UFPA

ESTRATÉGIA DE ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DO GEOGEBRA ASSOCIADOS A MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS.

Me. ALDECY VITOR DE OLIVEIRA JUNIOR
Dr. EDSON JORGE DE MATOS

PROFMAT

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

BRAGANÇA
2026

ESTRATÉGIA DE ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DO GEOGEBRA ASSOCIADOS A MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS.

ALDECY VITOR DE OLIVEIRA JUNIOR

ESTRATÉGIA DE ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DO GEOGEBRA ASSOCIADOS A MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS.

E-book apresentado ao Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA – PROFMAT, do Campus de Bragança, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em MATEMÁTICA. Área de concentração: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientador (a): Dr. Edson Jorge de Matos

BRAGANÇA
2026

APRESENTAÇÃO

Este material é fruto do conhecimento construído ao longo da pós-graduação stricto sensu, que confere o título de Mestre em Matemática, com Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias. Da Universidade Federal do Pará (UFPA)- Campus-Bragança, intitulado como Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O curso conta com o apoio do Programa de Pós-Graduação stricto sensu para a Qualificação de Professores da Rede Pública de Educação Básica (PROEB), da CAPES. Coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

A estratégia de ensino tem como objetivos auxiliar professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem dos polígonos e sólidos geométricos, utilizando o GeoGebra, um software gratuito de matemática dinâmica. Com o apoio dessa ferramenta digital, será possível visualizar, construir e explorar conceitos geométricos de maneira interativa e dinâmica, tornando a aprendizagem mais intuitiva e significativa.

Neste, você encontrará: Uma revisão dos principais conceitos da geometria plana, como perímetro, área e classificação dos polígonos;

Tutoriais passo a passo para realizar construções de polígonos e sólidos no GeoGebra; Atividades práticas e desafios, que integram a teoria matemática ao uso do recurso digital. Nosso propósito é oferecer um material que contribua tanto para o planejamento de ensino do professor, quanto para o estudo autônomo do aluno da geometria espacial, incentivando o uso da tecnologia como aliada no aprendizado da Matemática.

Nessa construção de estratégia de ensino, foi utilizado referenciais teóricos como “Geometria” de Antônio Caminha Muniz Neto, publicado pela SBM em 2022, que é utilizado como material base da disciplina de geometria no PROFMAT. “Medida e forma em geometria” Elon Lages Lima, publicado pela SBM em 2011. “A matemática do Ensino Médio” volume 2 de Eduardo Wagner, Augusto Cezar de Oliveira Morgado, Paulo Cezar Pinto Carvalho, publicado pela SBM em 2022. “Fundamentos de Matemática Elementar” volumes 09 e 10 de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, publicado pela SBM em 2013.

ALDECY VITOR DE OLIVEIRA JUNIOR

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2006), Especialista em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Pará (2008), Especialista em Gestão Escolar, Supervisão e Orientação Pedagógica E Educacional (2023). Foi Secretário de Educação do Município de Igarapé-Açu (2020-2024); É Professor de Matemática da secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC-PA). Professor de Matemática da Secretaria Municipal de Educação (SEMED), do Município de Igarapé-Açu/PA . Foi professor supervisor do projeto PIBID de Matemática do Campus X da Universidade do Estado do Pará (UEPA) (2011-2019), no Município de Igarapé-Açu/PA, foi Preceptor do Residência Pedagógica de Matemática do Campus X da Universidade do Estado do Pará (UEPA) (2022-2023), no Município de Igarapé-Açu/PA. Professor integrante do Grupo Colaborativo de Educação Matemática (GCEM). Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2026).

AGRADECIMENTOS

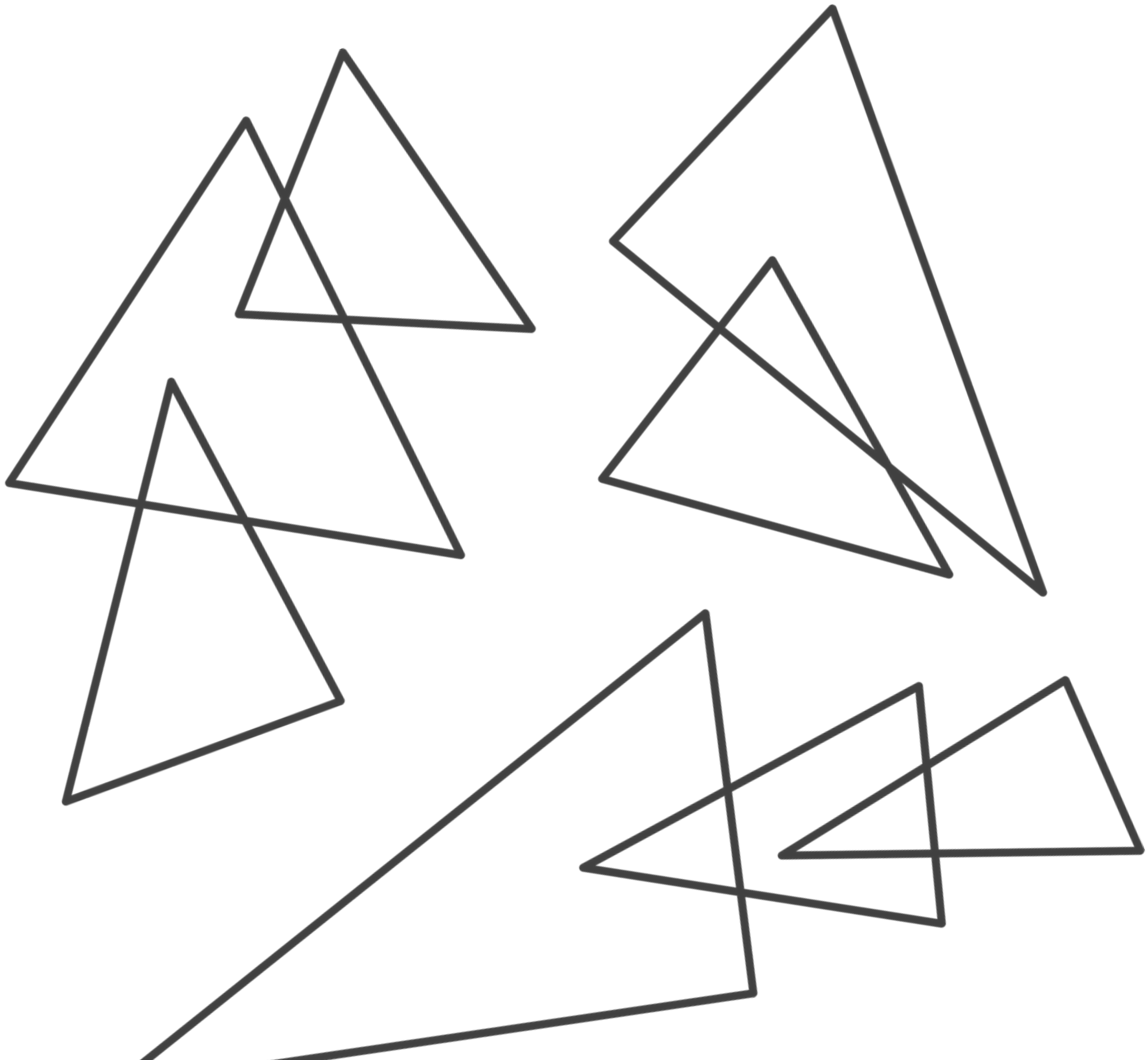
Agradeço ao meu bom Deus por ter me abençoado com sabedoria e discernimento, nessa grande jornada de construção de conhecimento, tive momentos difíceis, mas a família estava presente me apoiando em minhas decisões e aconselhando em prol de minha evolução quanto pessoa. Sou muito grato aos meus pais, Aldecy Vitor de Oliveira e Maria Raimunda Granado de Oliveira pelo incentivo aos meus estudos, que foram repletos de obstáculos, onde foram transcendidos com muita união, harmonia e amor. Não poderia de deixar de mencionar uma frase de meu pai: "Estude meu filho, Deus vai lhe ajudar é o que posso fazer por você!". Essa frase ficou gravada em minha memória me ajudou nos momentos de provação. Pai sou muito grato por nascer seu filho.

Com o transcorrer da vida, conheci uma pessoa que otimizou minha vida e com ela construímos uma família linda e maravilhosa, me refiro a minha esposa a Enfermeira Rosiane Araújo de Oliveira, que me incentiva, motiva todos os dias, me dizendo a importância de sonhar e buscar a realização desses sonhos, valorizando a importância de fazer o que gosta, respeitando todas as pessoas, da criança ao idoso se colocando no lugar do próximo. Por tudo que relatei, eu agradeço a essa Mulher forte e de fibra, que me acompanhou nos momentos mais difíceis e nos melhores momentos de felicidade de nossas vidas. Agradeço aos meus dois filhos: a Professora Vitoria Isabely Araújo de Oliveira e ao futuro Médico Aldecy Vitor de Oliveira Neto. Que apesar de serem os filhos, sempre me aconselham e estão sempre presentes nas minhas conquistas, além de serem pessoas positivas e extremamente alegres, transmitem essa energia boa, de luz há todas as pessoas ao seu redor. Eles são responsáveis por deixar minha vida repleta de felicidade. Sou muito grato ao professor Edmundo Mourão de Carvalho e ao professor Me. Fabricio da Silva Ferreira por contribuir com este trabalho, através de discursões que trouxeram tomadas de decisões para as escolha de componentes da pesquisa e construção desse produto.

Agradeço ao professores do mestrado em nome do meu orientador o Dr. Edson Jorge de Matos, pelas orientações e discursões no decorrer do curso a respeito da pesquisa, que foram muito produtivas e significativas para construção desse estudo. Também reconheço as contribuições das amizades que foram construídas durante o mestrado.

Sou muito grato aos meus irmãos: Sergio, Francisco Antônio, Luiz Claudio, Ana Claudia, Simone e ao meu irmão mais novo, o professor Odair Granado. Pelos incentivos e por sempre estarem presentes na minha vida, incentivado a minha busca de construção de conhecimento e as realizações de meus sonhos.

SUMÁRIO



SUMÁRIO

1 GEOMETRIA

1.1 QUE É GEOMETRIA?

A Geometria é a área da Matemática que estuda as formas e as medidas do espaço ao nosso redor. Ela não nasceu dentro de uma sala de aula, mas sim da necessidade prática dos povos antigos: medir terras, construir casas, organizar plantações e até prever fenômenos da natureza.

Exemplos do cotidiano:

- Quando um engenheiro projeta uma ponte, ele usa geometria para calcular ângulos, distâncias e resistências.
- Ao construir uma casa, o pedreiro precisa medir corretamente paredes (retângulos), portas (retângulos) e telhados (triângulos).
- Na natureza, vemos geometria nas colmeias das abelhas (hexágonos), nos cristais (formas poliedrais) e até nas órbitas planetárias (formas circulares e elípticas).
- Na tecnologia, telas de celulares e TVs têm formato retangular, enquanto ícones e logotipos utilizam triângulos, círculos, estrelas e outros polígonos.

1.2 O QUE É GEOMETRIA PLANA?

A Geometria Plana estuda as figuras bidimensionais, ou seja, aquelas que têm apenas comprimento e largura, sem profundidade. Elas estão “desenhadas” em um plano, como uma folha de papel.

Figuras mais comuns: triângulos, quadrados, retângulos, losangos, trapézios, pentágonos, hexágonos e círculos.

Exemplos do dia a dia:

- O formato de uma porta ou de uma janela é retangular.
- Uma placa de trânsito de “Pare” tem formato de octógono regular.
- Uma pizza ou uma roda de bicicleta representam um círculo.
- Um campo de futebol é construído com base em retângulos e semicírculos.

1.3 O QUE É GEOMETRIA ESPACIAL?

A Geometria Espacial estuda as figuras tridimensionais, aquelas que ocupam espaço e têm comprimento, largura e altura.

Além de analisar áreas das superfícies, ela também se preocupa com o volume, ou seja, com a quantidade de espaço que a figura ocupa.

Sólidos mais comuns: cubo, paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Exemplos do dia a dia:

- Uma caixa de sapato é um paralelepípedo.
- Um dado de jogo é um cubo.
- Uma lata de refrigerante é um cilindro.
- Um sorvete de casquinha é um cone.
- Uma bola de futebol é uma esfera.
- As Pirâmides do Egito são exemplos históricos de pirâmides de base quadrada.

1.4 O QUE SÃO MATERIAIS MANIPULÁVEIS?

Materiais manipuláveis são objetos que podem ser tocados e explorados com as mãos para facilitar o aprendizado. Eles ajudam o aluno a compreender melhor os conteúdos, tornando as aulas mais práticas e concretas. Exemplos incluem blocos lógicos, material dourado, tangram, geoplano e sólidos geométricos

Figura 1 - O que são Materiais Manipuláveis

Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2 GEOGEBRA

2.1 O QUE É GEOGEBRA?

Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, o programa rapidamente se consolidou como uma das ferramentas digitais mais utilizadas em todo o mundo no ensino de Matemática.

O GeoGebra é um software livre e gratuito de Matemática, desenvolvido com o objetivo de unir, em um único ambiente, áreas que normalmente são estudadas de forma separada: Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística e Probabilidade. Uma das características mais marcantes do GeoGebra é a sua natureza dinâmica: qualquer construção ou objeto criado pode ser manipulado, e todas as relações matemáticas permanecem válidas. Isso possibilita ao estudante perceber, de maneira visual e interativa, como os conceitos estão interligados, facilitando a compreensão e tornando o aprendizado mais envolvente. De acordo com

- **Funcionalidades Principais**

O GeoGebra reúne diversos ambientes de trabalho que se complementam:

- Janela de Geometria: permite construir pontos, retas, polígonos, circunferências e demais figuras geométricas, possibilitando explorar propriedades e relações.
- Janela de Álgebra: exibe as equações, coordenadas e expressões relacionadas aos objetos criados, estabelecendo a conexão direta entre a representação algébrica e a visual.
- Gráficos de Funções: possibilita representar funções de diferentes tipos, analisar interceptos, máximos, mínimos, crescimento e decrescimento.
- Cálculo Algébrico Simbólico (CAS): permite resolver equações, calcular derivadas, integrais e simplificar expressões de forma automática.
- Visualização 3D: possibilita criar e manipular sólidos, superfícies e gráficos espaciais, ampliando o estudo da Matemática para além do plano.
- Planilhas e Estatística: oferece ferramentas para inserção de dados, construção de tabelas, elaboração de gráficos e análises estatísticas.
- Probabilidade: dispõe de simulações e distribuições probabilísticas que auxiliam no estudo desse campo matemático.

🔹 **Por que usar o GeoGebra?**

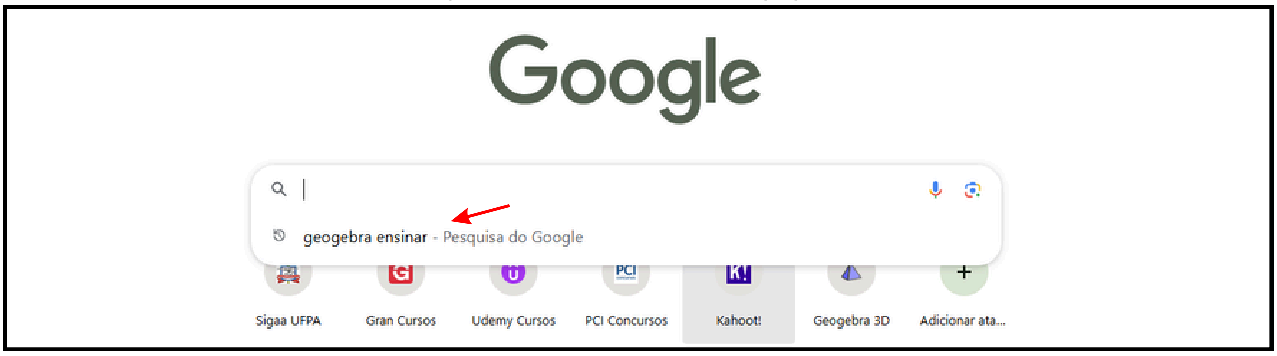
Além de ser um recurso acessível e multiplataforma (funciona em computador, celular e online), o GeoGebra transforma o estudo da Matemática em uma experiência visual, prática e exploratória. Ele permite que professores criem atividades interativas e que alunos testem hipóteses, descubram padrões e desenvolvam maior autonomia no aprendizado.

2.2 CONHECENDO O GEOGEBRA

No computador: abra o navegador de internet (**Google Chrome, Mozilla Firefox, Microsoft Edge** ou outro). Em seguida, digite na barra de pesquisa: "**GeoGebra ensinar**" e clique no link oficial do GeoGebra.

No celular: é possível acessar pelo navegador da mesma forma ou instalar o aplicativo gratuito "GeoGebra", disponível na Google Play ou App Store.

Figura 2 - Conhencendo o gegebra

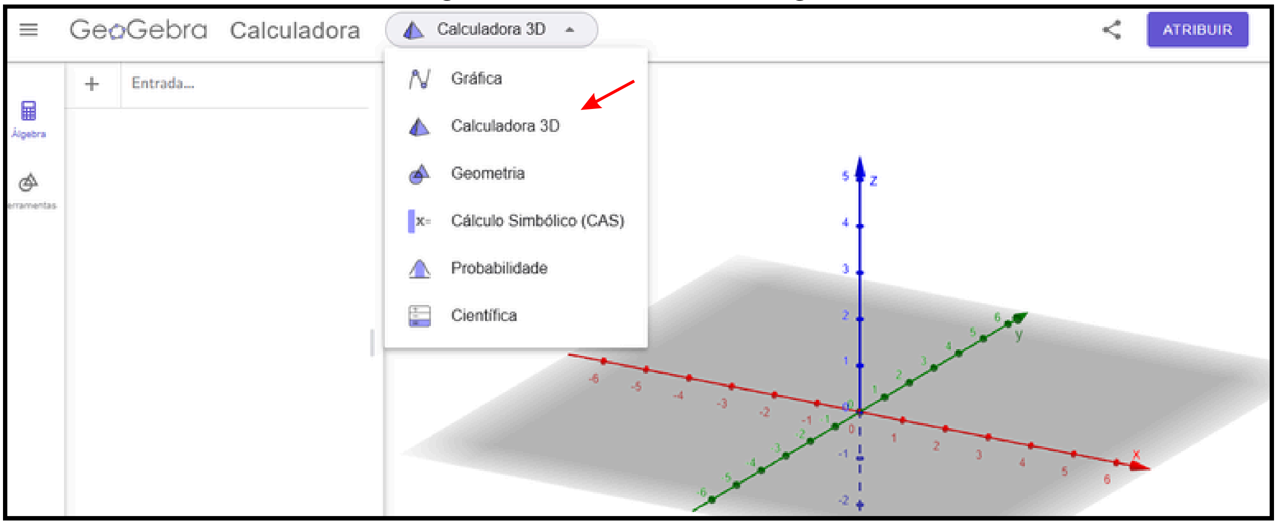


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após acessar o site ou abrir o aplicativo, você estará na interface inicial do GeoGebra. Nela, aparecem diversas opções de recursos, como:

- Geometria: para construções com pontos, retas, segmentos, polígonos e figuras geométricas em geral.
- CAS (Cálculo Algébrico Simbólico): para resolver expressões algébricas, simplificações e cálculos.

Figura 3 - Conhecendo o Geogebra



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

- Planilha: que permite organizar dados e trabalhar com estatística.
- Gráficos 2D e 3D: para representar funções e sólidos geométricos.

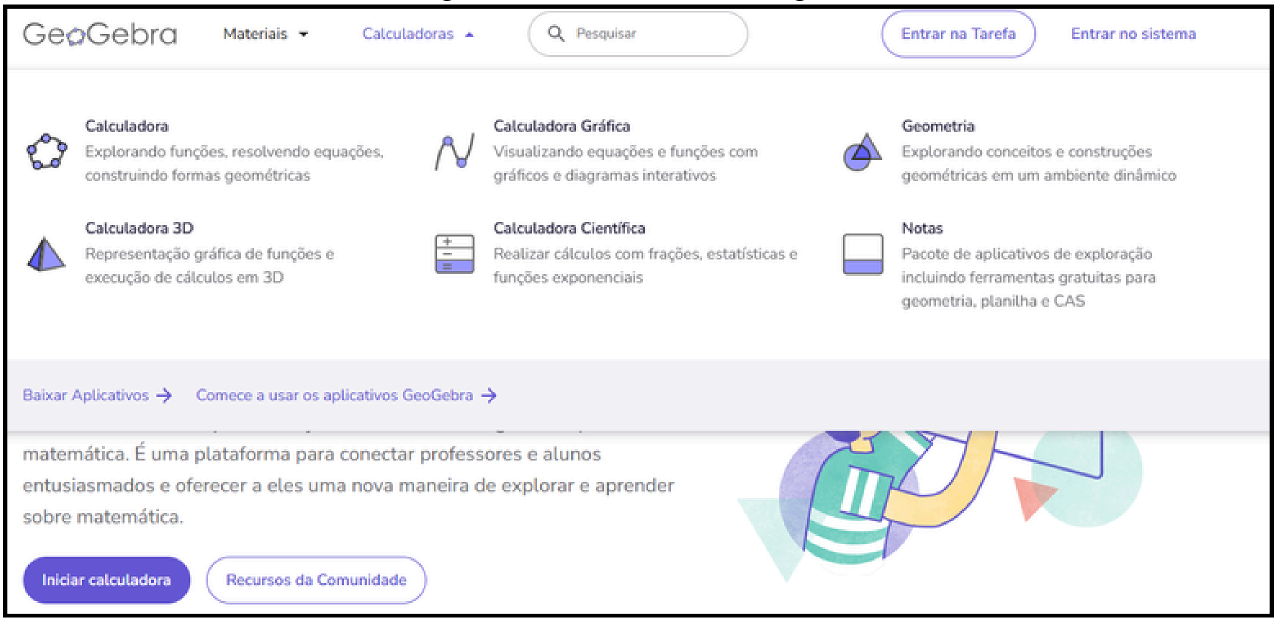
Na barra lateral, você encontrará as principais ferramentas, como ponto, reta, círculo, polígono, mover, apagar, entre outras. Cada uma delas será fundamental para a construção das figuras e atividades propostas nesta apostila

Figura 4 - Conhecendo o Geogebra

Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Na parte superior da tela inicial do GeoGebra, você encontrará o ícone da Calculadora. Ao clicar nele, serão exibidas diversas opções, entre elas:

Figura 5 - Conhecendo o Geogebra



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Para este momento, vamos selecionar a Calculadora 3D.

Após clicar, você será direcionado para a interface 3D do GeoGebra, onde será possível construir e visualizar sólidos geométricos em três dimensões. Essa área será fundamental para explorarmos conceitos de geometria espacial de forma dinâmica e interativa.

3 GEOMETRIA PLANA

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

A Geometria Plana é o ramo da geometria que estuda as figuras que estão em um plano, ou seja, aquelas que possuem apenas duas dimensões: comprimento e largura.
Ela não considera altura ou profundidade.
No dia a dia, encontramos a Geometria Plana em:

- Placas de trânsito (retângulos, octógonos, triângulos).
- Campos esportivos (retângulos, círculos e semicírculos).
- Artesanato e arquitetura (mosaicos, vitrais, pisos).
- Desenhos técnicos e plantas baixas de construções.

3.2 MEDIDAS DE COMPRIMENTO

O comprimento é a medida da extensão de um objeto.

Na geometria, medimos o comprimento de segmentos de reta, lados de polígonos e perímetros. As principais unidades de comprimento no Sistema Internacional são:

Quadro 1 - Grandezas de comprimento

Grandezas	Símbolo
Quilômetro	Km
Hectômetro	hm
Decâmetro	dam
Metro	m
Decímetro	dm
Centímetro	cm
Milímetro	mm

Fonte - Elaborada pelo autor (2025)

3.3 CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

- Regulares → lados e ângulos iguais.
  Exemplo: quadrado, triângulo equilátero.
- Irregulares → lados e ângulos diferentes.
  Exemplo: quadrilátero qualquer.
- Convexos → todos ângulos internos < 180°.
  Exemplo: hexágono regular.
- Côncavos → pelo menos um ângulo interno > 180°.
  Exemplo: estrela de 5 pontas.

3.4 PERÍMETRO

O perímetro é a medida de contorno de uma figura plana, ou seja, é a soma da medidas dos lados .

- Quadrado: P = 4 × L
- Retângulo: P = 2 × (b + h)
- Triângulo: P = a + b + c
- Circunferência: P = 2 × π × r

Exemplo do cotidiano: calcular a quantidade de arame necessária para cercar um terreno.

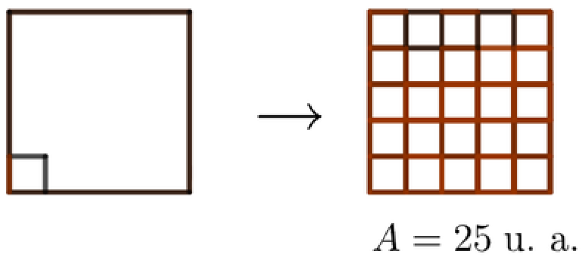
3.5 MEDIDAS DE ÁREA

É a quantidade de unidades quadradas que determinada superfície comporta. Veja:

A: **Área**

u.a : **Unidade de área**

Quadro 2 - Unidade de Área



Fonte - Elaborada pelo Autor (2025)

Quadro 3 - Grandezas de Área

Grandezas	**Símbolo**
Quilômetro quadrado	Km^2
Hectômetro quadrado	hm^2
Decâmetro quadrado	dam^2
Metro quadrado	m^2
Decímetro quadrado	dm^2
Centímetro quadrado	cm^2
Milímetro quadrado	mm^2

Fonte - Elaborada pelo Autor (2025)

3.6 ÁREA DAS FIGURAS PLANAS

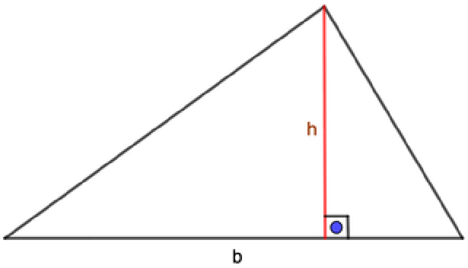
- Quadrado

$$A = L^2$$
$$P = 4 \cdot L$$

- Retângulo:

$$A = b \cdot h$$
$$P = 2 \cdot (b + h)$$

- Triângulo

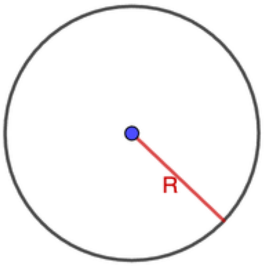


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Trapézio

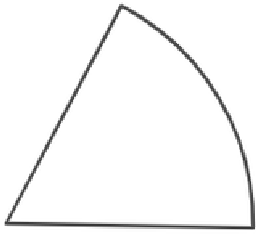
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- Círculo



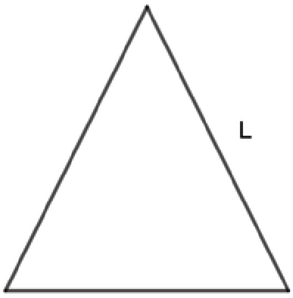
$$A = \pi . r^2$$
$$Aonde\ pi \approx 3,14$$
$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$
$$\text{C} = \text{comprimento da circunferência}$$

- Setor Circular



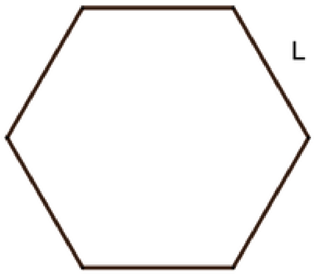
$$A_{\text{setor}} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

- Triângulo Equilátero



$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

- Hexágono regular



$$A = \frac{3.L^2\sqrt{3}}{2}$$

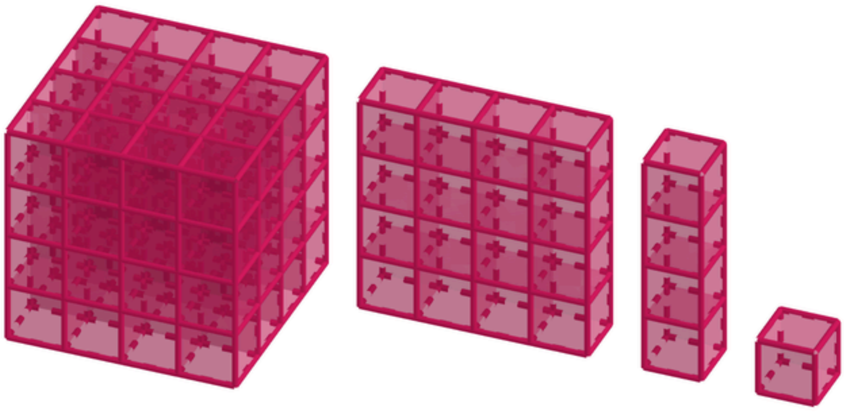
4 GEOMETRIA ESPACIAL

4.1 VOLUME

Segundo Lima (2011) uma idéia intuitiva de volume de um sólido geométrico é a quantidade de espaço por ele ocupada. Estamos interessados em medir a grandeza "volume" iremos comparar a uma unidade. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume. Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume, por definição, será igual a 1. Veja a ilustração abaixo:

link da construção: https://www.geogebra.org/3d/ed4ndzxc

Figura 6 - Volume



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4.1.1 UNIDADE DE VOLUME

Quadro 4 - Grandezas de Volume

Grandezas	Símbolo
Quilômetro Cúbico	Km^3
Hectômetro Cúbico	hm^3
Decâmetro Cúbico	dam^3
Metro Cúbico	m^3
Decímetro Cúbico	dm^3
Centímetro Cúbico	cm^3
Milímetro Cúbico	mm^3

Fonte - Elaborada pelo Autor (2025)

4.1.2 UNIDADE DE CAPACIDADE

Quadro 5 - Grandezas de capacidade

Grandezas	Símbolo
Quilolitro	Kl
Hectolitro	hl
Decalitro	dal
Litro	L
Decilitro	dl
Centilitro	cl
Mililitro	ml

Fonte - Elaborada pelo Autor 2025

4.1.3 CONVENÇÃO

Quadro 6 - Convenção

$1\ m^3 = 1000\ L$
$1\ cm^3 = 1\ mL$
$1\ dm^3 = 1\ L$

Fonte - Elaborada pelo Autor (2025)

5 UTILIZANDO O GEOGEBRA

5.1 CONSTRUINDO PONTOS NO GEOGEBRA

O ponto é o objeto geométrico mais básico e serve como referência para construir qualquer outra figura.

No GeoGebra, podemos criar pontos de diferentes maneiras: clicando na área gráfica, digitando coordenadas ou fixando-os em retas, circunferências e polígonos

5.1.1 CRIANDO PONTOS LIVREMENTE

1. Selecione a ferramenta Ponto (ícone do pontinho azul).

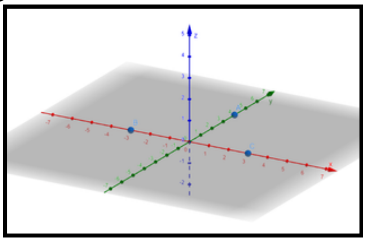
Figura 7 - Criando Pontos Livres

Fonte: Construido pelo Autor (2025)

2. Depois de analisar o ambiente virtual e explorar a movimentação no plano 3D, escolha um ponto no plano e clique sobre ele

3. O ponto criado aparecerá automaticamente com uma letra (A,B,C...)

Figura 8- Criando Pontos Livres



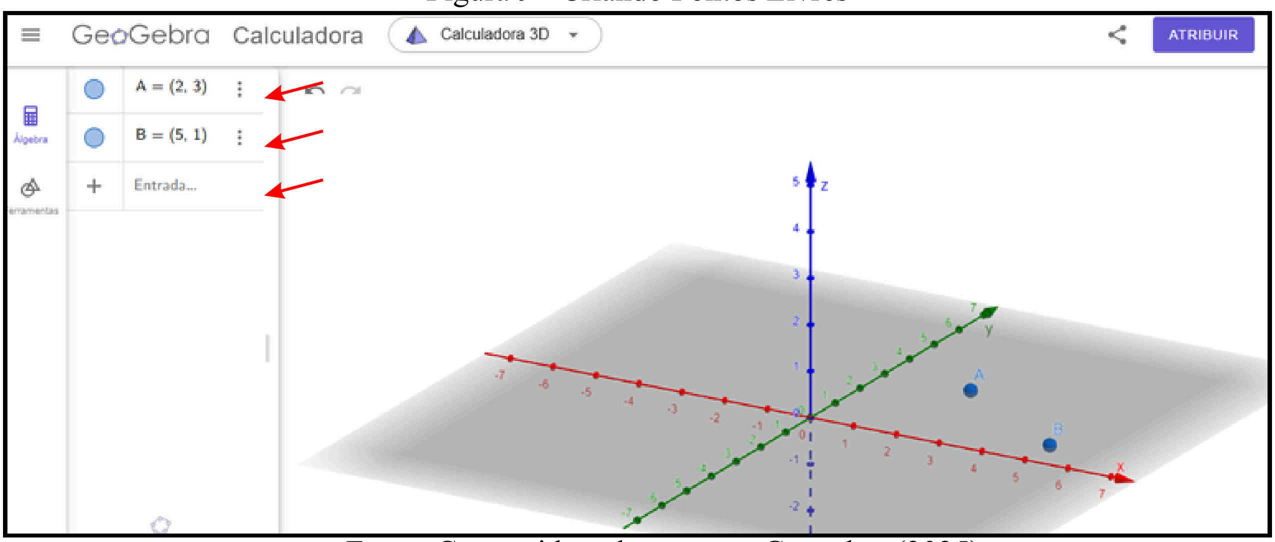
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5.1.2 CRIANDO PONTOS POR COORDENADAS

1.Vá até a Caixa de Entrada (embaixo da tela).

2.Digite a coordenada entre parênteses.

Figura 9 - Criando Pontos Livres

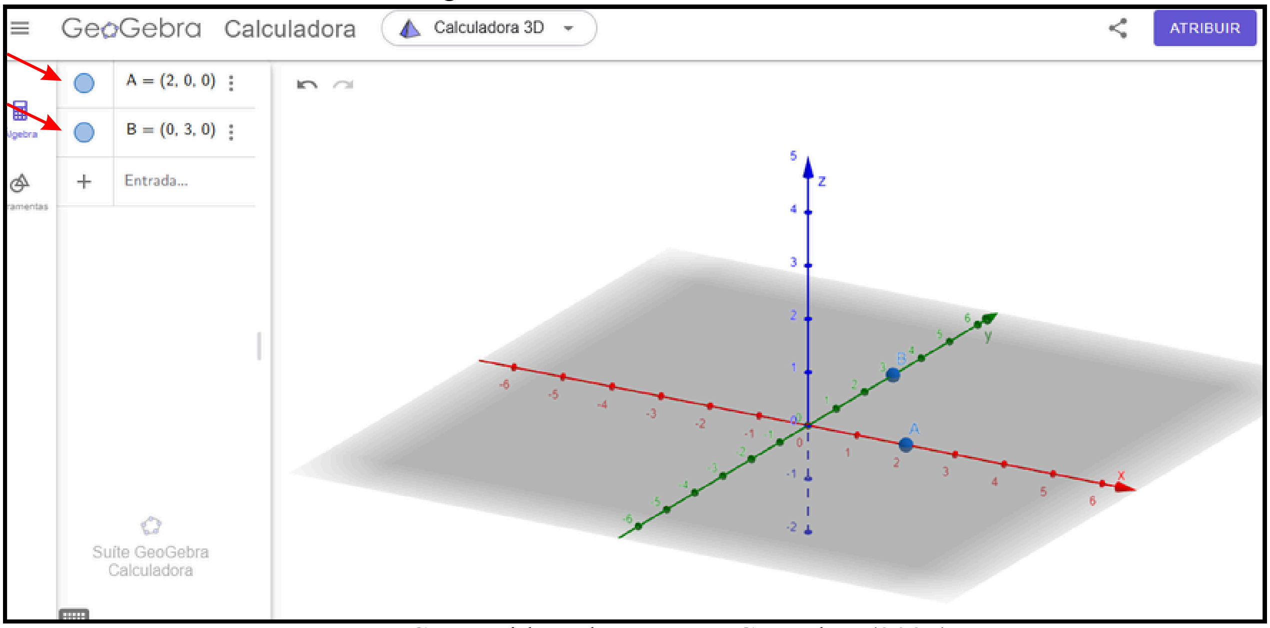


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4.Pressione Enter.
5.O GeoGebra vai criar os pontos exatamente nessas posições no plano cartesiano.

Exemplo: o ponto A ficará no eixo x = 2 e y = 3.

Figura 10 - Criando Pontos Livres



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após essa explicação sobre como criar pontos no GeoGebra e compreender o funcionamento do ambiente 3D, iniciaremos a construção dos polígonos.

6 PRISMA TRIANGULAR

6.1 INTRODUÇÃO

O prisma triangular é formado por duas bases triangulares congruentes e três faces laterais retangulares.

Ele é o prisma mais simples, pois tem a menor quantidade possível de faces em um prisma.

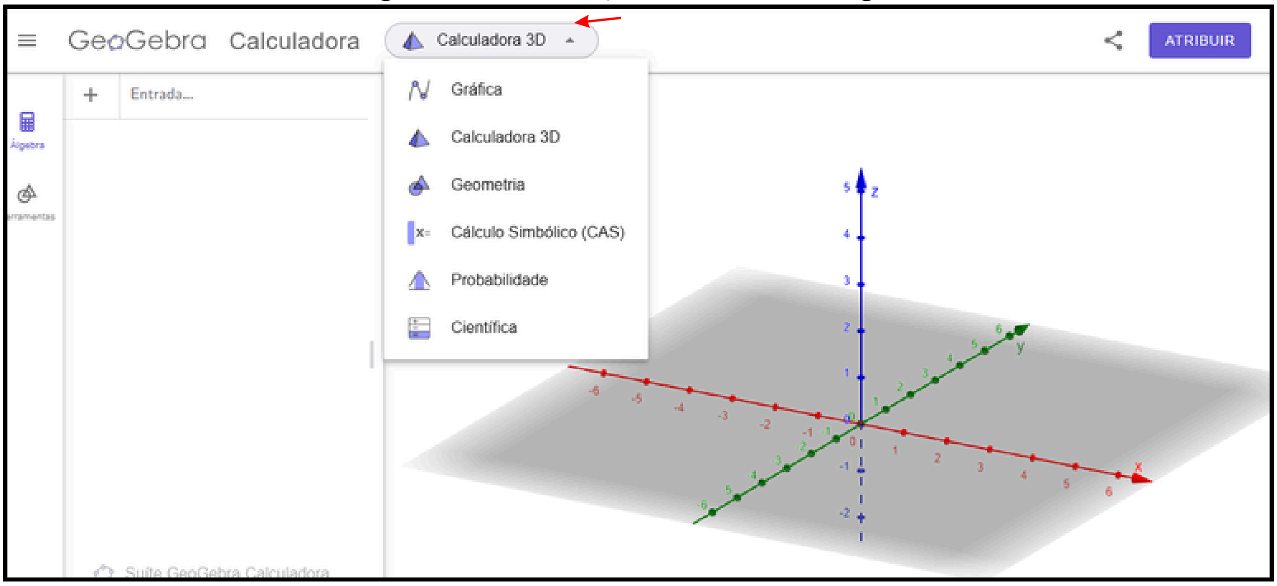
É comum em estruturas de telhados, tripés e suportes metálicos.

Elementos: 5 faces, 9 arestas e 6 vértices.

6.2 CONSTRUÇÃO DO PRISMA

1.Calculadora 3D

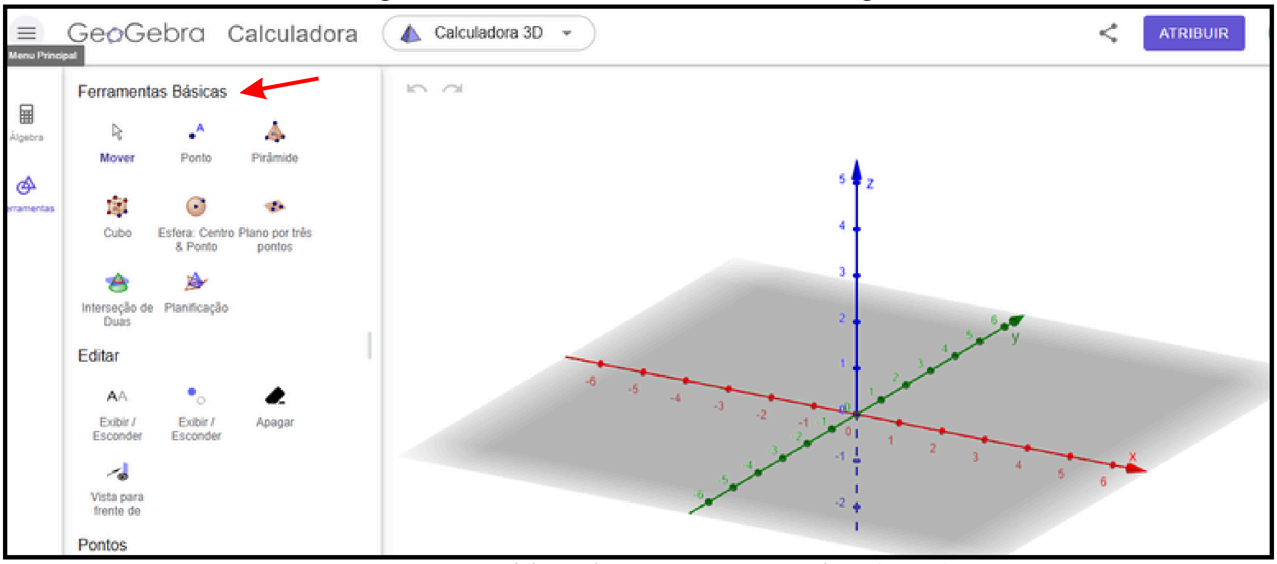
Figura 11 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2.Ferramentas básicas

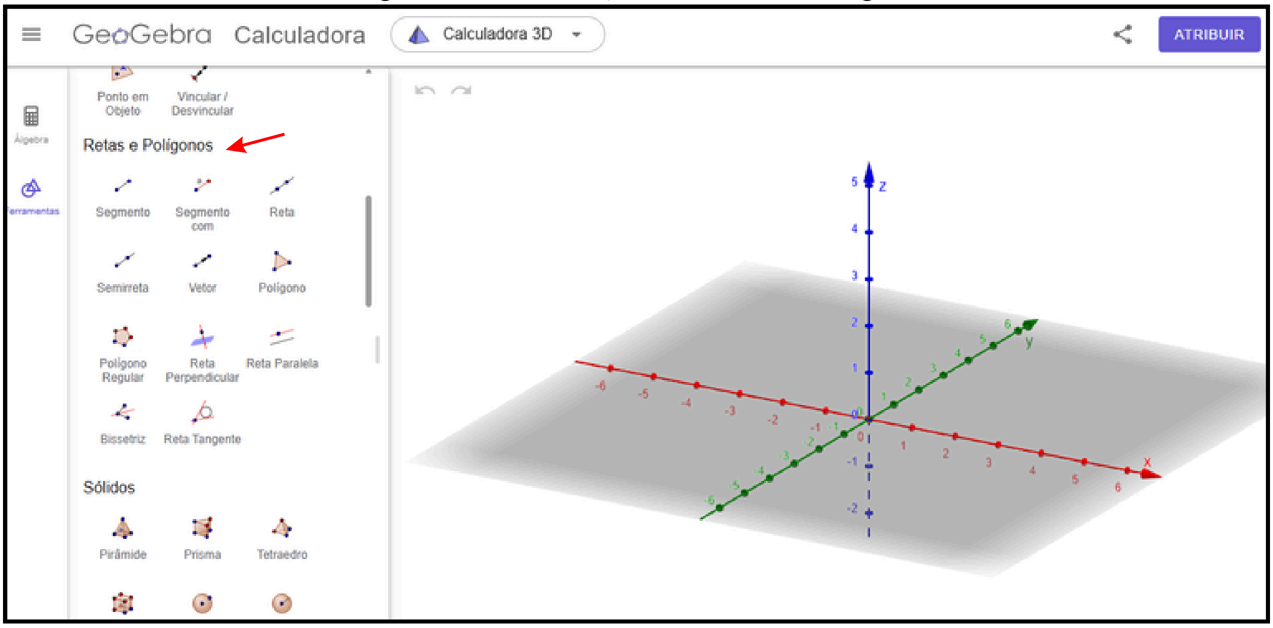
Figura 12 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Retas e Polígonos

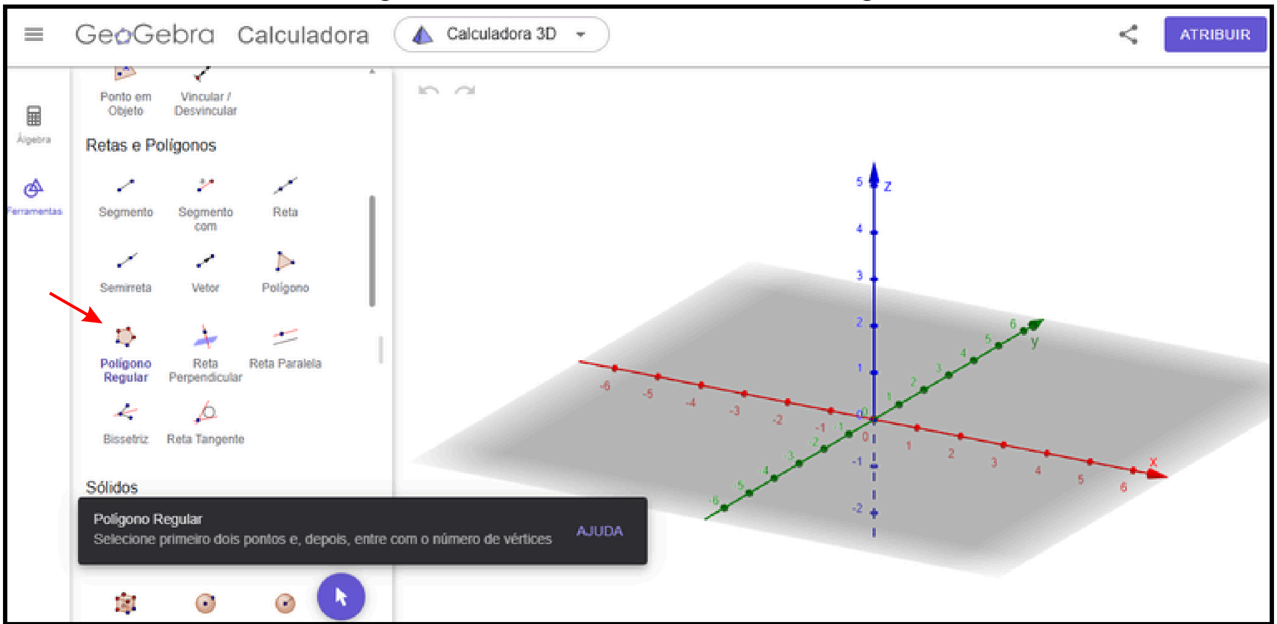
Figura 13 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4.Polígono regular

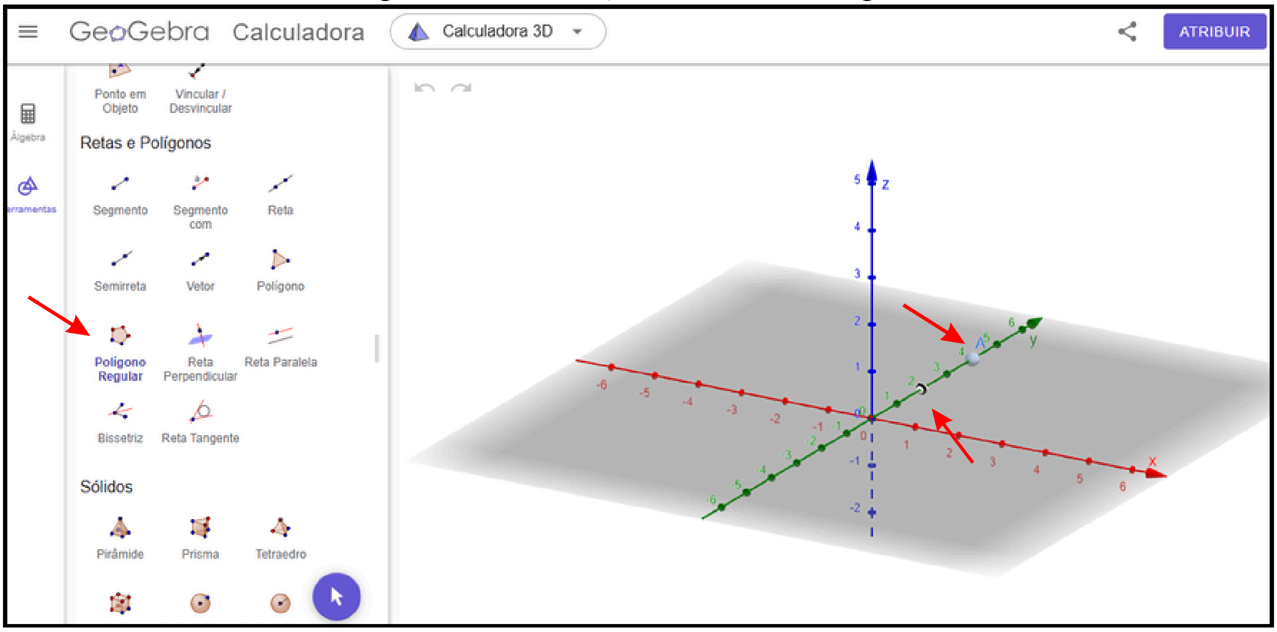
Figura 14 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5.Selecione com mouse dois pontos.

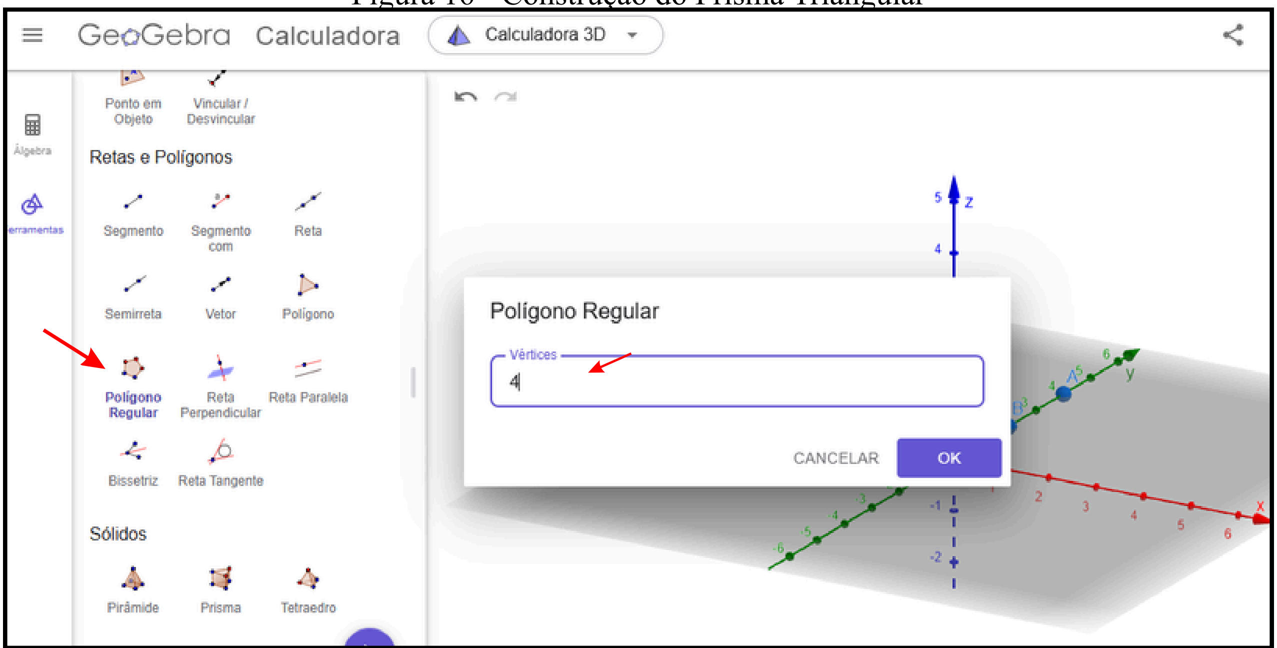
Figura 15 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.Depois escolha o número de vértices.

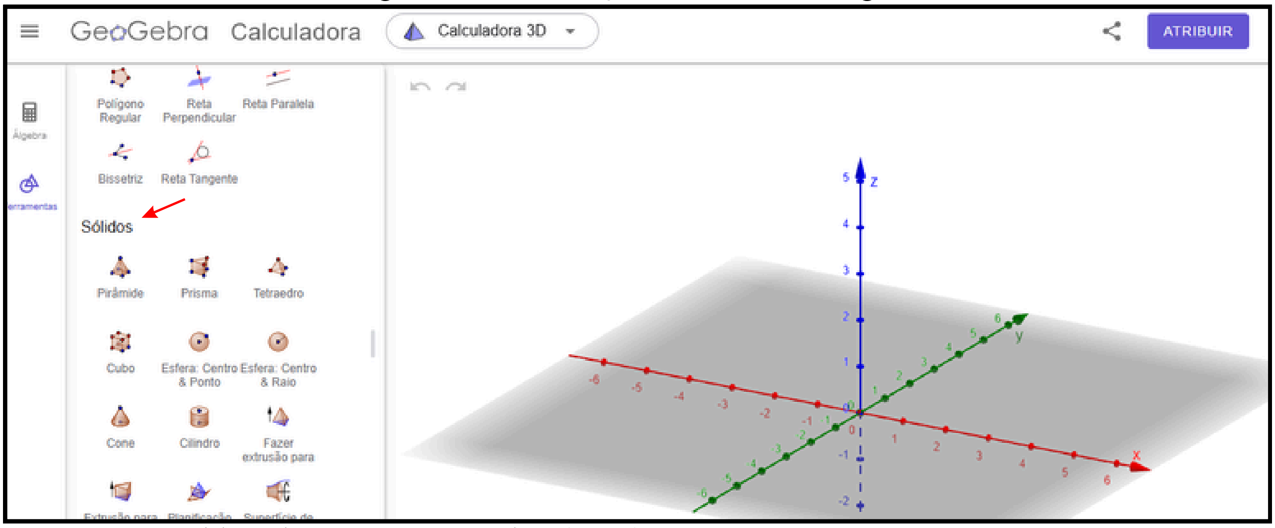
Figura 16 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.Sólidos

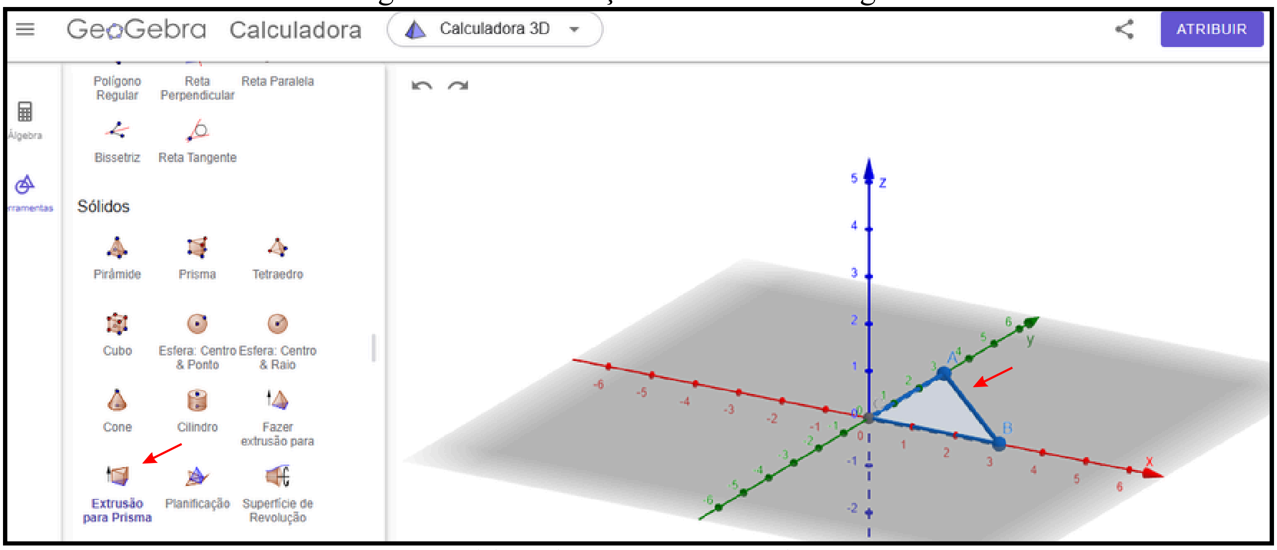
Figura 17 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

8.Extrusão para Prisma

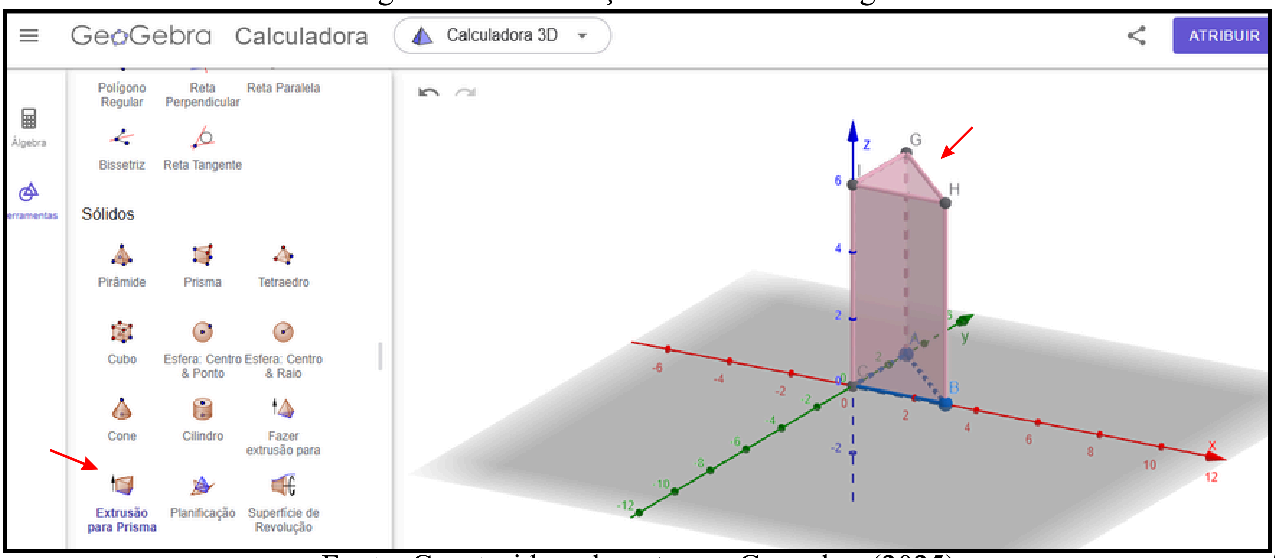
Figura 18 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

9.Selecione o polígono especifique a altura.

Figura 19 - Construção do Prisma Triangular

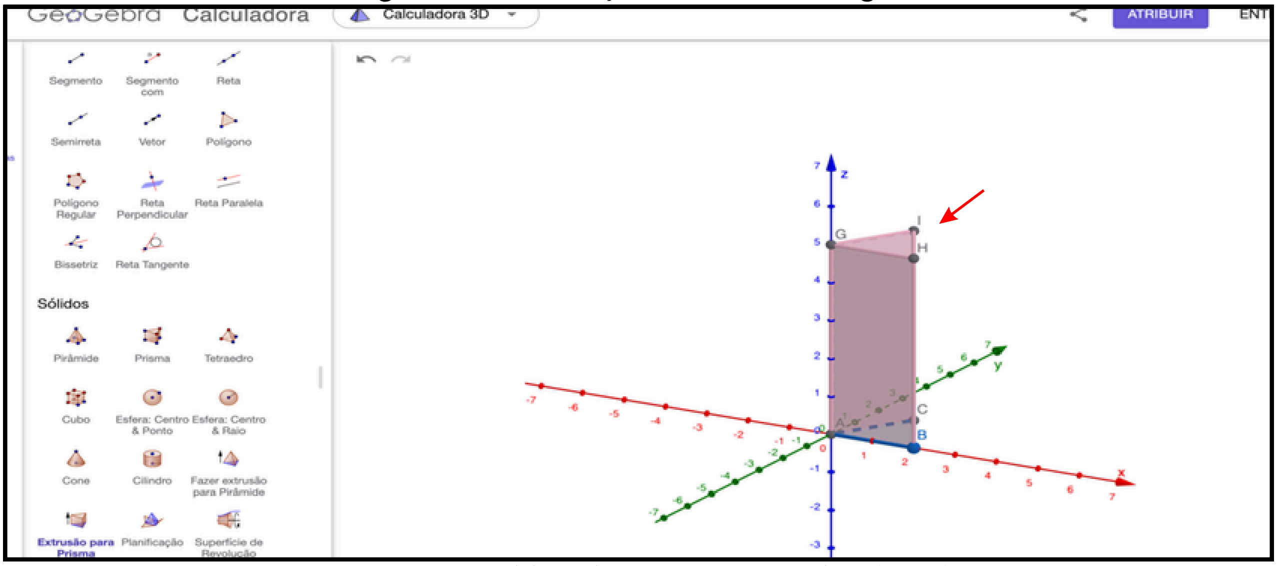


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.3 EXEMPLO DE PRISMA TRIANGULAR

1) Construa um prisma triangular, com base um triângulo equilátero de lado 2 cm e altura 5 cm. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

Figura 20 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Cálculo da Área da Base:

Mova para para a esquerda ou direita para visualizar o polígono no plano 3D.

6.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

L : *Lado da base*

A_b : *Area da base*

h_b : *Altura da base*

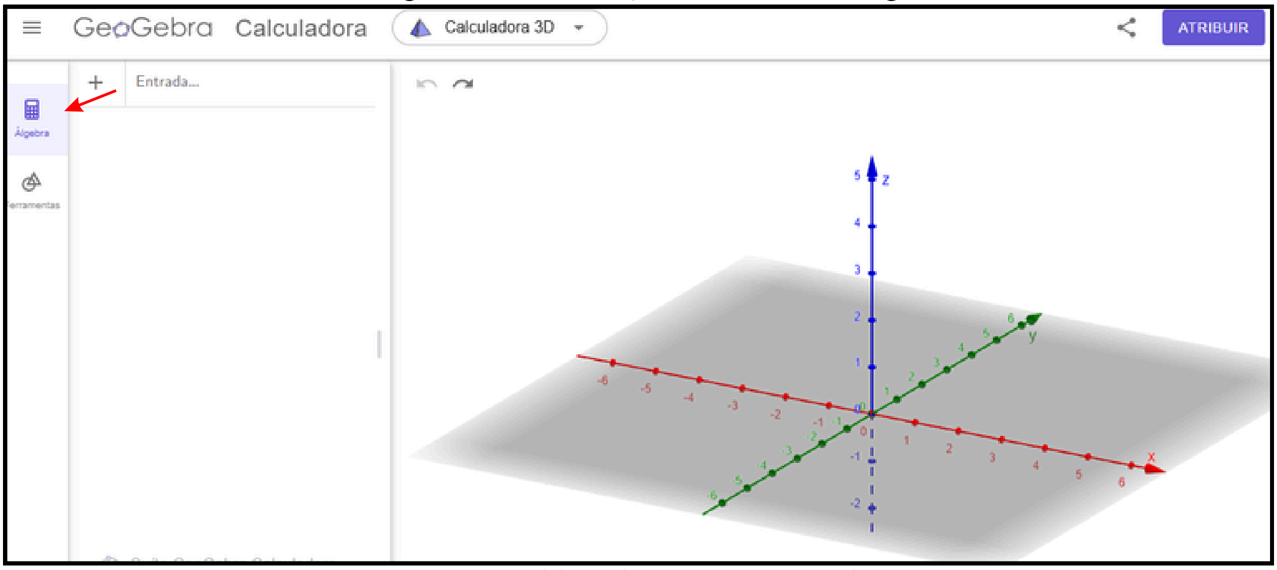
Em fórmulas:

$$A_b = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{L \cdot h_b}{2}$$

Agora vamos na parte superior da pagina do geogebra e vamos selecionar a opção de álgebra.

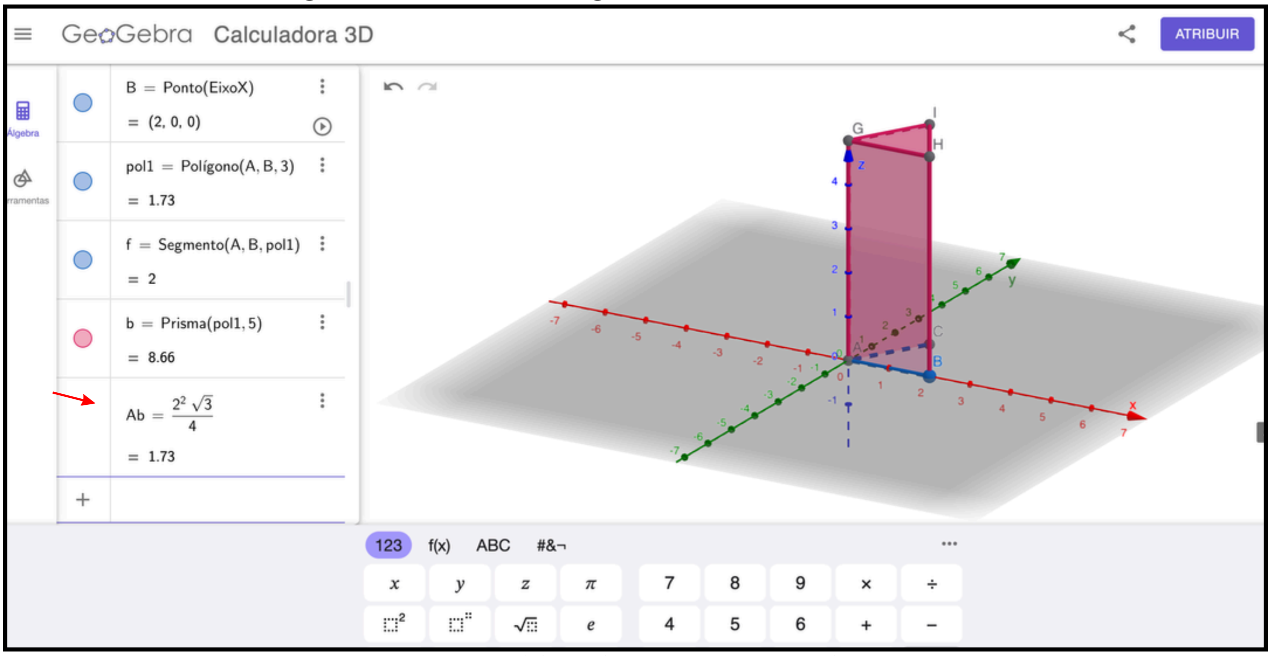
Figura 21 - Construção do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após isso vamos para o teclado do geogebra, aonde vamos colocar as formulas para calcular a área da base desse poligono.

Figura 22 - Prisma Triangular, Cálculo de Área da Base.



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após calculamos a **área da base**, vamos agora calcular a **área lateral** desse sólido

6.5 ÁREA LATERAL

Legendas:

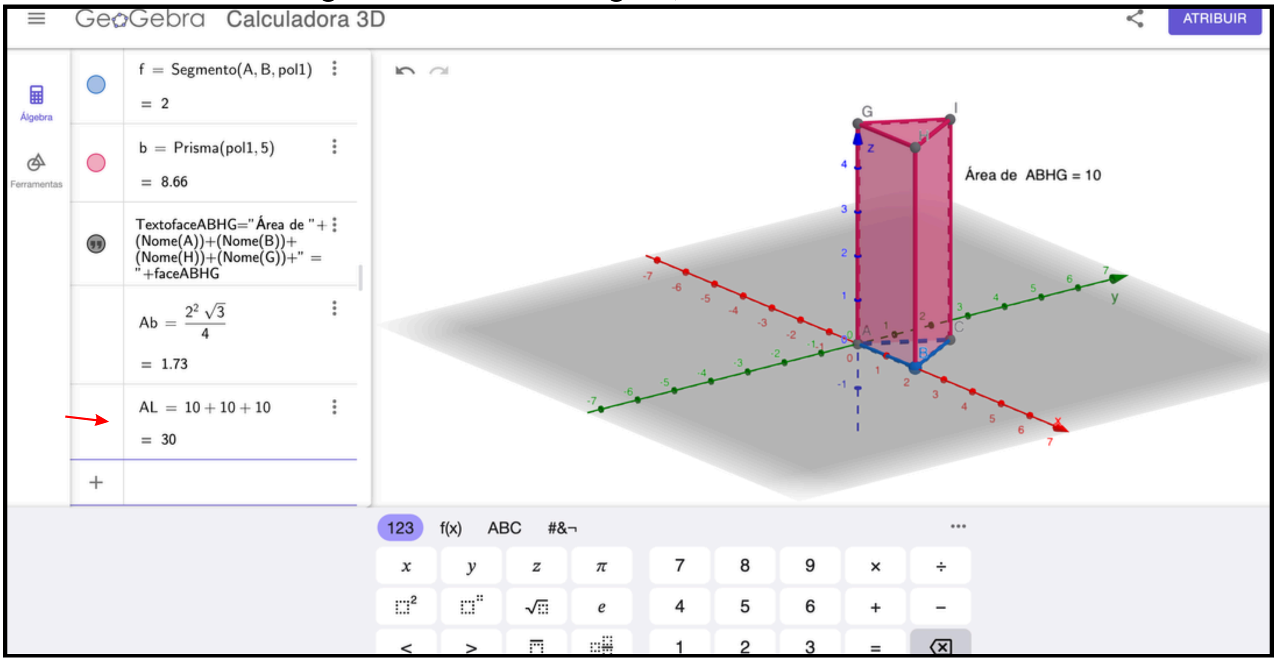
$$L:\ Lado$$
$$h_f:\ Altura\ da\ face$$
$$A_f:\ Area\ da\ face$$
$$A_L:\ Area\ \ Lateral$$

Em fórmulas:

$$A_f = L \cdot h_f$$
$$A_L = 3 \cdot A_f$$

Após isso vamos para o teclado do GeoGebra, aonde vamos colocar a formula para calcular a área lateral.

Figura 23 - Prisma Triangular, Cálculo de Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.6 ÁREA TOTAL

Agora usando Álgebra e teclados vamos calcular a Área Total desse Polígono.

Legendas:

$A_b: \ Area \ da \ base$

$A_L: \ Area \ \ Lateral$

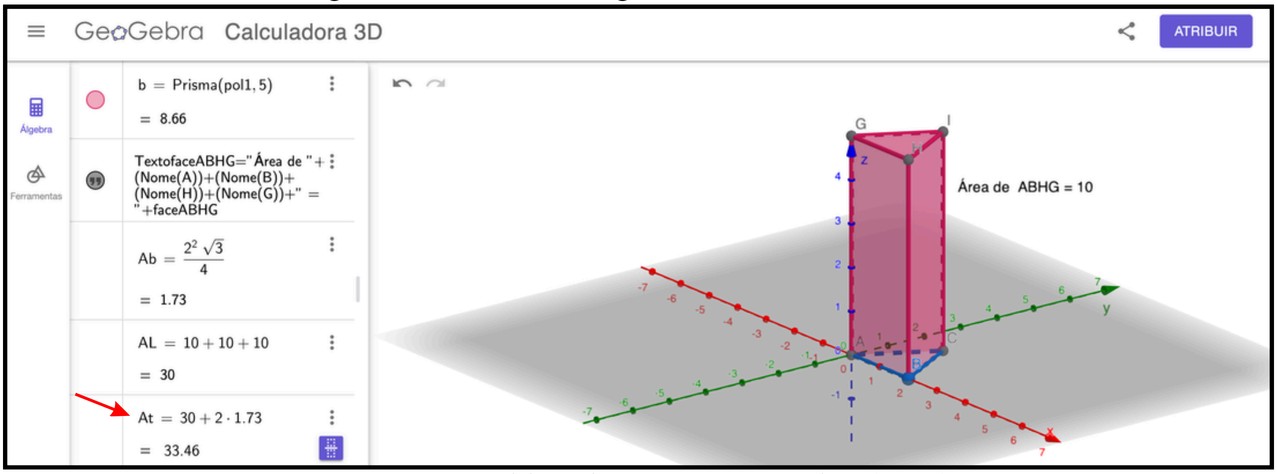
Legendas:

$A_T: \ Area \ \ Total$

Em fórmulas:

$A_T = A_L + 2A_b$

Figura 24 - Prisma Triangular, Cálculo de Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após isso, vamos agora calcular o volume desse solido.

6.7 VOLUME

Legendas:

$A_b: \ Area \ da \ base$

$h: \ altura$

Legendas:

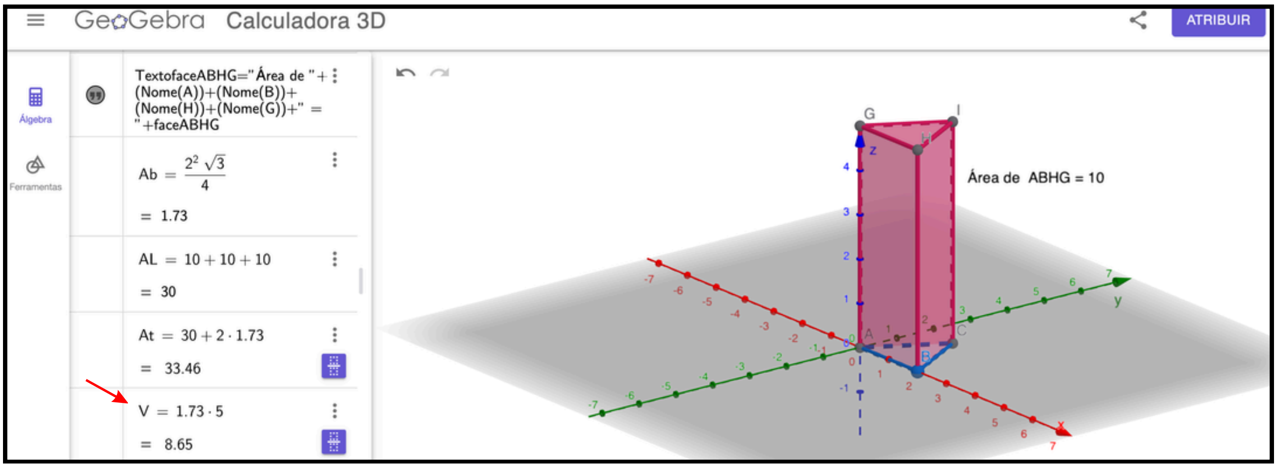
$V: \ volume$

Em fórmulas:

$V = A_b \cdot h$

Após isso vamos para o teclado do geogebra, aonde vamos colocar a formula para calcular o volume desse poligono.

Figura 25 - Prisma Triangular, Cálculo de Volume

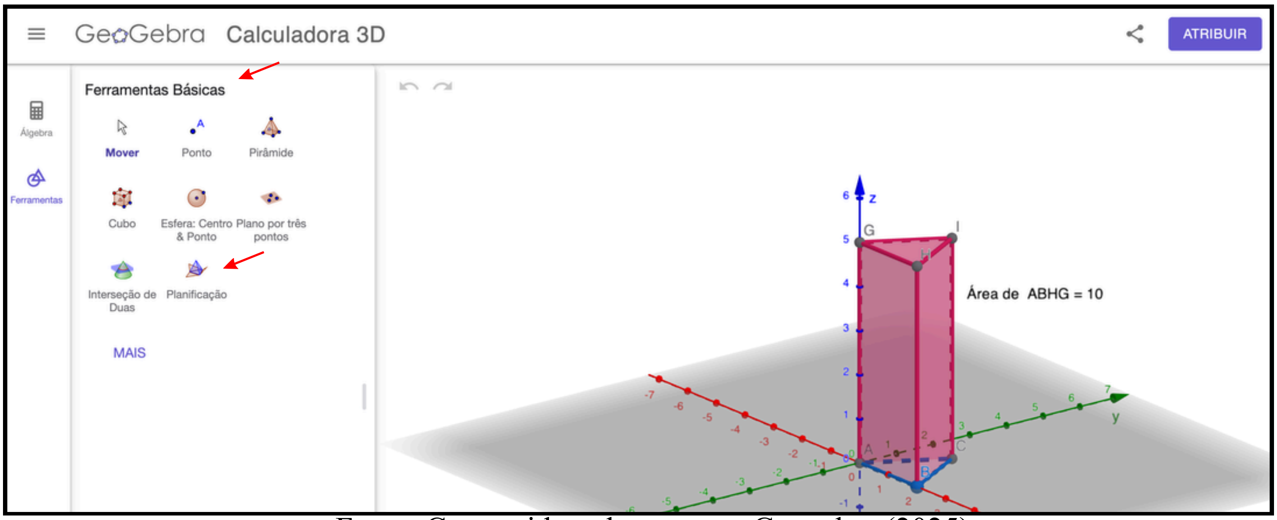


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.8 PLANIFICAÇÃO DO SOLÍDO

Primeiramente vamos em calculadora 3D, Após isso vamos em ferramentas básicas e clique em planificação.

Figura 26 - Construção da Planificação do Prisma Triangular



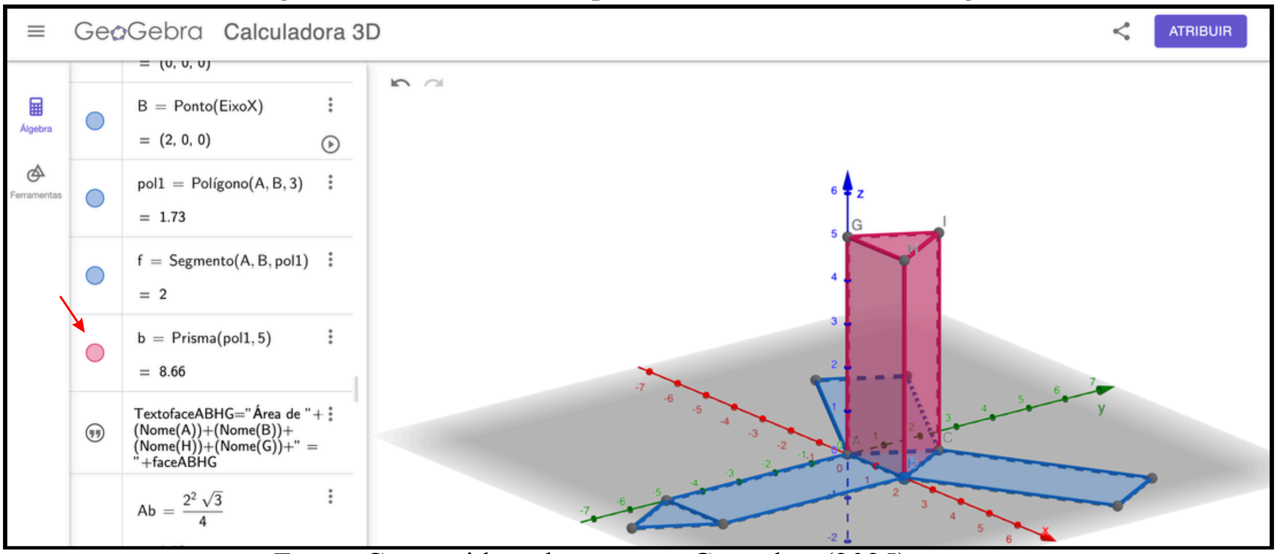
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após ter selecionado, vamos retirar o poligono para ter uma melhor visualização.

2. vamos para a parte de Álgebra

3. Agora vamos clicar em prisma para retirar o polígono

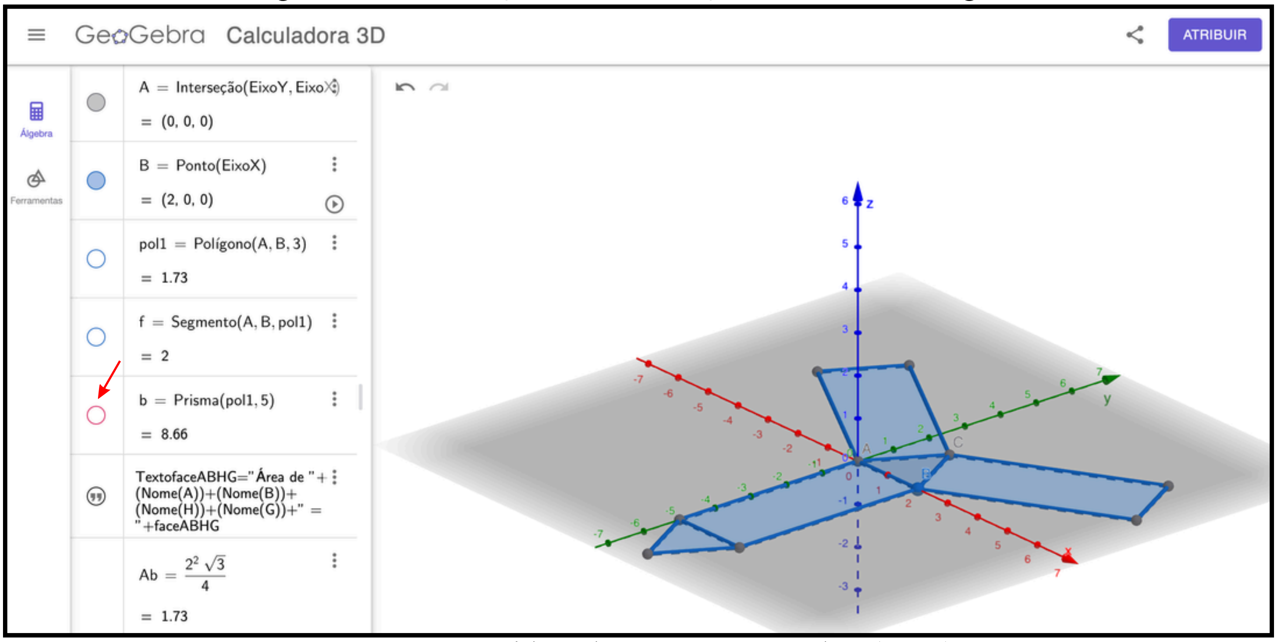
Figura 27 - Construção da planificação do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5. Agora vamos no icone do lado direito a cima para retirar alguns itens da tela.

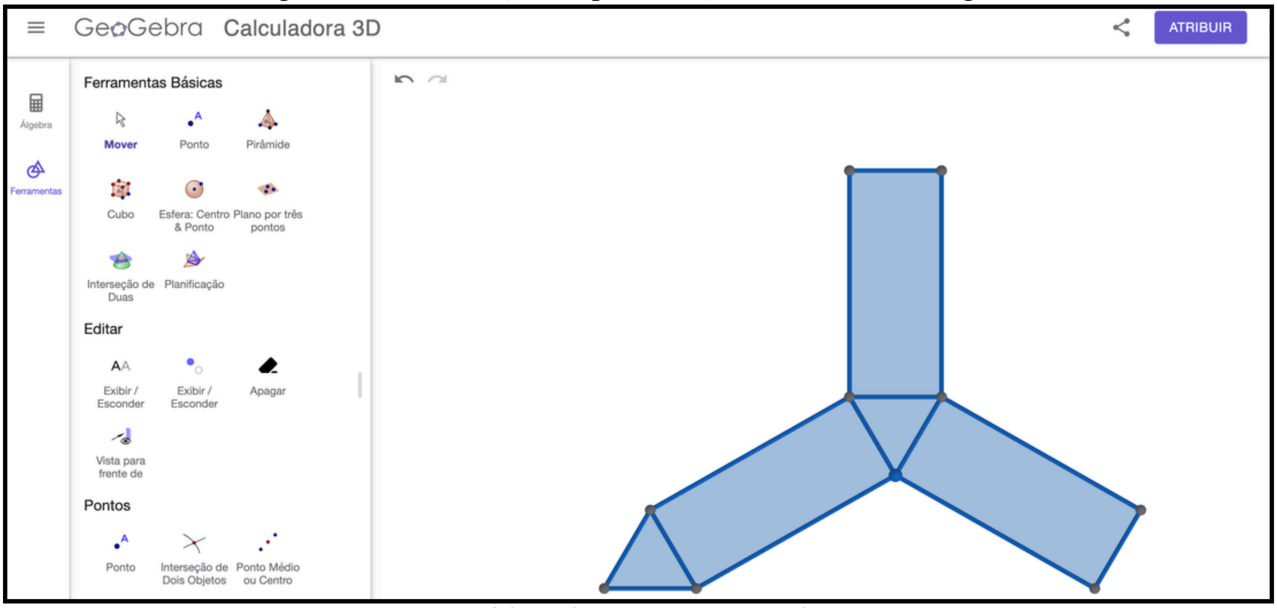
Figura 28 - Construção da Planificação do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

A planificação permite visualizar cada uma das faces do sólido de forma aberta no plano, facilitando a compreensão de sua estrutura e ajudando no cálculo de áreas e outras propriedades geométricas.

Figura 29 - Construção da planificação do Prisma Triangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/pnqecqpk

PRISMA TRIANGULAR

7 CUBO

7.1 INTRODUÇÃO

O cubo é um caso especial de prisma — o prisma quadrado regular — em que todas as arestas, ângulos e faces são iguais.

É um dos Sólidos de Platão, associado ao elemento “terra” por sua estabilidade.

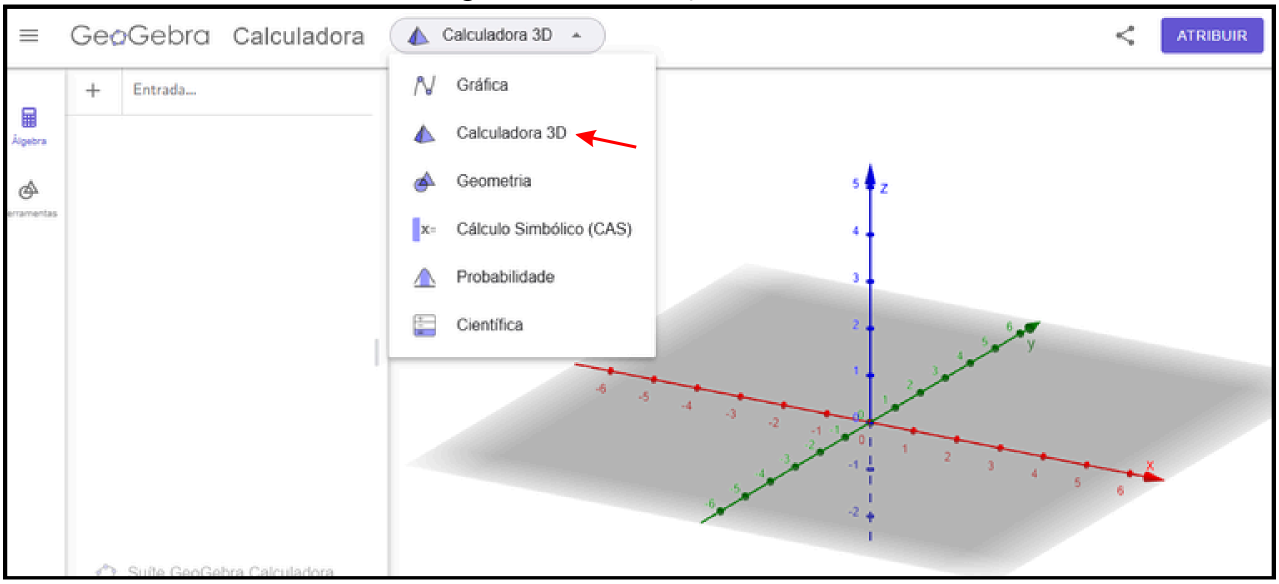
É amplamente aplicado em embalagens, caixas, blocos e no estudo de volumes.

Elementos: 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

7.2 CONSTRUÇÃO DO CUBO

1. Primeiramente vamos na calculadora 3D

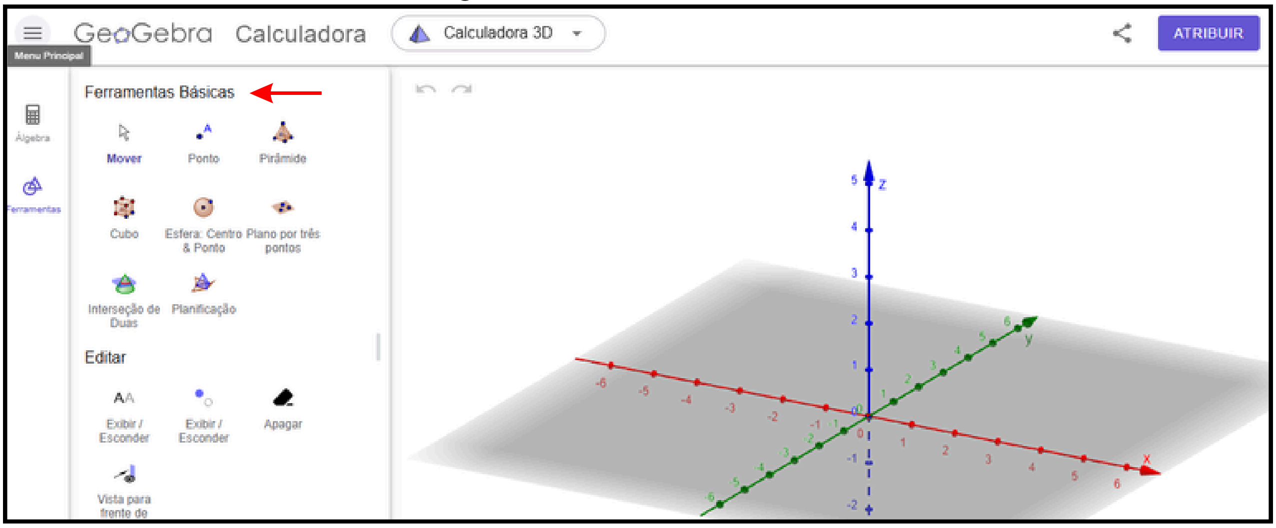
Figura 30 - Construção do Cubo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2. Ferramentas básicas

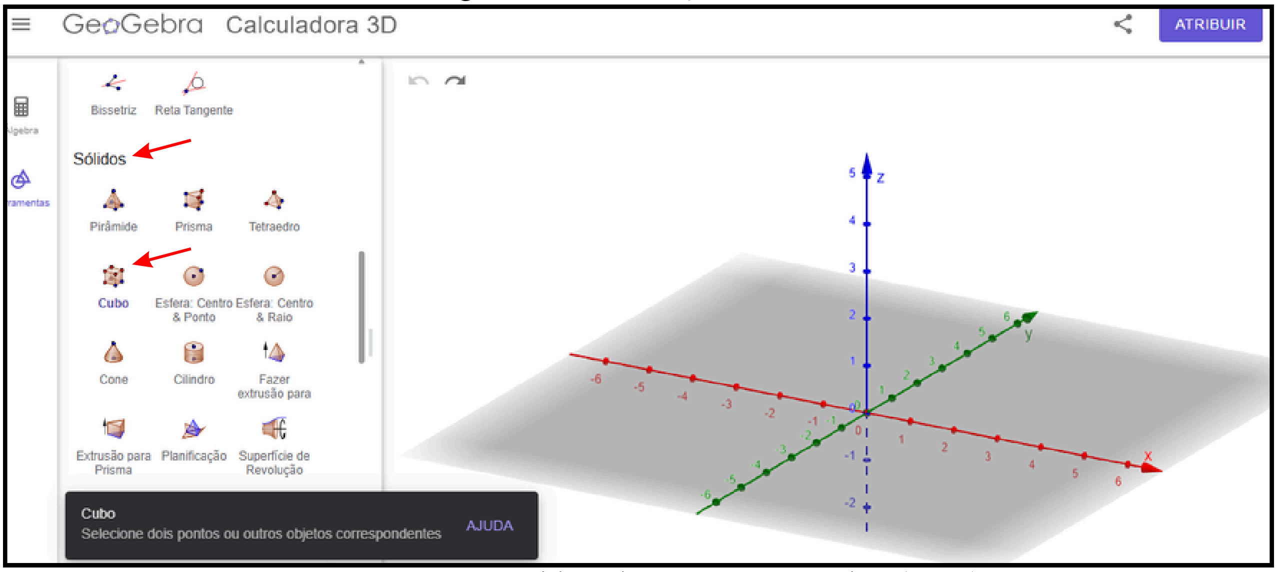
Figura 31 - Construção do Cubo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Sólidos

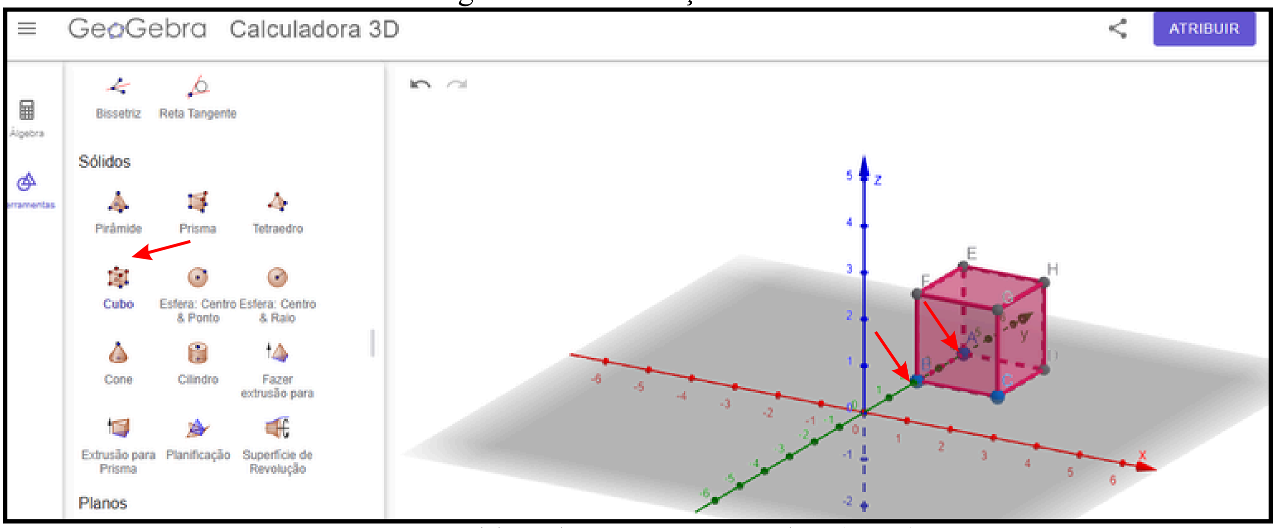
Figura 32 - Construção do Cubo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4. Depois disso, escolha dois pontos no eixo x ou z

Figura 33 - Construção do Cubo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.3 EXEMPLO DO CUBO

1)Construa um cubo, com a aresta 4. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

7.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

$a: \ aresta$

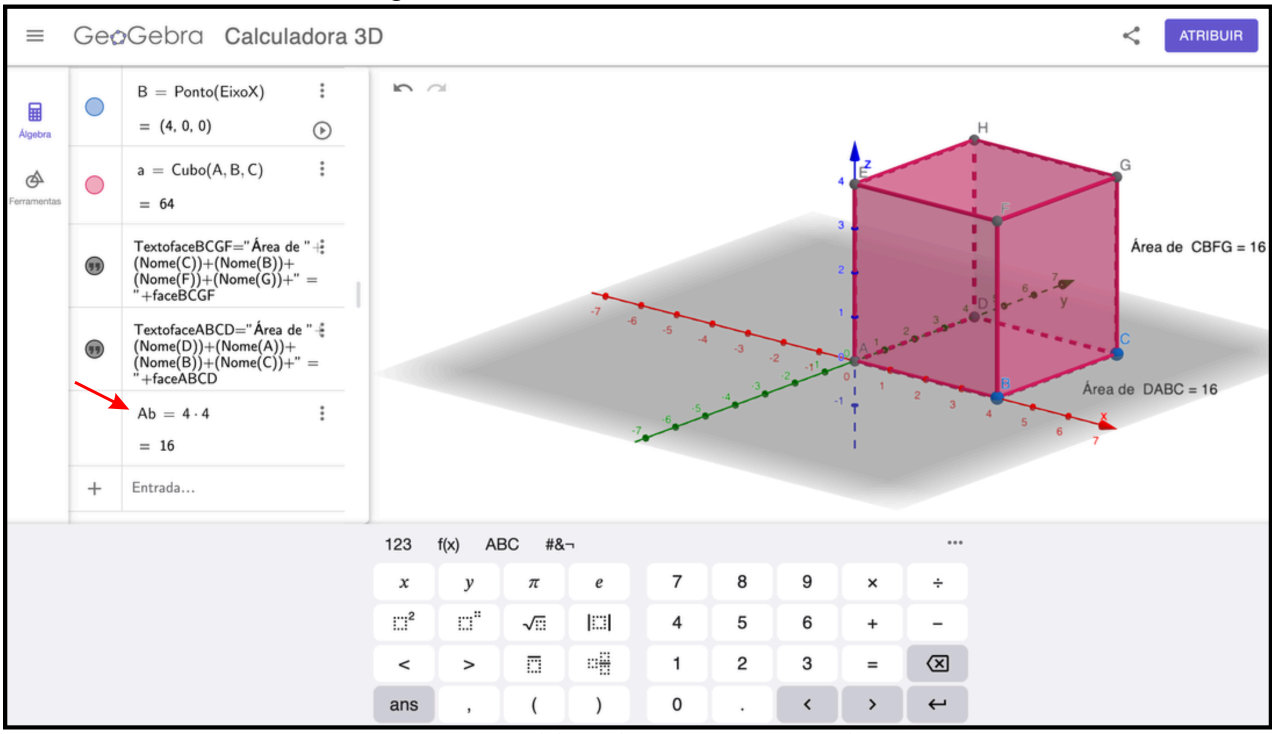
$A_b: \ Area \ da \ base$

Fórmulas:

$$A_b = a \cdot a$$

$$A_b = a^2$$

Figura 34 - Cubo, Cálculo da Área da Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.5 ÁREA LATERAL

Legendas:

$a: \ aresta$

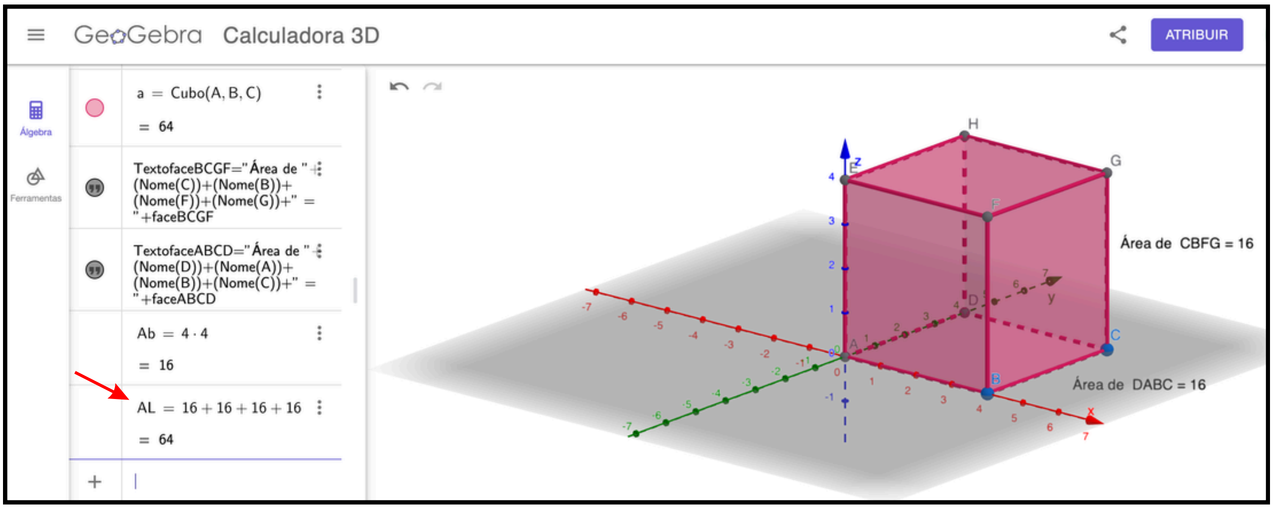
$A_L: \ Area \ \ Lateral$

Em fórmulas:

$$A_L = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$

$$A_L = 4a^2$$

Figura 35- Cubo, Cálculo da Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.6 ÁREA TOTAL

Legendas:

$a:\ aresta$

$A_b:\ Area\ da\ base$

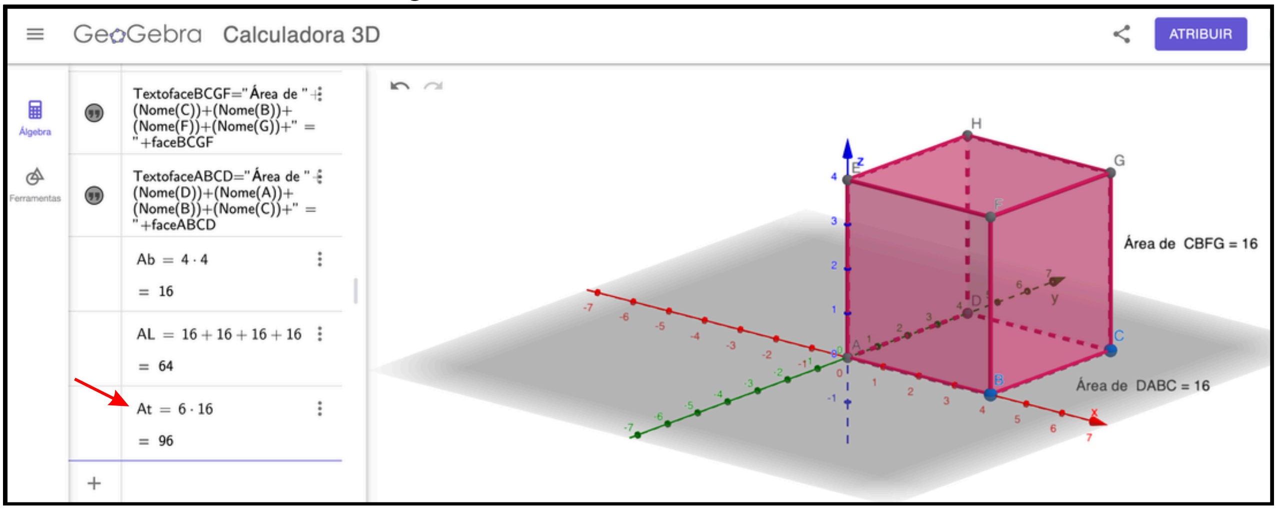
$A_L:\ Area\ \ Lateral$

$A_T:\ Area\ \ Total$

Em fórmulas:

$$A_L = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$
$$A_T = 6a^2$$
$$A_T = A_L + 2A_b$$

Figura 36 - Cubo, Cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.7 VOLUME

Legendas:

$A_b:\ Area\ da\ base$

$h:\ altura$

$a:\ aresta$

$V:\ volume$

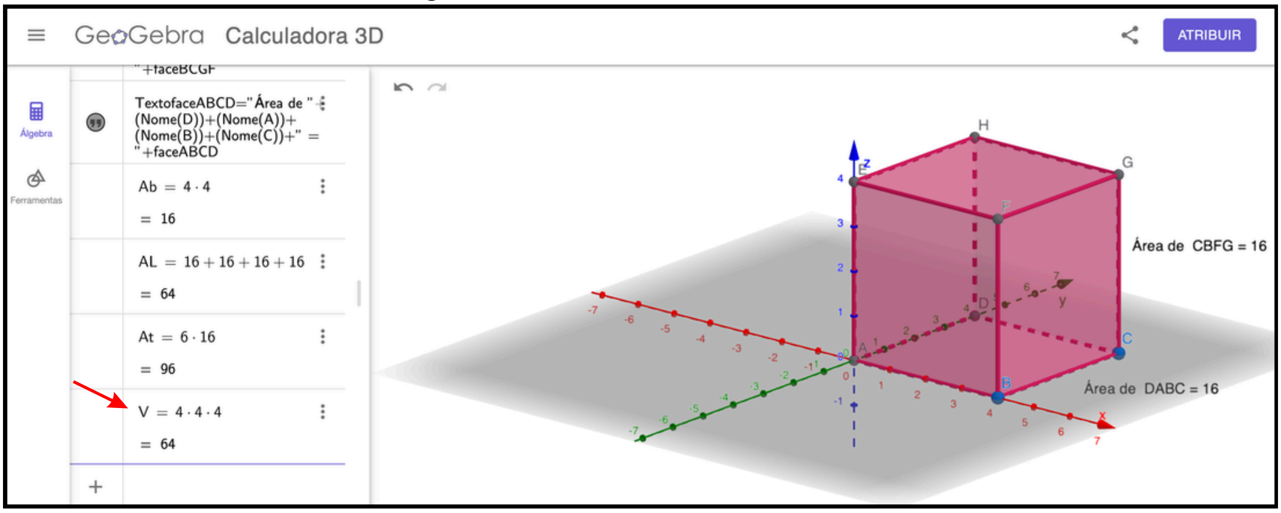
Em fórmulas:

$$V = a.a.a$$
$$V = a^3$$
$$V = A_b \cdot h_f$$

Observação:

No caso do Cubo, a medida da altura é igual a medida da aresta.

Figura 37 - Cubo, Cálculo do Volume



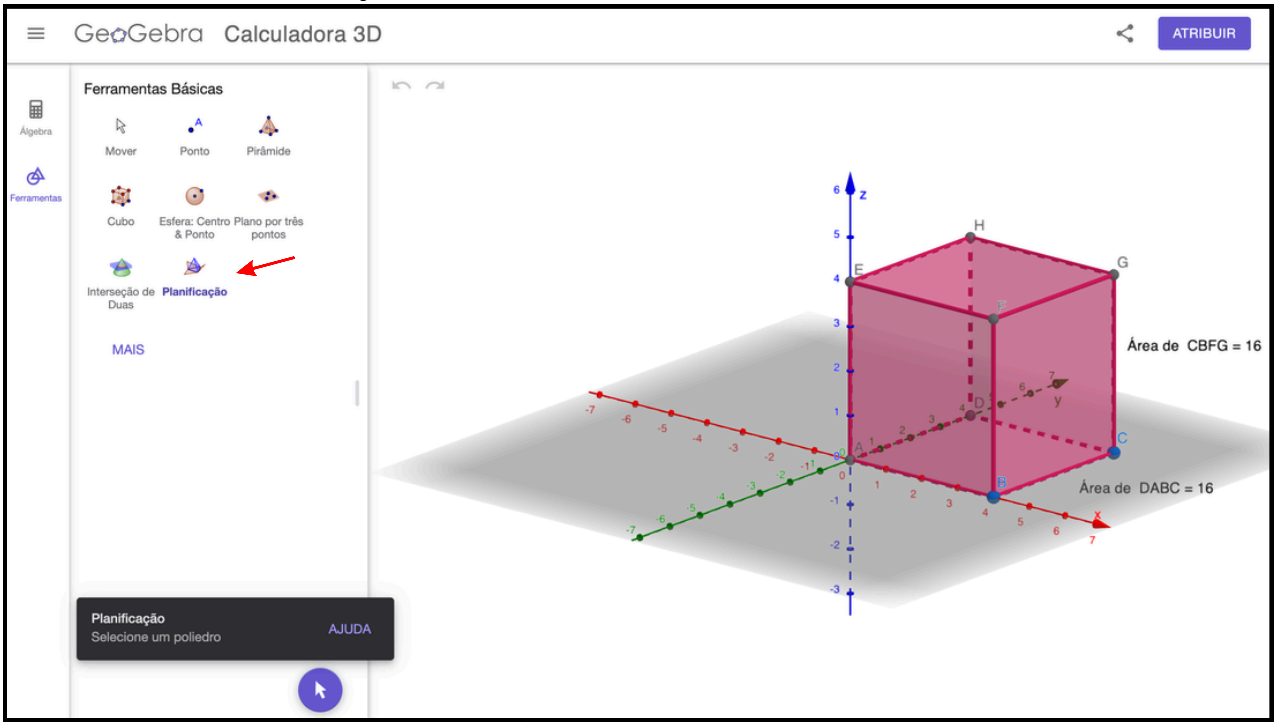
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

Agora, vamos aprender a construir a planificação desse polígono dentro do GeoGebra

Primeiramente vamos em calculadora 3D, Após isso vamos em ferramentas básicas e clique em planificação.

Figura 38 - Construção da Planificação do Cubo



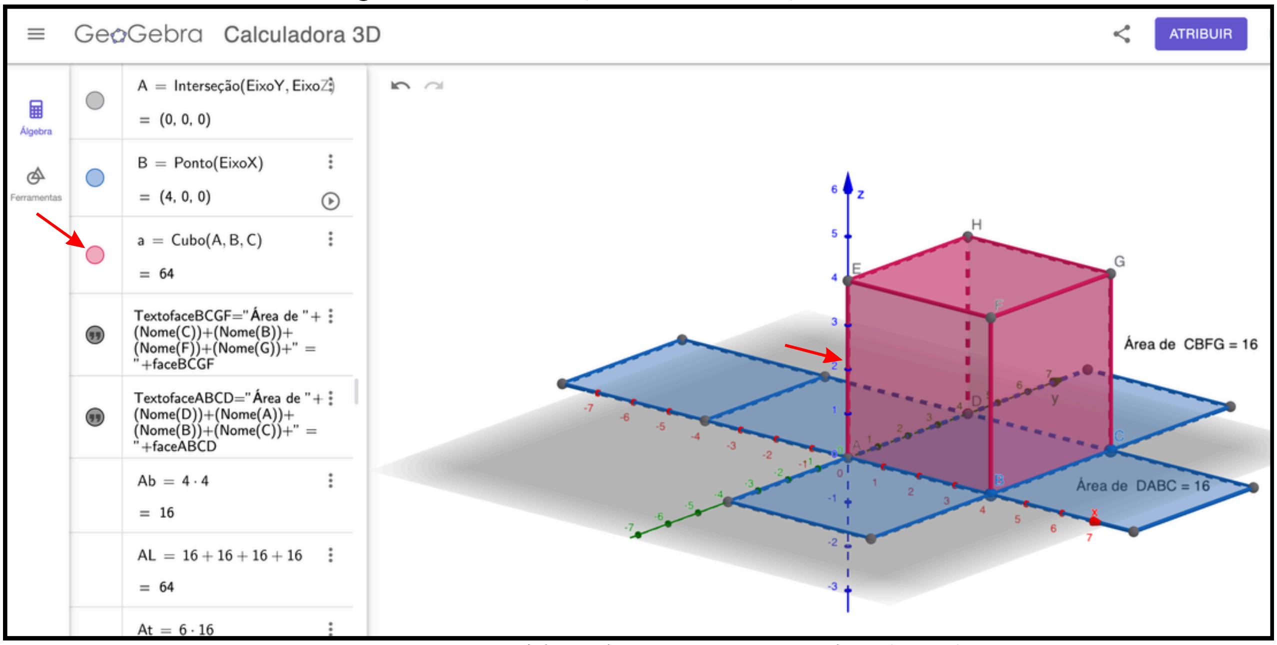
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após ter selecionado, vamos retirar o poligono para ter uma melhor visualização.

2. vamos para a parte de Álgebra

3.Agora vamos clicar em prisma para retirar o polígono

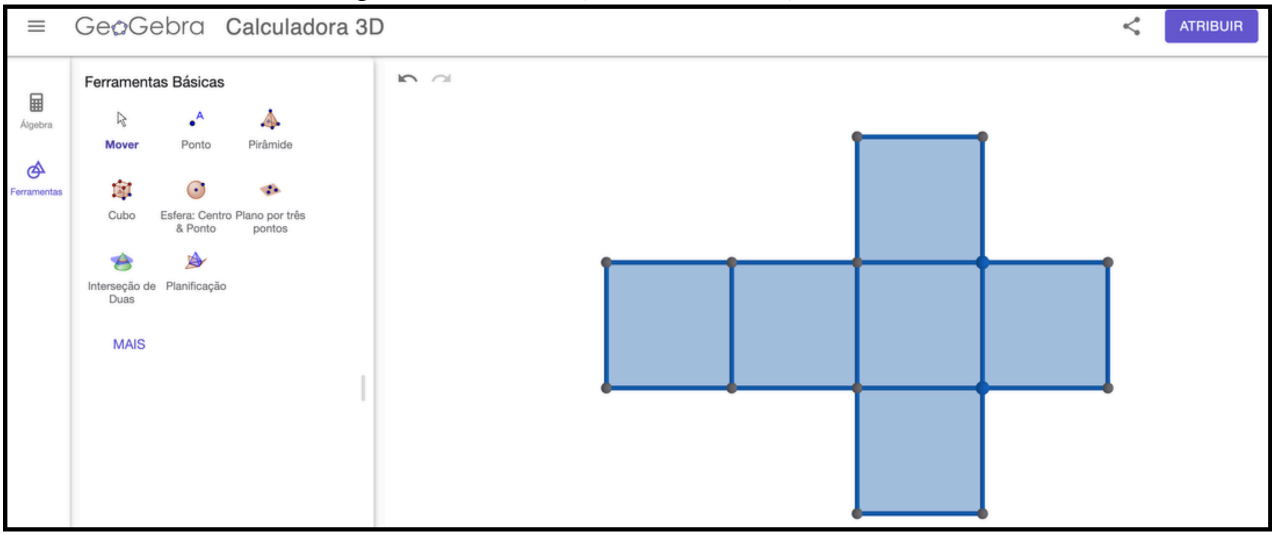
Figura 39 - Construção da Planificação do Cubo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5. Agora vamos no icone do lado direito a cima para retirar alguns itens da tela.

Figura 40 - Construção da Planificação do Cubo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo.

https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

CUBO

8 PRISMA HEXAGONAL

8.1 INTRODUÇÃO

O prisma hexagonal possui duas bases hexagonais e seis faces laterais retangulares.

Por ser regular, tem todas as arestas iguais e grande simetria.

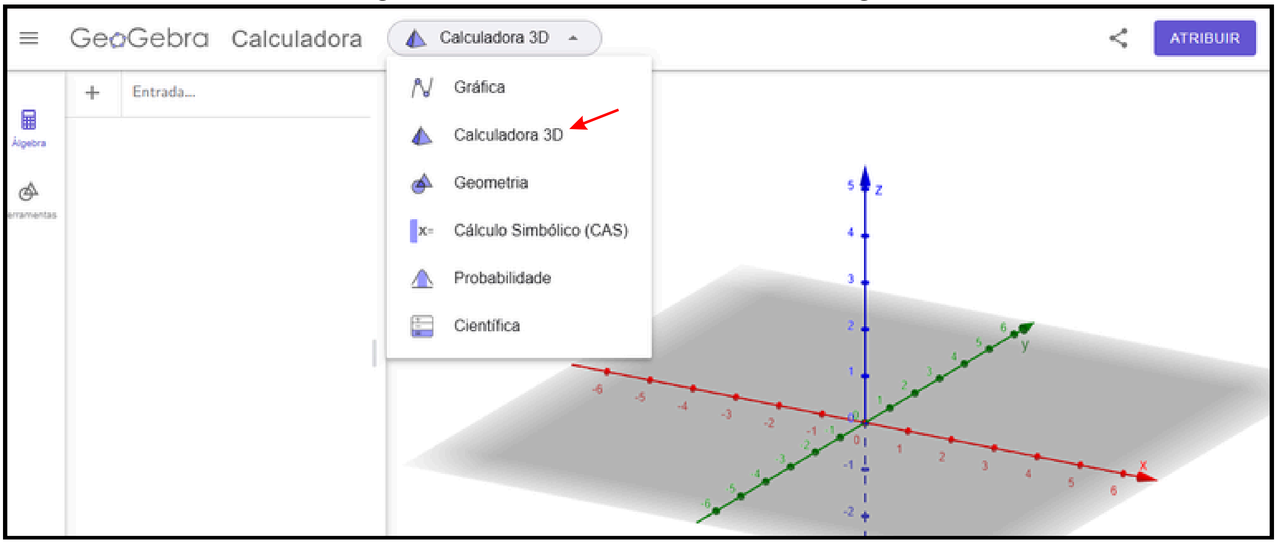
É amplamente usado em colunas, parafusos e nas colmeias de abelhas, que naturalmente formam hexágonos por eficiência de espaço.

Elementos: 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.

8.2 CONSTRUÇÃO DO PRISMA

1. Primeiramente vamos na calculadora 3D

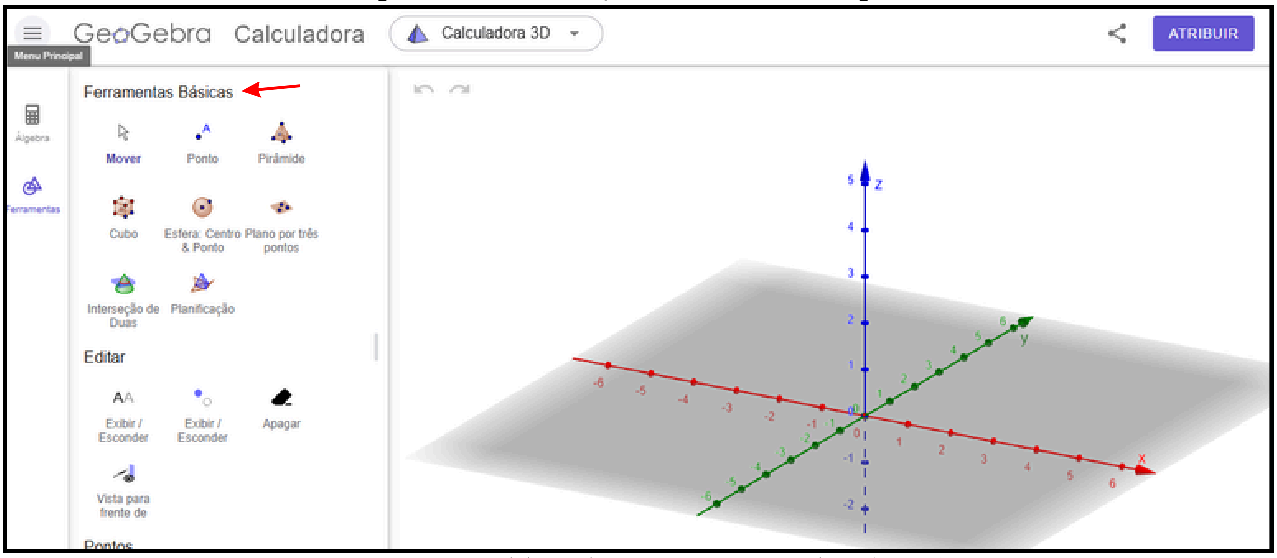
Figura 41 - Construção do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2. Ferramentas Basicas

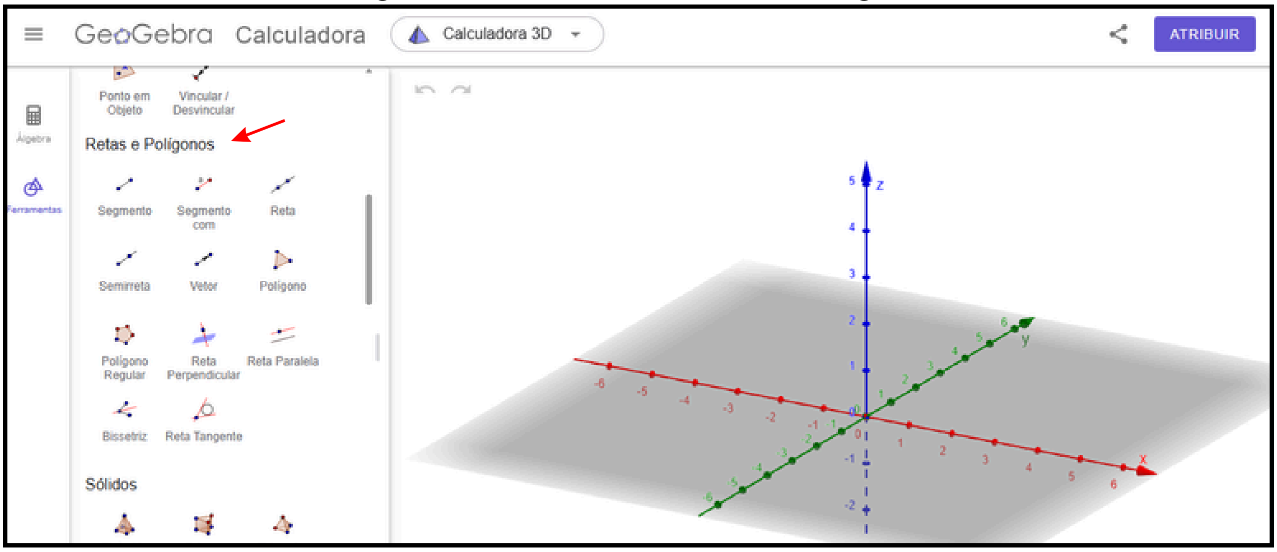
Figura 42 - Construção do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Retas e polígonos

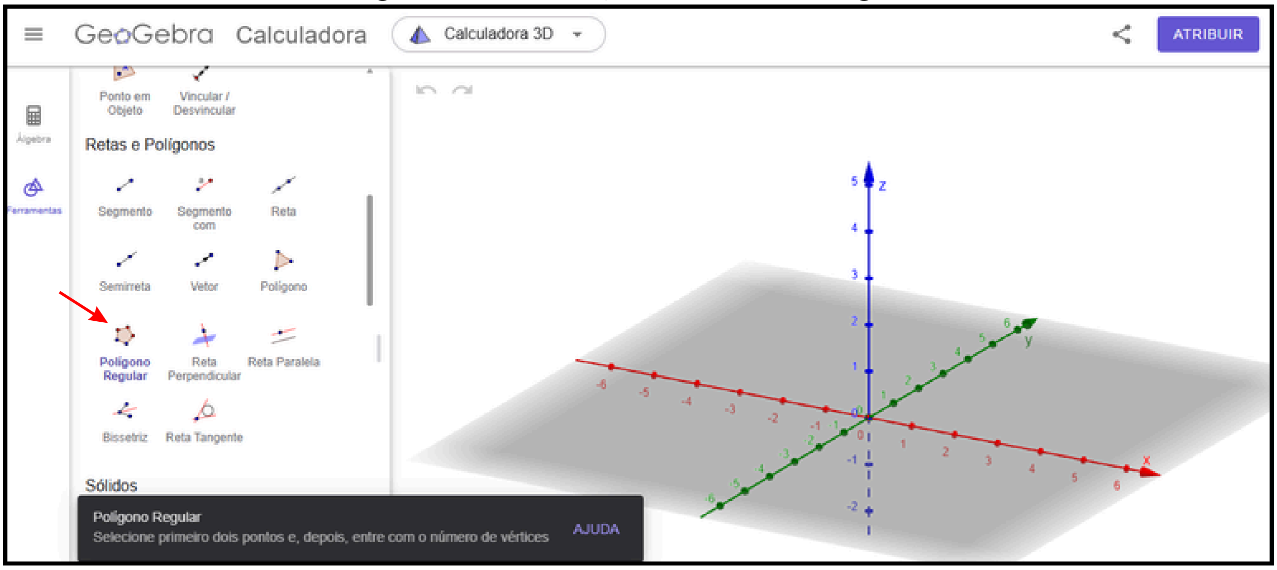
Figura 43 - Construção do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4.Polígono regular

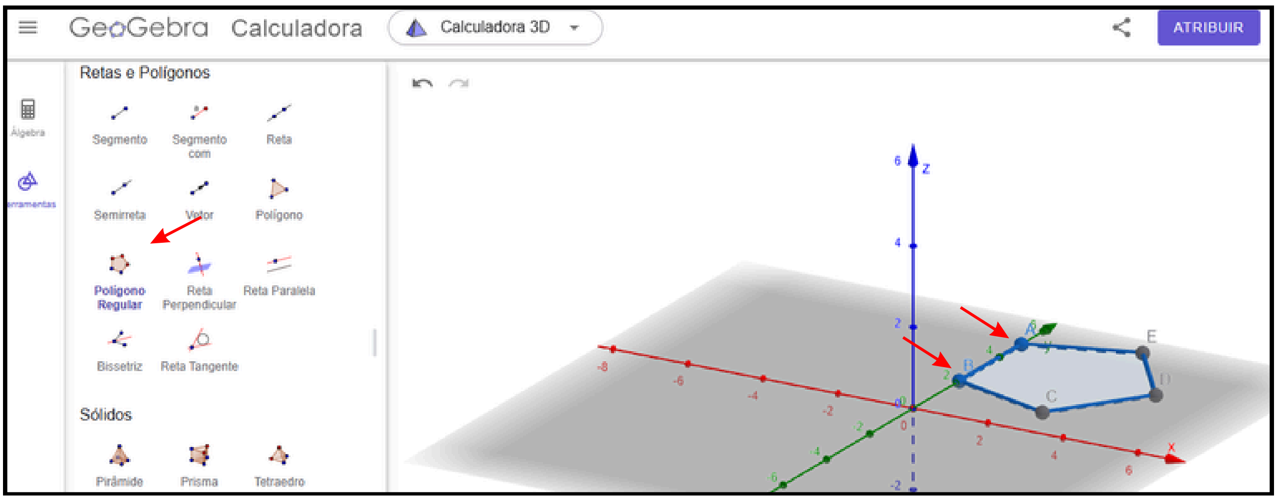
Figura 44 - Construção do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5. Selecione com mouse dois pontos e depois escolha o número de vértices.

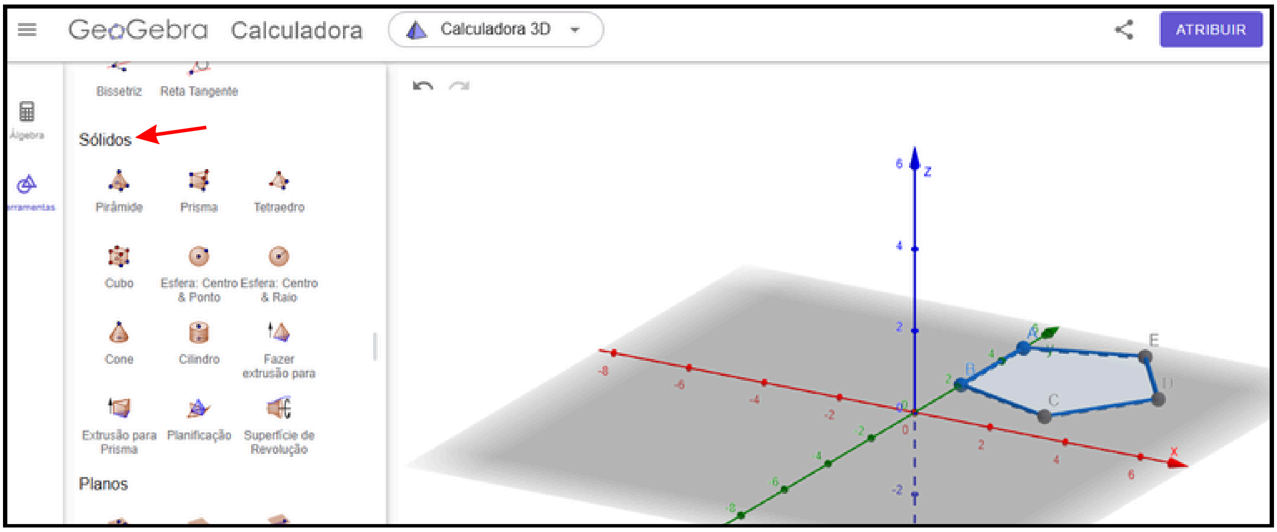
Figura 45 - Construção do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6. Agora, vá para a seção de sólidos.

Figura 46 - Construção do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7. Extrusão para Prisma

8. Selecione um polígono especifique a altura

Figura 47 - Construção do Prisma Hexagonal

Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

8.3 EXEMPLO DE PRISMA HEXAGONAL

1) Construa um prisma hexagonal, com base um hexágono regular de lado 2 cm e altura 6 cm. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

Vamos começar calculando a área da base desse poligono.

8.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

A_f : *Area da face*

A_b : *Area da base*

h_f : *altura da face*

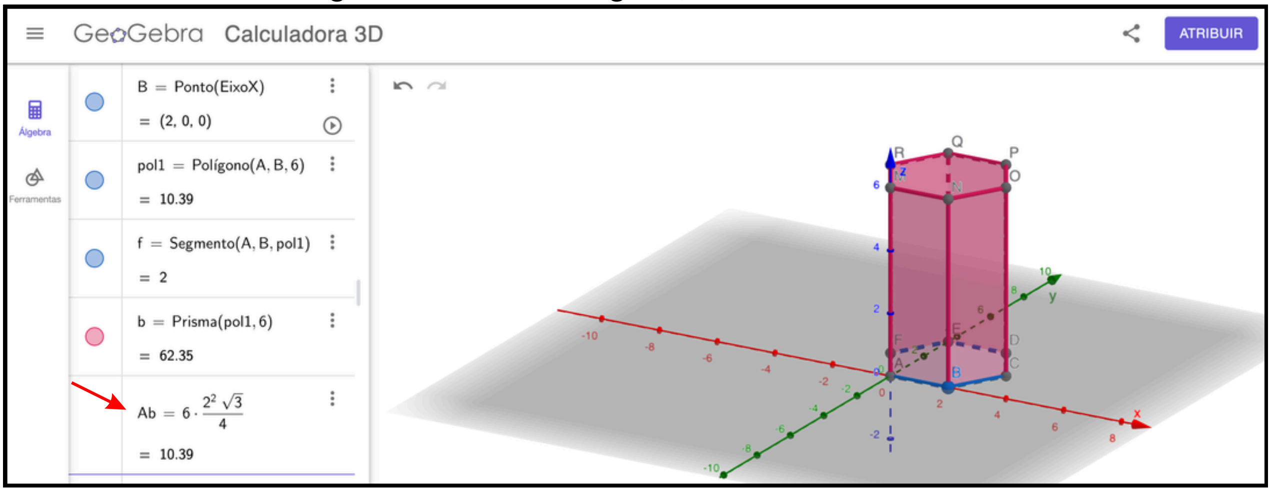
L : *Lado da base*

Em fórmulas:

$$A_f = L \cdot h_f$$

$$A_b = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

Figura 48 -Prisma Hexagonal, cálculo da Área Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Em seguida, vamos determinar a área lateral do polígono.

8.5 ÁREA LATERAL

Legenda :

$h_f :$ *Altura da face*

$A_f :$ *Area da face*

$A_L :$ *Area Lateral*

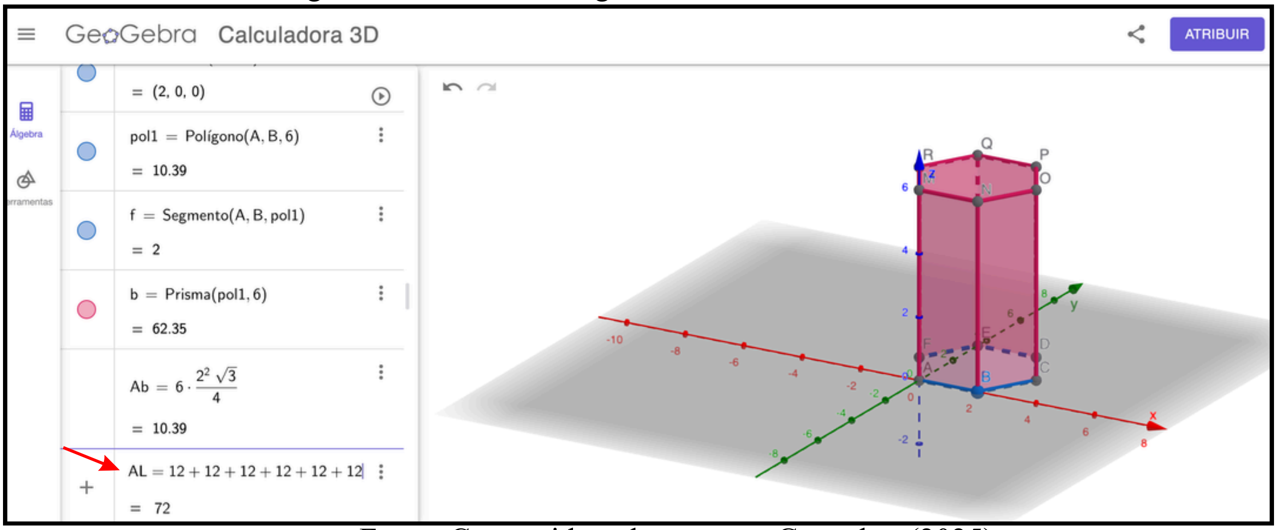
$L :$ *Lado da base*

Fórmulas :

$$A_f = L \cdot h_f$$

$$A_L = 6 \cdot A_f$$

Figura 49 - Prisma Hexagonal, Calculo da Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

8.6 ÁREA TOTAL

Legendas:

$A_L: \ Area \ \ Lateral$

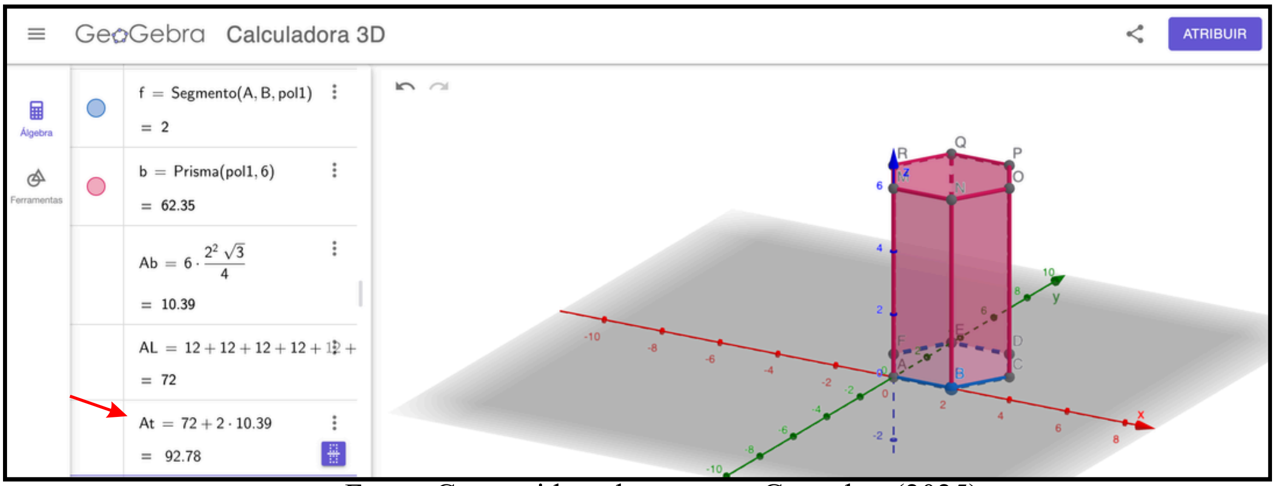
$A_b: \ Area \ da \ base$

$A_T: \ Area \ \ Total$

Fórmulas:

$$A_T = A_L + 2A_b$$

Figura 50 - Prisma Hexagonal, Calculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

8.7 VOLUME

Legendas:

$A_b: \ Area \ da \ base$

$L: \ Lado$

$h_f: \ Altura \ da \ face$

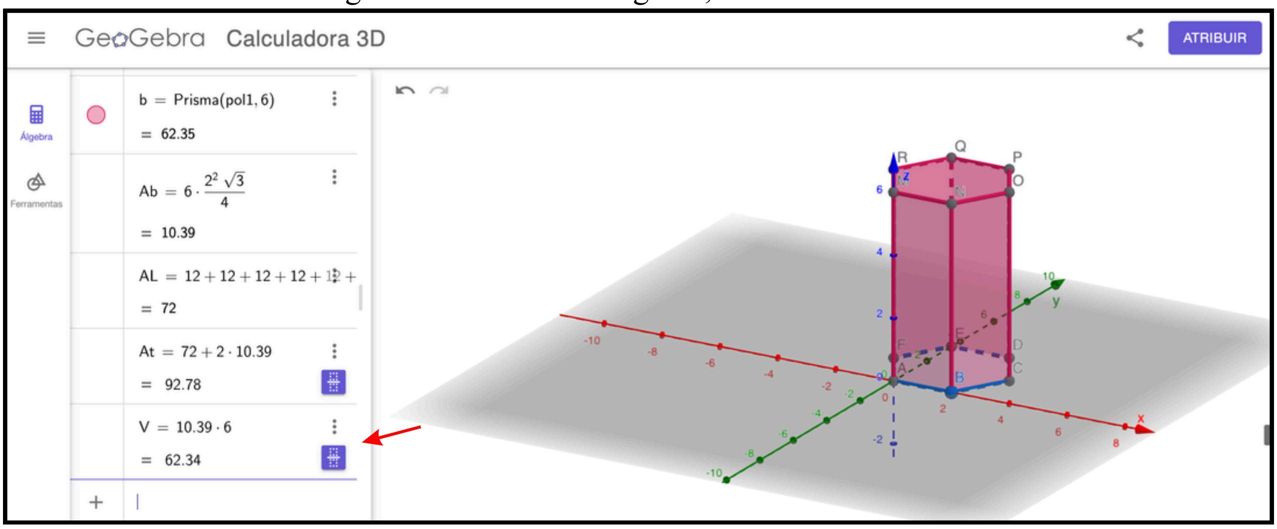
$V: \ volume$

Fórmulas:

$$V = A_b \cdot h_f$$

$$V = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \cdot h_f$$

Figura 51 - Prisma Hexagonal,Calculo do Volume

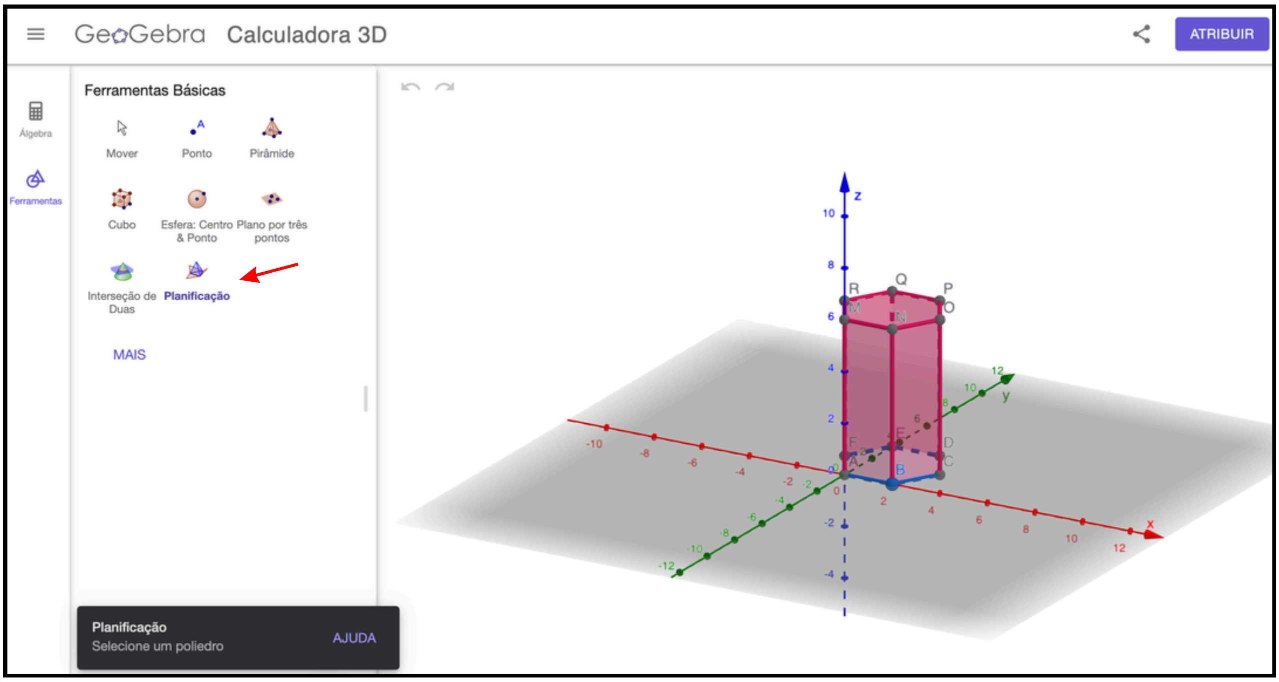


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

8.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

1.Primeiramente vamos em calculadora 3D, Após isso vamos em ferramentas básicas e clique em planificação

Figura 52 - Construção da Planificação do Prisma Hexagonal



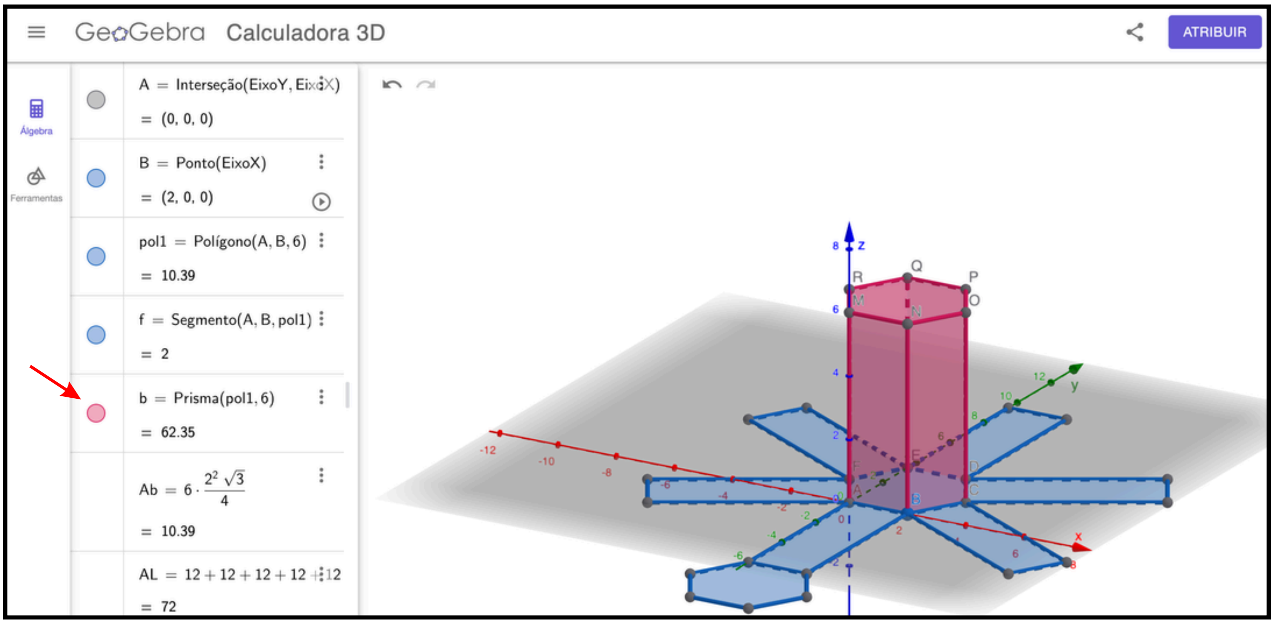
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após ter selecionado, vamos retirar o polígono para ter uma melhor visualização.

2. vamos para a parte de Álgebra

3.Agora vamos clicar em prisma para retirar o polígono

Figura 53 - Construção da planificação do Prisma Hexagonal

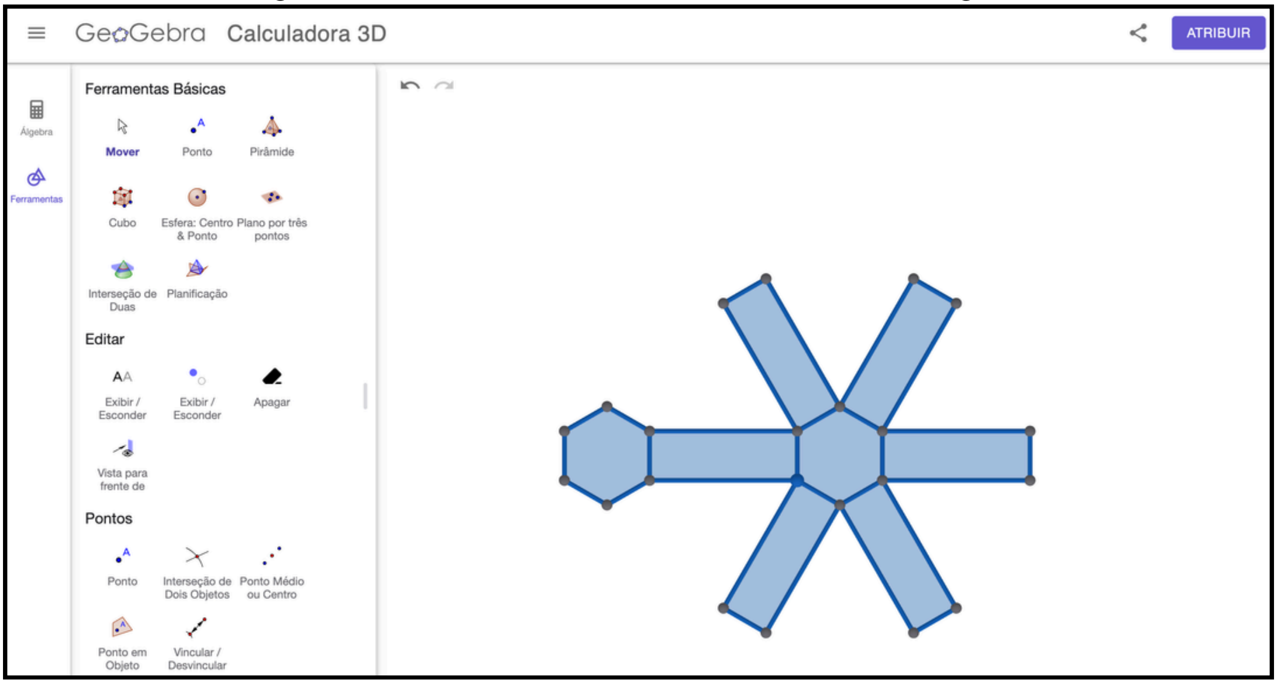


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4. Agora vamos no ícone do lado direito a cima para retirar alguns itens da tela.

Logo, concluímos o processo de construção da planificação desse polígono, ou seja, sua representação em duas dimensões. A planificação permite visualizar cada uma das faces do sólido de forma aberta no plano, facilitando a compreensão de sua estrutura e ajudando no cálculo de áreas e outras propriedades geométricas.

Figura 54 - Construção da Planificação do Prisma Hexagonal



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

8.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/kdhnnhha

PRISMA HEXAGONAL

9 PARALELEPIPEDO

9.1 INTRODUÇÃO AO PRISMA

O paralelepípedo retângulo é um prisma cujas faces são retângulos.

Apesar de parecer simples, ele é uma das formas mais úteis no cálculo de volume e na construção civil (caixas, tijolos, blocos, vigas).

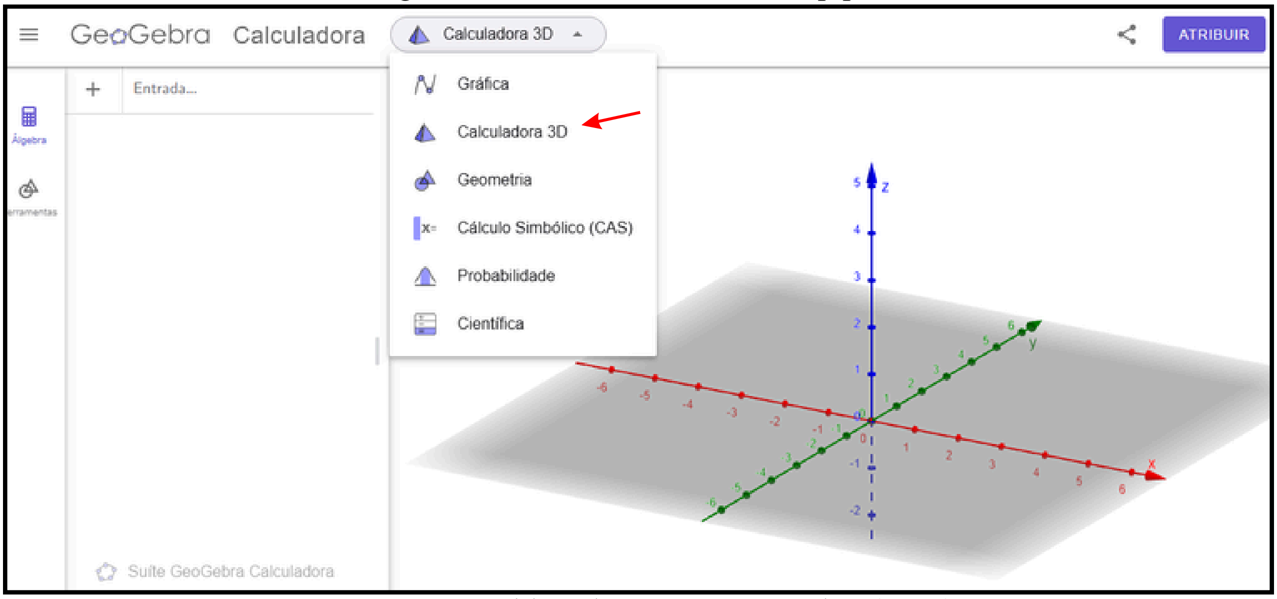
Quando todas as arestas são iguais, torna-se um cubo.

Elementos: 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

9.2 CONSTRUÇÃO DO PARALELEPIPEDO

1. Primeiramente vamos na calculadora 3D.

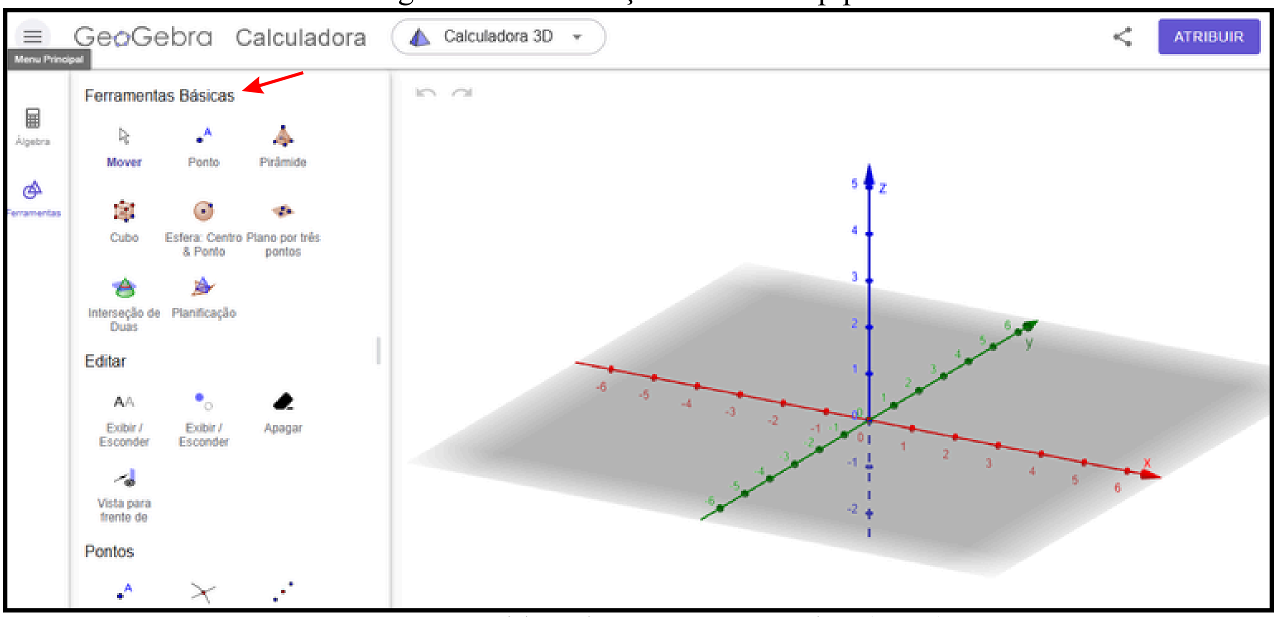
Figura 55 - Construção do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2. Ferramentas Básicas

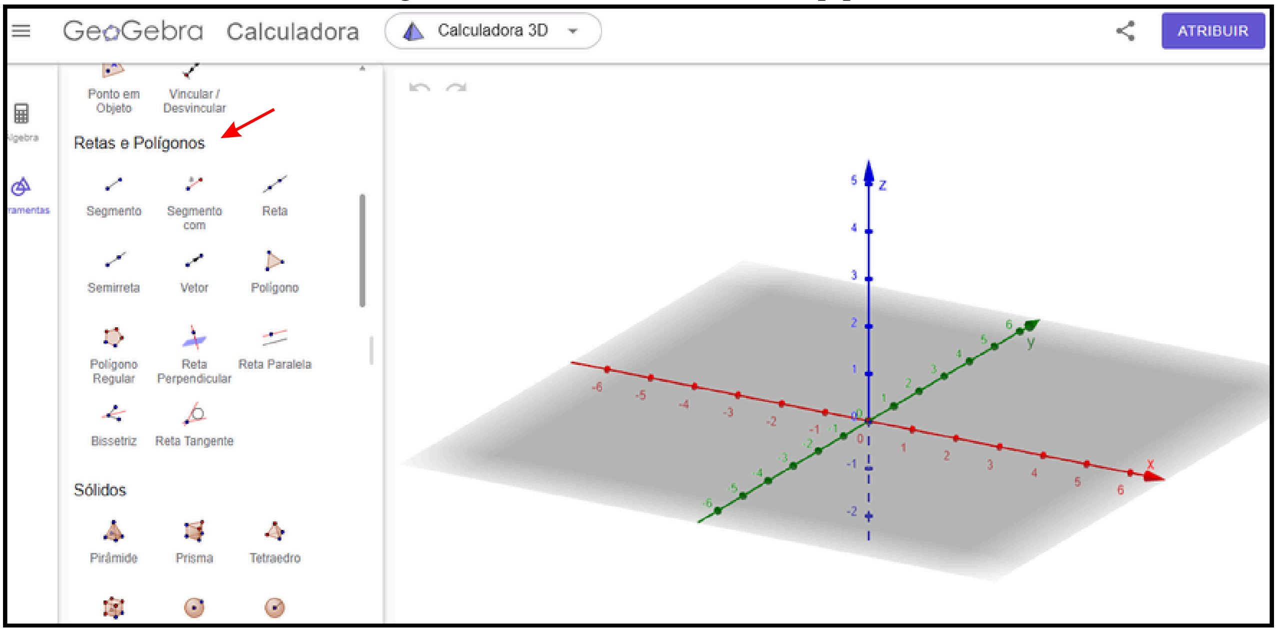
Figura 56 - Construção do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Retas e polígonos

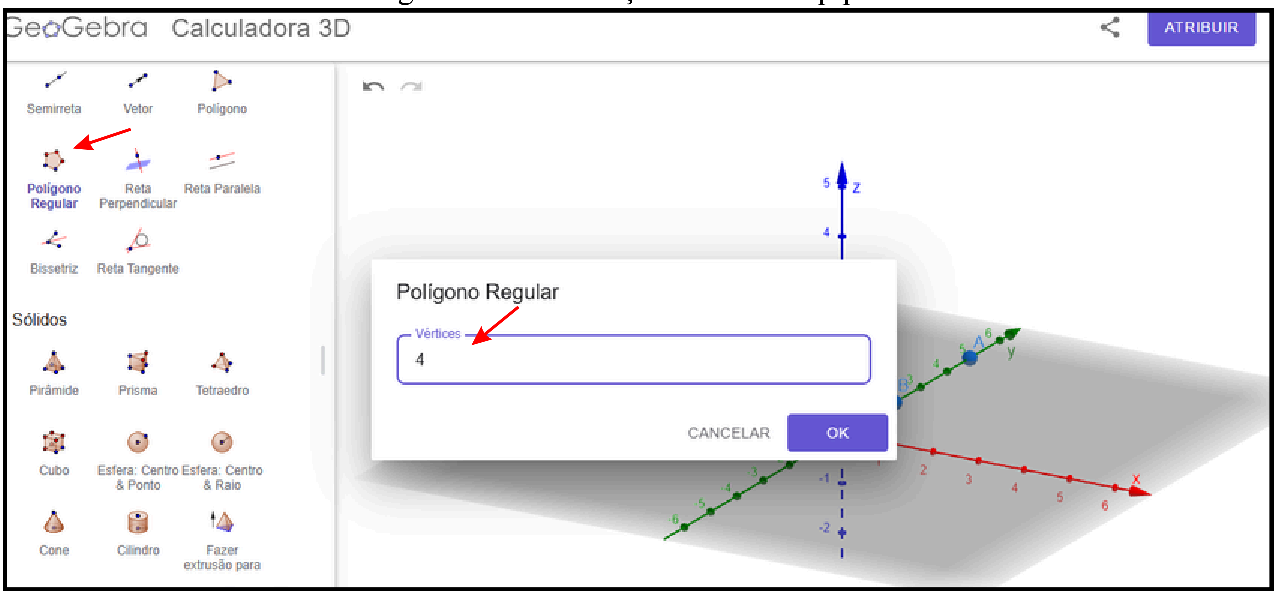
Figura 57 - Construção do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4.Agora, selecione a ferramenta Polígono Regular e escolha dois pontos no eixo x ou y.
5.Depois de escolher os dois pontos, selecione o número de vértices

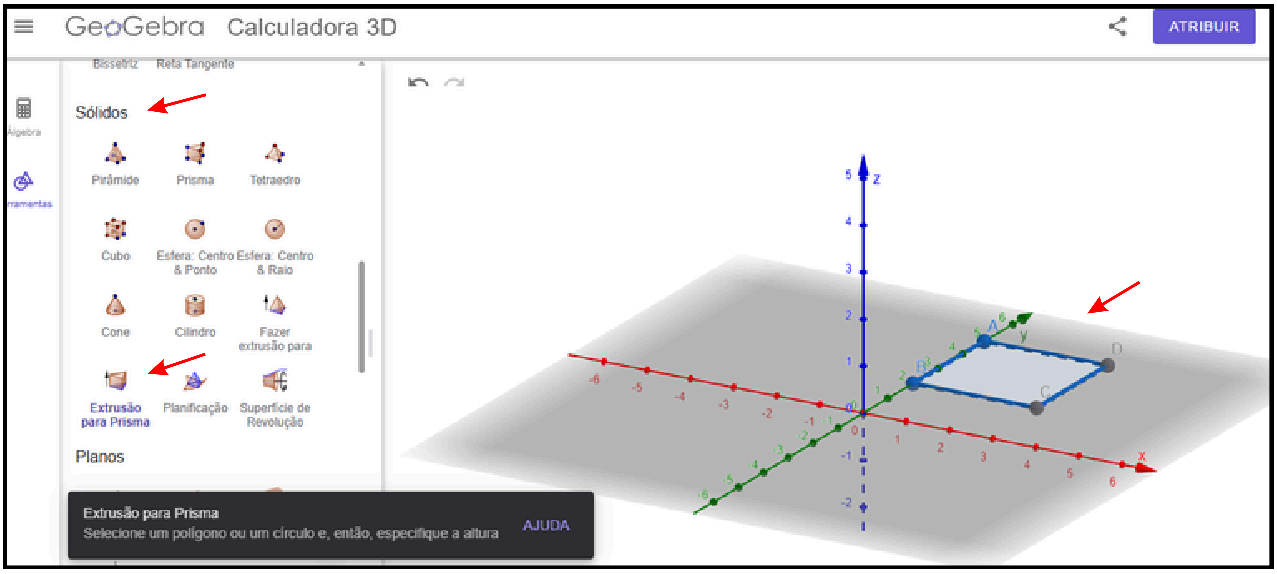
Figura 58 - Construção do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.Após isso, vá para a seção de sólidos e selecione Extrusão para criar um prisma.

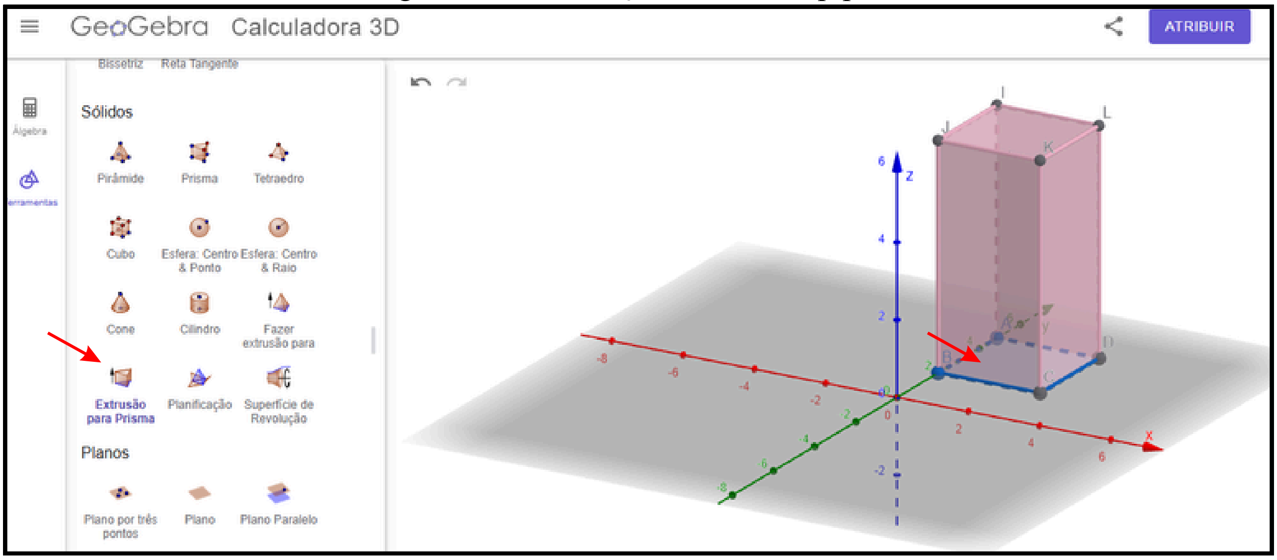
Figura 59 - Construção do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

7.Em seguida, clique no quadrado e escolha a altura desejada para o seu paralelepípedo.

Figura 60 - Construção do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

9.3 EXEMPLO DE PRISMA HEXAGONAL

1) Construa um paralelepípedo, com base 3 cm x 5 cm e altura 6 cm. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

9.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

$a: \ aresta$

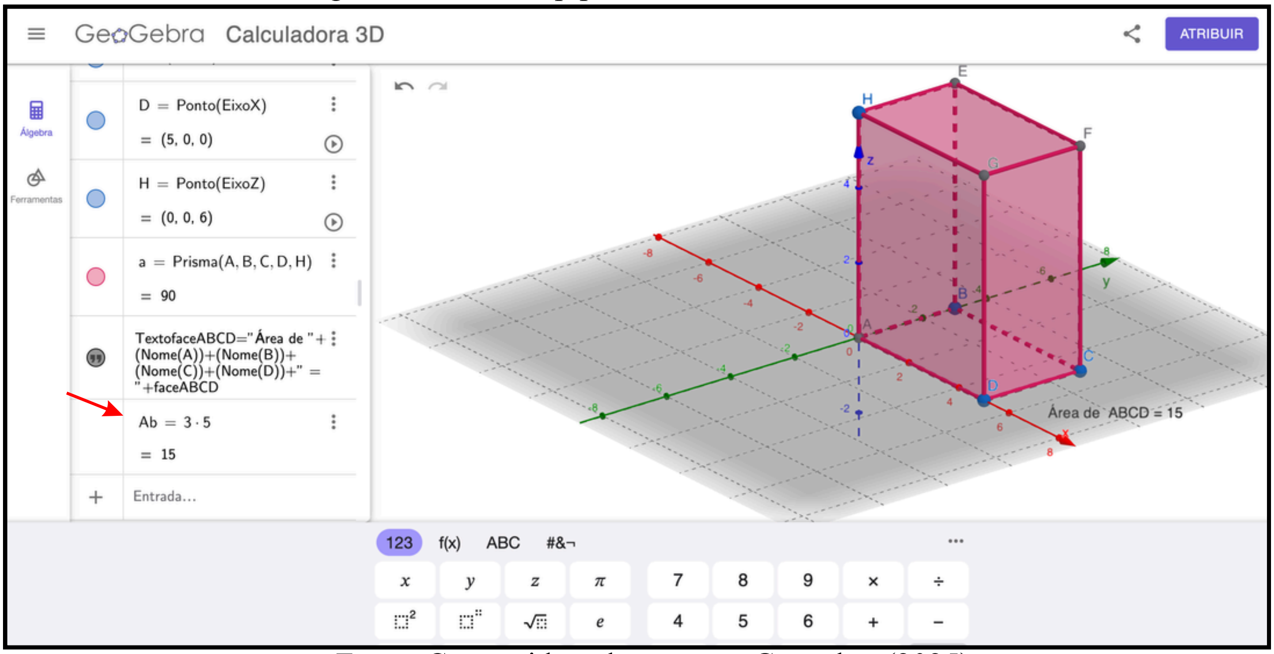
$b: \ aresta$

$A_b: \ Area \ da \ base$

Em fórmulas:

$A_b = a \cdot b$

Figura 61 - Paralelepípedo, Cálculo da Área da Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

9.5 ÁREA LATERAL

Legendas:

$h_f:\ altura\ da\ face$

$a:\ aresta$

$b:\ aresta$

Legendas:

$A_{f1}:\ Area\ da\ face1$

$A_{f2}:\ Area\ da\ face2$

$A_L:\ Area\ \ Lateral$

Em fórmulas:

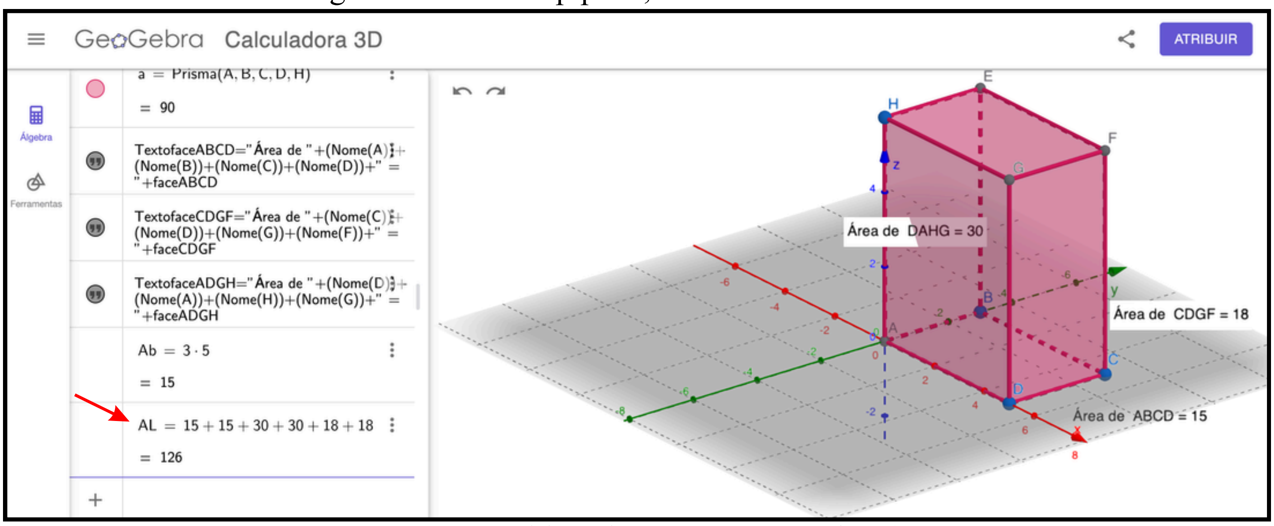
$$A_{f1} = a \cdot h_f$$

$$A_{f2} = b \cdot h_f$$

$$A_L = 2A_{f1} + 2A_{f2}$$

$$A_L = 2a \cdot h + 2b \cdot h$$

Figura 62 - Paralelepípedo, Cálculo da Área Lateral.



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

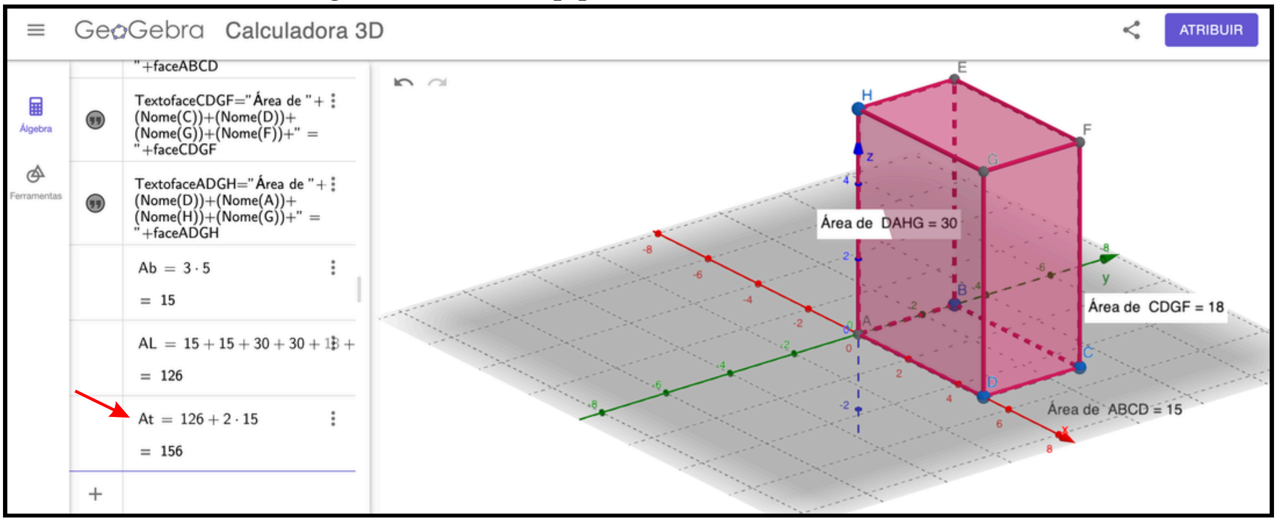
9.6 ÁREA TOTAL

Legendas:
$a: \ aresta$
$b: \ aresta$
$h_f: \ Altura \ da \ face$

Legendas:
$A_b: \ Area \ da \ base$
$A_T: \ Area \ Total$

Em fórmulas:
$A_T = 2ab + 2ah_f + 2bh_f$
$A_T = A_L + 2A_b$

Figura 63 - Paralelepípedo, Cálculo da Área da Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

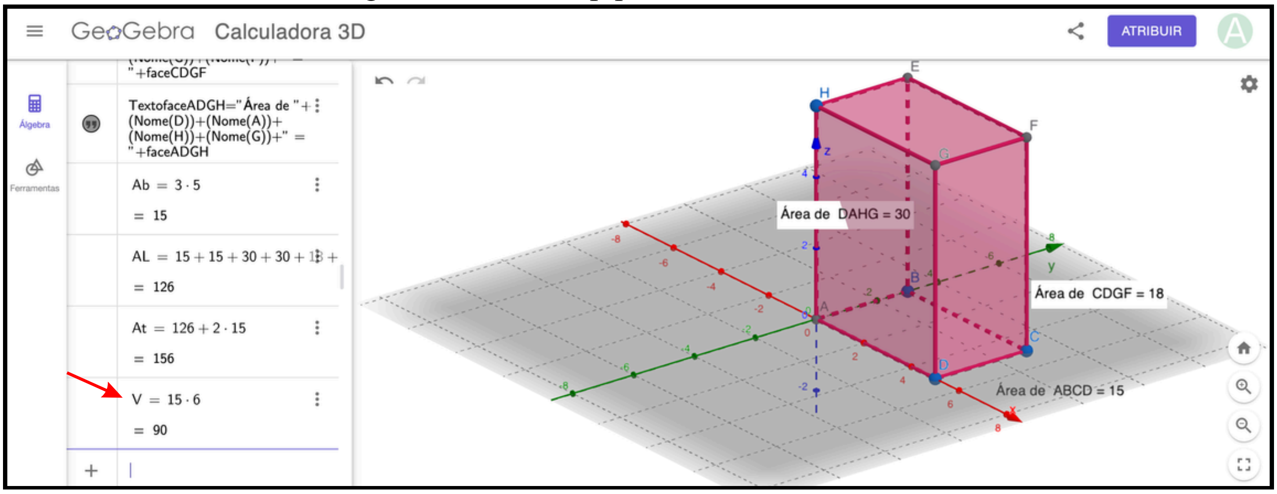
9.7 VOLUME

Legendas:
$a: \ aresta$
$b: \ aresta$
$h_f: \ altura \ da \ face$

Legendas:
$A_b: \ Area \ da \ base$
$V: \ volume$

Em fórmulas:
$V = A_b \cdot h_f$
$V = a \cdot b \cdot h_f$

Figura 64 - Paralelepípedo, Cálculo do Volume

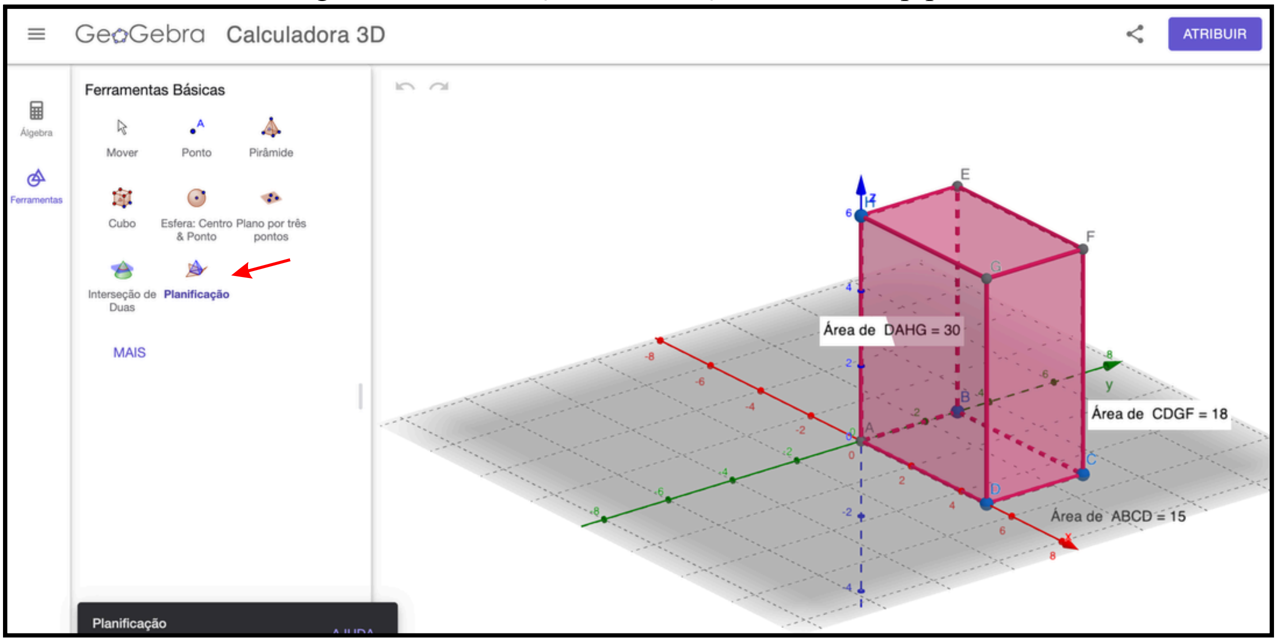


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

9.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

1.primeiramente vamos em calculadora 3D, Após isso vamos em ferramentas básicas e clique em planificação.

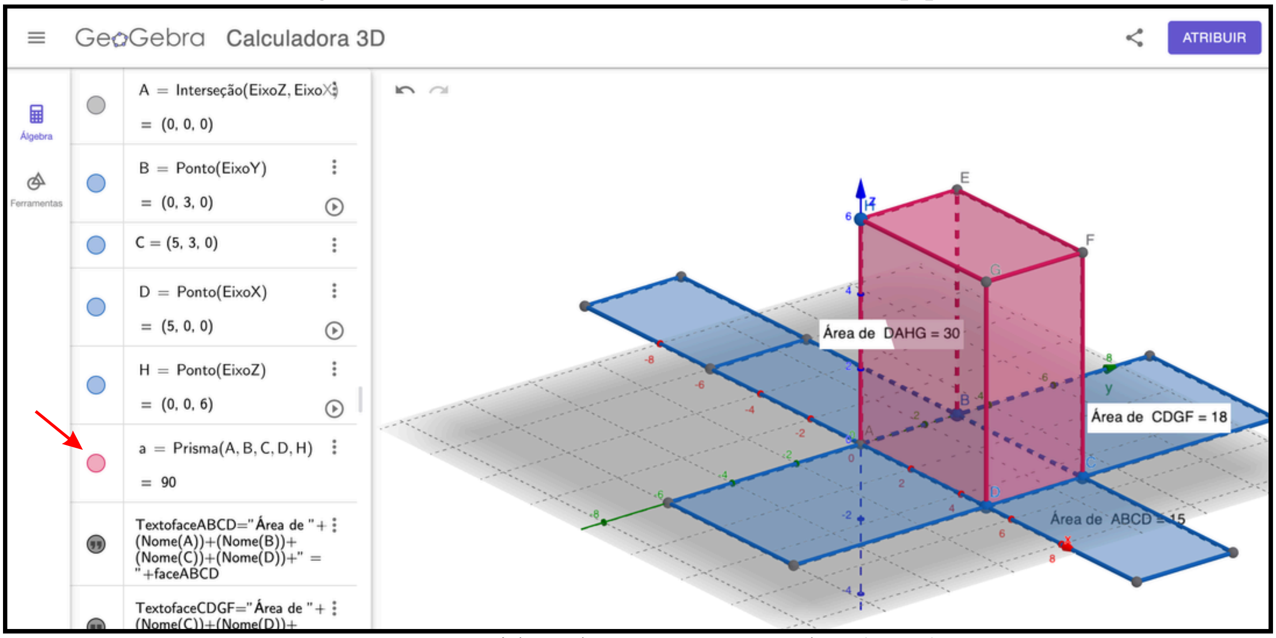
Figura 65 - Construção Planificação do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

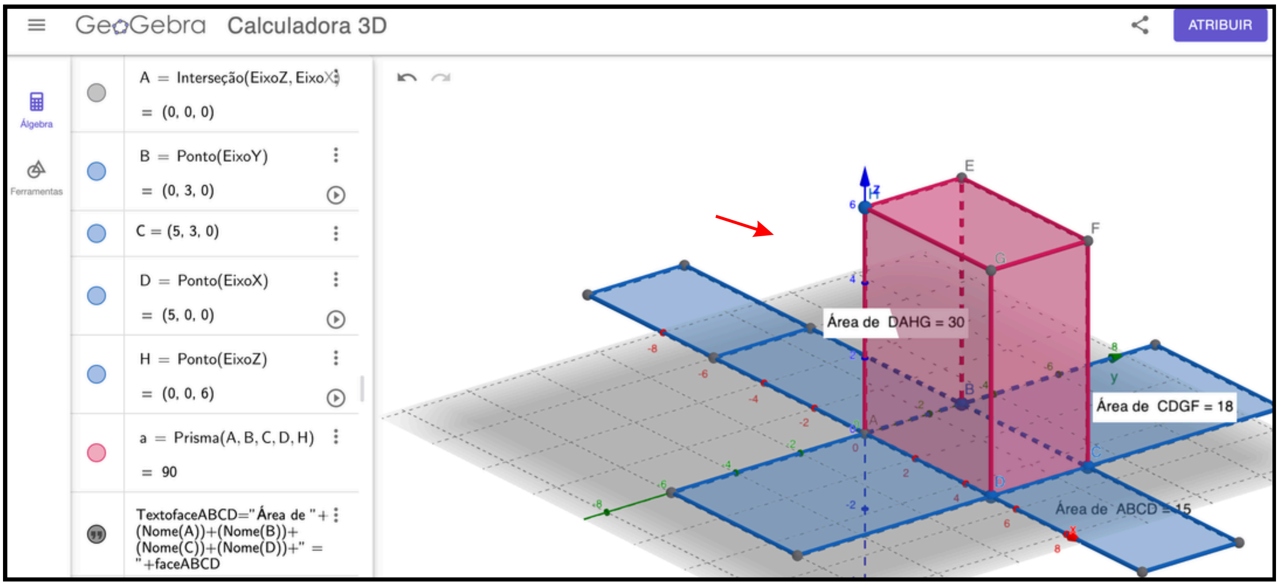
Após ter selecionado, vamos retirar o poligono para ter uma melhor visualização.
2. vamos para a parte de Álgebra
3.Agora vamos clicar em prisma para retirar o polígono

Figura 66 - Construção Planificação do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

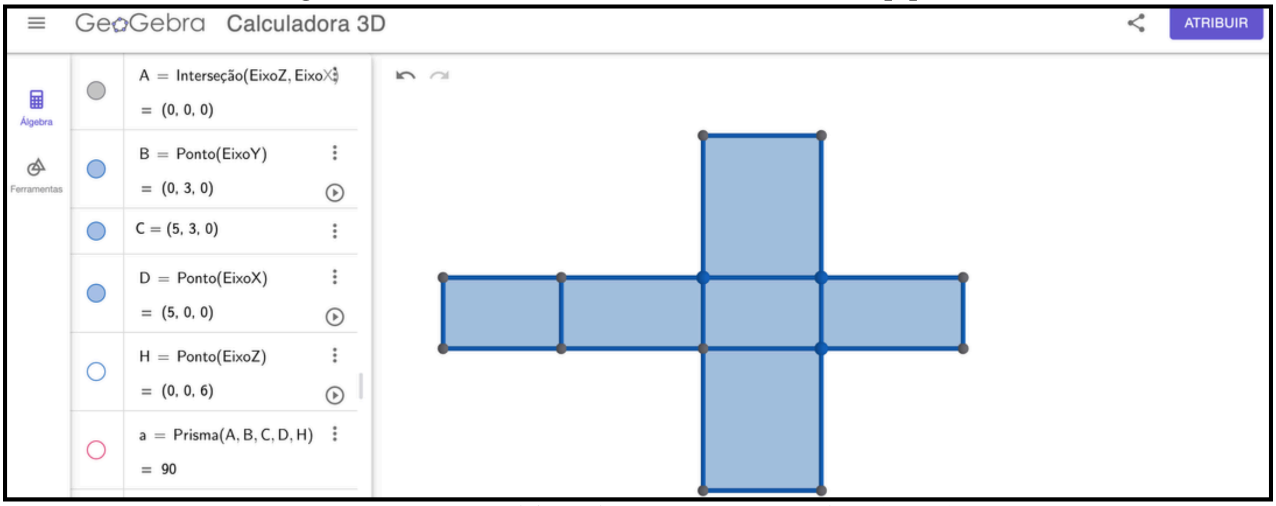
Figura 67 - Construção Planificação do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

A planificação permite visualizar cada uma das faces do sólido, de forma aberta no plano, facilitando a compreensão de sua estrutura e ajudando no cálculo de áreas e outras propriedades geométricas.

Figura 68 - Construção Planificação do Paralelepípedo



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

9.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

PARALELEPÍPEDO

10 TETRAEDRO

10.1 INTRODUÇÃO AO SÓLIDO

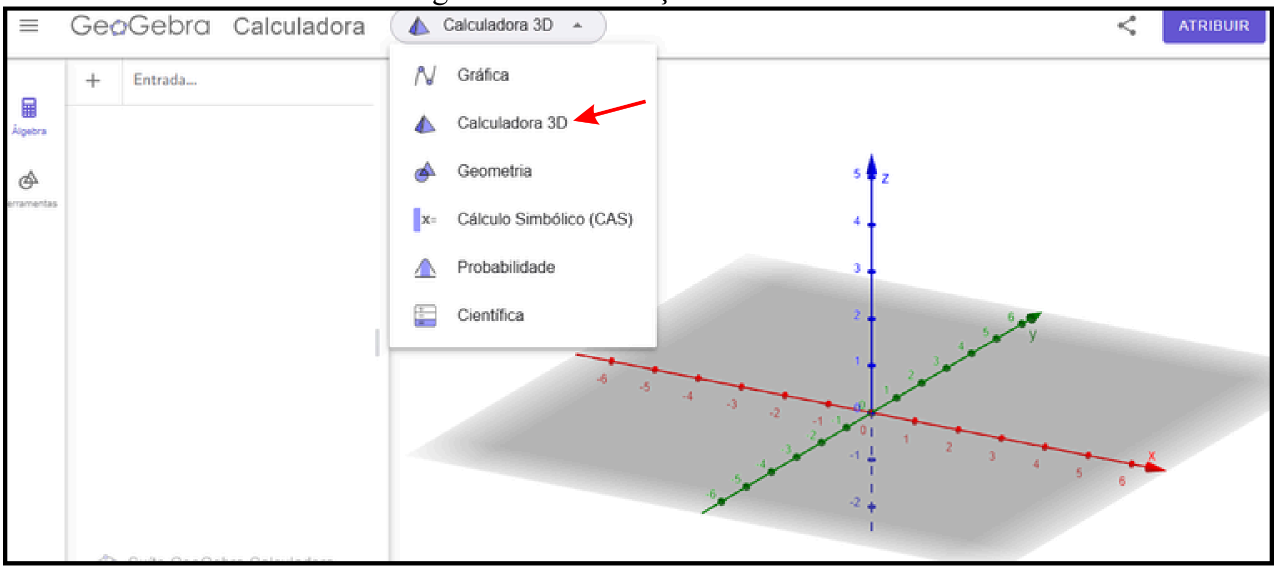
A pirâmide triangular, ou tetraedro, é o sólido formado por uma base triangular e três faces laterais também triangulares. É o único poliedro que tem todas as faces triangulares. Surge naturalmente em moléculas químicas e estruturas leves de engenharia.

Elementos: 4 faces, 6 arestas e 4 vértices.

10.2 CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO

1.Primeiramente vamos na calculadora 3D.

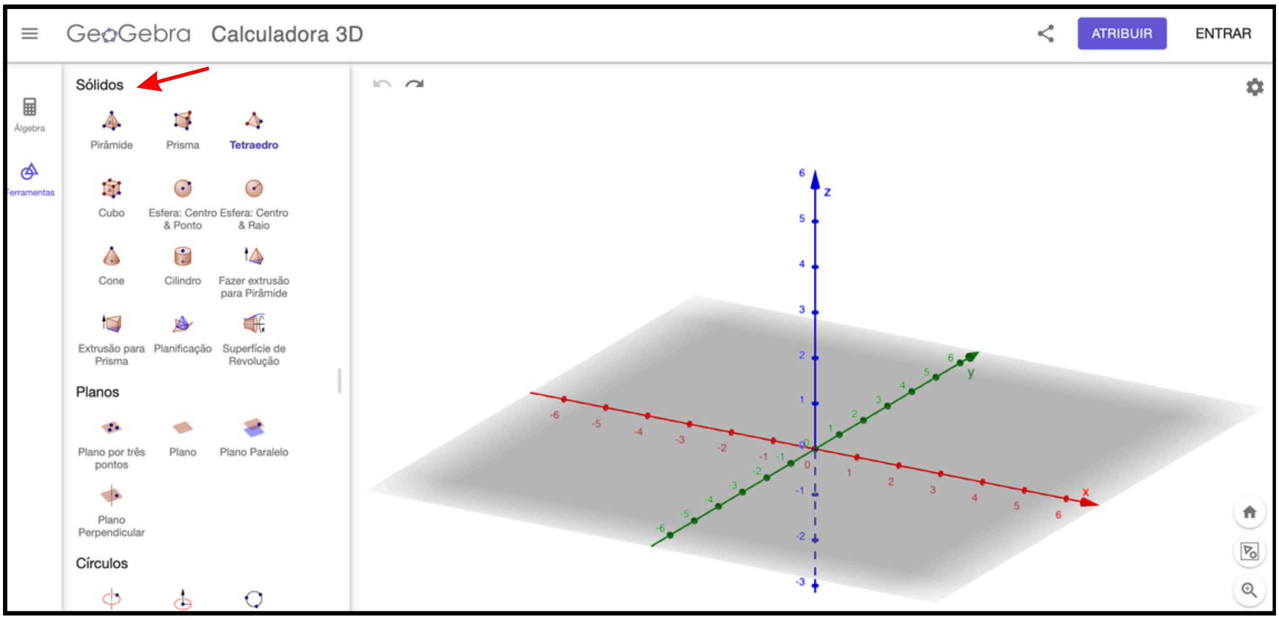
Figura 69 - Construção do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2.Sólidos

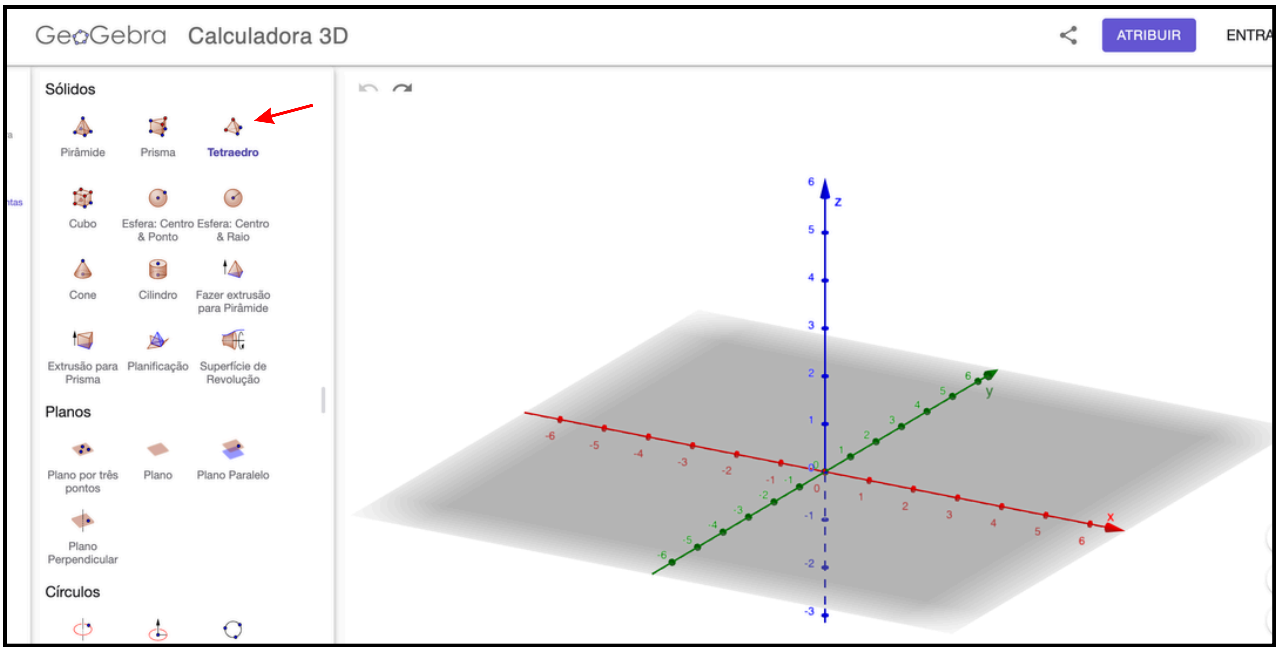
Figura 70 - Construção do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3.Escolha o Tetraedro

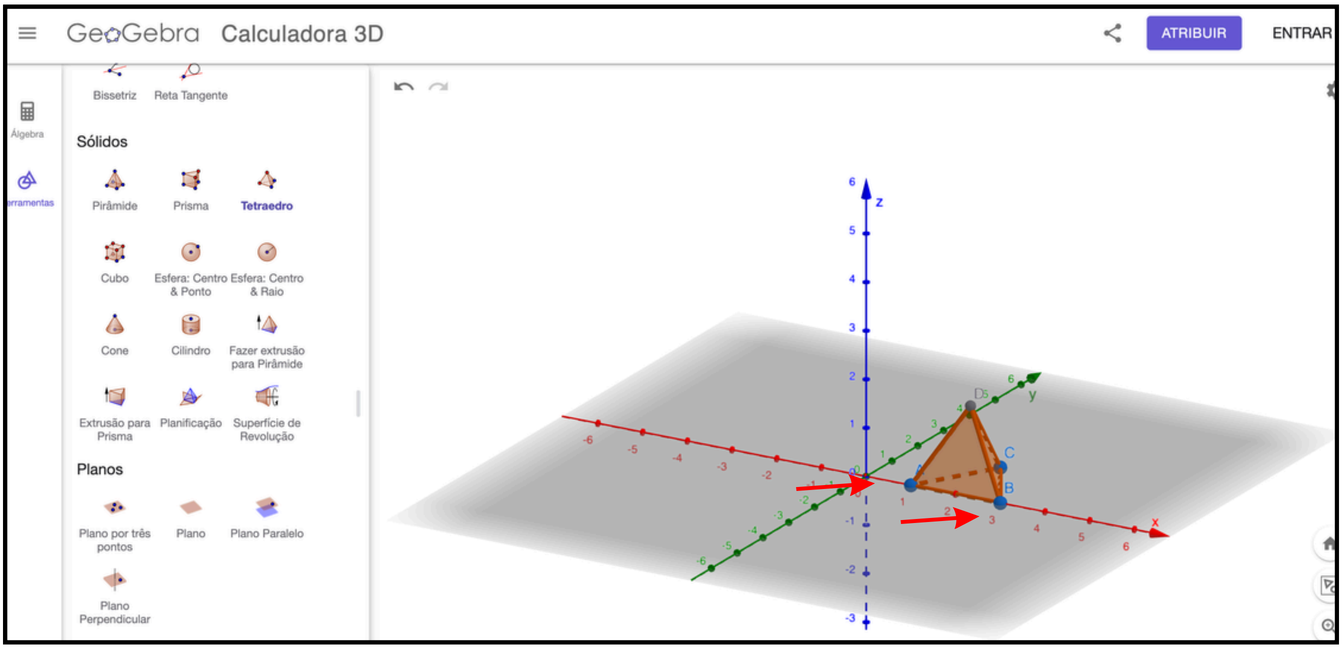
Figura 71 - Construção do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

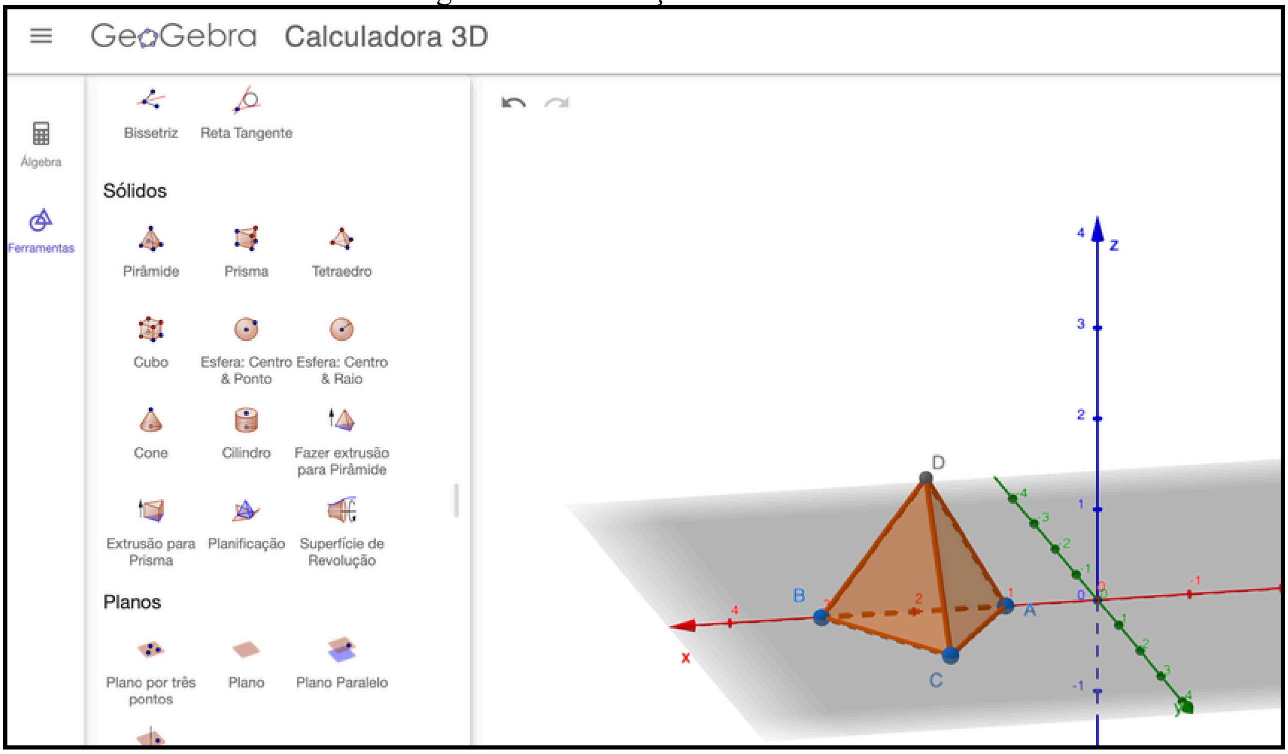
4.Em seguida, escolha dois pontos para construí-lo.

Figura 72 - Construção do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Figura 73- Construção do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

10.3 EXEMPLO DE TETRAEDRO

1) Construa um tetraedro com aresta 5 cm e altura 4,081cm. Em seguida calcule área da base, área lateral, área total e volume.

10.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

h_b : *Altura da Base*

L : *Lado*

Legendas:

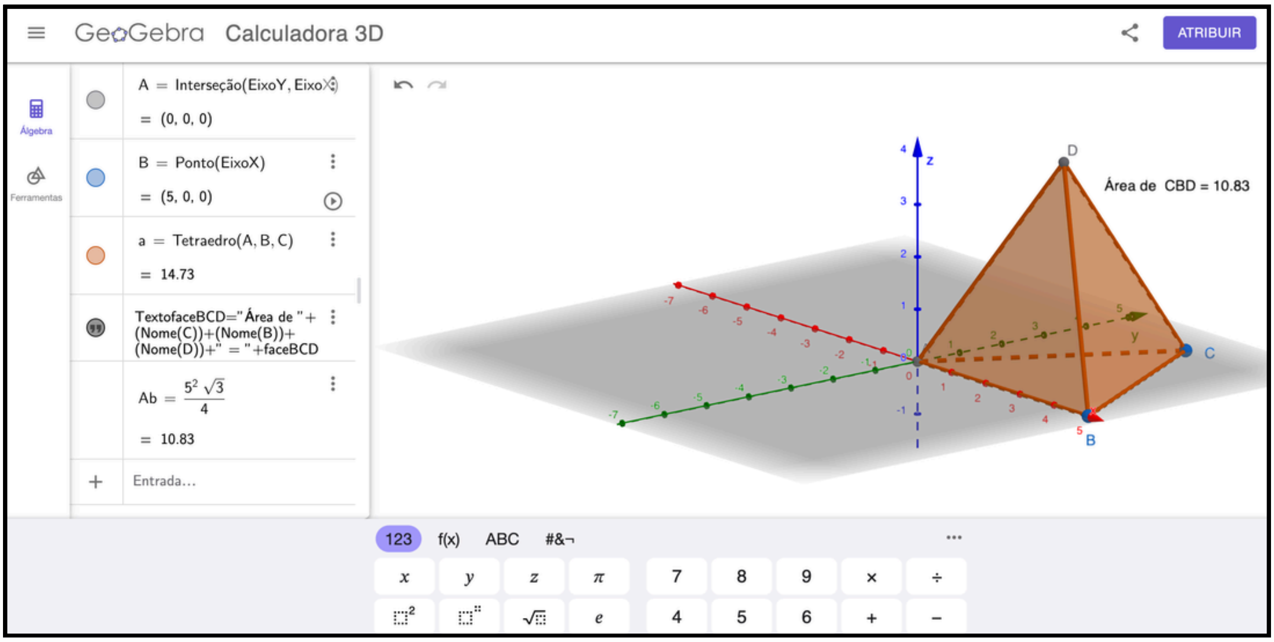
A_b : *Area da Base*

Em fórmulas:

$$A_b = \frac{L \cdot h_b}{2}$$

$$A_b = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Figura 74 - Tetraedro, Cálculo da Área da Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

10.5 ÁREA LATERAL

Legendas:

$L:\ Lado$

$A_f:\ area\ da\ face$

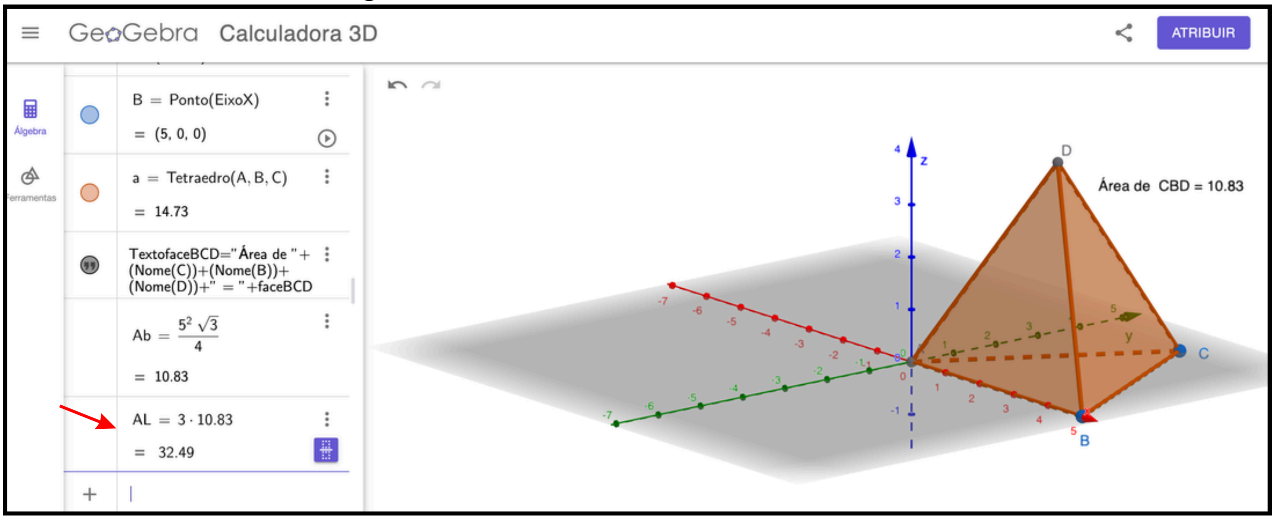
$A_L:\ Area\ \ Lateral$

Em fórmulas:

$$A_f = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_L = 3A_f$$

Figura 75 - Tetraedro, Cálculo da Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

10.6 ÁREA TOTAL

Legendas:

$L:\ Lado$

$A_f:\ Area\ da\ face$

Legendas:

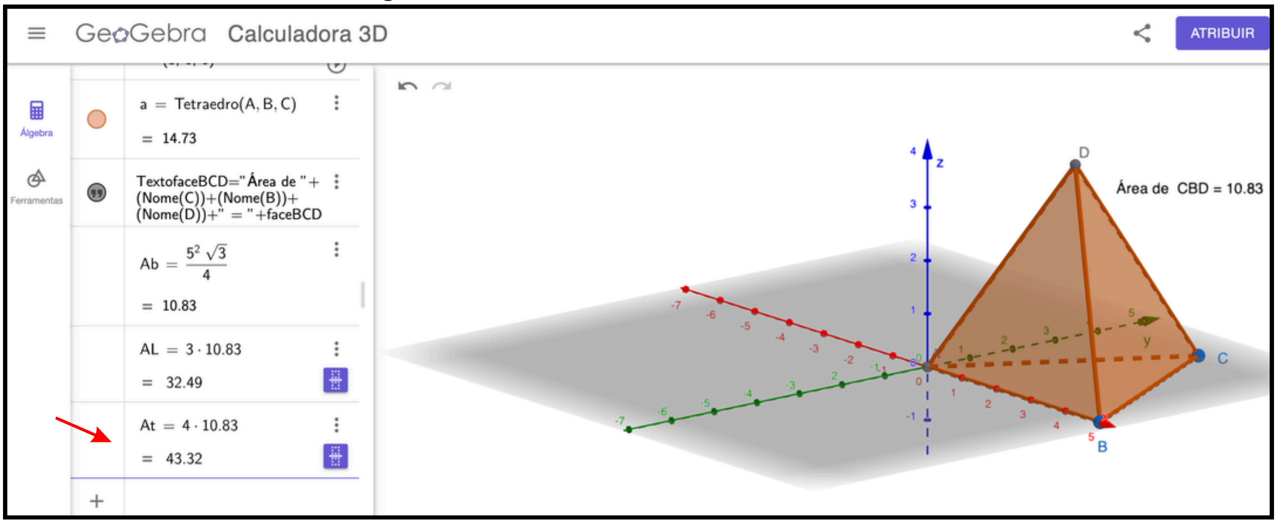
$A_T:\ Area\ \ Total$

Em fórmulas:

$$A_f = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 4A_f$$

Figura 76 - Tetraedro, Cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

10.7 VOLUME

Legendas:

h_p : *altura da Piramide*

Legendas:

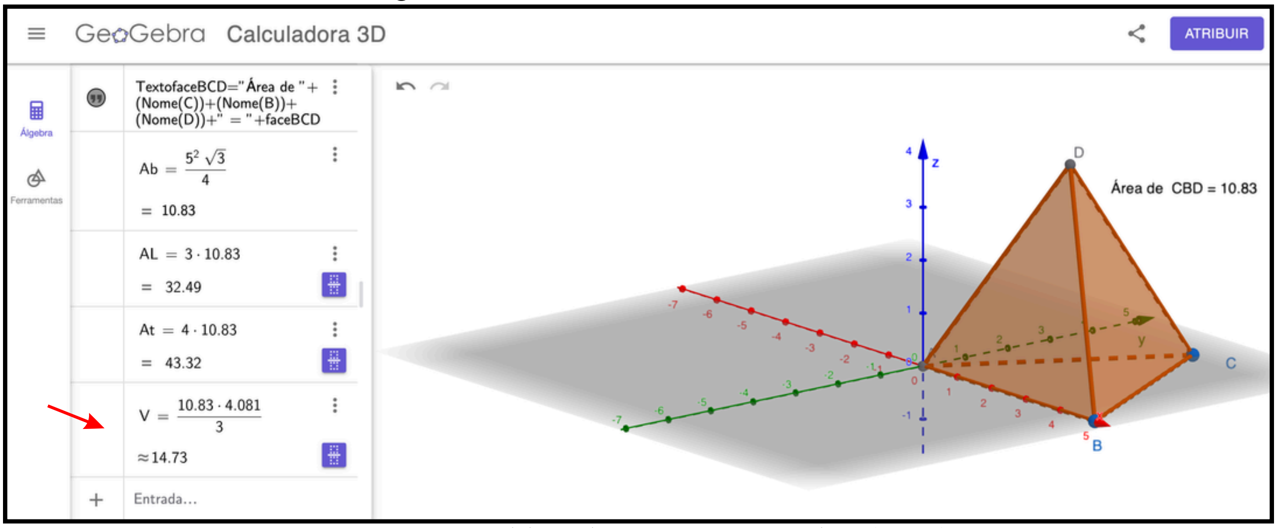
A_b : *Area da Base*

V : *volume*

Em fórmulas:

$$V = \frac{A_b \cdot h_p}{3}$$

Figura 77 - Tetraedro, Cálculo do Volume.



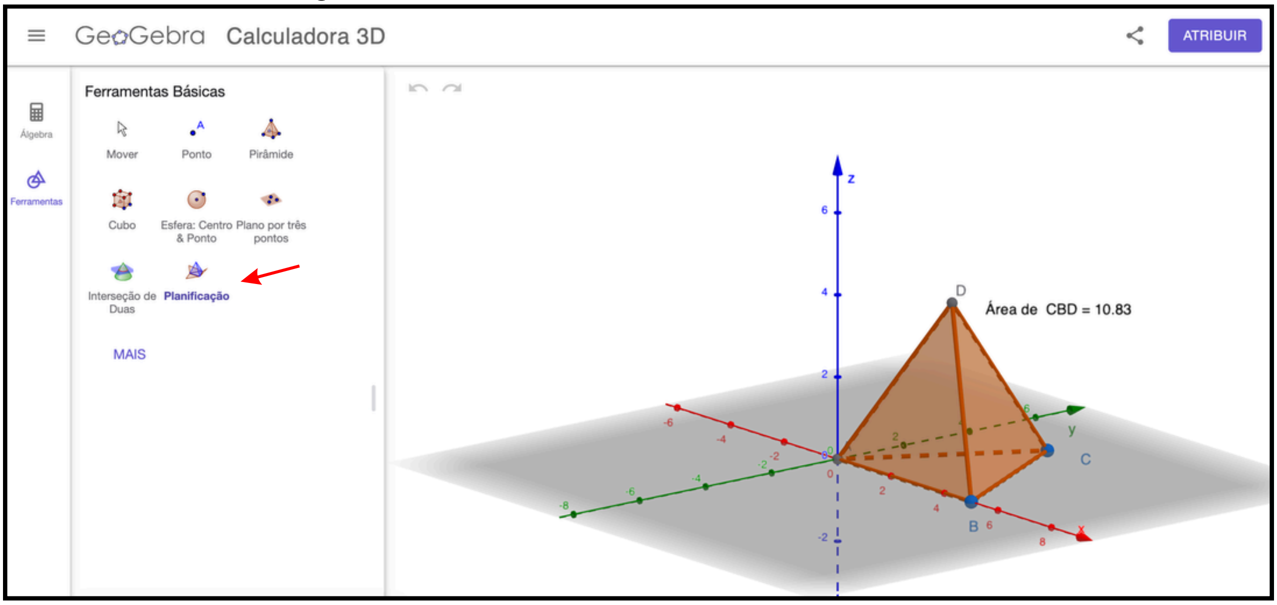
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Agora vamos aprender como fazer a planificação desse poligono

10.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

1.Primeiramente vamos em calculadora 3D, Após isso vamos em ferramentas básicas e clique em planificação

Figura 78 - Construção da Planificação do Tetraedro

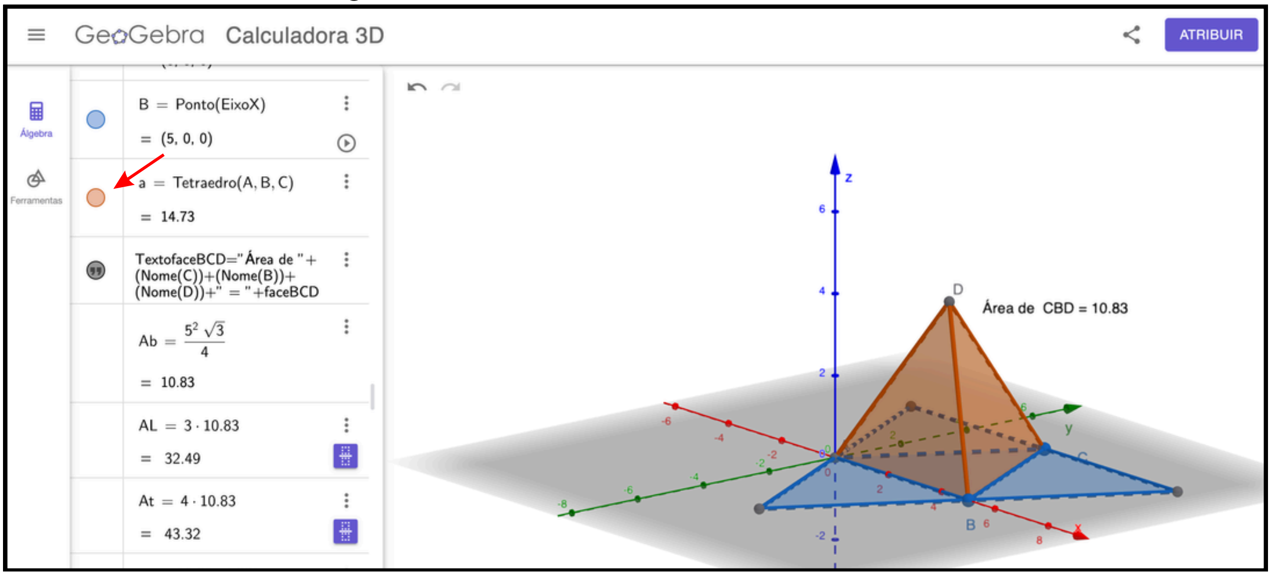


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após ter selecionado, vamos retirar o poligono para ter uma melhor visualização.

2. vamos para a parte de Álgebra
3.Agora vamos clicar em prisma para retirar o polígono

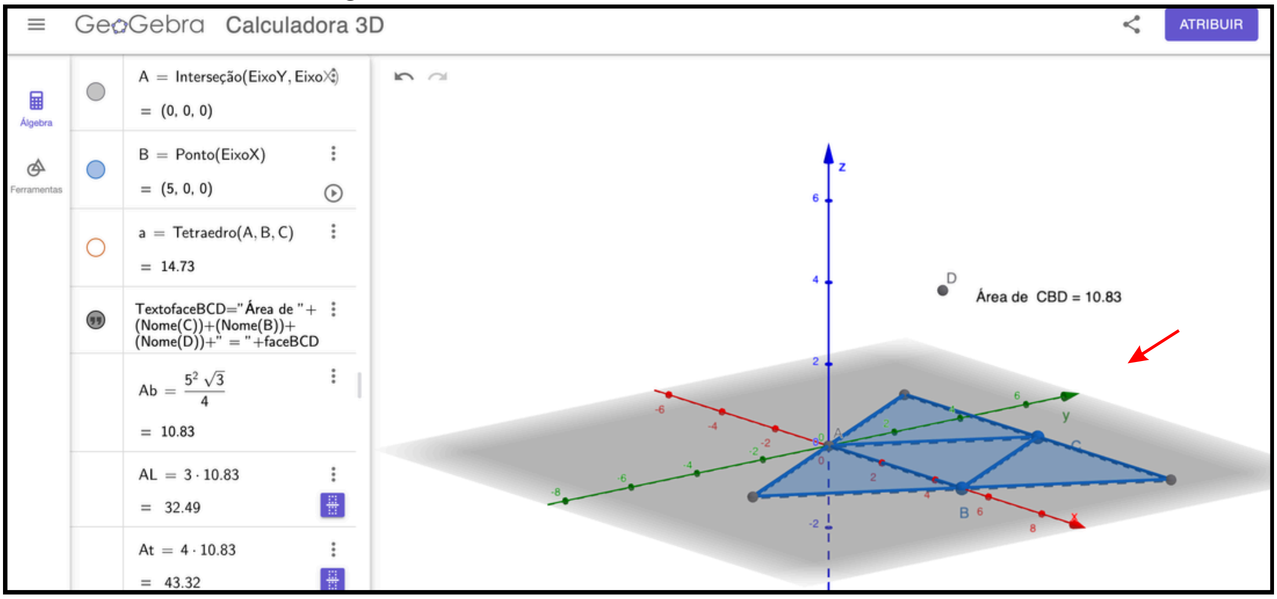
Figura 79 - Construção Planificação do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5. Agora vamos no icone do lado direito a cima para retirar alguns itens da tela.

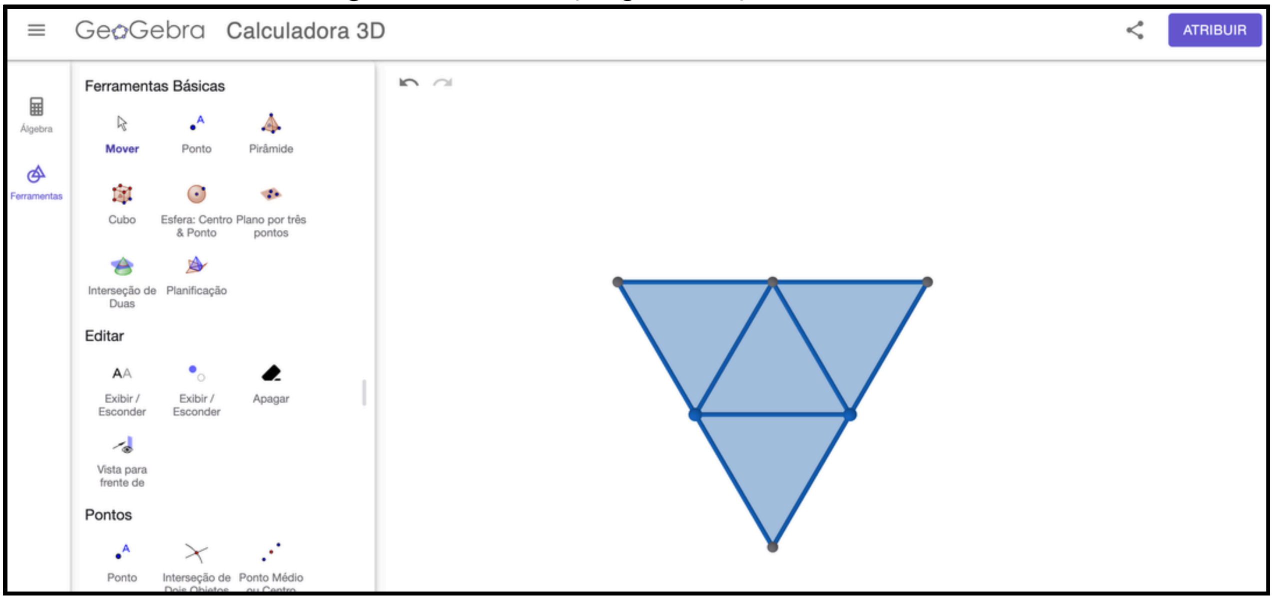
Figura 80 - Construção Planificação do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

A planificação permite visualizar cada uma das faces do sólido de forma aberta no plano, facilitando a compreensão de sua estrutura e ajudando no cálculo de áreas e outras propriedades geométricas.

Figura 81 - Construção planificação do Tetraedro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

10.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃÓ

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.
https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

TETRAEDRO

11 PIRÂMIDE QUADRANGULAR

11.1 INTRUÇÃO AO SÓLIDO

A pirâmide quadrangular possui uma base quadrada e quatro faces laterais triangulares que se encontram em um ponto comum (o vértice).

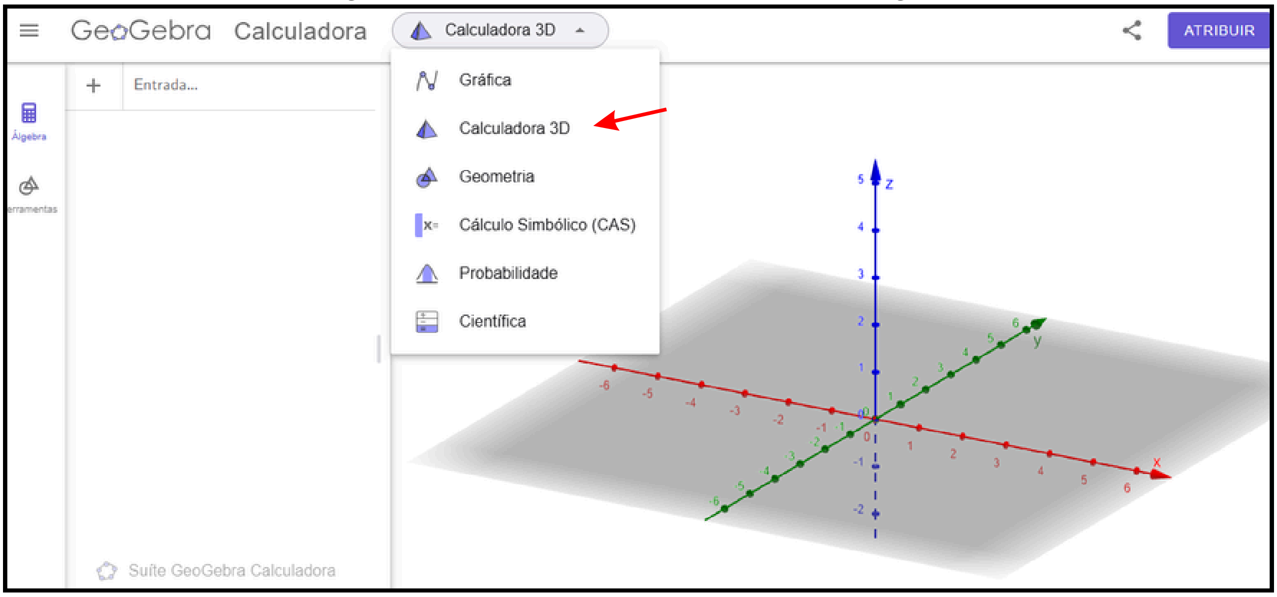
Seu formato é famoso nas pirâmides do Egito e em telhados e monumentos modernos.

Elementos: 5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

11.2 CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO

1.Primeiramente vamos na calculadora 3D.

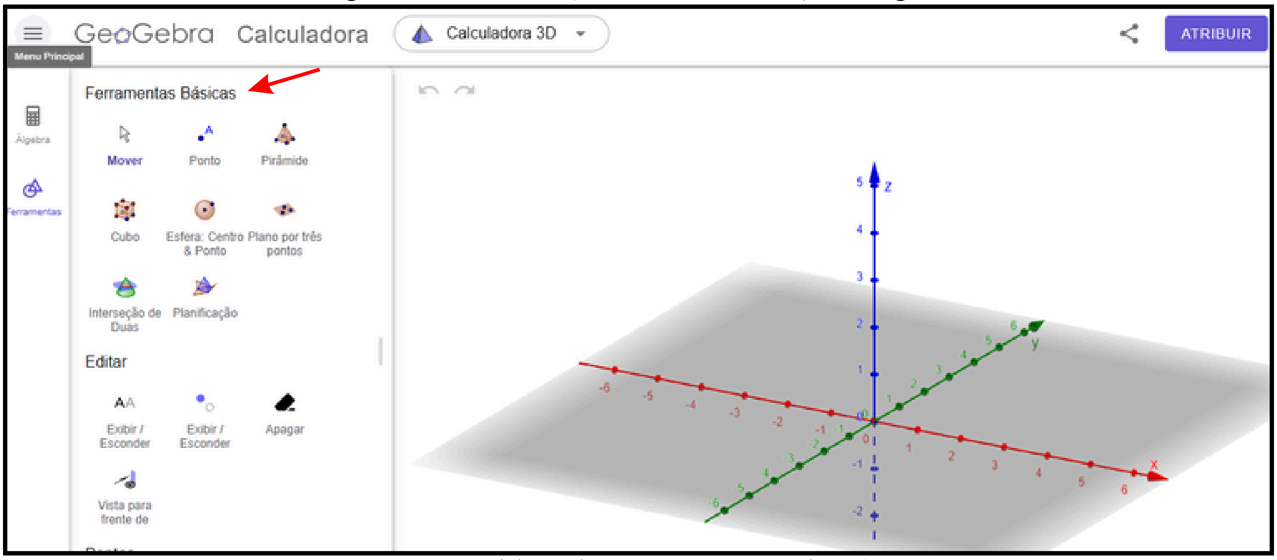
Figura 82 - Construção da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2.Ferramentas Básicas

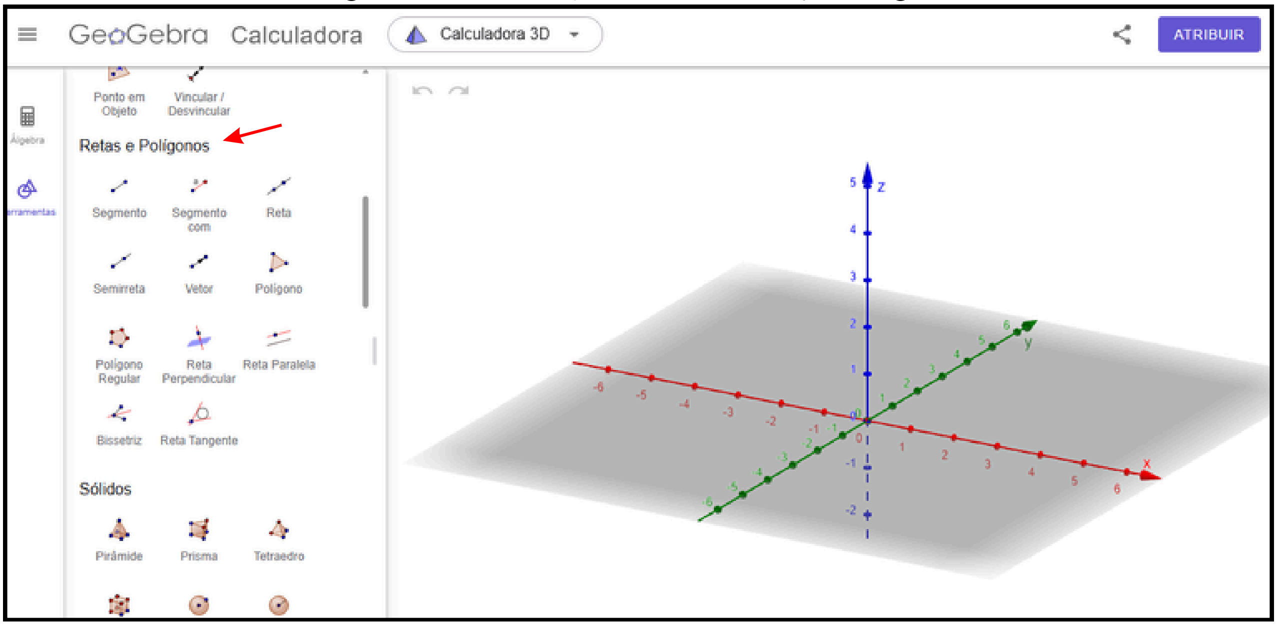
Figura 83 - Construção da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Retas e polígonos

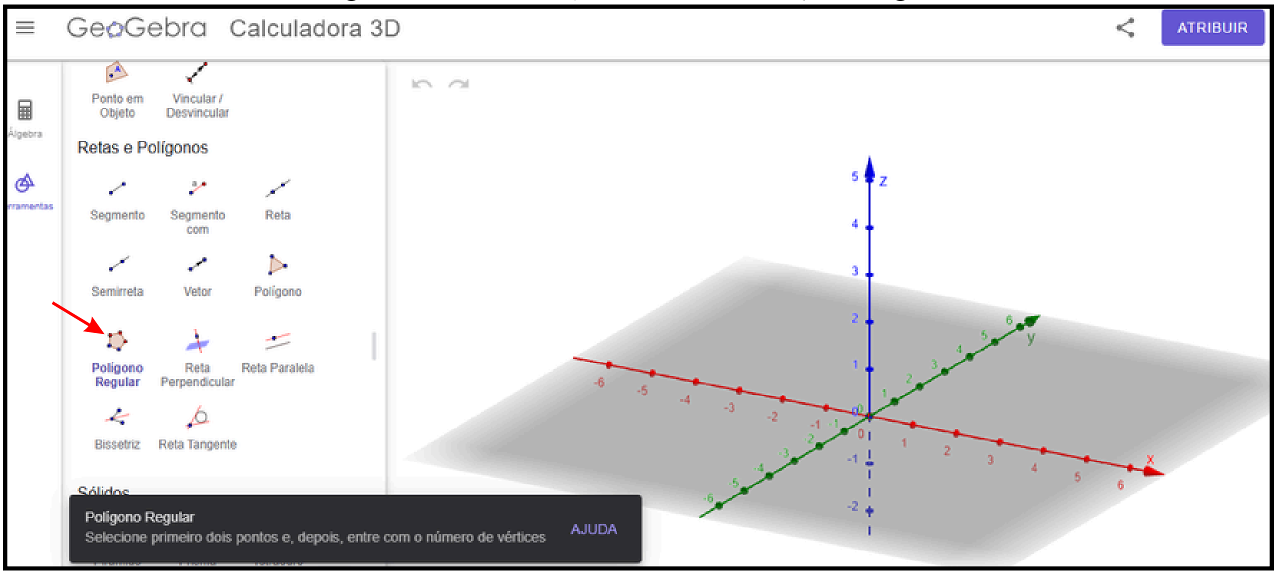
Figura 84 - Construção da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4.Agora, escolha o ícone Polígono Regular.

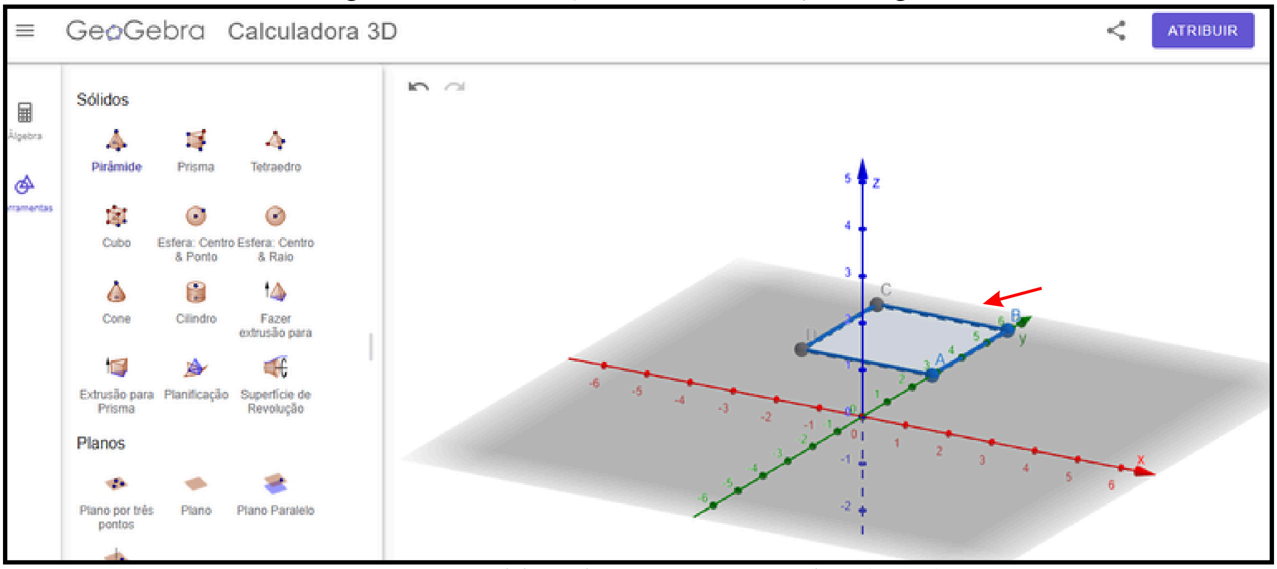
Figura 85 - Construção da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5.Após isso, selecione quatro vértices para a pirâmide.

Figura 86 - Construção da Pirâmide Quadrangular

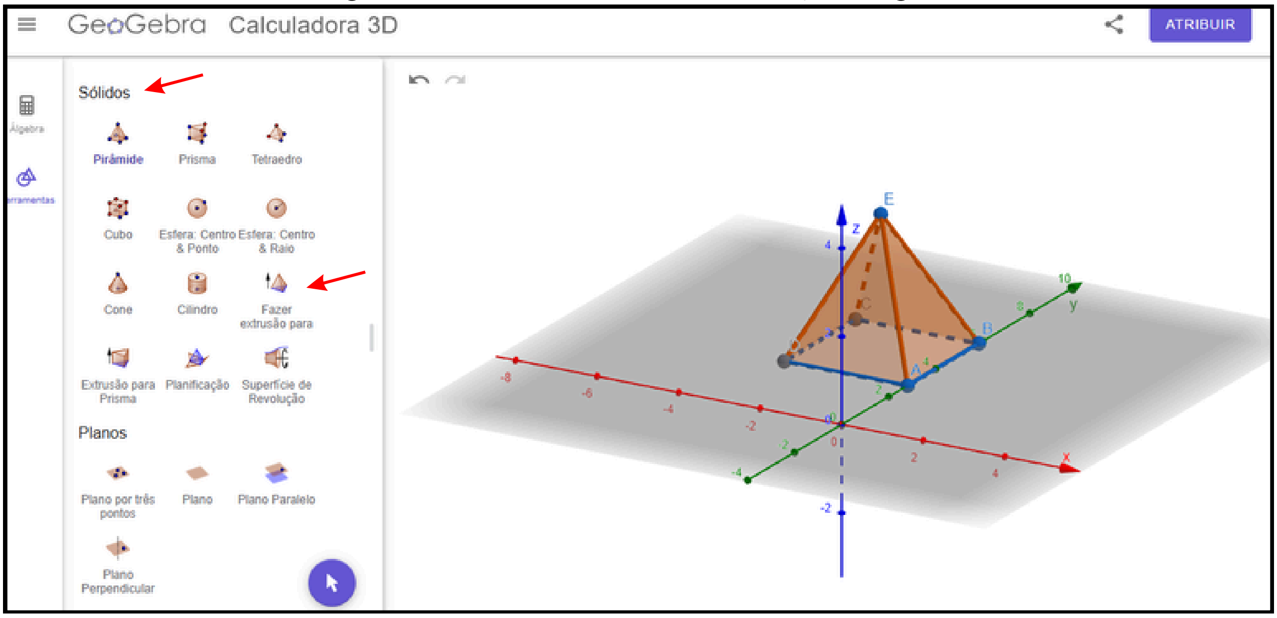


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

6.Em seguida, vá até a área de sólidos e escolha a pirâmide.

7.Depois de selecionar a pirâmide, clique sobre o quadrado e escolha até que altura você quer que ela seja.

Figura 87 - Construção da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

11.3 EXEMPLO DE PIRÂMIDE QUADRÂNGULAR

1) Construa uma pirâmide quadrangular com aresta da base 4 cm, e altura 8 cm. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

11.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

$L: \ Lado$

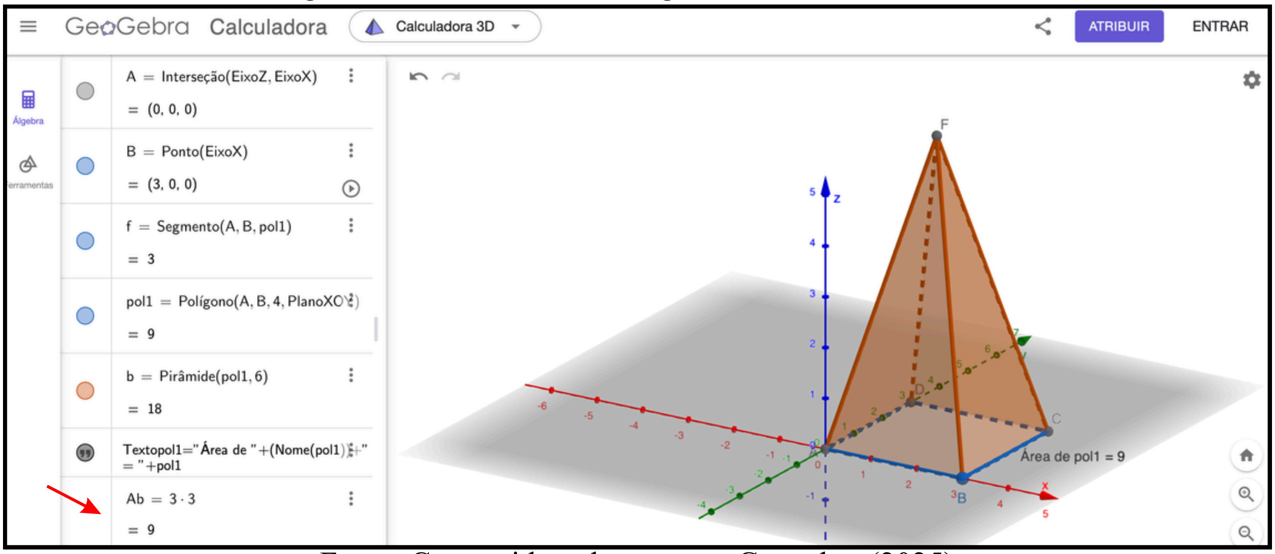
$A_b: \ Area \ da \ Base$

Em Fórmulas:

$A_b = L^2$

$A_b = L \cdot L$

Figura 88 - Pirâmide Quadrangular, cálculo da Área da Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

11.5 ÁREA DA LATERAL

Legendas:

$h_f: \ altura \ da \ face$

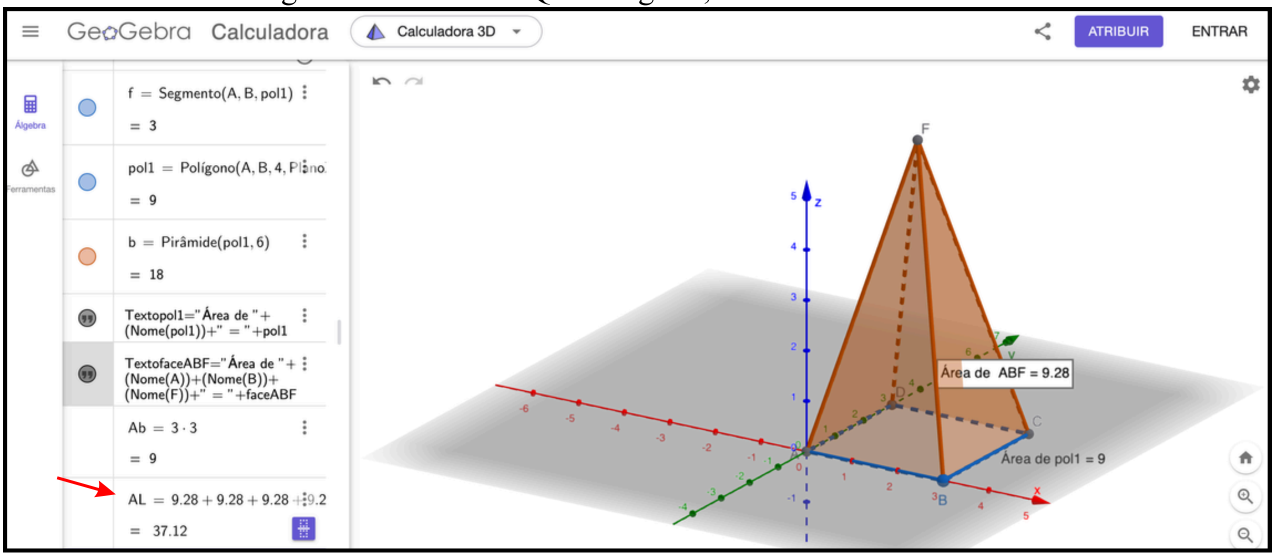
$L: \ Lado$

Em Fórmulas:

$A_L = L \cdot h_f + L \cdot h_f + L \cdot h_f + L \cdot h_f$

$A_L = 4L \cdot h_f$

Figura 89 - Pirâmide Quadrangular, cálculo da Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra

11.6 ÁREA TOTAL

Legendas:

$A_b:\ Area\ da\ Base$

$A_L:\ Area\ \ Lateral$

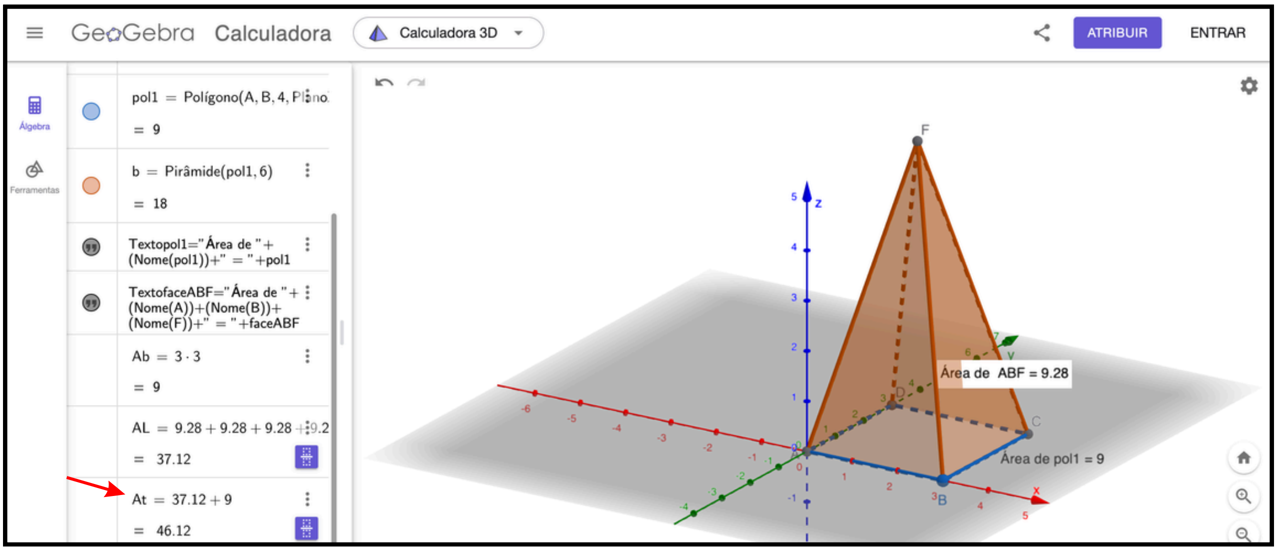
Legendas:

$A_T:\ Area\ \ Total$

Em Fórmulas:

$$A_T = A_L + A_b$$

Figura 90 - Pirâmide Quadrangular, cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

11.7 VOLUME

Legendas:

$L:\ Lado$

$h_p:\ Altura\ da\ Piramide$

Legendas:

$A_b:\ Area\ da\ Base$

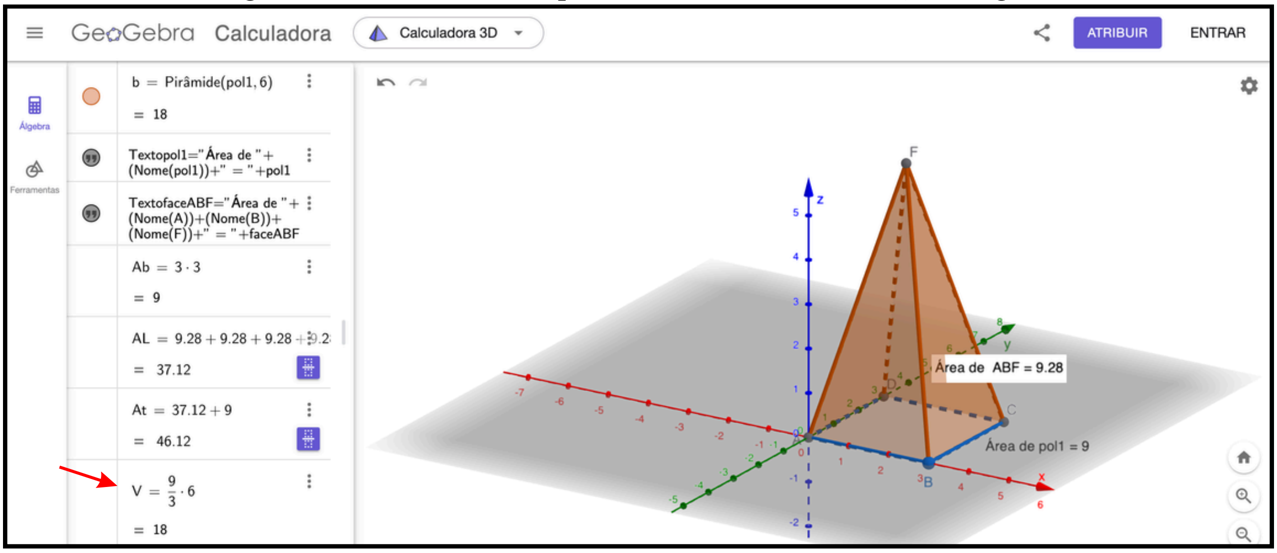
$V:\ Volume$

Em Fórmulas:

$$V = \frac{L^2 \cdot h_p}{3}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h_p}{3}$$

Figura 91 - Construção da planificação da Pirâmide Quadrangular

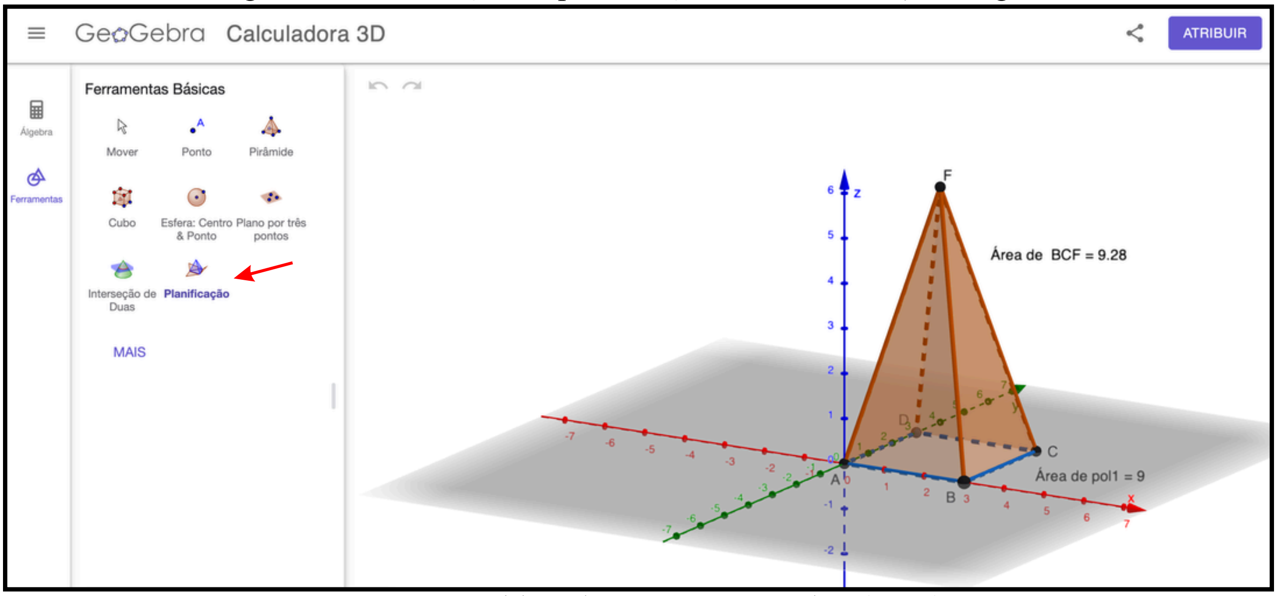


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

11.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

1.Primeiramente vamos em calculadora 3D, Após isso vamos em ferramentas básicas e clique em planificação.

Figura 92 - Construção da planificação da Pirâmide Quadrangular



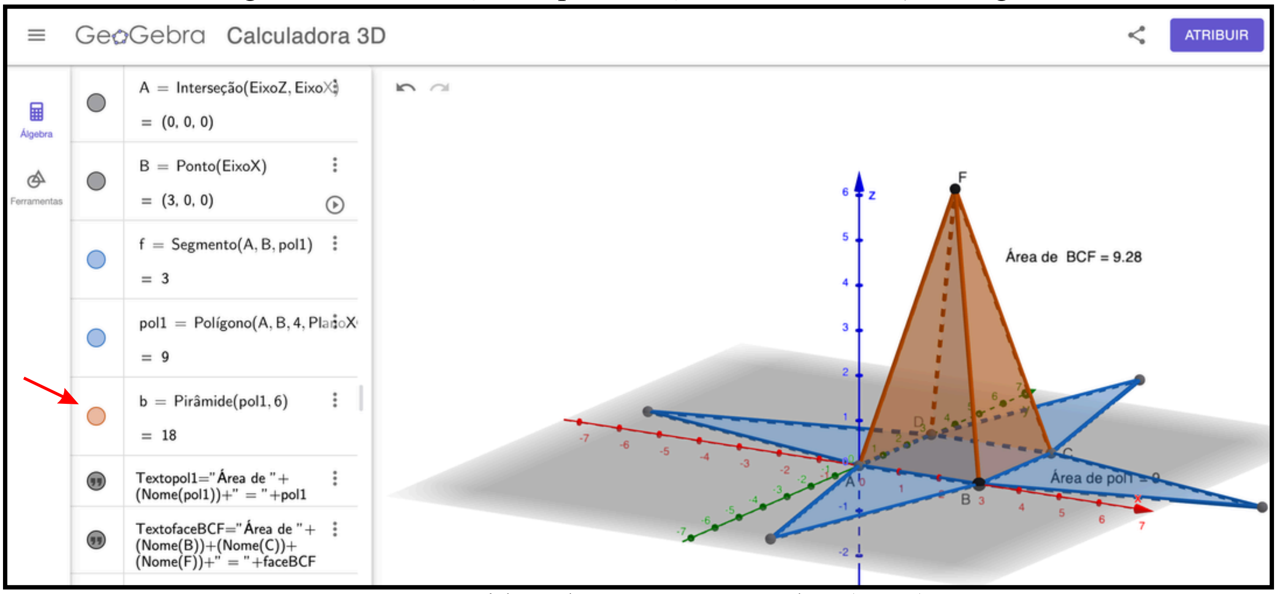
Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Após ter selecionado, vamos retirar o poligono para ter uma melhor visualização.

2. vamos para a parte de Álgebra

3.Agora vamos clicar em prisma para retirar o polígono

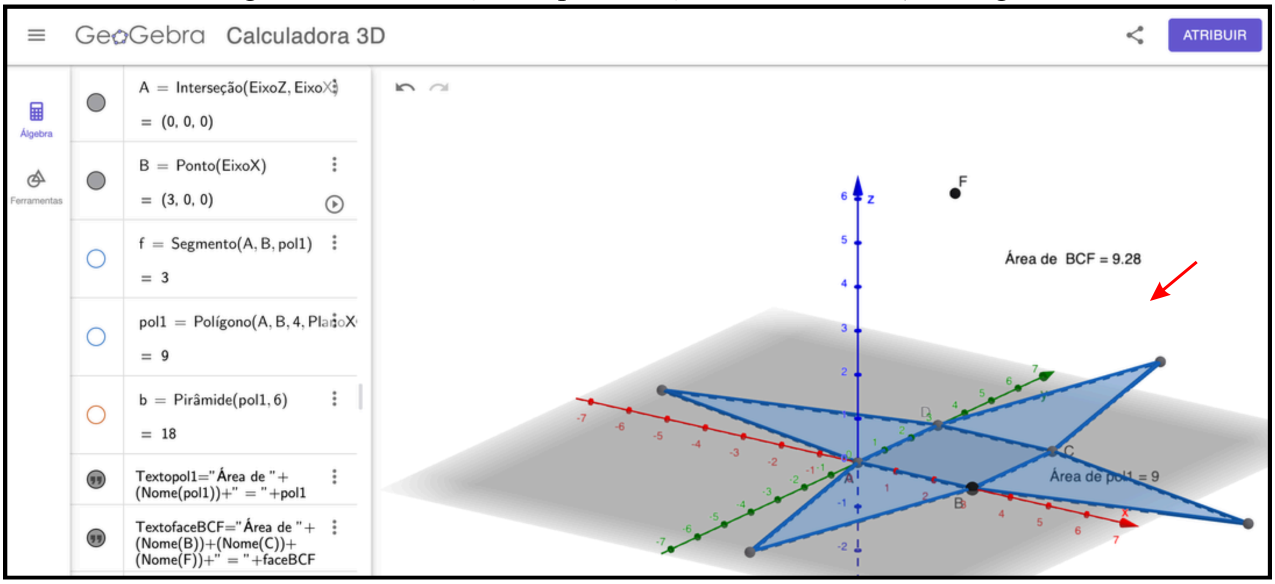
Figura 93 - Construção da planificação da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4. Agora vamos no icone do lado direito a cima para retirar alguns itens da tela.

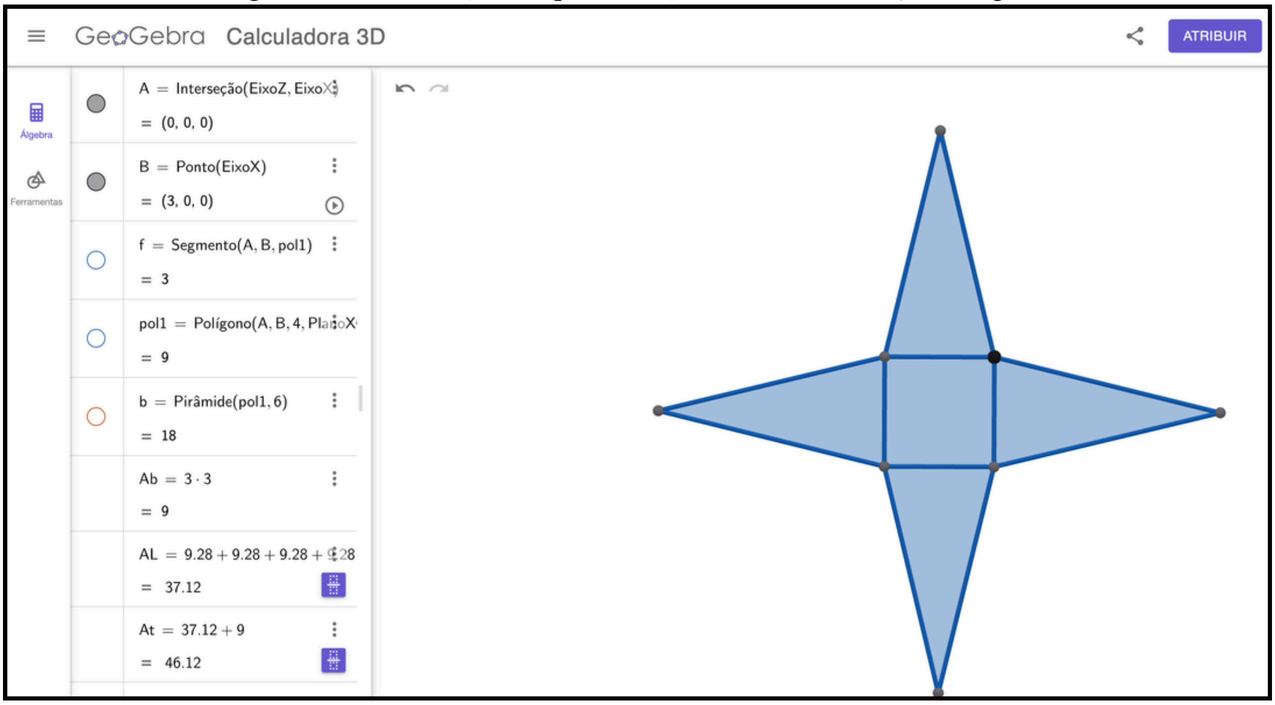
Figura 94 - Construção da planificação da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5. Agora vamos no icone do lado direito a cima para retirar alguns itens da tela.

Figura 95- Construção da planificação da Pirâmide Quadrangular



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

11.9 LINK E QR CODE DA COSNTRUÇÃO DO SÓLIDO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

PIRÂMIDE QUADRANGULAR

12 CILINDRO

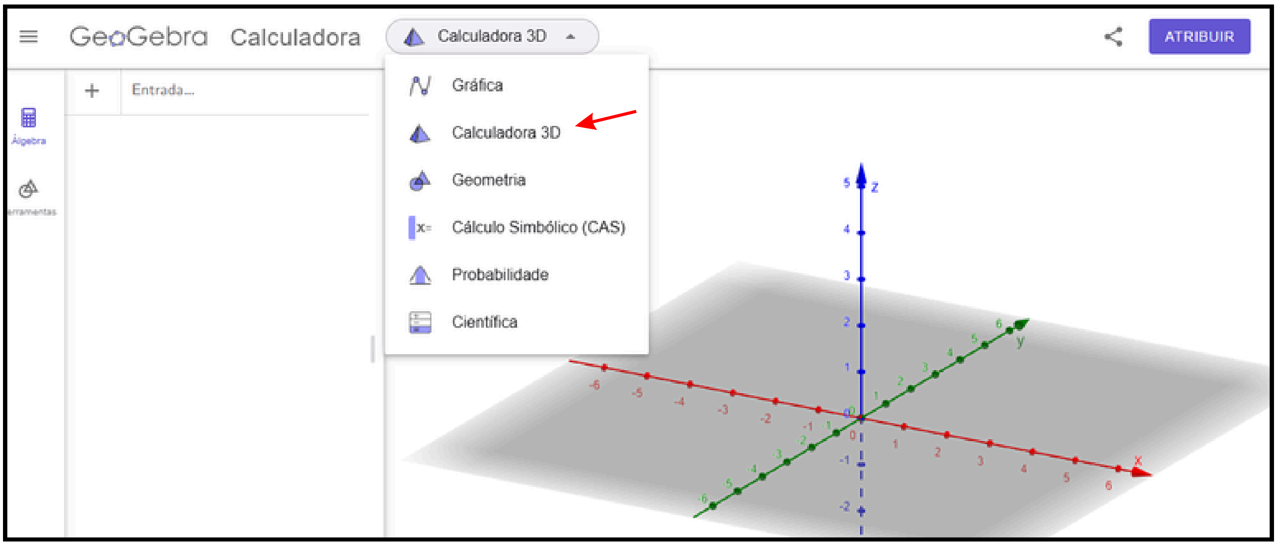
12.1 INTRODUÇÃO AO SÓLIDO

O cilindro é um sólido com duas bases circulares e uma superfície lateral curva que as conecta. Pode ser visto como um “prisma circular”. É um dos sólidos mais utilizados na indústria presente em latas, tubos e reservatórios. Elementos: duas bases planas e uma face lateral curva.

12.2 CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO

1. Primeiramente vamos na calculadora 3D.

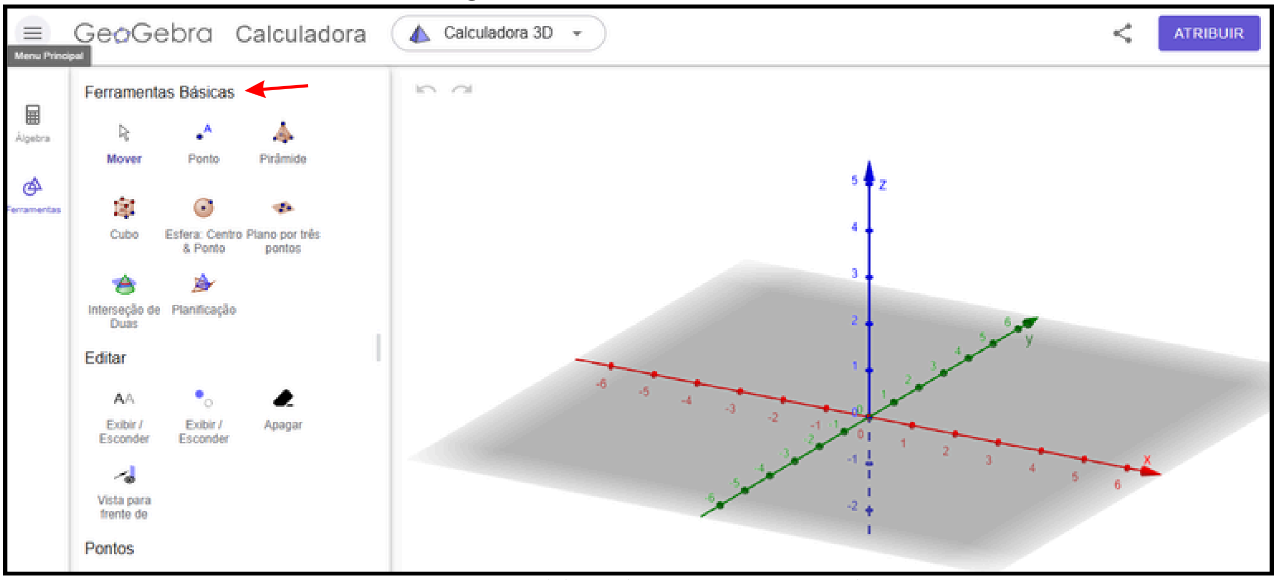
Figura 96 - Construção do Cilindro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2. Ferramentas Básicas

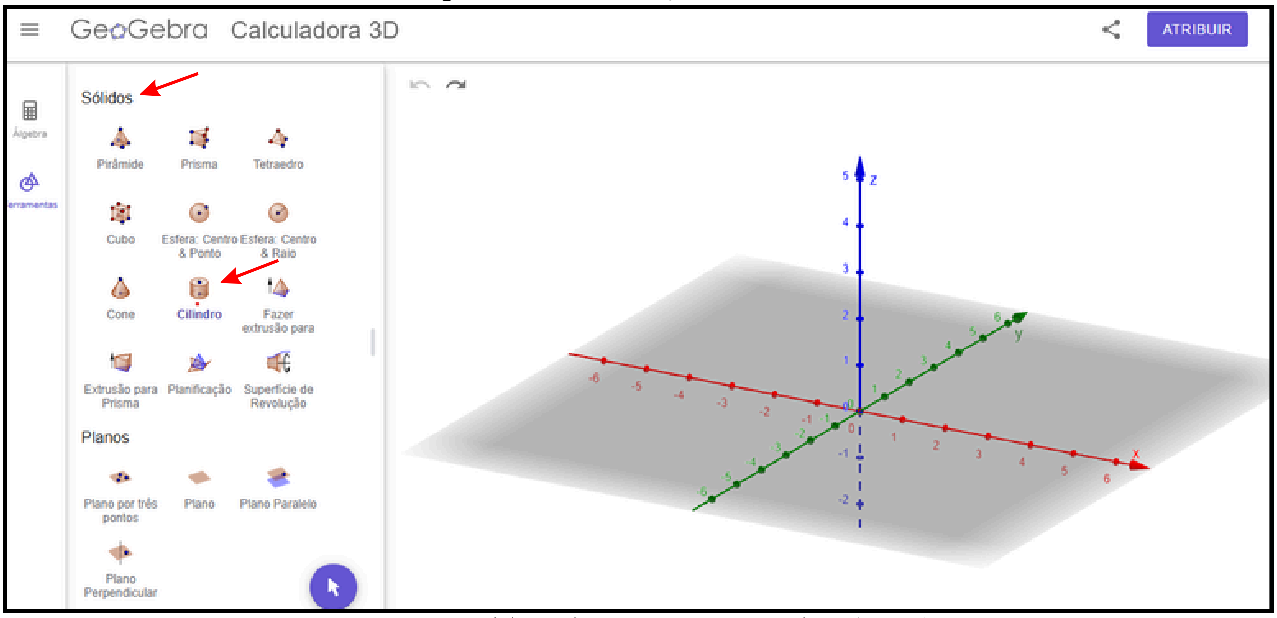
Figura 97 - Construção do Cilindro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Sólidos

Figura 98 - Construção do Cilindro

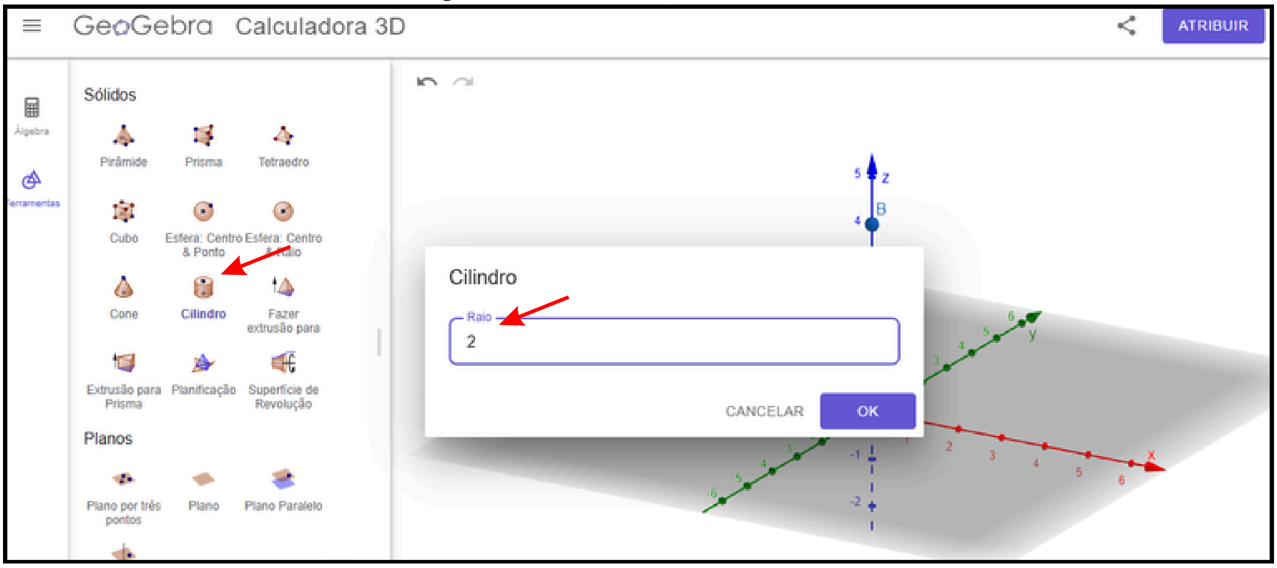


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4. selecione dois pontos no eixo do z

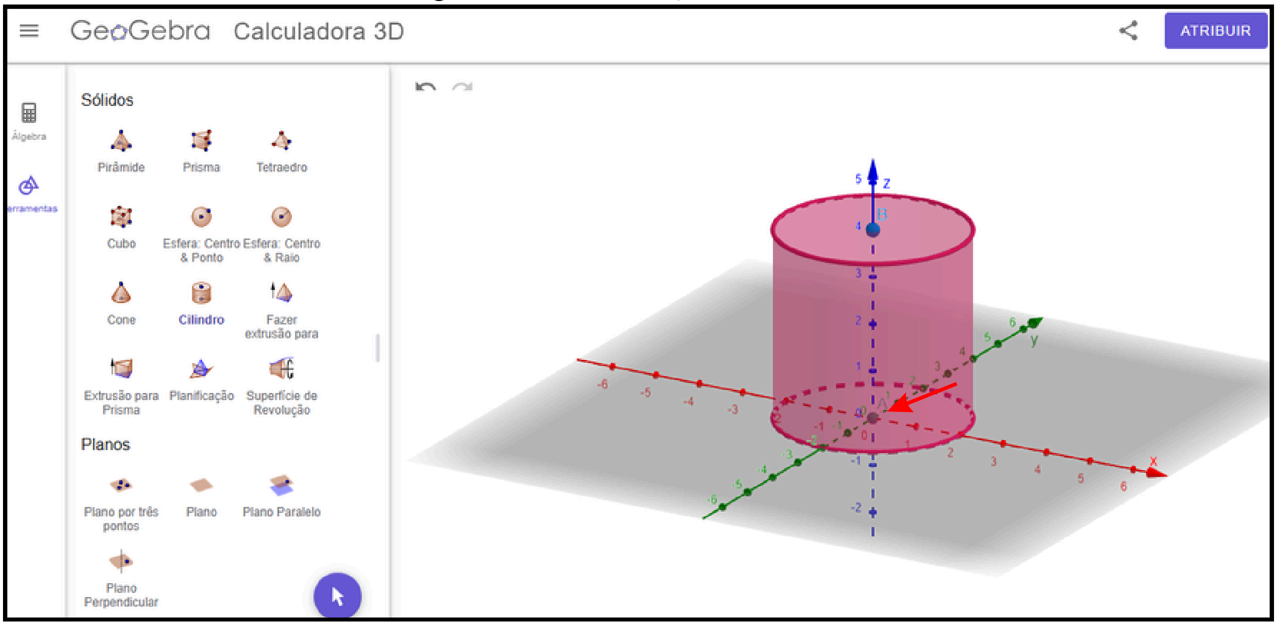
5.Após isso, escolha o raio

Figura 99 - Construção do Cilindro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

Figura 100 - Construção do Cilindro



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

12.3 EXEMPLO DE CILINDRO

1) Construa um cilindro quadrangular de altura 5cm e raio 2 cm. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

12.4 ÁREA DA BASE

Legendas:

$D = \ Diametro$

$r = \ Raio \ da \ Base$

Legendas:

$\pi = 3,14$

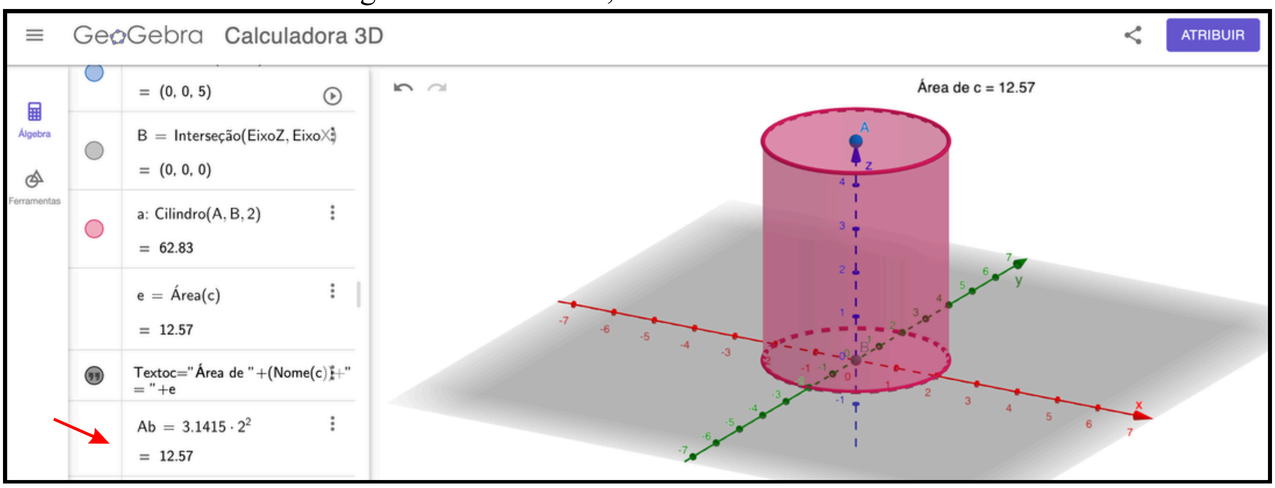
$A_b : \ Area \ da \ Base$

Em Fórmulas:

$r = \dfrac{D}{2}$

$A_b = \pi r^2$

Figura 101 - Cilindro, cálculo da Área da Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

12.5 ÁREA LATERAL

Legendas:

$r = \ Raio \ da \ Base$

$\pi = 3,14$

Legendas:

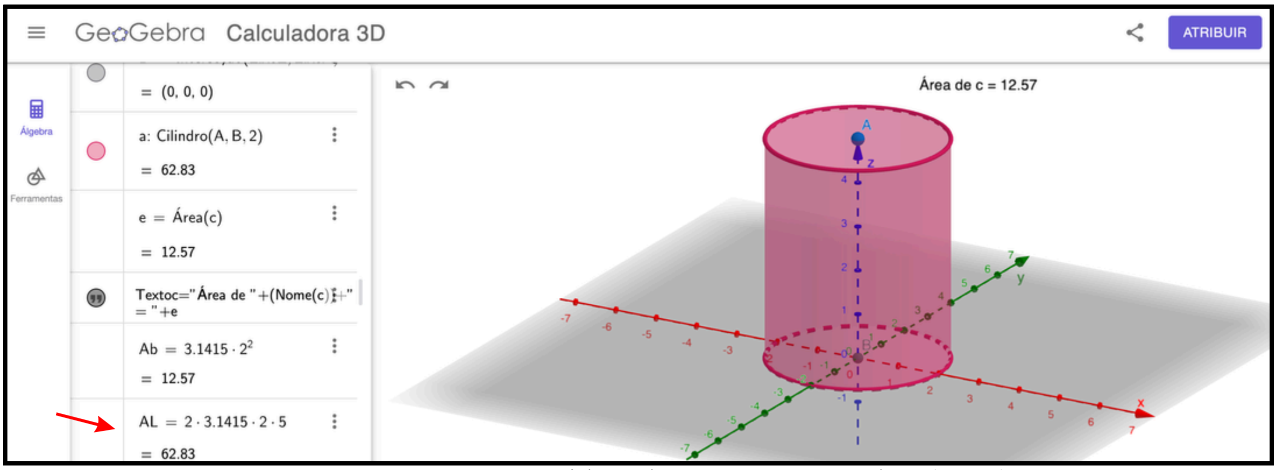
$H_C = \ Altura \ do \ Cilindro$

$A_L : \ Area \ \ Lateral$

Em Fórmulas:

$A_T = 2\pi r H_c$

Figura 102 - Cilindro, cálculo da Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

12.6 ÁREA TOTAL

Legendas:

$H_C =$ *Altura do Cilindro*

$r =$ *Raio da Base*

$\pi = 3,14$

Legendas:

$A_b :$ *Area da Base*

$A_L :$ *Area Lateral*

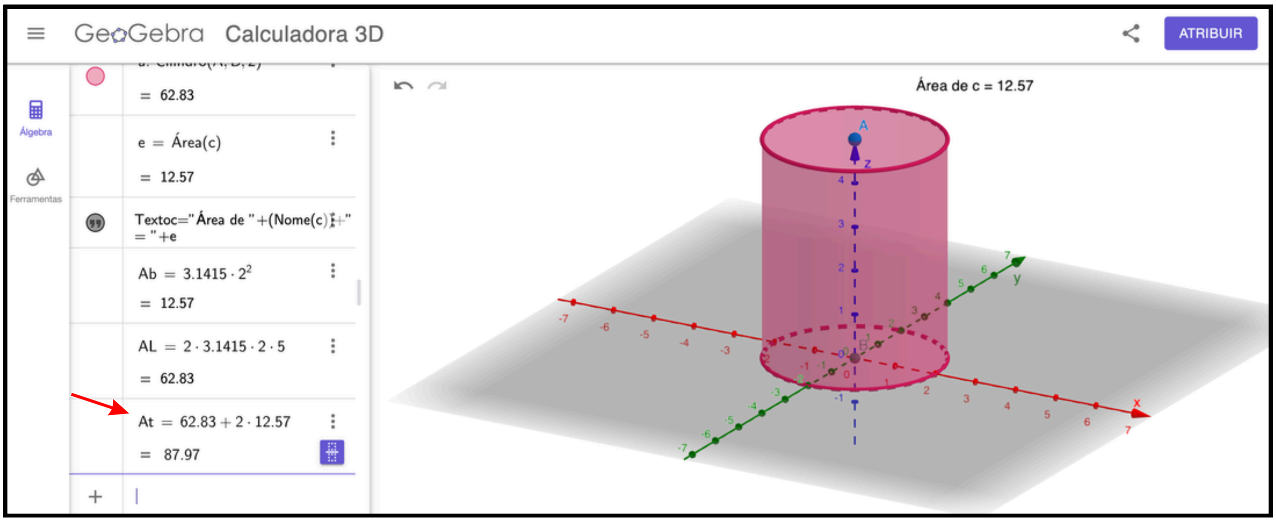
$A_T :$ *Area Total*

Em Fórmulas:

$A_T = 2\pi r(r + H_c)$

$A_T = A_L + 2A_b$

Figura 103 - Cilindro, cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

12.7 VOLUME

Legendas:

$H_C =$ *Altura do Cilindro*

$r =$ *Raio da Base*

$\pi = 3,14$

Legendas:

$A_b :$ *Area da Base*

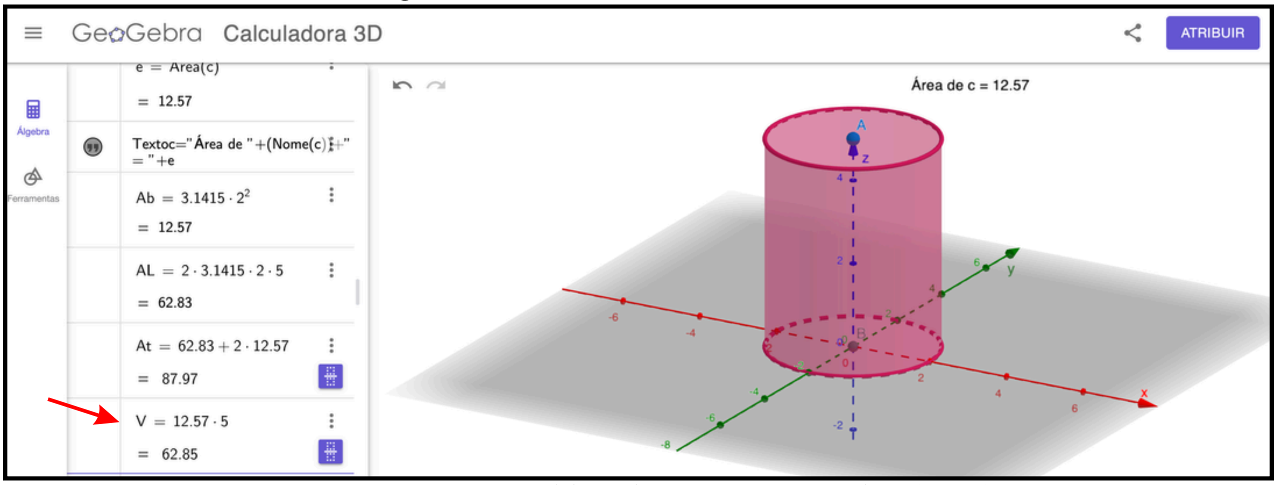
$V :$ *Volume*

Em Fórmulas:

$V = \pi \,.\, r^2 .\ H_C$

$V = A_b \cdot h_c$

Figura 104 - Cilindro, Cálculo do Volume

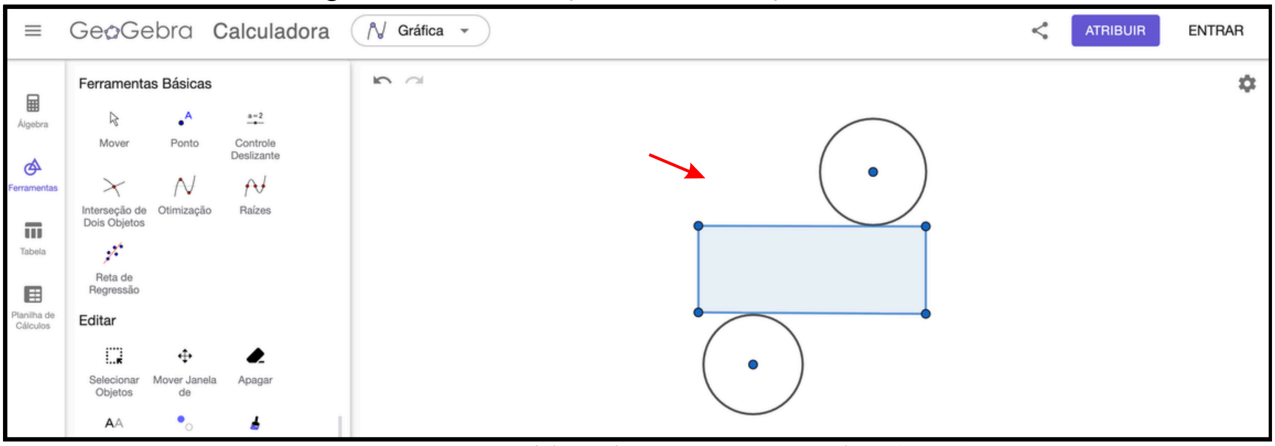


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

12.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

A planificação permite visualizar cada uma das faces do sólido de forma aberta no plano, facilitando a compreensão de sua estrutura e ajudando no cálculo de áreas e outras propriedades geométricas.

Figura 105 - Construção da Planificação do Cilindro.



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

12.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

CILINDRO

13 CONE

13.1 INTRODUÇÃO AO SÓLIDO

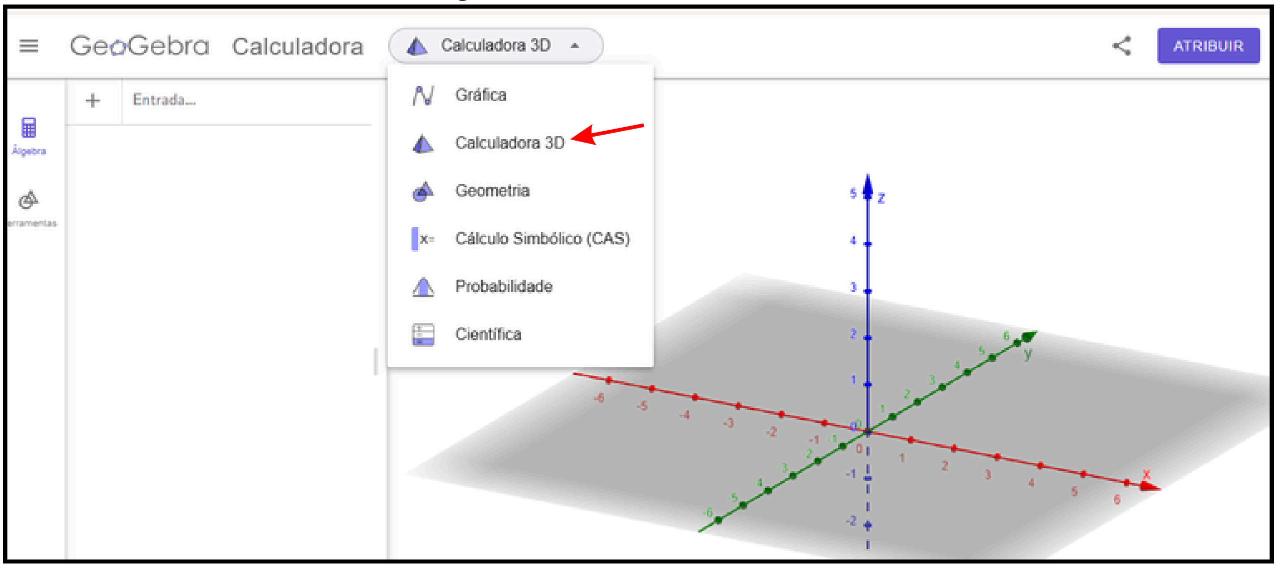
O cone é um sólido que possui uma base circular e um vértice que não está no plano da base. Sua forma é gerada pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Está presente em objetos como funis, torres e chapéus cônicos.

Elementos: uma base e uma superfície lateral curva.

13.1 CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO

1. Primeiramente vamos na calculadora 3D

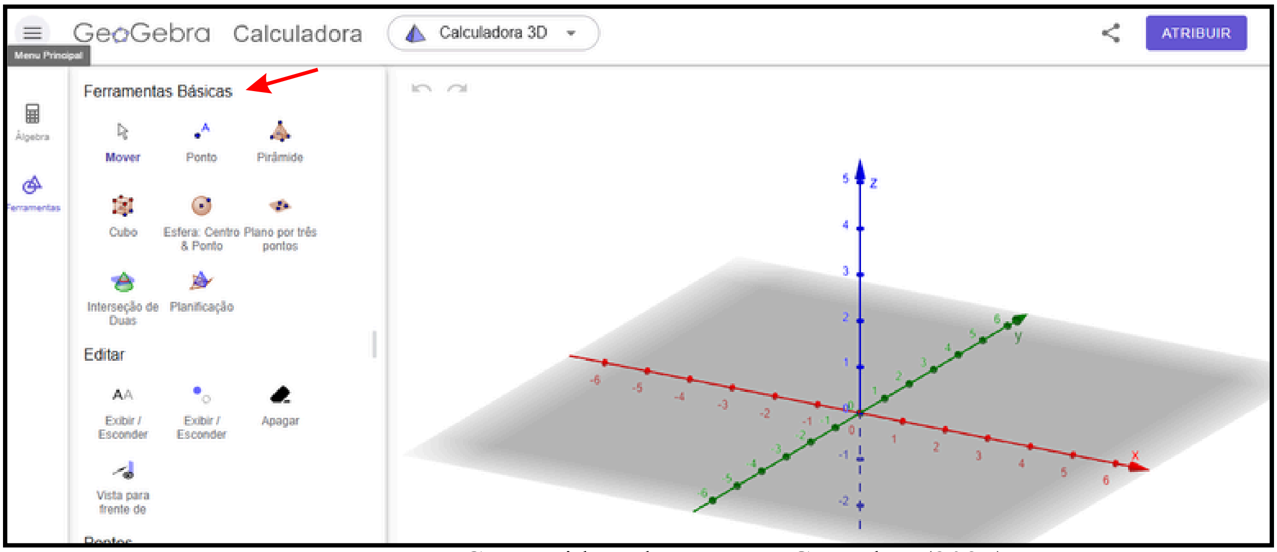
Figura 106- Construção do Cone



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2. Ferramentas Básicas

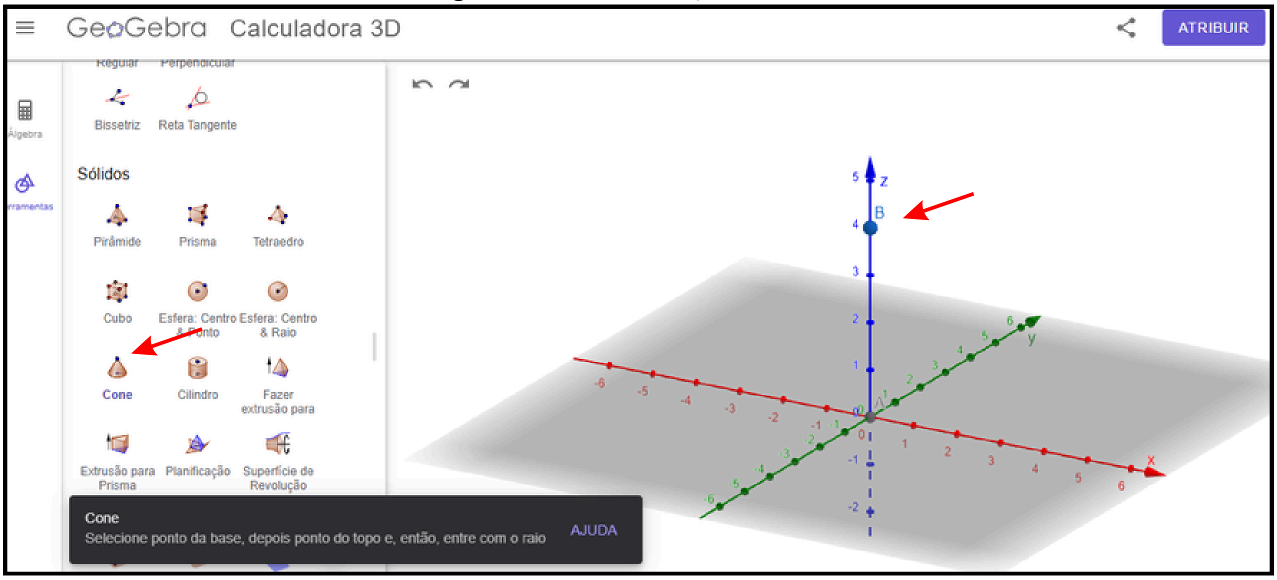
Figura 107 - Construção do Cone



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3. Sólidos

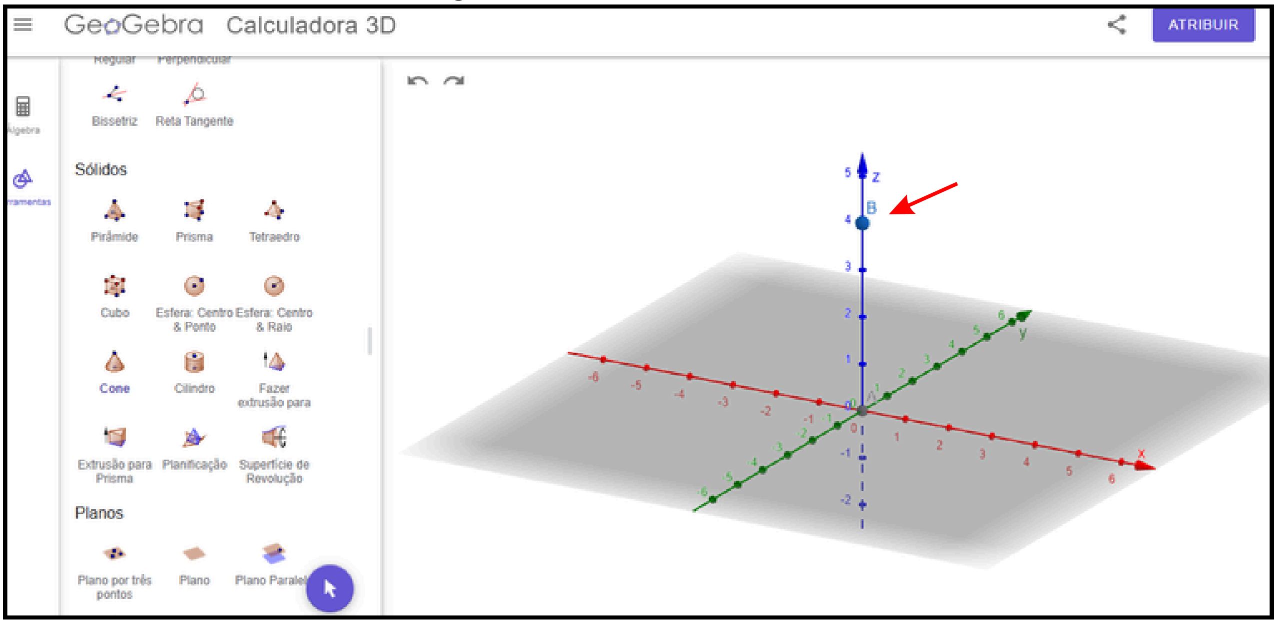
Figura 108 - Construção do Cone



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

4. selecione dois pontos no eixo do z

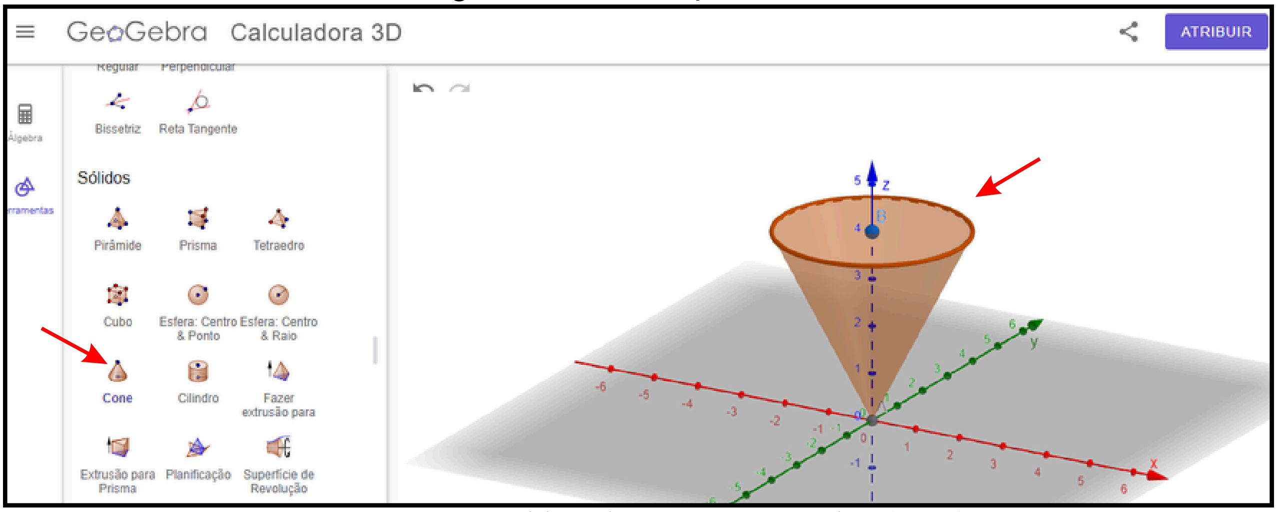
Figura 109 - Construção do Cone



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5.Depois disso, escolha o raio

Figura 110 - Construção do Cone



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

13.3 EXEMPLO DE CONE

1) Construa um cone de altura 4cm e raio 3 e geratriz 5 cm. Em seguida calcule a área da base, a área lateral, área total e o volume.

13.4 ÁREA BASE

Legendas:

$D =$ *Diametro*
$r =$ *Raio da Base*

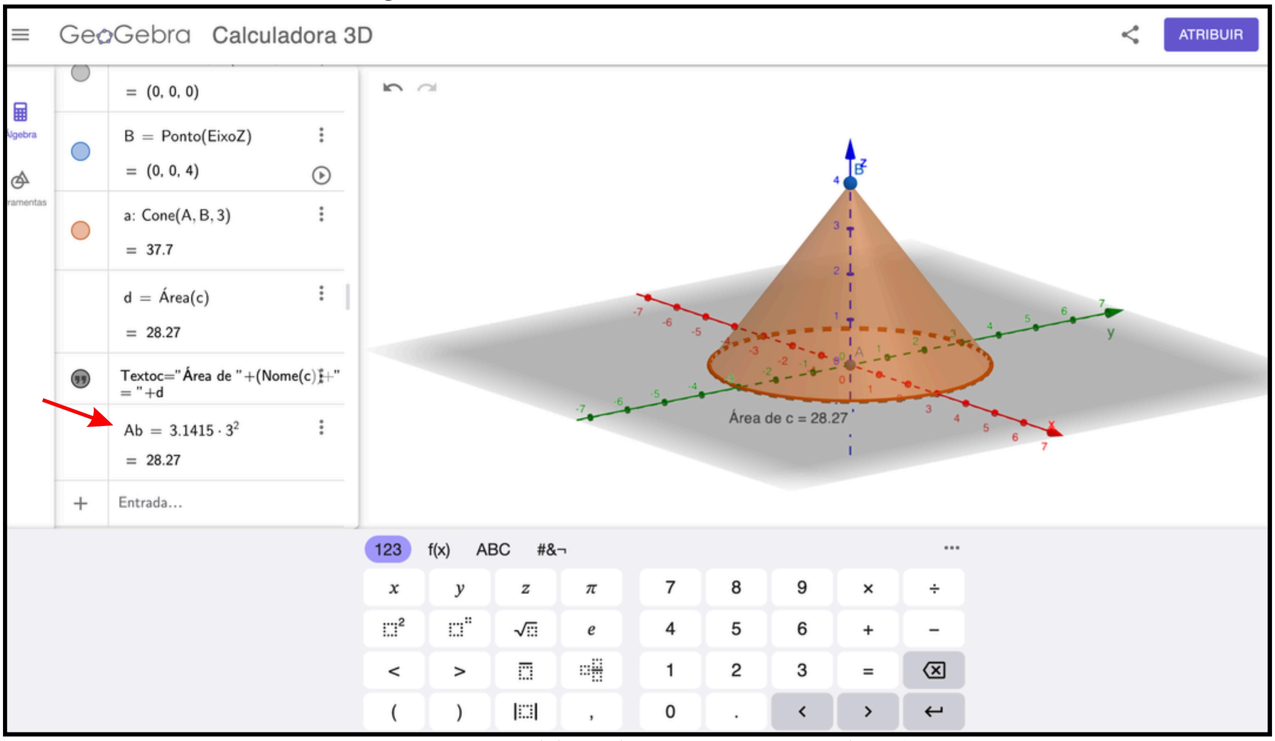
Legendas:

$\pi = 3,14$

Em Fórmulas:

$$r = \frac{D}{2}$$
$$A_b = \pi r^2$$

Figura 111 - Cone, Cálculo da Área da Base



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

13.5 ÁREA LATERAL

Legendas:

$r = \ Raio\ da\ Base$

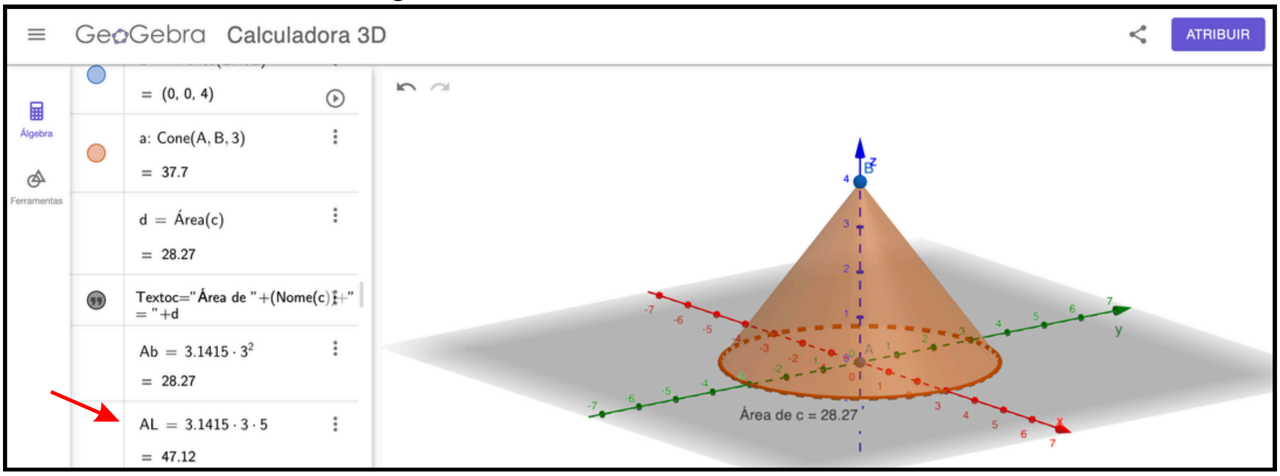
Legendas:

$g = \ geratriz\ do\ Cone$

Em Fórmulas:

$A_L = \pi r g$

Figura 112 - Cone, Cálculo da Área Lateral



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

13.6 ÁREA TOTAL

Legendas:

$r = \ Raio\ da\ Base$

$g = \ geratriz\ do\ Cone$

Legendas:

$A_b: \ Area\ da\ Base$

$A_L: \ Area\ \ Lateral$

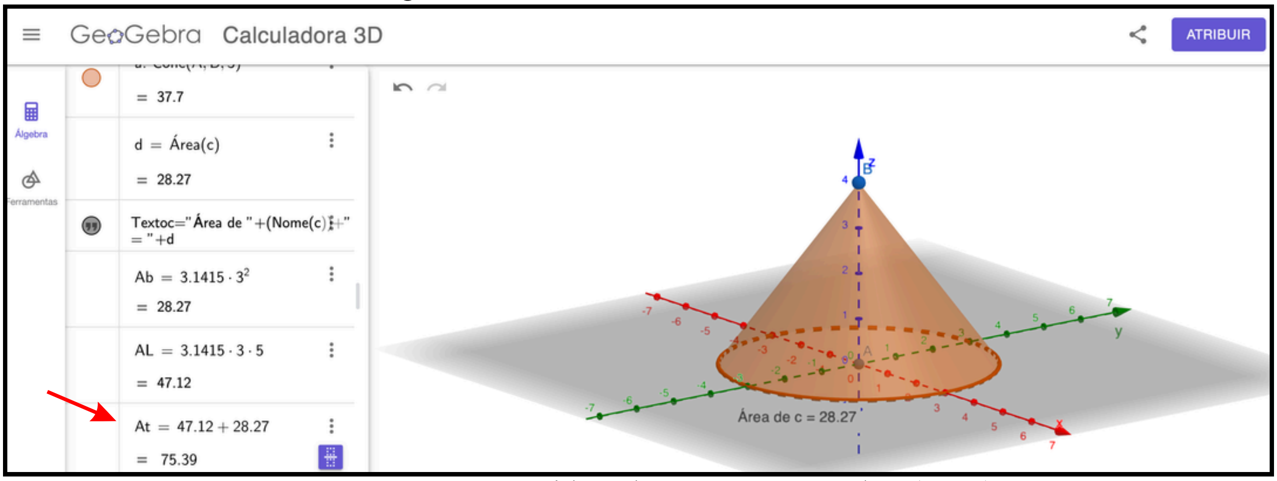
$A_T: \ Area\ \ Total$

Em Fórmulas:

$A_T = \pi r(r + g)$

$A_T = A_L + A_b$

Figura 113 - Cone, Cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

13.7 VOLUME

Legendas:

$h_C = \ Altura\ do\ Cone$

$\pi = 3,14$

Legendas:

$r = \ Raio\ da\ Base$

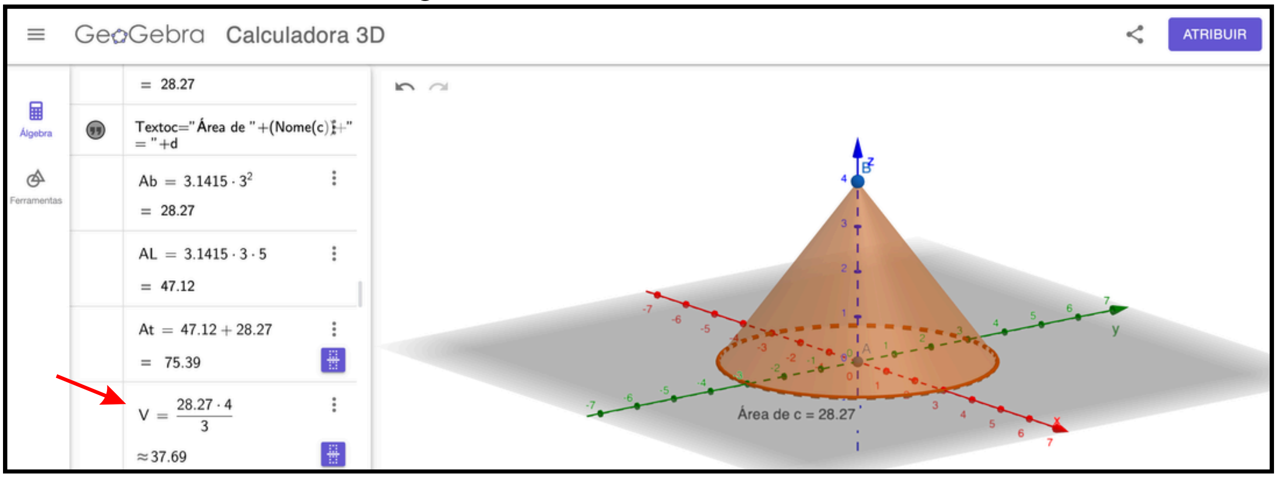
$A_b: \ Area\ da\ Base$

Em Fórmulas:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h_c}{3}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h_c}{3}$$

Figura 114 - Cone, Cálculo do Volume

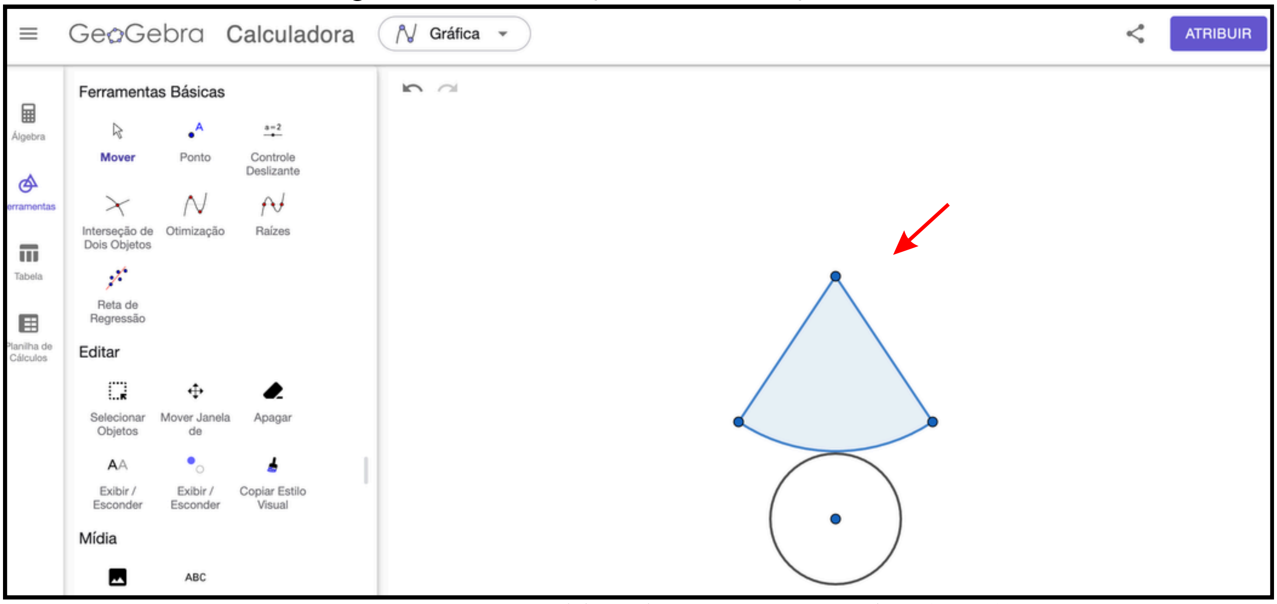


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

13.8 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

Agora, temos a planificação desse polígono, ou seja, sua representação em duas dimensões. A planificação permite visualizar cada uma das faces do sólido de forma aberta no plano, facilitando a compreensão de sua estrutura e ajudando no cálculo de áreas e outras propriedades geométricas.

Figura 115 - Construção da Planificação do Cone



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

13.9 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

CONE

14 ESFERA

14.1 INTRODUÇÃO

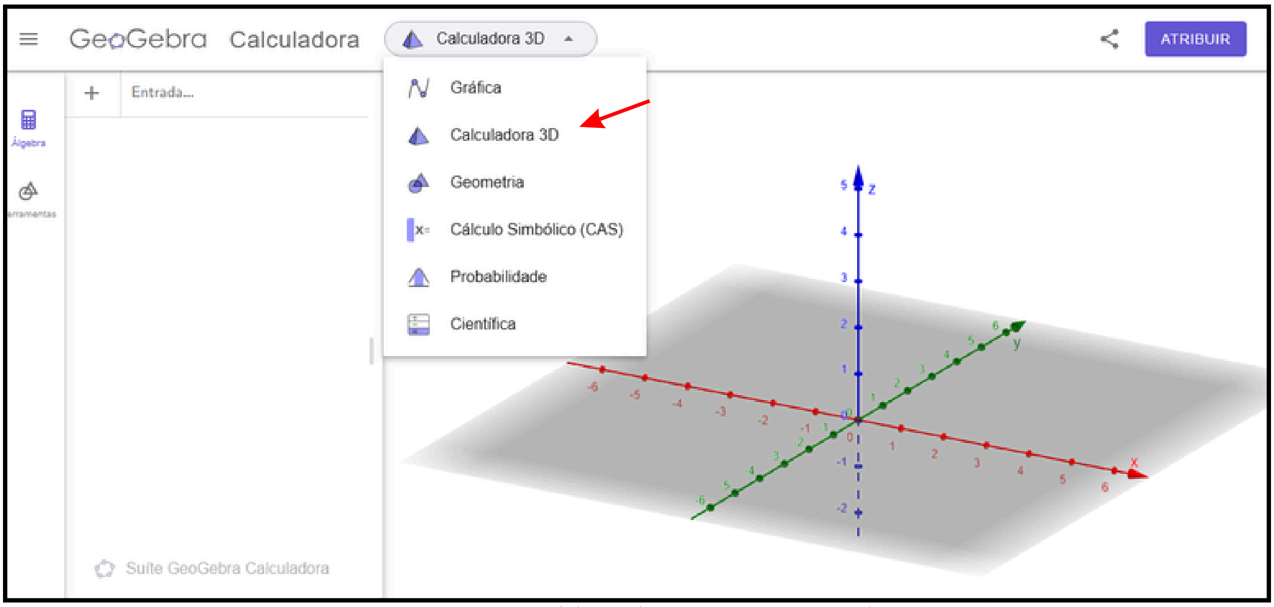
A esfera é o sólido perfeitamente simétrico formado por todos os pontos do espaço equidistantes de um ponto fixo (o centro). Pode ser gerada pela rotação de um semicírculo em torno do seu diâmetro. É comum em bolas, planetas e gotas de líquido.

Elementos: uma superfície curva e contínua, sem vértices ou arestas.

14.2 CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO

1.Primeiramente vamos na calculadora 3D

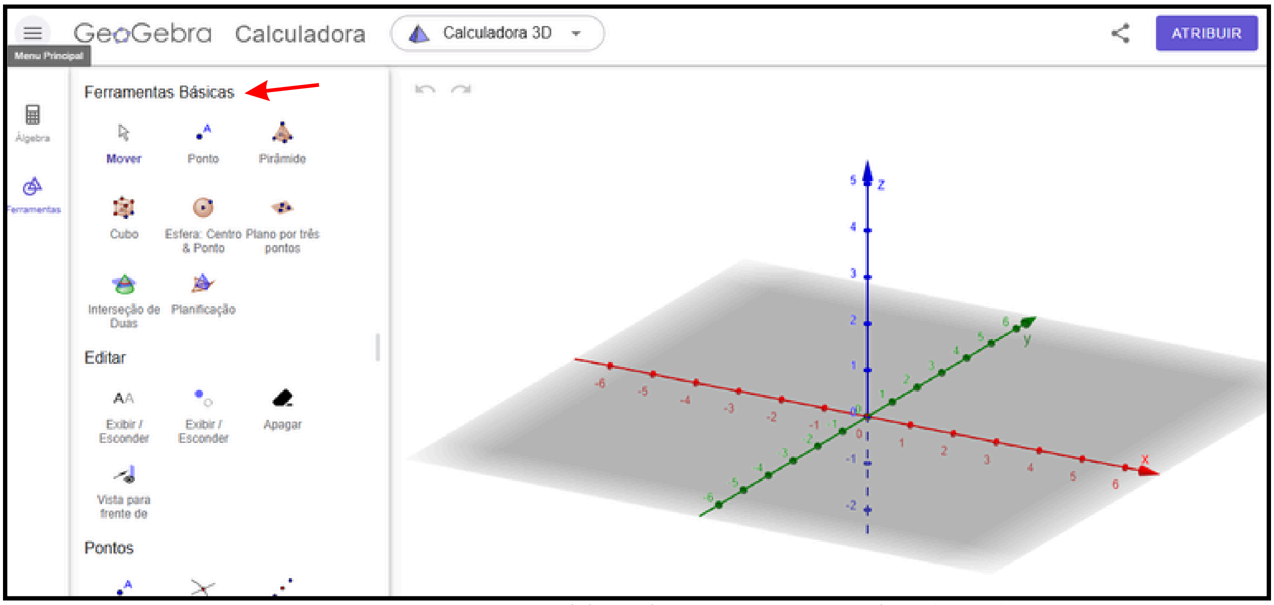
Figura 116 - Construção da Esfera



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

2.Ferramentas Básicas

Figura 117 - Construção da Esfera

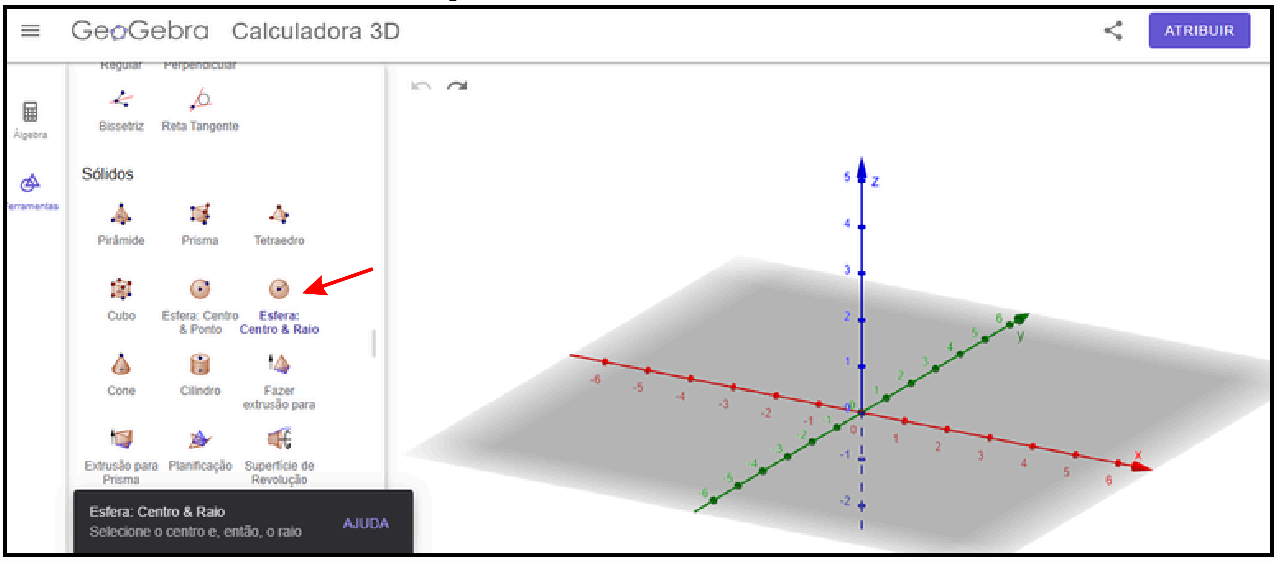


Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

3.Sólidos

4.Escolha o ícone Esfera: Centro & Raio para iniciar a construção

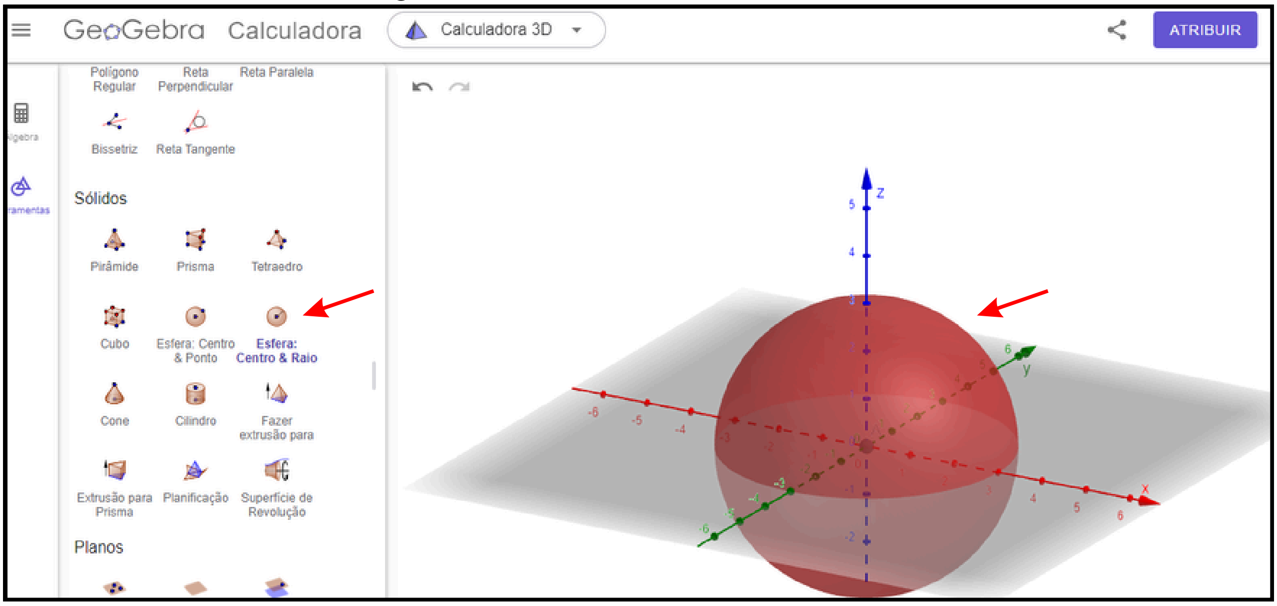
Figura 118 - Construção da Esfera



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

5. Escolher o valor do raio

Figura 119 - Esfera, Cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

14.3 EXEMPLO DE ESFERA

1) Construa um esfera de raio 5 cm. Em seguida calcule área total e volume.

14.4 ÁREA TOTAL

Legendas:

$D = \ Diametro$
$R = \ Raio \ da \ Esfera$

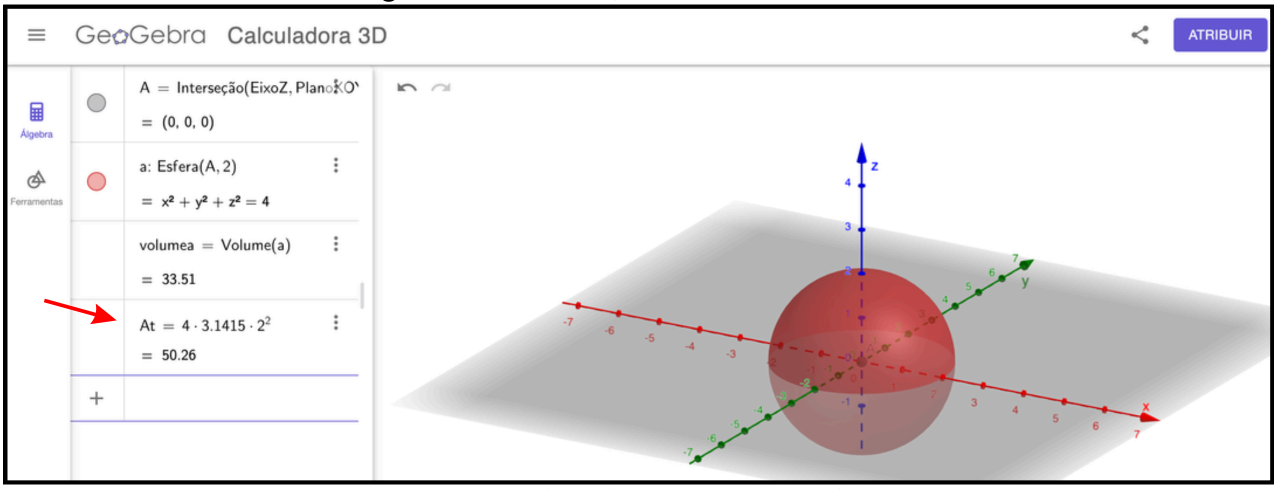
Legendas:

$\pi = 3,14$
$A_T : \ Area \ Total$

Em Fórmulas:

$r = \dfrac{D}{2}$
$A_T = 4\pi R^2$

Figura 120 - Esfera, Cálculo da Área Total



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

14.5 VOLUME

Legendas:

$D =$ *Diametro*

$R =$ *Raio da Esfera*

Legendas:

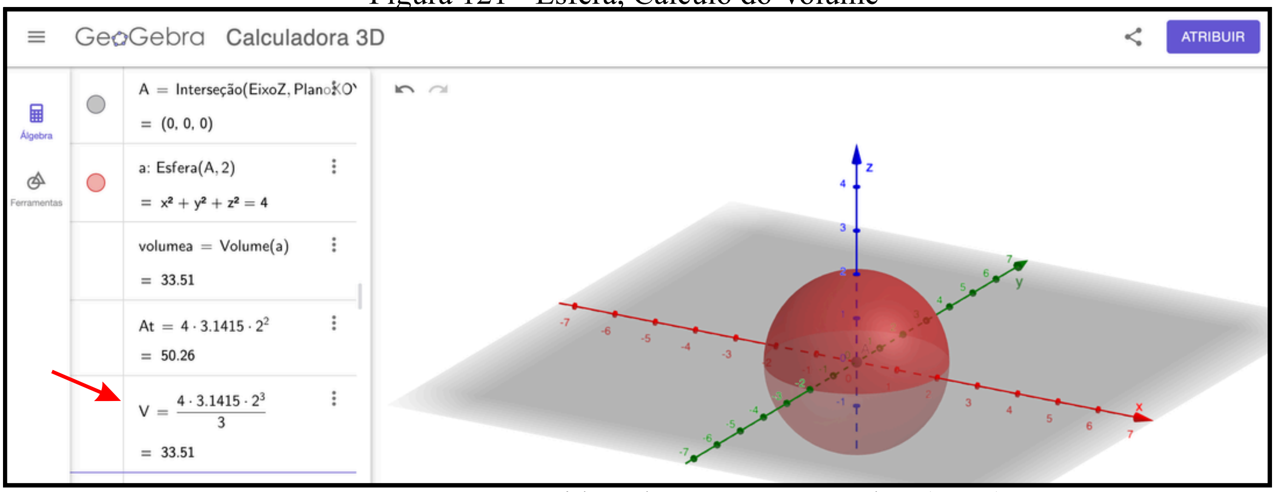
$\pi = 3,14$

Em Fórmulas:

$$r = \frac{D}{2}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Figura 121 - Esfera, Cálculo do Volume



Fonte: Construido pelo autor no Geogebra (2025)

14.6 PLANIFICAÇÃO DO SÓLIDO

Por que a esfera não possui planificação?

A planificação de um sólido é a representação de sua superfície em um plano, sem cortes ou sobreposições, preservando suas proporções.

14.7 LINK E QR CODE DA CONSTRUÇÃO

Para explorar a construção deste polígono no GeoGebra e acessar as fórmulas de volume, área, área lateral, área da base e área total, escaneie o QR code ou acesse o link abaixo. Assim, você terá todos os recursos de forma prática e interativa.

https://www.geogebra.org/3d/umazzfke

ESFERA

15 BANCO DE FÓRMULAS

Quadro 7 - Banco de Fórmulas

BANCO DE FÓRMULAS			
ÁREA DA BASE	ÁREA DA FACES E ÁREA DA LATERAL	ÁREA TOTAL	VOLUME
$A_b = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$A_f = L \cdot h_f$	$A_T = A_L + 2 \cdot A_b$	$V = A_b \cdot h_f$
$A_b = \frac{L \cdot h_b}{4}$	$A_{f1} = a \cdot h_f$	$A_T = A_L + A_b$	$V = a \cdot b \cdot h_f$
$A_b = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$	$A_{f2} = b \cdot h_f$	$A_T = 4 \cdot A_f$	$V = a \cdot a \cdot a$
$A_b = L^2$	$A_f = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$A_T = 6. a^2$	$V = a^3$
$A_b = L \cdot L$	$A_L = 3 \cdot A_f$	$A_T = 2. a. b + 2. a. h_f + 2. b. h_f$	$V = A_b \cdot h$
$A_b = a \cdot b$	$A_L = 6 \cdot A_f$	$A_T = 4. \pi \cdot r^2$	$V = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot h_f$
$A_b = a \cdot a$	$A_L = 4. a^2$	$A_T = \pi r(r + g)$	$V = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \cdot h_f$
$A_b = a^2$	$A_L = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$	$A_T = 2\pi r(r + H_C)$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$r = \frac{D}{2}$	$A_L = \pi. r. g$		$V = \frac{\pi \cdot r^2. h_C}{3}$
$R = \frac{D}{2}$	$A_L = 2\pi. r. H_C$		$V = \frac{A_b \cdot h_C}{3}$
$A_b = \pi \cdot r^2$	$A_L = 4. L \cdot h_f$		$V = \pi \cdot r^2. H_C$
			$V = A_b \cdot H_C$
			$V = \frac{L^2 \cdot h_p}{3}.$
			$V = \frac{A_b \cdot h_p}{3}$

Fonte - Elaborada pelo Autor

Quadro 8 - Legendas das Fórmulas

LEGENDAS		
a: Arresta	H_C: Altura do Cilindro	A_f: Área da Face
b: Arresta	L: Lado da base	A_{f1}: Área da Face 1
h: Altura	g: geratriz do Cone	A_{f2}: Área da Face 2
D = Diametro	h_C: Altura do Cone	A_b: Área da Base
r : Raio da Base	h_f: Altura da Face	A_L: Área Lateral
π: $pi, \pi = 3,14$	V: Volume	A_T: Área Total
h_b: Altura da base		

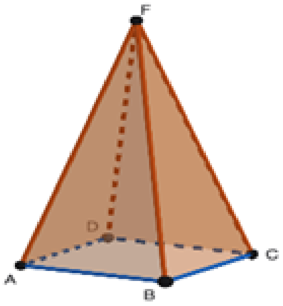
Fonte - Elaborada pelo Autor

16 EXERCÍCIOS

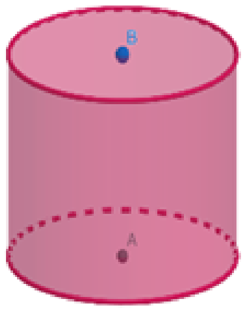
16.1 EXERCÍCIO I

01) Com base nos materiais manipuláveis, verifique as medidas fazendo as anotações, construa no GeoGebra os sólidos geométricos, calcule área total e volume

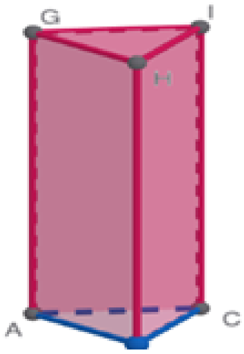
A)



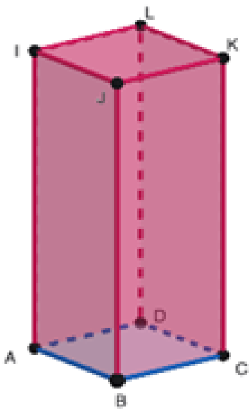
B)



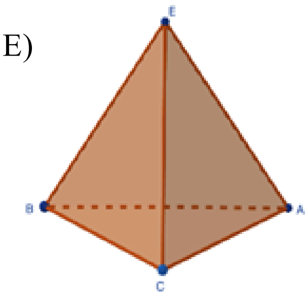
C)



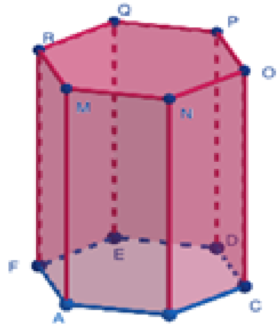
D)



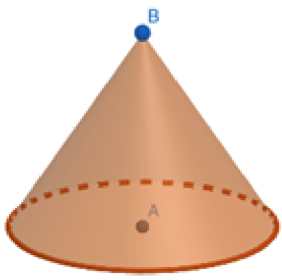
E)



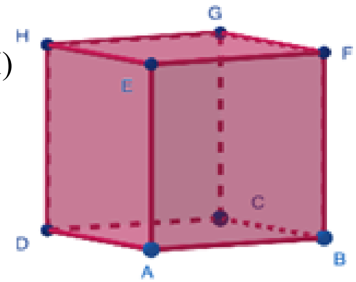
F)



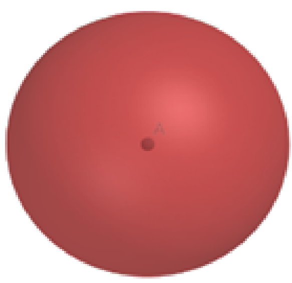
G)



H)

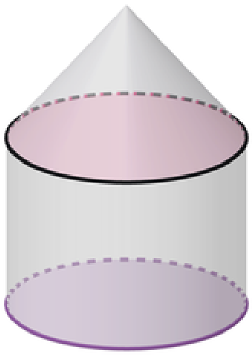


I)

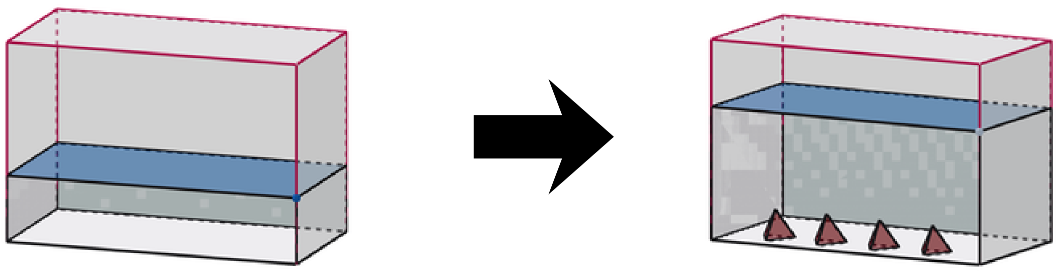


16.2 EXERCÍCIO II

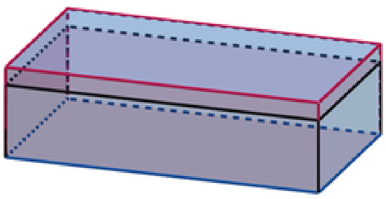
01) **(Enem 2016-adaptada)** Um reservatório de água é composto por um cilindro reto de 3 m de altura e raio da base de 2 m, sobre o qual há um cone com a mesma base. Calcule o volume total do reservatório e determine quantas viagens um caminhão de 15 m³ deve fazer para transportá-lo. (Use $\pi = 3$)



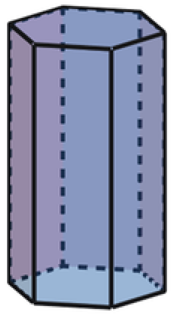
02) (SARES- adaptada) Um aquário tem base de 40 cm por 30 cm e está com água até 20 cm de altura. Ao colocar 4 tetraedros de mesmo volume, o nível sobe para 32cm. Calcule o volume de cada tetraedros.



03) (**UFSM - adaptada**) Uma caixa retangular com tampa mede 30 cm de comprimento, 20 cm de largura e 10 cm de altura. Sabendo que serão acrescentados 3% para as dobras, determine o total de papelão utilizado na confecção da caixa.



04) (Construção do Autor) Um prisma de base hexagonal regular tem lado da base de 4 cm e altura de 10 cm.



a) Calcule a área da base.

b) Calcule a área lateral.

c) Determine a área total.

d) Calcule o volume do prisma.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. et al. A matemática do Ensino Médio. Rio de janeiro: SBM, v. 2, ed. 11, 2023.

BICUDO, M. A. V. et al. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. ed. 4. São Paulo: Cortez, 2012

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Plana. V. 9 e V.10, ed. 9. São Paulo: Atual, 2013.

OLIVEIRA JUNIOR, A. V. Sólidos Geométricos: uma estratégia de ensino com o auxílio do GeoGebra e materiais manipuláveis. In: IV Semana Acadêmica de Matemática de Castanhal - IV SAMATC (Anais) / Roberta Modesto Braga; Renato Germano (Orgs.) – Belém: Pará, 2026. e.1. p. 321-330.

FICCHINI, W. Matemática: volume único. ed. 1. São Paulo: Saraiva, 1996.

GeoGebra. Software de matemática livre. Disponível em: https://www.geogebra.org". Acesso em: 2 set. 2025.

LIMA, E. L. et al. A matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM. v. 2, ed. 11, 2016.

MUNIZ NETO, A. C. Geometria. ed. 2. Rio de Janeiro: SBM (sociedade brasileira de matemática), 2022.

SUTHERLAND, R. Ensino eficaz de matemática. Porto Alegre: Artmed, 2009.

TEIXEIRA, E. As três metodologias: acadêmica, da ciência e da pesquisa. Petropólis, RJ: Vozes, ed. 11, 2014.

UFPA

PROFMAT

2026

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA