PRODUTO EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DE ÁREAS APLICADA À TOPOGRAFIA COM O GEOGEBRA NO CURSO TÉCNICO INTEGRADO EM AGROPECUÁRIA

Lourença Pereira da Silva Barbosa

Wallysonn Alves de Souza

INSTITUTO FEDERAL
Tocantins
Campus Palmas

PALMAS

2026

PROFEPT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

B238s Barbosa, Lourença Pereira da Silva

Sequência didática para o ensino do cálculo de áreas aplicada à Topografia com o GeoGebra no Curso Técnico Integrado em Agropecuária / Lourença Pereira da Silva Barbosa, Wallysonn Alves de Souza. – Palmas, TO, 2026.

39 p. : il.

Formato: Ebook

Produto Educacional (Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO, Palmas, TO, 2026.

Orientador: Dr. Wallysonn Alves de Souza.

Produto Educacional vinculado à Dissertação: Ensino de Geometria Plana aplicada à Topografia no Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio: uma sequência didática com o GeoGebra

1. Técnico Integrado ao Ensino Médio. 2. Cálculo de áreas. 3. GeoGebra. I. Souza, Wallysonn Alves de. II. Souza, Wallysonn Alves de. III. Título.

ISBN: 978-65-02-10648-8 **CDD 370**

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Autores

Wallysonn Alves de Souza - Possui graduação em matemática pela Universidade Católica do Goiás, Mestrado em matemática pela Universidade Federal do Goiás e Doutorado em Engenharia Elétrica pela UNESP. Atua como professor no IFTO - Campus Palmas e no Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica - ProfEPT.

Lourença Pereira da Silva Barbosa - Possui graduação em matemática pela Universidade Federal do Tocantins, Pós-Graduação em Coordenação Pedagógica e Supervisão Escolar pela Faculdade Única. Discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica - ProfEPT. Atua como técnica em Assuntos Educacionais no IFTO - Campus Dianópolis.

Sumário

Apresentação

Este material apresenta um Produto Educacional (PE) para o ensino do cálculo de áreas aplicada à Topografia com o uso do GeoGebra como ferramenta tecnológica educacional. O PE é resultado de uma pesquisa desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional Tecnológica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO), *Campus* Palmas.

Trata-se da materialização de uma Sequência Didática (SD) em formato de *ebook* interativo que aborda conteúdos de geometria plana com foco em cálculo de áreas de terrenos. Essa SD está estruturada em três etapas, composta por quatorze horas/aula. As etapas trazem as orientações para o desenvolvimento da SD, os conteúdos que foram ministrados e as atividades desenvolvidas com as turmas de primeira série do curso Técnico Integrado em Agropecuária do *Campus* Dianópolis - IFTO.

Assim, a primeira etapa refere-se à apresentação da proposta e identificação dos conhecimentos prévios das turmas participantes. A segunda etapa faz referência às aulas ministradas sobre os conteúdos de polígonos, áreas de triângulos, Lei dos Cossenos e três situações-problema relacionadas a áreas de terrenos. A terceira etapa faz referência à averiguação da aprendizagem das turmas participantes e da avaliação da SD - produto educacional.

De modo que esse produto apresenta-se como um material didático complementar que visa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes da primeira série do curso técnico integrado em Agropecuária.

Introdução

A matemática é considerada uma das mais antigas áreas do conhecimento humano, essencial para a ciência e tecnologia. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destaca-se como uma área fundamental para a formação de cidadãos críticos e engajados. Para o ensino médio, etapa final da educação básica, é o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos em etapas anteriores. Para tal, a BNCC propõe uma visão matemática integrada às questões com significados reais, que capacitem os estudantes a resolverem problemas ao longo da vida, não se limitando a situações do cotidiano, mas também para questões voltadas para a vida profissional.

Nesse sentido, a Geometria, como unidade temática, possui inúmeras possibilidades de articular-se com outras áreas de conhecimento, como a área da Topografia, que utiliza conceitos da Geometria para o levantamento de áreas de terrenos, bem como para a representação dos polígonos dessas áreas. Desse modo, associar a Geometria à Topografia pode favorecer o processo formativo dos estudantes, considerando a possibilidade de integrar conhecimentos gerais às práticas profissionais.

Essa integração é fundamental para a formação dos estudantes, posto que o ensino médio técnico integrado tem como concepção formar o indivíduo em todas as suas dimensões. Essa concepção busca superar uma visão fragmentada do conhecimento ou a separação entre a formação geral e formação profissional, Ciavatta (2005). Nesse contexto, a SD desenvolvida para o ensino de Geometria plana aplicada à Topografia visa contribuir para a construção do conhecimento matemático dos estudantes do ensino médio técnico integrado.

A SD, na perspectiva de Zabala (1998), é um caminho metodológico progressivo para a aquisição de conhecimentos no processo de ensino e aprendizagem. Tem como propósito "[...] proporcionar aos educadores uma metodologia sólida para ensinar conteúdos de maneira eficaz, dividindo o processo em etapas bem definidas" Cardoso (2024, p. 17). Logo, é uma prática que precisa estar alinhada aos objetivos educacionais para que os resultados sejam alcançados.

Ademais, como toda prática de ensino, a SD requer o uso de materiais que também precisam estar alinhados aos objetivos da aula. Assim, tratando-se do ensino de geometria plana, o uso de materiais é primordial para ampliar o entendimento e reduzir a abstração presente nas propriedades, conceitos e construções geométricas.

Nesse sentido, diferentes recursos tecnológicos são integrados ao ensino de matemática e geometria, dentre os quais destaca-se o GeoGebra. Segundo Oliveira e Silva (2024, p. 87) "a ferramenta tecnológica GeoGebra permite a representação gráfica dos conceitos matemáticos, tornando a aprendizagem mais visual, interativa e dinâmica". No entendimento de Lima e Rocha (2022), o uso de recursos tecnológicos em sala de aula auxilia no desenvolvimento cognitivo do aluno, tornando-o mais ativo, crítico e autônomo no processo de aprendizagem.

Portanto, esse PE buscou desenvolver uma sequência didática para o ensino do cálculo de áreas aplicada à topografia, com o intuito de contribuir para uma aprendizagem ativa e contextualizada dos estudantes do curso técnico integrado em Agropecuária.

1ª Etapa - Apresentação

Nesta seção, aborda-se a primeira etapa da SD.

2.1 Aula 1

- Tempo previsto: 2 horas/aulas
- Objetivo: apresentar a proposta da SD e fazer o levantamento dos conhecimentos prévios.
- Recursos: Questionário inicial e Pré-teste

No primeiro momento, recomenda-se a apresentação das atividades que se pretende desenvolver, seguido de um levantamento dos conhecimentos prévios das turmas envolvidas. Para Cardoso (2024), é essencial fazer um diagnóstico inicial para conhecer os interesses e necessidades dos alunos. De modo que alguns instrumentos podem ser utilizados para identificar os conhecimentos prévios, como: questionários, testes, avaliação diagnóstica, entre outros. Esses instrumentos, segundo Moreira (2008, p. 2), equiparam-se a "materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si". Ainda segundo o autor, esses materiais, também denominados organizadores prévios, funcionam como uma ponte entre o que o aluno já sabe e a nova informação apresentada.

Na aplicação desse PE, utilizou-se um Questionário inicial (Apêndice A) e um Pré-teste (Apêndice B), ambos aplicados em momentos distintos. A utilização desses instrumentos possibilitou analisar a percepção do aluno em relação à geometria plana, ao GeoGebra e aos conhecimentos básicos em geometria plana.

2ª Etapa - Desenvolvimento

Esta etapa refere-se ao desenvolvimento da SD, organizada em dez horas/aulas, as quais procuram trazer uma breve introdução sobre polígonos, triângulos, áreas de triângulos, Lei dos Cossenos e resoluções de atividades.

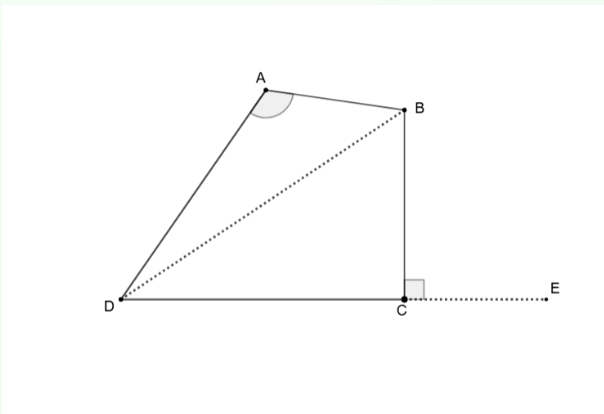
3.1 Aula 2

- Tempo previsto: 2 horas/aulas
- Objetivo: abordar de forma resumida noções introdutórias sobre polígono, introduzir divisão de figuras planas e coordenadas cartesianas.
- Recursos: material didático, como apostilas, canetas coloridas, régua, papel milimetrado e projetor multimídia

3.2 Polígonos

Um polígono é toda figura geométrica plana formada por uma região e por seu contorno, fechada e composta por segmentos de retas que não se cruzam. Na Figura 1, polígono $ABCD$ estão representados os principais elementos: vértices, lados, diagonal, ângulos externos e internos.

Figura 1 – Representação de um polígono



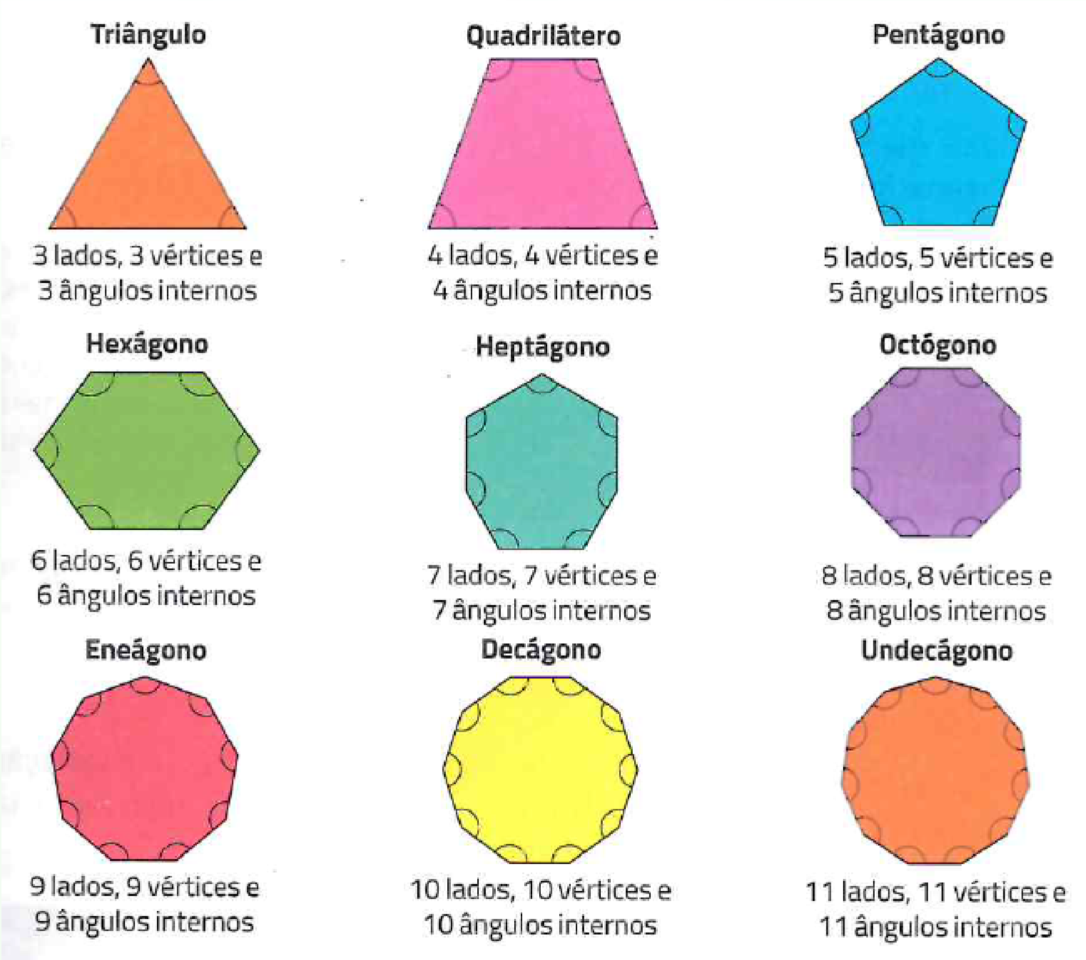
Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

- Os pontos A, B, C e D representam os vértices;

- Os segmentos; AB, BC , CD e DA representam os lados do polígono.
- O segmento DB representa a diagonal.
- As letras dos vértices ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$) representam os ângulos internos. Também podem ser representados por uma letra minúscula (a, b, c, d e e) ou ainda por uma letra grega ($\alpha, \beta, \ldots$).
- O ângulo $B\hat{C}E$ representa o ângulo externo do prolongamento do segmento CD.

Os polígonos também podem ser nomeados de acordo com a quantidade de vértices, lados e ângulos internos, como representado na Figura 2.

Figura 2 – Classificação dos polígonos



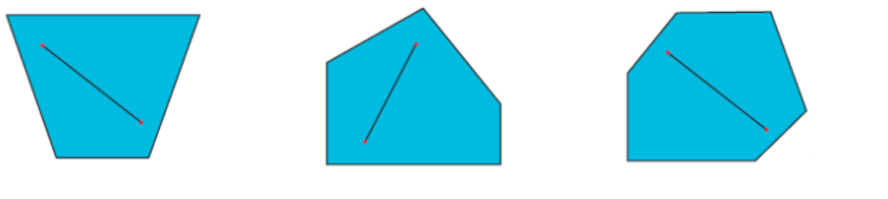
Fonte: Souza (2020).

Os polígonos ainda podem ser classificados em convexo e não convexo, regular e irregular.

- Convexo

Um polígono é considerado convexo, Figura 3, quando possui ângulos internos menores que 180º e todo segmento de reta que liga dois pontos quaisquer do polígono está completamente contido dentro dele.

Figura 3 – Polígono convexo

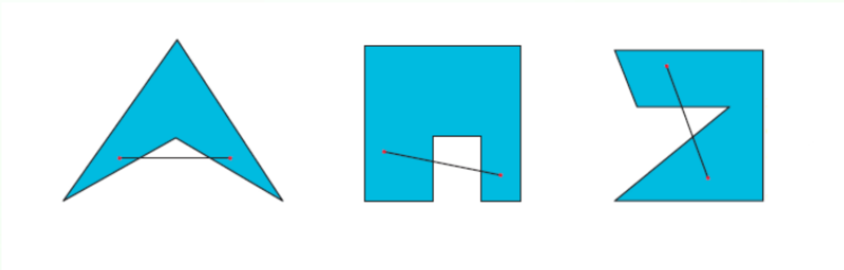


Fonte: Pataro e Balestri (2018).

- Não convexo

Dizemos que um polígono não é convexo, Figura 4, quando possui um ou mais ângulos internos maiores que 180º e menores que 360º. Outra forma de verificar se um polígono é convexo, é traçar um segmento de reta entre dois pontos internos: se alguma parte desse segmento ficar fora do polígono, então ele não é convexo.

Figura 4 – Polígono não convexo



Fonte: Pataro e Balestri (2018).

- Regular e Irregular

Um polígono é considerado regular, Figura 5, quando é convexo e possui todos os lados e ângulos internos congruentes. Os polígonos regulares também são identificados como equiláteros (lados com medidas iguais) e equiângulos (todos os ângulos possuem a mesma medida). Quando os lados não são todos iguais e os ângulos internos não têm a mesma medida, o polígono é considerado irregular.

Figura 5 – Polígono regular e irregular

Fonte: Oliveira (2026).

3.3 Situação-problema 1

Os alunos do Curso Técnico em Agropecuária estão ajudando a mapear alguns terrenos que serão usados para o plantio de hortaliças. A partir dos dados de medições de campo, geraram-se coordenadas cartesianas, cujos pontos que delimitam os terrenos são:

- Terreno 1

  A(0,0), B(4,0), C(10,0), D(10,3), E(6,6) e F (2,3)

- Terreno 2

  A (0,0), B(8,0), C(8,2), D(6,4), E(2,4) e F(0,2)

- Terreno 3

  A(3,2), B(6,0), C(9,2), D(9,7), E(6,7) e F(6,4)

- Para cada terreno representado, trace o plano cartesiano no papel milimetrado e localize cada coordenada no plano;
- Ligue os pontos para formar a figura correspondente;
- Divida o polígono formando figuras planas conhecidas (como triângulo, retângulo, trapézio, losango, etc.).

Após a aula sobre polígonos, propõe-se a situação-problema 3.3 para ser desenvolvida de forma individual ou em dupla, relacionada à construção de figuras geométricas planas no plano cartesiano utilizando folha de papel milimetrado, régua e canetas coloridas.

Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos desenham o plano cartesiano no papel milimetrado, localizam as coordenadas correspondentes, nomeiam os pontos para depois ligá-los, formando o polígono. Após a figura formada, utilizam-se as canetas coloridas para dividir o polígono em outras figuras planas, como triângulo, retângulo, trapézio ou losango.

Em caso de as figuras serem desconhecidas para os alunos, recomenda-se que façam pesquisas para identificar as figuras corretamente.

Ressalta-se que, durante a aplicação desse PE, foi observado que as turmas não tinham conhecimento sobre o plano cartesiano, o que foi preciso fazer uma explicação sobre o assunto e demonstrar como localizar coordenadas no plano cartesiano.

3.4 Aula 3

- Tempo previsto: 2 horas/aulas
- Objetivo: abordar diferentes formas para calcular áreas de triângulos
- Recursos: material didático como apostilas, livros didáticos e projetor multimídia

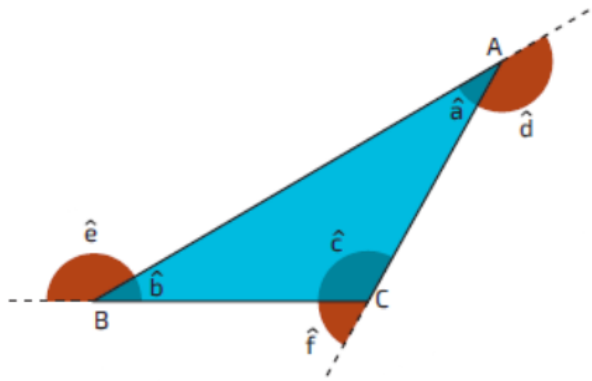
Nesta terceira aula, daremos continuidade ao nosso estudo, apresentando diferentes formas de calcular a área de um triângulo. Assim, aprenderemos a determinar essa área utilizando:

- Fórmula tradicional $\frac{base \cdot altura}{2}$
- Teorema de Herão
- Um ângulo e dois lados (utilizando relações trigonométricas)
- Lei dos Cossenos

3.5 Triângulo

O triângulo é um polígono que possui três ângulos, lados e vértices. É um polígono sempre convexo e o único polígono que não possui diagonal. Observe o triângulo ABC, ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Representação do triângulo ABC



Fonte: Pataro e Balestri (2018).

Os elementos que o compõem são:

- Vértices: A, B e C.
- Lados: AB, BC e AC
- Ângulos internos: ($\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$).
- Ângulos externos: ($\hat{d}$, $\hat{e}$, $\hat{f}$)

Os triângulos também possuem algumas propriedades fundamentais:

Propriedade 1 *Em qualquer triângulo, a soma dos seus ângulos internos é igual a 180º.*

Propriedade 2 *A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre igual a 360º.*

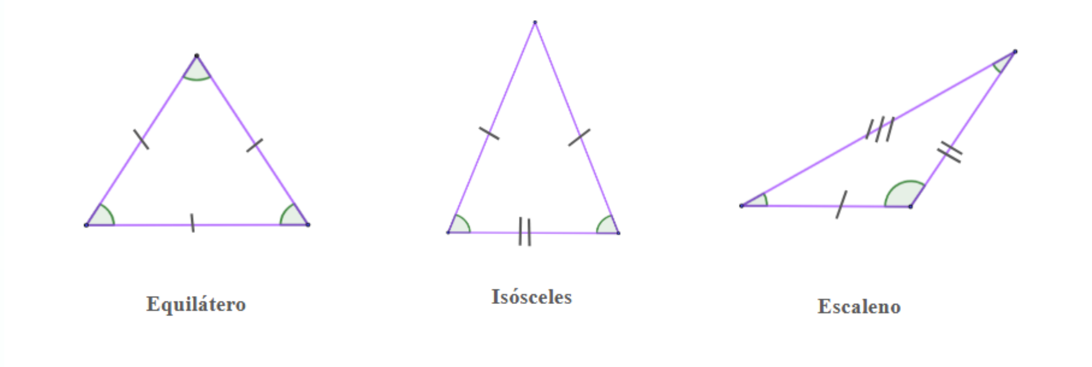
Propriedade 3 *Cada ângulo externo é igual à soma dos outros dois internos não adjacentes a ele.*

Propriedade 4 *O maior lado do triângulo está sempre oposto ao maior ângulo desse triângulo.*

Podemos classificá-los quanto à medida dos lados e à medida de seus ângulos internos.

Quanto às medidas dos lados, classificam-se em equilátero, isósceles e escaleno, como representado na Figura 7.

Figura 7 – Tipos de triângulos em relação à medida dos lados

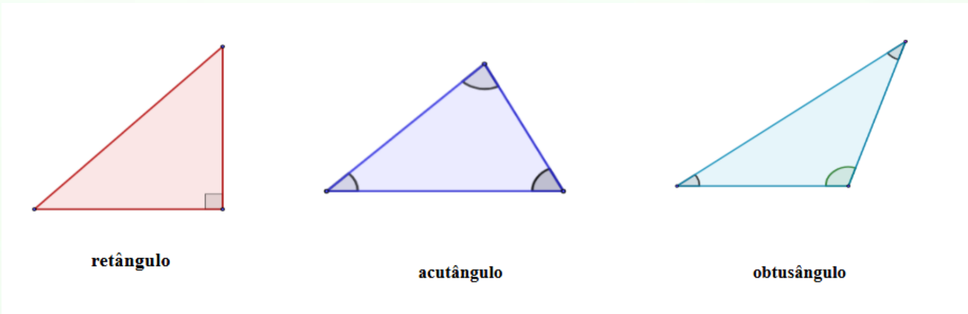


Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

- O triângulo equilátero possui os três lados com a mesma medida de comprimento e por consequência, três ângulos com mesma medida.
- O isósceles tem dois lados com medidas de comprimento iguais (congruentes) e dois ângulos também congruentes.
- O triângulo escaleno tem os três lados com medidas desiguais, por consequência, seus três ângulos também possuem medidas diferentes.

Quanto às medidas dos ângulos, na Figura 8, os triângulos se classificam em:

Figura 8 – Tipos de triângulos em relação a medida dos ângulos internos



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

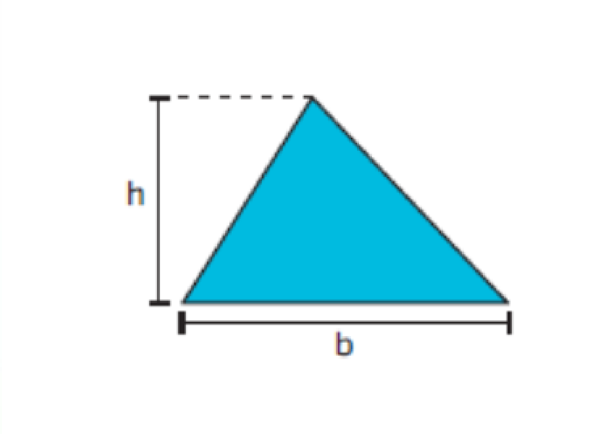
- Retângulo é aquele que tem um ângulo reto (ângulo com medida igual a 90º).
- Acutângulo possui três ângulos agudos (ângulo com medida menor que 90º).
- Obtusângulo possui um ângulo obtuso (ângulo com medida maior que 90º).

3.6 Cálculo da Área de um Triângulo

3.6.1 Fórmula Tradicional

Seja um triângulo qualquer, Figura 9, em que b é a medida do comprimento da base e h a medida do comprimento da altura.

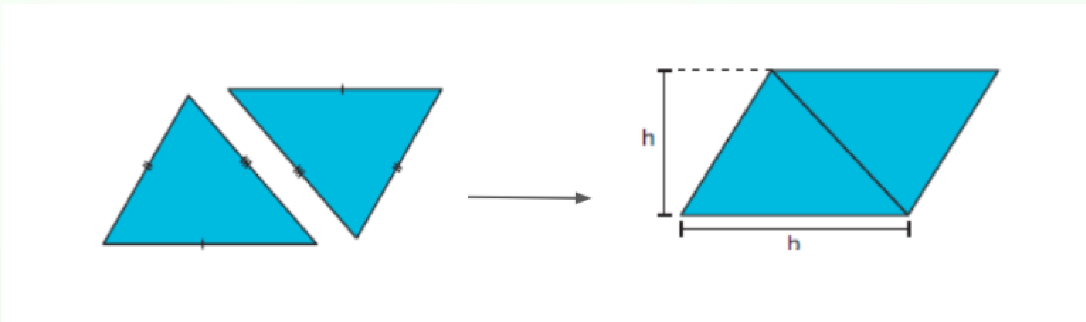
Figura 9 – Representação da área de um triângulo



Fonte: Pataro e Balestri (2018).

Considere, também, dois triângulos congruentes (ângulos internos e lados têm a mesma medida), Figura 10, com os quais podemos compor um paralelogramo.

Figura 10 – Representação da área de um triângulo



Fonte: Pataro e Balestri (2018).

Observe que as medidas do comprimento da base e do comprimento da altura do paralelogramo obtido é igual ao do triângulo original, Figura 9. E a medida da área do triângulo é igual à metade da medida da área do paralelogramo.

De modo que, se $b \cdot h$ é a medida da área do paralelogramo, então podemos dizer que a área do triângulo é metade da área do paralelogramo, ou seja, podemos calcular a área de um triângulo dividindo por dois, o produto das medidas do comprimento de sua base e do comprimento de sua altura.

Assim, a área de um triângulo é dada pela fórmula:

$$A = \frac{\mathrm{b} \times \mathrm{h}}{2} \tag{3.1}$$

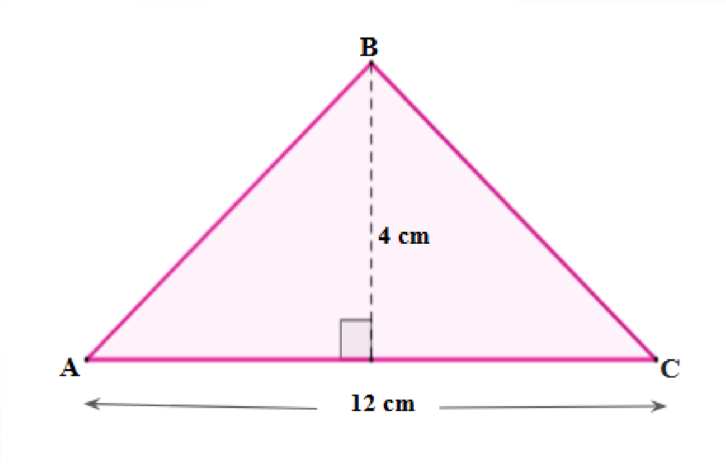
Dica Rápida

Você pode usar a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ para qualquer triângulo com base e altura conhecidas!

Vamos recapitular!

Dado o triângulo representado na Figura 11 e o passo a passo abaixo, calcule a área do triângulo.

Figura 11



Fonte: Elaborado pelos autores(2025).

Passo 1: Identifique a base e a altura do triângulo.

Passo 2: Multiplique os dois valores.

Passo 3: Divida o resultado por 2.

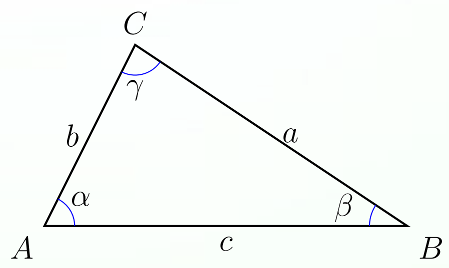
Passo 4: Pronto! Você encontrou a área.

3.6.2 Fórmula de Herão

Acredita-se que provavelmente os agrimensores utilizavam o método de triangularização de polígonos para determinar a área de propriedades rurais, fazer aproximações dos terrenos por meio da representação de polígonos irregulares utilizando a fórmula de Herão ou Heron, que já era conhecida na antiguidade pelo então Herão de Alexandria (10 d.C. - 70 d.C.). (Souza, 2020).

Esta fórmula utiliza as três medidas dos lados do triângulo e o semiperímetro (metade do perímetro de uma figura geométrica plana) para encontrar a área. Assim, considere S a medida do semiperímetro de um triângulo ABC, cujos lados medem a, b e c, como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 – Triângulo com vértices A, B, C, lados a, b, c e ângulos internos α, β e γ.



Assim, a medida do semiperímetro é dada por:

Semiperímetro

$$S = \frac{a+b+c}{2} \tag{3.2}$$

A área do triângulo ABC, apresentada na Figura 12, é dada pela seguinte equação:

Fórmula de Herão

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \tag{3.3}$$

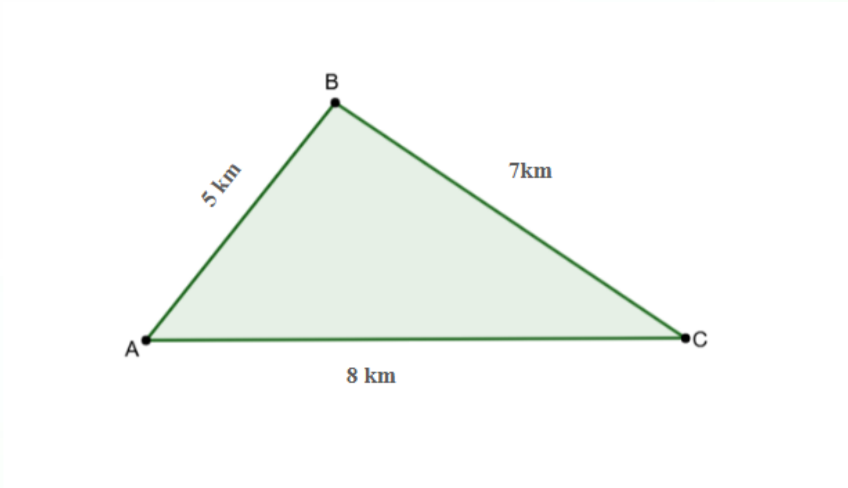
Você sabia?

A fórmula de Herão não precisa da altura! Só da medida dos lados do triângulo.

Vamos recapitular!

Considere o triângulo representado na Figura 13 e o passo a passo abaixo, calcule a área do triângulo.

Figura 13



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Passo 1: Identifique as medidas dos lados do triângulo.

Passo 2: Some todos os valores e divida por dois para encontrar o semiperímetro.

Passo 3: Substitua os valores na fórmula de Herão.

Passo 4: Efetue os cálculos seguindo a ordem das operações.

Passo 5: Pronto! Você encontrou a área.

3.6.3 Um ângulo e dois lados - utilizando relações trigonométricas

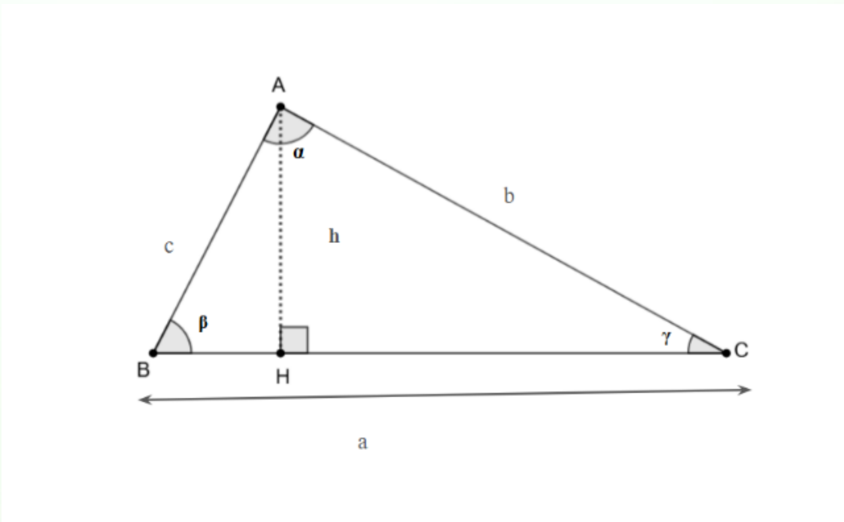
Considerando que, em um triângulo qualquer, não seja conhecida a altura, e sim as medidas de dois lados e do ângulo formado por esses lados, pode-se calcular a área desse triângulo utilizando o conceito de seno do ângulo. Assim, define-se a área de um triângulo qualquer da seguinte forma:

> A área de um triângulo é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.

Essa relação será demonstrada para os triângulos acutângulos e obtusângulos a seguir:

Seja o triângulo acutângulo ABC representado na Figura 14, no qual h é o comprimento do segmento AH e, portanto, a altura relativa ao lado BC e γ um ângulo agudo.

Figura 14 – Triângulo acutângulo



Fonte: Elaborado pelos autores(2025).

Sabemos que a área A do triângulo ABC, da Figura 14, é dada por:

$$A = \frac{a \cdot h}{2} \tag{3.4}$$

Do triângulo retângulo AHC, temos:

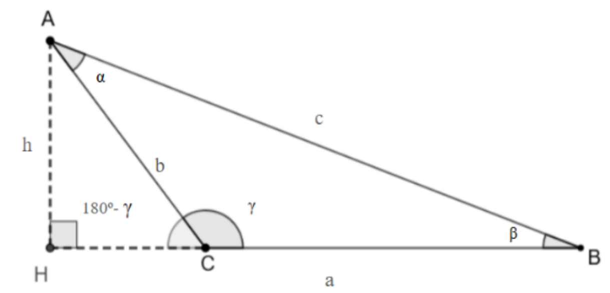
$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \operatorname{sen} \gamma \tag{3.5}$$

Substituindo, (3.5) em (3.4), temos:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{2} \tag{3.6}$$

Agora, considere o triângulo obtusângulo ABC apresentado na Figura 15, no qual AH é a altura relativa ao lado BC e γ é um ângulo obtuso conhecido.

Figura 15 – Triângulo obtusângulo



Fonte: Elaborado pelos autores(2025).

Sabemos que a área do triângulo ABC, pode ser encontrada da seguinte forma:

$$A = \frac{a \cdot h}{2} \tag{3.7}$$

Do triângulo retângulo AHC, temos:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \gamma) = \operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \operatorname{sen}\gamma \tag{3.8}$$

Substituindo a equação (3.8) em (3.7), temos:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\gamma}{2}$$

Procedendo de forma análoga, utilizando os ângulos α e β, temos:

$$A = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}, \quad A = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$$

Cálculo da área de um triângulo conhecendo dois lados a e b e o ângulo γ entre eles

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\gamma}{2} \tag{3.9}$$

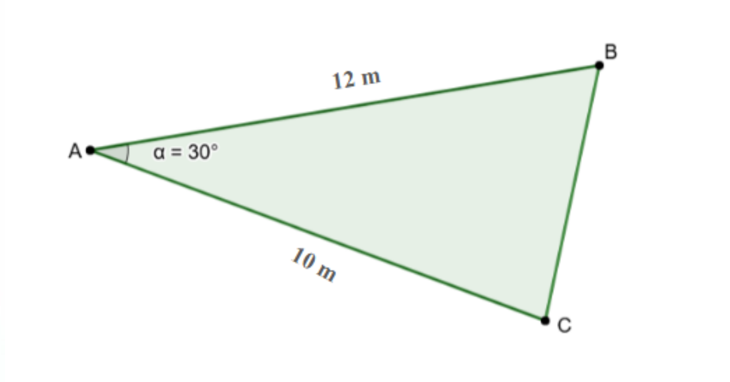
Você sabia?

A medida da área de um triângulo utilizando o seno de um ângulo e a medida de dois lados também é conhecida como Teorema da área.

Vamos recapitular!

Dado o triângulo representado na Figura 16, siga o passo a passo para calcular a área do triangulo.

Figura 16



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Passo 1: Identifique as medidas dos lados do triângulo.

Passo 2: Multiplique os dois valores.

Passo 3: Multiplique o resultado destes dois valores pelo seno do ângulo.

Passo 4: Divida o resultado por dois.

Passo 5: Pronto! Você encontrou a área.

3.6.4 Lei dos Cossenos

Em algumas situações, podemos modelar um problema envolvendo um triângulo qualquer, em que precisamos calcular uma ou mais medidas dos lados ou dos ângulos. Nesta situação, utilizamos a lei dos cossenos, que diz que:

Lei dos Cossenos

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

A Lei dos Cossenos, na Topografia, é utilizada para encontrar distâncias entre dois pontos a partir das medidas de dois lados e do ângulo entre eles, calcular ângulos internos de um triângulo a partir das medidas de seus três lados e realizar correções de erros em levantamentos de grandes áreas.

Assim, dado um triângulo ABC qualquer indicado na Figura 17, pode-se escrever:

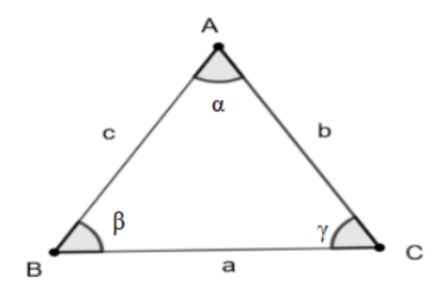
Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Figura 17 – Representação de um triângulo qualquer



Fonte: Elaborado pelos autores(2025).

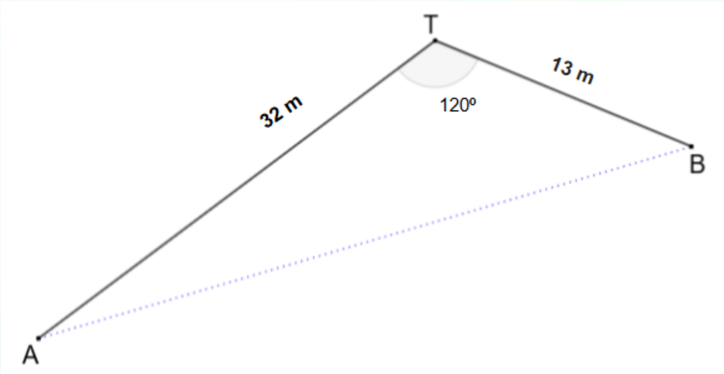
Dica Rápida

A Lei dos Cossenos, quando aplicada no triângulo retângulo, a equação resume-se ao Teorema de Pitágoras.

Vamos recapitular!

(UERJ) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T um técnico determinou as medidas $AT = 32$m; BT= 13 m e $A\hat{T}B = 120^{\underline{o}}$, representadas no esquema abaixo.

Figura 18 – Esquematização do problema



Fonte: Adaptado de Bonjorno (2020).

Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens do lago. Use cos($120^{\underline{o}}$)= $-\frac{1}{2}$

Passo 1: Trace um segmento de reta ligando o ponto A ao ponto B.

Passo 2: Identifique as medidas dos lados do triângulo e o cosseno do ângulo compreendido entre os lados AT e BT.

Passo 3: Substitua os valores na primeira equação da Lei dos Cossenos.

Passo 4: Efetue os cálculos, obedecendo à ordem das operações.

Passo 5: Pronto! Você encontrou a distância entre os pontos A e B.

3.7 Aula 4

- Tempo previsto: 2 horas/aulas
- Objetivo: resolução de uma situação-problema referente ao cálculo de área de terrenos.
- Recursos: material didático, apostilas, calculadora, régua, folhas para anotações e recriação das figuras após divisão da área.

Após a aula teórica e resolução dos exercícios, foi proposto uma situação-problema 3.8 voltada para o cálculo da área de terreno. Para o desenvolvimento dessa situação-problema, os alunos se organizaram em grupos de três ou quatro membros. Os grupos iniciaram fazendo a leitura do problema, depois a identificação de informações necessárias para a resolução. Após fazer a leitura e anotações, os grupos fizeram a divisão da área e reproduziram em uma folha os triângulos para a efetuação do cálculo das áreas parciais.

Ao fazer a divisão da área, perceberam a necessidade de encontrar a medida dos lados de um dos triângulos. Para isso, aplicou-se a Lei dos Cossenos, uma relação que permite encontrar medidas de distâncias e ângulos em um triângulo qualquer. Após encontrarem as medidas dos lados dos triângulos, calcularam a área dos triângulos utilizando a fórmula de Herão e área em função de um ângulo e dois lados do triângulo. Ao final, somaram os valores obtidos das áreas dos três triângulos para encontrar a área total do terreno.

3.8 Situação-problema 2

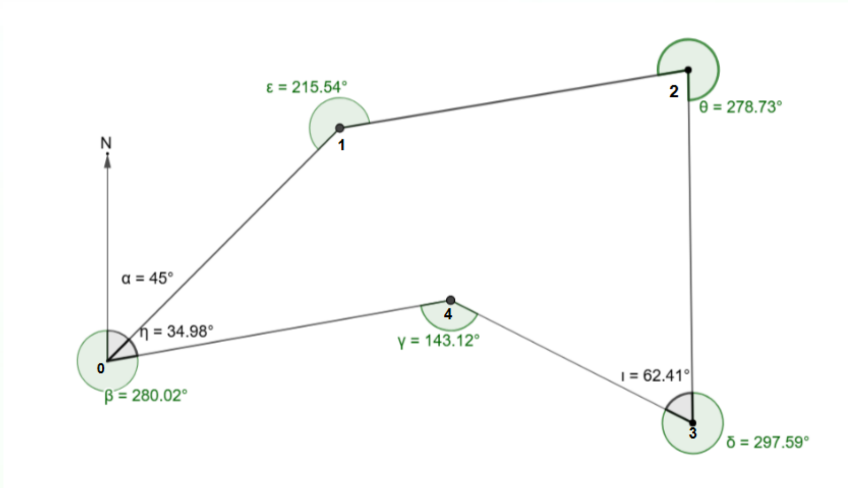
Uma propriedade rural precisa fazer a delimitação de uma determinada área. O terreno tem um formato irregular, mas pode ser dividido em polígonos simples para facilitar o cálculo da área total. Alguns dados de medições, como os pontos e ângulo do ponto de partida, ângulos horizontais e medidas de distâncias estão representados na tabela 1. Após o profissional responsável pela medição, ao efetuar os cálculos, obteve a área representada na Figura 19. Com base nos dados da tabela e na área desenhada, calcule a área total dessa propriedade rural.

Tabela 1 – Dados de medição

Ponto	Direção	Ângulo horizontal	Distância (metros)
OOP	OOP= 1:45º	ângulo do ponto de partida	
0	0-1	215º 54’	56
1	1-2	278º 73’	60,8
2	2-3	297º 59’	60,7
3	3-4	143º 12’	46
4	4-0	325º02’	60

Fonte: Adaptado de Lima (2020).

Figura 19 – Representação da área do terreno



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

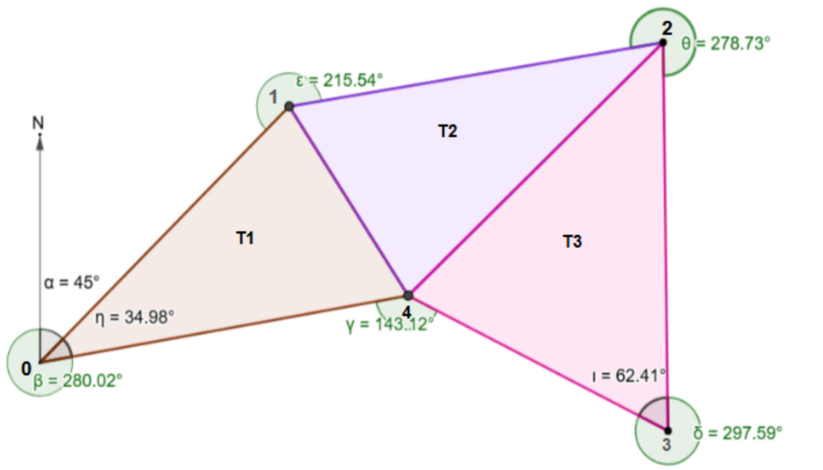
A seguir, apresentam-se os passos desenvolvidos para a resolução dessa atividade.

- Passo 1: Leitura, interpretação do problema e identificação de informações relevantes para a resolução do problema.

- Passo 2: Triangulação da área

A área foi dividida formando três triângulos nomeados por $T1$, $T2$ e $T3$, que para melhor organização dos cálculos e considerando que a área total do polígono da Figura 20 será dada pela soma das áreas desses triângulos.

Figura 20 – Representação da área do terreno triangulado



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

- Passo 3: Reprodução dos triângulos para melhor visualização e identificação das medidas dos lados.
- Passo 4: Cálculo das medidas desconhecidas dos lados dos triângulos utilizando a lei dos cossenos.

Para calcular a medida do lado referente a $D(1{,}4)$, distância entre o ponto 1 e 4 no triângulo $T1$ representado na Figura 20, considere $D(0{,}1) = a$, $D(0{,}4) = b$ e $D(1{,}4) = c$. Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\eta) \\
c^2 &= (56)^2 + (60)^2 - 2 \cdot (56) \cdot (60) \cdot \cos(34.98°) \\
c^2 &= 3136 + 3600 - 2 \cdot (3360) \cdot (0,819) \\
c^2 &= 6736 - 2 \cdot (2751,89) \\
c^2 &= 6736 - 5503,68 \\
c^2 &= 1232,32
\end{aligned}
$$

$$c = \sqrt{1232,32} \approx 35 \text{ m}$$

Para calcular a medida do lado referente a D(2,4), distância entre o ponto 2 e 4 no triângulo $T3$ representado na Figuras 18, considere: $D(2{,}4) = a$, $D(3{,}4) = b$ e $D(3{,}2) = c$. Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \\
a^2 &= (46)^2 + (60,7)^2 - 2 \cdot (46) \cdot (60,7) \cdot \cos(62.41°) \\
a^2 &= 2116 + 3684,49 - 2 \cdot (46) \cdot (60,7) \cdot (0,46) \\
a^2 &= 5800,49 - 2 \cdot (2.792,2) \cdot (0,46) \\
a^2 &= 5800,49 - 2 \cdot (1284,41) \\
a^2 &= 5800,49 - 2568,82 \\
a^2 &= 3231,67
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$a = \sqrt{3231,67} \approx 56\text{m}$$

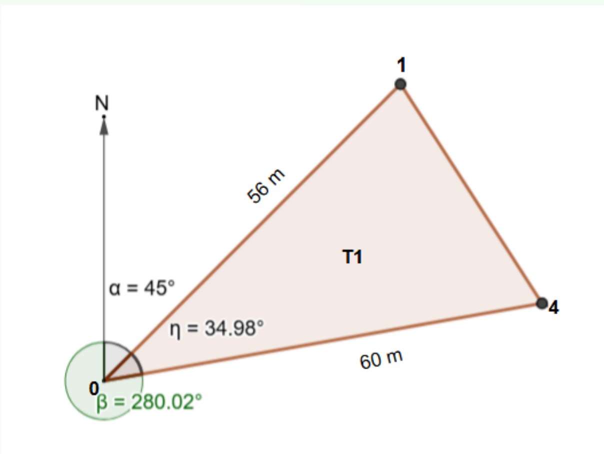
- Passo 5: Após encontradas as medidas de lado dos triângulos, calcula-se a área de cada triângulo.

Nos tópicos a seguir são apresentados os cálculos das áreas dos triângulos: $T1$, $T2$ e $T3$.

- Área do triângulo $T1$

No triângulo $T1$ representado na Figura 21 vamos calcular a área por meio da área de um triângulo em função de um ângulo e dois lados.

Figura 21 – Representação do triângulo T1



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} \\ &= \frac{56 \times 60 \times \sin(34.98°)}{2} \\ &= \frac{3.360 \times 0,57}{2} \\ &= \frac{1.915,2}{2} \end{aligned}$$

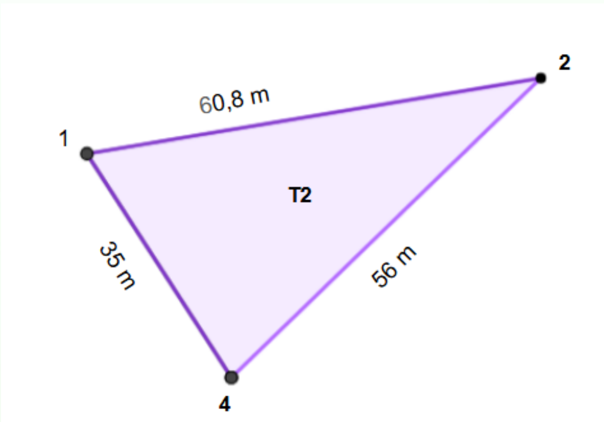
Portanto, a área do triângulo $T1$ é:

$$A = 957,6 \text{ m}^2$$

- Área do triângulo $T2$

Para encontrar a área do triângulo $T2$, representado na Figura 22, utilizaremos a Fórmula de Herão.

Figura 22 – Representação do triângulo T2



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Considere os lados do triângulo a, b e c, sendo: $a = 35$, $b = 56$ e $c = 60,8$. O semiperímetro do triângulo é dado pela equação:

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{35+56+60,8}{2} \\ S &= \frac{151,8}{2} \\ S &= 75,9 \text{ m} \end{aligned}$$

A área é dada pela equação:

$$A = \sqrt{S(S-a).(S-b).(S-c)}$$

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{75,9 \cdot (75,9-35) \cdot (75,9-56) \cdot (75,9-60,8)} \\
A &= \sqrt{75,9 \cdot (40,9) \cdot (19,9) \cdot (15,1)} \\
A &= \sqrt{75,9 \cdot (813,91) \cdot (15,1)} \\
A &= \sqrt{75,9 \cdot (12.290)} \\
A &= \sqrt{932,811}
\end{aligned}$$

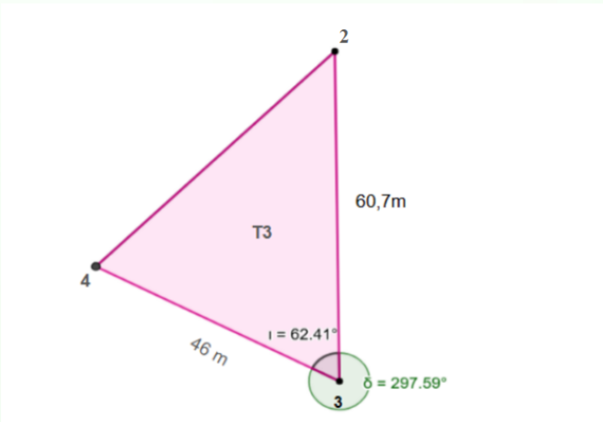
Portanto, a área do triângulo $T2$ é:

$$A \approx 965,8 \text{ m}^2$$

- Área do triângulo $T3$

Para calcular a área do triângulo $T3$, representado na Figura 23, pode-se utilizar a equação da área em função de um ângulo e dois lados.

Figura 23 – Representação do triângulo $T3$



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \\
A &= \frac{46 \times 60,7 \times \sin(62.41°)}{2} \\
A &= \frac{2.792,2 \times (0,88)}{2} \\
A &= \frac{2.457,13}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo $T3$ é:

$$A \approx 1.228,5 \text{ m}^2$$

- Passo 6: Some a área dos três triângulos para encontrar a área total do terreno.

$$A_{total} = \text{área do triângulo } T1 + \text{área do triângulo } T2 + \text{área do triângulo } T3$$

$$A_{\text{total}} = 957,6 \text{ m}^2 + 965,8 \text{ m}^2 + 1.228,5 \text{ m}^2$$

Logo,

$$A_{\text{total}} = 3151,9 \text{ m}^2$$

3.9 Aula 5

- Tempo previsto: 4 horas/aulas
- Objetivo: construir um polígono irregular conforme especificado na situação-problema 3.10, utilizando coordenadas finais de um levantamento de uma área do Campus Dianópolis.
- Recurso: computador com acesso a internet para uso do GeoGebra

3.10 Situação-problema 3

As informações da Tabela 2 referem-se aos dados de medições de uma área do Campus Dianópolis/IFTO. Com base nesses dados, crie o polígono correspondente, coloque os ângulos externos, divida a área em triângulos, encontre a altura de cada triângulo, crie os polígonos correspondentes aos triângulos para verificar a área parcial e total da área criada.

Tabela 2 – Dados de medições de uma área do Campus Dianópolis

Ponto	Direção	Ângulo externo	Distância metros	Coordenadas(x,y)
A	A-B	270º 0º 51,65”	29,99	(50.00, 50.00)
B	B-C	270º 0º 29,65”	19,99	(48.83, 20.03)
C	C-D	269º 57’ 56,6”	29,98	(28.85, 20.81)
D	D-A	270º 0º 41,65”	19,99	(30.02, 50.786)
Área total: 599,73 m^2				

Fonte: Elaborado pelos autores 2025.

A situação-problema 3.10 poderá ser realizada em dupla ou individualmente. Na aplicação desse PE, a atividade foi desenvolvida de forma individual. Como os alunos tinham pouca familiaridade com o software, antes de iniciar a atividade proposta, fez-se uma breve apresentação sobre a área principal do software e as principais ferramentas utilizadas. Disponibilizamos previamente, no grupo de WhatsApp formado com as turmas, um vídeo explicativo intitulado: GeoGebra: como criar uma conta em dois minutos. Para assistir ao vídeo clique no *link* <https://www.youtube.com/watch?v=0OVt_voHbac&t=31s>.

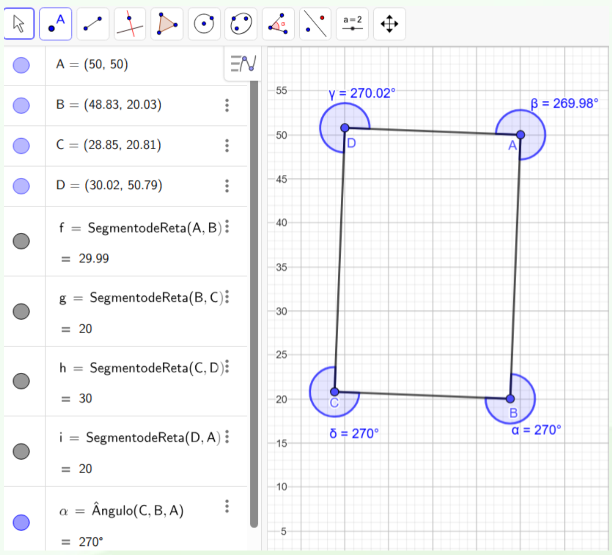
Após as orientações, os alunos inseriram as coordenadas finais e ligaram os pontos correspondentes para formar a figura geométrica e, em seguida, fizeram a inserção dos ângulos. Nesse momento, foi discutido o tipo de figura formada, as medidas dos lados da figura e os ângulos. Posteriormente, fizeram a divisão da área em triângulos, identificaram a altura e base dos triângulos, verificaram por meio de alguns comandos do software à medida da área dos triângulos e à medida da área total da figura geométrica formada.

No tópico seguinte, descrevem-se algumas orientações que foram seguidas para a realização dessa atividade.

- Passo 1: Inserção das coordenadas finais e criação da figura geométrica.

Na janela de álgebra, insira as coordenadas informadas na Tabela 2. Através do ícone ligue os pontos para formar os segmentos de reta AB, BC, CD e DA. Para inserir os ângulos externos, utilize o ícone ângulo e selecione três pontos existentes ou clique em três posições distintas para obter o ângulo com vértice no segundo ponto ou selecione dois segmentos para criar o ângulo entre eles, no sentido anti-horário. Ao finalizar a ação, será criada uma figura geométrica semelhante à representada na Figura 24.

Figura 24 – Representação da área do terreno



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

- Passo 2: Divisão da figura geométrica.

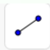
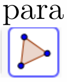
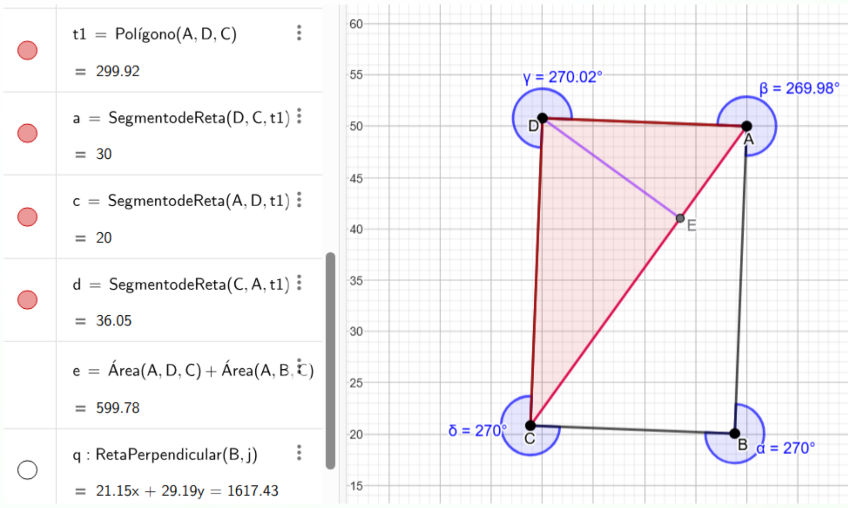
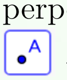
Considere a figura geométrica representada na Figura 25. Com o ícone , ligue dois pontos distintos do polígono AC ou DB para formar dois triângulos. Para melhor visualizar os triângulos, utilize o ícone polígono  clicando em cada ponto dos triângulos para formar os polígonos correspondentes.

Figura 25 – Representação dos triângulos

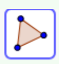


Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

- Passo 3: Encontrando a base e a altura do triângulo.

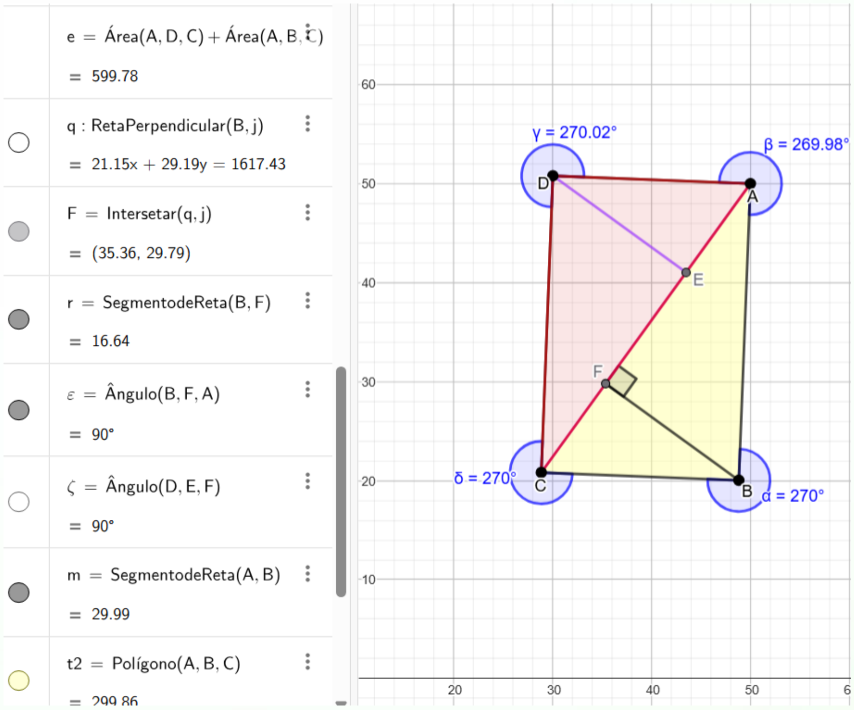
Considere o segmento de reta AC como base do triângulo. Com o ícone reta perpendicular,  clique no segmento base do triângulo, em seguida, selecione o ícone  para criar um ponto de interseção entre a reta perpendicular e o segmento base do triângulo. Após essa ação, desmarque a reta perpendicular formada. Com o ícone , crie um segmento de reta DE, que corresponderá à altura h do triângulo, como representado na 26

- Passo 4: Cálculo da área dos triângulos.

Ainda considerando a figura 26, utilize uma folha de anotações e multiplique a medida do segmento de reta AC pelo segmento de reta DE, divida o resultado por dois para encontrar a área do triângulo ADC. Em seguida, crie o polígono $t1 = Polígono(A, D, C)$ utilizando o ícone , clique em cada ponto dos vértices do triângulo ADC. Após a ação, compare os valores encontrados.

A área do segundo triângulo pode ser encontrada repetindo o mesmo procedimento utilizado no triângulo anterior, como também é possível encontrar a medida da área pelo comando $\acute{A}rea(A, D, C)$ inserindo os pontos correspondentes ao vértice do triângulo ou criando o polígono $t2 = Polígono(A, B, C)$.

Figura 26 – Representação das áreas dos triângulos



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

- Passo 5: Verificação da área total da figura geométrica

Para a verificação da área, pode-se somar as áreas dos triângulos, inserindo na barra de entrada $u = t1 + t2$, $\acute{A}rea(A, D, C) + \acute{A}rea(A, B, C)$ assim como pode utilizar o ícone 

. No desenvolvimento dessa atividade, os alunos podem efetuar os cálculos das áreas de cada triângulo no caderno e depois utilizar as ferramentas ou comandos do software para comparar se a área calculada manualmente corresponde com as mesmas geradas no GeoGebra. Ao comparar o valor da área construída no GeoGebra com o valor da área real, será possível observar que poderá ser igual ou aproximado, considerando que ao inserir as coordenadas finais na janela de álgebra, os ângulos e as medidas dos lados podem apresentar valores aproximados. Para visualizar a atividade clique no *link*: <https://www.geogebra.org/m/nxwgm82r>.

3ª Etapa - Avaliação

- Tempo previsto: 2 horas/aulas
- Objetivo: avaliar o desenvolvimento dos alunos em relação aos conteúdos ministrados e avaliação da SD (produto educacional)
- Recursos: Pós-teste e Questionário final

Esta etapa refere-se à avaliação que pode ser realizada tanto no final como no decorrer do desenvolvimento das atividades em uma SD. Conforme Cardoso (2024), a avaliação tem como finalidade fazer a verificação do processo de aprendizagem, para a qual é fundamental utilizar-se de métodos diferenciados. Na aplicação desse PE, utilizou-se um pós-teste (Apêndice C) para avaliar o desenvolvimento dos alunos em relação aos conteúdos ministrados e um questionário final (Apêndice D) como forma de avaliação da SD (produto educacional).

4.1 Material complementar

Nesta seção, apresentam-se algumas sugestões de vídeoaulas referentes aos conteúdos abordados nesse PE.

Polígono - Geometria Plana. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=Lqm8hd-LYuw>.

Área do Triângulo-Área de Figuras Planas. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=UXoBHQBT5OE&t=210s>.

Área do Triângulo por 2 lados e 1 ângulo. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=cST-379_cjQ&t=5s>.

Lei dos Cossenos: Fórmula, como usar e exercícios resolvidos.Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=_Ib2Rw7sYzE&t=48s>.

Fórmula de Herão.Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9h6c6RoI73E&t=34s>.

GeoGebra: como criar uma conta em dois minutos. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=0OVt_voHbac&t=31s>

Considerações finais

O desenvolvimento desse PE em contexto de sala de aula consistiu na implementação de uma sequência didática para o ensino do cálculo de áreas aplicada à Topografia, utilizando o GeoGebra como recurso didático, na primeira série do Curso Técnico Integrado em Agropecuária do IFTO, Campus Dianópolis.

Considerando os principais resultados da aplicação desse PE, ficou evidenciado que os estudantes da primeira série do referido curso possuem lacunas de aprendizagem em geometria plana e matemática básica. Os resultados indicaram que as atividades propostas durante a sequência didática, embora não tenham sido classificadas em um nível de complexidade alto, os alunos afirmaram que sentiram dificuldades para resolvê-las.

Quanto às contribuições do GeoGebra para o processo de aprendizagem, observou-se que o software contribuiu para a visualização e resolução de problemas de cálculo de áreas de terrenos, evidenciando assim a importância do recurso para essa área da matemática. Também pode ser evidenciado que as atividades propostas durante a SD ajudaram na aprendizagem dos estudantes; porém, a aprendizagem percebida após a aplicação da SD foi considerada parcial. Diante disso, observou-se que, quando existem lacunas de aprendizagens e os conhecimentos prévios não estão bem definidos, pode haver comprometimento no processo de aprendizagem do aluno.

Por outro lado, subentende-se que esses resultados não desconsideram a importância desta proposta de produto educacional, pois o processo de ensinar é considerado complexo, assim como as aprendizagens. Ademais, considerando a importância do ensino da geometria, é relevante a implementação de práticas de ensino integradas ao uso de tecnologias digitais.

Referências

BONJORNO, J. R. *Prisma matemática: geometria e trigonometria. ensino médio*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

CARDOSO, M. B. *Sequências didáticas : orientações para iniciantes na pesquisa em educação matemática*. 1. ed. Iguatu, CE: Editora Quipá, 2024.

CIAVATTA, M. A formaÇÃo integrada a escola e o trabalho como lugares de memÓria e de identidade. *Revista Trabalho Necessário*, v. 3, n. 3, 2005.

LIMA, I. *Cálculo da Poligonal Fechada*. 2020. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=evfxO9iPsJY>. Acesso em: 7 abril. 2025.

LIMA, M. G.; ROCHA, A. A. S. da. As tecnologias digitais no ensino de matemática. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, v. 8, n. 5, p. 729–739, 2022.

MOREIRA, M. A. Organizadores previos y aprendizaje significativo. *Revista chilena de educación científica*, Facultad de Ciencias Básicas., v. 7, n. 2, p. 23–30, 2008.

OLIVEIRA, R. R. *Como Classificar os polígonos*. 2026. Disponível em:<https://www.preparaenem.com/matematica/classificacao-poligono-relacao-numero-lados.ht>. Acesso em: 7 abril. 2025.

OLIVEIRA, V. E. d. S. C.; SILVA, A. G. da. O uso do geogebra no ensino da geometria plana: uma revisão de literatura. *HUMANIDADES E TECNOLOGIA (FINOM)*, v. 52, n. 1, p. 95–96, 2024.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática essencial 8o ano : ensino fundamental*. 1ª. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

SOUZA, J. R. *Multiversos Matemática: Geometria: ensino médio*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Apêndice A: Questionário inicial

Escaneie o QR Code para acessar o questionário inicial.

Apêndice B: Pré-teste

Escaneie o QR Code para acessar as questões do pré-teste.

Apêndice C: Pós-teste

Escaneie o QR Code para acessar as questões do pós-teste.

Apêndice D: Questionário final

Escaneie o QR Code para acessar o questionário final.