

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – IME
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LEONARDO NEWTON PAIVA BACELAR

**A MATEMÁTICA NA CULINÁRIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA
PARA O ENSINO DE FRAÇÕES**

Salvador –Bahia
2025

LEONARDO NEWTON PAIVA BACELAR

**A MATEMÁTICA NA CULINÁRIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA
PARA O ENSINO DE FRAÇÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT – UFBA como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a Mariana Cassol

Salvador-Bahia
2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e
Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

B117 Bacelar, Leonardo Newton Paiva

A Matemática na Culinária: uma proposta metodológica para o
ensino de frações / Leonardo Newton Paiva Bacelar – Salvador, 2025.
101 f.

Orientadora: Prof.^a Dra. Mariana Cassol

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e
Estatística, 2025.

1. Frações. 2. Metodologias Ativas. 3. Receitas Culinárias. I.
Cassol, Mariana. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU: 51-7:37



Universidade Federal da Bahia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL (PROFMAT)

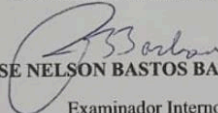
ATA Nº 113

Ata da sessão pública do Colegiado do PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT), realizada em 11/12/2025 para procedimento de defesa da Dissertação e do recurso educacional de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL no. 113, área de concentração Ensino de Matemática, do(a) candidato(a) LEONARDO NEWTON PAIVA BACELAR, de matrícula 2021121558, intitulada A MATEMÁTICA NA CULINÁRIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES. Às 15:30 do citado dia, IME, foi aberta a sessão pelo(a) presidente da banca examinadora Prof. Dra. MARIANA CASSOL que apresentou os outros membros da banca: Prof. Dr. JOSE NELSON BASTOS BARBOSA e Prof. Dr. JOSEPH NEE ANYAH YARTEY. Em seguida foram esclarecidos os procedimentos pelo(a) presidente que passou a palavra ao(à) examinado(a) para apresentação do trabalho de Mestrado. Ao final da apresentação, passou-se à arguição por parte da banca, a qual, em seguida, reuniu-se para a elaboração do parecer. No seu retorno, foi lido o parecer final a respeito do trabalho apresentado pelo(a) candidato(a), tendo a banca examinadora aprovado o trabalho apresentado, sendo esta aprovação um requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre. Em seguida, nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão pelo(a) presidente da banca, tendo sido, logo a seguir, lavrada a presente ata, abaixo assinada por todos os membros da banca.

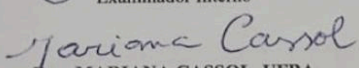
Documento assinado digitalmente
gov.br JOSEPH NEE ANYAH YARTEY
Data: 12/12/2025 15:56:31 -0300
verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. JOSEPH NEE ANYAH YARTEY, UFRB

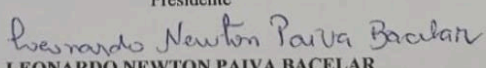
Examinador Externo à Instituição


Dr. JOSE NELSON BASTOS BARBOSA, UFBA

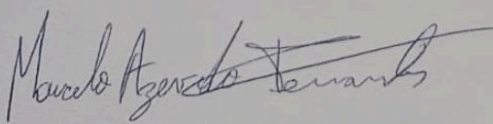
Examinador Interno


Dra. MARIANA CASSOL, UFBA

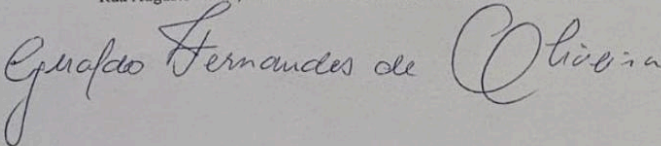
Presidente


LEONARDO NEWTON PAIVA BACELAR

Mestrando(a)



Rua Augusto Viana, s/n - Canela - Salvador/BA - CEP 40110-909 Telefax: • evandrofsantos@ufba.



AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, a oportunidade de concluir este trabalho.

Agradeço aos meus familiares o suporte durante esta caminhada assim como aos meus amigos, amigos-irmãos, colegas de trabalho e aos meus alunos, pois, sem essas pessoas, não seria possível construir este trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFBA que, no meio da pandemia do COVID-19, propôs à nossa turma um pouco de desligamento da realidade que se deu à nossa volta e que, além de nos orientar, foram pontos de apoio tanto intelectual quanto emocional.

Com grande satisfação, agradeço aos professores José Nelson Barbosa e Joseph Yartey, que, além de acompanharem minha caminhada matemática na graduação e no PROFMAT, aceitaram o convite de compor a banca da minha defesa.

Dedico um agradecimento especial às mulheres que estiveram neste processo: a Rita de Cássia, pela sua concepção e lucidez sobre o nosso papel como professor de Matemática; a Graça Dominguez, não só pelas discussões pertinentes sobre educação em um mestrado profissional de matemática como pela condução da coordenação deste curso enquanto o mundo passava por uma grande crise sanitária; a Mariana Cassol, que se tornou mais do que professora: aliou-se comigo na orientação deste trabalho, indicou que uma experiência de sala de aula poderia tornar-se tema de uma dissertação de mestrado e foi meu suporte nos momentos de titubeio quanto à conclusão deste trabalho; a Jeane Fernandes e Anilda Silva por terem me inspirado pedagogicamente quando fizeram uma atividade semelhante nos meus tempos de Secretário Escolar da Escola Municipal Carmelitana 25 de Agosto e às amigas Helena Pabst e Cristina Cardoso que contribuíram nos ajustes deste trabalho.

E, por fim, mas não menos importante, aos colegas discentes que fizeram, desta turma, uma minifamília: Alene, André, Daniela, Genebaldo, Juliana e Maria. A vida só acontece uma vez e tenham certeza de que Deus tinha o plano de unir-nos exatamente em um momento complicado: sem a união que se formou em torno de nós, seria muito mais árduo concluir este curso.

RESUMO

Este trabalho propõe uma sequência didática para o ensino de frações direcionada a turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, partindo de possíveis vivências experimentadas pelos estudantes, com o objetivo de fazer com que tal conteúdo seja visto por eles com alguma familiaridade em seu cotidiano. A experiência compartilhada foi realizada com 43 estudantes, de duas turmas do sexto ano, do Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima, na cidade de Salvador-Ba, utilizando as informações fracionárias de uma receita culinária, com a finalidade de explorar a relação delas com a quantidade real dos itens ali contidos. A atividade apresentou dois momentos: o da produção de um bolo a partir de uma receita, intencionalmente utilizada com a maior quantidade de frações em sua descrição e, em seguida, o da aplicação de um questionário qualitativo. Para fundamentar a escolha do tema e da metodologia, foi realizada uma pesquisa sobre o uso das frações por algumas civilizações e o surgimento dessa ideia ao longo do tempo, bem como sobre a importância da utilização do material concreto e da conexão da Matemática com atividades próximas à realidade do estudante. Além disso, buscou-se explorar a forma como os livros didáticos abordam o tema.

Palavras-chave: Educação Matemática. Frações. Receita Culinária.

ABSTRACT

This study proposes a didactic sequence for teaching fractions aimed at upper elementary school students, based on possible real-life experiences they may have encountered. The goal is to make this mathematical content more relatable by connecting it to their daily lives. The shared experience was conducted with 43 sixth-grade students from two classes at Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima in Salvador, Bahia. The activity used fractional measurements from a culinary recipe to explore their relationship with the actual quantities of ingredients. It consisted of two phases: baking a cake using a recipe intentionally designed with numerous fractions and then applying a qualitative questionnaire. The idea for this approach emerged from a review of how fractions were used by different civilizations throughout history, as well as the observation that mathematics education often presents fractions in a way disconnected from real-world applications. Additionally, an analysis of textbooks suggests that this method is valid, given the variety of cases that explore recipes in their content. This activity bridges theory and pedagogical practice as an alternative way to approach fraction instruction. After analyzing the responses, it is possible to conclude that there is room for more playful and engaging activities at this educational stage. Furthermore, students demonstrated improved comprehension and engagement, indicating a positive learning experience.

Keywords: Mathematics Education. Fractions. Cooking Recipe.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tábua Babilônica de Júpiter	20
Figura 2 – Esticadores de corda	21
Figura 3 – Régua-côvado egípcia	22
Figura 4 – Representação das frações egípcias	24
Figura 5 – Pedaco do Papiro de Rhind	27
Figura 6 – Representação dos pães	29
Figura 7 – Representação de metade dos pães	30
Figura 8 – Representação da terça parte dos pães	30
Figura 9 – Representação da divisão das sobras dos pães	30
Figura 10 – Representação dos pedaços de pão recebidos individualmente	31
Figura 11 – Imagem com inscrições cuneiformes da plaqueta YBC 7289	32
Figura 12 – Transcrição da escrita cuneiforme para base decimal	33
Figura 13 – Representação do número pi na forma de Stevin	37
Figura 14 – Abertura do capítulo de frações do livro Desafio da Matemática do 4º ano.....	64
Figura 15 – Abertura do capítulo de frações do livro Ápis Mais do 4º ano.....	65
Figura 16 – Imagem presente no capítulo de frações do livro Ápis Mais.....	66
Figura 17 – Abertura do capítulo de frações do livro A Conquista da Matemática do 4º ano	67
Figura 18 – Abertura do capítulo de frações do livro Desafio da Matemática do 5º ano.....	68
Figura 19 – Abertura do capítulo de frações do livro Ápis do 5º ano.....	69
Figura 20 – Abertura do capítulo de frações do livro A Conquista da Matemática do 5º ano.....	70
Figura 21 – Abertura do livro didático A Conquista da Matemática do 6º ano.....	72
Figura 22 – Registro fotográfico da atividade prática	78
Figura 23 – Resposta do estudante A (questão 1)	79
Figura 24 – Resposta do estudante B (questão 1)	80
Figura 25 – Resposta do estudante C (questão 1)	80
Figura 26 – Resposta do estudante A (questão 2)	80
Figura 27 – Resposta do estudante B (questão 2)	80
Figura 28 – Resposta do estudante C (questão 2)	81
Figura 29 – Resposta do estudante E (questão 4)	81
Figura 30 – Resposta do estudante B (questão 4)	82
Figura 31 – Resposta do estudante G (questão 4).....	82
Figura 32 – Resposta do estudante E (questão 5).....	82
Figura 33 – Respostas do estudante E	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Livros do 3º ano do Ensino Fundamental.....	62
Tabela 2 – Livros do 4º ano do Ensino Fundamental.....	63
Tabela 3 – Livros do 5º ano do Ensino Fundamental.....	67
Tabela 4 – Livros do 6º ano do Ensino Fundamental.....	71

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 FRAÇÕES EM ALGUMAS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS	18
2.1 FRAÇÕES NOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO ANTIGOS.....	23
2.2 O PAPIRO DE RHIND.....	26
2.1.1 O problema 06 do Papiro de Rhind	29
2.3 PLAQUETA YBC 7289.....	32
2.4 FRAÇÕES UNITÁRIAS.....	34
2.5 FRAÇÕES SEXAGESIMAS.....	35
2.6 FRAÇÕES DECIMAIS.....	36
3 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS: O CONJUNTO DOS NÚMEROS	
RACIONAIS	39
3.1 DEFINIÇÃO.....	39
3.2 ADIÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS.....	39
3.3 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS.....	40
3.3.1 Associatividade	41
3.3.2 Comutatividade	42
3.3.3 Elemento Neutro	44
3.3.4 Elemento Oposto (Simétrico)	44
3.4 SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS.....	45
3.5 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS.....	49
3.5.1 Associatividade	51
3.5.2 Comutatividade	52
3.5.3 Distributividade	53
3.5.4 Elemento Neutro	54
3.5.5 Inverso Multiplicativo	54
4 FRAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA	56
4.1 O LIVRO DIDÁTICO.....	59
4.2 ALGUMAS COLEÇÕES USADAS NO ENSINO FUNDAMENTAL I.....	61
4.3 ALGUMAS COLEÇÕES USADAS NO ENSINO FUNDAMENTAL II.....	71
5 A CULINÁRIA COMO PROPOSTA DE ATIVIDADE	74
5.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE.....	74

5.2 RELATO DE EXPERIÊNCIA.....	76
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	85
REFERÊNCIAS.....	88
ANEXOS.....	94

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico, crítico e analítico dos estudantes. Ela está presente em diversas áreas do conhecimento e é essencial para o entendimento e a resolução de problemas do cotidiano. É importante relacionar os conceitos matemáticos a situações reais e práticas do dia a dia, mostrando aos estudantes a aplicação e a importância desses conteúdos (D'Ambrosio, 1989).

Algumas estratégias podem ser utilizadas para facilitar a aprendizagem e tornar o ensino da Matemática mais dinâmico e interativo, como incentivar a participação dos estudantes, estimular o raciocínio lógico, oportunizar a autonomia e promover o interesse pela disciplina. Essas estratégias podem ajudar os estudantes a superarem as dificuldades e os desafios que se apresentam, além de tornar o aprendizado mais significativo e prazeroso. Segundo Bacich e Moran (2018, p. 78),

“A personalização, do ponto de vista do educador e da escola, é o movimento de ir ao encontro das necessidades e interesses dos estudantes e de ajudá-los a desenvolver todo o seu potencial, motivá-los, engajá-los em projetos significativos, na construção de conhecimentos mais profundos e no desenvolvimento de competências mais amplas” (Bacich e Moran, 2018, p. 78).

Nesse direcionamento, a metodologia de ensino adotada pode tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes como as metodologias ativas¹, as quais promovem uma abordagem centrada no estudante, incentivando sua participação ativa no processo de aprendizagem. Essa proposta reflete um entendimento mais amplo da educação, que vai além da simples transmissão de conteúdo.

E, como o ensino da Matemática sofre rejeição por muitos alunos devido a diferentes motivos é valoroso a intenção do educador de valorizar os conhecimentos prévios do aluno e tornar o material instrucional potencialmente significativo a fim de produzir uma aprendizagem significativa indo além de uma aprendizagem mecânica (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980 *apud* Bossi; Schimiguel, 2020, p. 3).

¹ “Metodologias ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, processo que se dá de forma flexível, interligada, híbrida” (Moran, 2018, p. 74).

Para que a implementação das metodologias ativas seja bem-sucedida, é importante que as instituições de ensino disponibilizem um ambiente que favoreça a experimentação e a inovação pedagógica, além de promover uma cultura de colaboração entre educadores, estudantes e comunidade. Dessa forma, é possível não apenas atualizar os processos educativos, mas também torná-los mais inclusivos e representativos das demandas sociais contemporâneas.

Além disso, apoiar-se nas metodologias ativas proporcionará o desenvolvimento dos conteúdos de modo que o estudante seja protagonista durante o processo. Nesse sentido, a Educação Matemática deve ir além do simples cálculo e da memorização de fórmulas, mas promover a compreensão dos conceitos matemáticos e sua aplicação prática no cotidiano. Assim, a Educação Matemática pode ser essencial para a formação de cidadãos críticos e capazes de enfrentar os desafios do mundo. Segundo D'Ambrósio (1998, *apud* Pereira *et al*, 2021, p.353),

[...] isso significa desenvolver a capacidade do aluno para manejar situações reais, que se apresentam a cada momento de maneira distinta. Não se obtém isso com simples capacidade de fazer contas nem mesmo com a habilidade de solucionar problemas que são apresentados aos alunos de maneira adrede preparada. A capacidade de manejar situações novas, reais pode muito ser alcançada mediante modelagem e formulação de problemas, que infelizmente não estão presentes em nossos currículos antiquados (D'Ambrósio, 1998, *apud* Pereira *et al*, 2021, p. 353),

É importante que haja uma abordagem educativa que considere as necessidades e características individuais de cada estudante, ao mesmo tempo, que promova a construção de valores sociais e éticos fundamentais para a convivência em sociedade. Isso requer uma prática educativa que seja inclusiva, diversificada e que proporcione aos estudantes experiências significativas que os preparem não apenas para o mercado de trabalho, mas também para a vida em comunidade.

Vale ressaltar, no entanto, que os educadores precisam estar atentos às demandas e aos desafios contemporâneos, buscando incorporar em sua prática pedagógica temas como a diversidade, a sustentabilidade e a tecnologia, de forma a preparar os estudantes para os desafios do mundo atual. A educação, nesse sentido, deve ser uma ferramenta de transformação social e de promoção do desenvolvimento humano integral.

É esperado que uma boa formação matemática conecte o aprendizado à análise de questões sociais, ambientais, econômicas e tecnológicas, utilizando a matemática como ferramenta de apoio. Seu objetivo é formar estudantes capazes de identificar, avaliar e questionar como a matemática é aplicada em diferentes contextos sociais (mídia, política, fenômenos socioculturais), incentivando uma leitura crítica de dados e a interpretação reflexiva de sua influência na sociedade.

Lorenzato (2006, *apud* Santos; Gualandi, 2016, p. 2) define material didático como:

[...] qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem”. Dentro desse grupo de materiais, o autor faz uma referência especial ao material didático concreto, o qual, de acordo com ele, pode ter duas interpretações: “uma delas refere-se ao palpável, manipulável, e a outra, mais ampla, inclui também as imagens gráficas (Lorenzato, 2006, *apud* Santos; Gualandi, 2016, p. 2).

De acordo com o autor, o material didático concreto é fundamental para o ensino da Matemática, pois ele possibilita uma melhor compreensão dos conceitos abstratos e ajuda os estudantes a visualizarem e manipularem os objetos matemáticos, facilitando, assim, a aprendizagem.

Lorenzato (2006, *apud* Santos; Gualandi, 2016) destaca que inúmeros educadores já indicavam o uso de material visual ou visual tátil como um importante facilitador da aprendizagem. Ele relata que, por volta de 1650, Comenius, filósofo tcheco (considerado o pai da Didática Moderna), escreveu que o ensino deveria partir do concreto para o abstrato, destacando que só se aprende fazendo. Já por volta dos anos 1800, Pestalozzi e Froebel reconheceram que o ensino também deveria começar pelo concreto, e, na mesma época, Herbart defendia que a aprendizagem deveria começar pelo sensorial. Meados dos anos 1900, Dewey confirmava o que dizia Comenius, evidenciando a importância da experiência direta como fator básico para a construção do conhecimento. Montessori, por volta de 1907, mostrou exemplos de material didático e atividades de ensino que valorizam a aprendizagem através dos sentidos, especialmente o tátil, enquanto Piaget deixava claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto. Nessa mesma linha, Vygotsky e Bruner concordaram que as experiências reais são o melhor caminho para a criança construir seu raciocínio.

Para Behr (1983, *apud* Silva, 2005), uma das ideias mais complexas da Matemática, e que as crianças irão encontrar no Ensino Fundamental, é o conceito

de número racional. O autor complementa a importância desse tópico sob três perspectivas: prática, psicológica e matemática:

Por várias razões os conceitos de números racionais estão entre os mais importantes conceitos que a criança experienciará durante seus anos de pré-secundário. [...] Sob uma perspectiva psicológica e compreensão de número racional proporciona um solo rico no qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuar seu desenvolvimento intelectual. De um ponto de vista matemático, a compreensão de número racional é a fundação sobre a qual as operações algébricas básicas apoiar-se-ão mais tarde (Behr, Lesh, 1982, *apud* Silva 2005, p. 102-3).

Sob a perspectiva prática, o autor afirma que manipular as interpretações de número racional contribui muito para o desenvolvimento da capacidade de compreender e resolver problemas da realidade, enquanto a perspectiva psicológica expande as estruturas mentais necessárias ao seu desenvolvimento. Já a perspectiva matemática mostra que os números racionais constituem a base para a compreensão das operações algébricas.

Um dos assuntos importantes abordados no Ensino Fundamental são as frações. De acordo com Bertoni (2008), existem inúmeros problemas no ensino e aprendizagem relacionados ao tema das frações devido à forma com que aqueles ainda são abordados em sala de aula. A autora critica a ênfase que é dada à nomenclatura de frações e às figuras geométricas planas divididas e pintadas, pois considera que isso distancia o conteúdo de assuntos como razões, escalas e porcentagens.

Corroborando com Bertoni (2008), Valera (2003) atrela as dificuldades de compreensão do conteúdo de frações ao uso de recurso metodológico pouco apropriado para o desenvolvimento desse tema, o que acaba tornando mecânico e desinteressante o processo de ensino e aprendizagem para os estudantes.

É necessário levar o estudante à construção do seu conhecimento matemático por meio do fazer e do pensar, especialmente quando se trata do ensino de frações.

Com a disponibilidade de diversos recursos metodológicos, o professor pode criar oportunidades e condições para que o estudante possa realmente compreender conceitos e operações acerca desse tema. Dessa forma, é interessante que esse conteúdo seja trabalhado de forma natural e diversificada. Silva e Perovano (2012, p. 2) defendem que

[...] o ensino do conceito de frações e o desenvolvimento da conservação de quantidades, bem como a habilidade em resolver problemas que envolvam os números racionais, em geral, são muito importantes, e exigem do professor habilidades para facilitar a aprendizagem do aluno. No entanto, em sala de aula, cabe ao professor evitar o ensino desse conceito de forma mecânica, em que se busca apenas a memorização de regras e aplicação direta de técnicas (Silva; Perovano, 2012. p. 2).

Portanto, é preciso que se compreenda que o ensino de Matemática depende dos métodos de trabalho utilizados pelo professor, do diálogo com a classe, do domínio do conteúdo, da contextualização e do estímulo à aprendizagem. Lopes (2008) reafirma que os estudantes precisam sentir-se motivados e desafiados por meio de relações concretas e de qualidade:

O que queremos enfatizar é que a matemática que vale a pena ser ensinada, e aprendida, é a que promove aprendizagem significativa, que faça sentido para os alunos. Para a consecução deste objetivo, Freudenthal propõe que contextos realistas, sejam pontos de partida naturais para processos de descoberta e reinvenção da matemática (Lopes, 2008, p. 11).

Para Van de Walle (2009), o conceito de frações sempre representa um grande desafio nessa etapa do ensino, o que gera múltiplas dificuldades não só com o cálculo de frações, mas com o conceito de decimal e porcentagem, além do uso das frações em medidas e nos conceitos de razão e proporção.

Ainda de acordo com o autor, o objetivo principal no desenvolvimento dos estudos sobre frações no Ensino Fundamental é ajudar os estudantes a construir a ideia de partes fracionárias do todo, partes que resultam quando o todo ou unidade é compartilhado em porções de mesmo tamanho ou repartido em partes iguais, “porém a ideia de partes fracionárias é tão fundamental para um forte desenvolvimento dos conceitos de frações que deve ser mais explorada com tarefas adicionais” (Van de Walle, 2009, p. 326).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), os conteúdos a serem trabalhados sobre frações encontram-se na unidade temática “Números”. O pensamento numérico tem o maior significado dentro dessa unidade temática, o que implica o conhecimento de maneiras de quantificar os objetos e interpretar quantidades. Assim, os estudantes devem desenvolver ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais de

Matemática; portanto, no estudo desse campo numérico, deve ser enfatizado o registro, uso, significado e operações, conforme aponta o documento.

Além disso, é importante ressaltar que

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental –Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (Brasil, 2018, p. 298).

Percebe-se, pois, o quão relevante é ter o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. Afinal, o letramento matemático que assegura aos estudantes reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter do jogo intelectual da Matemática como um aspecto que favorece o desenvolvimento dos raciocínios lógico e crítico do estudante, estimulando-lhe a investigação, de forma prazerosa.

O objetivo deste trabalho, portanto, é propor uma abordagem lúdica do conteúdo de frações para turmas em transição dos anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental, utilizando uma receita culinária. Essa estratégia favorece que o significado abstrato, relacionado às frações (visto no primeiro ciclo), tenha significado concreto na segunda etapa do ensino, transformando um conteúdo considerado complexo em uma atividade relacionada ao cotidiano dos estudantes. É exatamente isso que afirma Botelho (2021, p. 3):

De certa forma, ao utilizar materiais do contexto de vida dos alunos, temos a possibilidade de um sentimento de familiarização entre a criança e o conceito matemático, uma vez que as práticas cotidianas deles com estes materiais podem ser problematizadas (Botelho, 2021, p. 3).

Assim, como forma de colaborar na transição pedagógica para o aprendizado das frações por meio de grandezas discretas (ovos) e contínuas (leite), é proposto o trabalho prático com uma receita. Como gênero textual, ele é muito utilizado tanto na escola, nos anos iniciais, quanto no ambiente familiar da maioria das crianças. Nesse sentido, visitar uma receita, trazendo reflexões sobre os números nela expostos, torna-se uma boa alternativa para fazer a contextualização do assunto de frações para crianças de qualquer etapa, mas, sobretudo, para iniciar a percepção de se fracionarem ingredientes, como ovos ou manteiga e farinha de trigo, as quais são de difícil contagem.

No relato de Lopes (2008, p. 5-6), percebe-se que frações e receitas culinárias apresentam uma estreita ligação:

Há alguns anos fiz um levantamento de contextos e situações-problema, em que as frações fossem imprescindíveis. Imaginava encontrar uma grande variedade de situações, acessíveis aos alunos do ensino fundamental, mas isto não se confirmou, pois a maioria das situações se referia a contextos do mundo dos adultos, pobres de significados para crianças e adolescentes. [...] d) Frações estão presentes nos livros de receitas culinárias, envolvendo tanto grandezas discretas (ovos), contínuas (leite) ou híbridas (açúcar) (Lopes, 2008, p. 5-6).

Com o propósito do desenvolvimento temático, o presente estudo encontra-se dividido em sete seções. Na primeira seção, é apresentada uma introdução acerca da questão de pesquisa e do objeto de estudo. Na segunda, é feito um percurso histórico acerca de frações ao longo do tempo, seguido dos conhecimentos matemáticos acerca do tema e como eles são discutidos nos livros didáticos. Já na quinta seção são apresentadas a proposta de atividade e o relato de experiência. Por fim, são expostas as considerações finais sobre o trabalho.

2 FRAÇÕES EM ALGUMAS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS

Segundo Boyer (1974), a Matemática surgiu como parte do cotidiano humano, e sua evolução pode estar ligada à sobrevivência da espécie. Inicialmente, conceitos como número e grandezas baseavam-se em contrastes, mas, com o tempo, o homem percebeu analogias e semelhanças, dando origem à ciência e à Matemática. Essa descoberta deve ter-se dado de forma gradual e coletiva, e não individual.

A dificuldade em se afirmar com precisão algo sobre a história dos números se dá pela falta de registros das antigas civilizações. Para Ifrah (2010), a história dos números não é linear; é uma história de necessidades e preocupações de povos que precisavam recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, datar a fundação de sua cidade e suas vitórias utilizando os meios disponíveis, mas sem uma ordem cronológica determinada. Stewart (2014) complementa essa ideia, ao mencionar o surgimento da Matemática:

A matemática não surgiu completamente formada. Ela cresceu a partir de esforços acumulados de muitas pessoas, de muitas culturas, que falavam muitos idiomas. Ideias matemáticas que ainda são usadas atualmente remontam a mais de 4 mil anos (Stewart, 2014, p. 5).

Dessa forma, nota-se que a ideia de números sempre esteve presente, mesmo nas civilizações mais primitivas, dada a necessidade de contar ainda que não houvesse símbolos para representá-los nem mesmo uma ideia abstrata acerca desta relação. Ifrah (2010) afirma que os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo ser humano são um e dois. Boyer (1974) escreve que nossos antepassados mais antigos, inicialmente, contavam somente até dois, sendo que os conjuntos acima desse nível eram designados por “muitos”.

A necessidade do homem primitivo de contar objetos foi o ponto de partida para a construção dos números e, posteriormente, dos sistemas de numeração. Certamente os números e os sistemas eram muito específicos e característicos de cada civilização, mas, ao longo do tempo, os conceitos foram sistematizados.

Vale destacar que apenas números naturais eram representados nesses sistemas de numeração primordiais, já que a principal motivação das civilizações antigas era a contagem de objetos. A necessidade de medir e quantificar essas

dimensões, no entanto, deve ter sido determinante para esses povos perceberem a impossibilidade de usar números naturais em alguns casos. E, assim, foi necessário elaborar uma forma de representar a medida que não cabia em uma unidade inteira. Dessa forma, alguns povos inserem a ideia de fracionamento em seus sistemas de numeração.

Segundo Cruz (2014), não é possível encontrar um ponto de partida, uma época ou uma civilização específica para atribuir a invenção das frações. Roque (2012, p. 25) reforça que “[...] em uma história dos números, é difícil escolher um ponto de partida [...] as fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas”. A autora ressalta ainda que o que podemos saber da Matemática antiga é o que foi registrado, ou seja, após o surgimento da escrita.

Conforme Eves (2011, p. 56), o início das realizações científicas foi de 3000 a 525 a.C. nos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates:

O período de 3000 a 525 a.C. testemunhou o nascimento de uma nova civilização humana cuja centelha foi uma Revolução Agrícola. Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiram das névoas da Idade da Pedra nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo e Tigre e Eufrates. Esses povos criaram escritas; trabalharam metais; construíram cidades; desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinham tempo bastante de lazer para se deter e considerar os mistérios da natureza. Depois de milhões de anos, afinal a humanidade tomava a trilha das realizações científicas (Eves, 2011, p. 56).

O destaque fica entre duas civilizações que se originaram nesses vales: os babilônios e os egípcios. O sistema de numeração babilônico, povo originário da Mesopotâmia, região entre os rios Tigres e Eufrates, era sexagesimal, assim como já possuíam um sistema posicional, assim descrito por Roque (2012, p. 33):

O sistema sexagesimal posicional usado no período babilônico, deve ter surgido da padronização desse sistema numérico, antes do final do terceiro milênio a.E.C. Ainda que a representação numérica continuasse a ser dependente do contexto e a usar diferentes bases ao mesmo tempo, aos poucos começaram a ser registradas listas que resumiam as relações entre diferentes sistemas de medida. Nesses procedimentos de conversão, realizados em um âmbito administrativo e não matemático, foi introduzido o sistema sexagesimal posicional (Roque, 2012, p. 33).

Além disso, eles tinham grande conhecimento de Astronomia e utilizavam as frações nesses estudos:

Os babilônios utilizavam seu sistema de numeração para o comércio e contabilidade cotidiana, mas também utilizavam para um fim mais sofisticado: a astronomia. Para isto, a capacidade do seu sistema para representar números fracionários com grande precisão era essencial (Stewart, 2007, p. 18).

A Tábua de Júpiter (ver Figura 1) é um exemplo de como os babilônios utilizavam seus sistemas para a astronomia. Stewart (2007) afirma que foram registrados os movimentos do planeta Júpiter durante 400 dias e a forma de escrita decimal: “[...] observe que os números se escrevem com três casas sexagesimais, ligeiramente melhor do que cinco casas decimais”.

Figura 1 – Tábua babilônica de Júpiter



Fonte: Stewart (2007, p. 18)

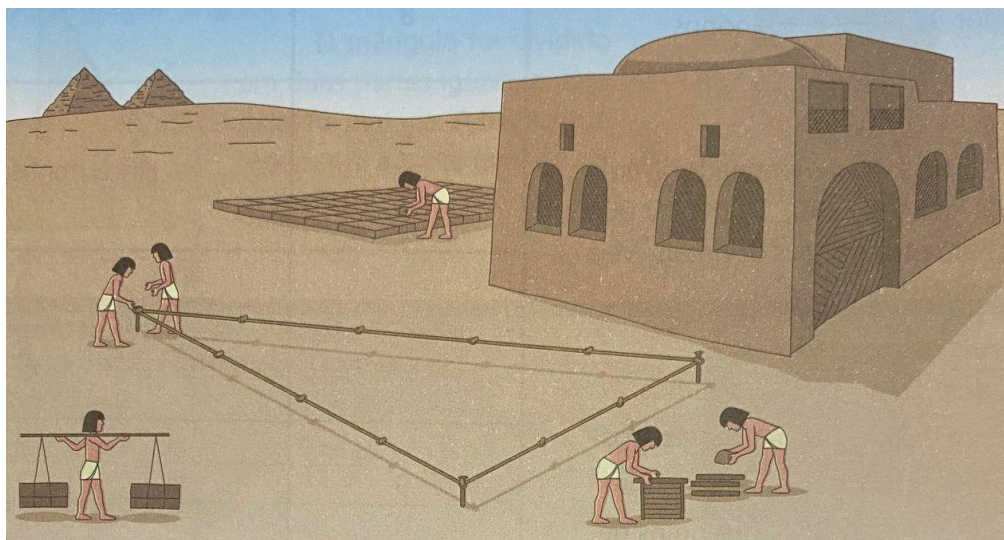
Não é possível determinar quando as frações surgiram ou quem as descobriu, contudo suas primeiras menções remontam às civilizações antigas, as quais as utilizavam para resolver problemas práticos de divisão, medição e comércio.

Um problema surgia com o recuo do rio Nilo nos meses de setembro, os limites dos lotes precisavam ser remarcados. Para isso, os agrimensores (conhecidos como estiradores de cordas à época) faziam a demarcação dos lotes

utilizando cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. Essa corda esticada referendou a unidade de medida, o cúbito ou côvado, referente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. Assim, os agrimensores adquiriram cordas com comprimento adequado para determinar o contorno do terreno a ser medido. Segundo Perlín e Lopes (2013, p. 6),

A unidade de medida padrão utilizada pelos seus medidores, também chamados “estiradores de corda”, para fazer as medições da terra, era o cúbito ou côvado. Essa unidade era conhecida como unidade do faraó, pois o comprimento do cúbito era equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. As cordas dos estiradores possuíam diversos nós, cuja distância entre dois nós consecutivos era a medida do cúbito, o que hoje seria aproximadamente 45 cm (Perlín; Lopes, 2013, p. 6).

Figura 2 – Esticadores de corda



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2022, p. 168)

O processo de medição consistia em esticar a corda dentro do terreno e verificar quantas vezes o cúbito cabia nele. Em alguns casos, essa medida não “cabia” um número inteiro de vezes nos lados do terreno e, por esse motivo, foi necessário criar subunidades para representar tal dimensão. Os egípcios, então, passaram a utilizar um sinal oval acima de alguns traços a fim de representar as partes que estavam dentro do inteiro: eram as primeiras ideias das frações:

Quando as águas baixam, as terras estão férteis para o cultivo. Os mencionados agrimensores faziam a medição para determinar a redução do lote através de cordas que continham uma unidade de medida. No entanto, por mais adequada que fosse tal unidade, dificilmente cabia um número inteiro, ou exato de vezes nos limites do lote. Estava motivado então o surgimento de um novo tipo de número: os números fracionários. Estes eram representados pelas frações (Costa, 2010, *apud* IORA, 2021, p. 23).

Os egípcios usavam também vara e régua-côvado (vide Figura 3) como instrumentos de medidas. O côvado seguia a mesma lógica das medidas antropomórficas, que são baseadas no corpo humano; dessa forma, tinha como medida o osso do antebraço do faraó. Ainda assim, tal medida pode variar ligeiramente conforme a região, mas geralmente estava em torno de 45 a 50 centímetros.

Figura 3 – Régua-côvado egípcia



Fonte: Zuin (2019, *apud* Silva, 2023, p. 21)

Foi a partir do cúbito que surgiram as outras medidas, divisões do côvado. Por exemplo: $1/28$ de um côvado era um dígito, e dezesseis dígitos eram considerados um “t’ser” (Giardinetto; Gomes; de Faria, 2012, p. 139).

A história egípcia demonstra que essa civilização convivia com situações que permitiam conceber a Matemática de maneira prática, sendo desenvolvida e aprimorada de acordo com as necessidades da época:

Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. [...]. Como vimos, a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração práticas. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evoluiu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração (Eves, 2011, p. 57).

Boyer (2012) afirma que, no Egito, “número” significava o domínio dos números naturais e frações unitárias², e, nas sociedades primitivas, a contagem e a medição eram frequentemente realizadas com unidades inteiras, suficientes para as demandas do cotidiano. A busca por maior precisão nas quantidades, no entanto, surgiu à medida que as civilizações tornaram-se mais complexas, envolvendo comércio, agricultura e outras atividades que exigiam medições mais refinadas.

A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas, parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações (Boyer, 2012, p.26).

No antigo Egito, em suas primeiras formas, as frações estavam limitadas ao que chamamos hoje de “fração unitária”, ou seja, aquela cujo numerador era sempre o algarismo 1. Tudo indica que os egípcios foram os primeiros a inserir as frações no seu sistema de numeração:

Durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias –isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado (Boyer, 1974, p.9-10).

Além dos egípcios, outros povos também faziam uso da ideia do fracionamento de inteiros, e, assim, cada um representava os símbolos ao seu modo.

2.1 FRAÇÕES NOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO ANTIGOS

No Egito, os escribas tinham uma forma especial para representar as frações unitárias: o inteiro era representado por um símbolo oval alongado e, logo abaixo, a parte em que esse inteiro foi fracionado (Figura 4).

² Fração unitária: É uma fração em que o numerador é igual a 1, $1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$. (Amaral et al., 2023, p. 3).

Figura 4 – Representação das frações egípcias

$$\begin{array}{l} \text{Oval with 3 lines} = \frac{1}{3}, \quad \text{Oval with 4 lines} = \frac{1}{4}, \\ \text{Oval with 2 lines} \text{ ou } \text{Trapezoid} = \frac{1}{2}, \\ \text{Oval with vertical line} = \frac{2}{3}, \end{array}$$

Fonte: Eves (2011, p. 73)

O símbolo oval foi substituído por um ponto quando os escribas passaram a utilizar a escrita hierática. Os egípcios trabalhavam muito bem com as frações unitárias, mas, de acordo com Boyer (2012), para essa civilização, a fração geral era um enigma. Além de trabalharem com as frações unitárias, os egípcios conheciam as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, que auxiliavam nos processos aritméticos, e outras frações ordinárias eram escritas como soma de frações unitárias e dessas duas frações especiais.

Boyer (2012) afirma que os babilônios deram passos importantes na evolução das frações ao estender o princípio da posição para cobri-las, pois, com isso, conseguiam facilmente representar os números fracionários usando as posições 60^{-1} , 60^{-2} , 60^{-3} , ... e assim por diante. Essa civilização utilizava as frações em problemas financeiros como a divisão de patrimônio entre herdeiros. Já a divisão de frações, por exemplo, era feita por eles multiplicando o numerador pelo inverso do denominador usando uma tabela de recíprocos (tabela babilônica contendo os inversos dos números sexagesimais inteiros).

A Grécia tentou estabelecer regras gerais para as frações ordinárias, mas a simbologia utilizada por eles não favorecia o trabalho com números fracionários. Para representar as frações unitárias, eles colocavam um sinal à direita para distingui-la do inteiro correspondente, como no caso da representação $\lambda\beta$ ' para representar $\frac{1}{32}$. Boyer (2012) aponta que, assim como os egípcios, os gregos também tinham preferência pelas frações unitárias e essa preferência continuou pela Europa até meados de 1000 d.C.

Ao tomarem conhecimento dos sistemas egípcios e babilônicos, os astrônomos gregos passaram a utilizar as frações sexagesimais em suas medidas, e, devido a isso, os ângulos passaram a ser medidos em graus, minutos e segundos.

Os gregos usavam as frações de forma semelhante a outras civilizações, na divisão de terras, na cobrança de impostos e na economia. Além disso, faziam a notação de fração com o numerador abaixo do denominador, e, tempos depois, houve a inversão para a forma como conhecemos hoje, porém sem a barra horizontal separando os dois.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), a civilização chinesa foi a que melhor conseguiu representar frações. A obra chinesa *Nine Chapters on the Mathematical Art*, datada aproximadamente de 100 a.C., já registra frações de forma muito parecida com a atual. A restrição que os chineses faziam era ao uso das atuais frações impróprias que eram escritas na forma mista³, definições que também não eram utilizadas. A obra é tão completa que já trazia todas as regras para operar com frações, como simplificação, soma e multiplicação. Para somar, por exemplo:

Cada numerador é multiplicado pelos denominadores das outras frações. Some-os como o dividendo, multiplique os denominadores como o divisor. Divida; se existir um resto, tome-o como numerador e tome o divisor como denominador (Berlinghoff e Gouvêa, 2010, p.89).

Vale ressaltar que os chineses são apontados como realizadores de uma grande contribuição em relação aos números racionais: o desenvolvimento das frações decimais. Segundo Eves (2011, p. 246),

Após o declínio da matemática grega clássica, a matemática da China tornou-se uma das mais criativas do mundo. Enquanto a Europa Ocidental atravessava o marasmo cultural da Alta Idade Média, a matemática chinesa crescia, produzindo resultados que a Europa só iria redescobrir muito mais tarde, durante ou após o Renascimento. Apenas para mencionar algumas dessas realizações, notemos que a China foi a primeira a (I) criar um sistema de numeração posicional decimal, [...], (9) desenvolver as frações decimais [...] (Eves, 2011, p. 246).

Os hindus faziam registros das frações muito parecidos com os chineses. Alguns manuscritos do século VII, aproximadamente, mostram dois números um

³ Fração mista: Uma fração mista é uma combinação de um número inteiro seguido de uma fração própria, ou seja, que tem o numerador menor que o denominador. (Giovanni e Silva, 2020).

sobre o outro, e, assim como os chineses, sem o traço horizontal para separá-las. Berlinghoff e Gouvêa (2010) afirmam que a regra de “inverter e multiplicar” para dividir frações foi usada pelo matemático hindu Mahavira (800-870) por volta de 850 d.C.

Diante disso, é perceptível que vários povos usaram as frações, cada um à sua maneira, e as notações variavam de acordo com a base numérica de cada civilização. Berlinghoff e Gouvêa (2010) afirmam ainda que havia uma predominância de frações unitárias, usadas pelos egípcios e gregos, até o início da Idade Média. Esse fato pode ser confirmado por Fibonacci (1170 –1250), no texto *Liber Abaci*, ao descrever as diversas maneiras de converter outras frações em soma de frações unitárias, sendo influente na matemática europeia do século XIII.

2.2 O PAPIRO DE RHIND

Os papiros eram importantes, para a civilização egípcia, como o papel é para a atualidade. A diferença está no fato de que, para obter um papiro, não era uma tarefa fácil: era necessário extrair as fibras de uma planta originária do Delta do Rio Nilo, entrelaçá-las e, então, prensar essas fibras de modo a formar uma lâmina propícia à escrita. Esse material era elaborado a partir de um tipo de junco aquático conhecido como papyrus, conforme descreve Eves (2011, p.38):

Os antigos egípcios inventaram um primitivo material de escrita parecido com o papel — o papiro, que por volta do ano 650 a.C. já havia sido introduzido na Grécia. Esse material era feito de um junco aquático chamado *papu*. Os talos desse junco eram cortados em longas e delgadas tiras que eram colocadas lado a lado para formar uma folha. Outra camada de tiras era colocada por cima e a peça era então embebida em água, após o que era prensada e posta a secar ao sol. É provável que devido a uma goma natural da planta as camadas mantivessem-se unidas (Eves, 2011, p. 38).

Ao se referir à civilização egípcia, é imediata a relação com as pirâmides de Gizé e a Esfinge, mas os egípcios também são conhecidos por resolver problemas matemáticos. Esses indícios são demonstrados pela capacidade de construção deles, contudo são ainda mais evidentes com as resoluções de problemas matemáticos encontrados em alguns papiros. Dentre os mais famosos que envolvem a Matemática, há o de Rhind:

Temos notícia da matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, entre eles o de Rhind, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.C., embora no texto seja dito que seu conteúdo foi copiado de um manuscrito mais antigo ainda. O nome do papiro homenageia o escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Esse documento também é designado papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no British Museum (Roque, 2012, p. 27).

O Papiro de Rhind possui esse nome devido a Henry Rhind, antiquário que o comprou de Berlim. Em 1858, Rhind passava por problemas de saúde, quando visitou o Egito, pois sabia do conhecimento medicinal que os egípcios possuíam. Chegando à cidade de Tebas, comprou um antigo papiro que havia sido descoberto no templo mortuário de um faraó egípcio, chamado Ramsés II.

O Papiro de Rhind (Figura 5) foi escrito em 1650 a.C por Aahmesu, e suas dimensões aproximadas são de 5,5 metros de comprimento e 32 centímetros de largura; é constituído por 14 folhas, em que constam duas tabelas informativas de frações e 75 problemas matemáticos os quais envolvem aritmética, frações unitárias, equações lineares e geometria, como cálculo de área e volume. Sua escrita é hierática, isto é, acontece da direita para a esquerda. Trata-se da simplificação de escrita hieroglífica mais utilizada em textos bíblicos.

Figura 5 – Pedaco do papiro de Rhind



Fonte: Macêdo (2013)

Cinco anos depois da morte de Rhind, o papiro foi comprado pelo Museu Britânico de Londres, que fez sua publicação em 1927, dando o nome de Rhind ao Papiro como forma de homenageá-lo. Vale ressaltar que a demora em publicar tal

achado está relacionada à ausência de algumas partes do papiro, as quais só foram encontradas tempos depois por alguns estudiosos.

Cerca de quatro anos depois de Rhind ter adquirido seu papiro, o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito o que pensou que fosse um papiro médico. A aquisição de Smith foi doada à Sociedade Histórica de Nova York em 1932, quando os especialistas descobriram sob uma camada fraudulenta a parte que faltava do papiro Ahmes. A Sociedade, então, doou o rolo de pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmes (Eves, 2011, p. 70).

Apesar de ser conhecido como Papiro de Rhind, há outros que o conhecem como sendo Papiro de Ahmes. Esse nome está atribuído ao escriba que, naquela época, copiou-o de um trabalho ainda mais antigo.

Além disso, há especulações sobre a real natureza desse papiro. Alguns estudiosos entendem que poderia ser um guia matemático daquela época; outros, que poderia até mesmo ser algumas simples anotações do caderno de um estudante, servindo assim para representar o cunho pedagógico. No entanto, trata-se do melhor texto matemático já encontrado daquela época, o qual mostra a riqueza do conhecimento do Antigo Egito. Ainda segundo o autor (2011, p. 70):

O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos (Eves, 2011, p. 70).

A natureza da Matemática encontrada no papiro de Rhind (ou de Ahmes) pode ser encarada como uma forma de matemática algorítmica, que enfatiza o uso de técnicas e algoritmos. Essa abordagem, segundo Lins e Giménez (1997), é comum no ensino, especialmente na Educação Básica, o que reduz a matemática escolar à aplicação de técnicas e algoritmos, distanciando-a de vários campos da Matemática do cotidiano.

As diferenças entre a aritmética da rua e a escolar sugere que cada uma delas envolve seus próprios significados e suas próprias maneiras de proceder e avaliar os resultados desses procedimentos, e sugere que essas diferenças acabam constituindo legitimidades, pois do mesmo modo que a escola proíbe os métodos da rua –em geral chamando-os de informais, e dizendo que são de aplicação limitada (Lins; Giménez, 1997, p. 17).

Seja como registro pedagógico, guia matemático ou compilação de conhecimentos antigos, o Papiro de Rhind permanece como um valioso documento

da sofisticação intelectual do Egito. Ao revelar técnicas de cálculo, frações e soluções para problemas cotidianos, o papiro transcende sua função original, tornando-se uma janela para a mente dos antigos egípcios e seu diálogo com a Matemática.

2.2.1 Problema 06 do Papiro de Rhind

Segundo Eves (2011), o papiro de Rhind contém uma série de tabelas com quocientes de algumas divisões de números naturais e 85 problemas e soluções que envolviam o cotidiano da comunidade da época. Dentre esses problemas, o de número seis é mencionado como era feito: segundo as técnicas operatórias conhecidas na época, a divisão de uma quantidade de objetos é menor que a quantidade de pessoas aptas a recebê-los.

A tarefa de dividir k objetos em n partes (por exemplo dividir 7 pães por 10 pessoas) apareceu, na prática, seguramente antes de qualquer costume escrito. Talvez se tenha dividido cada objeto em 10 partes – desse modo obtinha-se a fração tronco $1/10$, que podia ser considerada de certo modo, como uma nova unidade, e então reunia-se 7 dessas novas unidades. A fração geral $7/10$ é assim por um lado, entendida como resultado da divisão $7:10$, por outro, como reunião de 7 unidades $1/10$. (Tropfke, 1980, p.93, *apud* Bertoni, 2008, p. 223).

O enunciado do problema 6 é assim descrito – “Divida 9 pães entre 10 homens” (Chace, 1927, p. 62 *apud* Gerônimo e Saito, 2011) – e cuja representação é ilustrada na Figura 6:

Figura 6 – Representação dos pães



Fonte: Autoria própria (2025)

No início, os egípcios priorizavam o trabalho com frações unitárias, dispendo de nove pães para dividir para dez pessoas: a primeira operação seria repartir uma maior porção possível para todos e ir refazendo a divisão até que todos tenham

pedaços iguais. Assim, o primeiro passo feito era dividir cinco pães ao meio (Figura 7) e entregar cada uma das metades a um dos dez homens (Figura 7).

Figura 7 – Representação de metade dos pães



Fonte: Adaptado de Mastin (2010)

O segundo passo era dividir os quatro pães restantes em três partes iguais, cada (Figura 8).

Figura 8 – Representação da terça parte dos pães



Fonte: Autoria própria (2025)

Cada novo pedaço seria entregue a um dos dez homens, restando, assim, dois pedaços (Figura 9). Cada um dos dois pedaços restantes deveria ser dividido em cinco novas partes iguais, de modo a render exatos dez pedaços, que finalmente seriam entregues a cada um dos dez homens.

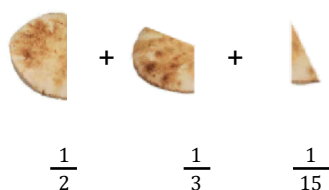
Figura 9 – Representação da divisão das sobras dos pães



Fonte: Autoria própria (2025)

Então, ao final do processo, cada homem receberia o equivalente às frações ilustradas na Figura 10.

Figura 10 – Representação dos pedaços de pão recebido individualmente



Fonte: Autoria própria (2025)

Numericamente, ao dividir nove pães para dez homens, deve-se então escrever a fração $\frac{9}{10}$. A partir daí, pode-se usar o método de transformar frações atuais em uma soma de frações unitárias, descrito por Fibonacci (*apud* Roque, 2012, p. 59):

Vejam como converter nossas frações em frações egípcias. Evidentemente, não se trata de um procedimento egípcio, uma vez que nossas frações não existiam para eles, e a palavra “converter” sequer teria sentido nesse caso (Roque, 2012, p. 59).

Invertendo a fração $\frac{9}{10}$, obtém-se $\frac{10}{9}$. Após isso, deve-se procurar o menor inteiro que seja maior do que $\frac{10}{9}$. Daí é encontrado o número inteiro 2, que, ao ser invertido, tem-se a fração $\frac{1}{2}$.

A seguir, encontra-se a fração $\frac{1}{2}$ da fração inicial $\frac{9}{10}$:

$$\frac{9}{10} - \frac{1}{2} = \frac{9-5}{10} = \frac{4}{10}, \text{ que, simplificando-a, obtém-se } \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ou seja, } \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}.$$

Agora, repete-se o processo para a fração $\frac{2}{5}$, de forma a torná-la unitária:

1º) Invertendo $\frac{2}{5}$, encontra-se a fração $\frac{5}{2}$.

2º) O menor inteiro maior que $\frac{5}{2}$ é 3, que, invertido, converte-se em $\frac{1}{3}$.

3º) Subtraindo $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$, tem-se:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}, \text{ ou seja: } \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Como todas as frações se converteram em unitárias, o resultado é dado por:

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

E, assim, consegue-se expressar a fração como uma soma de frações unitárias.

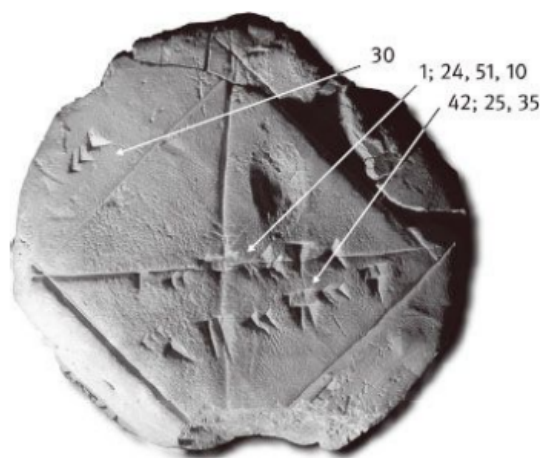
2.3 PLAQUETA YBC 7289

As placas de argila usadas pelos babilônios, conhecidas como "plaquetas cuneiformes", eram uma forma primitiva de escrita. Elas eram feitas de argila moldada em forma de tabuleiro e eram utilizadas para registrar informações, como transações comerciais, leis, literatura e eventos históricos. Após a gravação, essas placas eram frequentemente secas ao sol ou assadas em fornos para endurecer e preservar os registros.

As plaquetas eram uma parte fundamental da administração e da cultura babilônica, permitindo a comunicação e a documentação de importantes aspectos da vida cotidiana e da história daquela civilização. A YBC 7289 é uma dessas plaquetas em que os babilônios escreveram uma aproximação sexagesimal, bastante precisa para a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$), o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1.

Na plaqueta YBC 7289, é possível verificar o desenho de um quadrado inclinado e suas diagonais. Sobre as diagonais e também ao seu redor, há inscrições cuneiformes (Figura 11).

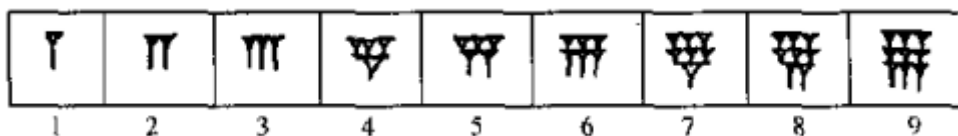
Figura 11 – Imagem com inscrições cuneiformes da plaqueta YBC 7289



Fonte: Autoria própria (2025)

Os babilônios possuíam uma tabela de números capaz de se chegar a uma representação na base decimal desses números marcados na plaqueta.

Figura 12 – Transcrição da escrita cuneiforme para base decimal



Fonte: Ifrah (1997, p. 277)

Pelo agrupamento desses grifos e por essa tabela, chega-se à sequência de números 1, 24, 51 e 10 a qual representa o número $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$. Essa soma de frações equivale a uma aproximação numérica de $\sqrt{2}$, ou seja, a diagonal de um quadrado cujo lado mede 1.

O segundo numeral representado na plaqueta é 42, 25, 35 e é representado por $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = \frac{30547}{720} = \approx 42,426$, que é a aproximação de trinta vezes $\sqrt{2}$ e dá uma aproximação da diagonal de um quadrado de lado 30. Segundo Stewart (2007, p. 14), os babilônios

[...] utilizavam seu sistema de numeração para o comércio e contabilidade cotidiana, mas também utilizavam para um fim mais sofisticado: a astronomia. Para isto, a capacidade do seu sistema para representar números fracionários com grande precisão era essencial (Stewart, 2007, p. 14).

A plaqueta YBC 7289 ilustra o notável avanço matemático alcançado pelos babilônios, evidenciando sua profunda compreensão de conceitos geométricos e algébricos. Além disso, a presença de diagramas e inscrições cuneiformes na plaqueta sugere que esses conhecimentos não eram apenas teóricos, mas também aplicados a problemas práticos, como medições e cálculos estruturais.

A plaqueta YBC 7289, portanto, não é apenas um artefato histórico, mas um testemunho do papel fundamental da Matemática no desenvolvimento de uma das primeiras grandes civilizações.

2.4 FRAÇÕES UNITÁRIAS

Boyer (1974) descreve as origens das frações unitárias atribuindo sua primeira documentação ao antigo povo egípcio, além de como esse povo lidava com operações aritméticas e problemas algébricos relacionados às frações unitárias para atender às suas necessidades práticas. O referido autor observa ainda que os egípcios usavam uma notação especial para frações unitárias, representando o inverso de qualquer número inteiro positivo com um sinal oval alongado nas inscrições hieroglíficas. Ele destaca que essa notação era substituída por um ponto na notação hierática.

Já Roque (2012) afirma que as frações unitárias estão para a atualidade como as frações do tipo $\frac{1}{n}$, no qual n é um número inteiro, diferente de zero, e representa o denominador de uma fração. E ainda: os antigos egípcios possuíam as frações comuns e as frações com um símbolo oval em cima. No entanto, vale ressaltar que nenhuma delas se parece com a representação conhecida atualmente:

As frações comuns eram representadas por símbolos próprios, escritos em hierático e hieróglifo, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, além de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. As outras eram escritas colocando-se um marcador em forma oval (em hieróglifo) em cima do que constituiria, hoje, o denominador. Ou seja, eram obtidas escrevendo os números inteiros com uma oval em cima. Por exemplo, $\frac{1}{7}$ seria escrita com a oval sobre sete barras verticais (Roque, 2012, p. 58).

A autora também explora a origem do conceito de ordinal de um número, representado pelo símbolo oval, em contraste com o conceito atual de numerador na Matemática, que se relaciona a números cardinais. Além disso, ela destaca que frações unitárias hoje representam os inversos de números inteiros. Tal ideia é ilustrada com o seguinte exemplo: “[...] uma pessoa deseja repartir a quantidade de grão contida em cinco sacos para oito pessoas” – sabe-se que, obrigatoriamente, cada pessoa ganhará a quinta parte do objeto.

No contexto do antigo povo egípcio, a divisão começaria com quatro sacos de feijão: cada pessoa receberia metade ($\frac{1}{2}$) dos grãos na primeira divisão. Em uma segunda divisão, o saco de feijão restante seria compartilhado entre as oito pessoas, garantindo $\frac{1}{8}$ do saco para cada uma delas. Dessa forma, cada pessoa teria recebido: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, em notação usual. A autora faz um adendo para aplicar

a metodologia egípcia para transformar essa fração em uma fração unitária, metodologia já aplicada neste trabalho.

A concepção de Boyer (2012) e Roque (2012) sobre fração unitária como inverso do número – parte-todo, quociente, razão – não consta explicitamente nos substratos apontados em Behr *et al* (1983, *apud* Silva 2005, p. 19). Enquanto o conceito de parte-todo serve ao objetivo de particionar uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos em subpartes de tamanhos iguais, o de quociente serve a uma divisão indicada e o de razão deve ser entendido como um índice comparativo, e não relacionado a um número. Percebe-se, então, que tais conceitos incrementam o rol de significados que uma fração pode ter na escolaridade básica atual.

Ao estudar frações unitárias, nota-se que é possível compreender como as demais frações são formadas a partir de operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

2.5 FRAÇÕES SEXAGESIMAS

Frações sexagesimais são um tipo de fração que utiliza a base 60. Elas surgiram a partir dos sistemas de numeração utilizados em civilizações antigas, como os babilônios, que utilizavam essa base para representar quantidades de tempo e ângulos. Tais civilizações utilizavam um sistema de numeração posicional, similar ao nosso sistema decimal, mas com uma base diferente. Enquanto se usa a base 10, hoje, eles usavam a base 60, provavelmente devido à facilidade de dividir esse número por muitos fatores primos.

Boyer (2012) afirma que, na Mesopotâmia, o número 60 desempenhou um papel muito importante: sua evidente propriedade de ser divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30 ajudou a selecioná-lo como base do sistema de numeração.

Esse tipo de fração era utilizado para representar frações de uma unidade inteira, como horas, minutos e segundos (no caso do tempo) ou graus, minutos e segundos (no caso de ângulos). Por exemplo, uma hora pode ser representada como $\frac{1}{60}$ do dia, um minuto como $\frac{1}{60}$ da hora e um segundo como $\frac{1}{60}$ do minuto.

Atualmente, mesmo com a adoção do sistema decimal como padrão, ainda se utilizam frações sexagesimais em situações específicas, como na medição de ângulos em formato de graus, minutos e segundos.

2.6 FRAÇÕES DECIMAIS

As frações decimais já haviam sido identificadas na China. Um dos matemáticos que trabalhou com frações decimais foi Yang Hui (1238-1298) “[...] cujos livros são uma espécie de extensão dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, neles trabalhou habilmente com frações decimais; em essência seu método era o mesmo que se usa hoje” (Eves, 2011, p. 246).

Os árabes também trabalharam com as frações decimais, tendo o matemático al-Kashi uma importante figura da época:

Al-Kashi é uma figura importante na história das frações decimais, e ele percebeu a importância de sua contribuição a esse assunto, considerando-se o inventor das frações decimais. Embora até certo ponto ele tivesse precursores, ele foi talvez, dentre os que usavam frações sexagesimais, o primeiro a sugerir que as casas decimais são igualmente convenientes para problemas que exigem muitas casas exatas. (Boyer, 1974, p. 177).

A Idade Moderna (Séc. XV ao XVIII) foi o período histórico em que o desenvolvimento da Matemática teve grandes expoentes da maior parte da Europa Ocidental. Sobre essas figuras, Boyer (2012) destaca François Viète: “[...] a figura central e mais magnífica na transição foi um francês, François Viète, ou em latim, Franciscus Vieta [...] na aritmética, ele deve ser lembrado por seu apelo em favor do uso de frações decimais em lugar das sexagesimais” (Boyer, 2012, p. 211). Eves (2011), por sua vez, dá foco a Simon Stevin: “Na história da Matemática, Stevin é conhecido principalmente por ter dado uma das exposições mais antigas da teoria das frações decimais” (Eves, 2011, p. 313).

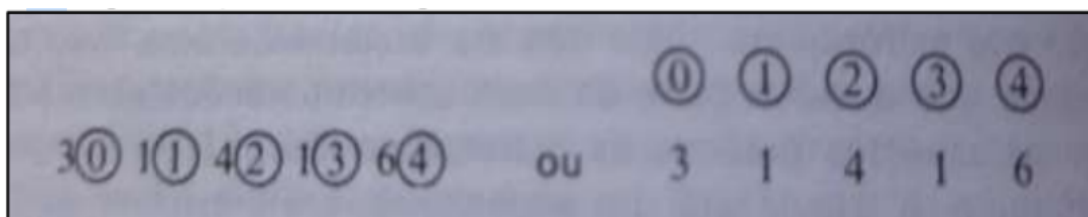
As frações decimais eram utilizadas nos mais diversos cálculos e nas práticas sociais até meados de 1585, e, nessa época, Stevin percebeu a necessidade de fazer esses cálculos de modo ágil e mais simples. Nesse mesmo ano, surge o livro *De Thiende*, uma obra que expõe abordagens importantes, dentre elas, as relações entre as frações decimais, a notação para as representações decimais, regras para

as operações aritméticas e suas justificativas. Stevin é também responsável por explicar o sistema de frações decimais de um jeito completo que Boyer (1974, p. 232) assim exemplifica:

Stevin se concentrava em seus décimos, centésimos e milésimos, etc, como numeradores inteiros, como fazemos na medida comum do tempo em minutos e segundos. Quantos dentre nós pensamos em 3 minutos e 4 segundos, digamos, como uma fração? É muito mais provável que pensemos em 3 minutos como num inteiro em vez de como 3/60 de hora; e essa era exatamente a maneira de pensar de Stevin (Boyer, 1974, p. 232).

Segundo Boyer (1974), Stevin não usava denominador; em vez disso, indicava ao lado ou acima de cada número a potência de dez que era assumida como divisor. A Figura 13 ilustra como Stevin representava uma aproximação de π :

Figura 13 – Representação do número π na forma de Stevin



Fonte: Boyer (1974, *apud* Iora, 2021, p. 28)

Já a notação das frações decimais, da forma como se conhece hoje, foi proposta por John Napier, a partir da notação de Stevin. De acordo com Boyer (1974, p. 232),

Stevin evidentemente tinha ideias corretas quanto às frações decimais, mas sua notação, inspirada na de Bombelli, era mais apropriada para a álgebra do que para aritmética. Felizmente a notação moderna não demorou a aparecer. Na tradução em inglês de 1616 da *Descriptio* de Napier as frações decimais aparecem como hoje, com um ponto separando a parte inteira da fracionária. [...] Napier se referiu à aritmética decimal de Stevin e propôs o uso de um ponto ou de uma vírgula como separatriz decimal. (Boyer, 1974, p. 232).

Napier desempenhou um papel importante na simbologia das frações, particularmente com a introdução dos logaritmos, o que foi fundamental também na adoção do ponto decimal como separador entre a parte inteira e a parte fracionária dos números. Sua obra "*Descriptio*" e, subsequentemente, "*O Rhadologia*" refletiram

essas inovações, que, embora não tenham sido inicialmente universais, influenciaram profundamente a forma como os números decimais são representados.

Embora os primeiros logaritmos publicados por John Napier em 1614 não contivessem frações decimais, em sua obra "Descriptio" (a tradução para o inglês em 1616) essas frações aparecem como hoje, com um ponto separando a parte inteira da fracionária e em "O Rhadologia" (1617), descreve os cálculos com o uso de barras, referindo-se à aritmética decimal de Stevin e propõe, então, o uso de um ponto ou de uma vírgula como separatriz decimal. Mas, foi a partir da obra Napier "Construction" de 1619 que o ponto decimal se tornou padrão na Inglaterra, mas muitos países europeus usam a vírgula decimal (Dias, 2016, p.10).

A evolução histórica das representações fracionárias, desde os primeiros registros sobre frações às margens do rio Nilo, passando pelas frações unitárias egípcias até a consolidação das frações decimais na Idade Moderna, abrem, portanto, caminho para a discussão sobre como esses conhecimentos influenciaram tradições matemáticas posteriores e contribuíram para a evolução do pensamento científico.

Percebe-se, então, que as diferentes abordagens históricas não apenas refletem as necessidades culturais e científicas de cada civilização, mas também pavimentaram o caminho para a formalização dos números racionais. Ao examinar como algumas civilizações estruturaram suas representações fracionárias, estabelecemos as bases para compreender, na seção, a construção dos racionais como classe numérica abstrata – um processo que unificou essas fragmentações históricas sob princípios algébricos rigorosos.

3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS: O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo são apresentadas definições e resultados relativos ao conjunto dos números racionais. Nele há definições que dão suporte à proposta de atividade. Para a construção deste capítulo, referências como Hygino (1991), Ferreira (2011), Verneque (2011), Andre (2016) e Sales (2016), são utilizadas.

3.1 DEFINIÇÃO

Pode-se definir um número racional como um número que pode ser expresso como o quociente ou fração $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros a e b , com $b \neq 0$. O conjunto de todos os racionais pode ser denotado por:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z e b \neq 0 \right\} \quad (1)$$

3.2 Adição de números racionais

A operação de soma em Q é uma das bases fundamentais da aritmética, permitindo combinar quantidades fracionárias de maneira coerente. A soma de números racionais possui propriedades fundamentais que garantem consistência e facilitam operações matemáticas.

Definida a partir da adição de frações, essa operação preserva a estrutura dos números racionais, garantindo que o resultado permaneça no mesmo conjunto.

Dessa forma, para demonstração, define-se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de Q . Chama-se soma de a com b e indica-se por $a + b$ o elemento de Q definido da seguinte forma:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms+nr}{ns} \quad (2)$$

A soma independe dos pares ordenados escolhidos para definir a e b . De fato, se $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ então $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$. Multiplicando a

primeira dessas igualdades por ss' e a segunda por nn' , e somando membro a membro, as relações obtidas são:

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n' \quad (3)$$

Ou seja,

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n') \quad (4)$$

Mantendo apenas as expressões dos parênteses em cada membro, podemos reescrever a equação (4) como:

$$\frac{ms+rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'} \quad (5)$$

Além de garantir a independência dos pares ordenados escolhidos, essa construção consolida o conceito de adição em Q e permite a demonstração de suas propriedades essenciais.

3.3 Propriedades da Adição de números racionais

As propriedades — comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro e existência de opostos — decorrem diretamente da definição de números racionais como frações $\frac{a}{b}$ e da operação de adição bem definida nesse conjunto. Elas garantem a consistência algébrica desse sistema numérico.

Nesta seção, abordaremos cada uma delas, explicitando sua relação com a construção formal de Q .

Para a adição em Q valem as seguintes propriedades:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in Q$ (associativa)
- $a + b = b + a$, $\forall a, b, c \in Q$ (comutativa)
- $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$ (elemento neutro)

- $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab+(-a)b}{b.b} = \frac{0}{bb} = 0$ (existência de opostos)

3.3.1. Associatividade

A propriedade associativa garante que a soma de três ou mais elementos independe da ordem em que as operações são realizadas. Para quaisquer números racionais $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q$ esta propriedade assegura que $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$,

Aqui será demonstrada essa igualdade a partir das operações básicas com frações, destacando como a associatividade preserva a coerência das operações em Q e permite extensões naturais para soma com mais termos.

Assim, considera-se que para todo $x, y, z \in Q$ tem-se:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (6)$$

Suponha $a, c, e \in Z$ e $b, d, f \in Z^*$ e sejam $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$ dessa forma $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q$, assim:

$$(x + y) + z = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \quad (7)$$

$$\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) + \frac{e}{f} \quad (8)$$

$$\frac{adf+bcf+bde}{bdf} \quad (9)$$

$$\frac{adf+(bcf+bde)}{bdf} \quad (10)$$

Separando as expressões do numerador e transformando a equação (10) em uma soma de frações:

$$\frac{adf}{bdf} + \left(\frac{bcf+bde}{bdf} \right) \quad (11)$$

Fazendo em (11) a mesma separação da soma, na fração dos parênteses e transformando-a em uma soma de frações:

$$\frac{adf}{bdf} + \left(\frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf} \right) \quad (12)$$

Assim, simplificando os termos semelhantes em cada fração:

$$= \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) \quad (13)$$

Como atribuímos para $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$ ao retornarmos com as variáveis originais, encontra-se:

$$= x + (y + z) \quad (14)$$

Dessa forma, prova-se a associatividade da adição.

3.3.2. Comutatividade

A propriedade comutativa é fundamental na adição dos números racionais, estabelecendo que a ordem dos termos não altera o resultado da operação. Em linguagem matemática, para quaisquer números racionais x e $y \in \mathbb{Q}$ temos que $x + y = y + x$.

Esta propriedade reflete uma simetria das operações aritméticas básicas e é muito importante para a manipulação algébrica de expressões envolvendo números racionais.

Nesta seção, será demonstrada esta propriedade a partir da definição de adição de frações, mostrando como ela surge naturalmente das operações com numeradores e denominadores.

Para isto, considera-se que para todo $x, y \in Q$, tem-se:

$$x + y = y + x \quad (15)$$

Para demonstrar, supõe-se que sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a, c \in Z$ e $b, d \in Z^*$ então:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad (16)$$

Demonstração

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (17)$$

Usando a comutatividade dos números inteiros, reescreve-se (17) como:

$$\frac{bc + ad}{db} \quad (18)$$

e

$$\frac{cb + da}{db} \quad (19)$$

Transformando a equação (19) em uma soma de frações:

$$\frac{cb}{db} + \frac{da}{db} \quad (20)$$

Fazendo as simplificações necessárias, obtém-se a equação (21)

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} \quad (21)$$

Prova-se assim a comutatividade da adição apresentada na equação (15).

Assim estabelece-se a validade da propriedade comutativa para a adição em Q , mostrando que, independentemente da ordem em que os racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são somados, o resultado permanece o mesmo.

Essa propriedade, vem da comutatividade da adição em \mathbb{Z} e reforça a consistência da estrutura algébrica dos números racionais além de justificar a liberdade que temos ao rearranjar termos em expressões mais complexas.

3.3.3. Elemento Neutro

A existência de um elemento neutro é uma propriedade fundamental na estrutura algébrica dos números racionais, garantindo a estabilidade da operação de adição. Em Q , o elemento neutro aditivo é o número 0, representado por qualquer fração da forma $\frac{0}{b}$ com $b \neq 0$, que satisfaz a seguinte condição para todo $\frac{a}{b} \in Q$.

Para qualquer $x \in Q$, o elemento neutro é o zero tal que:

$$x + 0 = 0 + x = x \quad (22)$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} \quad (23)$$

e

$$\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 \cdot b + a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b} \quad (24)$$

3.3.4. Elemento oposto (simétrico)

Na estrutura algébrica dos números racionais, a existência de elementos opostos (ou simétricos) garante que a operação de adição em Q seja uma operação inversível, permitindo a subtração. Todo $x \in Q$ admite simétrico aditivo (oposto) em Q . Se $x = \frac{a}{b}$ então $-x = \frac{-a}{b}$ de modo que $x + (-x) = 0$.

Demonstração:

Tomando-se $x = \frac{a}{b}$ e $-x = \frac{-a}{b}$, tem-se que:

$$x + (-x) = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} \quad (25)$$

$$= \frac{a.b + (-a).b}{b.b} \quad (26)$$

$$= \frac{a.b - a.b}{b^2} \quad (27)$$

$$= \frac{0}{b^2} \quad (28)$$

$$= 0 \quad (29)$$

Supõe-se que exista um $x' = \frac{c}{d}$ tal que $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ de modo que $x + x' = \frac{0}{1}$ então:

$$x + x' = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + c.b}{b.d} = \frac{0}{1} \quad (30)$$

A propriedade fundamental das frações diz que $(a.d + c.b) . 1 = b.d . 0$, o que implica $a.d + c.b = 0$. Para que essa igualdade seja válida, pela propriedade do elemento oposto nos inteiros, $a.d$ e $c.d$ devem ser simétricos, ou seja, $c.b = -a.d$.

Assim, sem perda de generalidade, concluí-se que $\frac{c}{d} = \frac{-a}{b}$, o que contradiz a suposição inicial, então o elemento oposto de $\frac{a}{b}$ é único e dado por $\frac{-a}{b}$.

3.4 Subtração de números racionais

Se $x, y \in Q$, denomina-se diferença entre x e y , e indica-se por $x - y$, o seguinte elemento de Q :

$$x - y = x + (-y) \quad (31)$$

Dados dois números racionais quaisquer na forma de fração, a subtração é a operação que a cada par ordenado $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$, corresponda ao número racional $\frac{a-b}{c}$, com $a, b \in Z$ e $c \neq 0$.

A subtração é a operação inversa da adição e caso as frações possuam denominadores diferentes é necessário encontrar as frações equivalentes⁴ às frações dadas, ambas com denominadores iguais para que se possa aplicar a regra citada na equação (31).

Para $a, b, e c \in Q$ são válidas as seguintes propriedades:

- $-(-a) = a$ (i)
- $-a + b = b + (-a)$ (ii)
- $a - (-b) = a + b$ (iii)
- $-(a + b) = -a - b$ (iv)
- $a - (b + c) = a - b - c$ (v)

Demonstração:

$$(i) -(-a) = a$$

Seja $a = \frac{b}{c}$. Então vamos chamar de a' o elemento oposto de a , ou seja, $a' = -a = \frac{-b}{c}$. Assim, $-(-a)$ é o elemento oposto de a' ,

$$-(-a) = -a' = \frac{-(-b)}{c} = \frac{b}{c} = a \quad (32)$$

$$(ii) -a + b = b + (-a)$$

Seja $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, números racionais com $m, r \in Z$ e $n, s \neq 0$. Vamos mostrar que $-a + b = b + (-a)$, ou seja $\frac{-m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{-m}{n}$.

⁴ Frações Equivalentes: São frações com apresentações diferentes e que indicam quantidades ou proporções idênticas. (Verneque, 2011, p.2-3).

Tem-se,

$$\frac{-m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{-m.s + r.n}{n.s} = \frac{r.n + (-m.s)}{s.n} = \frac{r}{s} + \frac{-m}{n} \quad (33)$$

$$(iii) a - (-b) = a + b$$

Por definição sabemos que a subtração de dois números inteiros a e b equivale a soma de a com o elemento oposto de b

$$a - b = a + (-b) \quad (34)$$

Faz-se $b = -c$, então $-b = c$ e podemos escrever:

$$a - (-b) = a - c = a + (-c) = a + b \quad (35)$$

$$(iv) -(a + b) = -a - b$$

Na estrutura dos números racionais Q , a operação de adição possui uma propriedade fundamental que garante a existência de um elemento capaz de neutralizar um número dado. Esse elemento, conhecido como inverso aditivo (ou simétrico), é essencial para a definição de subtração.

Assim, tem-se que $-(a + b) = -a - b$

Demonstração:

Vamos provar que o oposto da soma de dois números racionais é igual à soma dos opostos desses números.

Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ números racionais com $q, s \neq 0$

Aplicando o oposto de um racional obtém-se:

$$-a = -\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{-p}{q} \quad (36)$$

Fazendo a soma de racionais:

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \quad (37)$$

Aplicando o oposto à soma, tem-se:

$$-(a + b) = -\left(\frac{ps + rq}{qs}\right) \quad (38)$$

$$-\left(\frac{ps + rq}{qs}\right) = \frac{-(ps + rq)}{qs} \quad (39)$$

$$\frac{-(ps + rq)}{qs} = \frac{-ps - rq}{qs} \quad (40)$$

Fazendo separadamente a operação $-a - b$, tem-se:

$$-a - b = -\left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{r}{s}\right) \quad (41)$$

$$-\left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{r}{s}\right) = \frac{-p}{q} + \frac{-r}{s} \quad (42)$$

$$\frac{-p}{q} + \frac{-r}{s} = \frac{(-p)s + (-r)q}{qs} \quad (43)$$

$$\frac{(-p)s + (-r)q}{qs} = \frac{-ps - rq}{qs} \quad (44)$$

como as equações (37) e (39) resultaram nas expressões (40) e (44), respectivamente, prova-se que $-(a + b) = -a - b$.

$$(v) a - (b + c) = a - b - c$$

Seja $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{r}{s}$, $c = \frac{p}{q}$ números racionais com $m, r, p \in \mathbb{Z}$ e $n, s, q \neq 0$. Desenvolve-se $a - (b + c)$ para chegar a $a - b - c$.

$$a - (b + c) = \frac{m}{n} - \left(\frac{r}{s} + \frac{p}{q}\right) \quad (45)$$

$$= \frac{m}{n} - \left(\frac{r.q + p.s}{s.q} \right) \quad (46)$$

$$= \frac{m.s.q - r.q.n - p.s.n}{n.s.q} \quad (47)$$

$$= \frac{m.s.q}{n.s.q} - \frac{r.q.n}{n.s.q} - \frac{p.s.n}{n.s.q} \quad (48)$$

$$= \frac{m.s - r.n}{n.s} - \frac{p}{q} \quad (49)$$

$$= \frac{m}{n} - \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \quad (50)$$

$$= a - b - c \quad (51)$$

3.5. Multiplicação de números racionais

Os números racionais não apenas possuem uma estrutura bem definida em relação à adição, mas também apresentam propriedades algébricas fundamentais em relação à multiplicação. A operação de multiplicação em Q , definida por: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ com $b, d \neq 0$ é associativa, comutativa, possui elemento neutro e garante a existência de inversos multiplicativos (exceto para o zero).

Define-se $a = \frac{m}{n} \in Q$ e $b = \frac{r}{s} \in Q$ e chama-se produto de a por b o elemento $ab = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{m.r}{n.s}$, que pode-se escrever como $\frac{mr}{ns}$.

Demonstração

A multiplicação em Q estende naturalmente a multiplicação em Z preservando suas propriedades fundamentais. No entanto, a introdução de denominadores traz detalhes importantes, como a necessidade de garantir que o produto mantenha a forma simplificada e a consistência com as operações já conhecidas.

Dessa forma, sejam dados $\frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in Q$ define-se $\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}$.

Teorema: Se $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$, com $\frac{x}{y} \in Q$ e $\frac{r}{s} = \frac{u}{v}$, com $\frac{u}{v} \in Q$ então

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v}$$

Hipótese:

$$my = nx \quad (\text{vi})$$

e

$$rv = su \quad (\text{vii})$$

Tomando-se a equação $\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{x.u}{y.v}$ pode-se reescrevê-la como

$$(mr) \cdot (yv) = (ns) \cdot (xu) \quad [\text{tese}] \quad (52)$$

Como $(mr) \cdot (yv) = mryv$ e usando a comutatividade pode-se escrever $mryv = myrv$ e usando as hipóteses (vi) e (vii) tem-se que

$$myrv = nxsu \quad (53)$$

que, por associatividade, resulta em

$$nxsu = (ns) \cdot (xu) \quad (54)$$

e, assim, pode-se afirmar que

$$(mr) \cdot (yv) = (ns) \cdot (xu) \quad (55)$$

que resulta em:

$$\frac{mr}{ns} = \frac{xu}{yv} \quad (56)$$

A partir desta seção serão demonstradas as seguintes propriedades da multiplicação em Q : a associatividade que define que a ordem em que multiplicamos três racionais não altera o resultado; a comutatividade para definir que a ordem dos fatores não altera o produto; o elemento neutro que garante que um único racional, ao ser multiplicado, preserva qualquer outro número e o inverso multiplicativo definindo que todo racional não nulo possui um único inverso multiplicativo.

Dessa forma, as propriedades são descritas como:

- $a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in Q$ (associativa)
- $ab = ba, \forall a, b \in Q$ (comutativa)
- $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in Q$ (distributiva)
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$ (elemento neutro)
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{a \cdot b} = \frac{1}{1} = 1$ (inverso multiplicativo)

3.5.1. Associatividade

A propriedade associativa da multiplicação dos números racionais estabelece características algébricas fundamentais nas operações com frações, garantindo que a ordem em que as multiplicações são realizadas não altera o valor final, independentemente do agrupamento dos termos.

Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{x}{y} \in Q$, tem-se:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{x}{y} \quad (57)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{cx}{dy} = \frac{a(cx)}{b(dy)} \quad (58)$$

Por associatividade dos números inteiros tem-se

$$\frac{a(cx)}{b(dy)} = \frac{(ac)x}{(bd)y} \quad (59)$$

assim

$$\left(\frac{ac}{bd} \right) \cdot \frac{x}{y} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{x}{y} \quad (60)$$

e, então, prova-se a associatividade dos números racionais.

3.5.2. Comutatividade

Teorema: Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ quaisquer, valem:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \quad (61)$$

por definição sabe-se que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (62)$$

usando a comutatividade da multiplicação dos inteiros, tem-se

$$\frac{a,c}{b,d} = \frac{c,a}{d,b} \quad (63)$$

Por conta da definição, reescreve-se

$$\frac{c,a}{d,b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \quad (64)$$

logo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \quad (65)$$

Prova-se assim a comutatividade da multiplicação. Essa propriedade, com a associatividade, garante que expressões envolvendo múltiplos produtos de números racionais possam ser simplificadas e reorganizadas sem alterar seu resultado final.

A próxima propriedade que conecta as operações de adição e multiplicação em Q é a distributividade. Ela exige como a multiplicação se distribui sobre a adição, isto é, para quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q$. Assim como a comutatividade e a associatividade garantem flexibilidade na manipulação de produtos, a distributividade será a peça-chave para integrar adição e multiplicação, consolidando Q como um sistema numérico completo.

3.5.3 Distributividade

A propriedade distributiva estabelece relação fundamental entre as duas operações algébricas básicas dos números racionais: a adição e a multiplicação. Em Q , essa propriedade garante que a multiplicação se distribui sobre a adição, preservando a estrutura do sistema numérico. Formalmente, para quaisquer racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ temos que $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$.

Partindo da definição formal das operações em Q para estabelecer a propriedade distributiva, completando assim o conjunto de propriedades algébricas essenciais dos números racionais.

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \quad (66)$$

Aplicando a definição de soma de racionais (provada em 3.2) no primeiro membro da equação (66)

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf + de}{df} \quad (67)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{cf + de}{df} = \frac{a(cf + de)}{b(df)} \quad (68)$$

usando a distributividade dos números inteiros em (68)

$$\frac{a(cf + de)}{b(df)} = \frac{acf + ade}{bdf} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} \quad (69)$$

$$\frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \quad (70)$$

Com esta demonstração, concluímos que a multiplicação distribui-se perfeitamente sobre a adição em Q .

3.5.4. Elemento neutro

Assim como a operação de adição nos racionais possui seu elemento neutro (o número zero), a multiplicação em Q também apresenta um elemento fundamental que preserva a identidade de qualquer número racional quando multiplicado por ele. Esse elemento, denominado elemento neutro multiplicativo, é representado por $\frac{1}{1}$ desempenha um papel central na estrutura algébrica dos racionais. Para demonstrar formalmente que $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro da multiplicação dos racionais, tem-se:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} \quad (71)$$

Pela propriedade comutativa (provada em 3.4.2) tem-se que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} \quad (72)$$

e,

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad (73)$$

3.5.5. Inverso multiplicativo

Na estrutura algébrica dos números racionais, a existência de inversos multiplicativos constitui uma propriedade fundamental que diferencia Q de conjuntos numéricos como \mathbb{Z} . Nesta seção será demonstrado que todo elemento não nulo em Q possui um único inverso multiplicativo.

Seja $x \in Q$ tal que $x = \frac{a}{b}$ com $a \neq 0$ tem-se que $\frac{b}{a} \in Q$ e define-se o inverso de x como $x^{-1} = \frac{b}{a}$.

Demonstração

Deseja-se determinar um elemento racional x_1 que quando multiplicado por $\frac{a}{b}$ resulte em 1.

Tem-se que $x_1 = \frac{b}{a}$, então

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1} \quad (74)$$

Para provar que x_1 é único, supõe-se, que exista um $x_2 = \frac{c}{d} \neq x_1$, ou seja $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$, tem-se que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1} \quad (75)$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{1}{1} \quad (76)$$

$$ac = bd \quad (77)$$

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \quad (78)$$

Isto é uma contradição e, portanto, $x_2 = x_1 = \frac{b}{a}$.

Com esta demonstração, fica estabelecido de maneira rigorosa a existência e unicidade do inverso multiplicativo para todo elemento não nulo de Q . Esta propriedade não apenas valida a operação de divisão em Q como uma consequência natural da multiplicação por inversos, mas também fornece as bases para generalizações em estruturas algébricas mais complexas. A demonstração construída serve de modelo para a compreensão de inversos em outros sistemas numéricos, mantendo a coerência que caracteriza a construção dos números racionais.

4 FRAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Quando se refere ao ensino de frações, é necessário reconhecer as divisões propostas pelos livros didáticos baseados na BNCC. Formalmente, turmas do quarto ano do Ensino Fundamental entram em contato com conceitos como representação de frações parte-todo, leitura e escrita de frações. Avançando para o ano seguinte, adotam-se os conceitos de frações impróprias, fração de uma quantidade e frações decimais. Por fim, no sexto ano, há uma retomada dessas definições e representações, para só construir a habilidade de operar com números na forma fracionária. No entanto, apesar de essa apresentação técnica do conteúdo de frações parecer simples, tem sido difícil dar significado a todos esses conceitos.

Lopes (2008) intitula o conteúdo das frações como um conceito subdividido por diferentes subconceitos, os quais os estudantes precisam entender o que são frações e interpretar cada conceito. O autor complementa afirmando o seguinte:

No ensino fundamental as frações são apresentadas inicialmente como relação parte-todo, representam partes, números menores que a unidade, que foi dividida em partes iguais. Mas logo a seguir tal ideia é confrontada com a definição de frações impróprias como se isso fosse algo natural, quando de fato não é. Entendo que ocorre pela pressa em passar da idéia de relação parte – todo, para a ideia da fração representando um número racional ou um quociente (divisão) (Lopes, 2008, p.8).

Os primeiros contatos dos estudantes com o conteúdo de frações são feitos de maneira muito lúdica e concreta. Geralmente o professor – e também os livros didáticos – apresentam à turma um objeto ou uma imagem (comumente uma pizza ou uma barra de chocolate), que deverá ser dividida em n partes, atribuindo, assim, uma situação em que o estudante compreenderá facilmente o conceito parte-todo. Segue-se muito próximo do concreto ou do auxílio visual para nomear e caracterizar as frações durante os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os pesquisadores Scheffer e Powell investigaram livros didáticos do 4º ano do Ensino Fundamental contemplados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e concluíram que a interpretação parte-todo é predominante na maioria das obras analisadas. Essa abordagem, no entanto, nem sempre explora a pluralidade de significados das frações, limitando-se frequentemente à representação visual estática. Segundo Toledo e Toledo (1997), “[...] Em geral, as frações são ensinadas

de modo bastante rígido, através de ilustrações nas quais uma grandeza é repartida em n partes iguais e são coloridas m dessas partes (Toledo; Toledo, 1997, p. 167).

Na migração dos anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes são confrontados com as operações entre números fracionários, e é notável uma lacuna na construção do conhecimento acerca desse tema, constatando que a concepção de frações, na primeira etapa, vincula-se fortemente à divisão de figuras geométricas, conforme apresentado por Bertoni (2008, p. 225):

Assim, o que era reconhecido em livros das séries iniciais como uma fração no sentido de relação parte-todo muda de status, tornando-se uma divisão e adquirindo o nome de número racional. Confundem-se os conceitos de operação e de número (Bertoni, 2008, p. 225).

A sensação é de que há uma memorização por parte dos estudantes, de modo que o sentido e a definição do que é fração não parecem ter sido trabalhados corretamente na etapa anterior. Isso leva a crer que o conteúdo está dissociado de situações do cotidiano dos estudantes, visto que, dificilmente nessa etapa, eles consigam responder efetivamente a uma pergunta direta: “O que é fração?”.

Um dos motivos desse distanciamento foi notado por D’Ambrósio (2003, p. 76):

Via de regra, a escola desenvolve o trabalho matemático sem se preocupar muito com a questão da contextualização. Ele se faz, essencialmente, com base em fórmulas, equações e todo tipo de representações simbólicas. Essa, com frequência, impede que se tenha clareza quanto aos aspectos fundamentais do problema (D’Ambrósio, 2003, p. 76).

A aprendizagem de frações não deve ser baseada apenas em definições prontas sobre parte-todo visto que as frações não possuem uma concepção única, mas, sim, um conjunto de ideias com diferentes significados que vão se relacionar com os números racionais. Nessa perspectiva, faz-se necessário entender e definir os termos *números racionais*, *números fracionários*, *fração* e *representação fracionária*.

Os números racionais estão diretamente ligados à necessidade da humanidade em medir e comparar grandezas, pois, em determinadas situações, os números naturais mostravam-se insuficientes.

Segundo Lamon (2012, *apud* Oliveira e Basniak, 2021), todos os números racionais podem ser representados na forma de fração $\frac{a}{b}$ com $a, b \in Z$ e $b \neq 0$, mas nem toda fração $\frac{a}{b}$ representa um racional tal qual exemplo ele cita a fração $\frac{\pi}{2}$. Embora seja uma fração, isto é, tenha representação fracionária, ela não pertence ao conjunto dos números racionais.

Quanto à fração ou representação fracionária, esta é qualquer notação do tipo $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros a e b , com $b \neq 0$ (Domingues, 1991), e o termo número fracionário indica aquele que pode ser representado por uma classe de frações – frações equivalentes – como explica Silva (2005), dessa forma, o número fracionário $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pode ser representado por uma classe de frações como $\{\frac{2\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi}, \dots\}$.

O ensino de frações na matemática apresenta uma transição abrupta entre os conceitos iniciais de parte-todo e a introdução das operações com números fracionários. A abordagem predominante nos livros didáticos, ainda que alinhada à BNCC em termos de progressão de conteúdo, prioriza a representação visual estática e a memorização de procedimentos em detrimento da construção de significados múltiplos e contextualizados. Essa fragmentação gera uma lacuna conceitual nos estudantes, que chegam aos anos finais do Ensino Fundamental sem compreender efetivamente o que é uma fração ou como ela se relaciona com o cotidiano. Portanto, é relevante adotar estratégias que integrem as diversas ideias das frações por meio de atividades concretas, problematizadoras e significativas, rompendo com a rigidez dos modelos puramente simbólicos que dissociam a matemática escolar da experiência vivida pelos alunos.

Diante dos desafios e das possibilidades identificados na abordagem do ensino de frações, é importante analisar o principal instrumento que orienta essa prática em sala de aula: o livro didático. Ele não é um recurso neutro, mas um artefato cultural que carrega em suas escolhas pedagógicas e sequências didáticas visões específicas sobre como o conhecimento matemático pode ser construído. Assim, partindo da problemática didática das frações, adentramos na discussão sobre o papel e a estrutura de algumas coleções disponíveis no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

4.1 O LIVRO DIDÁTICO

Aliado ao currículo, o livro didático é o principal instrumento de orientação para o professor acerca do conteúdo a ser trabalhado no decorrer do ano letivo. Ele oferece uma sequência de conteúdos, atividades e, no caso de alguns, até avaliações de aprendizagem. Por esse motivo, é necessário que haja uma diversidade de livros de alta qualidade. Segundo Lajolo (1996, p. 4),

[...] o livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares (Lajolo, 1996, p. 4).

Nesse viés, o Brasil conta com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) desde 1985, implantado por meio do decreto 91.542 do dia 19 de agosto daquele ano.

O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) define que o PNLD deve prover todas as instituições públicas de ensino – níveis Fundamental e Médio – com livros didáticos, obras literárias e até dicionários. Esse material deve ser utilizado por quatro anos, e o programa prevê ainda a reposição dele no período.

Cabe ao PNLD avaliar, analisar e recomendar livros didáticos que podem ser adotados pelas escolas públicas do território nacional. A função principal do Programa é oferecer a estudantes e professores das escolas públicas, de forma gratuita e universal, acesso a livros didáticos e dicionários da língua portuguesa. A adesão das Secretarias de Educação ao PNLD e a escolha dos livros pelas escolas, no entanto, não são obrigatórias, pois cada rede estadual e cada escola desenham a sua estratégia em relação ao material didático.

A escolha do material é feita um ano antes do fim do quadriênio de utilização dos materiais escolhidos na última etapa disponibilizada pelo MEC por meio do Guia de Livros Didáticos cujo objetivo é oferecer aos professores um material auxiliar para a escolha dos livros. Nesse caso, devem ser levados em consideração dois aspectos: as obras voltadas à proposta pedagógica da escola e as expectativas dos educadores.

Nos guias, há informações detalhadas sobre todas as obras a fim de serem avaliadas pelos professores. De posse desse material, é esperado que o professor

reflita sobre as questões conceituais e metodológicas do ensino e da aprendizagem provocadas pelas obras aprovadas no PNLD de modo a escolher coleções adequadas à realidade dos seus estudantes.

Com a implantação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 22 de dezembro de 2017, por meio da resolução CNE/CP nº 2, foram estabelecidas diretrizes que tendem a indicar o caminho da prática e formação docente, o processo de ensino e aprendizagem, bem como a elaboração do material didático a ser utilizado nas instituições de Educação Básica do país.

A Base Nacional Comum Curricular, no tocante à Matemática, também se aproxima dos Parâmetros Curriculares Nacionais, tendo em vista que esses documentos visam a construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que todos os estudantes brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite, de fato, sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (Brasil, 2016, p. 134).

O livro didático é um recurso importante e indispensável na escola já que possibilita ao professor um reforço nos seus conhecimentos, contém sugestões de abordagem dos conteúdos, facilita o planejamento das aulas, auxilia no tempo pedagógico e, com seus exercícios, textos e propostas de atividades, faz com que o estudante sistematize o assunto dado e explore a linguagem formal. Lajolo (1996, p. 4) afirma que “para um livro ser considerado didático precisa ser usado de forma sistemática, no ensino-aprendizagem de um determinado objeto ou conhecimento, já consolidado como disciplina”.

Diante disso, percebe-se como o livro didático é uma importante ferramenta não somente aos estudantes, mas também aos professores. É, por meio dele, que os estudantes irão construir seus conhecimentos e alterar significados em relação a um padrão social. Já o professor, este poderá reforçar seus conhecimentos acerca das demonstrações e rigor matemático, receber sugestões de aplicações de atividades e seguir uma sequência pedagógica mais adequada para o ensino. Por esse motivo, é pertinente a preocupação de Lajolo (1996, p. 6) relacionada à escolha desse material:

Assim, a qualidade dos conteúdos do livro didático – informações e atitudes – precisa ser levada em conta nos processos de escolha e adoção do mesmo, bem como, posteriormente, no estabelecimento das formas de sua leitura e uso. Se através do livro didático o aluno vai aprender, é preciso que os significados com que o livro lida sejam adequados

ao tipo de aprendizagem com que a escola se compromete (Lajolo, 1996, p.6).

Uma das críticas mais contundentes ao livro didático é que ele impõe ao professor não somente os conteúdos a serem trabalhados, como também um conjunto de procedimentos que se cristalizam na sala de aula, condicionando suas práxis.

Todavia, isso precisa ser repensado, uma vez que trabalhos mais recentes, como o de Nascimento (2018), demonstram que os professores, durante o processo de organização, desenvolvimento e avaliação do trabalho pedagógico, usam uma variedade de materiais e estratégias, tais como revistas de divulgação científica, jornais e, até mesmo, aulas de campo.

4.2 ALGUMAS COLEÇÕES USADAS NO DO ENSINO FUNDAMENTAL I

O marco fundamental na Política Nacional de Materiais Didáticos foi a criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 1985. A partir de então, o programa passou por um processo contínuo de expansão e aperfeiçoamento, incorporando progressivamente as diferentes disciplinas do currículo escolar e definindo-se pela inclusão dos professores no processo de escolha das obras.

Do ponto de vista institucional, cabe ao Ministério da Educação (MEC) o papel de planejamento e normatização do programa, enquanto o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) atua como executor administrativo, responsável por operacionalizar a escolha, a compra e a distribuição dos livros.

Vale destacar que o PNLD passou por significativas mudanças de forma e conteúdo ao longo de suas edições. Em 1999, por exemplo, a avaliação era feita por volume, de modo unitário e independente em relação à coleção. Essa estrutura foi modificada a partir do PNLD 2002, quando a coleção didática passou a ser a unidade básica de avaliação e seleção.

Além disso, os critérios de avaliação foram sendo continuamente aprimorados, assim como as bases de cálculo utilizadas para a ponderação e o tratamento estatístico das coleções avaliadas, refletindo um esforço constante de qualificação do Programa.

Como *corpus* de análise, tomaremos a coleção “Desafio da Matemática”, de Ênio Silveira (Editora Moderna), a qual será identificada como C1; a coleção “Ápis Mais” para o Ensino Fundamental I, de Luiz Roberto Dante (Editora Ática) como C2, e a coleção “A Conquista da Matemática”, de José Ruy Giovanni Jr (Editora FTD), como C3. Em cada coleção, que esteve disponível para as escolas da Educação Básica no PNLD 2019-2022, há livros do 3º ao 5º ano do Ensino Fundamental I, os quais serão nomeados como LD1 para o 3º ano, LD2 para o 4º ano e LD3 para o 5º ano.

Tabela 1 – Livros do 3º ano do Ensino Fundamental I (LD1)

C1
O exemplar possui 263 páginas, e as suas unidades não contemplam tópicos referentes às frações.
C2
O livro possui 248 páginas, das quais apenas duas delas inserem a nomenclatura de frações na unidade 6, dedicada ao conteúdo de divisão. Dentre os subtítulos dessa unidade, apresentam-se as noções de divisão, multiplicação e divisão: operações inversas, metade e terça parte e problemas com as quatro operações.
C3
O livro conta com 239 páginas e, na unidade 5, apresenta as noções de metade, terça, quarta, quinta e décima parte, apresentando-as em quatro páginas.

Fonte: Autoria própria (2025)

Após a comparação dessas obras, percebe-se que, enquanto o LD1 da C1 não trata de fração no 3º ano, os LD1 das C2 e C3 conseguem abordar as ideias dentro dos capítulos de divisão. Enquanto o da C2 limita-se aos nomes metade e terça parte associando-as à divisão por 2 e 3, respectivamente, o LD1 da C3 expande o conteúdo para quarta, quinta e décima parte.

Embora os livros não associem essas nomenclaturas à forma fracionária, o LD1 da C3, ao apresentar a forma da décima parte, proporciona que seja apresentada a divisão de dezenas e centenas exatas por 10. As orientações do manual do professor indicam que deve ser trabalhado, nessa etapa, o cálculo

mental dessas divisões com o objetivo de o estudante perceber que elas podem ser feitas pela eliminação do zero presente na ordem das unidades de ambos os números.

Tabela 2 – Livros do 4º ano do Ensino Fundamental I (LD2)

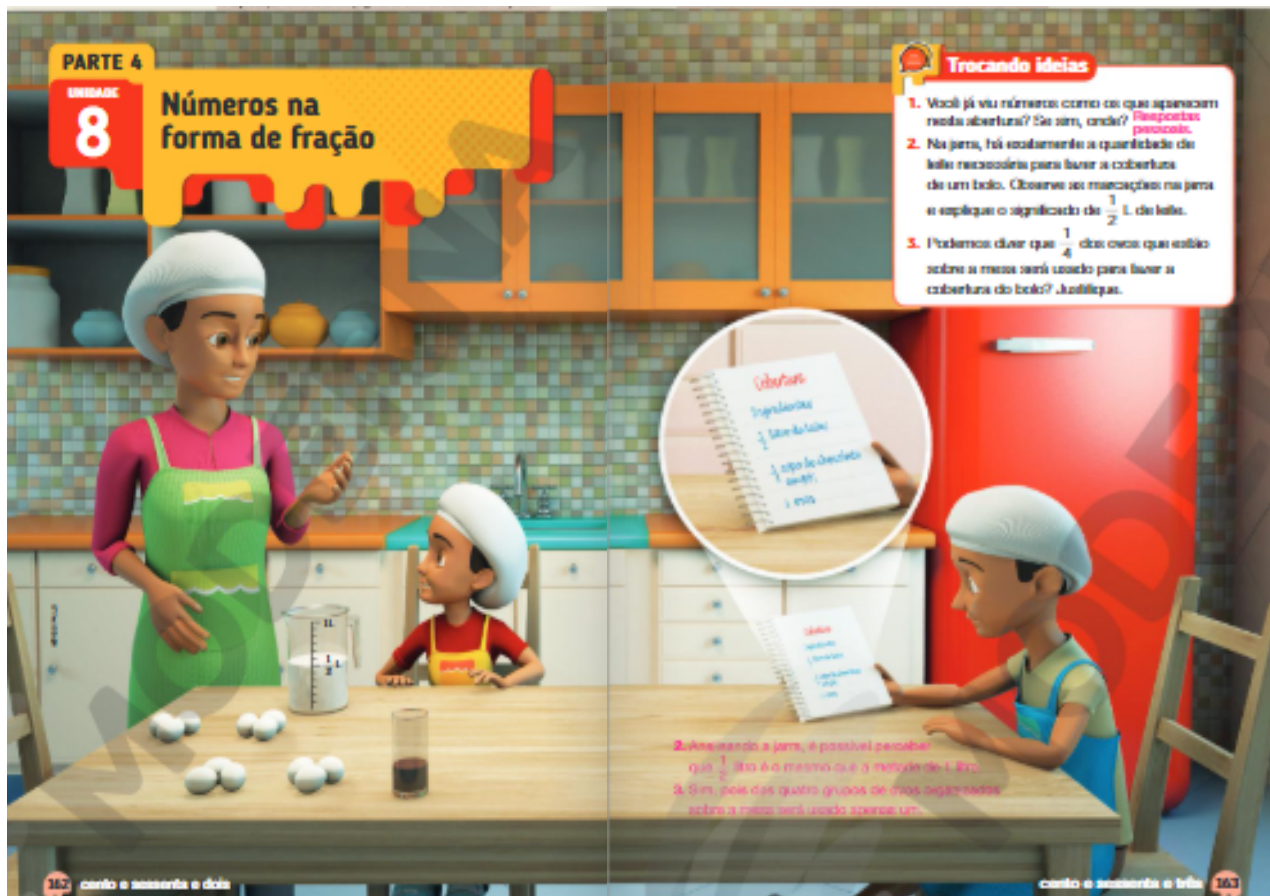
Livros do 4º ano do Ensino Fundamental I (LD2)		
C1	C2	C3
Este exemplar possui 232 páginas. Na unidade 8, intitulada “Números na forma de fração”, encontramos os seguintes subtítulos: ideias de fração, leitura de frações, o símbolo de porcentagem como uma curiosidade, a representação na reta numérica e fração de uma quantidade.	Este livro possui 248 páginas, das quais 34 estão na unidade 8, intitulada “frações e decimais”. Entre os subtítulos, podemos citar: situações que envolvem frações, comparação de frações, probabilidade e porcentagem.	O livro conta com 255 páginas e dedica 14 delas ao conteúdo de frações entre teoria e exercícios. Dentre os subtítulos temos: fração: partes de uma figura e como se lê uma fração.

Fonte: Autoria própria (2025)

Para a etapa da escolarização selecionada, as obras abordam frações de maneiras diferentes, entretanto condizentes com o livro que o antecede. O LD2 da C1 não faz referências ao tema de frações no LD1, pois o LD1 não aborda este tema; além disso, há a introdução de dois conceitos básicos: ideias de fração e leitura de frações.

A imagem que ilustra a unidade é de uma mulher e uma criança, em uma cozinha, preparando uma receita (Figura 14), na qual contém algumas quantidades escritas em forma de fração.

Figura 14 – Abertura do capítulo de frações do livro Desafio da Matemática do 4º ano



Fonte: Desafio da Matemática (2021, p. 162-3).

O LD2, da C2, abre a unidade com a Figura 15, referente a uma pizzaria com o cardápio em um letreiro luminoso exibindo partes de uma pizza e relacionando à sua forma fracionária com seus determinados valores.

Figura 15 – Abertura do capítulo de frações do livro Ápis Mais do 4º ano



Fonte: Ápis Mais (2020, p. 200-1)

As primeiras páginas da unidade são dedicadas a um diálogo entre três crianças sobre os tamanhos dos pedaços de pizza (apresentados em forma fracionária), seguidas da discussão sobre o pagamento e o troco para uma determinada quantidade à venda (Figura 16).


Figura 16 – Imagem presente no capítulo de frações do livro *Ápis Mais*

Para iniciar

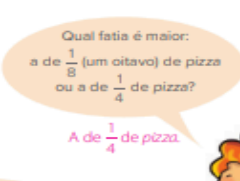
Na cena de abertura, aparecem números como $\frac{1}{8}$. Números escritos dessa forma recebem o nome de **frações**. Nessa cena, aparecem também números com vírgula, como 3,50. Números assim são chamados **decimais**.

As frações e os decimais aparecem constantemente no dia a dia e serão o assunto desta Unidade.


- Analise a cena das páginas de abertura desta Unidade. Converse com os colegas e respondam às questões a seguir.



A pizza toda pode ser repartida em quantas fatias de $\frac{1}{4}$ (um quarto) de pizza?
4 fatias.




Qual fatia é maior: a de $\frac{1}{8}$ (um oitavo) de pizza ou a de $\frac{1}{4}$ de pizza?
A de $\frac{1}{4}$ de pizza.



Se uma pessoa comprar $\frac{1}{2}$ (um meio ou metade) de pizza e pagar com R\$ 12,00, então quanto ela receberá de troco?
R.: 1,50

- Converse com os colegas sobre mais estas questões.
 - Como você faz para obter metade de uma maçã? **Exemplo de resposta: Cortando a maçã em 2 pedaços de mesmo tamanho e pegando 1 pedaço.**
 - Dizemos que a parte pintada de verde desta imagem corresponde a $\frac{4}{9}$ (quatro nonos) da região quadrada. Você sabe justificar essa afirmação? **A imagem está dividida em 9 partes iguais e 4 delas estão pintadas de verde.**
 - Em que situações você já viu números representados com vírgula? **Exemplos de resposta: Em quantias de dinheiro e em medidas de comprimento.**
 - Quantas moedas de R. 0,25 são necessárias para obter R.: 1,00? **4 moedas.**



202 duzentos e dois

Fonte: *Ápis Mais* (2020, p. 202)

As primeiras abordagens desse livro estão relacionadas ao conceito de metade e já atrelando à sua forma fracionária. Assim como o LD2 da C3, ele abre a unidade com a imagem de uma torta de chocolate, conforme a Figura 17, com a informação de um dos ingredientes na forma fracionária. No entanto, o início do conteúdo se dá com imagens de círculos para representar o inteiro e alguns modelos repartidos em partes iguais, demonstrando a relação entre essas imagens e suas respectivas formas fracionárias.

Figura 17 – Abertura do capítulo de frações de a Conquista da Matemática do 4º ano



Fonte: A Conquista da Matemática (2001, p. 180-1)

Tabela 3 – Livros do 5º ano do Ensino Fundamental I (LD3)

Livros do 5º ano do Ensino Fundamental I (LD3)	
	C1
Este exemplar possui 263 páginas. O conteúdo de frações aparece na unidade 8, onde são dedicadas 37 páginas distribuídas nos subtítulos ideia de fração, leitura de fração, fração de uma quantidade, comparando frações com o inteiro, número misto, frações equivalentes e frações e porcentagem.	
	C2
O livro possui 248 páginas, das quais 34 estão na unidade 8, intitulada “frações e decimais”. Entre os subtítulos podemos citar: situações que envolvem frações, comparação de frações, probabilidade e porcentagem.	
	C3
O livro conta com 271 páginas e dedica 14 delas ao conteúdo de fração. Nos seus subtítulos constam: ideias de fração, comparando frações com um inteiro, números mistos, frações equivalentes e simplificando frações.	

Fonte: Autoria própria (2025)

Para a última etapa do Ensino Fundamental I, cada obra insere, em suas unidades, conteúdos necessários e fundamentais para o Ensino Fundamental II, dentre eles porcentagem, probabilidades e simplificação de frações.

O LD3 da C1 inicia o capítulo com uma imagem de um parque de diversões (Figura 18), e o brinquedo em destaque é uma máquina acionada por meio de uma roleta, com cada parte pintada de uma cor, todas as partes do mesmo tamanho. Na própria imagem, o estudante é estimulado a refletir sobre a fração que representa cada cor presente na roleta e, ao mesmo tempo, já considerar a possibilidade para que uma determinada cor seja sorteada ao girar esta roleta.

Figura 18 – Abertura do capítulo de frações do livro Desafio da Matemática do 5º ano



Fonte: Desafio da Matemática (2021, p. 160-1)

Já o LD3 da C2 apresenta uma receita de bolo de laranja com ingredientes e modo de preparo (Figura 19). Entre as quantidades dos ingredientes, há alguns na forma fracionária. Ao contrário do anterior, as reflexões que o livro estimula no

estudante são sobre o gênero textual e perguntas atreladas à interpretação do texto, contudo, não há, nessa abertura, questionamentos sobre frações.

Figura 19 – Imagem de abertura do capítulo de frações no livro Ápis do 5º ano



Fonte: Ápis (2021, p. 128-9)

Por fim, o LD3 da C3 também traz uma receita de bolo (Figura 20) na qual apresenta algumas quantidades na forma de fração e algumas medidas de tempo para o seu preparo. Uma de suas primeiras orientações é para que os estudantes circulem os números presentes na receita em forma fracionária (o que parece ser pertinente de acordo com a sequência que esta coleção adotou desde o LD1). E a segunda pergunta é sobre a divisão do bolo depois de pronto e a representação de cada pedaço em forma fracionária.

Figura 20 – Abertura do capítulo de frações em A Conquista da Matemática do 5º ano



Fonte: A Conquista da Matemática (2021, p 156-7).

O LD3, da C1, inicia o capítulo com o subtítulo ideia de fração e usando barras de chocolate, bolinhas de mesmo tamanho e o agrupamento de pessoas com características semelhantes, o livro vai construindo a relação entre a parte e o todo. O livro segue com pouca teoria e alguns exercícios de observação de figuras geométricas divididas em partes iguais, algumas pintadas, para que o estudante escreva em forma fracionária. Após esses primeiros conceitos, há a orientação sobre a leitura de números na forma de fração. Os cálculos aparecem, efetivamente, a partir da página 167, quando se inicia o subtítulo “Fração de uma quantidade”. Entre os exemplos, há problemas envolvendo medidas de capacidade, massa e distâncias além de problemas com o sistema monetário.

Há ainda os seguintes subtítulos: 1) Comparando fração com um inteiro; 2) Número misto; 3) Frações equivalentes; 4) Comparação de frações; 5) Fração e porcentagem; 6) Adição e subtração com mesmo denominador e com

denominadores diferentes; 7) Multiplicação de um número natural por uma fração; e 8) Divisão de uma fração por um número natural.

4.3 Algumas coleções usadas no Ensino Fundamental II

As obras do Ensino Fundamental II, utilizadas como objetos de análise foram selecionadas conforme o PNLD 2022-2025, a saber: a coleção A Conquista da Matemática, de José Ruy Giovanni Júnior, Editora FTD, identificada como C3; a coleção Araribá Conecta Matemática, de Mara Regina Garcia Gay, Editora Moderna, como C4, e a coleção Superação Matemática, de Lílian Aparecida Teixeira, como C5, também da Editora Moderna. Pertencentes a essas coleções, selecionamos o livro do 6º ano, sendo identificado como LD4.

Tabela 4 – Livros do 6º ano do Ensino Fundamental II (LD4)

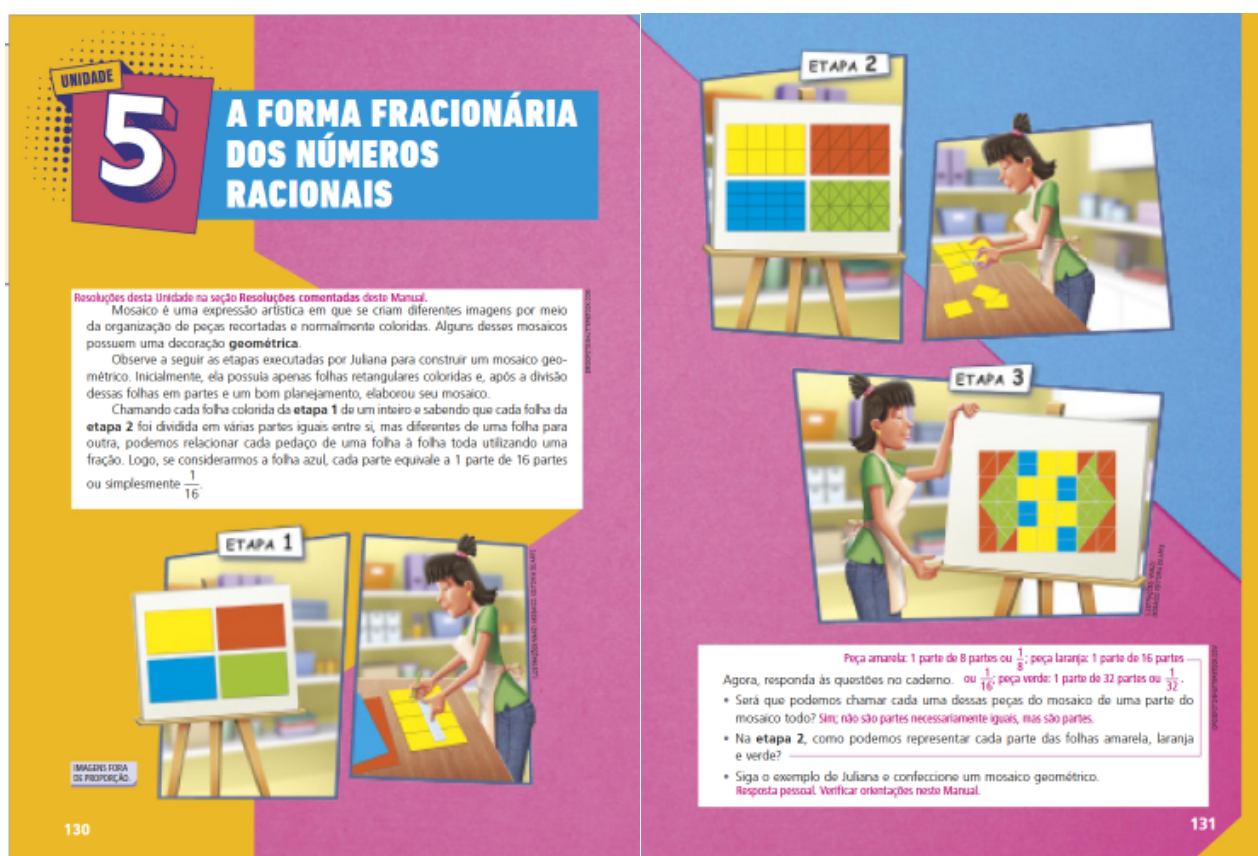
Livros do 6º ano do Ensino Fundamental II (LD4)
C3
A obra conta com 351 páginas. O capítulo 6 é dedicado às frações, desde a ideia mais simples do conceito de frações, passando pelas quatro operações com fração, além de potência e raiz quadrada de frações.
C4
A obra conta com 376 páginas. O conteúdo de frações foi dividido em duas unidades. Na unidade 5, são abordados a leitura de fração, os números mistos e frações equivalentes e as quatro operações com fração são trabalhadas na unidade 6.
C5
O livro conta com 288 páginas. As frações estão no capítulo 5, começando com a ideia de fração, avançando para problemas com fração de uma quantidade. As operações abordadas são a adição, subtração e a multiplicação e ele encerra o capítulo com a relação de fração e porcentagem e probabilidade.

Fonte: Autoria própria (2025)

A partir da análise das obras selecionadas, percebe-se que o primeiro capítulo delas traz a ideia de fração demonstrando que há uma continuidade deste conteúdo quando comparada com o material proposto nos anos iniciais, obras que foram analisadas na seção anterior.

Dentre os três exemplares analisados, apenas o LD4 da C3 mantém uma imagem relacionada ao conteúdo como motivadora para os estudantes, conforme Figura 21.

Figura 21 – Abertura do livro didático A Conquista da Matemática do 6º ano



Fonte: A Conquista da Matemática (2022, p. 130-1)

O LD4 da C3 aborda a ideia de fração de uma quantidade já informando que são chamados de números racionais. O livro segue com uma revisão da ideia de fração e insere-a como resultado de uma divisão de dois números naturais. A unidade cinco ainda trata dos problemas com frações, comparação entre elas e as frações equivalentes para, então, abordar as operações com fração. Há ainda a relação entre fração e porcentagem, e fração e probabilidade.

O LD4 da C4 inicia o capítulo com uma situação-problema na qual uma criança tenta medir uma caneta com um palmo e não consegue, permitindo assim integrar a ideia inicial das frações com a história das frações (conteúdo abordado neste trabalho). Em seguida, trabalha-se com a leitura das frações. A unidade aborda também os números mistos, as frações equivalentes e a comparação de frações; ao final, há um capítulo extra para relacionar as frações à probabilidade. A unidade 6 é dedicada ao estudo das quatro operações com frações e encerra com um capítulo para a trabalhar frações relacionadas a porcentagem.

O LD4 da C5 inicia o conteúdo com a ideia inicial de fração propondo que o estudante relacione a parte pintada de uma figura a uma fração; em seguida, cita que as frações podem ser vistas como uma divisão de números naturais ou como uma razão, sem aprofundar, no entanto, tais conceitos. Após essa abordagem, o livro parte para os problemas com fração de uma quantidade e as definições de fração própria, imprópria e aparente. Há ainda abordagem de simplificação e comparação de frações assim como frações equivalentes. Antes de abordar as operações com frações, o livro faz a relação entre frações decimais e porcentagem.

A análise das coleções didáticas do Ensino Fundamental I e II evidencia uma transição que apresenta uma perda de ludicidade e contextualização no conteúdo de frações à medida que se avança nos anos escolares. Nos anos iniciais (3º ao 5º ano), as obras priorizam recursos visuais atraentes, situações cotidianas (como receitas culinárias, divisão de pizzas ou brinquedos) e analogias concretas para introduzir ideias fracionárias, como observado nas aberturas dos capítulos das coleções C2 e C3. Essa estratégia busca engajar os estudantes por meio de experiências tangíveis e significativas. No entanto, ao chegar aos anos finais (6º ano), há um nítido deslocamento para uma abordagem mais abstrata e formal, centrada em definições, algoritmos e operações, como exemplificado pela coleção C5, que rapidamente introduz classificações de frações e técnicas de cálculo sem o mesmo suporte lúdico.

Embora algumas obras (como a C3 no Ensino Fundamental II) ainda mantenham elementos visuais e algumas problematizações contextualizadas, a tendência geral é de que a ludicidade e a conexão com o cotidiano sejam gradualmente substituídas por uma estrutura mais técnica e simbólica, refletindo uma mudança didática brusca que pode contribuir para o desinteresse dos estudantes pelo conteúdo.

5 A CULINÁRIA COMO PROPOSTA DE ATIVIDADE

A culinária emerge como uma ferramenta pedagógica potente e contextualizada, capaz de traduzir conceitos abstratos em experiências tangíveis e significativas. Tal ferramenta propõe-se não apenas superar as limitações dos métodos convencionais, mas também promover um engajamento ativo por parte dos alunos, articulando teoria e prática de forma lúdica e colaborativa. Essa proposta alinha-se às premissas da BNCC, que valorizam o letramento matemático, por meio de situações-problema reais, e apoia-se em teóricos como D'Ambrosio e Lorenzato, para os quais a manipulação de materiais concretos é fundamental para a construção do conhecimento. Assim, a culinária mostra-se como um ambiente de aprendizagem rico, onde as frações ganham sentido com a preparação de receitas, aproximando a matemática escolar do cotidiano e tornando o aprendizado significativo.

5.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE

Para a realização da atividade culinária, é necessário organizar com a escola um momento ideal para liberar a cozinha, ou a auxiliar de cozinha, e selecionar os utensílios que serão utilizados: batedeira, espátula, recipientes, medidores e colheres. Além disso, devem ser providenciados os ingredientes a serem utilizados e uma mesa grande a fim de apoiar todo o material. Para a receita, serão utilizados os seguintes ingredientes:

- 1/10 de uma placa de ovos com 30 ovos
- 2 e 1/2 xícara (chá) de açúcar
- 2 xícaras (chá) de farinha de trigo
- 3/4 de xícara de leite
- 1 xícara (chá) de chocolate em pó ou achocolatado
- 1/2 xícara (chá) de óleo
- 1 colher (sopa) de fermento em pó

Essa receita é atribuída para um bolo com doze fatias, mas é necessário ajustar o número de receitas e fatias de acordo com o número de estudantes que

irão participar da atividade. Logo, cabe ao professor determinar previamente a quantidade de estudantes envolvidos na atividade.

Para doze estudantes, por exemplo, basta seguir a quantidade indicada na receita, refletindo sobre a relação entre a representação fracionária da receita com o ingrediente utilizado para o bolo. Caso haja uma quantidade maior de estudantes comparada à quantidade indicada na receita, será necessário que se multiplique a quantidade de cada item para que a receita atenda a demanda do número de alunos.

O ideal é que haja uma quantidade de grupos igual à quantidade de itens da receita de modo que, pelo menos, um ingrediente seja acrescentado por um grupo diferente. A turma deve ser informada de que cada ingrediente da receita será calculado por um desses grupos, e este grupo será o responsável por separar os ingredientes e misturá-los.

Após a divisão dos grupos, toda a turma deve atentar para a receita – que deve ser exposta no quadro branco, mural expositivo, ou projetor, visível a todos – com o objetivo de identificar os ingredientes que eles irão utilizar, assim como reforçar a leitura de frações contidas na receita. O primeiro grupo, então, deve dirigir-se ao professor, escolher o ingrediente que quer adicionar e, assim, efetuar o cálculo da quantidade de ingredientes contida na receita.

Caso o grupo efetue a operação de forma incorreta, a correção pode ser feita pelos outros grupos como forma de dinamizar a atividade e permitir a participação de outros estudantes durante a atividade. Essa atitude permitirá o melhor engajamento da turma, pois, com a possibilidade de corrigir os cálculos de outro grupo participante, os demais estudantes deverão estar atentos para ajudar seus colegas na parte matemática da receita.

À medida que cada grupo encontrar o valor correto para cada ingrediente, deve-se dirigir à mesa com todo o material culinário, pegar a quantidade calculada e colocá-la na batedeira.

Deve-se frisar que a batedeira precisa estar acionada durante toda a atividade a fim de que a massa do bolo ganhe consistência e homogeneidade. Além disso, o cuidado a ser tomado é com a quantidade de ingredientes, pois, a depender da porção e do tamanho da batedeira, existe a possibilidade de adequá-los para não derramar a massa do bolo. Nesse caso, o ideal é que, após ser decidida a quantidade de ingredientes e a de bolo para cada grupo de estudantes, o professor

verifique se há a necessidade de mais uma rodada com todos os ingredientes, se haverá a necessidade de mais de uma batedeira ou se fará apenas uma receita como forma didática e experimental com a turma e deixará que as profissionais da cozinha completem a quantidade de fatias de bolo para o consumo de toda a turma.

Os grupos devem revezar-se até que todos os ingredientes tenham sido utilizados; a massa resultante do processo deve ser entregue à cozinheira (ou sua auxiliar) para ser colocada em uma assadeira e levada ao forno para assar.

A sugestão é de que esta atividade seja feita nos primeiros horários do turno correspondente da turma, de forma a permitir o cozimento e o resfriamento do bolo para que os estudantes possam consumi-lo ainda no mesmo dia. No entanto, é possível que o consumo do bolo seja feito no dia seguinte a depender do tempo utilizado durante os cálculos. Após isso, a turma será orientada a fracionar o bolo de modo a permitir o seu consumo por todos os estudantes envolvidos na atividade.

5.2 RELATO DA EXPERIÊNCIA

A atividade proposta foi realizada no Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima, localizado no Loteamento Nossa Senhora de Fátima, subúrbio da cidade de Salvador, com 43 estudantes de duas turmas do 6º ano do turno vespertino, dentre eles, um estudante portador do espectro autista. Na instituição, há oferta de Ensino Médio regular, Ensino Fundamental II e Educação de Jovens e Adultos, com cerca de 800 estudantes distribuídos nos três turnos de funcionamento.

O professor planejou a atividade, com o auxílio da coordenação da escola, no início do bimestre, e a direção da escola forneceu os ingredientes necessários para a execução do projeto. A área escolhida foi o refeitório, por ficar próximo à cozinha escolar da qual foram utilizadas – e gentilmente emprestadas – a batedeira industrial, os talheres, o copo medidor, o forno e demais elementos para realização da atividade.

No dia da atividade, a escola reorganizou os horários do lanche de toda a escola para que a atividade pudesse ser feita nos primeiros horários, e os outros estudantes fizessem seu lanche no meio da tarde, ou seja, no horário habitual. Além disso, organizou-se para que o alimento preparado pelas turmas pudesse ser consumido ainda no mesmo dia, no fim da tarde.

O professor escreveu a receita em uma folha de papel metro, de modo a melhorar a leitura, mesmo a distância, das medidas e dos ingredientes que seriam utilizados. O papel ficou posicionado estrategicamente próximo à batedeira, e os ingredientes, na entrada da cozinha. Por questões de higiene, todos envolvidos utilizaram touca, e nenhuma pessoa envolvida no projeto teve acesso ao interior da cozinha.

A turma foi dividida em oito grupos com cinco/seis estudantes de modo que cada grupo ficou responsável por calcular e adicionar um ingrediente na batedeira. Alguns estudantes demonstraram certo desconforto ou desconfiança no início da atividade e informaram não ter interesse em participar. No entanto, após a primeira rodada, todos aqueles que se mostraram reticentes, ao perceberem como era a dinâmica, pediram ao professor para participar novamente da atividade.

A dinâmica da atividade ocorreu da seguinte maneira: cada grupo, após ler a receita, deveria escolher um item do bolo para medir e colocá-lo na batedeira. O cálculo matemático era feito pelo grupo, por exemplo: ao ler $\frac{1}{10}$ de uma placa de ovos, deveriam informar ao professor quantos ovos seriam necessários. Como a placa de ovos tinha trinta ovos, eles precisariam separar apenas três deles para uma receita. Como havia quarenta e três estudantes, o grupo decidiu que seriam preparadas quatro receitas, que daria um total de quarenta e oito fatias de bolo, o que era suficiente para toda a turma, sobrando, ainda, cinco pedaços.

Após a retirada dos ingredientes propostos pela receita, foi necessário calcular o aumento dessa quantidade, multiplicando por quatro cada um dos itens retirados para uma receita, que, no caso, resultava em doze ovos. Os registros das ações feitas podem ser visualizados por meio da Figura 22.

Figura 22 – Registro fotográfico da atividade prática

Fonte: Autoria própria (2025)

À medida que os grupos iam participando, eles voltavam para o lugar de origem e podiam ajudar os outros colegas a calcular as demais quantidades, mas somente aqueles que apresentaram alguma dificuldade nos cálculos. Ao final de todos os ingredientes calculados e colocados na batedeira, a massa foi despejada em duas assadeiras retangulares as quais foram, em seguida, levadas ao forno. Dado o tempo estendido da atividade, o bolo acabou sendo consumido pelos estudantes apenas no dia seguinte.

Apesar de as turmas não participarem, juntas, de atividades escolares com frequência, houve rápido entrosamento entre elas. Vale ressaltar que os alunos apresentam, como média geral de idade, doze anos e, por ser uma unidade escolar de uma região de difícil acesso no bairro de Periperi, a maioria deles habitam no entorno.

Durante a execução dos cálculos matemáticos propostos pela atividade, a turma demonstrou certa desenvoltura, e um dos motivos pode ter sido o fato de que,

mesmo trabalhando com medidas de capacidade e massa, não havia ali uma formalidade explícita para que os resultados fossem encontrados, inclusive, estudantes que se mostraram dispersos durante as aulas regulares tiveram uma postura mais proativa neste dia.

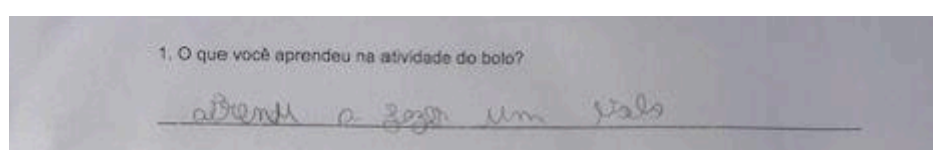
Na aula seguinte, percebeu-se como os estudantes ainda estavam muito animados com a vivência experimentada e com alta expectativa para consumir o alimento preparado por eles. As quatro assadeiras no refeitório já estavam fracionadas de modo a contemplar os quarenta e três estudantes. Quanto às sobras (cinco fatias), a turma decidiu distribuir entre as cozinheiras e outras funcionárias da escola.

O consumo foi feito em meio aos relatos dos estudantes que afirmavam estar contentes com o resultado, pois alguns nunca tinham sido oportunizados a participar da produção das refeições dentro de casa. Outros relataram que, ainda que ajudem nas tarefas domésticas, não se sentiam aptos a cozinhar, pois a responsável delimitava a participação deles nesse contexto. Houve, ainda, o relato de um estudante que não percebia, em casa, o uso de uma receita com quantidades numéricas para ser seguida, e isso lhe chamou a atenção, sobretudo na relação entre a Matemática e a culinária.

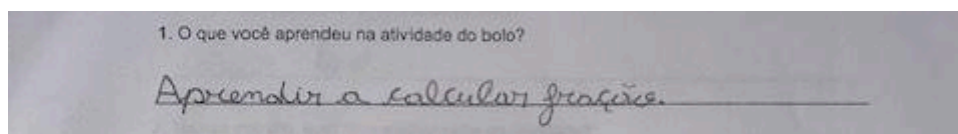
Em um momento posterior, o professor aplicou uma atividade escrita (Anexo A), composta de cinco questões, com dois estudantes de cada grupo participante da atividade. Após o resultado obtido, foram selecionadas seis respostas completas (Anexos B, C, D, E, F, G, H) com a finalidade de atestar, por meio dos relatos, se o conteúdo envolvido ganhou um significado concreto para os participantes.

A pergunta de número 1 – “O que você aprendeu na atividade do bolo” – trouxe respostas como “aprendi a fazer um bolo” (Figura 23), “Aprender a calcular uma fração” (Figura 24), “usar fração” (Figura 25), o que demonstra que o objetivo foi atingido haja vista os estudantes reconhecerem, por meio da atividade lúdica, o aprendizado do conteúdo proposto.

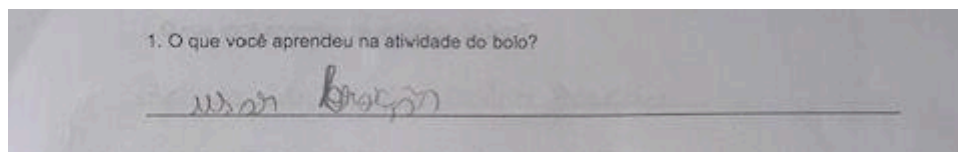
Figura 23 – Resposta do estudante A (questão 1)



Fonte: Autoria Própria (2025).

Figura 24 – Resposta do estudante B (questão 1)

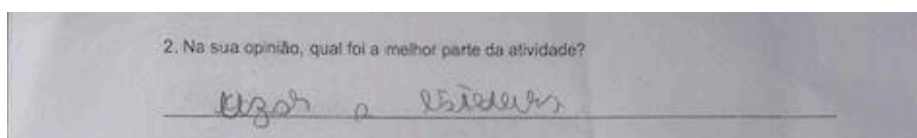
Fonte: Autoria Própria (2025).

Figura 25 – Resposta do estudante C (questão 1)

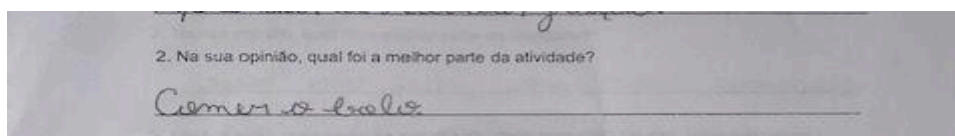
Fonte: Autoria Própria (2025).

Uma das respostas que chama a atenção é a do estudante C (Figura 25): “usar fração”. Ela demonstra a percepção do estudante acerca da utilidade das frações no nosso cotidiano, enquanto que o estudante B, que respondeu “Aprender a calcular fração” (Figura 24), a relevância da atividade ficou na parte dos cálculos envolvidos.

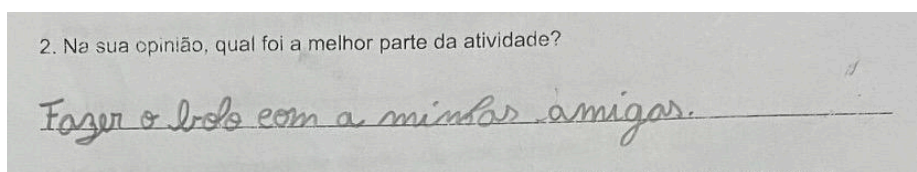
Já na segunda pergunta – “Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?” –, a turma apresentou respostas mais voltadas à parte lúdica, como “uzar a bateadeira” (Figura 26), “Comer o bolo” (Figura 27) e “Fazer um bolo com a minhas amigas” (Figura 28).

Figura 26 – Resposta do estudante A (questão 02)

Fonte: Autoria Própria (2025).

Figura 27 – Resposta do estudante B (questão 02)

Fonte: Autoria Própria (2025).

Figura 28 – Resposta do estudante C (questão 02)

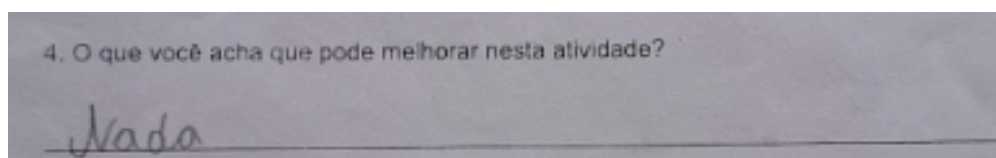
Fonte: Autoria Própria (2025).

As respostas a essa pergunta demonstram que, dada a maturidade intelectual dos estudantes, a importância de fazer uma atividade concreta supera a expectativa de estarem envolvidos em uma atividade matemática. Isso nos leva a refletir sobre a oportunidade de se ensinar Matemática dessa forma, sobretudo nas séries iniciais do Fundamental I e II, e não com as mesmas metodologias de outrora. Segundo Lopes (2008, p. 20-1),

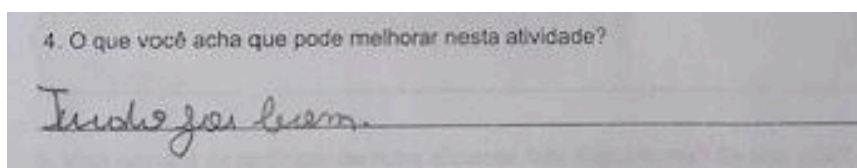
O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar idéias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico (Lopes, 2008, p. 20-21).

Com base na pergunta três – “Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco” –, foi respondida de maneira uniforme, por todos os estudantes, que não (ver anexos B, C, D, E, F, G, F, G, H).

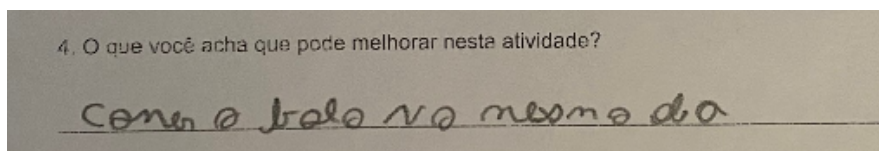
A quarta pergunta – “O que você acha que pode melhorar nesta atividade?” – teve a maioria das respostas do tipo: “Nada” (Figura 29); “ tudo foi bom”. Um deles sugeriu consumir o bolo no mesmo dia da atividade.

Figura 29 – Resposta do estudante F (questão 04)

Fonte: Autoria Própria (2025).

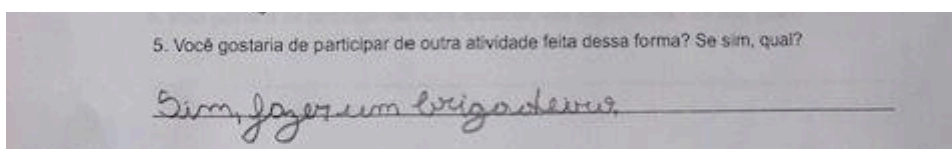
Figura 30 – Resposta do estudante B (questão 04)

Fonte: Autoria Própria (2025).

Figura 31 – Resposta do estudante G (questão 04)

Fonte: Autoria Própria (2025).

Já sobre a pergunta cinco sobre possíveis atividades que pudessem ser feitas no contexto da escola (“Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?”), a maioria dos estudantes disseram que gostariam de repetir a experiência, porém não souberam o que sugerir, o que pode ser um reflexo da falta de experiência deles. O único estudante que propôs algo ficou restrito à experiência recente, sugerindo fazer outra receita: “Sim, fazer um brigadeiro”(Figura 32).

Figura 32 – Resposta do estudante B (questão 05)

Fonte: Autoria Própria (2025).

Observando as respostas dadas pelos estudantes, supõe-se que a parte lúdica foi bastante importante para fazer os estudantes se engajarem na atividade. Isso pode ser demonstrado na análise das respostas do estudante E (Figura 33).

Figura 33 – Respostas do estudante F

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?
Eu aprendi a fazer o bolo

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?
Fazer o bolo com a minhas amigas

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.
Não

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?
Nada

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?
Sim, fazer outra receita

Fonte: Autoria Própria (2025).

As respostas dessa atividade demonstram claramente que o/a estudante se ateuve à dinâmica da atividade absorvendo bastante a parte lúdica. Nesse caso, é importante que o professor esteja preparado para orientar a turma sobre os objetivos da atividade, não deixando de dar importância ao lúdico, mas concentrando a atenção dos estudantes na relação das frações com as quantidades que estão sendo utilizadas para execução de uma receita.

A partir dessas e das demais respostas da atividade escrita, é possível notar que, para além da aplicabilidade das frações como quantidades manipuláveis, as percepções foram diversas, visto que o tempo de aprendizagem de cada um é único e deve, pois, ser valorizado na sala de aula. Orso e Orso (2018, p.113) entendem que

[...] o processo de gerar conhecimento como ação é enriquecido pela relação com outros sujeitos, que estão imersos no mesmo processo, por meio da comunicação, mas considerando que nenhum indivíduo é igual a outro na sua capacidade de captar e processar informações de uma mesma realidade (Orso e Orso, 2018, p.113).

Nos dias seguintes, os estudantes continuaram relembrando algumas etapas da atividade e comentando que se sentiram parte do processo de aprendizado. Percebe-se, pois, que essa tarefa teve um aproveitamento superior quando comparada com as aulas expositivas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da história, é possível perceber a importância das frações nas diversas civilizações apresentadas e como foram construídas a partir das diferentes necessidades dessas civilizações: as frações unitárias foram trabalhadas inicialmente pelos egípcios, os babilônios evoluíram para as frações sexagesimais, e, apropriando desses conhecimentos prévios, os chineses avançaram nos trabalhos com as frações decimais.

A revisão histórica realizada na segunda seção evidenciou que as frações surgiram da necessidade prática de medição e divisão em civilizações antigas, como egípcios e babilônios, reforçando a ideia de que seu ensino deve estar ancorado em situações concretas e significativas. A análise de coleções didáticas na quarta seção, por sua vez, mostrou que, embora os livros do Ensino Fundamental I utilizem recursos visuais e contextos cotidianos para introduzir o conceito de frações, há uma transição abrupta para uma abordagem abstrata e procedural nos anos finais, o que pode ampliar as lacunas de compreensão dos estudantes.

O conjunto dos números racionais é apresentado às crianças já nas séries/anos iniciais do ensino fundamental em sua forma mais simples, com atividades que propõem identificar a fração utilizando-se da representação parte-todo para a maioria dos professores e até mesmo nos livros didáticos. Contudo, construir, compreender e apreender o conjunto dos números racionais e suas diferentes representações não é uma tarefa simples (Cruz, 2014, p. 1).

Ainda hoje as frações possuem uma variedade de significados, e tal complexidade demanda uma abordagem pedagógica que explore, de forma gradual e contextualizada, as diferentes dimensões conceituais, permitindo que o estudante estabeleça conexões significativas entre elas.

Em face de suas aplicações diversas, uma das possibilidades de se trabalhar com frações na Educação Básica é utilizar estratégias de ensino que permitam o engajamento ativo dos estudantes.

Dessa forma, este trabalho buscou investigar as potencialidades do uso de atividades lúdicas e contextualizadas – em especial, a culinária – como estratégia para o ensino de frações no Ensino Fundamental. A proposta partiu do pressuposto de que a abordagem tradicional, centrada na memorização de algoritmos e

representações simbólicas, frequentemente desvinculada da realidade dos estudantes, contribui para as dificuldades de aprendizagem relacionadas aos números racionais.

Assim, levar uma receita de um bolo para ser trabalhada em uma escola, tendo a oportunidade de prepará-la e consumir o próprio objeto de estudo, acaba sendo uma atividade bastante significativa para os discentes.

A idealização dessa atividade surge a partir dessa observação literária como uma forma de trazer o conteúdo já absorvido para o início do Ensino Fundamental II de maneira que haja uma preparação para se ampliar a abordagem das frações durante todo esse ciclo e, ainda, fazer isso de uma forma que haja diferenciação na abordagem.

A atividade culinária desenvolvida e aplicada com estudantes do 6º ano permitiu observar que a manipulação de ingredientes e a necessidade de ajustar proporções em uma receita favorecem a atribuição de significado às representações fracionárias. Durante a aplicação do trabalho, os estudantes demonstraram engajamento e capacidade de relacionar frações a quantidades reais e perceberam a relevância da leitura de fração e a associação dessa forma numérica a uma quantidade, ao se sentirem desafiados com a tarefa. Os relatos colhidos, após a atividade, indicam que os alunos não apenas assimilaram conceitos matemáticos, mas também valorizaram a experiência colaborativa e a conexão entre o conteúdo escolar e suas vivências.

Cabe ressaltar, ainda, que poderia ser feita a atividade com receita de outro alimento, havendo também a possibilidade de se trabalhar com instrumentos de medidas criados pela própria turma com os conceitos de fração aprendidos durante as aulas.

É importante ressaltar que a atividade revelou desafios logísticos e didáticos, como a necessidade de planejamento detalhado, a adequação dos recursos materiais e o acompanhamento constante do professor para garantir que os objetivos de aprendizagem fossem alcançados. Além disso, a avaliação escrita aplicada posteriormente mostrou que, embora os estudantes tenham assimilado aspectos práticos das frações, alguns ainda apresentaram dificuldades em expressar claramente os conceitos envolvidos, sugerindo a necessidade de sequências didáticas mais prolongadas e diversificadas.

Há ainda a possibilidade da aplicação de uma atividade diagnóstica acerca dos conteúdos de frações como forma de o professor explorar outras oportunidades pedagógicas dentro dessa mesma atividade de acordo com o nível de compreensão do assunto pelas turmas.

Este estudo mostra que a culinária como estratégia pedagógica pode contribuir para melhorar a abordagem abstrata e fragmentada que os livros didáticos utilizam nos anos finais do Ensino Fundamental, e ainda, resgata o caráter lúdico e contextualizado do ensino de frações, garantindo uma aprendizagem significativa. Embora existam outras metodologias como jogos, modelagem matemática ou recursos digitais, a proposta aqui apresentada destaca-se por articular teoria e prática de modo colaborativo, transformando o estudante em agente ativo de seu conhecimento, como demonstrado no entusiasmo e no engajamento observados durante a atividade do bolo.

Ao vincular a Matemática a situações cotidianas e sensoriais, não apenas se facilita a compreensão conceitual, mas também se cultiva uma relação positiva com a disciplina, essencial para o sucesso na trajetória escolar de cada estudante. Assim, este trabalho reafirma a importância de se repensar as práticas tradicionais e utilizar propostas que, como essa, assegurem que o aprendizado seja não apenas eficaz, mas também humano, prazeroso e duradouro. Em síntese, o objetivo deste estudo é reforçar a importância de se adotarem metodologias que integrem a Matemática a contextos reais, promovendo uma aprendizagem significativa e eficaz.

REFERÊNCIAS

ANDRE, P. G. **Construção dos conjuntos dos números racionais**. 2016. 14f. Trabalho de pesquisa científico apresentado ao Departamento de Ciências Naturais e Matemática, Curso de Ensino Matemática. Universidade Pedagógica. Lichinga, 2016.

AMARAL, C. *et al.* **Unidades de referência e frações unitárias em tarefas matemáticas: uma revisão sistemática de literatura**. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 16, p. 1-24. 2023. Disponível em: <http://https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/18387/12754>/Acesso em: 08 ago. 2025.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, p. 91-126, 1983.

BERLINGHOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Trad. Elza Gomide, Elena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BERTONI, N. E. **A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário**. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 209-237. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2111/1836>/ Acesso em: 12 jul. 2025.

BOSSI, K. M. L.; SCHIMIGUEL, J. Active methodologies in the teaching of Mathematics: state of the art. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 4, p. e47942819, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i4.2819. Disponível em: <https://rsdjournal.org/rsd/article/view/2819>. Acesso em: 12 set. 2025.

BOTELHO, L. R. MORAES, J. C. P. de. Potencialidades e dificuldades do material concreto não estruturado para o ensino de matemática nos anos iniciais. **Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. A Educação Matemática do presente e do futuro: resistências e perspectivas. 21 a 23 de julho de 2021 –UFPel. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/files/2021/07/037.pdf>/ Acesso em: 15 jul. 2025.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1974.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CHACE, A. B. **The Rhind mathematical papyrus:** British Museum 10057 and 10058. Literary Licensing, LLC, 2012, p. 220.

COSTA, A. C. **Referenciais Históricos e Metodológicos para o Ensino de Frações.** Universidade Federal de São Carlos. São Carlos: 2010.

CRUZ, L.; FORATO, T.C.M., BEZERRA, F.J.B., História da Matemática e Conjunto dos Números Racionais – uma proposta de trabalho para a sala de aula da Educação Básica *In: XVIII EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, 2014, Recife/PE, Caderno de Resumos. Disponível em: <https://www.academia.edu/> Acesso em: 5 ago. 2025.

DA SILVA, C. M.; TEIXEIRA, E. M. M.; MÜLLER, T. J. Objetos de Aprendizagem no Ensino de Matemática: uma possibilidade no ensino e aprendizagem das frações. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [S. l.], v. 4, n. 1, p. 82–96, 2019. DOI: 10.34179/revistem.v4i1.9834. Disponível em: <https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/9834>. Acesso em: 12 set. 2025.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19. Disponível em: <http://educamoc.com.br/ckfinder/files/6%20DAMBROSIO%2C%20B%20-%20COMO%20ENSINAR%20MATEM%2C%81TICA%20HOJE.pdf>/ Acesso em: 1 mai. 2025.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática da Teoria à Prática.** Campinas-SP: Papirus, 2004.

D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação.** *In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática.* Campinas, SP: Papirus, 1996.

DIAS, S. C. Simon Stevin e Os Números Decimais. *In: Encontro Nacional de Educação Matemática –ENEM. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades*, 2016, São Paulo-SP, **Anais eletrônicos [...].2016.** Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6717_2854_ID.pdf/ Acesso em: 5 jul. 2025.

DIONIZIO, F. A. Q.; NOVAK, F. I. L.; PINTO, K. B. P; BURNAT, S. Abordagens de frações no Ensino Fundamental: um levantamento nos anais do ENEM e EPREM. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, [S. l.], v. 10, n. 3, 2019. DOI: 10.36397/emteia.v10i3.242875. Disponível em:

<https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/242875>. Acesso em: 12 jul. 2025.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

EVES, H. W. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. Rio de Janeiro: Coleção Textos Universitários, 2011.

GERÔNIMO, R. R.; FUMIKAZO, S. O papiro de Rhind: um estudo preliminar. IV Encontro de Produção Discente em Educação Matemática, **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v.1, n.1, pp.123-132. 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/9228/6847/> Acesso em: 5 jul. 2025.

GIARDINETTO, J. R. B.; GOMES, C.; FARIA, F. S. de. A Universalização do Sistema Métrico de Pesos e Medidas e o Episódio da Revolta do 'Quebra-Quilos'.(1874 a 1875). In: PINHO, S. Z. de; OLIVEIRA, J. B. Ba. (Org.). **Núcleos de Ensino da Unesp: artigos 2010: volume 4: as disciplinas escolares, os temas transversais e o processo de educação**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

GIOVANNI, A. M.; SILVA, C. R. **Matemática: conceitos e aplicações**. São Paulo: Editora XYZ, 2020.

IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Disponível em: <https://edmatematica1.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/07/georges-ifrah-historia-universal-dos-algarismos-vol1-11.pdf> Acesso em: 5 jul. 2025.

IFRAH, G. **Os Números: a história e uma grande invenção**. 11 ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2010.

IORA, M. **Aspectos históricos das diferentes representações dos números racionais**. Dissertação de Mestrado –Centro de Ciências Naturais e Exatas. Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, p. 28. 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/23387/DIS_PPGEMEF_2021_IORA_M_AISA.pdf?sequence=1&isAllowed=y/ Acesso em: 5 jul. 2025.

LAMON, S. J. (2012). **Teaching fractions and ratios for understanding – essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah

LAJOLO, Marisa. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Revista Em Aberto**. Brasília, ano 16, n. 69, p. 2-9, jan./mar. 1996. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/715104410/Livro-didatico-um-quase-manu-LAJOLO-Marisa/> Acesso em: 5 jul. 2025.

LINS, R. C.; GIMÉNEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997. Disponível em: <https://sigma-t.org/permanente/1997a.pdf/> Acesso em: 5 jul. 2025.

LOPES, A. J. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações quando tentamos lhes ensinar frações**. Revista Bolema, Rio Claro -SP, Ano 21, nº 31, p.1-22, 2008. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2102/1827/> Acesso em: 5 ago. 2025.

MACEDO, I. S.. **Facilitando o Estudo da Geometria Espacial com o Geogebra 3D**, Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal da Bahia, Salvador, p. 14, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22977/> Acesso em: 5 jul. 2025.

MORAN, J. **Por onde começar a transformar nossas escolas?** Educação Transformadora. Disponível em: <https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2017/04/come%C3%A7ar.pdf/> Acesso em: 5 jul. 2025.

MORAN, J. **Como transformar nossas escolas: novas formas de ensinar a alunos sempre conectados**. Educação Transformadora. Educação Sinepe Book. p-63-87. Disponível em: https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2017/08/transformar_escolas.pdf/ Acesso em: 5 jul. 2025.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. **Frações e Suas Múltiplas Interpretações: Reflexões sobre o Ensino e a Aprendizagem**. In: REVISTA DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – HISTEMAT, v. 7, p. 1-20, 2021. Disponível em: <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/388/> Acesso em: 6 jul. 2025.

ORSO; M. C; ORSO, R. D'Ambrosio, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. **Revista Perspectiva**, Erechin-RS, v. 42, n. 160, p. 113-6, dez./ 2018. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/site/pdfs/perspectiva/160_739.pdf/ Acesso em: 10 mai. 2025.

PEREIRA, A. C. C.; ALMEIDA, J. P.; RIBEIRO, P. H. S. Estudando dois instrumentos de cálculo do século XVII para o ensino de multiplicação na formação do professor de Matemática. In: MAIA, M; GUILHERME, A.; CHARAPA, F. **O ensino de Matemática na educação contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. Iguatu: Quipá Editora, 2021. 393 p.

PERLÍN, Patrícia; LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira. A necessidade histórica da criação das frações e a organização do ensino do professor dos anos iniciais. *In*: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA –CIEM. 2013. **Anais eletrônicos [...]**. Canoas: ULBRA, 2013. Disponível em: https://www.academia.edu/96473252/A_Necessidade_Hist%C3%B3rica_Da_Cria%C3%A7%C3%A3o_Das_Fra%C3%A7%C3%B5es_e_a_Organiza%C3%A7%C3%A3o_Do_Ensino_Do_Professor_Dos_Anos_Iniciais/ Acesso em: 2 mai. 2025.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SALES, M. C.R. **Operações com Números Inteiros e Racionais de forma lúdica.** 2016. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal da Bahia, PROFMAT, Salvador, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/23312/1/DissertacaoMarilia.pdf/> Acesso em: 2 jul. 2025.

SANTOS, R. C.a dos; GUALANDI, J. H. Laboratório de ensino de Matemática: o uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais eletrônicos [...]**. São Paulo–SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em: https://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5490_2562_ID.pdf/ Acesso em: jul. 2025.

SCHEFFER, N. F., POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, v. 1, n. 3, p. 476-503, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1977/1674/> Acesso em: 6 jul. 2025.

SILVA, C. V.; PEROVANO, A. P. Obstáculos na compreensão de frações por alunos da Educação Básica. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012, Petrópolis. **Anais [...]**. Petrópolis: Universidade Cruzeiro do Sul, 2012. p. 1-22. Disponível em: https://www.sbemrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT03/CC01155158601_A.pdf/ Acesso em: 8 ago. 2025.

SILVA, F. D. **Desenvolvimento de um processo de medição dimensional para placas cerâmicas de grande formato.** 2023. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/20.500.14289/19288./> Acesso em: 1 ago. 2025.

SILVA, F. V. **O peso da herança na medida certa: um estudo de caso sobre as medidas não-convencionais na região da Estrada Imperial – Durandé-MG.** 2022. 205 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. 2022. Disponível em:

http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/Ensino_FernandoViniciusDaSilva_30007_Textocompleto.pdf/ Acesso em: 1 ago. 2025.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10923/> Acesso em: 1 ago. 2025.

STEWART, I. **Historia de las Matemáticas**: en los últimos 10.000 años. Barcelona: Crítica, 2008. Disponível em: <https://ia902906.us.archive.org/32/items/stewart-ian.-historia-de-las-matematicas-ocr-2007/Stewart%2C%20Ian.%20-%20Historia%20de%20Las%20Matem%C3%A1ticas%20%5Bocr%5D%20%5B2007%5D.pdf/> Acesso em: 1 ago. 2025.

STEWART, I. **Em busca do infinito**: uma história da Matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de matemática**: como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.

VALERA, A. R. **Uso social e escolar dos números racionais**: representação fracionária e decimal. 2003. 164 f. Dissertação (mestrado em Filosofia e Ciências) – Universidade Estadual Paulista, 2003. disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/c27b3e91-ea50-4a23-a40c-69ddcc836d2a/content/> Acesso em: 1 ago. 2025.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed. Porto Alegre: Editora Artmed, 2009.

VERNEQUE, L. **Aprendizagem de frações equivalentes: efeito do ensino de discriminações condicionais minimizando o erro e da possibilidade de consulta a dicas**. 2011. 117 f. Tese (Doutorado em Ciências do Comportamento) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2011

ZUIN, E. S. L. **Pelas Trilhas Históricas do pesas e do medir**. Belém: SBEM, 2019. 78 p. v. 12. *E-book*. Disponível em: <https://vencermatematico.wordpress.com/wp-content/uploads/2016/07/16.pdf/> Acesso em: 1 ago. 2025.

ANEXOS**ANEXO A – Questionário proposto após atividade concreta**

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: ____/____/____

Professor: Leonardo Bacelar Turma: 6º ano A e B

Nome: _____

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

ANEXO B – Resposta do estudante A

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: 11/10/22

Professor: Leonardo Bacelar

Turma: 6º ano A e B

Nome: MATHEUS

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

aprendi a fazer um bolo

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

fazer o bolo

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

não

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

nada

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

sim

ANEXO C – Resposta do estudante B

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: 11/10/22

Professor: Leonardo Bacelar

Turma: 6º ano A e B

Nome: Gabriele

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

Aprender a calcular frações.

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

Comer o bolo.

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

Não.

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

Tudo foi bem.

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

Sim, fazer um brigadeiro.

ANEXO D – Resposta do estudante C

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima
Disciplina: Matemática
Data: 11/10/22
Professor: Leonardo Bacelar Turma: 6º ano A e B
Nome: MARCO

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

usar fração

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

fazer um bolo com meus amigos

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

Não

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

Nada

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

Sim

ANEXO E – Resposta de um estudante D

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: 11/10/22

Professor: Leonardo Bacelar

Turma: 6º ano A e B

Nome: Stephany C. MATOS

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

eu aprendi a fazer

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

comer o bolo

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

sim

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

nada

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

sim

ANEXO F – Resposta de um estudante E

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: 11/10/22

Professor: Leonardo Bacelar

Turma: 6º ano A e B

Nome: Raffael

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

Eu aprendi calcular frações

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

Comer o bolo

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

Não

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

Nada

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

Sim

ANEXO G – Resposta de um estudante F

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: 11/10/22

Professor: Leonardo Bacelar Turma: 6º ano A e B

Nome: Nyeolle Floquet

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

Eu aprendi a fazer o bolo

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

Fazer o bolo com a minhas amigas

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

Não

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

Nada

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

Sim, fazer outra receita

ANEXO H – Resposta de um estudante G

Colégio Estadual Nossa Senhora de Fátima

Disciplina: Matemática

Data: 11 / 10 / 22

Professor: Leonardo Bacelar Turma: 6º ano A e B

Nome: Daviana Josmir Santos O. Soares

Atividade de Matemática - 3º Trimestre

1. O que você aprendeu na atividade do bolo?

Calcular fração

2. Na sua opinião, qual foi a melhor parte da atividade?

Jogar o bolo com meus amigos

3. Você já tinha participado de alguma atividade parecida? Se sim, conte um pouco.

Não

4. O que você acha que pode melhorar nesta atividade?

Jogar o bolo na mesma dia

5. Você gostaria de participar de outra atividade feita dessa forma? Se sim, qual?

Sim