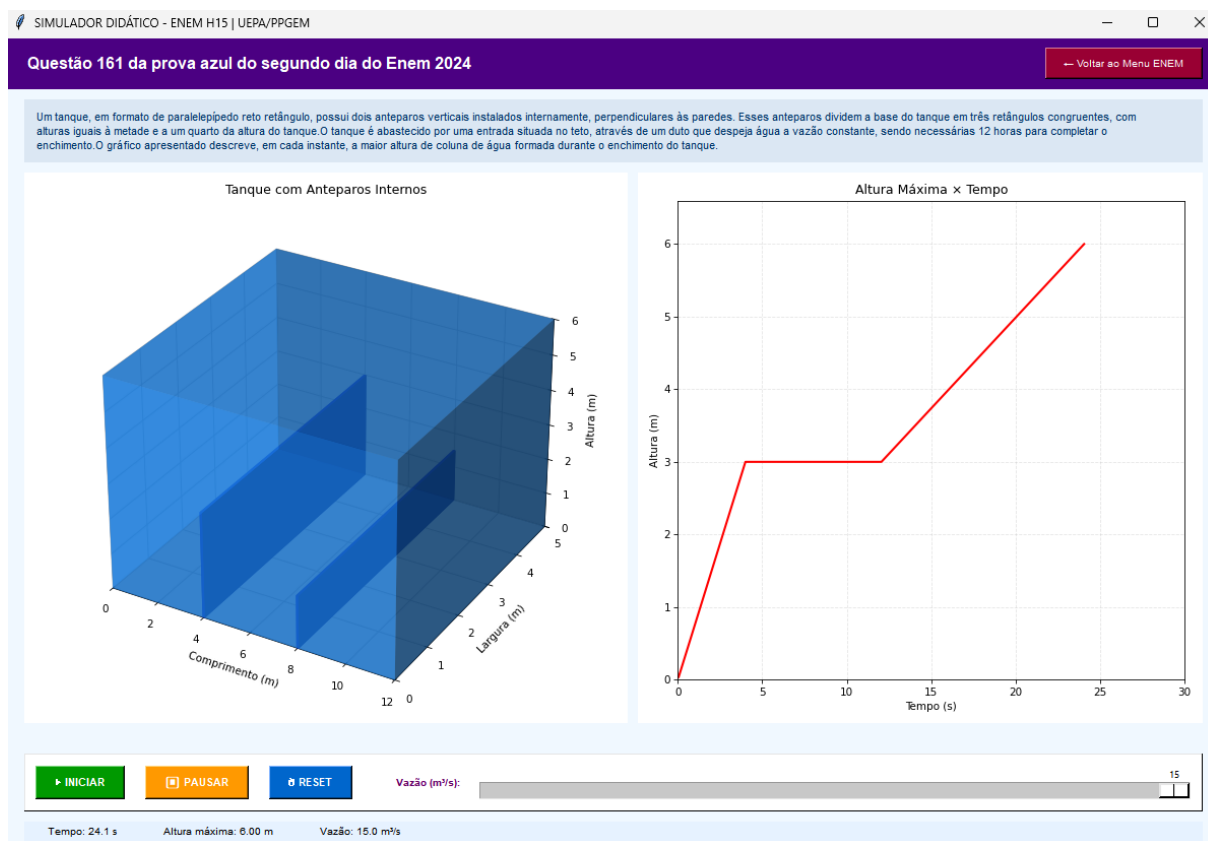
Durante a execução da simulação, o enchimento do tanque e a construção do gráfico são atualizados simultaneamente. À medida que a água ultrapassa os anteparos internos, o simulador recalcula automaticamente a área transversal efetiva associada ao crescimento da altura máxima da coluna líquida. Como consequência, o gráfico passa a apresentar mudanças abruptas de inclinação, mostrando que a taxa de variação da altura depende diretamente da geometria interna do recipiente.

A representação simultânea do tanque e do gráfico favorece a interpretação qualitativa da situação proposta no ENEM, permitindo que o estudante associe cada alteração observada na curva às transformações físicas ocorridas no interior do reservatório. Dessa forma, o simulador possibilita compreender que o gráfico não representa apenas uma relação abstrata entre variáveis, mas o resultado direto das mudanças geométricas presentes no sistema modelado.

A Figura 43 apresenta a simulação em execução, mostrando o comportamento do gráfico gerado durante o enchimento do tanque desde o primeiro momento da

partida do enchimento até a forma final do gráfico de acordo com as opções disponíveis na prova do respectivo ano.

Figura 43 – Execução da Questão 161 do ENEM 2024 com geração do gráfico altura $\times$ tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista didático, essa questão amplia significativamente a complexidade das interpretações realizadas anteriormente no estudo do paralelepípedo. O estudante deixa de analisar apenas recipientes com comportamento linear uniforme e passa a interpretar sistemas nos quais mudanças geométricas internas produzem alterações distintas na taxa de crescimento da altura. Assim, o simulador favorece a construção de uma compreensão mais aprofundada das relações entre grandezas, permitindo interpretar gráficos como representações dinâmicas diretamente associadas à estrutura física do sistema analisado.

7.6.2 Questão 143 da prova azul do segundo dia do ENEM 2014

A implementação da Questão 143 da prova azul do segundo dia do ENEM 2014 no SENVG exigiu a articulação entre diferentes comportamentos geométricos já explorados anteriormente nas simulações do cone e do cilindro. A questão descreve o enchimento de uma escultura transparente inspirada em uma ampulheta, composta por três partes de mesma altura: dois troncos de cone e uma região cilíndrica central.

Do ponto de vista matemático, essa questão mobiliza a interpretação da relação entre vazão constante e variação da área transversal ao longo da altura do recipiente. Diferentemente das situações anteriores, nas quais um único sólido determinava todo o comportamento do gráfico, nessa questão o enchimento ocorre em regiões geometricamente distintas, fazendo com que a taxa de crescimento da altura varie continuamente durante o processo, tendo uma região cilíndrica e outras duas na forma de cone mas apresentando um comportamento invertido uma da outra.

Nos troncos de cone localizados nas extremidades da escultura, a área transversal varia ao longo da altura, produzindo comportamento não linear semelhante ao explorado anteriormente nas simulações dos cones. Já na região central cilíndrica, a área permanece constante, fazendo com que a altura cresça linearmente em função do tempo. Dessa forma, a questão exige que o estudante mobilize simultaneamente os conhecimentos construídos nas simulações anteriores para interpretar um gráfico composto por diferentes regimes de crescimento.

A implementação computacional dessa questão exigiu a divisão da escultura em três regiões geométricas distintas. O algoritmo foi estruturado de modo a identificar continuamente em qual região o nível do líquido se encontra durante o enchimento. A partir dessa identificação, o simulador aplica o modelo matemático correspondente à geometria ativa naquele instante, alternando entre os cálculos associados ao tronco de cone e ao cilindro conforme o avanço da altura do líquido.

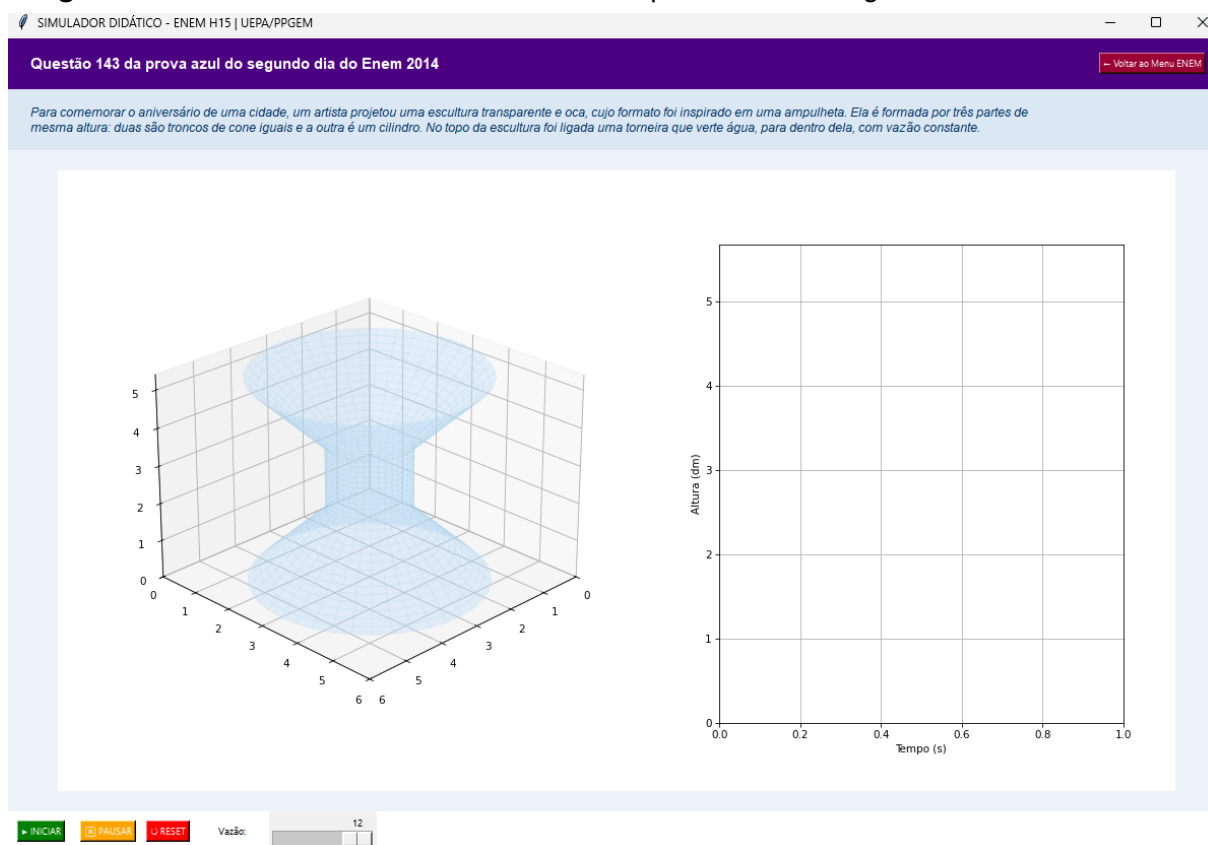
Na região inferior da ampulheta, o recipiente apresenta comportamento semelhante ao cone invertido. À medida que o líquido sobe, a área transversal diminui progressivamente, fazendo com que a altura cresça cada vez mais rapidamente. Esse comportamento produz uma curva com inclinação crescente no gráfico altura $\times$ tempo. Ao atingir a região central cilíndrica, a área transversal passa a permanecer constante, fazendo com que a curva assuma comportamento linear temporário. Finalmente, na região superior, o recipiente volta a apresentar geometria semelhante à de um cone, agora com aumento gradual da área transversal, reduzindo novamente a taxa de crescimento da altura.

Essa mudança sucessiva de comportamento constitui um dos principais elementos didáticos da questão. O estudante deixa de interpretar gráficos compostos apenas por retas ou curvas simples e passa a analisar transições entre diferentes regimes geométricos em um mesmo sistema físico. Assim, o simulador favorece a compreensão de que a forma do gráfico depende diretamente das transformações da área transversal ao longo da altura do recipiente, capacitando-o a buscar compreender a resolução da questão como sendo algo a ser realizado por etapas, assim tendo uma facilitação na compreensão de desenvolvimento da resposta correta.

A Figura 44 apresenta a interface inicial da questão implementada no SENVG, apontando a estrutura geométrica da escultura antes do início do enchimento, com

uma imagem aproximada daquela apresentada na prova, pois na ocasião havia uma imagem em 2D, aqui decidimos por utilizar uma imagem 3D para melhor visualização por parte do usuário.

Figura 44 – Interface inicial da Questão 143 da prova azul do segundo dia do ENEM 2014



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Durante a execução da simulação, o simulador atualiza simultaneamente a visualização tridimensional da escultura e o gráfico correspondente à variação da altura do líquido ao longo do tempo. À medida que o enchimento avança pelas diferentes regiões geométricas do recipiente, o comportamento da curva se modifica, mostrando as alterações da taxa de crescimento da altura provocadas pelas mudanças da área transversal.

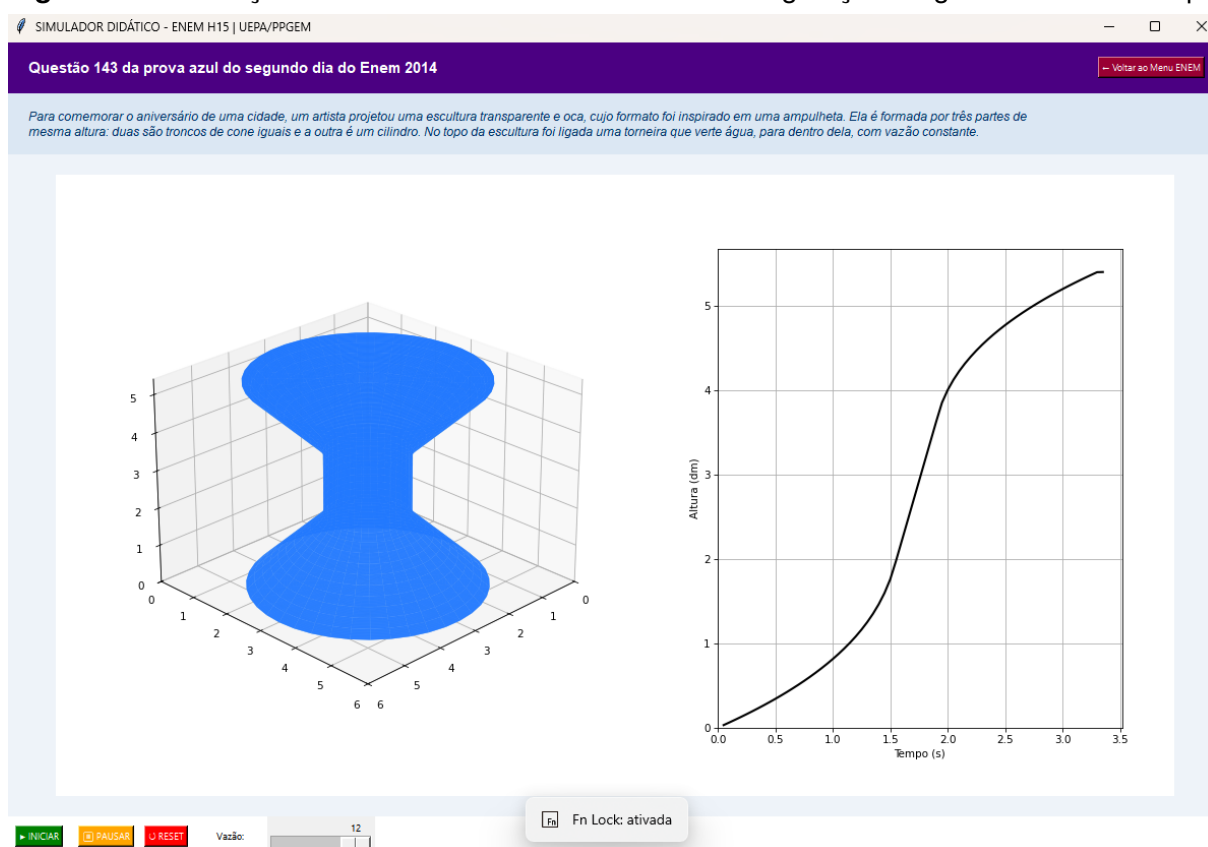
Na região inicial do gráfico, observa-se crescimento progressivamente mais acelerado da altura, associado à diminuição da área transversal do tronco de cone inferior. Em seguida, ao atingir a região cilíndrica central, a curva assume comportamento aproximadamente linear, refletindo a constância da área transversal. Finalmente, na parte superior da escultura, a área transversal volta a aumentar, reduzindo novamente a taxa de crescimento da altura e alterando a concavidade da curva.

A representação simultânea da escultura e do gráfico permite que o estudante associe visualmente cada trecho da curva à geometria correspondente do recipiente,

favorecendo a percepção das relações existentes entre a forma do sólido e o comportamento da função representada. À medida que o líquido percorre regiões mais estreitas ou mais largas da escultura, o estudante pode observar alterações no crescimento da altura do líquido e relacioná-las diretamente à inclinação da curva apresentada no gráfico. Essa articulação contribui para que a interpretação gráfica deixe de ser apenas uma leitura mecânica de pontos e passe a envolver a compreensão das transformações geométricas que influenciam o fenômeno representado.

A Figura 45 apresenta a execução da simulação e o comportamento do gráfico gerado durante o enchimento da escultura.

Figura 45 – Execução da Questão 143 do ENEM 2014 com geração do gráfico altura $\times$ tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista didático, essa questão amplia significativamente a complexidade das interpretações realizadas nas simulações anteriores. O estudante passa a analisar um sistema composto por diferentes sólidos geométricos integrados em um mesmo recipiente, exigindo a mobilização simultânea de conhecimentos relacionados ao cilindro, ao cone e às relações não lineares entre grandezas. Dessa forma, o simulador contribui para o desenvolvimento de uma compreensão mais abrangente dos gráficos como representações dinâmicas diretamente associadas à geometria dos sistemas modelados.

7.6.3 Questão 152 da prova azul do segundo dia do ENEM 2017

A implementação da Questão 152 da prova azul do segundo dia do ENEM 2017 no SENVG exigiu a modelagem de um sistema composto por dois reservatórios interligados. Diferentemente das situações anteriores, nas quais o enchimento ocorria em um único recipiente, essa questão introduz a necessidade de representar a transferência de água entre compartimentos distintos ao longo do processo.

Do ponto de vista matemático, a questão mobiliza diretamente os conceitos explorados anteriormente nas simulações do paralelepípedo, especialmente a relação entre vazão, área da base e taxa de crescimento da altura do líquido. Entretanto, nesse caso, a dinâmica do sistema passa a depender não apenas da geometria de um reservatório isolado, mas também da interação entre os dois compartimentos e do momento em que a água começa a ser transferida entre eles.

Inicialmente, apenas o primeiro reservatório recebe água, produzindo crescimento linear da altura em função do volume acumulado. Como a área da base permanece constante, o gráfico apresenta comportamento semelhante ao observado anteriormente no paralelepípedo simples, caracterizado por uma reta de inclinação constante. Contudo, ao atingir a altura do tubo de ligação entre os reservatórios, parte da água passa a ser direcionada simultaneamente para o segundo compartimento.

Essa alteração produz uma mudança importante na dinâmica do sistema. A partir do instante em que os dois reservatórios passam a receber água simultaneamente, o volume adicionado deixa de contribuir exclusivamente para o aumento da altura no primeiro recipiente. Como consequência, a taxa de crescimento da altura diminui significativamente, produzindo uma alteração abrupta na inclinação do gráfico.

Além da mudança de inclinação observada no gráfico, essa questão possibilita discutir com os estudantes a ideia de conservação do volume em sistemas interligados. Embora a vazão de entrada permaneça constante durante toda a simulação, o comportamento da altura se modifica em razão da redistribuição do líquido entre os reservatórios. Essa característica contribui para que o estudante compreenda que o comportamento gráfico não depende apenas da quantidade de líquido adicionada ao sistema, mas também da forma como esse volume passa a ocupar os diferentes compartimentos disponíveis.

Do ponto de vista didático, a questão também amplia a complexidade da interpretação gráfica ao introduzir mudanças de regime em um mesmo processo físico. O estudante deixa de analisar apenas relações lineares simples e passa a interpretar gráficos compostos por trechos com diferentes comportamentos. Essa leitura exige identificar o instante em que ocorre a alteração estrutural do sistema e relacionar essa mudança ao comportamento da curva no plano cartesiano.

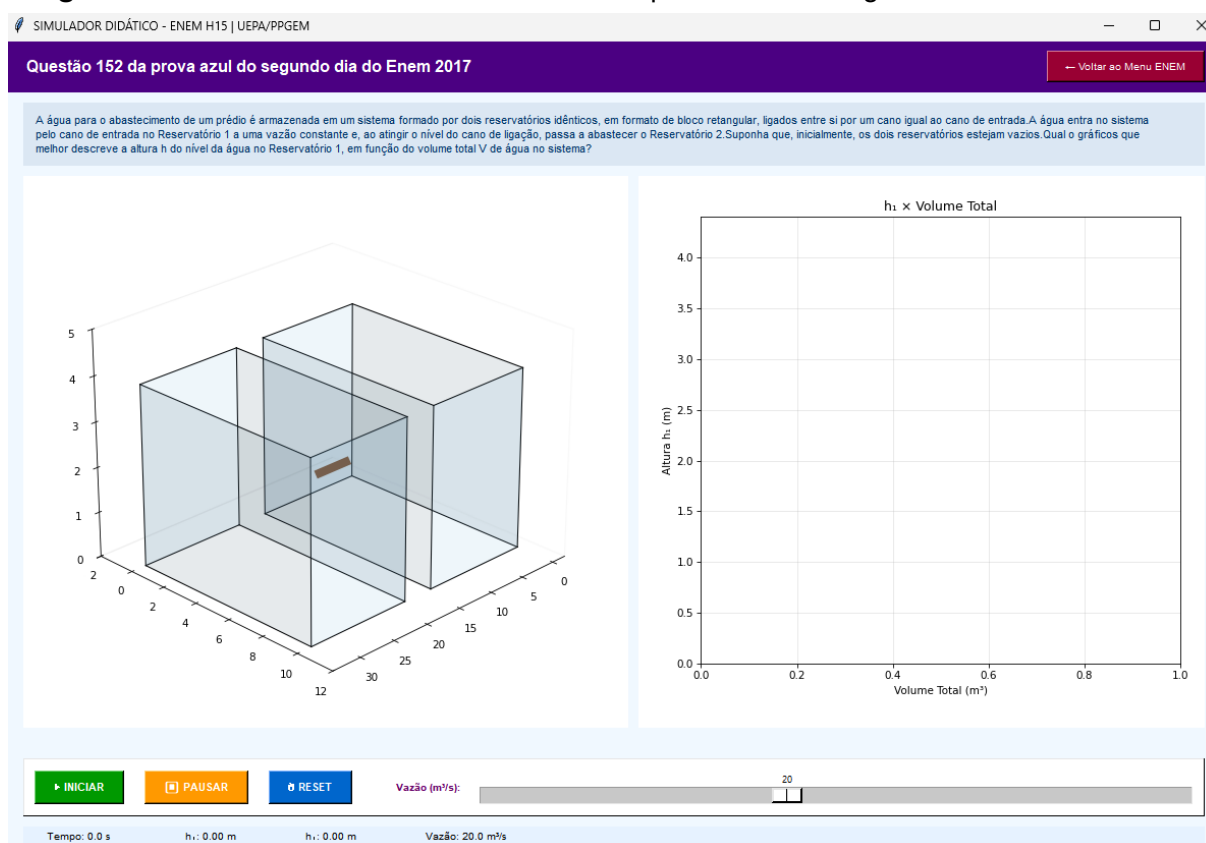
Na implementação computacional da questão, foi necessário desenvolver uma lógica de controle capaz de identificar automaticamente o instante em que o nível

da água atinge o tubo de conexão entre os reservatórios. Até esse momento, o algoritmo atualiza apenas a altura do primeiro compartimento. Após atingir o nível de transferência, o programa passa a redistribuir a vazão entre os dois reservatórios, recalculando continuamente as alturas correspondentes e atualizando simultaneamente a representação gráfica do sistema.

Essa estrutura computacional permitiu representar o comportamento observado na questão original do ENEM, especialmente a mudança abrupta de regime presente no gráfico. A implementação preserva a lógica matemática explorada anteriormente no estudo do paralelepípedo, mas amplia sua complexidade ao introduzir um sistema composto por múltiplos recipientes interdependentes. Além disso, a representação simultânea dos reservatórios e do gráfico favorece uma interpretação mais integrada do fenômeno, permitindo ao estudante relacionar visualmente o comportamento da curva às transformações físicas ocorridas durante o enchimento do sistema.

A Figura 46 apresenta a interface inicial da simulação, mostrando os dois reservatórios interligados antes do início do enchimento do sistema.

Figura 46 – Interface inicial da Questão 152 da prova azul do segundo dia do ENEM 2017



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Durante a execução da simulação, o simulador atualiza simultaneamente o enchimento dos reservatórios e o gráfico correspondente à variação da altura da água no primeiro compartimento em função do volume total acumulado no sistema. Nos

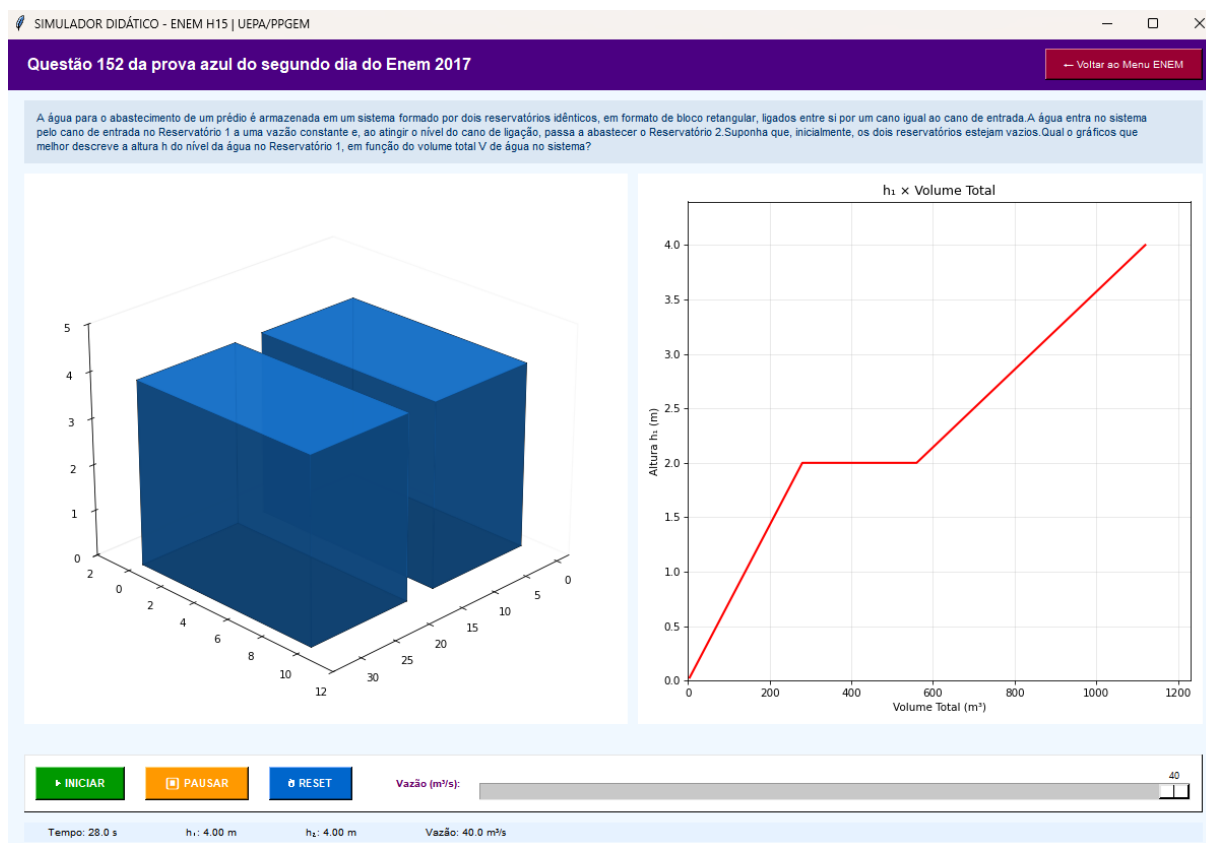
instantes iniciais, observa-se crescimento linear da altura no primeiro reservatório. Entretanto, ao atingir o nível do tubo de ligação, o sistema passa a apresentar um novo comportamento, reduzindo a taxa de crescimento da altura devido à redistribuição da vazão entre os dois compartimentos.

No gráfico gerado pelo simulador, essa mudança se manifesta por meio de uma alteração abrupta na inclinação da curva. O trecho inicial apresenta crescimento mais acentuado, enquanto o trecho posterior possui inclinação menor, refletindo a nova dinâmica do sistema. Essa representação permite ao estudante compreender que mudanças estruturais no comportamento físico do sistema produzem transformações diretas na forma do gráfico.

A representação simultânea dos reservatórios e do gráfico favorece uma interpretação qualitativa mais consistente da situação proposta no ENEM. O estudante pode relacionar visualmente a alteração da inclinação da reta ao instante em que a água começa a ser distribuída entre os dois reservatórios, compreendendo o gráfico como resultado direto da dinâmica física modelada pelo simulador.

A Figura 47 apresenta a simulação em execução e o comportamento do gráfico gerado durante o enchimento do sistema.

Figura 47 – Execução da Questão 152 do ENEM 2017 com geração do gráfico altura $\times$ volume total



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista didático, essa questão amplia significativamente a interpretação das relações entre grandezas trabalhadas anteriormente no simulador. O estudante deixa de analisar apenas recipientes isolados e passa a interpretar sistemas compostos, nos quais mudanças no comportamento físico produzem alterações abruptas na taxa de crescimento representada no gráfico. Nesse contexto, a compreensão do comportamento gráfico exige que o aluno relacione simultaneamente a geometria dos reservatórios, a transferência de água entre os compartimentos e a variação da altura ao longo do tempo.

Além disso, a presença de diferentes regimes de funcionamento em uma mesma situação favorece discussões sobre mudanças de inclinação e interpretação qualitativa de gráficos definidos por trechos. A observação simultânea da simulação e do gráfico permite identificar visualmente o instante em que ocorre a redistribuição da água entre os reservatórios, contribuindo para que o estudante compreenda o gráfico como resultado direto das transformações físicas do sistema. Dessa forma, o SENVG favorece uma compreensão mais aprofundada dos gráficos como representações dinâmicas associadas às interações entre diferentes elementos do sistema modelado.

7.6.4 Questão 166 da prova azul do segundo dia do ENEM 2020

A implementação da Questão 166 da prova azul do segundo dia do ENEM 2020 no SENVG exigiu a integração de diferentes comportamentos geométricos em um único recipiente. A questão aborda o processo de envasamento de espumantes em garrafas cuja geometria apresenta regiões cilíndricas, trechos inclinados e um gargalo estreito na parte superior, produzindo alterações significativas no comportamento da altura do líquido ao longo do tempo.

Do ponto de vista matemático, essa questão mobiliza diretamente os conceitos explorados anteriormente nas simulações do cilindro, do cone e dos recipientes compostos. Entretanto, diferentemente das situações anteriores, a geometria da garrafa apresenta transições mais suaves entre as diferentes regiões, produzindo um gráfico cuja inclinação varia continuamente ao longo do enchimento.

Na região inferior da garrafa, o recipiente apresenta comportamento semelhante ao cilindro, com área transversal aproximadamente constante. Nesse trecho, a altura do líquido cresce de forma praticamente linear em relação ao tempo. À medida que o líquido alcança a região inclinada da garrafa, a área transversal passa a diminuir progressivamente, fazendo com que a altura comece a crescer mais rapidamente. Finalmente, ao atingir o gargalo superior, a redução acentuada da área produz crescimento ainda mais acelerado da altura, resultando em forte aumento da inclinação da curva no gráfico altura $\times$ tempo.

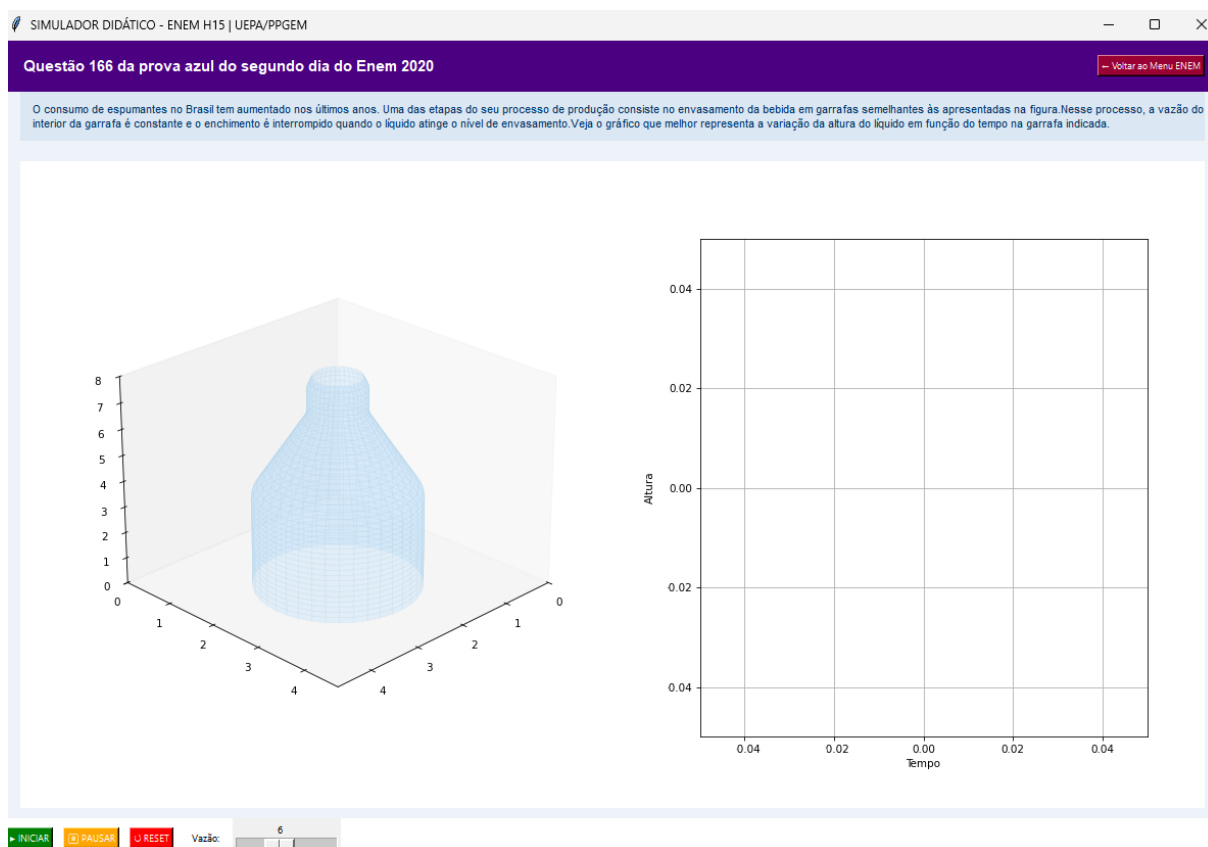
A implementação computacional dessa questão exigiu a decomposição geo-

métrica da garrafa em diferentes regiões funcionais. O algoritmo foi estruturado de modo a identificar continuamente a posição atual do nível do líquido e aplicar o modelo matemático correspondente à geometria daquela região específica. Em cada etapa da simulação, o programa recalcula a área transversal associada à altura atual do líquido, atualizando simultaneamente o enchimento da garrafa e a construção do gráfico.

Diferentemente das questões anteriores, nas quais as mudanças de comportamento produziam transições abruptas entre trechos distintos do gráfico, nessa situação as alterações ocorrem de maneira contínua. Isso faz com que a curva apresente mudanças graduais de inclinação, permitindo ao estudante interpretar de forma mais refinada a relação entre geometria e taxa de crescimento da altura.

A Figura 48 apresenta a interface inicial da questão implementada no simulador, representando a geometria da garrafa antes do início do enchimento.

Figura 48 – Interface inicial da Questão 166 da prova azul do segundo dia do ENEM 2020



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

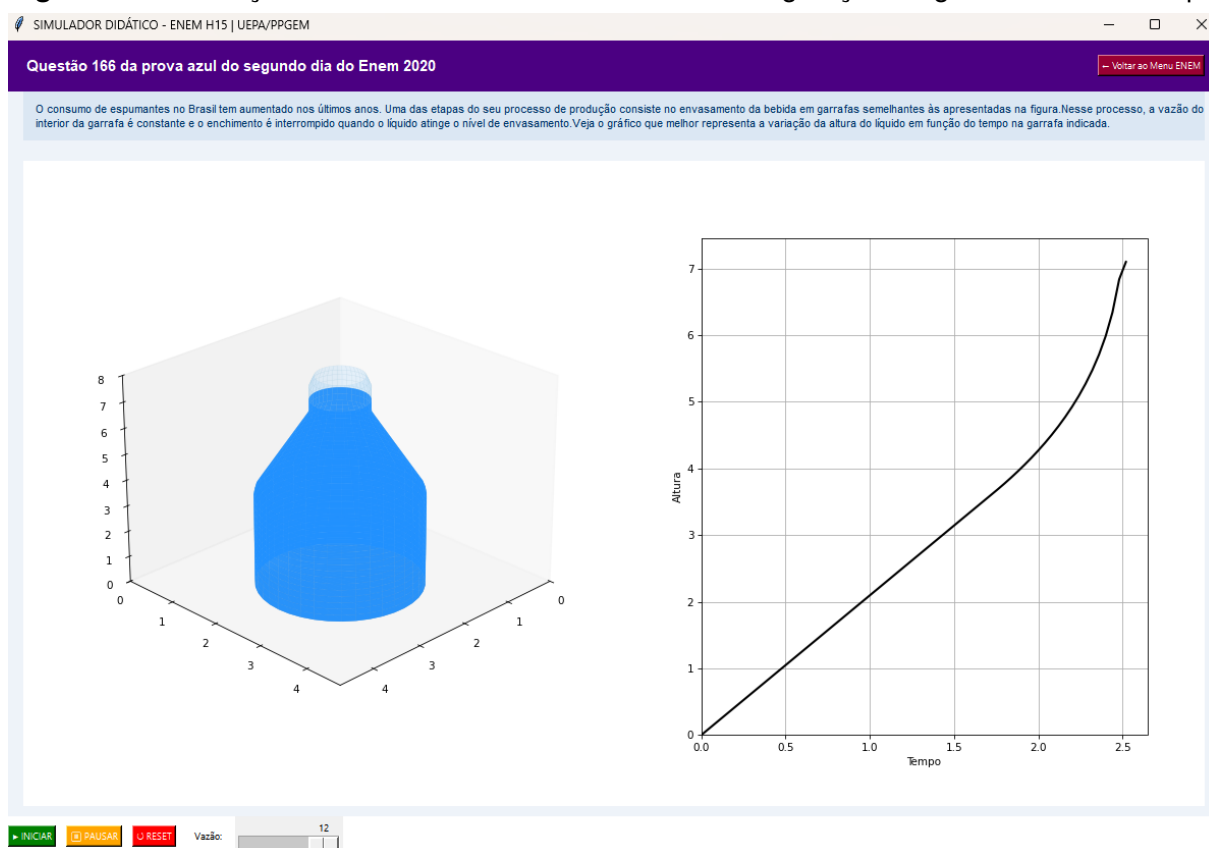
Durante a execução da simulação, o simulador atualiza simultaneamente a visualização tridimensional da garrafa e o gráfico correspondente à variação da altura do líquido ao longo do tempo. Nos instantes iniciais, observa-se crescimento aproximadamente linear da altura, associado à região cilíndrica inferior da garrafa. Entretanto, à medida que o líquido avança pelas regiões inclinadas e pelo gargalo superior, a

redução progressiva da área transversal faz com que a altura passe a crescer cada vez mais rapidamente.

Esse comportamento produz uma curva cuja inclinação aumenta continuamente ao longo do processo de enchimento. A representação simultânea da garrafa e do gráfico permite ao estudante associar visualmente as mudanças da inclinação da curva às transformações geométricas presentes no recipiente, favorecendo uma interpretação qualitativa mais consistente da situação proposta no ENEM.

A Figura 49 apresenta a simulação em execução e o comportamento do gráfico gerado durante o enchimento da garrafa, juntamente com as alternativas disponibilizadas para que o estudante possa assinalar aquela que considera compatível com o comportamento observado. Essa organização busca aproximar o ambiente do formato original da questão do ENEM, permitindo que o aluno acompanhe simultaneamente o processo de enchimento, a construção dinâmica do gráfico e a análise das opções de resposta. Ao relacionar visualmente a geometria da garrafa às alterações de inclinação da curva, o estudante pode desenvolver uma interpretação mais qualitativa das relações entre grandezas envolvidas na situação proposta.

Figura 49 – Execução da Questão 166 do ENEM 2020 com geração do gráfico altura $\times$ tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Do ponto de vista didático, essa questão amplia significativamente a interpretação das relações entre grandezas exploradas anteriormente no simulador. O estudante passa a analisar um recipiente cuja geometria produz mudanças graduais e contínuas na taxa de crescimento da altura, exigindo uma leitura mais refinada do comportamento gráfico. Dessa forma, o SENVG favorece a compreensão de que pequenas alterações geométricas podem produzir transformações significativas no comportamento das curvas representadas no plano cartesiano, contribuindo para o desenvolvimento da interpretação qualitativa de gráficos prevista na Habilidade 15.

A implementação do SENVG mostrou que a construção de um simulador educacional envolve a articulação entre modelagem matemática, programação computacional e intencionalidade pedagógica. Ao longo do desenvolvimento do ambiente, buscou-se garantir que cada representação visual, cada atualização gráfica e cada comportamento apresentado nas simulações mantivessem coerência com os modelos matemáticos associados às relações entre grandezas exploradas no ensino médio.

As simulações dos sólidos geométricos permitiram estruturar progressivamente a compreensão da relação entre vazão, área transversal e crescimento da altura do líquido ao longo do tempo. Inicialmente, recipientes com área transversal constante, como o paralelepípedo e o cilindro, favoreceram a interpretação de relações lineares entre grandezas. Em seguida, os cones e a esfera ampliaram essa análise ao introduzir situações em que a área transversal varia continuamente, produzindo comportamentos não lineares e exigindo interpretações mais complexas dos gráficos gerados.

A implementação das questões reais do ENEM possibilitou ampliar ainda mais esse processo investigativo, permitindo integrar diferentes comportamentos geométricos em situações mais próximas dos contextos efetivamente encontrados pelos estudantes em avaliações externas. Nessas questões, o simulador passou a representar recipientes compostos, mudanças de regime de enchimento, redistribuição de vazão e alterações graduais ou abruptas da área transversal, exigindo do estudante a mobilização simultânea de diferentes conhecimentos construídos ao longo das explorações anteriores.

Do ponto de vista computacional, o desenvolvimento dessas questões exigiu a construção de algoritmos capazes de identificar dinamicamente mudanças geométricas ao longo do enchimento, recalculando continuamente as áreas transversais associadas ao crescimento da altura do líquido. Essa estrutura permitiu representar comportamentos gráficos distintos, preservando a coerência entre os cálculos matemáticos realizados pelo sistema, a visualização tridimensional dos recipientes e os gráficos apresentados ao usuário.

A manutenção simultânea da representação tridimensional e do gráfico cartesiano constituiu um dos principais elementos estruturantes do simulador. Ao acompanhar visualmente o enchimento dos recipientes e a construção progressiva das curvas, o

estudante pode estabelecer relações mais consistentes entre a geometria do sistema físico e o comportamento gráfico correspondente. Essa articulação favorece a interpretação qualitativa das relações entre grandezas, contribuindo para que os gráficos sejam compreendidos como representações de processos dinâmicos e não apenas como construções abstratas no plano cartesiano.

Outro aspecto importante do desenvolvimento do SENVG diz respeito à organização estrutural do software. A utilização de classes específicas para cada sólido geométrico e para cada questão do ENEM contribuiu para a clareza da implementação e para a modularização do sistema, permitindo adaptar diferentes modelos matemáticos sem comprometer a coerência operacional da interface. Essa estrutura também favoreceu a expansão do simulador, possibilitando incorporar novas situações sem alterar a lógica geral de funcionamento do ambiente.

Do ponto de vista pedagógico, o simulador foi concebido como um ambiente de exploração investigativa, no qual o estudante pode formular hipóteses, observar comportamentos, comparar gráficos e interpretar mudanças de inclinação e curvatura a partir das transformações geométricas dos recipientes. A possibilidade de controlar o ritmo da simulação e acompanhar simultaneamente diferentes representações favorece uma abordagem mais dinâmica das relações entre grandezas, ampliando as possibilidades de exploração da Habilidade 15 no contexto do ensino médio.

Dessa forma, o SENVG configura-se como um produto educacional que integra modelagem matemática, visualização computacional e interpretação gráfica em um mesmo ambiente de aprendizagem. Ao articular sólidos geométricos, simulações dinâmicas e questões reais do ENEM, o simulador amplia as possibilidades de exploração conceitual das relações entre grandezas e oferece subsídios para práticas pedagógicas mais investigativas e interpretativas no ensino de Matemática.

8 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta a análise dos resultados obtidos a partir da aplicação do roteiro de validação do simulador de grandezas junto a especialistas da área de ensino de Matemática. A proposta de análise considera tanto os dados estruturados, obtidos por meio da escala *Likert*, quanto as respostas descritivas e as observações decorrentes da aplicação do roteiro, buscando construir uma leitura articulada das potencialidades e dos limites do simulador.

A organização da análise parte do entendimento de que a avaliação de uma proposta dessa natureza envolve a compreensão das formas como ela é interpretada e utilizada por professores com diferentes trajetórias e experiências. Nesse sentido, a análise considera os processos de interação estabelecidos durante a aplicação, buscando aspectos que surgem da prática e que contribuem para uma compreensão mais ampla do uso do simulador em contexto educacional.

Inicialmente, apresenta-se a caracterização dos especialistas participantes, com o objetivo de situar o perfil do grupo responsável pela avaliação. Em seguida, desenvolve-se a análise das respostas obtidas nas diferentes etapas do roteiro, considerando tanto os dados quantitativos quanto as contribuições qualitativas. Por fim, são discutidas observações decorrentes da aplicação, que permitem ampliar a leitura dos resultados ao incorporar elementos que não se encontram explicitamente contemplados nos instrumentos de coleta.

Ao longo do capítulo, a análise é orientada pelo referencial teórico adotado na pesquisa, buscando articular os dados empíricos com as discussões sobre ensino de Matemática mediado por tecnologias digitais, especialmente em relação à visualização, à interpretação de relações entre grandezas e às formas de interação possibilitadas por ambientes computacionais.

8.1 Caracterização dos especialistas participantes

A composição do grupo de especialistas revela um conjunto de trajetórias profissionais que qualificam o processo de avaliação do simulador de grandezas, além de ajudar a compreender as diferentes formas de leitura e utilização do recurso ao longo da pesquisa. Os dados indicam a presença de professores com experiências distintas, tanto em termos de tempo de atuação quanto de inserção em práticas pedagógicas mediadas por tecnologia.

Para preservar a identidade dos participantes, os especialistas foram identificados por letras. O Especialista A é licenciado em Matemática, possui especialização em Ensino de Matemática e atua há mais de 10 anos na docência. Desenvolve atividades na rede estadual de ensino com turmas do Ensino Médio voltadas à preparação de

estudantes para o ENEM. Além da atuação na educação básica, também participa de cursinho preparatório pré-ENEM vinculado à instituição em que trabalha, possuindo experiência relacionada ao uso de recursos digitais e atividades desenvolvidas em laboratório de informática educacional.

O Especialista B é licenciado em Matemática, possui mestrado em Matemática e apresenta mais de 20 anos de atuação docente. É servidor do Instituto Federal do Pará (IFPA), atuando tanto no Ensino Médio regular quanto no Ensino Técnico. Além das atividades desenvolvidas no instituto, também participa de cursinho preparatório institucional voltado ao ENEM, trabalhando com conteúdos relacionados à interpretação de gráficos, resolução de problemas e análise de relações entre variáveis presentes na matriz de referência do exame.

O Especialista C é licenciado em Matemática e atualmente é mestrando em Ensino de Matemática. Atua há aproximadamente 6 anos na docência, desenvolvendo atividades na rede estadual de ensino com turmas de terceiro ano do Ensino Médio. Também participa de cursinho preparatório privado voltado ao ENEM no município de Breves, desenvolvendo atividades relacionadas à interpretação de questões contextualizadas e preparação para avaliações externas.

O Especialista D é licenciado em Matemática e encontra-se em início de carreira docente, possuindo menor tempo de formação entre os participantes da pesquisa. Atua na rede estadual de ensino e também participa de cursinho preparatório privado para o ENEM no município de Breves. Sua experiência profissional envolve o acompanhamento de estudantes em processos de preparação para avaliações externas.

No que se refere à faixa etária, participaram da pesquisa professores situados em diferentes faixas etárias, com predominância de docentes entre 41 e 50 anos. Também houve participação de professores com até 25 anos e entre 31 e 40 anos. Embora o grupo seja reduzido, essa diversidade contribui para reunir diferentes experiências relacionadas ao ensino de Matemática e ao uso de tecnologias digitais em contexto educacional.

Essa diferença de trajetórias interfere diretamente na forma como o simulador é compreendido e utilizado. Em alguns casos, a tendência a recorrer ao cálculo como estratégia principal aparece como reflexo de uma prática consolidada. Em outros, observa-se maior abertura para a exploração das relações entre grandezas por meio da manipulação e da visualização. Esse movimento pode ser compreendido a partir de Balacheff (1994), ao destacar que a integração de tecnologias no ensino não depende apenas do recurso em si, mas das práticas e concepções que orientam sua utilização.

A formação acadêmica dos participantes reforça a consistência do grupo. Esse aspecto contribui para uma leitura mais crítica do simulador, especialmente no que se refere à sua aplicação em sala de aula. A avaliação realizada, nesse sentido, não se restringe à funcionalidade do recurso, mas envolve a análise de seu potencial didático.

O tempo de formação e o tempo de atuação no magistério ampliam ainda mais essa diversidade. A presença simultânea de professores em início de carreira e de outros com mais de duas décadas de experiência cria um cenário em que diferentes níveis de consolidação profissional coexistem. Professores mais experientes tendem a mobilizar referências construídas ao longo de sua prática, enquanto aqueles com menor tempo de atuação podem apresentar maior flexibilidade na adoção de novas estratégias. Essa diferença se manifesta, por exemplo, na forma como as atividades são interpretadas e na maneira como o simulador é incorporado à prática docente.

Essa característica é relevante e fez parte da escolha de potenciais candidatos a participarem da pesquisa, uma vez que o conteúdo abordado pelo simulador está diretamente relacionado às demandas do Ensino Médio, especialmente no contexto de avaliações em larga escala. Ao mesmo tempo, a atuação em outros níveis de ensino amplia a compreensão das dificuldades dos estudantes, permitindo uma leitura mais abrangente sobre o ensino de relações entre grandezas. Também foi considerado o fato de todos os especialistas possuírem experiência em cursinhos preparatórios para o ENEM e afirmarem trabalhar com a matriz de referência dessa avaliação em suas aulas.

Esse dado tem implicações diretas para a análise, pois indica que os participantes estão familiarizados com o tipo de abordagem exigida em situações que envolvem interpretação de gráficos e análise de relações entre variáveis. Trata-se de um grupo que já atua com esse tipo de demanda em sala de aula, especialmente em atividades voltadas à preparação para avaliações externas. Nesse sentido, a avaliação do simulador é realizada a partir de um referencial que valoriza a compreensão e a interpretação dos problemas apresentados, o que contribui para uma leitura mais consistente das potencialidades do recurso.

Ao mesmo tempo, quando se observa o uso de recursos digitais, verifica-se que, embora todos os participantes utilizem tecnologia em suas aulas, a frequência desse uso ainda se concentra majoritariamente na categoria “às vezes”, com menor incidência de uso frequente. Esse resultado sugere que a presença da tecnologia já faz parte do cotidiano escolar, mas ainda não aparece de forma contínua nas práticas pedagógicas. Em muitos casos, o uso ocorre em momentos específicos, sem se estender ao longo de toda a atividade, o que ajuda a compreender as condições em que o simulador será inserido no contexto de ensino.

Quadro 1 – Frequência de uso de recursos digitais

Você utiliza recursos digitais em suas aulas de Matemática?	
Sim, frequentemente	1
Às vezes	3
Raramente	0
Não	0

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Esse dado indica que a tecnologia já está presente no contexto escolar, mas ainda não se configura, necessariamente, como elemento estruturante da prática pedagógica. Ou seja, o uso de recursos digitais tende a ocorrer de forma pontual, e não como parte integrada da construção do conhecimento.

A respeito das ferramentas tecnológicas, houve uma variedade de recursos mencionados, como *GeoGebra*, *PhET*, *Kahoot*, aplicativos educacionais, além do uso de dispositivos como celulares e *Chromebooks*, mostrando que os professores possuem contato com diferentes ferramentas. No entanto, isso não garante, por si só, uma mudança na forma de ensinar. Observa-se, ainda, que o termo recursos digitais assume significados distintos de acordo com cada professor, pois alguns enfatizaram softwares, enquanto outros destacaram aspectos relacionados ao hardware.

Nesse ponto, as contribuições de Balacheff (2004) ajudam a compreender que a presença da tecnologia não implica automaticamente em transformação pedagógica. O que está em jogo é a forma como ela reorganiza a atividade matemática. No caso do simulador de grandezas, essa reorganização ocorre ao colocar a visualização e a manipulação das relações no centro da atividade.

A partir desse conjunto de elementos, torna-se possível compreender que a avaliação do simulador foi realizada por um grupo que reúne experiência docente consolidada, formação acadêmica consistente e contato com diferentes recursos tecnológicos. Ao mesmo tempo, percebe-se que a incorporação da tecnologia ao ensino ainda se encontra em processo de consolidação, o que reforça a relevância de propostas que contribuam para reorganizar a forma como o conteúdo matemático é trabalhado.

Essa caracterização contextualiza os resultados apresentados nas seções seguintes e permite compreender por que determinadas tendências, como a priorização do cálculo ou a dificuldade em antecipar o comportamento de gráficos, surgem durante a aplicação do roteiro. Essas manifestações refletem práticas e concepções que fazem parte do contexto em que o simulador se insere, estando relacionadas às experiências formativas e às metodologias frequentemente utilizadas no ensino de Matemática. Em muitos casos, observa-se que a interpretação qualitativa dos gráficos acaba sendo colocada em segundo plano diante da valorização de procedimentos algorítmicos e

cálculos operatórios, aspecto que influencia diretamente a forma como os participantes interagem com as situações propostas pelo simulador.

Além disso, a diversidade de trajetórias profissionais dos especialistas contribui para ampliar a compreensão acerca das diferentes formas de utilização do recurso digital em contextos de preparação para o ENEM. Dessa maneira, a análise das respostas não se limita apenas à avaliação técnica do simulador, mas também possibilita identificar elementos relacionados às práticas pedagógicas e às estratégias de interpretação mobilizadas pelos participantes durante a exploração das atividades propostas.

8.2 Diagnóstico pedagógico sobre o ensino da relação entre grandezas.

A análise do diagnóstico pedagógico, construída a partir das respostas dos especialistas na etapa inicial do roteiro de validação, permite compreender como o ensino da relação de dependência entre grandezas vem sendo desenvolvido no contexto escolar e quais aspectos têm dificultado a aprendizagem desse conteúdo. As respostas mostram um cenário em que a principal dificuldade dos estudantes está na interpretação das relações entre variáveis e na compreensão do comportamento representado nos gráficos.

Ao descreverem as dificuldades mais frequentes, os especialistas apontam problemas relacionados à leitura e interpretação de gráficos, à identificação das variações entre grandezas e à compreensão do significado das representações. Em muitos casos, o estudante consegue operar com valores numéricos, mas não consegue interpretar o que esses valores representam dentro da situação proposta. Isso indica uma dissociação entre o procedimento e o significado, o que compromete a compreensão global do conteúdo.

Quadro 2 – Dificuldades no ensino da relação entre grandezas

Dificuldades relatadas pelos especialistas	
Especialista A	“Não analisam as grandezas e interpretam o gráfico de modo equivocado.”
Especialista B	“Não conseguem ver as mudanças com clareza no comportamento dos gráficos”.
Especialista C	“Os alunos costumam confundir a leitura dos eixos, interpretar de forma errada o crescimento do gráfico.”
Especialista D	“Identificar o comportamento das relações entre as grandezas.”

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Essa dificuldade se torna ainda mais visível quando os especialistas descrevem os erros mais comuns cometidos pelos alunos. As respostas indicam problemas

recorrentes na leitura dos eixos, na interpretação do crescimento ou decréscimo das funções e na relação entre valores numéricos e sua representação gráfica. Se trata de uma dificuldade mais ampla em articular diferentes formas de representação de um mesmo fenômeno.

Essa questão se relaciona com as discussões de Lós (2021), ao destacar que a aprendizagem matemática envolve a coordenação entre representações simbólicas, numéricas e gráficas. Quando essa articulação não ocorre, o estudante tende a tratar cada representação de forma isolada, o que dificulta a construção de significados mais consistentes.

A análise das práticas docentes descritas pelos especialistas ajuda a compreender como essas dificuldades se constituem no contexto de ensino. A predominância de aulas expositivas, associada ao uso de materiais impressos e à resolução de exercícios estruturados, indica um modelo de ensino em que o conteúdo é apresentado de forma sequencial e centrada na execução de procedimentos. Nessa organização, o gráfico costuma aparecer como resultado final de um processo de cálculo, e não como uma representação que pode ser explorada para compreender o comportamento das grandezas.

Quadro 3 – Formas de abordagem do conteúdo em sala de aula

<i>Especialista A</i>	“Aulas expositivas, apresentando o conteúdo em seguida sequências de atividades.”
<i>Especialista B</i>	“Somente mostrando gráficos impressos em livros e apostilas.”
<i>Especialista C</i>	“Explique conteúdo de forma clara, com exemplos, e proponho atividades para que os alunos pratiquem e tirem dúvidas.”
<i>Especialista D</i>	“Iniciando com um problema entre grandezas que variam na mesma proporção (comportamento).”

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Essa forma de conduzir o ensino pode ser compreendida à luz da teoria da transposição didática (Chevallard, 1991), na medida em que o conhecimento matemático é reorganizado em formatos que privilegiam a aplicação de técnicas. No caso das relações entre grandezas, isso se traduz na priorização do cálculo como estratégia principal, o que reduz o espaço para a análise das relações envolvidas.

Outro ponto que merece destaque nas respostas diz respeito às limitações dos recursos utilizados em sala de aula. Os especialistas destacam que os materiais disponíveis não favorecem a visualização do comportamento das grandezas, dificultando a compreensão das variações. O trabalho com gráficos ocorre, na maioria das vezes, de forma estática, o que limita a possibilidade de observar mudanças e estabelecer relações mais amplas entre as variáveis. de forma estática, o que limita a possibilidade

de observar mudanças e estabelecer relações mais amplas entre as variáveis. Essas limitações podem ser observadas nas falas apresentadas no Quadro 4.

Quadro 4 – Limitações dos materiais utilizados no ensino

<i>Especialista B</i>	O próprio material apresenta dificuldade, pois exige muito papel e impressão, o que causa custo para o professor. E a apostila não é dinâmica, o aluno não consegue ver o comportamento dos gráficos.
<i>Especialista C</i>	As principais dificuldades são a falta de interesse de alguns alunos de diferentes níveis de aprendizagem na turma e a dificuldade em compreender conceitos mais abstratos.
<i>Especialista D</i>	Matemática básica, interpretação textual e linguagem matemática.

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Os relatos apresentados pelos especialistas mostram que as dificuldades relacionadas ao ensino da interpretação de gráficos e das relações entre grandezas não se restringem ao domínio conceitual dos estudantes. Aspectos como limitações dos materiais utilizados, dificuldades de interpretação e ausência de recursos que permitam visualizar dinamicamente o comportamento das grandezas também interferem diretamente no processo de aprendizagem. Nesse contexto, destaca-se a observação do Especialista B ao mencionar que os materiais tradicionalmente utilizados não possibilitam ao aluno acompanhar o comportamento dos gráficos de forma dinâmica.

Essas considerações reforçam a importância de recursos que favoreçam a visualização e a exploração interativa das relações matemáticas. A presença de tecnologias digitais nas aulas, embora mencionada pelos especialistas, ainda aparece de forma pontual e pouco integrada à organização da atividade pedagógica. Desse modo, os dados sugerem que a simples utilização de recursos tecnológicos não garante mudanças significativas no ensino, sendo necessário que essas ferramentas estejam articuladas a propostas didáticas que possibilitem ao estudante observar processos de variação, interpretar comportamentos gráficos e construir relações entre diferentes representações matemáticas.

Essa questão pode ser compreendida a partir das discussões de Borba e Penteado (2001), que apontam que o uso de tecnologias no ensino de Matemática implica mudanças nas formas de pensar e produzir conhecimento, mas essas mudanças dependem das formas de apropriação por parte dos professores. Quando a tecnologia é utilizada apenas como complemento, seu potencial de transformação tende a ser limitado.

As dificuldades identificadas podem ser interpretadas como resultado da ausência de situações que permitam ao estudante agir sobre o objeto de conhecimento. A

compreensão das relações entre grandezas exige a possibilidade de observar variações, comparar resultados e estabelecer conexões entre diferentes representações. Quando essas ações não são favorecidas, o aprendizado tende a se restringir à reprodução de procedimentos.

Outro aspecto importante diz respeito à tendência de priorizar o cálculo como estratégia inicial de resolução. Em diversas situações, a busca por valores numéricos precede a análise do comportamento das grandezas, o que indica uma forma de abordagem que privilegia o resultado em detrimento da compreensão. Essa tendência não está apenas nos alunos, mas também nas práticas de ensino, pois em umas das questões do roteiro os professores buscaram resolver o problema por meio de cálculos, deixando de fazer uma análise melhor para compreender o formato do gráfico relacionando somente o formato do recipiente, isso reforça a necessidade de repensar a forma como o conteúdo é trabalhado.

Esse conjunto de elementos permite compreender que as dificuldades relacionadas ao ensino das relações entre grandezas decorrem de uma combinação entre práticas pedagógicas, limitações dos recursos utilizados e formas de abordagem do conteúdo. Nesse contexto, a compreensão das relações entre variáveis exige a construção de significados a partir da análise e da interpretação.

Diante desse cenário, o diagnóstico pedagógico pode identificar dificuldades e contribuir para delimitar o problema investigado nesta pesquisa. Ao explicitar as lacunas relacionadas à interpretação, à visualização e à articulação entre representações, essa etapa fundamenta a necessidade de propostas que ampliem as possibilidades de exploração do conteúdo.

É nesse ponto que se insere o simulador de grandezas, como uma proposta que busca responder a essas demandas. Ao permitir a manipulação de variáveis e a observação do comportamento das grandezas em tempo real, o simulador cria condições para que o estudante estabeleça relações de forma mais dinâmica, aproximando-se de uma abordagem que valoriza a exploração e a interpretação. Dessa forma, a análise do diagnóstico pedagógico permite situar a proposta desenvolvida nesta pesquisa como uma possibilidade de intervenção.

8.3 Avaliação do produto educacional

A avaliação do produto educacional, constituído pelo simulador de grandezas (SENVG) e pelo caderno de exploração, permite analisar, a partir da perspectiva dos especialistas, como a proposta desenvolvida se insere no ensino da relação de dependência entre grandezas e de que maneira ela dialoga com as dificuldades identificadas no contexto escolar. Essa etapa revela como o simulador é interpretado em termos pedagógicos, quais elementos são reconhecidos como relevantes para a

aprendizagem e em que medida sua utilização pode contribuir para a reorganização das práticas de ensino.

Os resultados obtidos na escala *Likert* indicam uma aceitação favorável do produto educacional em diferentes dimensões, especialmente no que se refere à clareza de uso, à organização das atividades e à coerência entre o conteúdo matemático e as representações apresentadas. Esses dados são interpretados como ponto de partida para compreender o que, de fato, sustenta essa avaliação positiva. Ao serem analisados em conjunto com as respostas abertas, esses resultados passam a revelar aspectos relacionados à forma como o simulador estrutura a atividade matemática.

Ao observar o conjunto dessas avaliações, percebe-se que os especialistas analisam o produto a partir de sua experiência prática com o ensino de Matemática. As respostas refletem situações vivenciadas em sala de aula, especialmente no que se refere às dificuldades dos estudantes em interpretar relações entre grandezas e compreender o comportamento de gráficos. Esse olhar contribui para que a avaliação não se limite a aspectos formais do simulador, mas considere sua adequação ao contexto real de ensino.

Ao considerar esses resultados de forma mais ampla, percebe-se que a avaliação positiva não se restringe à aparência ou à funcionalidade do simulador, mas envolve a maneira como o recurso organiza a relação entre o conteúdo matemático e as ações do estudante. Os especialistas, ao analisarem o ambiente, reconhecem que a estrutura proposta favorece a compreensão das relações entre grandezas, sobretudo por permitir acompanhar o comportamento das variáveis de forma dinâmica. Esse aspecto indica que o simulador não atua apenas como suporte visual, mas como um elemento que orienta a forma de exploração do conteúdo.

Outro ponto que pode ser destacado diz respeito à consistência entre o simulador e o caderno de exploração. As respostas indicam que essa articulação contribui para dar continuidade à atividade, evitando que o uso do recurso se limite a uma experiência isolada. Ao propor questões que direcionam a observação e a interpretação dos resultados obtidos no simulador, o material complementa a atividade digital e amplia as possibilidades de análise, favorecendo uma abordagem mais estruturada do conteúdo.

Antes da apresentação detalhada dos resultados, torna-se necessário organizar, de forma sintética, as avaliações atribuídas pelos especialistas aos diferentes critérios analisados. Essa organização permite estabelecer uma visão geral do desempenho do produto educacional nos aspectos considerados mais relevantes para sua utilização em contexto pedagógico, contribuindo para uma leitura inicial dos dados antes do aprofundamento analítico. Além disso, a sistematização das respostas possibilita identificar tendências nas avaliações e compreender como os diferentes critérios foram percebidos pelos participantes ao longo do processo de validação.

O Quadro 5 reúne as médias obtidas nas respostas dos especialistas na es-

cala *Likert*, permitindo visualizar, de maneira integrada, a percepção dos participantes quanto à clareza, organização, coerência e potencial pedagógico do produto educacional.

Quadro 5 – Distribuição das respostas dos especialistas na escala *Likert*

Pergunta	Concordo parcialmente	Concordo totalmente	Média
O simulador apresenta uma estrutura clara e organizada?	0	4	5,00
As etapas de uso são compreensíveis?	0	4	5,00
As situações-problema abordam corretamente o conteúdo matemático?	0	4	5,00
Os gráficos representam adequadamente as relações entre grandezas?	0	4	5,00
O material é relevante para o ensino de relações entre grandezas?	0	4	5,00
O recurso contribui para o desenvolvimento de habilidades do ENEM?	0	4	5,00
O simulador representa adequadamente o conceito matemático?	0	4	5,00
A utilização do ambiente digital favorece a compreensão do conteúdo?	0	4	5,00
O simulador permite participação ativa do usuário?	3	1	4,25
O feedback do sistema contribui para a aprendizagem?	2	2	4,50
As situações apresentadas são contextualizadas?	2	2	4,50
O material dialoga com a realidade dos alunos?	3	1	4,25
O simulador pode ser utilizado em sala de aula?	0	4	5,00
O recurso é viável na realidade escolar?	1	3	4,75

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Para o cálculo dessas médias, foram atribuídos valores numéricos às categorias da escala, considerando-se 4 para “concordo parcialmente” e 5 para “concordo totalmente”. As demais categorias da escala, como “discordo totalmente”, “discordo parcialmente” e “não concordo nem discordo”, não foram incluídas na tabela, pois não receberam marcação nas respostas obtidas. Embora a escala *Likert* seja originalmente

de natureza ordinal, a utilização de médias nesse tipo de análise é amplamente adotada em pesquisas na área educacional, especialmente quando se busca sintetizar tendências de resposta e comparar os diferentes critérios avaliados.

A leitura dos dados permite observar uma avaliação amplamente favorável do produto educacional pelos especialistas, com predominância de concordância total na maior parte dos critérios analisados. Itens relacionados à clareza, organização, coerência matemática e adequação das representações gráficas apresentam médias máximas, indicando que o simulador e o caderno de exploração atendem de forma consistente aos objetivos propostos. Esses resultados mostram que a estrutura do produto educacional está bem definida e alinhada ao conteúdo que se pretende trabalhar, o que contribui para sua viabilidade de uso em contextos de ensino.

Ao mesmo tempo, alguns critérios apresentam médias ligeiramente inferiores, especialmente aqueles relacionados à participação ativa do usuário, ao *feedback* do sistema e à contextualização das situações propostas. Nesses casos, embora a avaliação continue positiva, a distribuição das respostas indica a presença de percepções mais variadas entre os especialistas. Esse comportamento sugere que esses aspectos, diretamente ligados à forma como o estudante interage com o simulador, ainda podem ser ampliados, sobretudo no que se refere à diversificação das situações e ao fortalecimento das possibilidades de exploração.

Esse contraste entre avaliações máximas e médias um pouco mais baixas não compromete a qualidade do produto, mas aponta direções importantes para seu aprimoramento. Enquanto os resultados mais elevados confirmam a consistência da proposta em termos de estrutura e conteúdo, as variações observadas indicam que o potencial do simulador pode ser ampliado a partir de ajustes que favoreçam maior envolvimento do usuário e maior articulação com diferentes contextos de aplicação.

Esses resultados, embora importantes para uma visão geral da avaliação do produto educacional, não esgotam a compreensão sobre sua utilização em contexto pedagógico. As respostas abertas dos especialistas permitem aprofundar essa análise, mostrando como o simulador é interpretado para além dos critérios previamente estabelecidos e trazendo elementos que não se manifestam diretamente nos dados quantitativos.

Ao considerar essas contribuições qualitativas, torna-se possível identificar aspectos do uso do simulador que não aparecem de forma explícita na escala *Likert*. As respostas dos especialistas trazem percepções relacionadas à dinâmica da atividade, à forma como o conteúdo é apresentado e às possibilidades de exploração que o recurso oferece em sala de aula. Esses elementos ampliam a compreensão dos resultados, permitindo analisar o simulador não apenas a partir de indicadores numéricos, mas também a partir das experiências relatadas durante sua utilização.

Nesse sentido, observa-se que um dos aspectos mais recorrentes nas falas dos

participantes está relacionado à possibilidade de trabalhar conteúdos que, no ensino tradicional, são percebidos como abstratos. Ao descreverem sua experiência com o simulador, os especialistas destacam que a visualização do comportamento das grandezas contribui para tornar mais compreensíveis relações que, quando apresentadas apenas por meio de cálculos ou representações estáticas, tendem a ser pouco acessíveis aos alunos, como pode ser observado no Quadro 6.

Quadro 6 – Percepções sobre a contribuição do simulador para a compreensão das relações entre grandezas

Na sua percepção, o simulador contribui para a compreensão da relação entre grandezas? De que forma?	
<i>Especialista A</i>	A possibilidade de alterar os sliders permite que o aluno visualize e atue como um investigador do objeto de estudo.
<i>Especialista B</i>	Sim, pois apresenta a relação entre as grandezas através de gráficos interativos.
<i>Especialista C</i>	Sim, mostrando com animação a relação.
<i>Especialista D</i>	Sem dúvida, ele contribui significativamente para a compreensão da relação entre grandezas ao simular um conceito que é bastante abstrato de difícil compreensão.

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Essa percepção aponta para uma mudança na forma de abordagem do conteúdo. O simulador não apenas apresenta o gráfico, mas permite acompanhar a sua construção em função das alterações realizadas nas variáveis, o que desloca o foco da atividade matemática da obtenção de um resultado para a análise do comportamento da relação. Esse aspecto se conecta diretamente com o diagnóstico pedagógico discutido anteriormente, no qual a principal dificuldade dos estudantes está associada à interpretação das relações, e não à execução de procedimentos.

A possibilidade de manipulação das variáveis constitui, nesse contexto, um dos elementos centrais do simulador. Ao alterar valores e observar, de forma imediata, os efeitos dessas alterações, o estudante passa a estabelecer relações entre diferentes representações, articulando valores numéricos, comportamento gráfico e interpretação da situação. Esse tipo de interação favorece uma compreensão mais dinâmica das relações entre grandezas, aproximando o estudante do processo de construção do conhecimento matemático.

Essa forma de organização da atividade pode ser compreendida a partir das contribuições de Balacheff (1994), ao discutir que ambientes informatizados estruturam o conhecimento a partir das ações que permitem. No caso do simulador, as possibilidades de manipulação definem o que pode ser explorado, orientando a maneira como o estudante se envolve com o conteúdo e constrói suas interpretações.

Ao lado do simulador, o caderno de exploração desempenha um papel importante na condução da atividade, ao propor situações que incentivam a análise, a previsão e a interpretação dos comportamentos observados. Essa articulação contribui para evitar um uso superficial do recurso, direcionando o estudante para uma exploração mais consistente das relações entre grandezas.

Por outro lado, as respostas dos especialistas também apontam aspectos que podem ser aprimorados, especialmente no que se refere à ampliação das situações propostas e à diversificação dos contextos de aplicação, como pode ser observado no Quadro 7. Essas sugestões indicam que o potencial do simulador está diretamente relacionado às possibilidades de exploração que ele oferece, sendo necessário ampliar os cenários de uso para favorecer uma compreensão mais abrangente do conteúdo. A diversidade de contextos aparece, nesse sentido, como um elemento relevante para a consolidação da aprendizagem, na medida em que permite ao estudante reconhecer padrões em diferentes situações e estabelecer conexões entre elas. Quando o conteúdo é trabalhado de forma restrita, a compreensão tende a permanecer localizada, enquanto a ampliação das situações favorece uma visão mais ampla das relações entre grandezas.

Quadro 7 – Sugestões para aprimoramento do produto educacional

Sugira melhorias ou adaptações que poderiam tornar o recurso mais eficaz.	
<i>Especialista B</i>	Aumentar os parâmetros para serem utilizados nas simulações.
<i>Especialista C</i>	O simulador está muito bom. O caderno necessita de ajustes nas análises.
<i>Especialista D</i>	No momento não tenho, o simulador atende àquilo que se propõe.

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Outro aspecto que pode ser considerado das respostas diz respeito à forma como o simulador é incorporado às práticas docentes. Durante a aplicação do roteiro, observou-se que, em determinados momentos, a tendência de priorizar o cálculo ainda se fazia presente, mesmo quando o ambiente favorecia a interpretação das relações. Esse comportamento indica que a introdução do simulador não altera, por si só, a forma como o conteúdo é abordado, sendo necessário considerar as concepções de ensino que orientam sua utilização. Em algumas situações, o recurso foi utilizado como apoio à resolução de exercícios, mantendo a lógica de ensino já estabelecida, em vez de promover uma reorganização da atividade. Esse movimento mostra que a forma de utilização do simulador depende diretamente das escolhas didáticas realizadas pelo professor durante a condução da aula.

Essa questão pode ser analisada a partir das discussões de Borba e Penteado (2001), ao destacarem que o uso de tecnologias no ensino de Matemática envolve

mudanças nas formas de pensar e produzir conhecimento, mas essas mudanças dependem das formas de apropriação por parte dos professores. O simulador, nesse sentido, apresenta um potencial de transformação, mas esse potencial se realiza de maneira distinta conforme o modo como é integrado à prática pedagógica. Quando o recurso é utilizado de forma articulada com a interpretação das relações entre grandezas, ele contribui para ampliar as possibilidades de análise; quando utilizado apenas como complemento, tende a reproduzir práticas já consolidadas. Dessa forma, a presença da tecnologia não garante, por si, mudanças no processo de ensino, sendo necessário considerar as condições em que ela é incorporada e os objetivos que orientam sua utilização.

8.4 Discussão e implicações para o desenvolvimento do simulador

A análise desenvolvida ao longo deste capítulo permite compreender o simulador de grandezas a partir de um conjunto de elementos que se articulam entre si: o diagnóstico pedagógico, a avaliação realizada pelos especialistas e as observações decorrentes da aplicação do roteiro. Essa articulação permite situá-lo em relação às práticas de ensino e às dificuldades associadas à aprendizagem das relações entre grandezas.

Ao considerar o diagnóstico pedagógico, torna-se aparente que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes não estão concentradas somente na execução de procedimentos, mas também na interpretação das relações entre variáveis e na compreensão do comportamento das grandezas. Essa constatação é retomada na avaliação do simulador, na medida em que os especialistas reconhecem, em suas respostas, que a possibilidade de visualização e manipulação contribui para tornar essas relações mais compreensíveis. O simulador, nesse sentido, aparece como uma proposta que responde a uma demanda concreta identificada no contexto de ensino.

A análise das respostas permite observar que a principal contribuição do simulador está na forma como ele reorganiza a atividade matemática. Ao possibilitar a manipulação de variáveis e a observação do comportamento das grandezas em tempo real, o simulador desloca o foco da atividade da obtenção de resultados para a análise de relações. Esse deslocamento cria condições para que o estudante construa interpretações mais consistentes, articulando diferentes formas de representação em um mesmo processo.

Essa reorganização está diretamente relacionada às possibilidades de ação definidas pelo próprio sistema. As formas de interação disponíveis, os tipos de representação e os limites de manipulação orientam a maneira como o conteúdo é explorado, o que se aproxima das discussões de Balacheff (1994) sobre o papel dos ambientes informatizados na estruturação do conhecimento. Nesse contexto, o simulador organiza

as condições em que ele pode ser compreendido.

Ao mesmo tempo, a análise mostra que o potencial do simulador depende das formas de uso que são construídas em sua aplicação. As observações realizadas durante o processo indicam que práticas consolidadas, especialmente aquelas centradas no cálculo, continuam a influenciar a forma como as atividades são conduzidas. Mesmo em um ambiente que favorece a interpretação, a busca por procedimentos ainda aparece como estratégia inicial em determinadas situações.

Essa coexistência entre diferentes formas de abordagem indica que a incorporação de tecnologias digitais ao ensino não implica, por si só, uma mudança nas práticas pedagógicas. Conforme discutem Borba e Penteado (2001), a utilização de tecnologias envolve transformações nas formas de pensar e produzir conhecimento, mas essas transformações dependem das formas de apropriação por parte dos professores. O simulador, nesse sentido, apresenta possibilidades que podem contribuir para a reorganização das práticas, mas sua efetividade está diretamente relacionada às estratégias de uso adotadas em sala de aula.

As sugestões apresentadas pelos especialistas reforçam essa compreensão ao apontarem a necessidade de ampliar as situações propostas e diversificar os contextos de aplicação. A ampliação das possibilidades de exploração se configura como um elemento importante para o fortalecimento do simulador enquanto recurso pedagógico. Quanto maior a diversidade de situações, maiores são as condições para que o estudante reconheça padrões, estabeleça relações e construa interpretações mais abrangentes.

Além disso, as observações decorrentes da aplicação retratam aspectos que contribuem para uma compreensão mais ampla do uso do simulador. Entre esses aspectos, destacam-se situações em que os participantes buscaram inicialmente resolver as atividades por meio de cálculos, bem como questionamentos sobre a possibilidade de representar graficamente determinadas situações de forma manual. Esses elementos indicam que o uso do simulador se insere em um contexto de práticas já estabelecidas, o que influencia diretamente sua apropriação.

Esse conjunto de elementos permite compreender que o desenvolvimento do simulador se constitui como um processo em constante construção. A análise realizada ao longo deste capítulo fornece subsídios para o aprimoramento do produto educacional, indicando caminhos que envolvem tanto ajustes na estrutura do simulador quanto a ampliação das possibilidades de uso em contexto pedagógico.

Nesse sentido, a pesquisa desenvolvida se aproxima da lógica da *Design Science Research*, na qual o processo de construção de soluções está diretamente vinculado à sua avaliação e ao seu refinamento. O simulador é compreendido como uma proposta que se transforma a partir das interações estabelecidas em sua aplicação.

Ao considerar essa perspectiva, o capítulo destaca que o simulador de grandezas

apresenta potencial para contribuir com o ensino da relação de dependência entre variáveis, ao mesmo tempo em que aponta a necessidade de continuidade no processo de desenvolvimento. Essa continuidade envolve a consolidação de formas de uso que favoreçam a exploração, a análise e a interpretação das relações matemáticas.

Dessa forma, a articulação entre diagnóstico, avaliação e reflexão permite compreender o simulador como uma proposta que dialoga com as demandas do ensino de Matemática, ao mesmo tempo em que abre possibilidades para o aprofundamento das práticas pedagógicas mediadas por tecnologias digitais.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento desta pesquisa possibilitou articular discussões relacionadas ao ensino de Matemática, à interpretação de gráficos, à programação computacional e à construção de ambientes de aprendizagem dinâmicos voltados ao contexto do Ensino Médio. Ao longo do trabalho, buscou-se compreender de que maneira a utilização de recursos computacionais pode contribuir para o ensino da relação de dependência entre grandezas, especialmente no âmbito da Competência 4 e da Habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM.

A análise das questões do ENEM deixou claro que a interpretação de gráficos e a compreensão da variação entre grandezas ocupam lugar recorrente nas avaliações da área de Matemática e suas Tecnologias. Entretanto, os estudos analisados e os dados discutidos ao longo da pesquisa indicam que muitos estudantes apresentam dificuldades persistentes na leitura e interpretação dessas representações, sobretudo em situações que exigem compreender comportamentos dinâmicos, estabelecer relações entre diferentes variáveis e interpretar mudanças na taxa de variação das grandezas envolvidas.

Nesse contexto, o desenvolvimento do SENVG buscou oferecer uma possibilidade de abordagem para essas dificuldades, integrando visualização tridimensional, construção dinâmica de gráficos e manipulação de parâmetros geométricos em um mesmo ambiente. A elaboração do simulador exigiu não apenas a implementação computacional das relações matemáticas associadas aos diferentes sólidos geométricos, mas também a organização de estratégias de representação capazes de manter coerência entre o comportamento físico simulado, os cálculos realizados pelo sistema e os gráficos apresentados ao usuário.

Ao longo da implementação, tornou-se evidente que recipientes com geometrias distintas produzem comportamentos gráficos significativamente diferentes, mesmo quando submetidos à mesma vazão. Enquanto o paralelepípedo e o cilindro favoreceram a exploração de relações lineares entre altura e tempo, os cones e a esfera permitiram discutir situações não lineares, nas quais a taxa de crescimento da altura varia continuamente ao longo do enchimento. Essas diferenças contribuíram para ampliar a compreensão sobre a influência da geometria dos recipientes na interpretação dos gráficos gerados.

A incorporação de questões reais do ENEM ao simulador ampliou ainda mais essa discussão, permitindo aproximar as simulações de situações efetivamente encontradas pelos estudantes em avaliações externas. A implementação dessas questões exigiu representar sistemas compostos, mudanças de regime e recipientes com comportamentos geométricos distintos, mostrando que a interpretação gráfica depende

diretamente da compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas envolvidas em cada situação.

Do ponto de vista teórico, a pesquisa também permitiu aprofundar o diálogo com discussões relacionadas aos ambientes informatizados de aprendizagem e à transposição informática. As contribuições de Balacheff mostraram-se particularmente relevantes para compreender que a inserção de recursos computacionais no ensino não se limita à digitalização de conteúdos já existentes, mas envolve transformações nas formas de representação, manipulação e organização do conhecimento matemático. Nesse sentido, o simulador foi concebido não apenas como um recurso ilustrativo, mas como um ambiente que possibilita ao estudante explorar relações dinâmicas entre grandezas, observar comportamentos gráficos e construir interpretações a partir da interação com diferentes representações.

A pesquisa também apontou que o desenvolvimento de um produto educacional envolve decisões que ultrapassam aspectos estritamente técnicos. A construção do simulador exigiu constantes reflexões sobre intencionalidade pedagógica, coerência conceitual e formas de representação matemática adequadas aos objetivos da aprendizagem. Ao traduzir relações matemáticas em algoritmos e representações gráficas, tornou-se possível explicitar aspectos conceituais que, muitas vezes, permanecem implícitos em abordagens tradicionais centradas apenas na resolução algébrica de exercícios.

Embora o trabalho tenha priorizado o desenvolvimento e a organização do simulador enquanto produto educacional, reconhece-se que ainda há possibilidades importantes de aprofundamento. A elaboração de sequências de ensino associadas ao SENVG poderá contribuir para investigar de maneira mais sistemática como estudantes interpretam os gráficos produzidos, quais estratégias mobilizam durante a exploração das simulações e de que forma o ambiente pode auxiliar na compreensão das relações entre grandezas.

Da mesma forma, futuras aplicações em contexto escolar poderão ampliar a compreensão sobre as potencialidades e os limites do simulador em situações reais de ensino. Investigações dessa natureza poderão considerar diferentes formas de mediação docente, distintos perfis de estudantes e variadas estratégias de utilização do ambiente em sala de aula, contribuindo para análises mais aprofundadas sobre os processos de aprendizagem envolvidos.

Por fim, compreende-se que o SENVG constitui um ambiente em constante possibilidade de ampliação e aperfeiçoamento. O percurso desenvolvido nesta pesquisa mostra que a integração entre modelagem matemática, programação computacional e visualização dinâmica pode contribuir para a construção de abordagens mais exploratórias e investigativas no ensino de Matemática. Assim, espera-se que este trabalho possa colaborar tanto com discussões relacionadas ao uso de tecnologias digitais no

ensino quanto com propostas voltadas à interpretação de gráficos e à compreensão das relações de dependência entre grandezas no contexto do Ensino Médio.

BIBLIOGRAFIA

BALACHEFF, Nicolas. **Bridging knowing and knowledge in technology-enhanced learning environments**. [S. l.: s. n.], 2006.

BALACHEFF, Nicolas. Didactique computationnelle: évocation d'un projet de recherche. In: ACTES des Journées EIAO. Cachan: [s. n.], 1994.

BALACHEFF, Nicolas. Knowledge, the keystone of TEL design. In: PROCEEDINGS of the Conference on Technology Enhanced Learning. [S. l.: s. n.], 2004.

BASNIAK, Maria Ivete; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; GAULOVSKI, Jucelene Maria. Tecnologias digitais e ensino da matemática no Brasil: uma revisão da literatura de 2010-2017. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 23, 2017. Ano 9, dezembro.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL; INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): histórico**. [S. l.: s. n.]. <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/historico>>. Acesso em: 12 dez. 2025.

BRASIL; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Matriz de Referência do ENEM**. Brasília: MEC/INEP, 2009.

BRAUM, Loreni Maria dos Santos; NASSIF, Vânia Maria Jorge. Entrepreneurship and resilience: a systematic literature review. **Revista de Administração da UFSM**, v. 15, n. 3, p. 556–574, 2022. DOI: <10.5902/1983465968134>.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. 2. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

COSTA JÚNIOR, José Ribamar da; SANTOS, Marcos André dos; SILVA, Ana Paula Souza da. Escala Likert: aplicações, potencialidades e limitações em pesquisas educacionais. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 10, n. 5, p. 1–15, 2024. DOI: <10.51891/rease.v10i5.XXXXX>.

DRESCH, Aline; LACERDA, Daniel Pacheco; ANTUNES, José Antonio Valle. **Design Science Research: método de pesquisa para avanço da ciência e tecnologia**. Porto Alegre: Bookman, 2015.

FERREIRA, E. M. **Análise da abrangência da matriz de referência do ENEM com relação às habilidades nos itens de matemática aplicados de 2009 a 2013**. 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade de Brasília, Brasília.

INEP. **Microdados do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. Brasília: [s. n.], 2024. Acesso em: 11 maio 2026. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br>>.

LÓS, Adriana Freire da Silva. **A visualização matemática na educação básica: dos percursos teóricos à resolução de problemas do ENEM**. 2021. Diss. (Mestrado). 122 f. Dissertação.

PASSOS, M. M.; OLIVEIRA, B. K.; SALVI, R. F. As questões de “Matemática e suas Tecnologias” do “novo ENEM”: um olhar com base na análise de conteúdo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 313–335, 2011. Acesso em: 14 nov. 2025. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/6113>>.

PEREIRA, Cinthia Cunha Maradei; COSTA, Acylena Coelho; ALVES, Fábio José da Costa. **O uso de Tecnologias no Ensino de Matemática**. Belém: UEPA, 2019. Volume 2, PMPEM.

SANTOS, Edilson Fernandes dos. **Um modelo para o desenvolvimento de software educativo**. 1999. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SINGH, Y. K. **Fundamental of Research Methodology and Statistics**. New Delhi: Newage International Ltd, 2006.

WISEU, Floriano; ROCHA, Helena. Percepções de professores de Matemática sobre o ensino de funções e sobre o uso de materiais tecnológicos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 113–139, 2018.

APÊNDICES

A ROTEIRO DE CONSULTA AOS ESPECIALISTAS

ROTEIRO PARA CONSULTA DOCENTE RELACIONADA A PESQUISA PARA O DESENVOLVIMENTO DE UM SIMULADOR EDUCACIONAL PARA NOÇÕES DE VARIAÇÕES DE GRANDEZAS

Simulador Digital SENVG e Caderno de Atividades

ETAPA 1 — ACOLHIMENTO E APRESENTAÇÃO

Agradecemos a disponibilidade de vocês em participar deste momento. Esta contribuição é fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa que tem como objetivo desenvolver e validar um simulador digital voltado ao ensino de relações entre grandezas, especialmente no contexto do ensino médio.

O trabalho está diretamente relacionado à habilidade 15 da competência 4 da matriz de referência do ENEM, que envolve a interpretação de informações expressas em gráficos e a compreensão da relação de dependência entre grandezas.

Este encontro faz parte da etapa de validação do produto educacional, na qual a análise de professores especialistas é essencial para identificar potencialidades, limitações e possibilidades de melhoria do material.

Ao longo do encontro, vocês terão a oportunidade de conhecer o simulador, explorar suas funcionalidades e avaliá-lo a partir de um instrumento estruturado.

ETAPA 2 — CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES

Preencha as informações abaixo:

Nome (opcional): _____

E-mail (opcional): _____

Idade:

- ☐ Até 25 anos
- ☐ 26 a 30 anos
- ☐ 31 a 40 anos
- ☐ 41 a 50 anos
- ☐ Acima de 50 anos

Formação acadêmica: _____

Possui pós-graduação?

- ☐ Não
- ☐ Especialização
- ☐ Mestrado
- ☐ Doutorado

Tempo de formado:

- ☐ Menos de 1 ano
- ☐ 1 a 5 anos
- ☐ 6 a 10 anos
- ☐ 11 a 20 anos
- ☐ Mais de 20 anos

Tempo de atuação no magistério:

- ☐ Menos de 1 ano
- ☐ 1 a 5 anos
- ☐ 6 a 10 anos
- ☐ 11 a 20 anos
- ☐ Mais de 20 anos

Tipo de escola em que atua:

- ☐ Pública
- ☐ Privada
- ☐ Ambas

Modalidade de ensino (pode marcar mais de uma):

- ☐ Ensino Fundamental
- ☐ Ensino Médio
- ☐ EJA
- ☐ Ensino Técnico
- ☐ Outro

Atua ou já atuou em cursinho preparatório para o ENEM?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Você trabalha com a matriz de referência do ENEM em suas aulas?

- ☐ Sim, frequentemente
- ☐ Às vezes
- ☐ Raramente
- ☐ Não

Você utiliza recursos digitais em suas aulas de Matemática?

- ☐ Sim, frequentemente
- ☐ Às vezes
- ☐ Raramente
- ☐ Não

Quais recursos digitais você utiliza?

ETAPA 3 — DIAGNÓSTICO PEDAGÓGICO

Esta etapa tem como objetivo compreender a percepção dos professores acerca das dificuldades dos estudantes na resolução de problemas que envolvem a relação entre grandezas, com ênfase na interpretação de gráficos, conforme previsto na habilidade H15 da matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

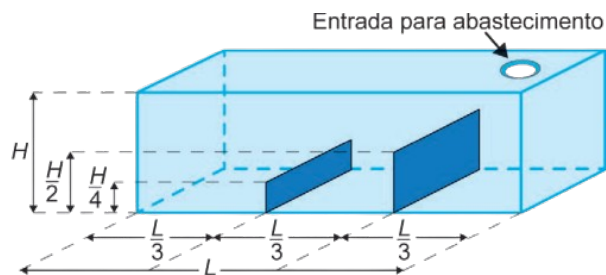
A referida habilidade está inserida na Competência de Área 4 — “Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano” — e demanda dos estudantes a capacidade de identificar relações de dependência entre variáveis, interpretar diferentes representações e compreender comportamentos de variação em contextos diversos.

As questões apresentadas a seguir foram selecionadas por representarem esse tipo de demanda cognitiva, sendo exemplos de itens que exigem do estudante a análise da relação entre grandezas a partir da interpretação de gráficos associados a contextos específicos.

Essa reflexão é fundamental para subsidiar as etapas seguintes, especialmente no que se refere à análise do potencial pedagógico do simulador digital, que será explorado como uma ferramenta de apoio à compreensão da relação entre grandezas.

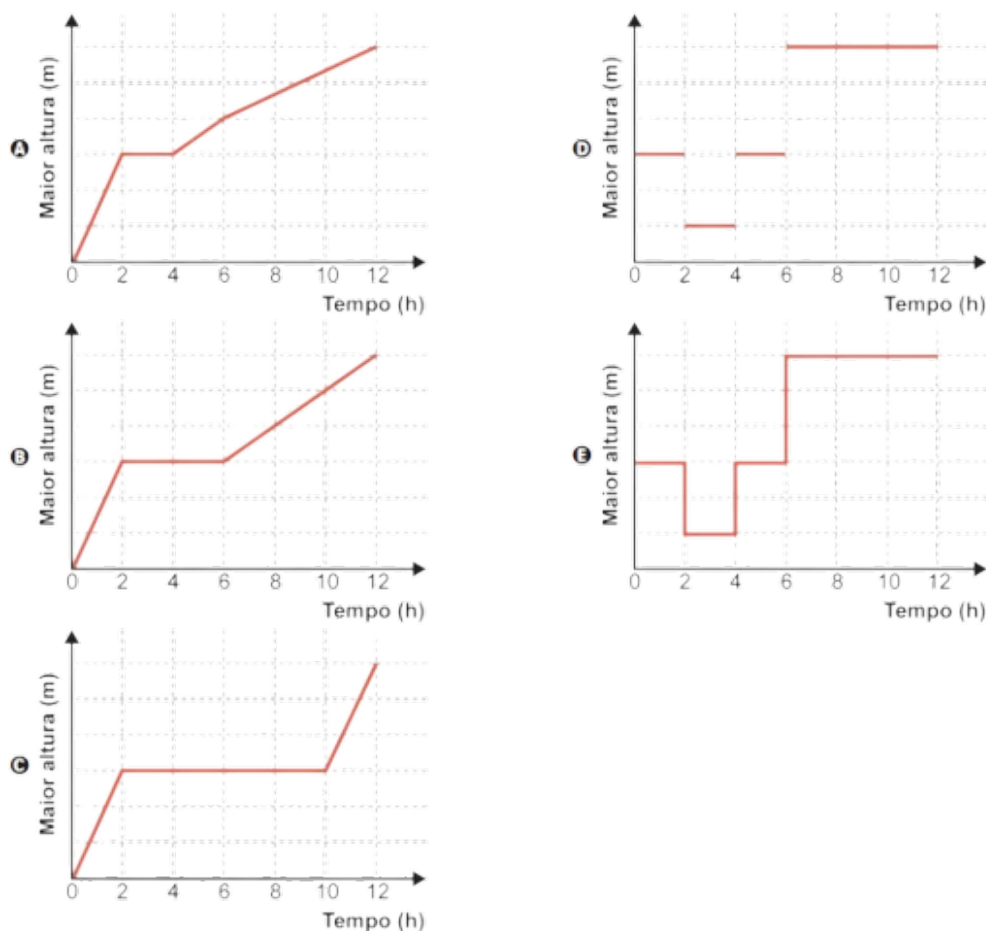
ENEM - 2024

Um tanque, em formato de paralelepípedo reto retângulo, tem em seu interior dois anteparos verticais, fixados na sua base e em duas paredes opostas, sendo perpendiculares a elas, conforme a figura.



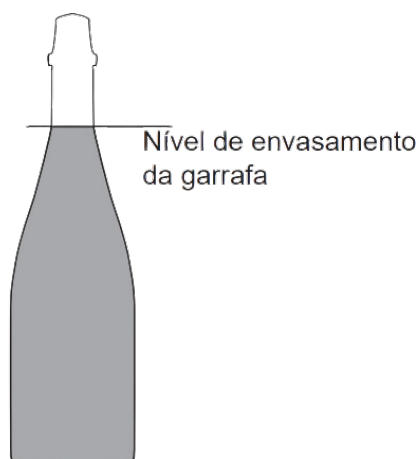
Esses anteparos, de espessuras desprezíveis, estão instalados de maneira a dividir a base do tanque em três retângulos congruentes, tendo suas alturas iguais à metade e a um quarto da altura do tanque. O tanque é abastecido por uma entrada situada no teto, através de um duto que despeja água a uma vazão constante, sendo necessárias 12 horas para finalizar o seu enchimento.

O gráfico que descreve, em cada instante, a maior altura de coluna de água, dentre aquelas que vão sendo formadas ao longo do enchimento do tanque, é

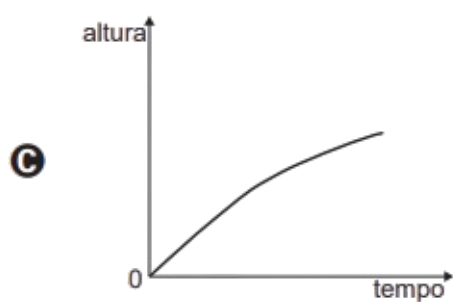
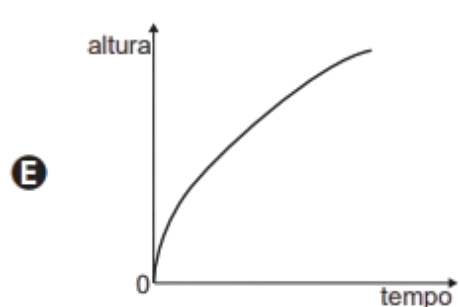
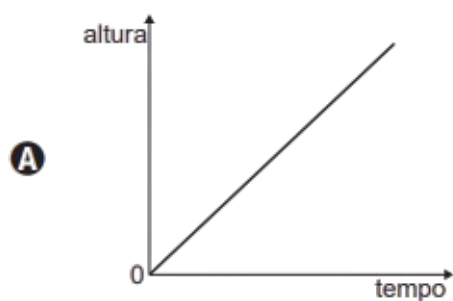


ENEM 2020 — QUESTÃO

O consumo de espumantes no Brasil tem aumentado nos últimos anos. Uma das etapas do seu processo de produção consiste no envasamento da bebida em garrafas semelhantes às da imagem. Nesse processo, a vazão do líquido no interior da garrafa é constante e cessa quando atinge o nível de envasamento.



Qual esboço de gráfico melhor representa a variação da altura do líquido em função do tempo, na garrafa indicada na imagem?

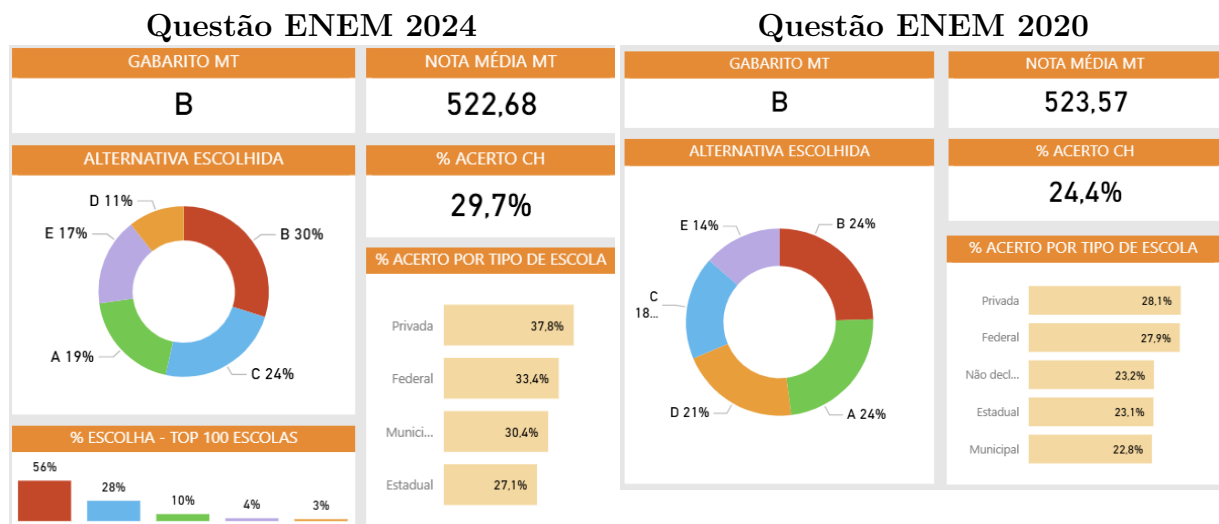


Análise do desempenho dos estudantes em questões do ENEM

As questões apresentadas anteriormente estão relacionadas à habilidade H15 da matriz de referência do ENEM, que envolve a identificação da relação de dependência entre grandezas a partir da interpretação de diferentes representações, especialmente gráficos.

Esse tipo de habilidade exige do estudante mais do que a aplicação de procedimentos matemáticos, busca avaliar a capacidade de interpretar informações, estabelecer relações entre variáveis e compreender comportamentos de variação em contextos diversos.

A seguir, são apresentados dados referentes ao desempenho dos estudantes nessas questões:



Observa-se que ambas as questões apresentam baixos índices de acerto, indicando que uma parcela significativa dos estudantes encontra dificuldades na resolução de situações que envolvem a interpretação da relação entre grandezas.

Esse resultado sugere que, mesmo quando os alunos possuem conhecimentos básicos de cálculo ou de leitura de gráficos, ainda há desafios importantes na compreensão do comportamento das grandezas envolvidas, especialmente em situações que exigem análise qualitativa, interpretação de contextos e compreensão de variações não lineares.

Além disso, a distribuição das respostas entre as alternativas incorretas indica que os estudantes tendem a adotar estratégias baseadas em interpretações parciais ou equivocadas das informações apresentadas, o que reforça a necessidade de abordagens pedagógicas que privilegiem a construção de significados e a articulação entre diferentes representações.

Reflexão

1. Você já tinha conhecimento de situações como essa?

2. Como você percebe a aprendizagem dos seus alunos ao trabalhar esse tipo de problema?

3. Como você costuma ensinar esse conteúdo?

4. Quais dificuldades você enfrenta ao ensinar esse conteúdo?

5. Quais erros os alunos costumam cometer ao interpretar gráficos desse tipo?

6. Você tem outras contribuições a respeito do tema?

ETAPA 4 — INTERAÇÃO COM O SIMULADOR E O CADERNO

Organização do momento

Cada professor deve estar:

- com computador ou notebook;
- com acesso ao simulador;
- com o caderno de atividades disponível (impresso ou digital).

Orientações para a atividade

Agora vocês terão acesso ao simulador digital e ao caderno de atividades.

A proposta é que utilizem o simulador da mesma forma que um aluno utilizaria, resolvendo as situações apresentadas e explorando o funcionamento da ferramenta.

Durante esse momento, sintam-se à vontade para comentar suas percepções, destacando aspectos que considerarem relevantes.

Durante a exploração, observe:

- clareza dos enunciados;
- facilidade de navegação;
- compreensão das atividades propostas;
- coerência entre o problema apresentado e a resolução;
- qualidade do feedback fornecido pelo sistema.

Observação: As percepções sobre o simulador serão registradas na etapa seguinte, por meio de um instrumento estruturado de avaliação.

ETAPA 5 — AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Instruções

Avalie os itens a seguir de acordo com sua percepção após a utilização do simulador e do caderno de atividades.

Utilize a seguinte escala:

- 1 — Discordo totalmente
- 2 — Discordo parcialmente
- 3 — Nem concordo nem discordo
- 4 — Concordo parcialmente
- 5 — Concordo totalmente

Organização

O simulador apresenta uma estrutura clara e organizada.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

As etapas de uso são compreensíveis.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Conteúdo

As situações-problema abordam corretamente o conteúdo matemático.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Os gráficos representam adequadamente as relações entre grandezas.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Relevância

O material é relevante para o ensino de relações entre grandezas.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

O recurso contribui para o desenvolvimento de habilidades do ENEM.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Transposição Informática

O simulador representa adequadamente o conceito matemático.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

A utilização do ambiente digital favorece a compreensão do conteúdo.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Interatividade

O simulador permite participação ativa do usuário.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

O feedback do sistema contribui para a aprendizagem.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Contextualização

As situações apresentadas são contextualizadas.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

O material dialoga com a realidade dos alunos.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Aplicabilidade

O simulador pode ser utilizado em sala de aula.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

O recurso é viável na realidade escolar.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Avaliação qualitativa

1. Quais são os principais pontos fortes do simulador e do caderno de atividades?

2. Que aspectos poderiam ser melhorados?

3. Você utilizaria esse recurso em sua prática docente? Justifique.

4. Na sua percepção, o simulador contribui para a compreensão da relação entre grandezas? De que forma?

5. Quais dificuldades dos alunos esse recurso pode ajudar a minimizar?

6. Há alguma limitação pedagógica ou conceitual no simulador? Explique.

7. Sugira melhorias ou adaptações que poderiam tornar o recurso mais eficaz.

ENCERRAMENTO

Agradecemos sinceramente a sua participação neste momento.

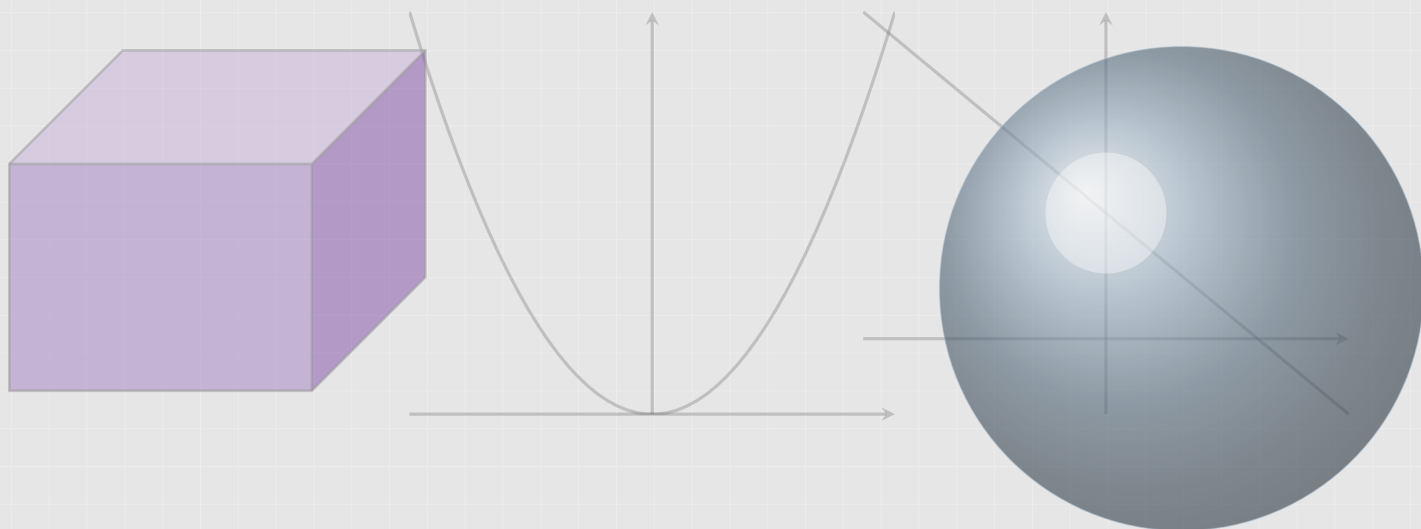
Suas contribuições são fundamentais para o aprimoramento deste produto educacional e para o desenvolvimento da pesquisa.

As análises realizadas a partir de suas respostas auxiliarão na identificação de potencialidades, limitações e possibilidades de melhoria do simulador e do caderno de atividades.

Sua colaboração contribui diretamente para a construção de propostas mais eficazes para o ensino de Matemática, especialmente no que se refere à compreensão da relação entre grandezas.

Muito obrigado pela sua participação!

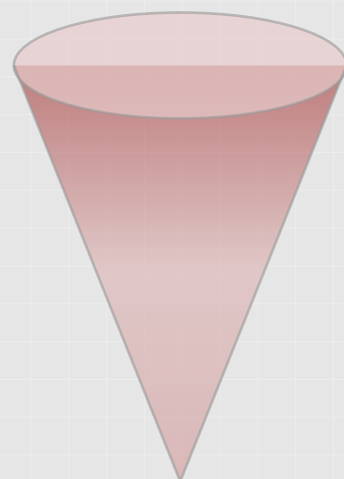
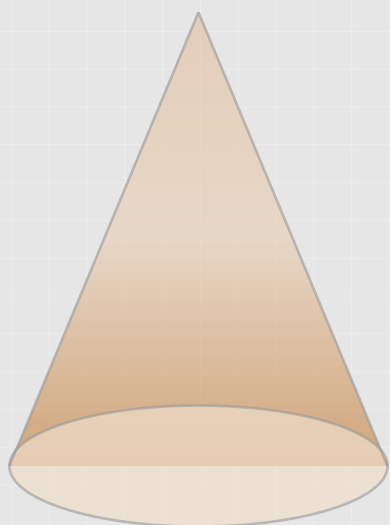
B CADERNO DE EXPLORAÇÃO DO SENVG



CADERNO DE EXPLORAÇÃO DO AMBIENTE

SENVG

SIMULADOR EDUCACIONAL DE NOÇÕES DE
VARIAÇÃO ENTRE GRANDEZAS



Ficha Técnica

Título: Simulador Educacional de Noções de Variação entre Grandezas (SENVG)

Autor: Renato Moraes da Silva

Orientador: Dr. Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

Coorientadora: Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira

Instituição: Universidade do Estado do Pará (UEPA)

Programa: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Local: Belém – PA

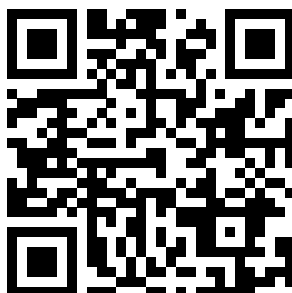
Ano: 2026

Tipo de Produto: Produto Educacional

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Palavras-chave: Variação entre grandezas; Funções; Ensino de Matemática; Tecnologias Educacionais; Simulação

O simulador pode ser acessado por meio do QR Code abaixo:



Link de acesso: <https://archive.org/details/SENVG>

Sumário

Apresentação	4
1 Familiarização com o Ambiente SENVG	5
2 Exploração 1: Paralelepípedo	7
3 Exploração 2: Cilindro	13
4 Exploração 3: Cone	18
5 Exploração 4: Cone Invertido	23
6 Exploração 5: Esfera	28
7 Explorando Situações Contextualizadas	32
8 Síntese Geral das Explorações	49
9 Avaliação da Aprendizagem	51
10 Desdobramentos Didático-Exploratórios do Ambiente SENVG	55

Apresentação

Este Caderno de Exploração foi elaborado com o objetivo de orientar a utilização do ambiente SENVG como instrumento de investigação sobre a relação entre forma geométrica e comportamento gráfico em situações de enchimento de recipientes sob vazão constante.

A proposta aqui apresentada não se configura como um manual técnico de uso do simulador, tampouco como uma coleção de exercícios. Trata-se de um roteiro investigativo estruturado, no qual o leitor é convidado a formular hipóteses, manipular variáveis, observar regularidades e construir interpretações a partir da análise de modelos geométricos distintos.

Ao longo do percurso, foram explorados recipientes cuja área transversal permanece constante, recipientes com área transversal variável de forma monotônica e recipientes cuja área transversal varia de maneira não monotônica. Essa progressão foi intencionalmente organizada para permitir a construção gradual da seguinte compreensão central: o comportamento gráfico da altura de um líquido submetido a vazão constante depende da área transversal disponível no nível considerado.

A exploração inicia-se com modelos simples, como o paralelepípedo e o cilindro, nos quais a linearidade do gráfico pode ser identificada com maior clareza. Em seguida, introduzem-se modelos que produzem comportamentos não lineares, como o cone, o cone invertido e a esfera, ampliando a análise para situações em que ocorre variação da taxa de crescimento da altura e mudança de concavidade. Posteriormente, são apresentadas situações avaliativas inspiradas em questões do ENEM, nas quais o conhecimento construído é mobilizado para interpretar contextos mais complexos e sistemas compostos.

Em todas as simulações propostas neste guia, adotou-se a condição de vazão constante, em consonância com a habilidade relacionada à interpretação da variação entre grandezas presente na Matriz de Referência do ENEM. Essa escolha permitiu focalizar a análise na influência da forma geométrica sobre a taxa de crescimento da altura, evitando interferências adicionais decorrentes da variação da vazão.

O ambiente SENVG, entretanto, não se limita às explorações aqui apresentadas. As atividades propostas constituem um ponto de partida para investigações futuras, nas quais outras variáveis, como a própria vazão ou a análise dos dados numéricos de volume e tempo, podem ser incorporadas.

Espera-se que este caderno contribua para o desenvolvimento de uma leitura estrutural de gráficos, na qual a interpretação não se restrinja à observação da curva, mas seja sustentada pela compreensão das relações geométricas que a originam. Ao articular forma, área transversal e taxa de variação, o percurso investigativo aqui delineado busca favorecer uma compreensão qualitativa consistente das relações entre grandezas.

1 Familiarização com o Ambiente SENVG

Antes de iniciar as explorações propostas neste caderno, é importante conhecer a estrutura do ambiente SENVG e compreender a função dos elementos que compõem sua interface.

Ao executar o simulador, a tela inicial apresenta o menu principal, no qual estão organizadas as opções de modelos geométricos e as situações avaliativas.

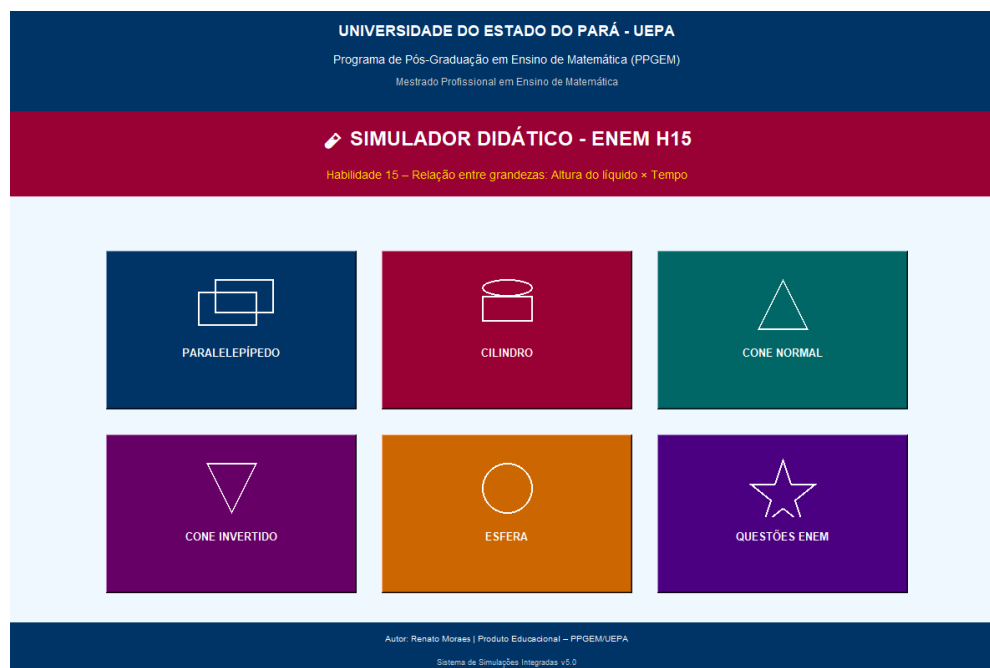


Figura 1.1: Tela inicial do ambiente SENVG

Ao seleccionar um dos modelos geométricos, o ambiente apresenta a tela de simulação correspondente.

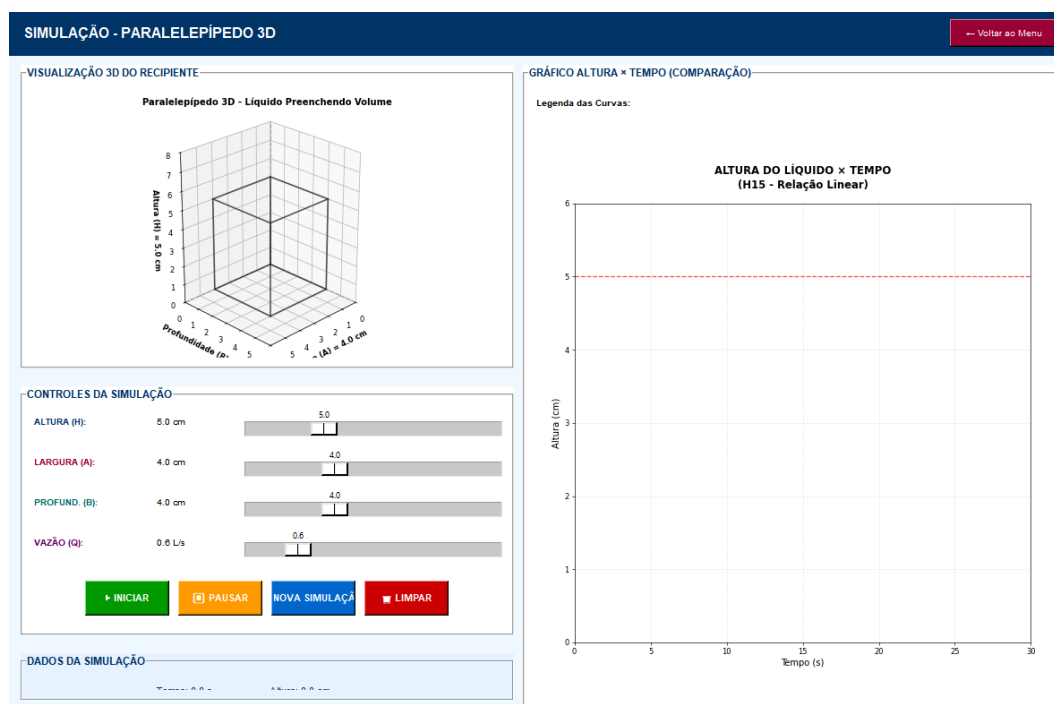


Figura 1.2: Exemplo de tela de simulação

Na tela de simulação, destacam-se os seguintes elementos:

- **Representação geométrica:** exibe o recipiente em três dimensões, permitindo acompanhar visualmente o enchimento.
- **Gráfico:** apresenta a variação da altura em função do tempo (ou volume, conforme o modelo).
- **Painel de parâmetros:** permite ajustar dimensões geométricas ou outras variáveis, quando disponíveis.
- **Botão Iniciar:** inicia o processo de enchimento.
- **Botão Pausar:** pausa o processo de enchimento.
- **Botão Nova Simulação:** gera nova execução mantendo as curvas anteriores.
- **Botão limpar:** limpa o gráfico.
- **Botão Voltar:** retorna ao menu principal.

Durante o enchimento, a altura do líquido é atualizada continuamente, permitindo observar a correspondência entre o fenômeno geométrico e sua representação gráfica.

Ao final do enchimento, o processo é automaticamente interrompido, sendo possível iniciar nova execução ou retornar ao menu.

Nas situações avaliativas, o funcionamento é simplificado: não há ajuste de parâmetros. O usuário deve apenas observar o enunciado e clicar em **Iniciar** para acompanhar o comportamento gráfico correspondente.

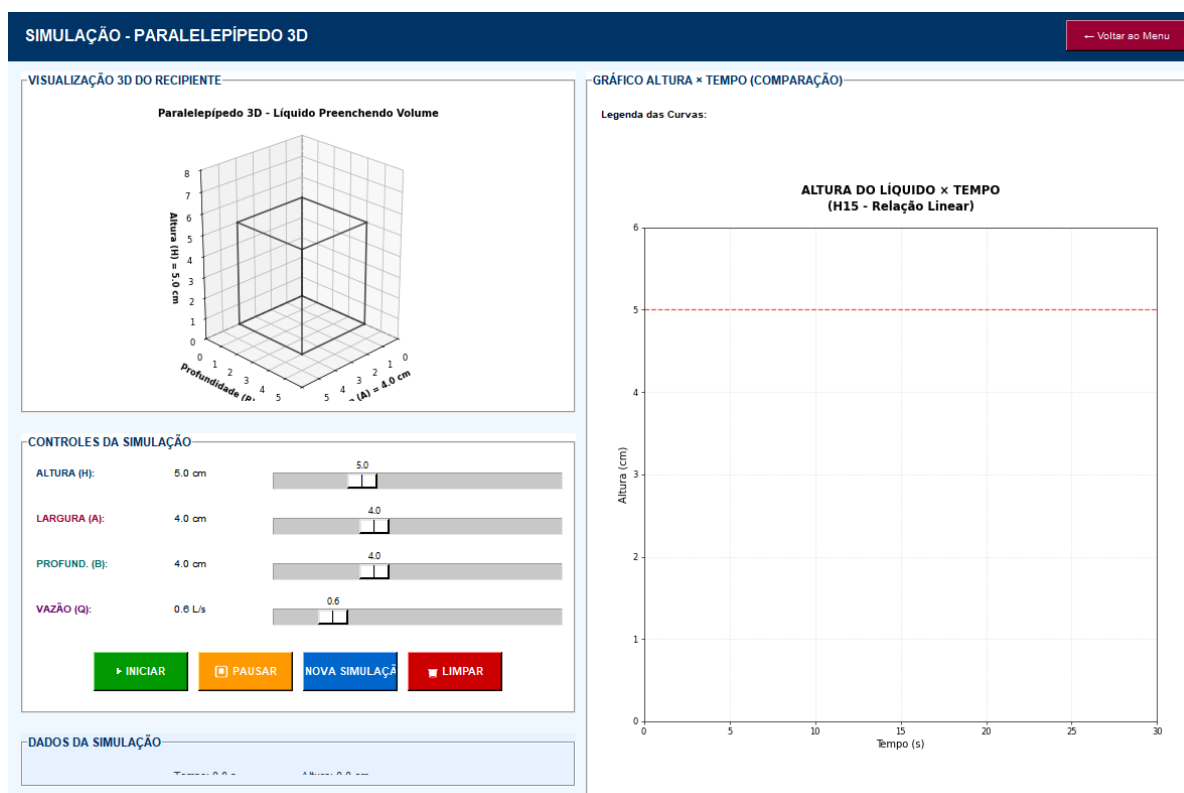


Figura 1.3: Tela de uma situação avaliativa

A familiarização com esses elementos é essencial para que as atividades propostas nas seções seguintes sejam realizadas com autonomia e segurança operacional.

Nos capítulos seguintes, o foco será deslocado da interface para a investigação das relações entre forma geométrica e comportamento gráfico.

2 Exploração 1: Paralelepípedo

O modelo do paralelepípedo inaugura as explorações no ambiente SENVG. Nesta atividade, investigaremos como a altura do líquido varia ao longo do tempo quando o recipiente possui base retangular. Ao seleccionar o modelo no menu principal, observe atentamente a interface apresentada.

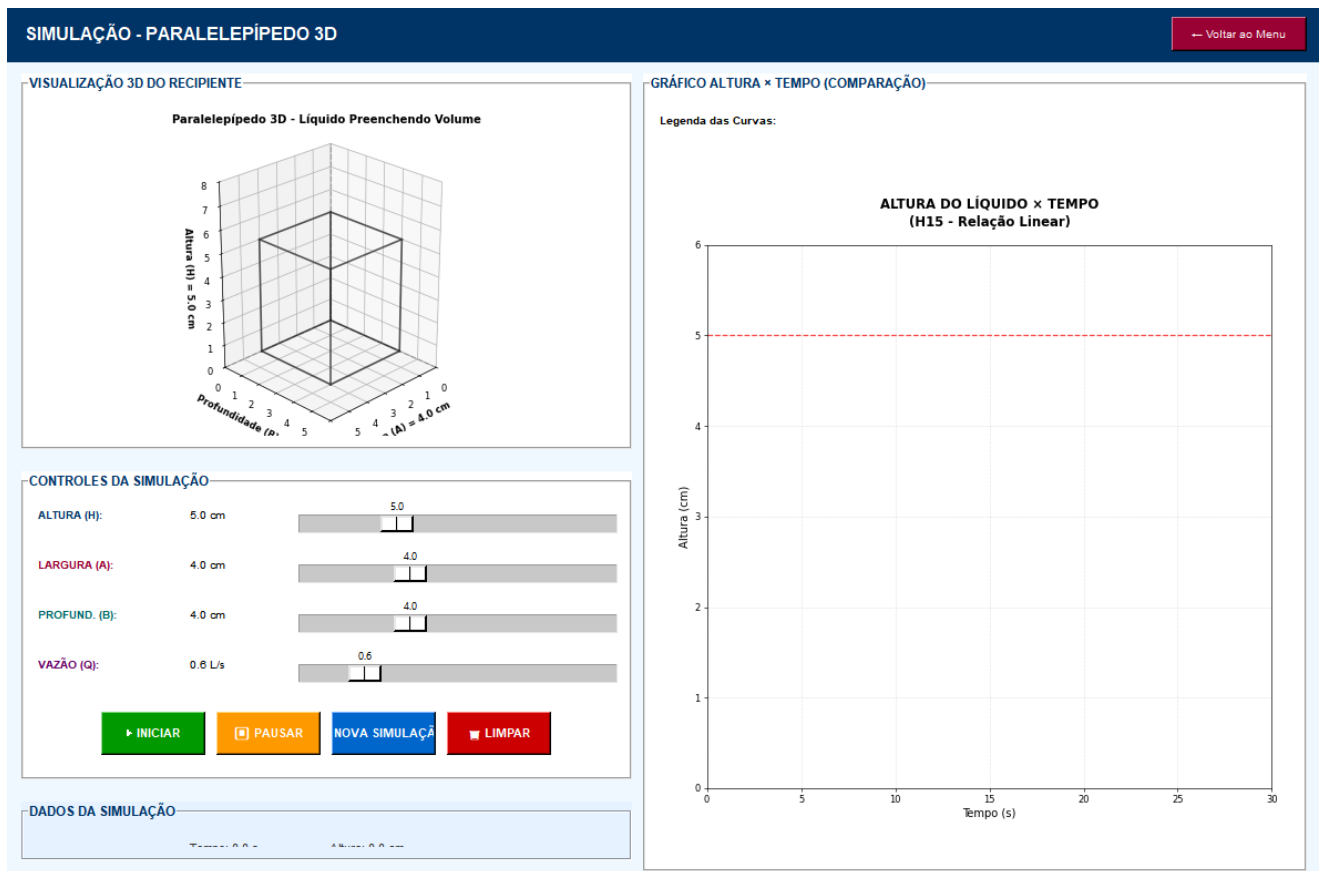


Figura 2.1: Interface da simulação do paralelepípedo

Na tela da simulação, identifique a representação tridimensional do recipiente, o espaço onde será estabelecido o gráfico $\text{Altura} \times \text{Tempo}$, o painel de parâmetros e os botões de controle.

Para todas as execuções deste capítulo, utilize a vazão máxima disponível no simulador.

Etapa 1 — Formulação de Hipótese

Antes de iniciar qualquer execução, reflita:

Como você imagina que será o comportamento do gráfico $\text{Altura} \times \text{Tempo}$ durante o enchimento do paralelepípedo?

Registre sua hipótese

Etapa 2 — Primeira Execução

Ajuste os parâmetros conforme indicado na imagem a seguir.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

ALTURA (H):	5.0 cm	<input type="range" value="5.0"/>
LARGURA (A):	2.0 cm	<input type="range" value="2.0"/>
PROFUND. (B):	2.0 cm	<input type="range" value="2.0"/>
VAZÃO (Q):	3.0 L/s	<input type="range" value="3.0"/>

▶ INICIAR [P] PAUSAR NOVA SIMULAÇÃO [X] LIMPAR

Figura 2.2: Configuração inicial dos parâmetros

Clique em **Iniciar** e acompanhe o enchimento até sua conclusão automática. Descreva o formato do gráfico observado.

Descrição do gráfico

O crescimento da altura ocorre de maneira uniforme ao longo do tempo?

Análise da taxa de crescimento

Etapla 3 — Investigação de Influência da Altura

Modifique apenas o valor da altura máxima conforme indicado na imagem.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

ALTURA (H):	3.0 cm	3.0	<input type="range" value="3.0"/>
LARGURA (A):	2.0 cm	2.0	<input type="range" value="2.0"/>
PROFUND. (B):	2.0 cm	2.0	<input type="range" value="2.0"/>
VAZÃO (Q):	3.0 L/s		<input type="range" value="3.0"/>

Figura 2.3: Alteração da altura máxima

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Compare a nova representação com a anterior.

O que se manteve? O que se alterou?

Comparação entre as execuções

Etapa 4 — Investigação da Área da Base

Agora altere a largura conforme indicado na imagem a seguir.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

ALTURA (H):	5.0 cm	5.0
LARGURA (A):	4.0 cm	4.0
PROFUND. (B):	2.0 cm	2.0
VAZÃO (Q):	3.0 L/s	3.0

Figura 2.4: Alteração da largura

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Descreva as diferenças observadas em relação às execuções anteriores.

Análise da modificação da largura

O tempo para atingir a altura máxima aumentou ou diminuiu?

Análise do tempo de enchimento

Etapas 5 — Ampliação da Área da Base

Ajuste agora os parâmetros conforme indicado na imagem.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

ALTURA (H):	5.0 cm	5.0
LARGURA (A):	4.0 cm	4.0
PROFUND. (B):	5.0 cm	5.0
VAZÃO (Q):	3.0 L/s	3.0

Figura 2.5: Ampliação da área da base

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Compare todas as execuções realizadas até o momento.

Relação entre área da base e comportamento gráfico

Sistematização

Com base nas observações realizadas ao longo das execuções, sintetize suas conclusões sobre a relação entre área da base e variação da altura.

Sistematização da exploração**Reflexão Final**

Escreva uma análise reflexiva a respeito do comportamento gráfico observado neste modelo.

Reflexão final

Após concluir esta exploração, clique no botão **Voltar** (localizado no canto superior esquerdo da tela) para retornar ao menu principal.

3 Exploração 2: Cilindro

Após a exploração do paralelepípedo, analisaremos agora o modelo do cilindro. Nesta atividade, o objetivo é investigar como a altura do líquido varia ao longo do tempo quando o recipiente possui base circular. Ao selecionar o cilindro no menu principal, observe atentamente a interface apresentada.

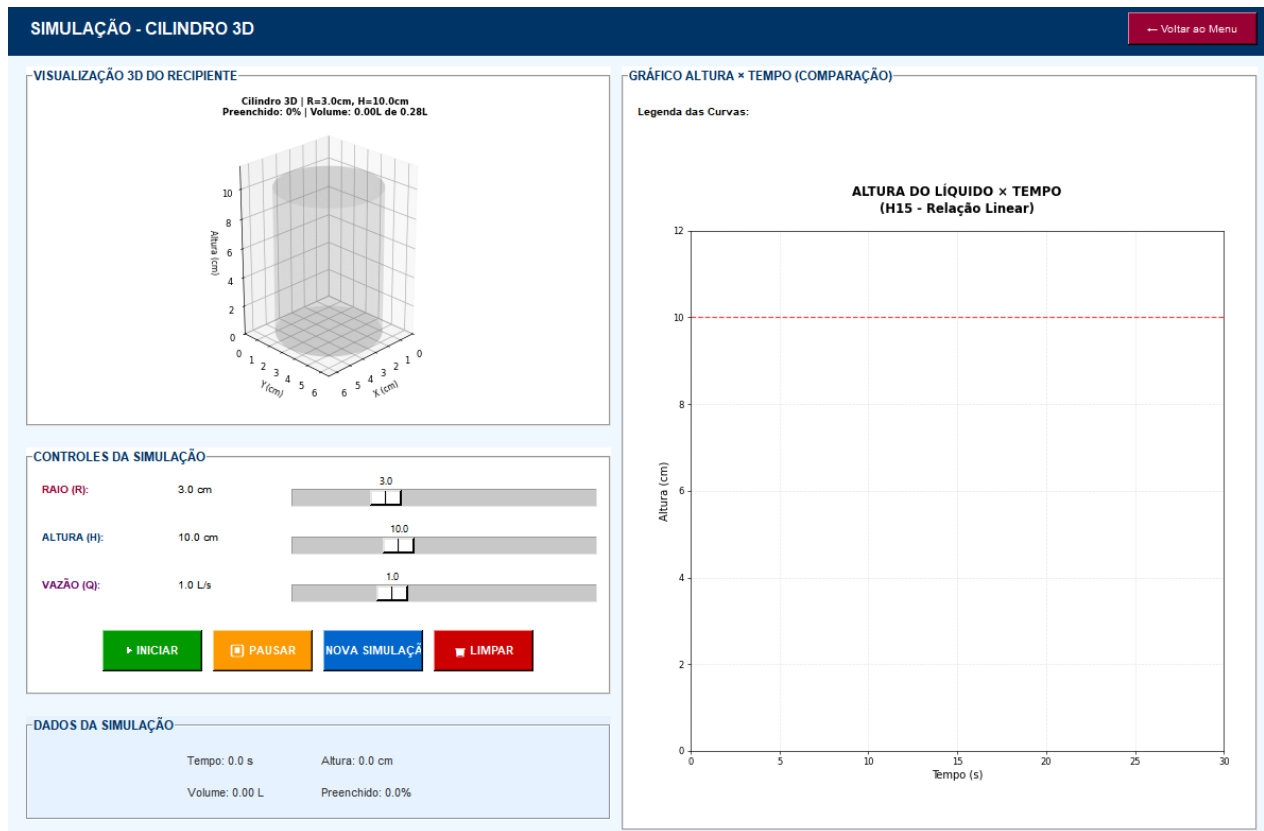


Figura 3.1: Interface da simulação do cilindro

Identifique novamente a representação tridimensional do sólido, o gráfico $\text{Altura} \times \text{Tempo}$, o painel de parâmetros e os botões de controle.

Para todas as execuções deste capítulo, utilize a vazão máxima disponível no simulador.

Etapas 1 — Formulação de Hipótese

Antes de executar a simulação, reflita:

O comportamento do gráfico $\text{Altura} \times \text{Tempo}$ no cilindro será semelhante ao observado no paralelepípedo? Justifique sua hipótese.

Registre sua hipótese

Etapa 2 — Primeira Execução

Ajuste os parâmetros conforme indicado na imagem a seguir.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

RAIO (R):	1.0 cm	1.0
ALTURA (H):	6.0 cm	6.0
VAZÃO (Q):	3.0 L/s	3.0

Figura 3.2: Configuração inicial do cilindro

Clique em **Iniciar** e acompanhe o enchimento até sua conclusão automática. Descreva o formato do gráfico observado.

Descrição do gráfico

Compare mentalmente com o gráfico obtido no paralelepípedo. Há semelhanças? Há diferenças?

Comparação com o modelo anterior

Etapa 3 — Investigação da Altura

Altere apenas a altura conforme indicado na imagem.

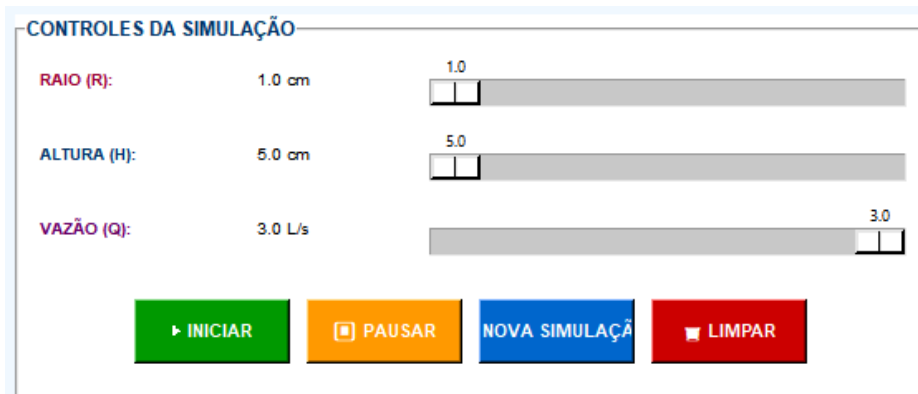


Figura 3.3: Alteração da altura no cilindro

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

O que se alterou no gráfico? O que permaneceu constante?

Análise da modificação da altura máxima

Etapa 4 — Investigação do Raio da Base

Agora altere o raio da base e a altura, conforme indicado na imagem a seguir.

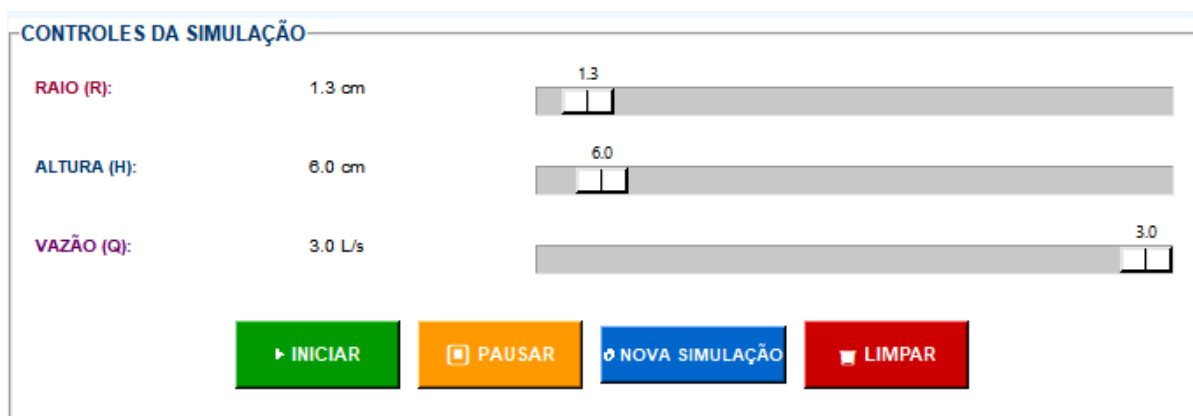


Figura 3.4: Alteração do raio da base

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Descreva as diferenças observadas no gráfico.

Análise da modificação do raio

O tempo para atingir a altura máxima aumentou ou diminuiu?

Análise do tempo de enchimento

Sistematização

Com base nas execuções realizadas, sintetize suas conclusões sobre a relação entre o tamanho da base circular e o comportamento do gráfico.

Sistematização da exploração

Reflexão Comparativa

Compare o comportamento observado no cilindro com aquele identificado no paralelepípedo. Que regularidades podem ser estabelecidas entre os dois modelos?

Reflexão comparativa

Após concluir esta exploração, clique no botão **Voltar** para retornar ao menu principal.

4 Exploração 3: Cone

Nesta exploração, investigaremos o comportamento do enchimento em um recipiente com formato cônico. Diferentemente dos modelos anteriores, o cone apresenta variação da área transversal ao longo da altura, o que pode produzir comportamento gráfico distinto.

Selecione o modelo do cone no menu principal e observe atentamente a interface apresentada.

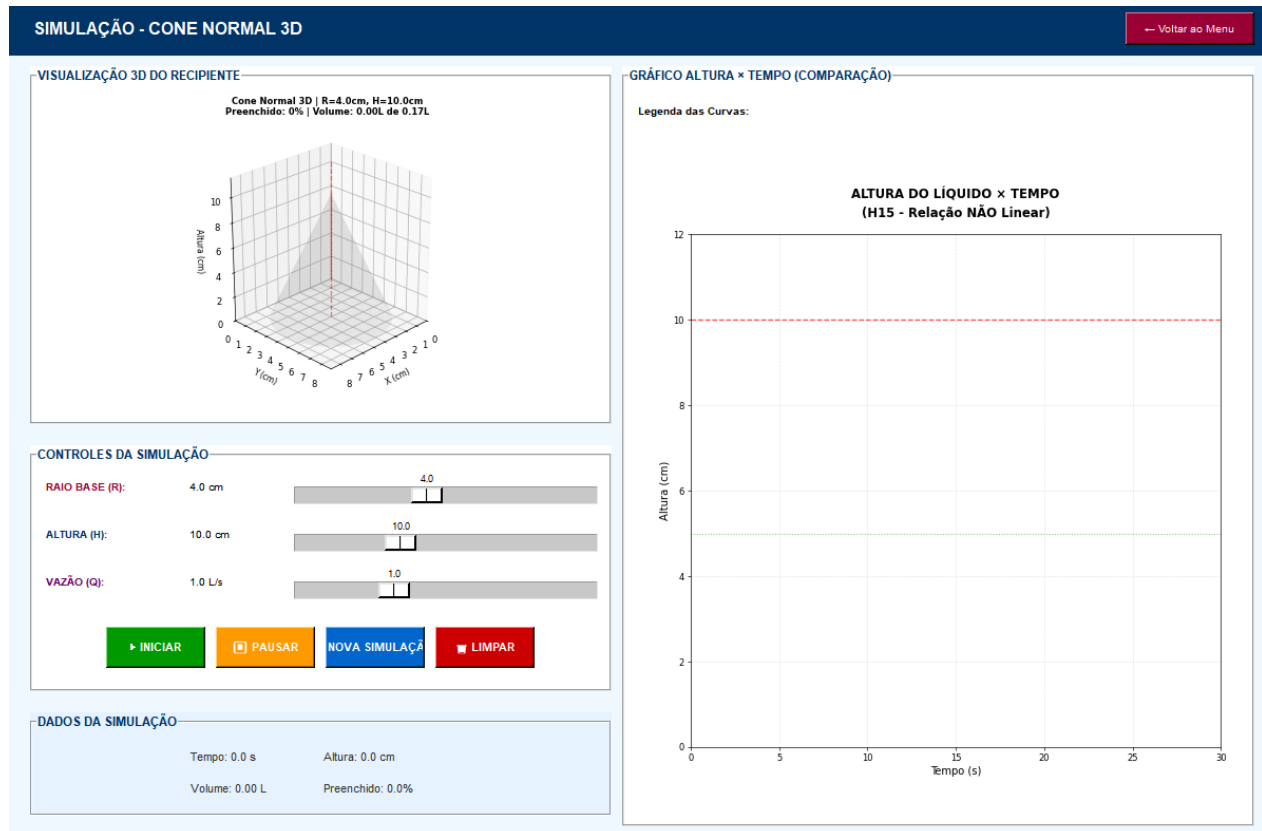


Figura 4.1: Interface da simulação do cone

Para esta exploração, utilize a vazão mínima disponível no simulador. A escolha da vazão mínima permite maior detalhamento visual da evolução do gráfico, tornando mais perceptível a variação da taxa de crescimento da altura ao longo do tempo.

Etapa 1 — Formulação de Hipótese

Considerando o formato do cone, como você imagina que será o comportamento do gráfico $\text{Altura} \times \text{Tempo}$ durante o enchimento?

Registre sua hipótese

Etapas 2 — Primeira Execução

Ajuste os parâmetros conforme indicado na imagem a seguir.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

RAIO BASE (R): 4.0 cm

ALTURA (H): 9.0 cm

VAZÃO (Q): 0.1 L/s

Figura 4.2: Configuração inicial do cone (raio e altura ampliados)

Clique em **Iniciar** e acompanhe o enchimento até sua conclusão automática.

Descreva o formato do gráfico observado.

Descrição do gráfico

A taxa de crescimento da altura permanece constante ao longo do tempo ou apresenta variação?

Análise da taxa de crescimento

Etapa 3 — Análise da Concavidade

Observe atentamente a forma da curva ao longo do tempo.

A representação gráfica apresenta concavidade voltada para cima ou para baixo?

Análise da concavidade

Em qual região do gráfico a variação da altura ocorre de maneira mais rápida: no início ou na parte final do enchimento?

Análise da variação da taxa

Etapa 4 — Investigação do Raio da Base

Altere o valor do raio conforme indicado na imagem.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

RAIO BASE (R):	8.0 cm	8.0
ALTURA (H):	9.0 cm	9.0
VAZÃO (Q):	0.1 L/s	0.1

Figura 4.3: Alteração do raio da base

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Compare as curvas obtidas.

Como a ampliação do raio influencia a forma da curva?

Análise da influência do raio

A concavidade se torna mais ou menos pronunciada quando o raio aumenta?

Análise da intensidade da concavidade

Etapa 5 — Investigação da Altura

Altere o valor da altura conforme indicado na imagem.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

RAIO BASE (R): 8.0 cm 8.0

ALTURA (H): 20.0 cm 20.0

VAZÃO (Q): 0.1 L/s 0.1

▶ INICIAR **■ PAUSAR** **NOVA SIMULAÇÃO** **🗑 LIMPAR**

Figura 4.4: Alteração da altura máxima

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Descreva como a alteração da altura influencia o domínio temporal da curva.

Análise da influência da altura

Sistematização

Com base nas observações realizadas, descreva como a variação da área transversal ao longo da altura influencia a taxa de crescimento da altura no cone.

Sistematização da exploração

Reflexão Prospectiva

Imagine agora o enchimento de um cone invertido (com a base maior na parte superior e o vértice na parte inferior). Como você imagina que seria o comportamento do gráfico Altura $\times$ Tempo nesse caso? A concavidade se manteria na mesma orientação?

Reflexão sobre o cone invertido

Após concluir esta exploração, clique no botão **Voltar** para retornar ao menu principal.

5 Exploração 4: Cone Invertido

Nesta etapa, analisaremos o comportamento do enchimento em um cone invertido, isto é, um recipiente cuja base maior está localizada na parte superior e o vértice na parte inferior.

Selecione o modelo do cone invertido no menu principal e observe atentamente a interface apresentada.

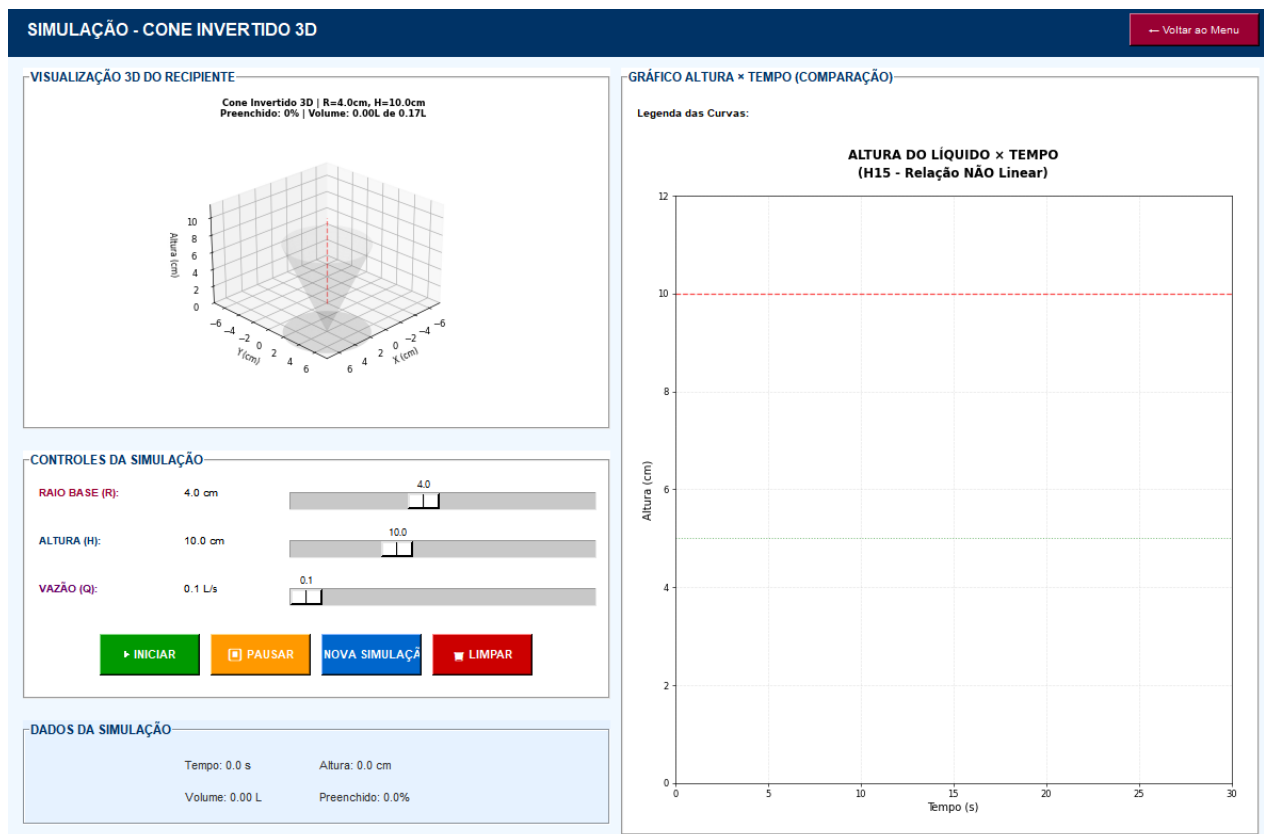


Figura 5.1: Interface da simulação do cone invertido

Assim como na exploração do cone, utilize a vazão mínima disponível no simulador, a fim de tornar mais perceptível a variação da taxa de crescimento da altura ao longo do tempo.

Etapa 1 — Formulação de Hipótese

Antes de executar a simulação, reflita:

Considerando que a base maior está agora na parte inferior do recipiente, como você imagina que será o comportamento do gráfico *Altura x Tempo*?

Registre sua hipótese

Etapa 2 — Primeira Execução

Ajuste os parâmetros conforme indicado na imagem a seguir.

CONTROLES DA SIMULAÇÃO

RAIO BASE (R):	4.0 cm	4.0
ALTURA (H):	10.0 cm	10.0
VAZÃO (Q):	0.1 L/s	0.1

Figura 5.2: Configuração inicial do cone invertido

Clique em **Iniciar** e acompanhe o enchimento até sua conclusão automática. Descreva o formato do gráfico observado.

Descrição do gráfico

A taxa de crescimento da altura permanece constante ou apresenta variação?

Análise da taxa de crescimento

Etapa 3 — Investigação da Altura Máxima

Altere apenas a altura máxima conforme indicado na imagem.

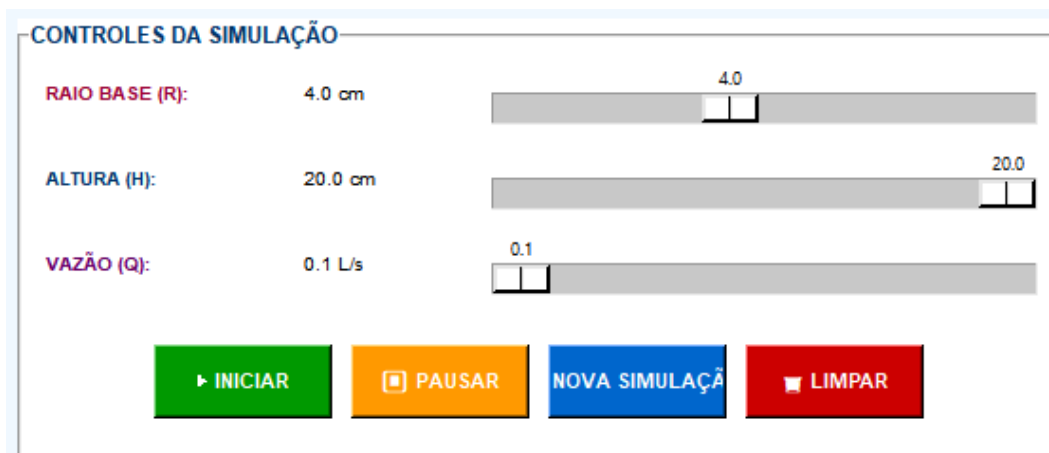


Figura 5.3: Alteração da altura máxima no cone invertido

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Compare as curvas obtidas. A alteração da altura modifica a orientação da concavidade ou apenas o domínio temporal da curva?

Análise da influência da altura

Etapa 4 — Investigação do Raio da Base

Agora altere o raio da base conforme indicado na imagem.

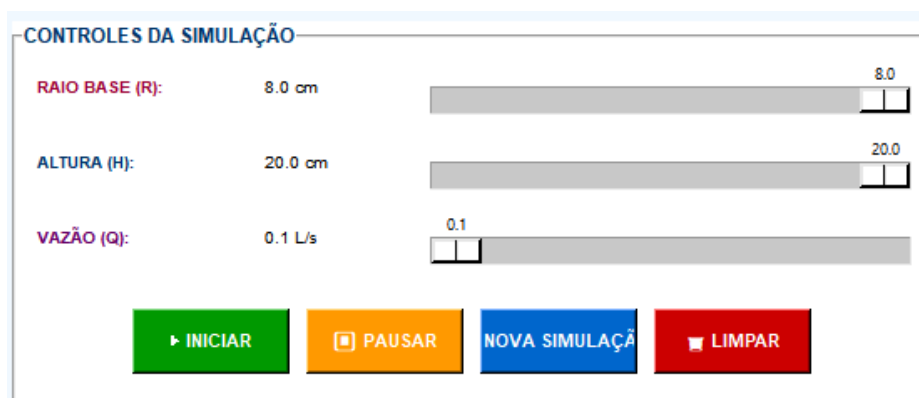


Figura 5.4: Alteração do raio da base

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Descreva como a alteração do raio influencia a intensidade da concavidade da curva.

Análise da influência do raio

Em qual região do enchimento a variação da altura ocorre mais rapidamente: no início ou na parte final do processo?

Análise da variação da taxa

Sistematização

Com base nas observações realizadas, descreva como a posição da base maior (inferior ou superior) influencia a orientação da concavidade do gráfico.

Sistematização da exploração**Reflexão Comparativa**

Compare os gráficos obtidos no cone e no cone invertido.

Quais diferenças podem ser identificadas na orientação da concavidade? Como a variação da área transversal ao longo da altura explica essas diferenças?

Reflexão comparativa

Após concluir esta exploração, clique no botão **Voltar** para retornar ao menu principal.

6 Exploração 5: Esfera

Nesta exploração, investigaremos o comportamento do enchimento em um recipiente esférico. Diferentemente dos modelos anteriores, a esfera apresenta variação da área transversal ao longo de toda a altura, o que pode produzir comportamento gráfico mais complexo.

Selecione o modelo da esfera no menu principal e observe atentamente a interface apresentada.

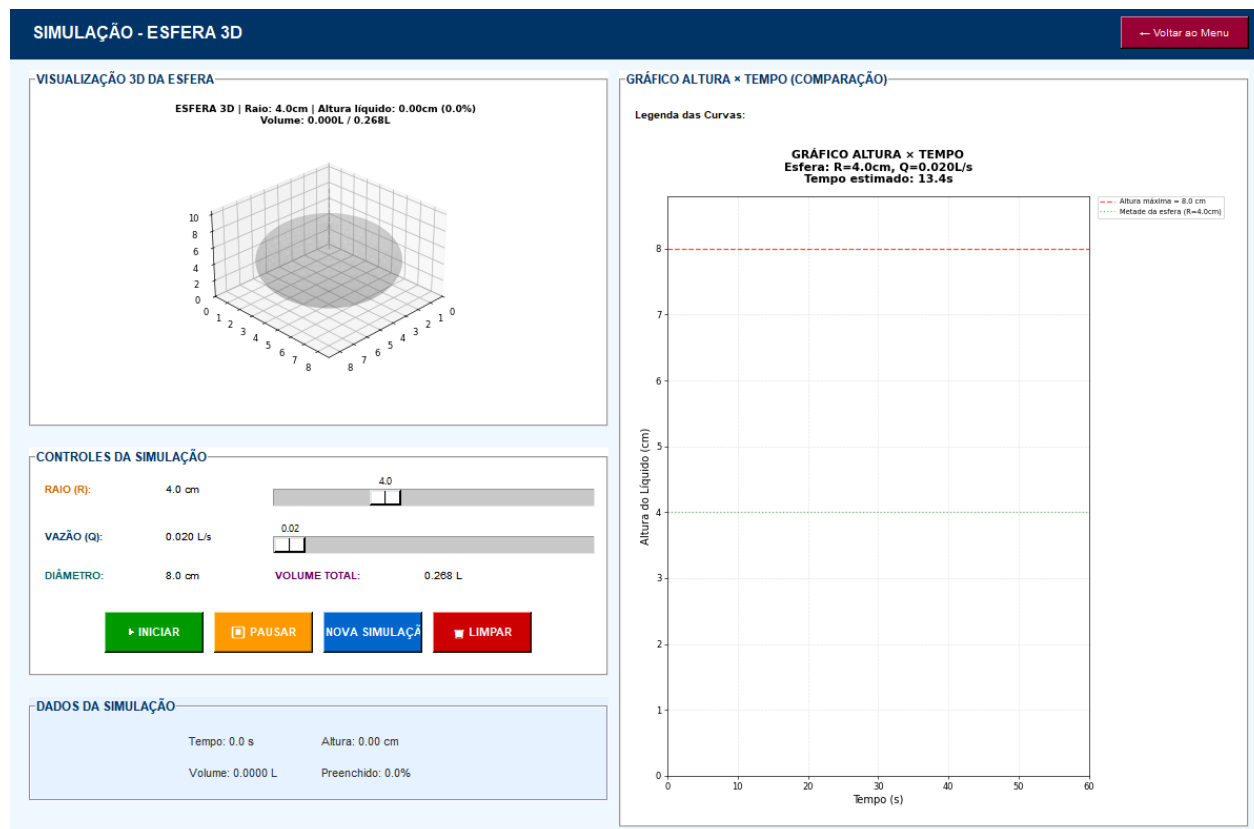


Figura 6.1: Interface da simulação da esfera

Para esta exploração, utilize a vazão mínima disponível no simulador. A escolha da vazão mínima permite maior detalhamento visual da evolução do gráfico, tornando perceptível a variação da taxa de crescimento da altura ao longo do tempo. Diferentemente dos modelos anteriores, nesta simulação há apenas um parâmetro ajustável: o raio da esfera. A altura máxima é determinada automaticamente pelo próprio raio.

Etapa 1 — Formulação de Hipótese

Antes de iniciar a simulação, reflita: Como você imagina que será o comportamento do gráfico Altura $\times$ Tempo durante o enchimento da esfera?

Registre sua hipótese

Etapa 2 — Primeira Execução

Ajuste o raio conforme indicado na imagem.

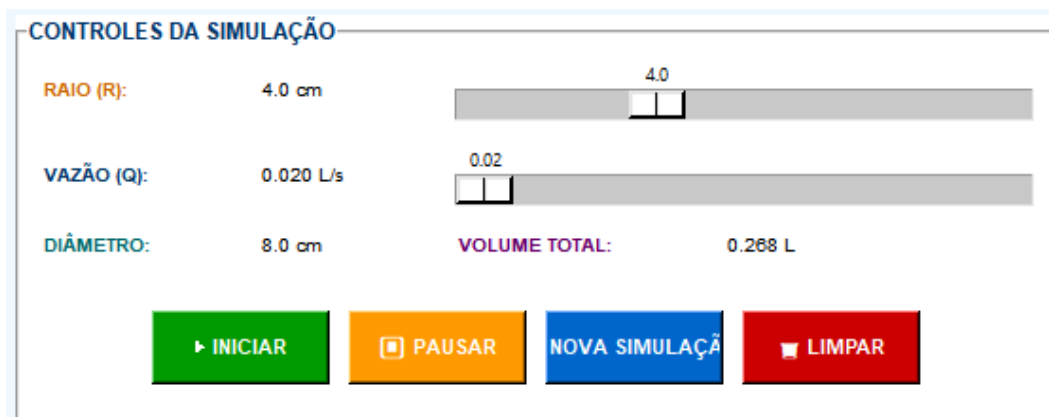


Figura 6.2: Configuração inicial da esfera

Clique em **Iniciar** e acompanhe atentamente o enchimento até sua conclusão automática. Descreva o formato geral do gráfico observado.

Descrição do gráfico**Etapa 3 — Análise da Curvatura**

Observe atentamente o início, a região intermediária e o final do gráfico.

A concavidade da curva mantém a mesma orientação durante todo o processo?

Análise da concavidade

Em qual região do enchimento a variação da altura ocorre mais rapidamente?

Análise da variação da taxa

Existe um ponto no qual o comportamento da curva parece mudar? Descreva esse momento.

Identificação de possível ponto de inflexão

Etapa 4 — Investigação do Raio

Altere o valor do raio conforme indicado na imagem.

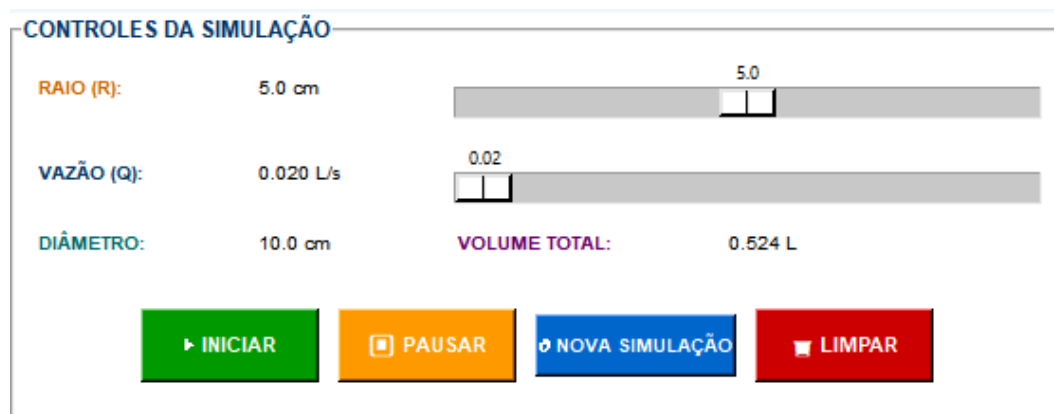


Figura 6.3: Alteração do raio da esfera

Clique em **Nova Simulação** e depois em **Iniciar**.

Descreva como a ampliação do raio influencia a forma geral da curva e a região de mudança de concavidade.

Análise da influência do raio

Sistematização

Com base nas observações realizadas, explique como o formato da esfera influencia a variação da taxa de crescimento da altura ao longo do tempo.

Sistematização da exploração

Reflexão Final

Compare o comportamento gráfico da esfera com os modelos anteriores (paralelepípedo, cilindro, cone e cone invertido). O que torna o comportamento da esfera distinto dos demais? Como a variação da área transversal ao longo da altura explica a mudança de concavidade observada?

Reflexão comparativa final

Após concluir esta exploração, clique no botão **Voltar** para retornar ao menu principal.

7 Explorando Situações Contextualizadas

Após a investigação dos diferentes modelos geométricos no ambiente SENVG, analisaremos agora situações avaliativas inspiradas em questões do ENEM.

O objetivo desta seção não é realizar cálculos formais, mas interpretar o comportamento gráfico das situações apresentadas à luz das regularidades construídas nas explorações anteriores.

Para acessar esta seção no simulador, clique no botão **Questões do ENEM** no menu principal. Será exibido o menu com as situações disponíveis.

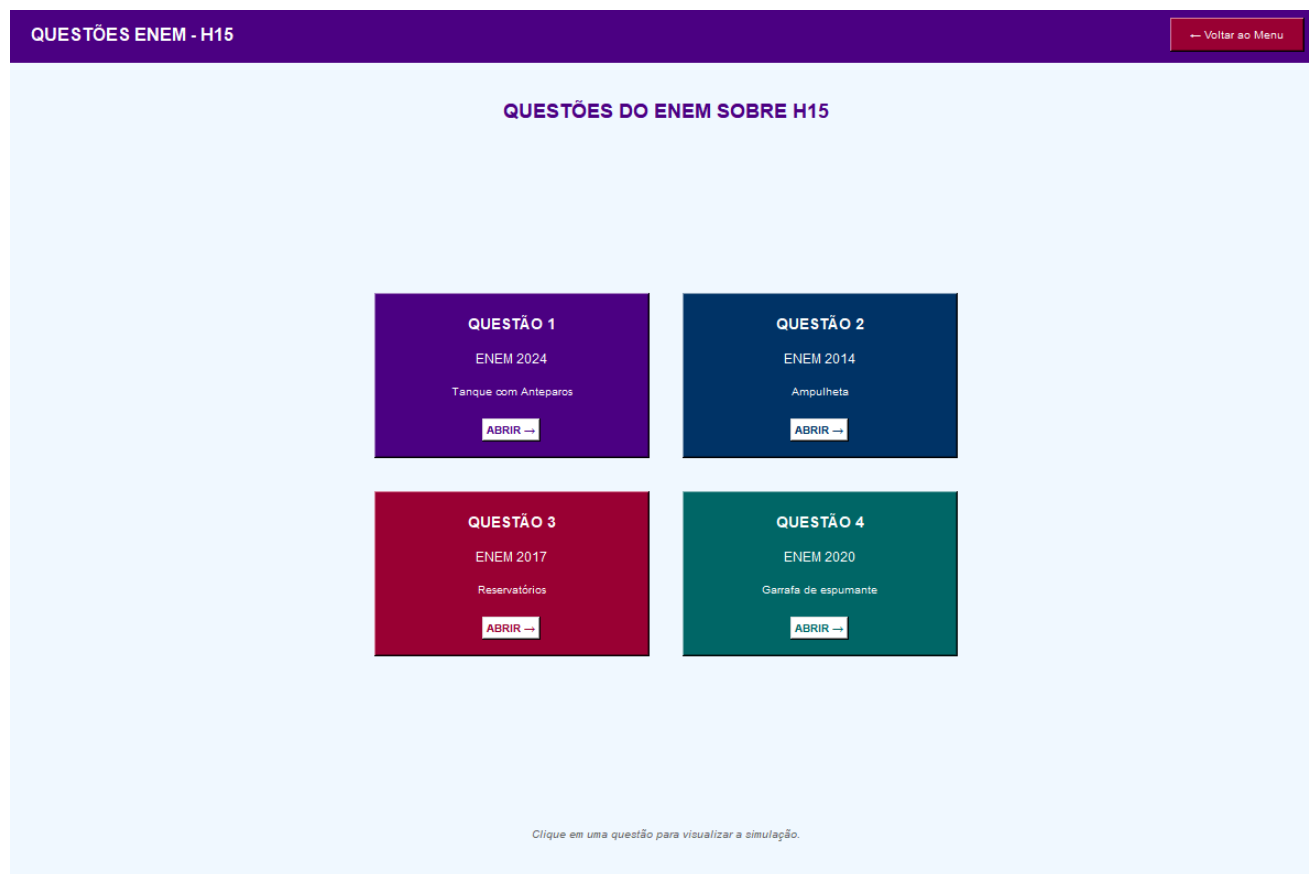


Figura 7.1: Menu das Questões do ENEM

Nesta parte do ambiente não há ajuste de parâmetros. Cada situação já se encontra configurada. O usuário deve apenas clicar em **Iniciar** para observar o comportamento gráfico correspondente.

Situação 1 — Tanque com Anteparos Internos

Leia atentamente a situação apresentada no simulador.

Um tanque, em formato de paralelepípedo reto retângulo, tem em seu interior dois anteparos verticais, fixados na base e em duas paredes opostas, sendo perpendiculares a elas, conforme a figura.

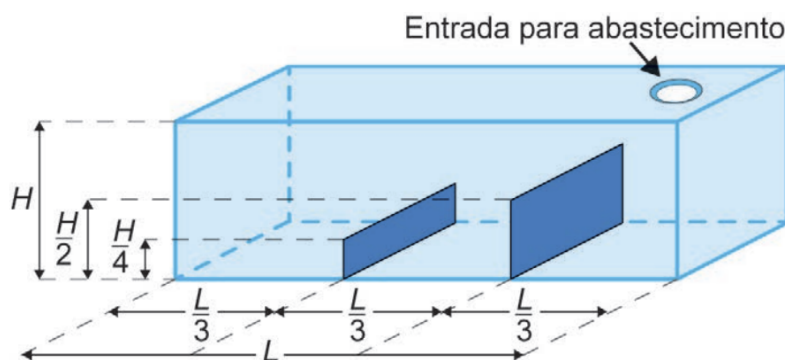


Figura 7.2: Tanque com anteparos internos

Esses anteparos, de espessuras desprezíveis, estão instalados de maneira a dividir a base do tanque em três retângulos congruentes, tendo suas alturas iguais à metade e a um quarto da altura do tanque. O tanque é abastecido por uma entrada situada no teto, através de um duto que despeja água a uma vazão constante, sendo necessárias 12 horas para finalizar o seu enchimento.

Etapa 1 — Análise Estrutural

A presença dos anteparos altera a forma como a água ocupa o interior do tanque?

Análise da estrutura interna

A área transversal disponível para o avanço da altura da água permanece constante durante todo o enchimento ou sofre alterações ao longo do processo?

Análise da variação da área transversal

Etapa 2 — Antecipação do Comportamento

Considerando que a vazão é constante e que, a cada instante, deve-se observar a maior altura de coluna de água formada no interior do tanque, descreva como você imagina que será o comportamento do gráfico Altura $\times$ Tempo ao longo das 12 horas.

Antecipação do comportamento gráfico

Você espera comportamento linear durante todo o processo? Justifique.

Justificativa da hipótese

Etapa 3 — Execução no Simulador

No menu **Questões do ENEM**, selecione a Situação 1.

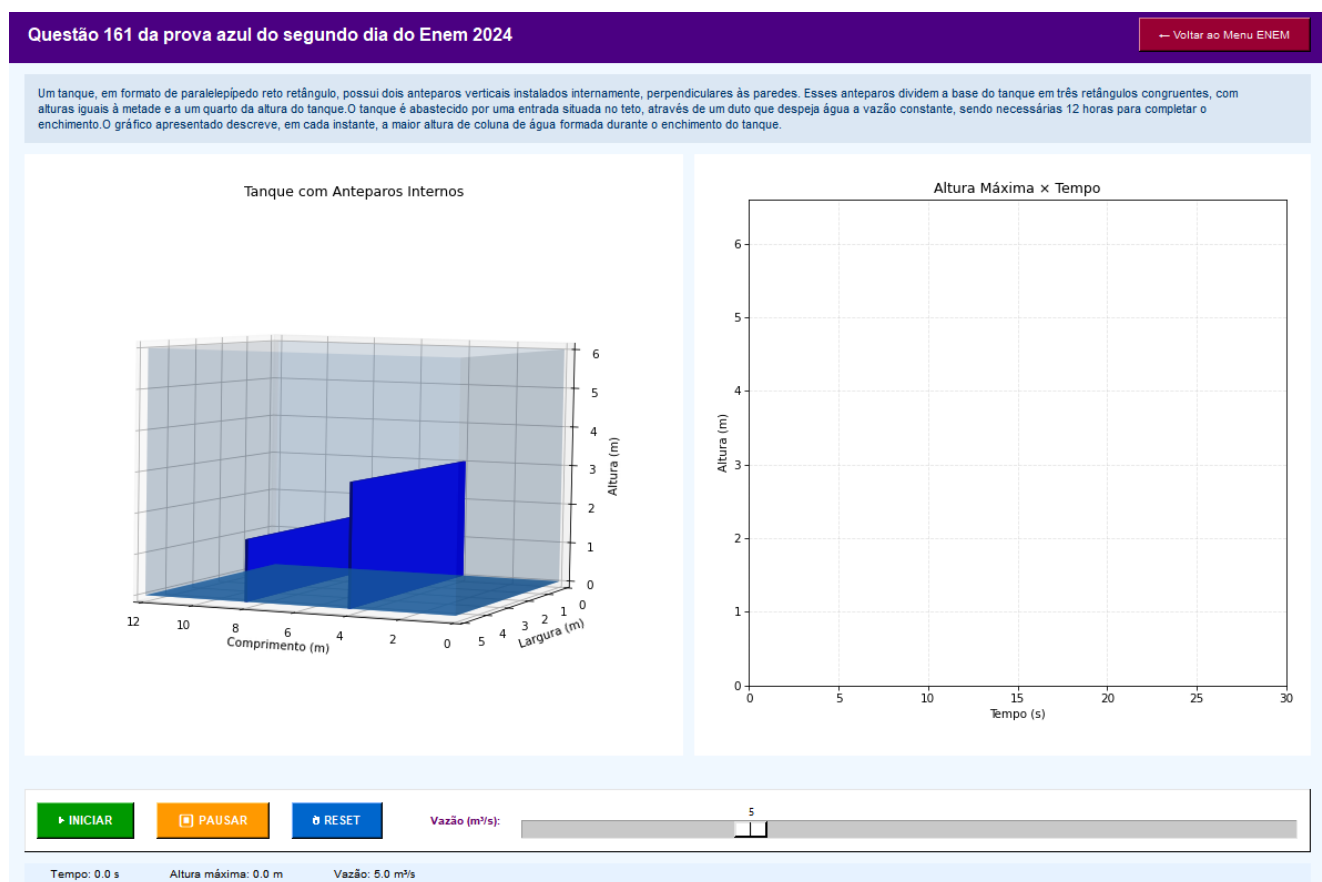


Figura 7.3: Simulação questão 1

Clique em **Iniciar** e observe atentamente o comportamento do gráfico durante todo o processo de enchimento.

Etapa 4 — Análise do Comportamento Observado

O comportamento gráfico observado confirmou sua hipótese inicial?

Comparação entre hipótese e observação

Em quais intervalos de tempo a taxa de crescimento da altura se altera?

Identificação de variações na taxa

Como a presença dos anteparos explica as variações observadas no gráfico?

Relação entre geometria interna e comportamento gráfico

Síntese da Situação

Explique, com base nos modelos estudados anteriormente, por que o gráfico apresenta comportamentos distintos ao longo do enchimento.

Síntese conceitual

Após concluir esta situação, clique no botão **Voltar** para retornar ao menu das questões.

Situação 2 — Escultura em Forma de Ampulheta

Leia atentamente a situação apresentada a seguir.

Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.

No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é investigado por meio da simulação.

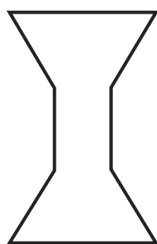


Figura 7.4: Escultura em formato de ampulheta

Etapa 1 — Análise Estrutural

Observe que a escultura é composta por três partes de mesma altura: um tronco de cone inferior, um cilindro central e um tronco de cone superior.

A área transversal permanece constante em todas as partes da escultura?

Análise da variação da área transversal

Em qual região a área transversal é constante? Em quais regiões ela varia?

Identificação das regiões

Etapa 2 — Antecipação do Comportamento Gráfico

Considerando que a vazão é constante, como você imagina que será o comportamento do gráfico Altura $\times$ Tempo ao longo do enchimento?

Antecipação do comportamento gráfico

Você espera comportamento uniforme em toda a escultura ou mudanças na taxa de crescimento da altura? Justifique.

Justificativa da hipótese

Etapa 3 — Execução no Simulador

No menu **Questões do ENEM**, selecione a Situação 2.

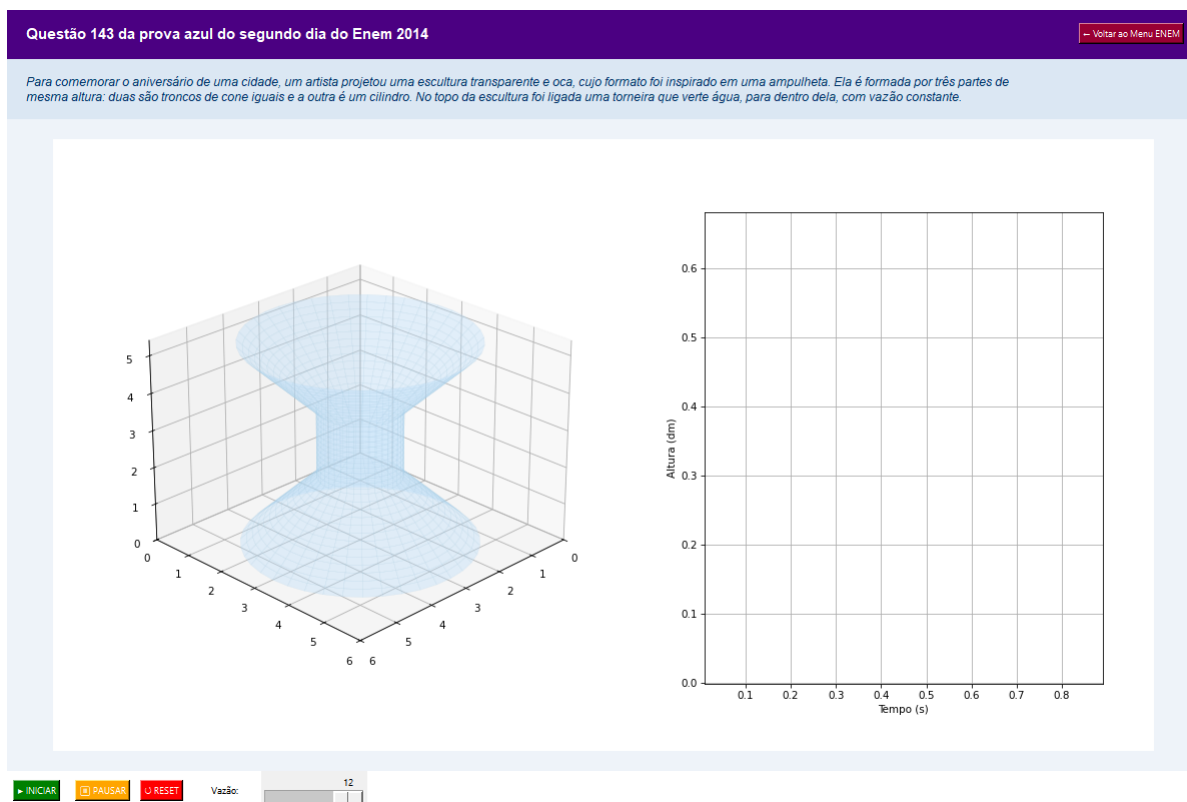


Figura 7.5: Tela inicial da Situação 2

Clique em **Iniciar** e observe atentamente o comportamento do gráfico durante todo o processo de enchimento.

Etapa 4 — Análise do Comportamento Observado

O gráfico apresenta trechos com comportamentos distintos?

Identificação de comportamentos por trecho

Em qual parte da escultura o crescimento da altura ocorre de maneira mais rápida? Em qual ocorre de maneira mais lenta?

Análise da taxa por região

Há mudança de concavidade ao longo do processo? Se sim, em que transição entre as partes isso ocorre?

Análise da concavidade

Síntese da Situação

Explique como a combinação entre troncos de cone e cilindro determina o comportamento gráfico observado.

Síntese conceitual

Situação 3 — Sistema com Dois Reservatórios

Leia atentamente a situação apresentada a seguir.

A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

O comportamento da altura do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V de água no sistema, é investigado por meio da simulação.

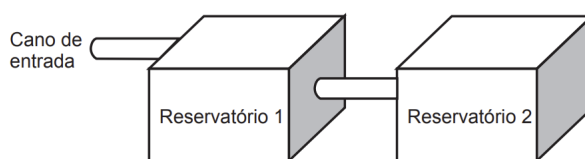


Figura 7.6: Sistema com dois reservatórios interligados

Etapa 1 — Análise Estrutural

Os reservatórios possuem área transversal constante?

Análise da área transversal

O que ocorre quando a água atinge o nível do cano de ligação entre os reservatórios?

Análise da interligação

Etapa 2 — Antecipação do Comportamento

Antes de iniciar a simulação, reflita:

Enquanto apenas o Reservatório 1 está sendo preenchido, como você imagina que será o comportamento do gráfico Altura $\times$ Volume?

Antecipação do primeiro regime

Após o início do abastecimento simultâneo dos dois reservatórios, a relação entre altura e volume se mantém a mesma ou sofre alteração? Justifique.

Antecipação do segundo regime

Etapa 3 — Execução no Simulador

No menu **Questões do ENEM**, selecione a Situação 3.

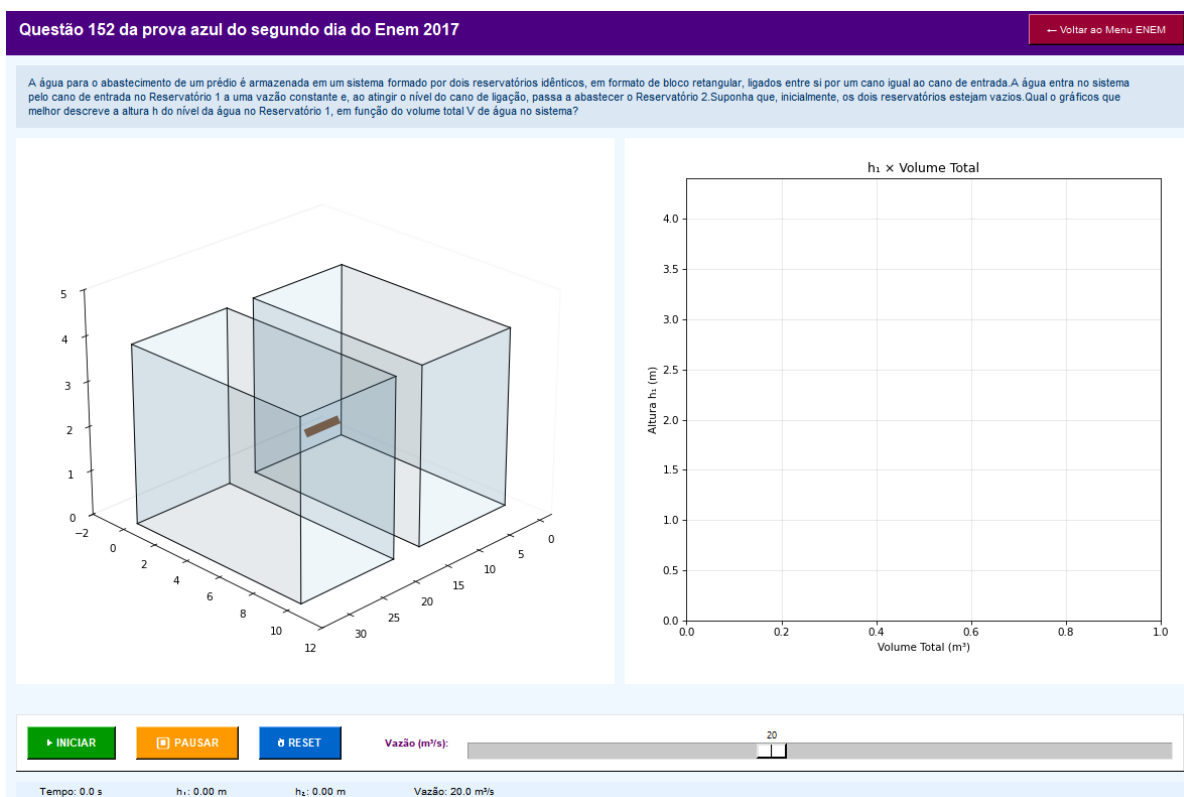


Figura 7.7: Tela inicial da Situação 3

Clique em **Iniciar** e observe atentamente o comportamento do gráfico.

Etapa 4 — Análise do Comportamento Observado

O gráfico apresenta dois comportamentos distintos ao longo do processo?

Identificação de regimes distintos

Em que ponto ocorre a mudança de comportamento?

Identificação da transição

Como a participação simultânea dos dois reservatórios influencia a taxa de crescimento da altura no Reservatório 1?

Análise da variação da taxa

Síntese da Situação

Explique como a variação da área transversal efetiva do sistema determina o comportamento do gráfico $\text{Altura} \times \text{Volume observado}$.

Síntese conceitual

Situação 4 — Envasamento de Espumantes

Leia atentamente a situação apresentada a seguir.

O consumo de espumantes no Brasil tem aumentado nos últimos anos. Uma das etapas do seu processo de produção consiste no envasamento da bebida em garrafas semelhantes às da imagem. Nesse processo, a vazão do líquido no interior da garrafa é constante e cessa quando atinge o nível de envasamento.

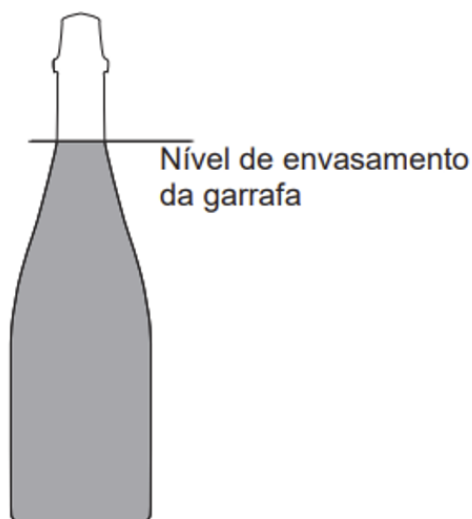


Figura 7.8: Garrafa utilizada no processo de envasamento

Etapa 1 — Análise Estrutural

Observe atentamente o formato da garrafa.

A área transversal da garrafa permanece constante ao longo da altura ou sofre variação?

Análise da variação da área transversal

Em quais regiões da garrafa a área transversal parece maior? Em quais regiões parece menor?

Análise das regiões da garrafa

Etapa 2 — Antecipação do Comportamento Gráfico

Considerando que a vazão é constante, como você imagina que será o comportamento do gráfico Altura $\times$ Tempo durante o enchimento até o nível indicado?

Antecipação do comportamento gráfico

Você espera comportamento linear, não linear ou mudança de concavidade? Justifique.

Justificativa da hipótese

Etapa 3 — Execução no Simulador

No menu **Questões do ENEM**, selecione a Situação 4.

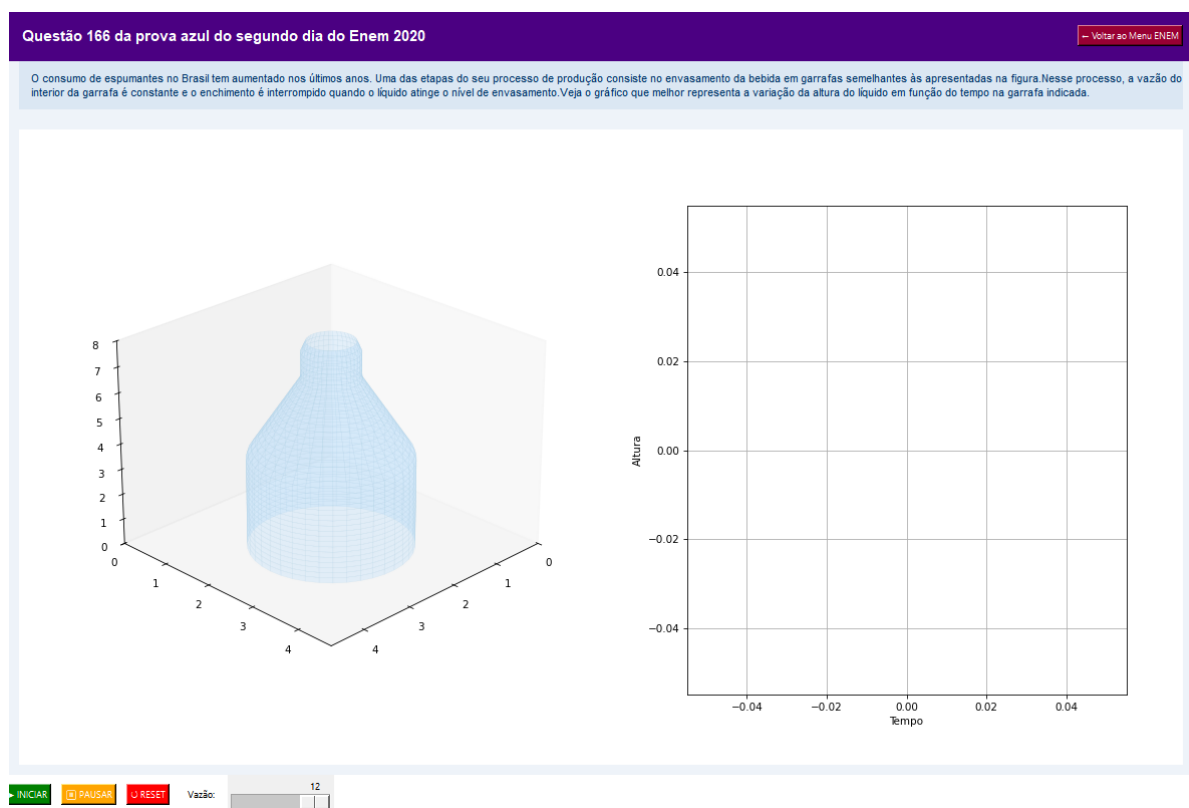


Figura 7.9: Tela inicial da Situação 4

Clique em **Iniciar** e observe atentamente o comportamento do gráfico até o nível de envasamento.

Etapa 4 — Análise do Comportamento Observado

O comportamento gráfico observado confirmou sua hipótese inicial?

Comparação entre hipótese e observação

Em quais trechos do enchimento a taxa de crescimento da altura é maior?

Identificação de variações na taxa

A curva apresenta mudança de concavidade? Se sim, em que região isso ocorre?

Análise da concavidade

Síntese da Situação

Explique como o formato da garrafa influencia o comportamento do gráfico Altura $\times$ Tempo.

Síntese conceitual

8 Síntese Geral das Explorações

O percurso investigativo desenvolvido neste guia mostrou que o comportamento gráfico da altura de um líquido submetido a vazão constante não pode ser compreendido apenas pela observação da curva produzida, mas exige a análise estrutural da geometria do recipiente envolvido.

As explorações iniciais demonstraram que, quando a área transversal permanece constante ao longo da altura, como no paralelepípedo e no cilindro, a taxa de crescimento da altura mantém-se constante, produzindo comportamento linear.

Nos recipientes em que a área transversal varia de forma monotônica, casos como o cone e o cone invertido, observou-se que a taxa de crescimento da altura sofre variação sistemática. A concavidade do gráfico revelou-se diretamente relacionada ao modo como a área transversal cresce ou decresce ao longo da altura. Na esfera, cuja área transversal primeiro aumenta e depois diminui, o comportamento gráfico apresentou mudança de concavidade, mostrando que a taxa de crescimento da altura não apenas varia, mas altera seu padrão ao longo do processo.

As situações contextualizadas ampliaram essa compreensão ao introduzir sistemas compostos e mudanças de regime. Nessas situações, a análise da área transversal efetiva foi importante para interpretar comportamentos por trechos, transições abruptas e variações na taxa de crescimento.

Dessa forma, consolidou-se a seguinte regularidade conceitual:

Ideia Central

A taxa de crescimento da altura de um líquido submetido a vazão constante depende da área transversal disponível no nível considerado. A forma geométrica do recipiente determina o comportamento gráfico observado.

Compreender gráficos, nesse contexto, significa compreender a estrutura geométrica que lhes dá origem.

Reflexão Final

Como a análise da forma geométrica pode auxiliar na interpretação de gráficos em situações reais?

Reflexão sobre a relação entre geometria e comportamento gráfico

De que maneira a manipulação do simulador contribuiu para a construção dessa compreensão?

Reflexão sobre o papel do ambiente SENVG

9 Avaliação da Aprendizagem

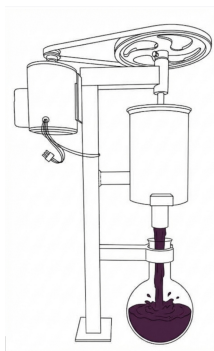
As situações avaliativas apresentadas nesta seção têm como objetivo mobilizar os conhecimentos construídos ao longo das etapas de exploração desenvolvidas com o auxílio do ambiente SENVG. Diferentemente das atividades anteriores, nas quais o estudante contou com o suporte do simulador para observar e interpretar o comportamento das grandezas envolvidas, as questões propostas a seguir foram elaboradas para serem resolvidas sem o uso da ferramenta digital, exigindo uma atuação mais autônoma por parte do estudante.

Nesse sentido, busca-se verificar em que medida o aluno é capaz de estabelecer relações entre a forma geométrica dos recipientes e o comportamento gráfico da altura do líquido ao longo do processo de enchimento, considerando a condição de vazão constante. Essa mudança de enfoque do apoio instrumental para a resolução independente permite investigar a consolidação das noções desenvolvidas, especialmente no que se refere à compreensão da influência da área transversal sobre a taxa de variação da altura.

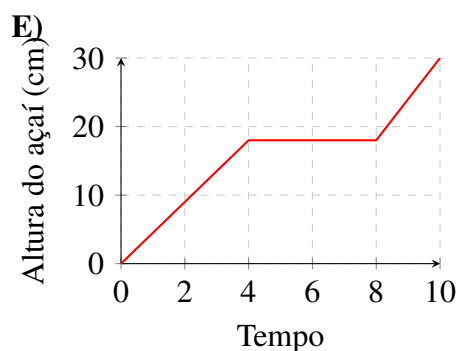
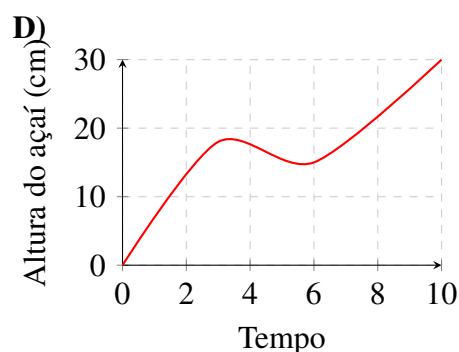
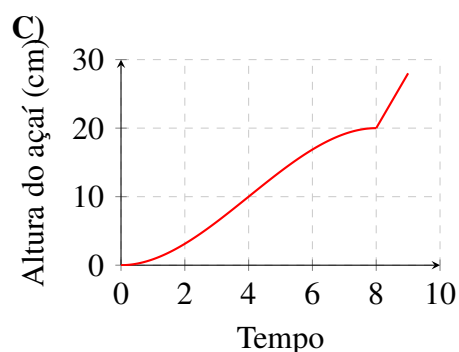
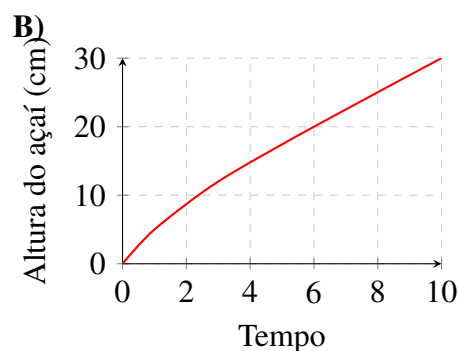
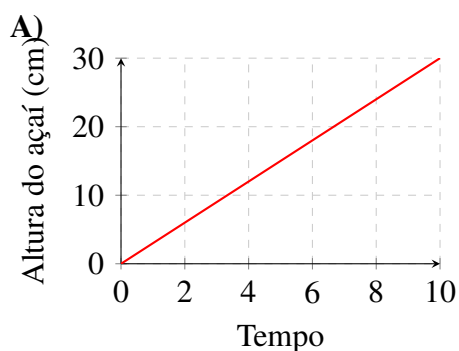
As questões foram estruturadas a partir de situações contextualizadas, inspiradas no formato de itens do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), privilegiando a interpretação de representações gráficas e a análise qualitativa das relações entre grandezas. Dessa forma se espera a identificação de respostas corretas, bem como a mobilização de estratégias de raciocínio que evidenciem a compreensão dos fenômenos envolvidos.

Ao propor esse conjunto de atividades, pretende-se criar um momento avaliativo no percurso investigativo, no qual o estudante possa articular os diferentes conceitos trabalhados em situações que demandam interpretação, comparação e tomada de decisão.

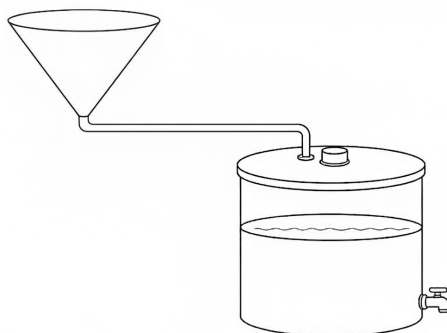
01) Em comunidades da região amazônica, o açaí é amplamente consumido e comercializado, sendo processado de forma artesanal por meio de batedeiras manuais. Nesse processo, o fruto é triturado com adição de água, resultando em um líquido que escoar continuamente pela saída do equipamento. Esse líquido é conduzido diretamente para um recipiente utilizado para armazenamento, conforme ilustrado na figura.



No início do processo, o recipiente encontra-se vazio, sendo preenchido à medida que o açaí é produzido. O gráfico que melhor representa a altura do nível do açaí no recipiente, em função do tempo, durante esse processo, é:

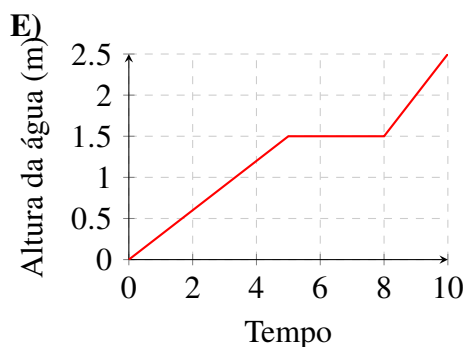
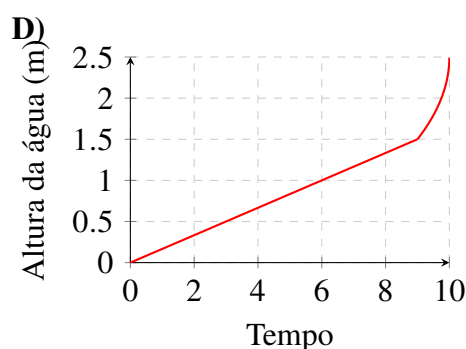
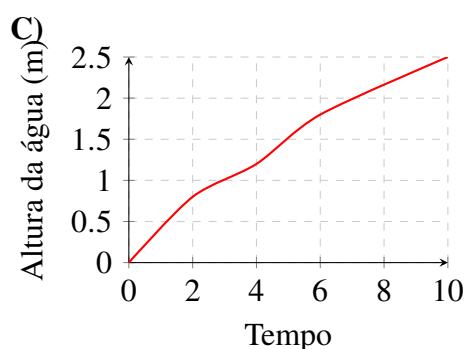
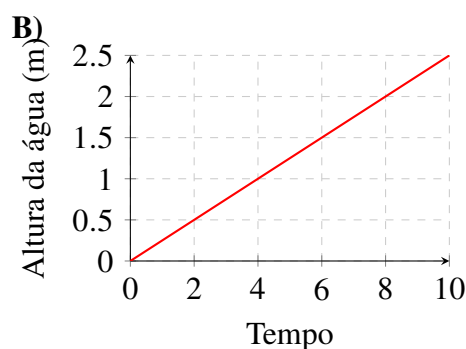
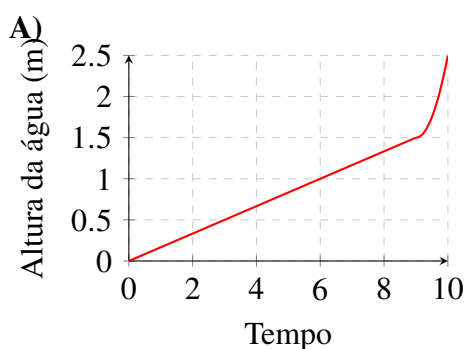


02) Em uma comunidade ribeirinha da Amazônia, uma família utiliza um sistema artesanal para captação e armazenamento de água da chuva. Esse sistema é composto por um dispositivo coletor conectado por um tubo a um reservatório, conforme ilustrado na figura.

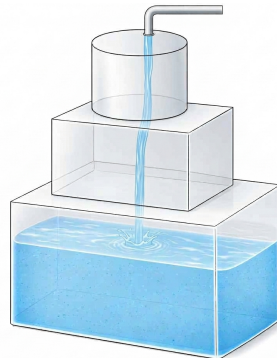


Durante um período de chuva contínua, a água é captada pelo coletor e transferida para o reservatório a uma vazão constante, estando ambos inicialmente vazios. À medida que o processo ocorre, o reservatório é completamente preenchido e, a partir desse momento, a água passa a se acumular no próprio coletor. Para a análise desse sistema, despreza-se o volume de água presente na tubulação de conexão entre o coletor e o reservatório.

Considerando esse processo, o gráfico que melhor representa a altura do nível da água no sistema, em função do tempo, desde o início do enchimento, é:

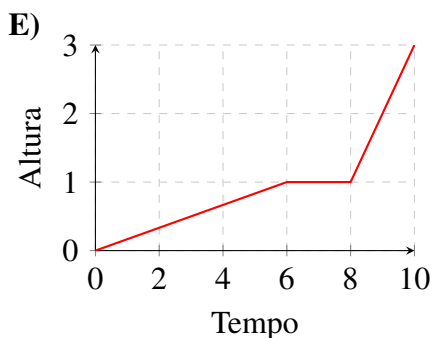
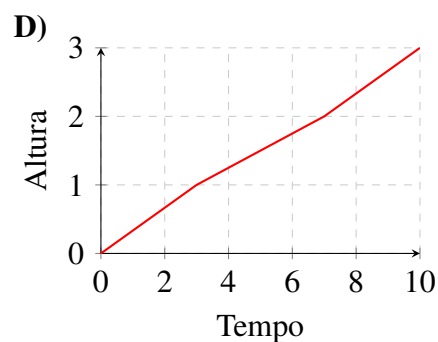
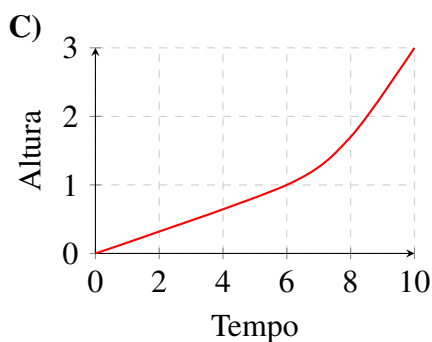
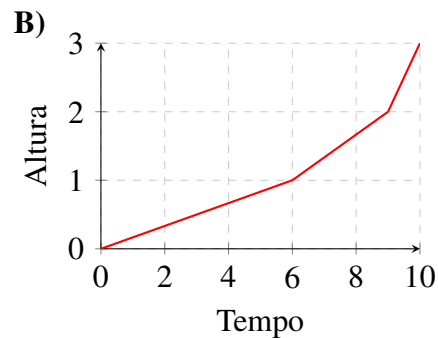
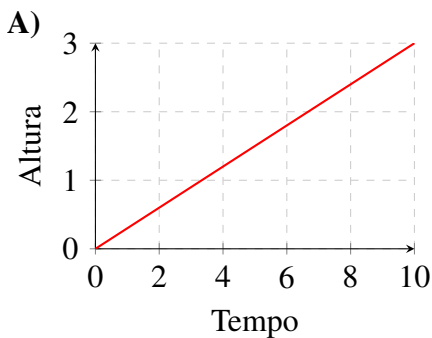


(Questão 03) Em um laboratório de engenharia hidráulica, estuda-se o comportamento do nível de um líquido em um sistema de reservatórios sobrepostos. O líquido é introduzido por um tubo com vazão constante, conforme ilustrado a seguir.



No início do processo, o líquido atravessa os reservatórios superiores sem se acumular, atingindo diretamente o reservatório inferior. À medida que o enchimento ocorre, cada reservatório passa a reter o líquido apenas após o completo preenchimento do reservatório imediatamente inferior.

Desprezando perdas no sistema e considerando a altura total como a soma das alturas dos reservatórios, o gráfico que melhor representa a altura do nível do líquido no sistema, em função do tempo, desde o início do enchimento, é:



10 Desdobramentos Didático-Exploratórios do Ambiente SENVG

As atividades propostas neste guia concentraram-se em situações de enchimento sob vazão constante, em consonância com a habilidade 15 da Matriz de Referência do ENEM, que envolve a interpretação da variação entre grandezas em contextos gráficos.

Entretanto, o ambiente SENVG não se limita a essa configuração. A modificação da vazão constitui uma possibilidade imediata de ampliação investigativa. Ao variar a taxa de entrada do líquido, o usuário pode analisar como a inclinação das curvas se altera, mantendo-se ou não as características estruturais relacionadas à geometria do recipiente. Tal exploração permite discutir proporcionalidade, escalonamento e sensibilidade da taxa de crescimento.

Além disso, o simulador disponibiliza dados numéricos relativos ao volume e ao tempo, os quais não foram explorados neste guia. A análise desses dados possibilita investigações complementares, tais como:

- Relação entre volume acumulado e altura atingida;
- Comparação entre representações gráficas distintas;
- Aproximação com conceitos de função, taxa média de variação e crescimento não linear;
- Articulação com conteúdos de Física, como vazão e conservação de volume.

Outra possibilidade de ampliação consiste na construção de situações-problema autorais, adaptando parâmetros e explorando configurações não contempladas neste material.

O ambiente SENVG, portanto, apresenta-se como instrumento de execução de atividades dirigidas, e também como espaço aberto à investigação, à formulação de hipóteses e à ampliação conceitual.

Seu uso pode ser estendido a diferentes níveis de aprofundamento, desde abordagens qualitativas até discussões mais formais envolvendo funções definidas por partes, concavidade, ponto de inflexão e modelagem matemática.

O presente guia constitui uma proposta inicial de organização didática. As possibilidades de exploração permanecem abertas, permitindo que professores e estudantes avancem para novas investigações a partir das regularidades aqui construídas.



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo – 66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem