



Recurso Educacional:
GeoGebra no Estudo do Radiano e das Funções Seno e Cosseno:
Uma Proposta Didática com Foco no ENEM

FERNANDA COTRIM CATALDO NUNES
ABIGAIL FOLHA

Niterói
2026

Resumo

Este recurso educacional apresenta uma sequência didática voltada ao ensino de conceitos fundamentais da trigonometria no Ensino Médio, mediada pelo uso do software GeoGebra. A proposta está organizada em três etapas complementares: a exploração do conceito de radiano por meio da construção e investigação de arcos em uma circunferência; o estudo das funções seno e cosseno e de seus parâmetros, com foco na análise das transformações gráficas; e a aplicação desses conhecimentos na resolução de questões inspiradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). As atividades foram elaboradas com o objetivo de promover uma aprendizagem investigativa e significativa, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem representações gráficas e algébricas das funções trigonométricas em um ambiente dinâmico. Ao articular exploração conceitual, experimentação com tecnologias digitais e resolução de problemas contextualizados, o material busca contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a compreensão das funções trigonométricas em diferentes contextos de avaliação. O recurso destina-se a professores e estudantes do Ensino Médio e pode ser utilizado como material de apoio em aulas de trigonometria que integrem tecnologias digitais ao processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Trigonometria; GeoGebra; Radiano; Funções seno e cosseno; Ensino Médio; ENEM.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 5
2	ORGANIZAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA	p. 7
2.1	Sequência didática – Radiano	p. 8
2.1.1	Contextualização	p. 8
2.1.2	Metodologia, objetivos e finalidade	p. 8
2.1.3	Orientações ao professor(Guia de Mediação)	p. 9
2.1.4	Orientações ao estudante(passo a passo)	p. 9
2.1.5	Atividade Mediadora - Roteiro de Mediação Pedagógica: A conversa Diagnóstica	p. 9
2.1.6	Guia Técnico e Atividade Investigativa sobre o Radiano no GeoGebra	p. 10
2.1.7	Atividade – Descobrimo O Radiano no GeoGebra	p. 10
2.1.8	Gabarito	p. 12
2.2	Sequência Didática – Funções seno e cosseno e suas trans- formações	p. 14
2.2.1	Contextualização	p. 14
2.2.2	Metodologia, objetivos e finalidade	p. 15
2.2.3	Orientações ao professor (Guia de mediação)	p. 16
2.2.4	Orientações ao estudante (Passo a passo)	p. 17
2.2.5	Guia técnico – Experimentação digital com o GeoGebra	p. 18
2.2.6	Atividade 1 – Exploração das funções seno e cosseno	p. 19
2.2.7	Gabarito Atividade 1	p. 21
2.2.8	Atividade 2 – Transformações das funções seno e cosseno	p. 22

2.2.9	Gabarito da atividade 2	p. 26
2.2.10	Atividade 3 – Articulação álgebra-geometria	p. 27
2.2.11	Gabarito	p. 31
2.3	Sequência didática – Simulado ENEM	p. 36
2.3.1	Contextualização	p. 36
2.3.2	Metodologia, objetivos e finalidade	p. 37
2.3.3	Orientações ao professor (Guia de mediação)	p. 38
2.3.4	Orientações ao estudante	p. 39
2.3.5	Aplicação do simulado	p. 40
2.3.6	Gabarito comentado do simulado	p. 49

Referências Bibliográficas

p. 51

1 INTRODUÇÃO

A presente sequência didática constitui um recurso educacional desenvolvido a partir da dissertação de mestrado intitulada “Do Radiano às Funções Trigonométricas: Uma Sequência Didática Mediada pelo Geogebra com Foco no Enem”, elaborada no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), vinculado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense (UFF).

Este material tem como objetivo apresentar uma proposta de atividades para o ensino de conceitos fundamentais da trigonometria no Ensino Médio, em especial o estudo do radiano e das funções seno e cosseno, mediada pelo uso do software GeoGebra. A utilização desse recurso digital busca favorecer uma abordagem mais investigativa e significativa, permitindo que o estudante explore representações gráficas e algébricas das funções trigonométricas em um ambiente dinâmico e interativo. Dessa forma, pretende-se que o aluno compreenda o papel dos parâmetros presentes nas funções seno e cosseno e desenvolva maior autonomia na interpretação de seus gráficos, evitando uma aprendizagem baseada exclusivamente na memorização de fórmulas.

A proposta também considera a relevância desse conteúdo em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no qual questões envolvendo interpretação gráfica e análise de funções aparecem com frequência. Nesse contexto, o uso do GeoGebra pode contribuir para que o estudante visualize e compreenda o comportamento das funções trigonométricas de maneira mais intuitiva, favorecendo a resolução de problemas em diferentes contextos.

A elaboração das atividades baseia-se nos princípios da aprendizagem significativa, conforme proposto por Ausubel (AUSUBEL, 1982), segundo o qual novos conhecimentos são mais facilmente assimilados quando se relacionam aos conhecimentos prévios do estudante. Considera-se também o contexto atual da educação, marcado pela presença constante das tecnologias digitais e pelo perfil dos estudantes contemporâneos, frequentemente caracterizados como “nativos digitais”, conforme discutido por Prensky (PRENSKY, 2001). Assim, a utilização de ferramentas tecnológicas no ensino de Matemática pode favorecer a participação ativa dos

alunos e estimular a construção do conhecimento de forma mais dinâmica.

A sequência didática aqui apresentada foi organizada de forma progressiva, partindo da construção e compreensão do conceito de radiano, avançando para o estudo das funções seno e cosseno e de seus parâmetros e culminando na aplicação desses conhecimentos em atividades inspiradas em questões do ENEM. Espera-se que este material possa servir como apoio a professores de Matemática do Ensino Médio que desejem integrar tecnologias digitais ao ensino da trigonometria, promovendo um aprendizado mais significativo e contextualizado.

2 ORGANIZAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA

A sequência didática apresentada neste recurso educacional está estruturada em três etapas, organizadas de forma progressiva, com o objetivo de favorecer a construção gradual dos conceitos trigonométricos pelos estudantes do Ensino Médio.

A primeira etapa é dedicada à compreensão do conceito de radiano. Nessa atividade, os alunos são conduzidos a investigar a relação entre o comprimento de um arco de circunferência e o raio, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de exploração e visualização. O objetivo é que o estudante compreenda o radiano como unidade natural de medida angular, construindo esse conceito a partir da experimentação e da observação das relações geométricas envolvidas.

Na segunda etapa, a sequência didática aborda o estudo das funções seno e cosseno e de seus parâmetros. Com o auxílio do GeoGebra, os estudantes exploram as transformações gráficas dessas funções, analisando o papel de cada parâmetro na modificação do gráfico. Essa atividade busca favorecer a interpretação das funções trigonométricas de forma dinâmica, permitindo que os alunos compreendam como as alterações nos parâmetros influenciam amplitude, período, deslocamentos horizontais e verticais.

A terceira etapa consiste na aplicação dos conceitos estudados por meio de um simulado composto por questões inspiradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Nessa fase, os alunos são convidados a aplicar os conhecimentos construídos nas etapas anteriores para resolver problemas que envolvem interpretação gráfica e análise de funções trigonométricas em contextos avaliativos.

Cada etapa da sequência apresenta as atividades propostas aos estudantes, acompanhadas de orientações para o professor e de um gabarito comentado, possibilitando que o material seja utilizado como apoio em aulas de trigonometria no Ensino Médio.

2.1 Sequência didática – Radiano

2.1.1 Contextualização

O ensino da trigonometria no Ensino Médio frequentemente enfrenta o desafio da abstração excessiva. A introdução do conceito de radiano, em particular, costuma ser reduzida à memorização da equivalência $\pi \approx 180^\circ$, o que impede o estudante de compreender a natureza geométrica dessa medida. Sem essa base sólida, o estudo das funções seno e cosseno torna-se um exercício de repetição de fórmulas, dissociado da realidade física e geométrica. Nesse contexto, este recurso educacional propõe uma mudança de perspectiva: o radiano deixa de ser um "número"; para se tornar uma medida de arco. Ao utilizar o GeoGebra como instrumento de mediação cognitiva, busca-se integrar o raciocínio simbólico à experimentação concreta. A visualização simultânea da variação do raio (r) e do comprimento do arco (s) permite que o aluno descubra a invariância da razão $\theta = \frac{s}{r}$, consolidando a definição de radiano de forma intuitiva e duradoura.

2.1.2 Metodologia, objetivos e finalidade

A metodologia adotada fundamenta-se na Aprendizagem Baseada em Investigação, em que o software GeoGebra atua como um instrumento de mediação cognitiva. O aluno não recebe o conceito pronto; ele o constrói ao manipular as grandezas de arco (s) e raio (r) e observar a invariância da razão que define o radiano.

Objetivo Geral:

Compreender a definição de radiano como a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Objetivos Específicos:

- Identificar que a medida angular em radianos independe do tamanho do raio da circunferência;
- Relacionar o perímetro da circunferência ($2\pi r$) com o valor de uma volta completa em radianos (2π);
- Desenvolver a fluidez tecnológica no uso do GeoGebra para a validação de hipóteses geométricas.

A finalidade principal é promover a transição do pensamento puramente algébrico, frequentemente associado à conversão de unidades, para a percepção geométrica do radiano. Dessa

forma o professor oferece uma ferramenta capaz de estimular a autonomia do estudante, transformando a sala de aula em um ambiente de investigação matemática.

2.1.3 Orientações ao professor(Guia de Mediação)

Para a aplicação bem-sucedida desta unidade, recomenda-se:

- **Ambiente:** Sala Maker ou Laboratório de Informática com acesso à internet.
- **Tempo Estimado:** 2 tempos de 50 minutos.
- **Papel do Docente:** Atuar como mediador, evitando fornecer respostas prontas. O foco deve estar nas perguntas que provoquem o conflito cognitivo.
- **Mediação Oral:** Antes de abrir os computadores, realize a “conversa diagnóstica”; utilizando as questões norteadoras apresentadas na seção anterior, garantindo a ativação dos conhecimentos prévios (subsunçores).

2.1.4 Orientações ao estudante(passo a passo)

Caro estudante, para explorar o conceito de radiano, siga os passos abaixo no seu Chrome-book:

1. Acesse o applet disponibilizado no GeoGebra pelo professor.(*link* do *applet* GeoGebra: www.geogebra.org).
2. Identifique o controle deslizante (slider) do Raio (r) e do Ângulo (α).
3. Realize as manipulações solicitadas no roteiro da atividade, observando atentamente as mudanças nos valores do arco (s).
4. Registre suas observações e conclusões na folha de atividades, buscando identificar padrões entre os números apresentados.

2.1.5 Atividade Mediadora - Roteiro de Mediação Pedagógica: A conversa Diagnóstica

A aplicação deste recurso fundamenta-se na Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1982), que pressupõe a identificação dos conhecimentos prévios antes da introdução de novos concei-

tos. Por essa razão, esta sequência didática inicia-se com uma etapa de mediação oral, na qual o docente atua como provocador, estimulando o raciocínio investigativo dos estudantes.

As perguntas a seguir devem ser realizadas oralmente, promovendo um debate em sala de aula antes da abertura dos Chromebooks. O objetivo é ativar os subsunçores (conceitos- âncora) sobre ângulos e comprimentos:

1. Quantos graus tem uma volta completa?
2. Quantos radianos tem uma volta completa?
3. Então, sabendo que 360° correspondem a 2π radianos, qual seria o valor de meia volta - 180° em radianos?
4. Quanto vale aproximadamente 2π radianos em números decimais?
5. O que esse valor representa na circunferência?

Esta etapa é crucial para que o aluno perceba a necessidade de uma nova unidade de medida (o radiano) que relacione o arco ao raio, preparando o terreno para a investigação no GeoGebra (ver Seção 5.6).

2.1.6 Guia Técnico e Atividade Investigativa sobre o Radiano no GeoGebra

Após a consolidação das hipóteses levantadas na discussão oral, os estudantes iniciam a fase de experimentação digital. Esta etapa utiliza o Applet "Descobrimo o Radiano" (<https://www.geogebra.org/classic/bt378x64>) e visa a validação das ideias discutidas anteriormente (ver Seção 5.7).

2.1.7 Atividade – Descobrimo O Radiano no GeoGebra

Responda às questões com atenção, justificando sempre que possível.

Parte 1 – Compreendendo o conceito de radiano

1. O que significa dizer que um ângulo mede 1 radiano?
-

2. Quando o raio da circunferência é alterado, o valor total da volta em radianos também muda? Justifique.

3. Quantos radianos mede uma volta completa na circunferência?

4. Complete:

- Meia volta corresponde a _____ radianos.
- Um quarto de volta corresponde a _____ radianos.
- Três quartos de volta correspondem a _____ radianos.

Parte 2 – Relação entre arco, raio e ângulo

5. Descreva a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.

6. No applet, ao aumentar o ângulo α , o que acontece com o ponto C e com o arco?

7. Mesmo alterando o raio (r), o número total de radianos para completar a volta muda? Por quê?

Parte 3 – Aplicando o que aprendeu

8. Sabendo que π radianos $\approx 180^\circ$, calcule:

- a) $\frac{\pi}{2}$ radianos \approx _____ $^\circ$
- b) $\frac{3\pi}{2}$ radianos \approx _____ $^\circ$
- c) 2π radianos \approx _____ $^\circ$

9. Observe: um ângulo de 1 radiano $\approx 57^\circ$. Quantos ângulos de 1 radiano cabem em uma volta completa?

10. Em sua opinião, por que é útil medir ângulos em radianos ao estudar funções trigonométricas?

Parte 4 – Autoavaliação (opcional) Marque com um “X” o quanto você acredita ter aprendido com esta atividade:

Aspecto avaliado	Aprendi bem	Aprendi mais ou menos	Preciso revisar
Entendo o que é um radiano	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sei relacionar o arco com o raio	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Compreendo que uma volta tem 2π radianos	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Consegui usar o applet corretamente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Gostei de aprender com o GeoGebra	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Observação da professora: Este questionário complementa a atividade prática e integra o Produto Educacional “Descobrimo o Radiano com o GeoGebra”, desenvolvido no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT/UFF). Esta atividade tem como objetivo verificar a compreensão do estudante sobre o conceito de radiano e sua relação geométrica com o arco e o raio da circunferência, após a exploração dinâmica no applet correspondente. Além disso, busca estabelecer as bases necessárias para o estudo das funções trigonométricas seno e cosseno.

2.1.8 Gabarito

Parte 1 – Compreendendo o conceito de radiano

1. O que significa dizer que um ângulo mede 1 radiano?

Resposta: Significa que o comprimento do arco (s) correspondente a esse ângulo é exatamente igual à medida do raio (r) daquela circunferência ($s=r$) Dica Pedagógica: É o momento em que o aluno percebe que a unidade de medida vem da própria geometria do círculo.

2. Quando o raio da circunferência é alterado, o valor total da volta em radianos também muda? Justifique.

Resposta: Não. O valor total da volta permanece constante (2π radianos). Justificativa: Como o comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$) aumenta proporcionalmente ao raio (r), a razão entre o comprimento total e o raio será sempre a mesma: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Portanto, o radiano é uma medida invariante.

3. Quantos radianos mede uma volta completa na circunferência? Resposta: 2π radianos (ou aproximadamente 6,28 radianos).

4. Complete: Meia volta corresponde a π radianos. Um quarto de volta corresponde a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Três quartos de volta correspondem a $\frac{3\pi}{2}$ radianos.

Parte 2 – Relação entre arco, raio e ângulo

5. Descreva a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.

Resposta: A medida do ângulo em radianos (Θ) é definida pela razão entre o comprimento do arco (s) e o raio (r) da circunferência. Matematicamente, essa relação é expressa pela fórmula:

$$\Theta = \frac{s}{r}.$$

Dica Pedagógica: O objetivo é que o aluno perceba que o radiano não é uma unidade “inventada”, mas uma proporção natural do círculo.

6. No applet, ao aumentar o ângulo α , o que acontece com o ponto C e com o arco?

Resposta: O ponto C desloca-se sobre a linha da circunferência e o comprimento do arco (s) aumenta proporcionalmente ao aumento do ângulo.

Observação: Se o ângulo dobrar, o arco também dobrará, mantendo o raio fixo.

7. Mesmo alterando o raio (r), o número total de radianos para completar a volta muda? Por quê?

Resposta: Não muda. O valor continua sendo 2π radianos.

Justificativa: Isso ocorre porque o comprimento da circunferência e o raio são grandezas diretamente proporcionais. Quando aumentamos o raio, o comprimento total da volta ($2\pi r$) aumenta na mesma proporção, mantendo a razão entre eles sempre igual a 2π .

Parte 3 – Aplicando o que aprendeu

8. Sabendo que π radianos $\approx 180^\circ$, calcule:

- a) $\frac{\pi}{2}$ radianos $\approx 90^\circ$
- b) $\frac{3\pi}{2}$ radianos $\approx 270^\circ$
- c) 2π radianos $\approx 360^\circ$

9. Observe: um ângulo de 1 radiano $\approx 57^\circ$. Quantos ângulos de 1 radiano cabem em uma volta completa?

Resposta: Cabem aproximadamente 6,28 ângulos (ou, de forma exata, 2π radianos). Se algum aluno responder apenas “6”, considere correto, mas use o GeoGebra para mostrar que sobra um “pedacinho”(0,28), que é justamente a parte decimal do 2π .

Nota pedagógica: O objetivo é que o aluno perceba que uma volta completa (360°) dividida por

57^0 resulta em aproximadamente 6,36, o que o aproxima do valor de $2\pi \approx 2 \times 3,14$.

10. Em sua opinião, por que é útil medir ângulos em radianos ao estudar funções trigonométricas?

Como é uma questão de opinião, aceite variações. O importante é o aluno mencionar que "fica mais fácil no gráfico" ou que "tem a ver com o raio do círculo".

Resposta Sugerida: O uso do radiano é útil porque ele é uma medida real e adimensional (baseada na razão entre comprimentos). Isso permite que o ângulo seja representado no eixo x de um gráfico de função na mesma escala numérica do eixo y. Diferente dos graus (uma unidade convencional), o radiano conecta diretamente o arco ao raio, facilitando a visualização de fenômenos periódicos e a modelagem matemática.

Parte 4: Autoavaliação:

Não tem gabarito. Essa parte serve para medir o sentimento de competência do aluno, algo muito valorizado por Resnick e Papert (RESNICK, 2020; PAPERT, 1985).

2.2 Sequência Didática – Funções seno e cosseno e suas transformações

2.2.1 Contextualização

Após a construção do conceito de radiano e a compreensão de sua relação com o comprimento de arco e o raio da circunferência, torna-se possível avançar para o estudo das funções trigonométricas. No Ensino Médio, as funções seno e cosseno constituem um dos conteúdos centrais da trigonometria, sendo fundamentais para a compreensão de fenômenos periódicos e para a interpretação de gráficos que representam variações cíclicas.

Entretanto, na prática escolar, é comum que o estudo dessas funções seja conduzido de forma excessivamente algorítmica, centrada na manipulação de fórmulas e na memorização de propriedades. Esse tipo de abordagem pode dificultar a compreensão do significado dos parâmetros presentes nas expressões algébricas das funções trigonométricas, bem como das transformações que esses parâmetros produzem em seus gráficos.

Nesse contexto, o uso de recursos tecnológicos pode contribuir para tornar esse estudo mais significativo. O software GeoGebra permite que os estudantes visualizem simultaneamente as representações algébricas e gráficas das funções, favorecendo a investigação das transformações associadas aos parâmetros presentes nas expressões das funções seno e cosseno.

A sequência didática proposta nesta etapa tem como objetivo explorar essas transformações por meio da experimentação e da análise gráfica, permitindo que os estudantes identifiquem o papel de cada parâmetro na modificação do comportamento das funções. Ao manipular os controles deslizantes no ambiente do GeoGebra, os alunos podem observar, de forma dinâmica, como ocorrem alterações na amplitude, no período e nos deslocamentos horizontal e vertical dos gráficos.

Essa abordagem busca favorecer uma aprendizagem baseada na investigação e na interpretação de representações matemáticas, aproximando o estudo das funções trigonométricas das demandas presentes em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), nas quais a análise de gráficos e a compreensão do comportamento de funções aparecem com frequência.

2.2.2 Metodologia, objetivos e finalidade

A sequência didática apresentada nesta etapa fundamenta-se em uma abordagem investigativa de aprendizagem, na qual o estudante é incentivado a explorar e analisar as propriedades das funções seno e cosseno por meio da experimentação e da observação de suas representações gráficas. Nesse processo, o software GeoGebra é utilizado como instrumento de mediação pedagógica, possibilitando a manipulação dinâmica dos parâmetros das funções e a visualização imediata das transformações ocorridas em seus gráficos.

A proposta metodológica busca favorecer uma aprendizagem mais ativa, na qual o aluno deixa de ser apenas receptor de informações e passa a desempenhar um papel participativo na construção do conhecimento. Ao interagir com o ambiente digital e observar as alterações provocadas pela modificação dos parâmetros nas expressões algébricas das funções trigonométricas, os estudantes são conduzidos a identificar padrões, formular hipóteses e estabelecer relações entre os elementos algébricos e suas representações gráficas.

Objetivo geral:

Compreender o comportamento das funções seno e cosseno e identificar o papel dos parâmetros presentes em suas expressões algébricas, analisando as transformações produzidas em seus gráficos.

Objetivos específicos:

- Investigar, com o auxílio do GeoGebra, as transformações associadas às funções seno e cosseno;

- Identificar o efeito dos parâmetros na amplitude, no período e nos deslocamentos horizontal e vertical dos gráficos dessas funções;
- Relacionar as expressões algébricas das funções trigonométricas com suas representações gráficas;
- Desenvolver a capacidade de interpretação de gráficos envolvendo funções trigonométricas;
- Utilizar ferramentas digitais como apoio à investigação e à compreensão de conceitos matemáticos.

A finalidade desta sequência didática é possibilitar que os estudantes compreendam as funções seno e cosseno para além da manipulação algébrica de fórmulas, favorecendo a interpretação de seus gráficos e a análise do comportamento dessas funções em diferentes situações. Dessa forma, busca-se contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a resolução de problemas que envolvam funções trigonométricas, especialmente em contextos avaliativos como os presentes em exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

2.2.3 Orientações ao professor (Guia de mediação)

Para a aplicação desta sequência didática, recomenda-se que o professor organize previamente o ambiente de aprendizagem de modo a possibilitar a utilização do software GeoGebra pelos estudantes. A atividade pode ser desenvolvida em laboratório de informática, sala maker ou em sala de aula, desde que os alunos tenham acesso a computadores, tablets ou smartphones com acesso à internet.

Tempo estimado: aproximadamente 3 a 4 tempos de aula de 50 minutos, considerando a realização das três atividades propostas e a discussão coletiva dos resultados obtidos pelos estudantes.

O papel do professor nesta sequência didática é atuar como mediador do processo de aprendizagem, incentivando os estudantes a observar, levantar hipóteses e interpretar as transformações ocorridas nos gráficos das funções seno e cosseno. Em vez de apresentar diretamente as propriedades dessas funções, o docente deve estimular a investigação por meio de questionamentos que levem os alunos a perceber as relações entre os parâmetros das funções e as modificações observadas em seus gráficos.

Durante a realização das atividades, recomenda-se que o professor incentive a participação ativa dos estudantes, promovendo momentos de discussão coletiva sobre as observações reali-

zadas no ambiente digital. Esse processo de socialização das ideias contribui para que os alunos confrontem diferentes interpretações e consolidem a compreensão dos conceitos trabalhados.

Também é importante que o docente acompanhe o desenvolvimento das atividades, auxiliando os estudantes na manipulação das ferramentas do GeoGebra sempre que necessário, sem, contudo, antecipar conclusões ou apresentar respostas prontas. O objetivo é favorecer um ambiente de investigação matemática, no qual os alunos possam construir gradualmente o entendimento sobre o comportamento das funções seno e cosseno e sobre o papel de seus parâmetros.

Ao final de cada atividade, recomenda-se a realização de uma discussão coletiva, na qual os estudantes possam apresentar suas conclusões e comparar os resultados obtidos. Esse momento permite sistematizar os conceitos explorados durante a investigação e relacioná-los à interpretação de gráficos de funções trigonométricas, habilidade frequentemente exigida em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

2.2.4 Orientações ao estudante (Passo a passo)

Caro estudante,

Nesta etapa da sequência didática, você irá explorar o comportamento das funções seno e cosseno e investigar as transformações que ocorrem em seus gráficos quando determinados parâmetros são modificados. Para isso, será utilizado o software GeoGebra, que permite visualizar e manipular, de forma dinâmica, as representações gráficas dessas funções. Siga as orientações abaixo para a realização das atividades:

1. Acesse o applet disponibilizado pelo professor no GeoGebra, por meio do link indicado em sala de aula.
2. Observe atentamente o gráfico das funções seno e cosseno apresentado no ambiente digital.
3. Utilize os controles deslizantes (sliders) disponíveis no applet para modificar os parâmetros das funções e observe as alterações que ocorrem no gráfico.
4. Analise como cada modificação influencia características do gráfico, como amplitude, período e deslocamentos.
5. Registre suas observações e responda às questões propostas nas atividades, buscando identificar padrões e relações entre as expressões algébricas e suas representações gráficas.

6. Discuta suas conclusões com seus colegas e participe das reflexões conduzidas pelo professor durante a aula.

Ao longo dessas atividades, procure observar como pequenas alterações nos parâmetros das funções podem produzir diferentes comportamentos gráficos. Essa investigação permitirá compreender melhor o funcionamento das funções trigonométricas e desenvolver maior autonomia na interpretação de seus gráficos.

2.2.5 Guia técnico – Experimentação digital com o GeoGebra

Após as orientações iniciais, os estudantes iniciarão a etapa de experimentação digital, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de investigação das transformações das funções seno e cosseno.

Para o desenvolvimento desta etapa, será utilizado um applet interativo disponibilizado no GeoGebra, no qual é possível manipular os parâmetros das funções trigonométricas e observar, de forma dinâmica, as alterações produzidas em seus gráficos. Por meio dos controles deslizantes presentes no ambiente digital, os estudantes podem modificar os valores dos parâmetros das funções e analisar como essas variações influenciam características do gráfico, como a amplitude, o período e os deslocamentos horizontal e vertical.

O applet utilizado nesta sequência didática pode ser acessado por meio do seguinte endereço eletrônico:

Link do GeoGebra: <https://www.geogebra.org/classic/mkanmhmn>

Durante a exploração do applet, os estudantes devem observar atentamente as modificações que ocorrem nos gráficos das funções seno e cosseno à medida que os parâmetros são alterados. Essa etapa tem como objetivo favorecer a visualização das transformações das funções trigonométricas, permitindo que os alunos estabeleçam relações entre as expressões algébricas das funções e suas representações gráficas.

A utilização do GeoGebra nesta atividade busca promover uma aprendizagem mais investigativa, na qual os estudantes possam experimentar, formular hipóteses e validar suas observações a partir da manipulação direta dos elementos presentes no ambiente digital.

2.2.6 Atividade 1 – Exploração das funções seno e cosseno

A primeira atividade desta sequência didática tem como objetivo introduzir a análise gráfica das funções seno e cosseno, permitindo que os estudantes observem suas características fundamentais por meio da exploração no ambiente do GeoGebra. Nessa etapa, os alunos são incentivados a investigar o comportamento dessas funções e identificar padrões em seus gráficos, relacionando as representações algébricas às representações gráficas.

A atividade proposta aos estudantes encontra-se apresentada a seguir.

QUESTIONÁRIO

Função Seno e Cosseno e o GeoGebra

1. Qual foi o objetivo principal da atividade realizada no GeoGebra
2. O que você observou ao alterar o valor do parâmetro a ?
3. E ao modificar o parâmetro b , o que aconteceu com o gráfico?
4. O que ocorre quando o parâmetro c assume valores positivos e negativos?
5. Qual a função do parâmetro d na forma da curva?
6. Qual a diferença entre as funções seno e cosseno que você conseguiu observar?
7. De que forma o uso do GeoGebra facilitou a compreensão das transformações?
8. O que mais chamou sua atenção durante a atividade?
9. Que dificuldades você encontrou para realizar a exploração?
10. O que você aprendeu sobre as funções trigonométricas a partir desta aula?

2.2.7 Gabarito Atividade 1

1. Qual foi o objetivo principal da atividade realizada no GeoGebra?

Resposta esperada: Explorar o comportamento das funções seno e cosseno no GeoGebra, observando como seus gráficos se modificam quando os parâmetros são alterados.

Comentário ao professor: O importante é que o aluno reconheça que a atividade teve caráter investigativo e que o GeoGebra foi utilizado para compreender graficamente as funções trigonométricas.

2. O que você observou ao alterar o valor do parâmetro a ? Resposta esperada: O parâmetro a altera a amplitude da função. Quando $|a|$ aumenta, a onda fica mais “alta”; quando $|a|$ diminui, ela fica mais “achatada”. Se a for negativo, ocorre reflexão em relação ao eixo x , provavelmente o aluno irá dizer que ele “vira de cabeça para baixo”.

Comentário ao professor: O ideal é que o estudante perceba que o parâmetro a controla a amplitude e pode também inverter o gráfico.

3. E ao modificar o parâmetro b , o que aconteceu com o gráfico?

Resposta esperada: O parâmetro b altera o período da função. Quando $|b|$ aumenta, as ondas ficam mais “apertadas”, isto é, o ciclo se repete mais rapidamente. Quando $|b|$ diminui, as ondas ficam mais “largas”.

Comentário ao professor: Espera-se que o aluno relacione b com a frequência/período do gráfico.

4. O que ocorre quando o parâmetro c assume valores positivos e negativos?

Resposta esperada: O parâmetro c provoca deslocamento horizontal (fase). Valores positivos deslocam o gráfico em uma direção horizontal e valores negativos na direção oposta.

Comentário ao professor: Se o aluno identificar que a forma da curva não muda, mas apenas sua posição horizontal, a resposta deve ser considerada correta.

5. Qual a função do parâmetro d na forma da curva?

Resposta esperada: O parâmetro d realiza a translação vertical do gráfico. Quando d aumenta, a curva sobe; quando d diminui, a curva desce.

Comentário ao professor: É importante que o aluno perceba que d altera a linha média da função.

6. Qual a diferença entre as funções seno e cosseno que você conseguiu observar?

Resposta esperada: Os gráficos têm a mesma forma geral e o mesmo período básico, mas começam em posições diferentes. Em geral, a função cosseno inicia no valor máximo quando os parâmetros básicos são mantidos, enquanto a função seno inicia em zero.

Comentário ao professor: Aceite respostas que mencionem a diferença no ponto inicial ou no “deslocamento” entre as duas curvas.

7. De que forma o uso do GeoGebra facilitou a compreensão das transformações?

Resposta esperada: O GeoGebra facilitou a compreensão porque permitiu visualizar, em tempo real, as alterações no gráfico ao modificar os parâmetros, tornando mais clara a relação entre a expressão algébrica e a representação gráfica.

Comentário ao professor: Trata-se de uma resposta pessoal, mas o foco esperado é a visualização dinâmica e a facilidade de interpretar as transformações.

8. O que mais chamou sua atenção durante a atividade?

Resposta esperada: Resposta pessoal. Espera-se que o aluno destaque algum aspecto das transformações gráficas, da manipulação dos sliders ou da comparação entre seno e cosseno.

Comentário ao professor: Valorize a observação individual do estudante.

9. Que dificuldades você encontrou para realizar a exploração?

Resposta esperada: Resposta pessoal. Entre as dificuldades possíveis estão: compreender o papel de cada parâmetro, identificar o período, interpretar deslocamentos horizontais ou manusear o GeoGebra.

Comentário ao professor: Essa questão pode ajudar a diagnosticar pontos que merecem retomada.

10. O que você aprendeu sobre as funções trigonométricas a partir desta aula?

Resposta esperada: Espera-se que o aluno reconheça que as funções seno e cosseno podem ser analisadas graficamente e que os parâmetros modificam amplitude, período e deslocamentos, alterando o comportamento da curva.

Comentário ao professor: O mais importante é perceber se o aluno compreendeu que as funções trigonométricas não devem ser vistas apenas como fórmulas, mas também como representações gráficas dinâmicas.

2.2.8 Atividade 2 – Transformações das funções seno e cosseno

A segunda atividade da sequência didática é estruturada na forma de um quiz, caracterizado como um jogo de perguntas e respostas voltado à revisão e consolidação dos conceitos relacionados às transformações das funções seno e cosseno.

Nesta etapa, os estudantes são convidados a responder a uma série de questões que envolvem a interpretação dos gráficos das funções trigonométricas e a análise do papel dos parâmetros presentes em suas expressões algébricas. Para responder às perguntas, os alunos podem utilizar

o applet disponibilizado no GeoGebra, manipulando os controles deslizantes e observando as alterações que ocorrem nos gráficos das funções.

A dinâmica da atividade assume um caráter lúdico e interativo, pois os estudantes participam do quiz buscando identificar as respostas corretas no menor tempo possível. Dessa forma, a atividade promove um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, estimulando a participação ativa dos alunos e favorecendo a consolidação dos conceitos trabalhados nas etapas anteriores da sequência didática.

A atividade proposta aos estudantes é apresentada a seguir.

Quiz Interativo

Descobrimo as funções Seno e Cosseno no GeoGebra

Parte 1 – Parâmetro a (amplitude)

1. Quando colocamos $a = 1$, o gráfico da função seno varia entre:
 - a) -1 e 1
 - b) -2 e 2
 - c) -3 e 3
 - d) -5 e 5

2. Ao mudar para $a = 3$, o que acontece com o “tamanho” da onda?
 - a) Aumenta
 - b) Diminui
 - c) Inverte
 - d) Some

3. E quando colocamos $a = -2$?
 - a) O gráfico fica espelhado em relação ao eixo x
 - b) O gráfico se desloca para cima
 - c) O gráfico fica “mais largo”
 - d) O gráfico não muda

Parte 2 – Parâmetro b (frequência / período)

4. Compare os gráficos com $b = 0,5$, $b = 1$ e $b = 2$. Quando o valor de b aumenta...
 - a) As ondas ficam mais “apertadas”
 - b) As ondas ficam mais “espalhadas”
 - c) O gráfico não muda
 - d) A curva se inverte

5. O que acontece se b for negativo (por exemplo, $b = -1$)?

- a) A onda se reflete horizontalmente (inverte o sentido da leitura)
- b) A amplitude muda
- c) O gráfico se desloca para cima
- d) Nada muda

Parte 3 – Parâmetro d (translação vertical)

6. Para $d = 2$, o que acontece com a curva?

- a) Sobe duas unidades
- b) Desce duas unidades
- c) Inverte o sentido
- d) Fica mais larga

7. Para $d = -3$, o gráfico:

- a) Desce três unidades
- b) Sobe três unidades
- c) Fica invertido
- d) Aumenta a amplitude

Parte 4 – Funções Compostas

Agora explore as funções completas (combinando os parâmetros). Use o applet e visualize as transformações.

8. Considere $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$. Qual é a amplitude, o período e o deslocamento vertical dessa função? (Responda numericamente no caderno ou no formulário.)

9. Compare $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$ e $g(x) = 2\text{cos}(2x) + 1$. Qual das duas começa no ponto máximo?

- a) $f(x)$
- b) $g(x)$
- c) As duas
- d) Nenhuma

10. Podemos concluir que...

- a) Cada parâmetro controla um tipo diferente de transformação.
- b) Mudanças pequenas em a , b e d alteram significativamente o gráfico.
- c) O GeoGebra facilita a visualização dessas mudanças.
- d) Todas as alternativas estão corretas.

2.2.9 Gabarito da atividade 2

1. Quando colocamos $a = 1$, o gráfico da função seno varia entre:
Resposta: a) -1 e 1 .
2. Ao mudar para $a = 3$, o que acontece com o “tamanho” da onda?
Resposta: a) Aumenta.
Comentário: a amplitude passa a ser 3.
3. E quando colocamos $a = -2$?
Resposta: a) O gráfico fica espelhado em relação ao eixo x .
Comentário: além da reflexão, a amplitude passa a ser 2.
4. Compare os gráficos com $b = 0,5$; $b = 1$ e $b = 2$. Quando o valor de b aumenta. . .
Resposta: a) As ondas ficam mais “apertadas”.
Comentário: o período diminui quando $|b|$ aumenta.
5. O que acontece se b for negativo, por exemplo $b = -1$?
Resposta: a) A onda se reflete horizontalmente (inverte o sentido da leitura).
6. Para $d = 2$, o que acontece com a curva?
Resposta: a) Sobe duas unidades.
7. Para $d = -3$, o gráfico:
Resposta: a) Desce três unidades.
8. Considere $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 1$. Qual é a amplitude, o período e o deslocamento vertical dessa função?
Resposta:
 - amplitude = 2
 - período = π
 - deslocamento vertical = $+1$

Comentário: o período é dado por $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

9. Compare $f(x) = 2 \operatorname{sen}(2x) + 1$ e $g(x) = 2 \operatorname{cos}(2x) + 1$. Qual das duas começa no ponto máximo?

Resposta: b) $g(x)$.

Comentário: a função cosseno, nessa forma, inicia no valor máximo.

10. Podemos concluir que...

Resposta: d) Todas as alternativas estão corretas.

Comentário: cada parâmetro controla um tipo de transformação, pequenas mudanças em a, b e d alteram o gráfico, e o GeoGebra facilita essa visualização.

2.2.10 Atividade 3 – Articulação álgebra-geometria

A terceira atividade desta sequência didática foi elaborada a partir das dificuldades observadas na etapa anterior, especialmente nas questões que envolviam a análise de funções trigonométricas compostas. Verificou-se que, embora os estudantes conseguissem identificar algumas transformações de forma visual, ainda apresentavam dificuldades em relacionar os parâmetros presentes na expressão algébrica ao comportamento do gráfico correspondente.

Com o objetivo de retomar e aprofundar esse conteúdo, esta atividade propõe uma nova exploração no GeoGebra, agora com a janela de Álgebra aberta, permitindo que os alunos acompanhem simultaneamente a expressão da função e as alterações produzidas em seu gráfico. A proposta é que os estudantes movimentem os parâmetros conforme orientado no roteiro da atividade, registrem a função obtida e analisem as modificações provocadas no gráfico.

Durante essa exploração, os alunos são levados a observar como cada parâmetro interfere em características importantes da função trigonométrica, como amplitude, período, linha média, valores máximos e mínimos e deslocamentos do gráfico. Dessa forma, busca-se favorecer a compreensão das relações entre a expressão algébrica da função e suas propriedades gráficas.

Essa etapa tem como finalidade consolidar a articulação entre a representação algébrica e a representação gráfica das funções seno e cosseno, permitindo que os estudantes compreendam de maneira mais clara o papel de cada parâmetro na transformação do gráfico dessas funções.

A atividade proposta aos estudantes é apresentada a seguir. (O ideal é que o professor imprima a tabela no sentido horizontal, para que o aluno tenha mais espaço para fazer as anotações necessárias).

Função seno e cosseno e seus parâmetros

Usar o applet com a janela de álgebra aberta Complete a tabela e observe os resultados.

Obs: Ao movimentar os parâmetros, a lei da função é atualizada automaticamente na janela de álgebra.

a	b	c	d	Lei da função $f(x)$ e $g(x)$	máximo	minino	linha média	amplitude	período	valor de y quando $x = 0$
1	1	0	0				$Y =$			
-1	1	0	0				$Y =$			
1	1	0	2				$Y =$			
2	2	0	-1				$Y =$			
-2	0,5	0	1				$Y =$			
4	-2	0	-3				$Y =$			
3	-4	0	5				$Y =$			
-1	-0,2	0	-2				$Y =$			
0,5	4	0	0,5				$Y =$			
-5	$\frac{3}{2}$	0	-5				$Y =$			
1	1	1	1				$Y =$			
-2	1	-2	3				$Y =$			
2	-1	2	4				$Y =$			
-3	-0,5	0,5	-2				$Y =$			
3/5	2	2	-3				$Y =$			

Questões investigativas após o preenchimento da tabela

Parâmetro a – Amplitude

1. O que acontece com o gráfico quando o valor de a aumenta? E quando diminui?
2. O sinal de a (positivo ou negativo) altera a posição dos máximos e mínimos (picos e vales)?
3. A linha média se altera quando mudamos a ?

Parâmetro b – Frequência e Período

1. O que muda no gráfico quando aumentamos o valor de b ? O “tamanho do ciclo” (período) fica maior ou menor?
2. Como podemos estimar o período observando o gráfico?
3. Qual é a relação entre o período $T = \frac{2\pi}{b}$ e a largura do ciclo?

Parâmetro c – Deslocamento Horizontal (fase)

1. Quando o parâmetro c é positivo, o gráfico se desloca para a direita ou para a esquerda?
2. E quando é negativo?
3. O formato da curva muda ou apenas sua posição?
4. Como essa diferença ajuda a identificar se a função é seno ou cosseno?

Parâmetro d – Deslocamento Vertical

1. O que acontece com o gráfico quando alteramos o valor de d ?
2. A linha média sobe ou desce?
3. Como determinar a linha média observando apenas os valores máximo e mínimo?

Valor de y para $x = 0$ nas funções seno e cosseno

1. Qual a importância desse ponto?

As questões abaixo são questões no estilo do ENEM. Responda com base nas observações realizadas na atividade anterior.

Questão 1 – Marés

Em uma cidade litorânea, o nível da maré em função do tempo t (em horas) pode ser modelado por: $M(t) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$

- a) Determine o valor máximo e mínimo da maré.
- b) Qual o período do fenômeno?

- c) Qual a altura média da maré? (Amplitude)
- d) Interprete o parâmetro +4 no modelo.

Questão 2 – Roda-gigante

O movimento de uma cabine de roda-gigante pode ser descrito pela função: $H(t) = 10 + 8 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$ em que $H(t)$ representa a altura (em metros) da cabine em função do tempo t (em segundos).

- a) Qual a altura máxima e mínima atingida pela cabine?
- b) Quanto tempo leva para completar uma volta?
- c) Qual parâmetro corresponde ao raio da roda-gigante?

Questão 3 – Oscilação de pêndulo

O movimento de um pêndulo pode ser aproximado por: $\Theta(t) = 30 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ onde $\Theta(t)$ é o ângulo de oscilação (em graus) no instante t (em segundos).

- a) Qual a amplitude da oscilação?
- b) Qual é o período do movimento?
- c) O que aconteceria se trocássemos sen por cos?

Questão 4 – Som senoidal

Uma onda sonora pode ser representada por: $S(t) = 3 \sin(440t)$, em que $S(t)$ mede a intensidade da onda em função do tempo t (em segundos).

1. Qual a amplitude da onda?
2. O que significa o valor 440?
3. Teste, no GeoGebra, o efeito de aumentar/diminuir esse número: como isso altera o som representado?

Questão 5 – Interpretação de gráfico Qual a função que descreve o gráfico abaixo:

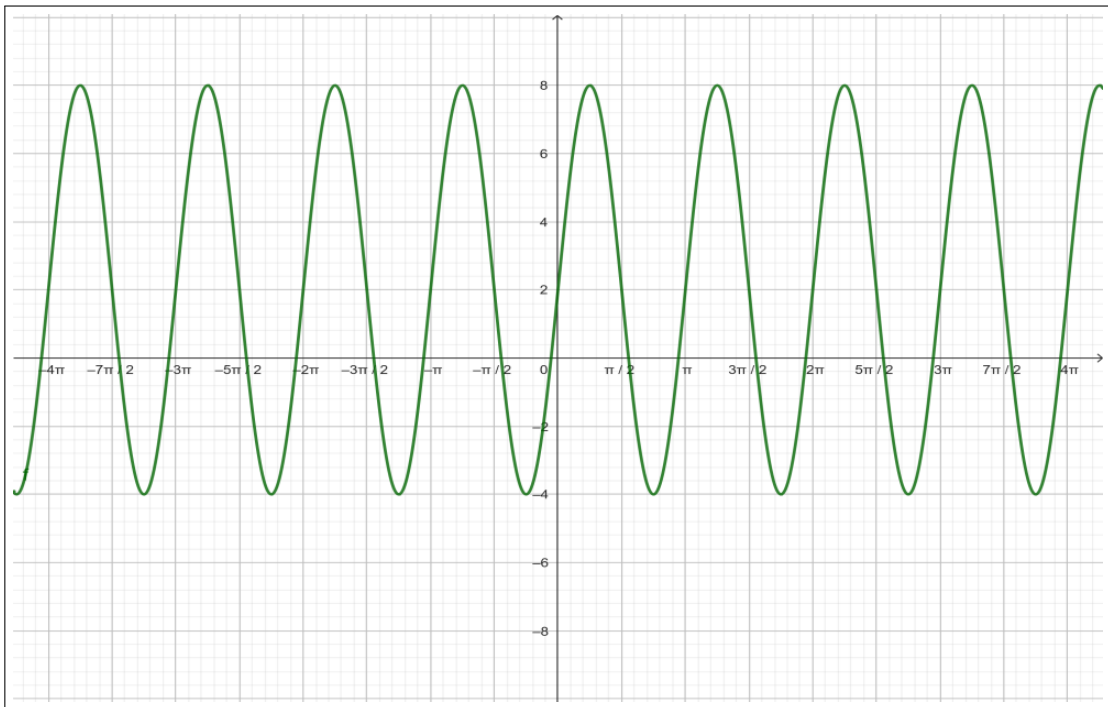


Figura 2.1: Fonte: Própria autora

2.2.11 Gabarito

Complete a tabela e observe os resultados.

Ao manipular os parâmetros da função trigonométrica no GeoGebra, espera-se que os estudantes identifiquem as seguintes relações:

Amplitude

- Amplitude: corresponde ao valor absoluto do parâmetro a . Ela indica a distância entre a linha média da função e seus valores máximos ou mínimos.

$$A = |a|$$

Linha média

- Linha média: é determinada pelo parâmetro d . Esse valor indica o deslocamento vertical do gráfico e representa a reta em torno da qual a função

oscila.

$$y = d$$

Valor máximo da função

- Valor máximo: pode ser obtido somando-se a amplitude à linha média, ou seja

$$\text{máximo} = d + |a|$$

Valor mínimo da função

- Valor mínimo: corresponde à linha média menos a amplitude, ou seja

$$\text{mínimo} = d - |a|$$

Período da função

- Período: depende do parâmetro b e é dado por

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

Parâmetro a – Amplitude

1. O que acontece com o gráfico quando o valor de a aumenta? E quando diminui?

Quando o valor de a aumenta em módulo, a amplitude da função aumenta, fazendo com que os picos e vales fiquem mais distantes da linha média. Quando diminui, a amplitude também diminui, deixando o gráfico mais “achatado”.

2. O sinal de a altera a posição dos máximos e mínimos?

Sim. Quando a é negativo, ocorre uma reflexão do gráfico em relação ao eixo horizontal, invertendo a posição dos máximos e mínimos.

3. A linha média se altera quando mudamos a ?

Não. A linha média permanece a mesma, pois ela depende apenas do parâmetro d .

Parâmetro b – Frequência e Período

1. O que muda no gráfico quando aumentamos o valor de b ?

O número de oscilações aumenta e o gráfico fica mais “comprimido” horizontalmente.

2. O período fica maior ou menor?

O período diminui quando $|b|$ aumenta.

3. Como podemos estimar o período observando o gráfico?

Observando a distância horizontal entre dois máximos consecutivos, dois mínimos consecutivos ou dois pontos equivalentes da curva.

4. Qual é a relação entre $T = \frac{2\pi}{|b|}$ e a largura do ciclo?

O período T representa a largura de um ciclo completo da função no eixo horizontal.

Parâmetro c – Deslocamento horizontal (fase)

1. Quando c é positivo, o gráfico se desloca para onde?

O gráfico se desloca para a esquerda.

2. E quando é negativo?

O gráfico se desloca para a direita.

3. O formato da curva muda?

Não. Apenas ocorre translação horizontal, mantendo a forma da curva.

4. Como essa diferença ajuda a identificar seno ou cosseno?

Observando o ponto inicial do gráfico e o deslocamento horizontal, é possível

perceber se a curva corresponde ao seno ou ao cosseno.

Parâmetro d – Deslocamento vertical

1. O que acontece quando alteramos d ?

O gráfico sofre uma translação vertical.

2. A linha média sobe ou desce?

Sim. A linha média passa a ser $y = d$.

3. Como determinar a linha média observando máximo e mínimo?

$$\text{linha média} = \frac{\text{máximo} + \text{mínimo}}{2}$$

Valor de y para $x = 0$ nas funções seno e cosseno

1. Qual a importância desse ponto?

Esse ponto ajuda a identificar qual função está sendo representada.

- Para o seno: $\text{sen}(0) = 0$
- Para o cosseno: $\text{cos}(0) = 1$

Questões estilo ENEM

Questão 1 – Marés

$$\text{Modelo: } M(t) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$$

- a) Valor máximo: $4+2=6$
 Valor mínimo: $4-2=2$
- b) Período $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Logo, o período é 12 horas.
- c) Altura média da maré: A linha média é 4.
- d) Interpretação do +4: Representa o deslocamento vertical, ou seja, o nível médio da maré.

Questão 2 – Roda-gigante

Modelo: $H(t) = 10 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$

- a) Altura máxima: $10 + 8 = 18$ m
 Altura mínima: $10 - 8 = 2$ m
- b) Tempo para uma volta: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$. Logo, a cabine leva 30 segundos para completar uma volta.
- c) Parâmetro que representa o raio: O valor 8, que corresponde à amplitude.

Questão 3 – Pêndulo

Modelo: $\theta(t) = 30 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

- a) Amplitude: 30^0
- b) Período: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$. Logo, o período é 4 segundos.
- c) Se trocarmos seno por cosseno: O movimento permanece periódico, apenas ocorre deslocamento de fase.

Questão 4 – Som senoidal

Modelo: $S(t) = 3 \text{sen}(440t)$

- a) Amplitude: 3
- b) Significado de 440: Representa a frequência angular, relacionada ao número de oscilações por unidade de tempo.
- c) Se aumentar ou diminuir esse valor A onda fica mais rápida ou mais lenta, alterando a frequência do som.

Questão 5 – Interpretação do gráfico

Espera-se que o estudante identifique uma função trigonométrica do tipo: $f(x) = a\text{sen}(bx + c) + d$ ou $f(x) = a\text{cos}(bx + c) + d$ de acordo com:

1. amplitude observada
2. período do gráfico
3. deslocamentos vertical e horizontal.

2.3 Sequência didática – Simulado ENEM

2.3.1 Contextualização

Após a exploração do conceito de radiano e o estudo das funções seno e cosseno e de suas transformações, a terceira etapa da sequência didática propõe a aplicação de um simulado com questões no estilo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Essa etapa tem como objetivo proporcionar aos estudantes a oportunidade de aplicar os conhecimentos construídos ao longo das atividades anteriores em situações-problema contextualizadas, semelhantes às encontradas em avaliações externas.

O ENEM tem priorizado questões que exigem do estudante a capacidade de interpretar gráficos, reconhecer padrões de comportamento de funções e relacionar modelos matemáticos a fenômenos periódicos presentes em diferentes contextos, como marés, ondas sonoras e movimentos oscilatórios. Nesse sentido, as funções trigonométricas aparecem frequentemente associadas à modelagem de situações reais.

Assim, a aplicação do simulado busca aproximar o conteúdo trabalhado em sala de aula das demandas presentes nas avaliações externas, incentivando os estudantes a mobilizar os conhecimentos adquiridos sobre amplitude, período, deslocamentos e interpretação de gráficos de funções trigonométricas.

Além de possibilitar a aplicação dos conceitos estudados, essa etapa também permite ao professor identificar possíveis dificuldades dos alunos na interpretação e resolução de problemas, favorecendo a realização de discussões posteriores sobre as estratégias utilizadas na resolução das questões.

2.3.2 Metodologia, objetivos e finalidade

A aplicação do simulado foi planejada como uma etapa de avaliação formativa e de consolidação dos conteúdos trabalhados ao longo da sequência didática. Após o estudo do conceito de radiano, da construção do ciclo trigonométrico e da análise das funções seno e cosseno e de suas transformações, os estudantes são convidados a resolver questões que exigem a mobilização desses conhecimentos em situações contextualizadas.

A proposta metodológica busca estimular a interpretação de gráficos, a análise de expressões algébricas e a identificação de padrões de comportamento de funções trigonométricas, habilidades frequentemente exigidas em avaliações externas, especialmente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Durante a realização do simulado, os estudantes resolvem individualmente as questões propostas, que apresentam situações-problema relacionadas a fenômenos periódicos, como movimentos oscilatórios, variações de marés e ondas sonoras. Esse tipo de abordagem contribui para que os alunos percebam a aplicabilidade das funções trigonométricas na modelagem de fenômenos reais.

Objetivo geral

Consolidar a compreensão dos conceitos relacionados às funções trigonométricas, por meio da resolução de questões contextualizadas que envolvem interpretação de gráficos, análise de parâmetros e modelagem de fenômenos periódicos.

Objetivos específicos

- Desenvolver a capacidade de interpretar gráficos de funções trigonométricas;
- Relacionar os parâmetros das funções seno e cosseno ao comportamento de seus gráficos;
- Aplicar conceitos como amplitude, período e deslocamentos na resolução de problemas;
- Estimular o raciocínio matemático e a análise de situações contextualizadas;
- Familiarizar os estudantes com o formato de questões presentes no ENEM.

Finalidade

A finalidade desta atividade é proporcionar aos estudantes um momento de aplicação e síntese dos conhecimentos construídos ao longo da sequência didática, permitindo que utilizem os conceitos estudados em situações semelhantes às encontradas em avaliações externas. Além disso, o simulado oferece ao professor a oportunidade de identificar possíveis dificuldades dos alunos e promover discussões posteriores que contribuam para o aprofundamento da compreensão dos conteúdos trabalhados.

2.3.3 Orientações ao professor (Guia de mediação)

Para a aplicação desta atividade, recomenda-se que o professor organize previamente o ambiente de sala de aula de modo a possibilitar a realização do simulado em condições semelhantes às de uma avaliação. A atividade pode ser aplicada em sala de aula regular, preferencialmente após a conclusão das atividades relacionadas ao estudo do radiano e das funções seno e cosseno e de suas transformações.

Tempo estimado: aproximadamente 1 a 2 tempos de aula de 50 minutos, dependendo do ritmo da turma e da quantidade de questões propostas.

Durante a realização do simulado, recomenda-se que os estudantes resolvam as questões individualmente, buscando interpretar as situações apresentadas e aplicar os conceitos estudados ao longo da sequência didática. Esse momento permite observar de que maneira os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos para resolver problemas que envolvem interpretação de gráficos, análise de parâmetros e modelagem de fenômenos periódicos.

Após a realização do simulado, é importante que o professor promova uma discussão coletiva das questões, analisando as estratégias utilizadas pelos estudantes e esclarecendo possíveis dúvidas. Esse momento de socialização das soluções contribui para a consolidação dos conceitos trabalhados e para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Além disso, a análise das respostas permite ao professor identificar dificuldades recorrentes na interpretação de gráficos ou na compreensão das funções trigonométricas, possibilitando a retomada de conceitos sempre que necessário.

2.3.4 Orientações ao estudante

Caro estudante,

Nesta etapa da sequência didática você irá participar de um simulado composto por questões no estilo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). As questões propostas envolvem situações que podem ser resolvidas utilizando os conceitos estudados ao longo das atividades anteriores, especialmente aqueles relacionados ao radiano, às funções seno e cosseno e às transformações de seus gráficos.

Leia atentamente cada questão antes de iniciar a resolução e procure identificar as informações relevantes apresentadas no enunciado. Em muitas situações,

será necessário interpretar gráficos ou relacionar fenômenos periódicos com modelos matemáticos representados por funções trigonométricas.

Durante a resolução das questões, busque aplicar os conhecimentos construídos nas atividades anteriores da sequência didática, como a interpretação da amplitude, do período e dos deslocamentos presentes nas funções trigonométricas.

Este simulado tem como objetivo ajudá-lo a consolidar os conceitos estudados e a desenvolver habilidades importantes para a resolução de problemas semelhantes aos que aparecem em avaliações externas, como o ENEM.

Após a realização da atividade, participe da discussão coletiva conduzida pelo professor, na qual serão analisadas as estratégias utilizadas na resolução das questões.

2.3.5 Aplicação do simulado

O simulado foi aplicado após a realização das atividades relacionadas ao estudo do radiano e à análise das funções seno e cosseno e de suas transformações. A atividade foi realizada em sala de aula, em formato semelhante ao de uma avaliação, permitindo que os estudantes resolvessem as questões individualmente.

As questões propostas foram elaboradas com base no estilo das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), priorizando a interpretação de gráficos, a análise de funções trigonométricas e a resolução de problemas contextualizados.

Após a realização do simulado, foi promovida uma discussão coletiva das questões, na qual os estudantes puderam compartilhar suas estratégias de resolução e esclarecer possíveis dúvidas sobre os conceitos envolvidos.

1. (ENEM-2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura a direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm \text{sen}(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máxima e ω é a frequência que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

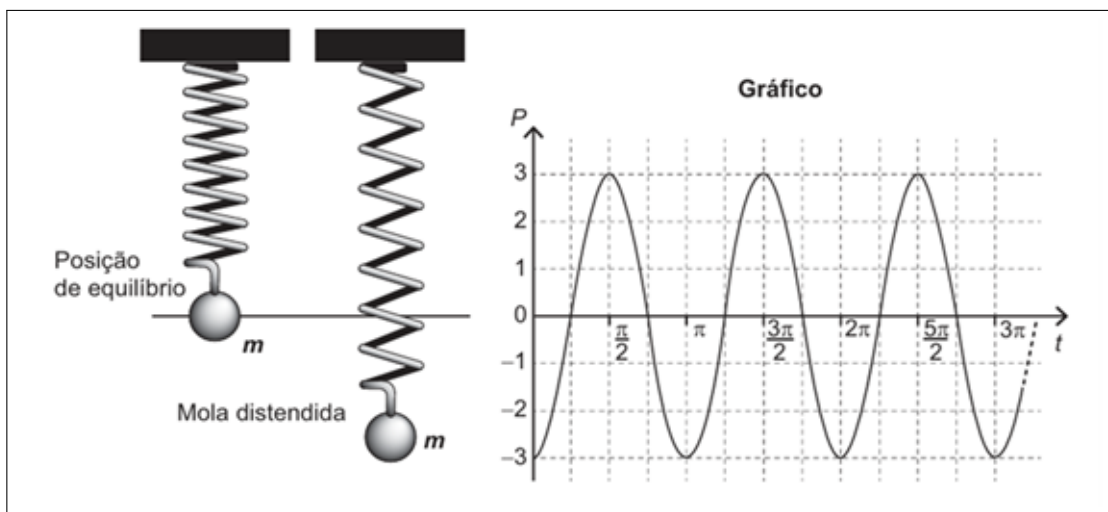


Figura 2.2: Fonte: Enem 2021

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas. A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m , ao longo do tempo, no gráfico, é:

- (a) $-3 \cos(2t)$
 - (b) $-3 \text{sen}(2t)$
 - (c) $3 \cos(2t)$
 - (d) $6 \cos(2t)$
 - (e) $6 \text{sen}(2t)$
2. (ENEM- 2019 PPL) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $A \text{sen}(\omega t + \theta)$, que apresentam parâmetros

com significados físicos importantes, tais como a frequência $\omega = \frac{2\pi}{7}$, em que 7 é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < 2\pi/\omega$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento. O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t , conforme ilustra a figura.

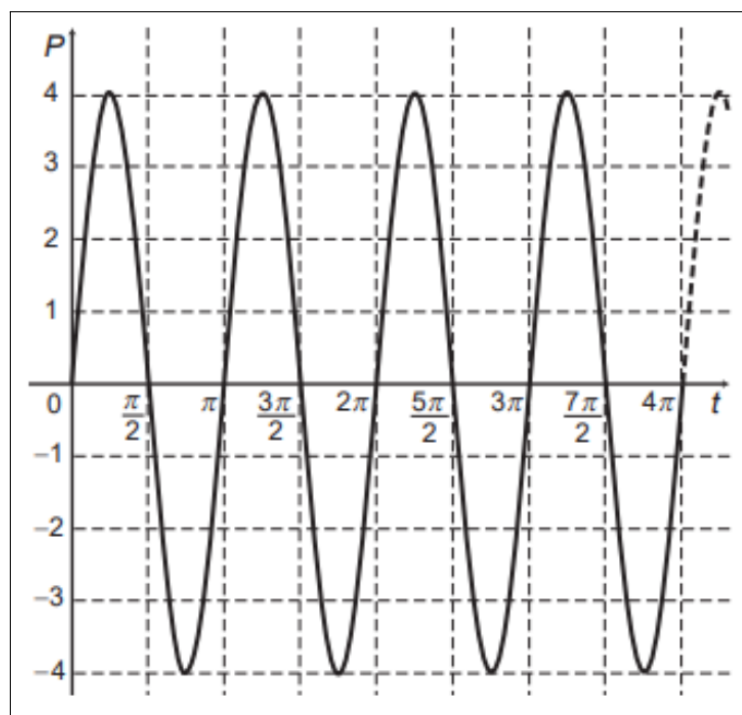


Figura 2.3: Fonte: Enem 2019

A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t é:

- a) $P(t) = 4\text{sen}(2t)$
- b) $P(t) = -4\text{sen}(2t)$
- c) $P(t) = -4\text{sen}(4t)$
- d) $P(T) = 4\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
- e) $P(t) = 4\text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

3. (ENEM – 2018) Em 2014 foi inaugurada maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

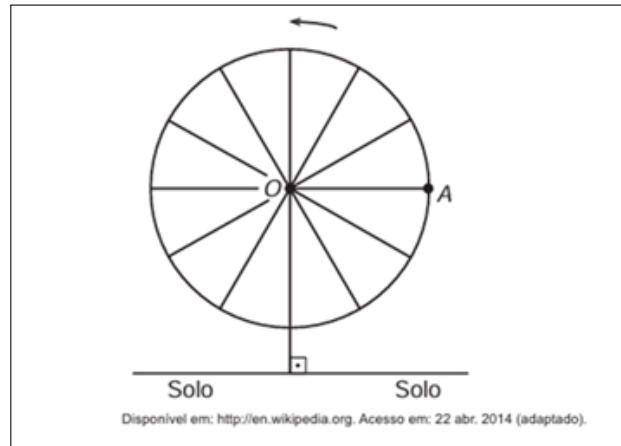


Figura 2.4: Fonte: Enem 2018

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do porto O . Sejam t o ângulo determinado pelo segmento AO em relação a sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A , em relação ao solo, em função de t . Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

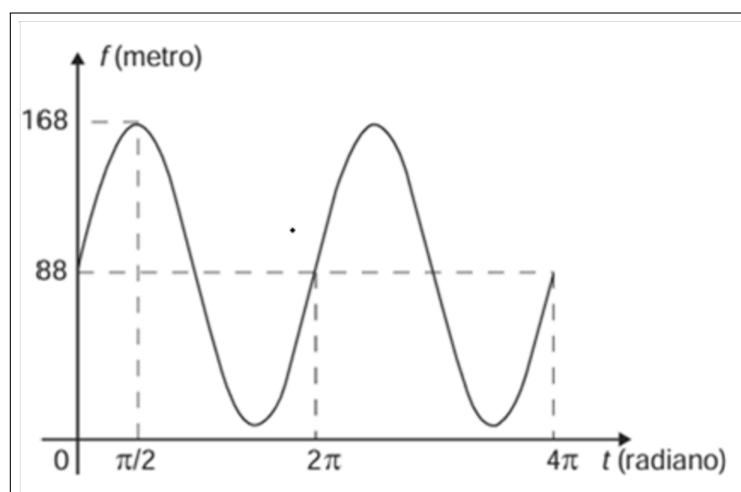


Figura 2.5: Fonte: Enem 2018

A expressão da função altura é dada por:

(a) $f(t) = 80 \operatorname{sen}(t) + 88$

(b) $f(t) = 80 \cos(t) + 88$

(c) $f(t) = 88 \cos(t) + 168$

(d) $f(t) = 168 \operatorname{sen}(t) + 88 \cos(t)$

(e) $f(t) = 88 \operatorname{sen}(t) + 168 \cos(t)$

4. (ENEM – 2018) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

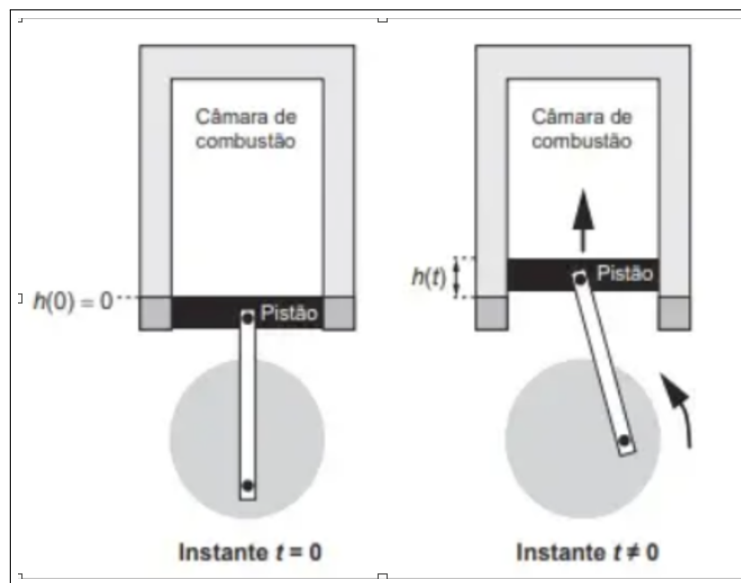


Figura 2.6: Fonte: Enem 2018

A função $h(t) = 4 + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$, definida para $t \geq 0$, descreve como varia a altura h , medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t , medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β , que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor

tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π . O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é:

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5
- e) 8

5. (ENEM- 2017) Um cientista em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cos(\beta t)$ em que A, B e β são constantes reais positivas e t representa a variável de tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

Figura 2.7: Fonte: Enem 2017

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

- a) $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$
- b) $P(t) = 78 + 42 \cos(3\pi t)$
- c) $P(t) = 99 + 21 \cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21 \cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42 \cos(t)$

6. (ENEM – 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro. (Disponível em WWW.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago.2012 (adaptado)).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é :

a) janeiro

b) abril

c) junho

d) julho item outubro

7. (ENEM-2015 PPL) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$ sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0h < 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C , a mínima 18°C , e que durante a tarde a temperatura fosse menor do

que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

- a) $A = 18$ e $B = 8$
- b) $A = 22$ e $B = -4$
- c) $A = 22$ e $B = 4$
- d) $A = 26$ e $B = -8$
- e) $A = 26$ e $B = 8$

8. (ENEM -2014) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}[b \cdot (x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são):

- a) a .
 - b) b .
 - c) c .
 - d) a e b .
 - e) b e c .
9. (UERJ) O gráfico a seguir representa a função periódica definida por $f(x) = 2\text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função.

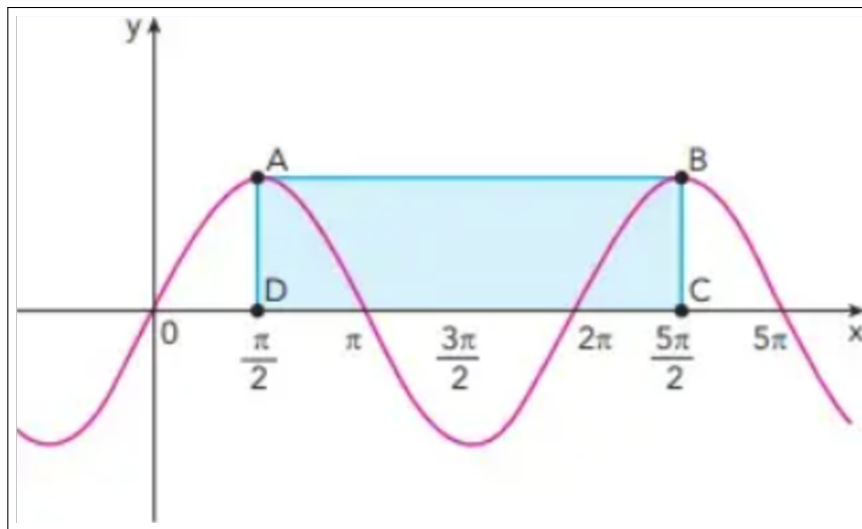


Figura 2.8: Fonte: UERJ

A área do retângulo $ABCD$ é:

- a) 6π
- b) 5π
- c) 4π
- d) 3π

10. (EsPCEEx) Na figura abaixo está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma $y = m \cdot \text{sen}(nx) + k$, com $n > 0$.

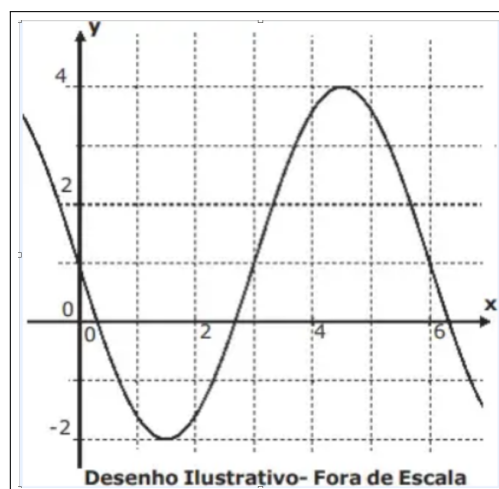


Figura 2.9: Fonte: EsPCEEx

Os valores de m, n e k são, respectivamente:

- a) $3, \frac{\pi}{3}$ e 1
- b) $6, \frac{\pi}{6}$ e 1
- c) $-3, \frac{\pi}{6}$ e 1
- d) $-3, \frac{\pi}{3}$ e 1
- e) $3, \frac{\pi}{6}$ e 1

2.3.6 Gabarito comentado do simulado

Questão 1: A.

O gráfico tem amplitude 3; linha média é 0, então $d = 0$; período π , então $b = 2$ e inicia em -3 , o que corresponde a: $P(t) = -3 \cos(2t)$.

Questão 2: A.

O gráfico tem amplitude 4; período π , então $b = 2$; linha média é 0 e parte de 0 com crescimento inicial, o que corresponde a: $P(t) = 4 \sin(2t)$.

Questão 3: A.

Pelo gráfico, a linha média é 88, o máximo é 168 então a amplitude é 80; O período é 2π , então $b = 1$ Além disso, em $t = 0$ a função parte da linha média e cresce, caracterizando seno: $f(t) = 80 \sin(t) + 88$.

Questão 4: D.

Temos : $h(t) = 4 + 4 \sin\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$. Queremos que a altura atinja 6 cm três vezes em menos de 4 s: $4 + 4 \sin\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 6 \Rightarrow \sin\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Usando $\pi \approx 3$, o menor valor inteiro que satisfaz a condição é $\beta = 5$.

Questão 5: A.

Da tabela:

- pressão mínima = 78

- pressão máxima = 120
- 90 batimentos por minuto

Logo, $A = \frac{120+78}{2} = 99$, $B = \frac{120-78}{2} = 21$. Como são 90 batimentos por minuto, o período é $T = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ s, e então $k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$. Assim, $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$.

Questão 6: D.

A função é $P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi(x-1)}{6}\right)$. O mês de produção máxima da safra corresponde ao menor preço. Isso ocorre quando o cosseno vale -1: $\frac{\pi(x-1)}{6} = \pi \Rightarrow x - 1 = 6 \Rightarrow x = 7$. Portanto, o mês é julho.

Questão 7: B.

A temperatura máxima é 26 e a mínima é 18, então linha média 22, logo $A = 22$: $A = \frac{26+18}{2} = 22$, $|B| = \frac{26-18}{2} = 4$. Como a temperatura da tarde deve ser menor que a da manhã, o coeficiente deve ser negativo: $B = -4$. (observe que na função dada, houve um deslocamento horizontal)

Questão 8: B.

Na função $y = a \operatorname{sen}[b(x+c)]$, o período depende de b . Para tornar o som mais agudo, é preciso diminuir o período, o que exige alterar apenas o parâmetro b .

Questão 9: C.

A função é $f(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$. Os máximos no intervalo dado ocorrem em $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{5\pi}{2}$, com altura 2. Assim, o retângulo tem: base igual a $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$ e altura igual a 2. Logo, a área é $A = (2\pi) \cdot 2 = 4\pi$.

Questão 10: D.

Pelo gráfico, o valor máximo é 4 e o valor mínimo é -2. Então:

$m = \frac{4-(-2)}{2} = 3$ e $k = \frac{4+(-2)}{2} = 1$. Como o gráfico inicia em $y = 1$ e decresce, o coeficiente do seno deve ser negativo. O período observado é 6, então $n = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Logo, $y = -3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$.

Referências Bibliográficas

AUSUBEL, D. P. A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. Apresentada por MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. São Paulo: Moraes, 1982.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias – ENEM 2025. Brasília: INEP, 2025.

GEOGEBRA. GeoGebra Classic. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/>. Acesso em: 12 out. 2025.

GEOGEBRA. Descobrindo o radiano. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bt378x64>. Acesso em: 2026.

GEOGEBRA. Funções seno e cosseno e seus parâmetros. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mkanmhmn>. Acesso em: 2026.

NUNES, Fernanda Cotrim Cataldo. *Do Radiano às Funções Trigonômicas: uma sequência didática mediada pelo GeoGebra com foco no ENEM*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2026.

PAPERT, S. Logo: computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PRENSKY, M. Digital natives, digital immigrants. *On the Horizon*, v. 9, n. 5, p. 1–6, 2001.

QCONCURSOS. Questões de Matemática – Funções Trigonômicas. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/>. Acesso em: 10 out. 2025.

RESNICK, M. Jardim de infância para a vida toda: por uma aprendizagem criativa, mão na massa e relevante para todos. Porto Alegre: Penso, 2020.