

APÊNDICE A (REGRAS)

Este apêndice apresenta as regras do Jogo GP em sua forma original, mantendo o formato e o estilo que serão utilizados na versão impressa do produto educacional:

O JOGO GP

Preparação

O jogo é formado por **1 juiz** (mediador/avaliador/professor ou alguém com maior conhecimento do conteúdo) e por **3 jogadores** (alunos).

- O jogo possui **12 problemas de Geometria Plana**, divididos em três níveis de dificuldade: fácil, médio e difícil.
- A sugestão é que a partida seja jogada escolhendo **um nível de dificuldade** (somente fáceis, somente médios ou somente difíceis).
- Dentro do nível escolhido, o juiz seleciona **3 problemas** para a rodada.
- Para cada problema existem **7 cartas de passos de resolução**, algumas válidas e outras inválidas, que devem ser apresentadas **em ordem sequencial**, conforme indicado no **manual do juiz**.

Dinâmica do jogo

1. O juiz apresenta a primeira carta de um problema e pergunta ao jogador da vez:
 - “Essa carta é válida para resolver o problema? Por quê?”
2. O jogador deve responder **sim ou não**, sempre justificando sua escolha.
3. O juiz avalia a resposta:
 - Se correta → o jogador recebe **1 ponto**.
 - Se incorreta → não pontua, e a mesma pergunta passa para o próximo jogador.
4. Esse procedimento se repete até que todas as 7 cartas dos 3 problemas escolhidos tenham sido analisadas.
5. Caso os três jogadores (A, B e C) errem a resposta de uma carta, o juiz deve apresentar a resposta correta e explicar a justificativa conforme o manual do juiz. Em seguida, a partida prossegue normalmente, retornando a vez para o Jogador A na próxima carta.
6. O **manual do juiz** é fundamental, pois organiza a ordem das 7 cartas de cada problema e fornece as explicações correspondentes, servindo como guia para a condução correta da partida.

Critérios de justificativa

- A justificativa deve ter **ênfase maior nas cartas válidas**, destacando os conceitos matemáticos corretos que fundamentam a jogada.
- Para as cartas não válidas, também é necessária uma breve justificativa, explicando por que aquele passo não contribui para a resolução.
- O jogo valoriza a **flexibilidade pedagógica**: se o aluno apresentar uma justificativa alternativa bem fundamentada, mesmo que a carta não esteja marcada previamente como válida, o juiz (professor) tem autonomia para aceitar a resposta, desde que haja coerência matemática.

Exemplo de partida

- O juiz escolhe o **nível fácil** e seleciona 3 problemas desse grupo.
- No **Problema 1**, a primeira carta apresentada é:

“Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa.”

- O juiz pergunta ao **Jogador A**:
 - “Essa carta é válida para resolver o problema 1? Por quê?”
- O Jogador A responde:
 - “Sim, é válida, porque o problema pede para encontrar a diagonal de um retângulo, e o Teorema de Pitágoras relaciona os lados ao comprimento da diagonal.”
- O juiz confirma a resposta, atribui **1 ponto** ao Jogador A, e passa a vez para o Jogador B com a próxima carta.
- Mais adiante, surge uma carta não válida:

“Aplicar a fórmula da área do triângulo equilátero.”

- O **Jogador B** responde:
 - “Não, porque o problema envolve um retângulo, e essa fórmula não se aplica neste contexto.”
- O juiz valida a justificativa, atribui **1 ponto** ao Jogador B, e segue o jogo.
- Esse processo continua até o término das 7 cartas de cada um dos 3 problemas selecionados.
- Ao final, o juiz soma os pontos e declara o vencedor.

Observações adicionais

O exemplo apresentado não se concretiza no jogo, servindo apenas como **referência ilustrativa** para compreensão da dinâmica.

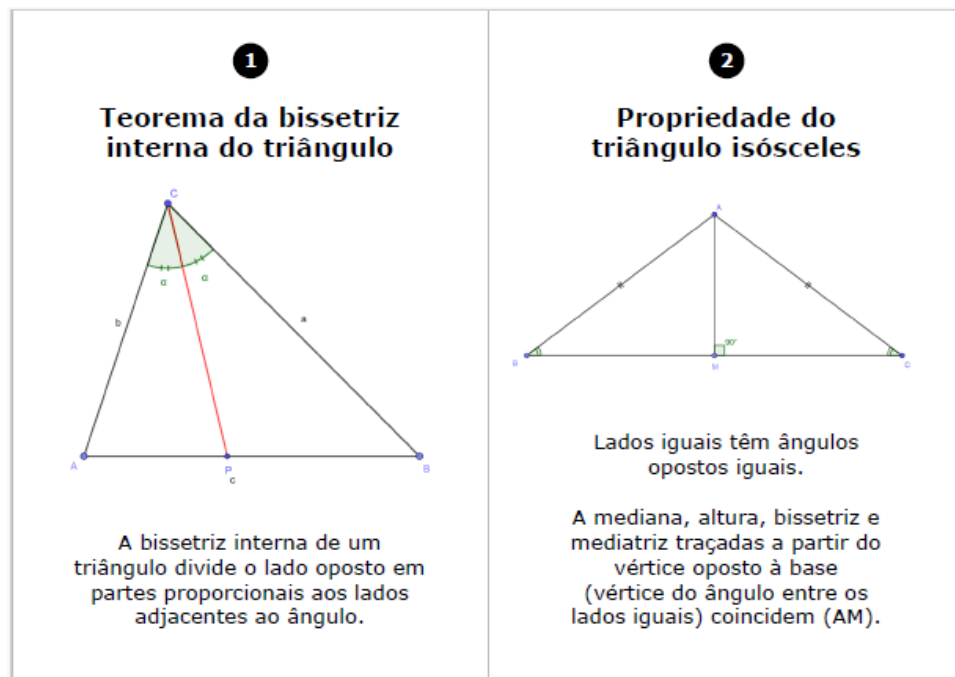
APÊNDICE B (CARTAS BRANCAS)

A seguir, apresenta-se o modelo completo das cartas brancas, conforme constam na versão impressa do jogo.

Definição

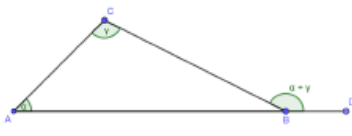
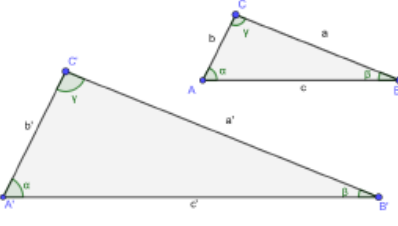
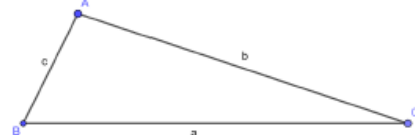
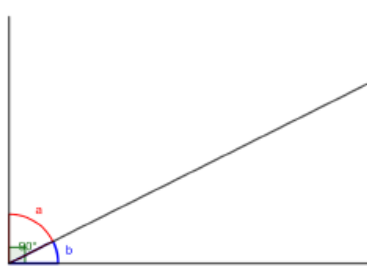
- As cartas brancas representam passos teóricos para a resolução dos problemas, baseados em conceitos matemáticos como definições, propriedades, teoremas e ideias gerais.
- Essas cartas não apresentam cálculos numéricos, mas sim os fundamentos que sustentam o raciocínio matemático.
- Nem todos os problemas permitem que todas as evidências conceituais estejam nítidas ou completas. Por isso, em cada problema são selecionados apenas os principais passos que conduzem à solução.
- O juiz (mediador) apresentará, em ordem, as cartas brancas correspondentes ao problema. Cada jogador deve analisar e responder se a carta ajuda (sim) ou não ajuda (não) na resolução do problema, sempre com justificativa.
- Dessa forma, o foco central do jogo está na análise crítica das cartas brancas, e não necessariamente em reconstruir toda a resolução passo a passo.
- Segue abaixo:

Figura 30 - Carta Branca (Passo: 1 e 2) – Apêndice B



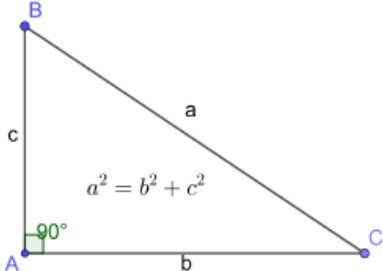
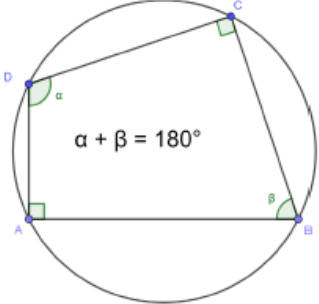
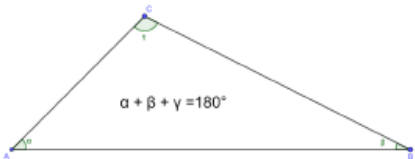
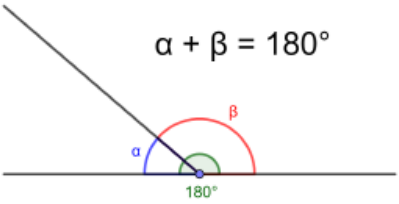
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 31 - Carta Branca (Passo: 3, 4, 5 e 6) – Apêndice B

<p style="text-align: center;">3</p> <p style="text-align: center;">Teorema do ângulo externo do triângulo</p>  <p>O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.</p> $\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB$	<p style="text-align: center;">4</p> <p style="text-align: center;">Critérios da semelhança de triângulos</p>  <p>Dois triângulos são semelhantes quando têm a mesma forma, ou seja, ângulos iguais e lados proporcionais. Isso acontece em três casos: AA, LAL e LLL.</p>
<p style="text-align: center;">5</p> <p style="text-align: center;">Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo</p>  $p = \frac{a + b + c}{2}$ $P = a + b + c = 2.p$ <p>Perímetro do triângulo é a soma dos comprimentos dos seus três lados.</p>	<p style="text-align: center;">6</p> <p style="text-align: center;">Definição de ângulos complementares</p>  <p>Ângulos complementares são dois ângulos cuja soma é 90 graus.</p>

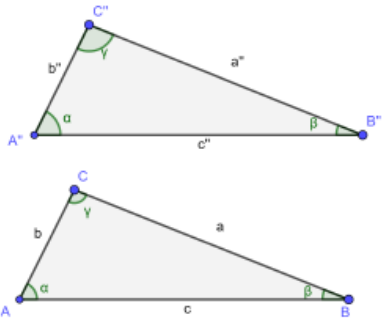
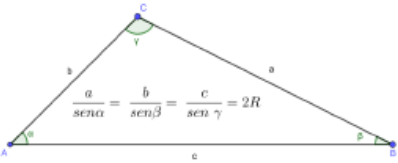
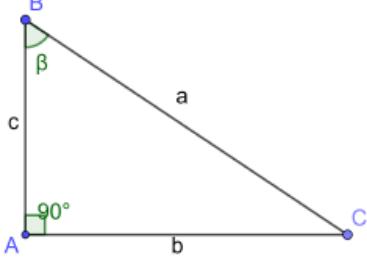
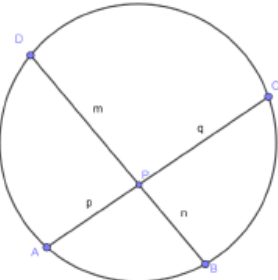
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 32 - Carta Branca (Passo: 7, 8, 9 e 10) – Apêndice B

<p style="text-align: center;">7</p> <p style="text-align: center;">Teorema de Pitágoras</p>  <p style="text-align: center;">No triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.</p>	<p style="text-align: center;">8</p> <p style="text-align: center;">Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito)</p>  <p style="text-align: center;">Num quadrilátero cíclico (inscrito em uma circunferência), a soma dos ângulos opostos é 180°.</p>
<p style="text-align: center;">9</p> <p style="text-align: center;">Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo</p>  <p style="text-align: center;">A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.</p>	<p style="text-align: center;">10</p> <p style="text-align: center;">Definição de ângulos suplementares</p>  <p style="text-align: center;">Ângulos suplementares são dois ângulos cuja soma é 180 graus.</p>

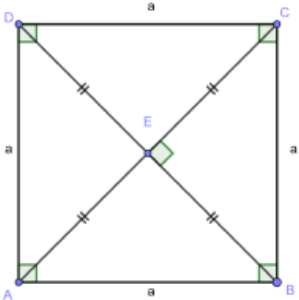
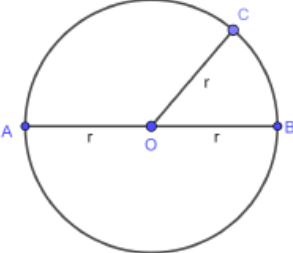
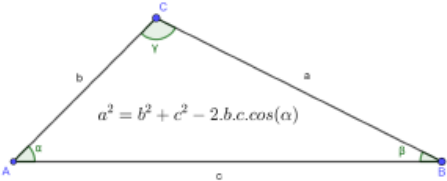
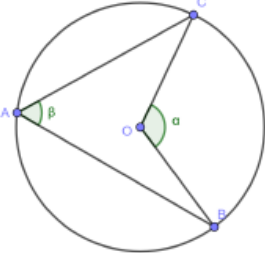
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 33 - Carta Branca (Passo: 11, 12, 13 e 14) – Apêndice B

<p style="text-align: center;">11</p> <p style="text-align: center;">Critérios de congruência de triângulos</p>  <p>Dois triângulos são congruentes quando têm mesma forma e tamanho, isto é, todos os lados e ângulos correspondentes são iguais.</p> <p>Critérios principais: LLL, LAL, ALA, AAL e HC.</p>	<p style="text-align: center;">12</p> <p style="text-align: center;">Lei dos senos</p>  $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$ <p>Em qualquer triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.</p>
<p style="text-align: center;">13</p> <p style="text-align: center;">Definição trigonométrica</p>  $\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{cos} \beta = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{tan} \beta = \frac{b}{c}$ <p>Trigonometria estuda as relações entre os lados e ângulos de triângulos.</p>	<p style="text-align: center;">14</p> <p style="text-align: center;">Teorema da potência de um ponto (caso interno)</p>  $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{DP} \cdot \overline{PB} \Leftrightarrow p \cdot q = m \cdot n$ <p>Se dois segmentos secantes se cruzam dentro da circunferência, o produto das partes de um é igual ao produto das partes do outro.</p>

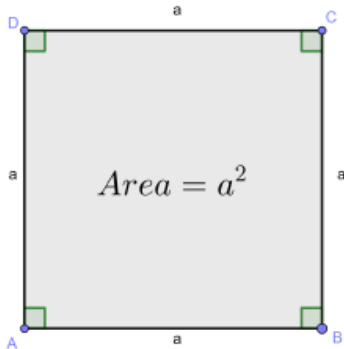
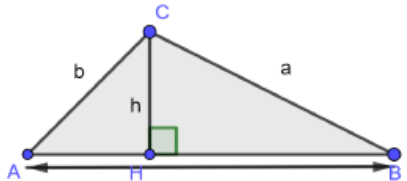
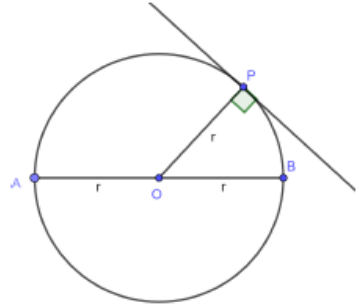
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 34 - Carta Branca (Passo: 15, 16, 17 e 18) – Apêndice B

<p style="text-align: center;">15</p> <p style="text-align: center;">Propriedades do quadrado</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Quatro lados iguais. • Quatro ângulos retos (90°). • Lados opostos paralelos. • Diagonais iguais, se cruzam no meio e são perpendiculares. • É um retângulo e também um losango. 	<p style="text-align: center;">16</p> <p style="text-align: center;">Propriedades da circunferência</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Todos os pontos estão à mesma distância do centro. • O segmento que liga dois pontos da circunferência passando pelo centro é o diâmetro. • O segmento do centro a um ponto da borda é o raio. • O diâmetro = 2 × raio. • A medida completa da circunferência é 360°.
<p style="text-align: center;">17</p> <p style="text-align: center;">Lei dos cossenos</p>  <p style="text-align: center;">$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$</p> <p>Onde "a" é o lado oposto ao ângulo A, e "c" e "b" são os outros lados.</p> <p>É usada quando não há ângulo de 90° e para calcular lados ou ângulos.</p>	<p style="text-align: center;">18</p> <p style="text-align: center;">Teorema do ângulo inscrito</p>  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ <p>O ângulo inscrito em uma circunferência mede a metade do arco que ele intercepta.</p>

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 35 - Carta Branca (Passo: 19, 20, e 21) – Apêndice B

<p>19</p> <p>Fórmula da área do quadrado</p>  <p>Onde "a" é o comprimento do lado do quadrado.</p>	<p>20</p> <p>Fórmula da área do triângulo</p>  <p>$A = \frac{c \cdot h}{2}$</p> <p>Sendo p: semiperímetro. Área pela fórmula de Heron.</p> <p>$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$</p>
<p>21</p> <p>Propriedade de tangência da circunferência</p>  <p>A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de contato:</p> <p>Tangente \perp Raio</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

APÊNDICE C (CARTAS LARANJAS)

Abaixo estão as definições e os problemas das cartas laranjas do jogo, conforme o material que será impresso e entregue aos participantes.

Definição

As cartas laranjas, conforme mencionado nas regras do jogo, representam os problemas de Geometria Plana. No total, são 12 perguntas, divididas em três níveis de dificuldade: **fácil, médio e difícil**.

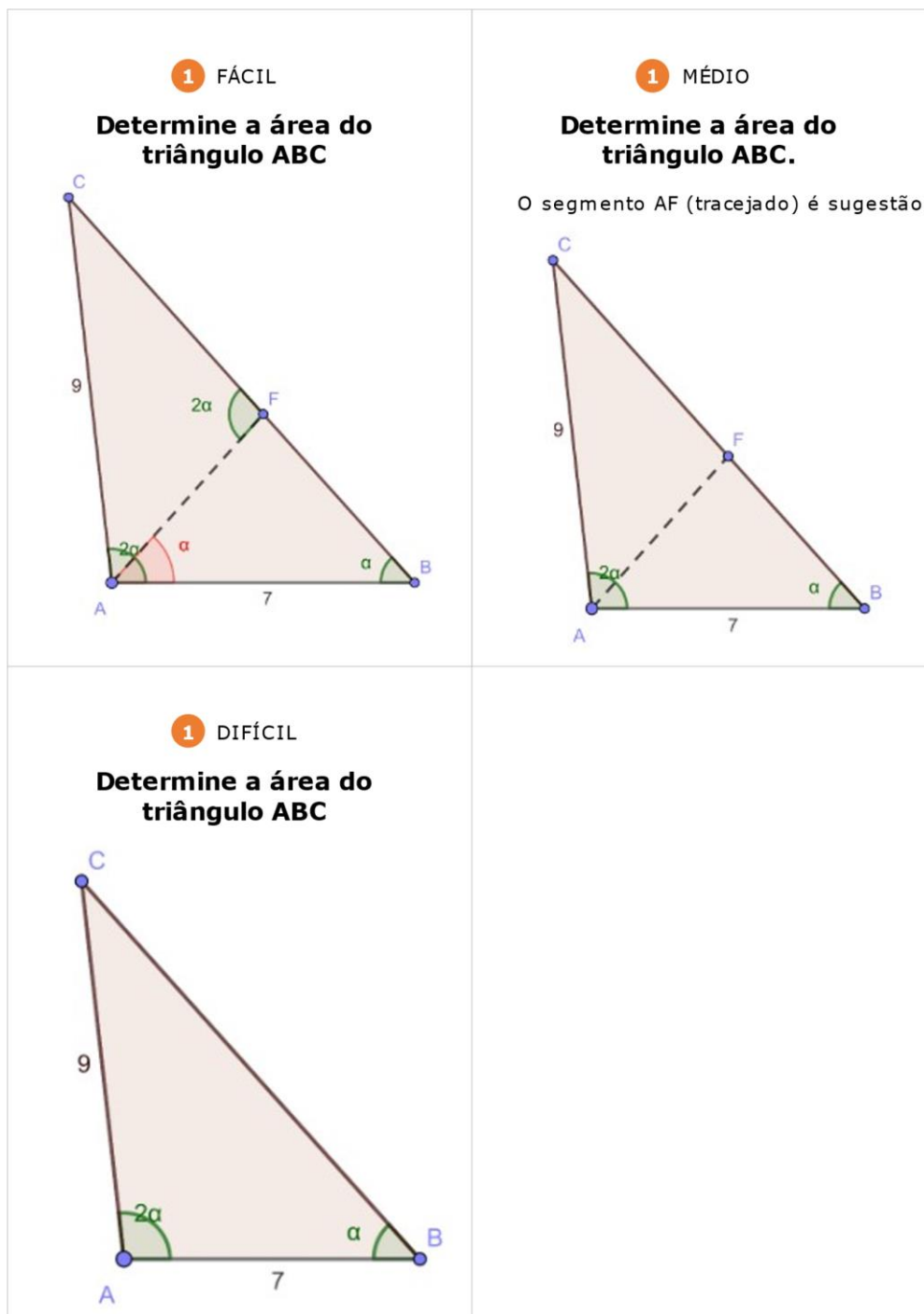
A pergunta difícil corresponde ao enunciado original do problema, enquanto as versões fáceis e médias foram adaptadas a partir dela, de modo a tornar o jogo mais acessível e dinâmico.

Durante a partida, o juiz seleciona três cartas laranjas, que podem ser escolhidas de forma aleatória ou proposital. Cada problema possui **sete passos possíveis** que aparecem como cartas brancas, podendo ou não contribuir para a sua resolução.

É importante destacar que o foco do jogo está na **análise crítica das cartas brancas**, e não necessariamente na reconstrução completa da solução passo a passo. Assim, uma carta laranja não implica, obrigatoriamente, na utilização de todas as sete cartas brancas correspondentes nem significa que apresentará todos os passos minuciosos da resolução.

Segue abaixo os 12 problemas:

Figura 36 - Carta Laranja 1 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



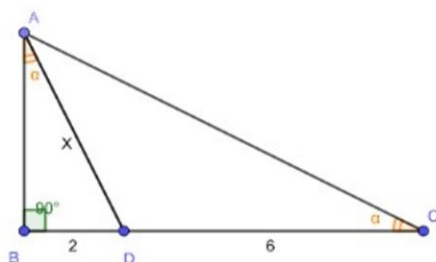
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 37 - Carta Laranja 2 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

2 FÁCIL

Na figura a seguir, considere o triângulo representado. Determine o valor do segmento $AD=x$.

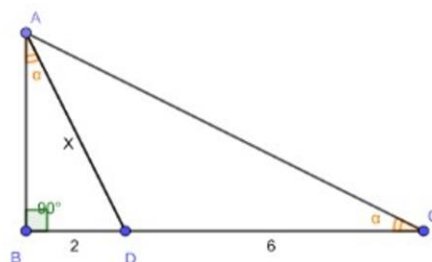
Observação: todas as informações necessárias para a resolução estão indicadas na própria figura.



2 MÉDIO

Na figura a seguir, considere o triângulo representado. Determine o valor do segmento $AD=x$.

Observação: todas as informações necessárias para a resolução estão indicadas na própria figura.



2 DIFÍCIL

Na figura a seguir, considere o triângulo representado. Determine o valor do segmento $AD=x$.

Observação: todas as informações necessárias para a resolução estão indicadas na própria figura.



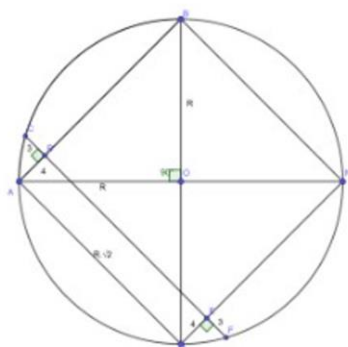
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 38 - Carta Laranja 3 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

3 FÁCIL

Considere um quadrilátero (quadrado) inscrito em uma circunferência, conforme os dados apresentados na figura a seguir.

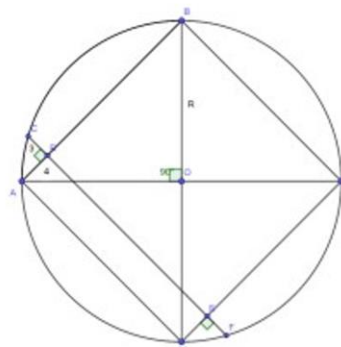
Determine o valor do raio R da circunferência.



3 MÉDIO

Considere um quadrilátero (quadrado) inscrito em uma circunferência, conforme os dados apresentados na figura a seguir.

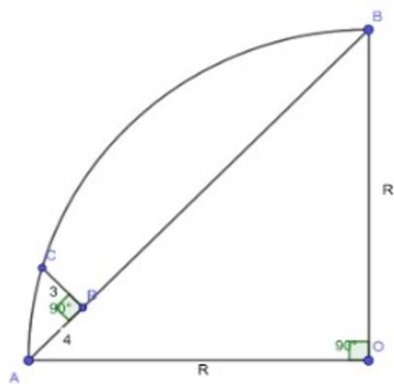
Determine o valor do raio R da circunferência.



3 DIFÍCIL

Conforme o desenho indicado, um triângulo retângulo com lados 3 e 4 está inscrito em um setor circular de 90°

Determine o valor do raio R da circunferência.

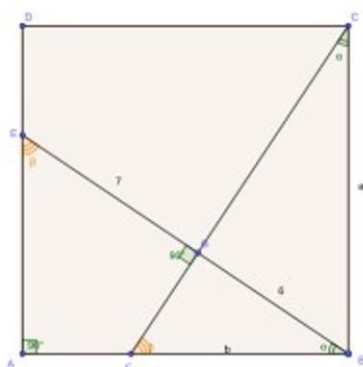


Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 39 - Carta Laranja 4 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

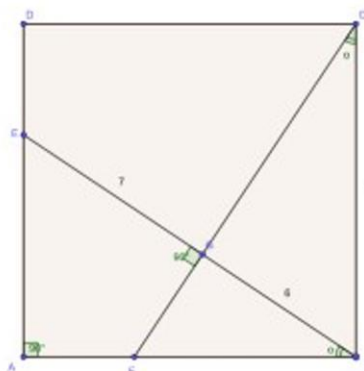
4 FÁCIL

Calcule a área do quadrado ABCD, sabendo que os segmentos EG e GC são perpendiculares entre si, com comprimentos $EG=7$ e $GB=6$, conforme a figura.



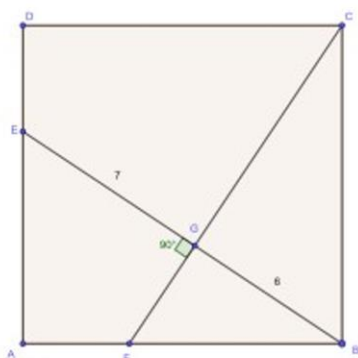
4 MÉDIO

Calcule a área do quadrado ABCD, sabendo que os segmentos EG e GC são perpendiculares entre si, com comprimentos $EG=7$ e $GB=6$, conforme a figura.



4 DIFÍCIL

Calcule a área do quadrado ABCD, sabendo que os segmentos EG e GC são perpendiculares entre si, com comprimentos $EG=7$ e $GB=6$, conforme a figura.



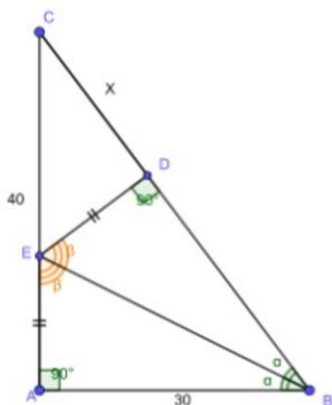
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 40 - Carta Laranja 5 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

5 FÁCIL

Considere o triângulo ABC, cujas medidas estão representadas na figura.

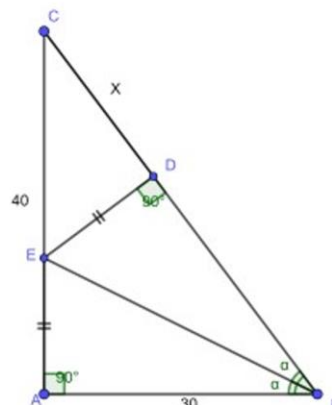
Calcule o valor do segmento CD, indicado por X.



5 MÉDIO

Considere o triângulo ABC, cujas medidas estão representadas na figura.

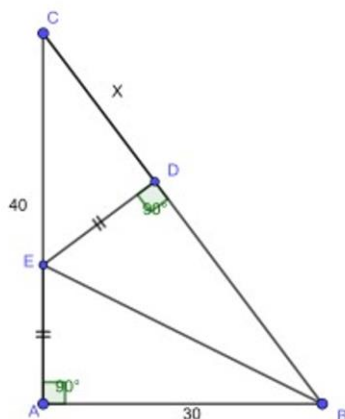
Calcule o valor do segmento CD, indicado por X.



5 DIFÍCIL

Considere o triângulo ABC, cujas medidas estão representadas na figura.

Calcule o valor do segmento CD, indicado por X.



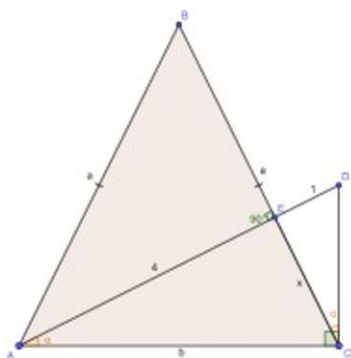
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 41 – Carta Laranja 6 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

6 FÁCIL

Calcule a área do triângulo **ABC**, sendo $AB=BC$, conforme indicado na figura.

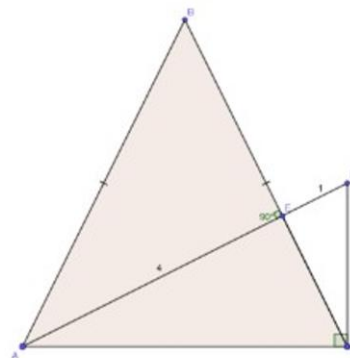
Utilize o triângulo auxiliar **ACD** para apoiar a resolução, considerando os segmentos $AE=4$ e $ED=1$.



6 MÉDIO

Calcule a área do triângulo **ABC**, sendo $AB=BC$, conforme indicado na figura.

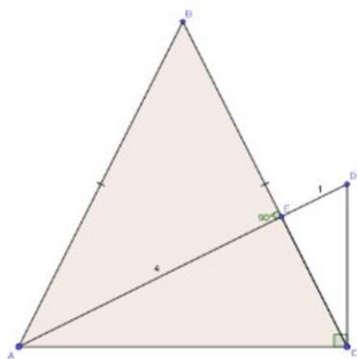
Utilize o triângulo auxiliar **ACD** para apoiar a resolução, considerando os segmentos $AE=4$ e $ED=1$.



6 DIFÍCIL

Calcule a área do triângulo **ABC**, sendo $AB=BC$, conforme indicado na figura.

Utilize o triângulo auxiliar **ACD** para apoiar a resolução, considerando os segmentos $AE=4$ e $ED=1$.



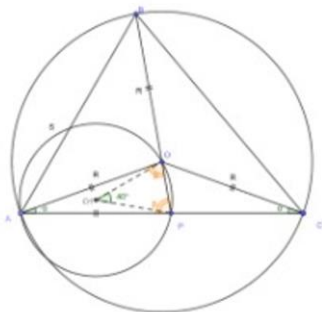
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 42 - Carta Laranja 7 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

7 FÁCIL

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a interseção das retas BO e AC , e S a circunferência circunscrita ao triângulo AOP . Suponha que BO é igual a AP e que a medida do arco OP em S , que não contém o ponto A , é igual a 40 graus.

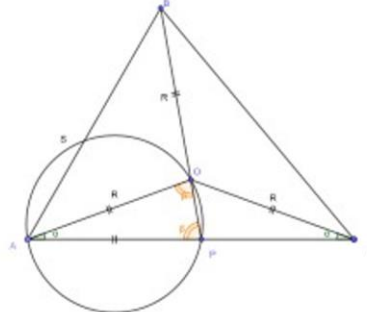
Determine a medida do ângulo OBC .



7 MÉDIO

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a interseção das retas BO e AC , e S a circunferência circunscrita ao triângulo AOP . Suponha que BO é igual a AP e que a medida do arco OP em S , que não contém o ponto A , é igual a 40 graus.

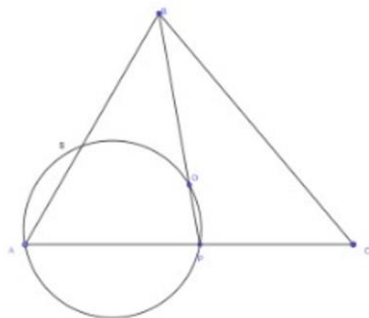
Determine a medida do ângulo OBC .



7 DIFÍCIL

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a interseção das retas BO e AC , e S a circunferência circunscrita ao triângulo AOP . Suponha que BO é igual a AP e que a medida do arco OP em S , que não contém o ponto A , é igual a 40 graus.

Determine a medida do ângulo OBC .



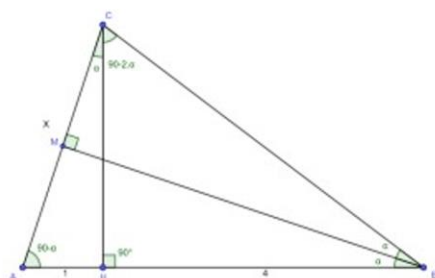
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 43 - Carta Laranja 8 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

8 FÁCIL

No triângulo ABC , queremos descobrir o valor de x , que representa o lado AC . Sabemos que uma altura foi traçada do ponto C até o lado AB , formando um ângulo de 90 graus no ponto H . É dado que AH vale 1 e HB vale 4.

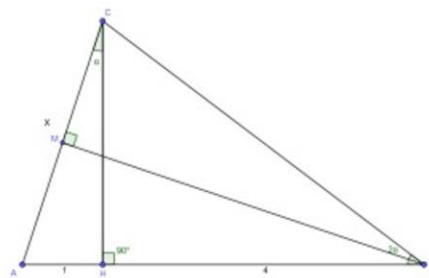
O ângulo no vértice C (ACH) é α e o ângulo no vértice B é 2α .



8 MÉDIO

No triângulo ABC , queremos descobrir o valor de x , que representa o lado AC . Sabemos que uma altura foi traçada do ponto C até o lado AB , formando um ângulo de 90 graus no ponto H . É dado que AH vale 1 e HB vale 4.

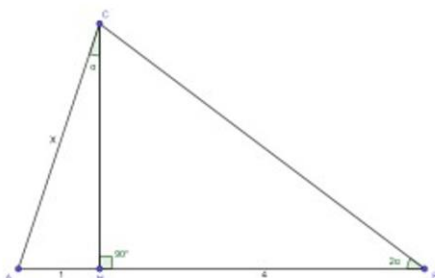
O ângulo no vértice C (ACH) é α e o ângulo no vértice B é 2α .



8 DIFÍCIL

No triângulo ABC , queremos descobrir o valor de x , que representa o lado AC . Sabemos que uma altura foi traçada do ponto C até o lado AB , formando um ângulo de 90 graus no ponto H . É dado que AH vale 1 e HB vale 4.

O ângulo no vértice C (ACH) é α e o ângulo no vértice B é 2α .



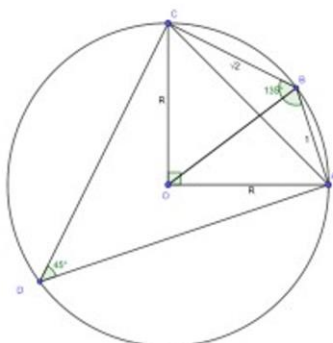
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 44 - Carta Laranja 9 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

9 FÁCIL

No desenho abaixo, temos um círculo com centro em O . Os pontos A e C estão sobre os eixos e formam ângulos retos com O . O ponto B está sobre o arco do quarto de círculo. Sabemos que $AB = 1$ e $BC = \sqrt{2}$.

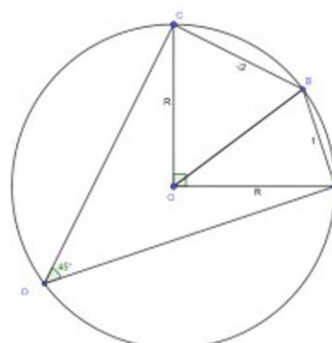
Qual é o valor do segmento OA ?



9 MÉDIO

No desenho abaixo, temos um círculo com centro em O . Os pontos A e C estão sobre os eixos e formam ângulos retos com O . O ponto B está sobre o arco do quarto de círculo. Sabemos que $AB = 1$ e $BC = \sqrt{2}$.

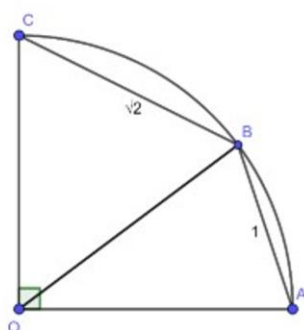
Qual é o valor do segmento OA ?



9 DIFÍCIL

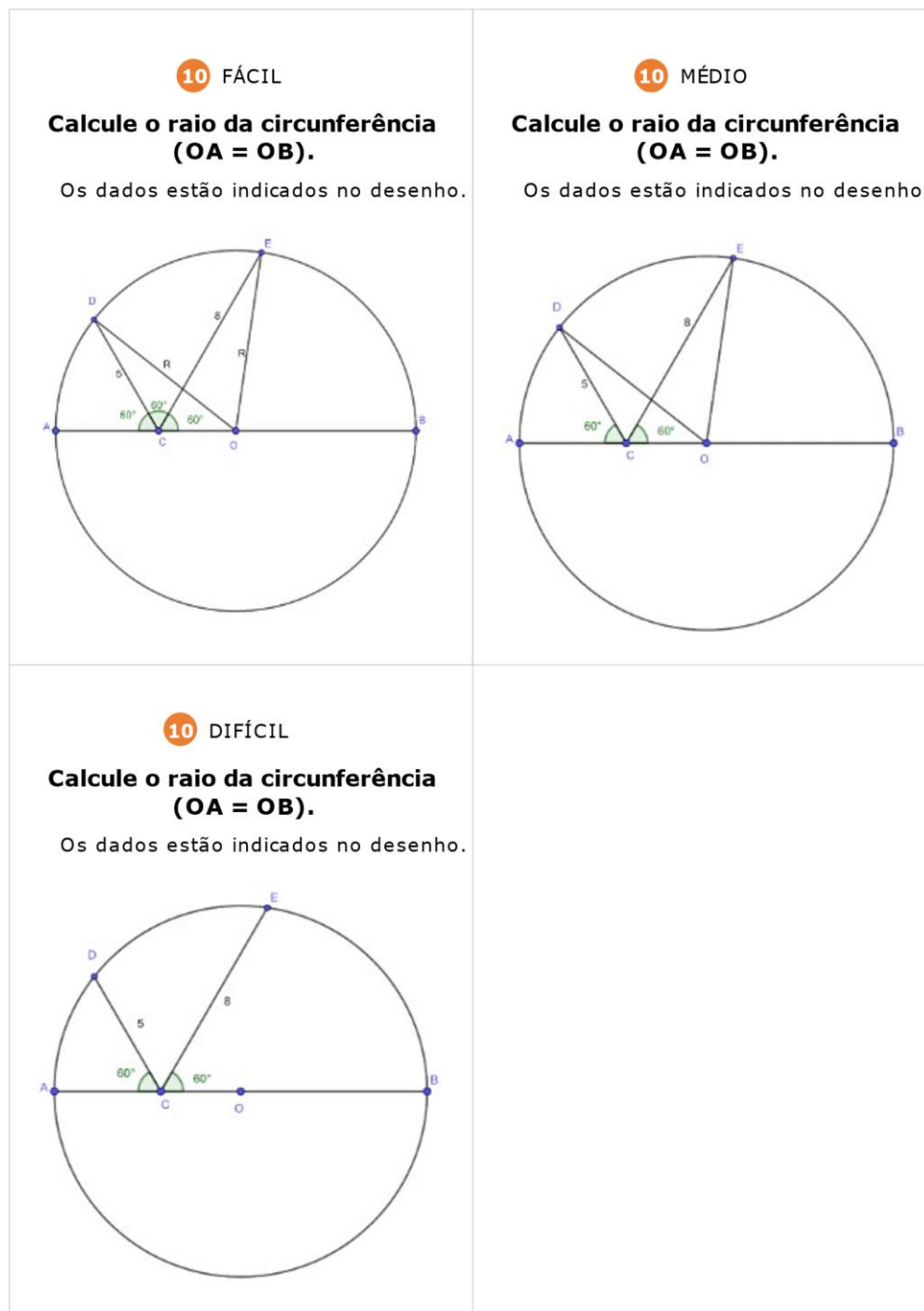
No desenho abaixo, temos um quarto de círculo com centro em O . Os pontos A e C estão sobre os eixos e formam ângulos retos com O . O ponto B está sobre o arco do quarto de círculo. Sabemos que $AB = 1$ e $BC = \sqrt{2}$.

Qual é o valor do segmento OA ?



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 45 - Carta Laranja 10 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

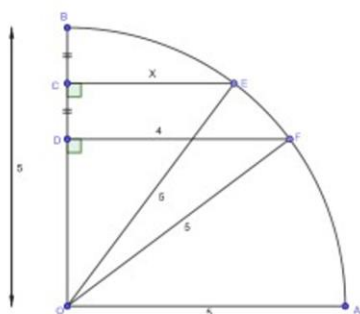
Figura 46 - Carta Laranja 11 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

11 FÁCIL

Temos um quarto de circunferência, com raio igual a 5. Sabemos que os segmentos DC e CB são iguais e o segmento DF mede 4.

Calcule o valor de X (segmento CE).

Obs: $AO \parallel DF \parallel CE$ (paralelas entre si).

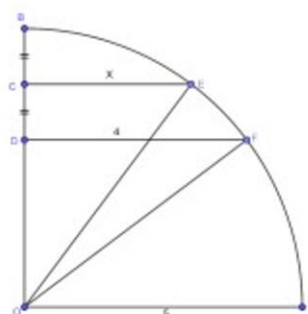


11 MÉDIO

Temos um quarto de circunferência, com raio igual a 5. Sabemos que os segmentos DC e CB são iguais e o segmento DF mede 4.

Calcule o valor de X (segmento CE).

Obs: $AO \parallel DF \parallel CE$ (paralelas entre si).

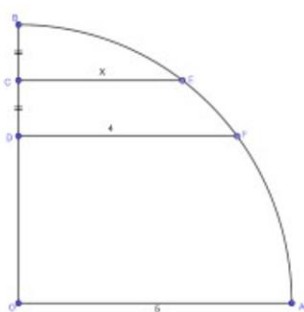


11 DIFÍCIL

Temos um quarto de circunferência, com raio igual a 5. Sabemos que os segmentos DC e CB são iguais e o segmento DF mede 4.

Calcule o valor de X (segmento CE).

Obs: $AO \parallel DF \parallel CE$ (paralelas entre si).



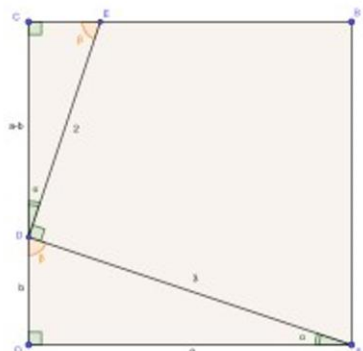
Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 47 - Carta Laranja 12 (níveis Fácil, Médio e Difícil) – Apêndice C

12 FÁCIL

No desenho, temos um quadrilátero ABCO. Dentro dele, estão destacados dois triângulos $\triangle DAO$ e $\triangle DEC$. Sabemos que $DE=2$, $DA=3$ e o ângulo $\angle ADE$ é reto.

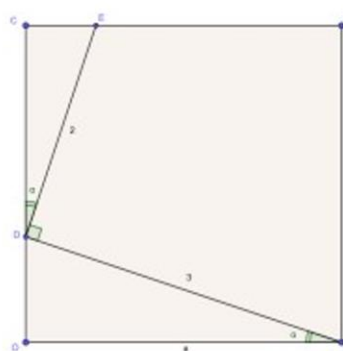
Calcule a área do quadrilátero ABCO.



12 MÉDIO

No desenho, temos um quadrilátero ABCO. Dentro dele, estão destacados dois triângulos $\triangle DAO$ e $\triangle DEC$. Sabemos que $DE=2$, $DA=3$ e o ângulo $\angle ADE$ é reto.

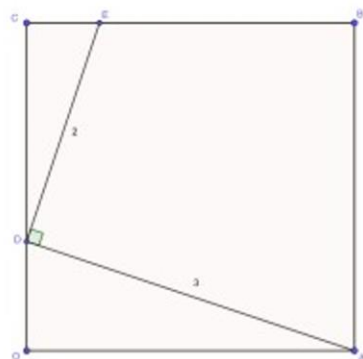
Calcule a área do quadrilátero ABCO.



12 DIFÍCIL

No desenho, temos um quadrilátero ABCO. Dentro dele, estão destacados dois triângulos $\triangle DAO$ e $\triangle DEC$. Sabemos que $DE=2$, $DA=3$ e o ângulo $\angle ADE$ é reto.

Calcule a área do quadrilátero ABCO.



Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

APÊNDICE D (MANUAL DO JUIZ)

Função do Manual do Juiz

O manual tem o propósito de servir como um guia de orientação para o juiz (mediador/avaliador), auxiliando-o na condução das partidas e na mediação das interações entre os jogadores. Ele funciona como uma bússola didática, permitindo que o juiz mantenha a sequência correta das cartas, acompanhe as etapas de resolução dos problemas e assegure que as regras do jogo sejam respeitadas. Além disso, o manual oferece critérios de avaliação e instruções claras, garantindo que o desenvolvimento do jogo ocorra de forma organizada, imparcial e coerente com os objetivos pedagógicos propostos.

A seguir, apresentam-se os elementos que compõem o jogo didático, conforme versão entregue aos alunos, segue abaixo:

Figura 48 - Manual do Juiz (DEFINIÇÃO) – Apêndice D

DEFINIÇÃO	DEFINIÇÃO
<p>Dinâmica das Cartas e Justificativas</p> <p>Cada problema do Jogo - nas categorias fácil, médio e difícil - é acompanhado de 7 cartas que representam possíveis passos para a resolução.</p> <p>Essas cartas podem ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Válidas: contribuem de forma correta e coerente para a resolução. • Não válidas: não ajudam ou não se aplicam à resolução do problema. <p>O papel do jogador é analisar cada carta e responder:</p> <ul style="list-style-type: none"> • "Sim" (válida) ou "Não" (não válida). • Sempre justificando sua resposta. <p>A justificativa deve ter ênfase maior nas cartas válidas, evidenciando os conceitos matemáticos corretos que sustentam a jogada. Já para as cartas não válidas, também é necessário justificar, ainda que de forma mais breve, explicando por que não se encaixam no contexto do problema.</p> <p>Além disso, o jogo traz um elemento de flexibilidade pedagógica: caso o aluno apresente uma justificativa alternativa, mesmo que a carta não esteja marcada previamente como válida, o juiz (avaliador/professor) tem autonomia para aceitar a resposta, desde que haja coerência matemática.</p> <p>Por fim, é importante destacar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • O problema original de cada conjunto é sempre o difícil. • Os problemas fácil e médio são variações simplificadas do problema difícil, criados para facilitar a progressão da partida e adaptar o nível de desafio aos jogadores. 	<p>Função do Manual do Juiz</p> <p>O manual tem o propósito de servir como um guia de orientação para o juiz (avaliador), auxiliando-o na condução das partidas e na mediação das interações entre os jogadores. Ele funciona como uma bússola didática, permitindo que o juiz mantenha a sequência correta das cartas, acompanhe as etapas de resolução dos problemas e assegure que as regras do jogo sejam respeitadas. Além disso, o manual oferece critérios de avaliação e instruções claras, garantindo que o desenvolvimento do jogo ocorra de forma organizada, imparcial e coerente com os objetivos pedagógicos propostos.</p> <p>Conforme ilustrado no Problema 1 (nível fácil), a sequência correta das cartas é: 2 – 7 – 8 – 4 – 11 – 5 – 20, totalizando sete passos. Dentre elas, as cartas Válidas correspondem aos números 2, 4, 5 e 20, enquanto as cartas Não válidas são 7, 8 e 11.</p>

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 49 - Manual do Juiz (PROBLEMA 1) – Apêndice D

PROBLEMA 1 FÁCIL		PROBLEMA 1 MÉDIO	
<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>O triângulo apresenta igualdade de lados em certas construções auxiliares. Essa propriedade permite identificar relações de proporcionalidade, como a igualdade de segmentos ($AF=FB$), fundamentais para o desenvolvimento da resolução.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>A comparação entre o triângulo menor AFC e o triângulo maior BAC mostra que eles são semelhantes. Essa semelhança é essencial para estabelecer proporções entre os lados.</p>	<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>O triângulo apresenta igualdade de lados em certas construções auxiliares. Essa propriedade permite identificar relações de proporcionalidade, como a igualdade de segmentos ($AF=FB$), fundamentais para o desenvolvimento da resolução.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>A comparação entre o triângulo menor AFC e o triângulo maior BAC mostra que eles são semelhantes. Essa semelhança é essencial para estabelecer proporções entre os lados.</p>
<p>7 Teorema de Pitágoras: Não é válido!</p> <p>O Teorema de Pitágoras só pode ser aplicado em triângulos retângulos. Como não há indicação de ângulo reto neste problema, esse teorema não se aplica.</p>	<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não existe no problema dois triângulos com todos os lados e ângulos correspondentes iguais, logo não é possível aplicar critérios de congruência.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Não é válido!</p> <p>O Teorema de Pitágoras só pode ser aplicado em triângulos retângulos. Como não há indicação de ângulo reto neste problema, esse teorema não se aplica.</p>	<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não existe no problema dois triângulos com todos os lados e ângulos correspondentes iguais, logo não é possível aplicar critérios de congruência.</p>
<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!</p> <p>O problema não apresenta um quadrilátero inscrito em circunferência, portanto essa ferramenta não contribui para a solução.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Válido!</p> <p>O cálculo do semiperímetro é um passo necessário para a aplicação da fórmula de Heron, que será utilizada na etapa final.</p>	<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Válido!</p> <p>Para determinar o ângulo $\angle AFC = \angle FAB + \angle ABF$. Esse resultado é fundamental porque permite relacionar medidas angulares e, em seguida, estabelecer a semelhança entre os triângulos envolvidos.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Válido!</p> <p>O cálculo do semiperímetro é um passo necessário para a aplicação da fórmula de Heron, que será utilizada na etapa final.</p>
	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Válido!</p> <p>Como o objetivo é determinar a área de ABC, a fórmula de Heron se torna adequada, pois, a partir dos lados já conhecidos, ela fornece diretamente a área.</p>		<p>20 Fórmula da área do triângulo: Válido!</p> <p>Como o objetivo é determinar a área de ABC, a fórmula de Heron se torna adequada, pois, a partir dos lados já conhecidos, ela fornece diretamente a área.</p>

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 50 - Manual do Juiz (PROBLEMA 1 e 2) – Apêndice D

PROBLEMA 1 DIFÍCIL		PROBLEMA 2 FÁCIL-MÉDIO-DIFÍCIL	
<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Válido!</p> <p>O ponto de partida do problema é observar que o ângulo em A foi dividido em duas partes, α e α. Essa divisão sugere o uso do Teorema da Bissetriz Interna, que relaciona a razão dos lados do triângulo com a razão dos ângulos opostos. Esse passo inicial é essencial para prosseguir na resolução.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>A comparação entre o triângulo menor AFC e o triângulo maior BAC mostra que eles são semelhantes. Essa semelhança é essencial para estabelecer proporções entre os lados.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Neste problema, aplicamos os critérios de semelhança (AA) entre os triângulos ABD e CBA. Através da correspondência entre os ângulos e lados proporcionais, é possível estabelecer relações métricas que permitem calcular o lado AB, passo essencial para a continuidade da resolução.</p>	<p>14 Teorema da potência de um ponto (caso interno): Não é válido!</p> <p>O problema não envolve circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Portanto, este teorema não pode ser utilizado na resolução.</p>
<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>O triângulo apresenta igualdade de lados em certas construções auxiliares. Essa propriedade permite identificar relações de proporcionalidade, como a igualdade de segmentos ($AF=FB$), fundamentais para o desenvolvimento da resolução.</p>	<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não existe no problema dois triângulos com todos os lados e ângulos correspondentes iguais, logo não é possível aplicar critérios de congruência.</p>	<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Não é válido!</p> <p>No enunciado não há qualquer condição que indique a presença de um triângulo isósceles. Portanto, essa propriedade não se aplica neste problema e não contribui para a resolução.</p>	<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Não é válido!</p> <p>O problema não apresenta dois triângulos com lados e ângulos correspondentes iguais. Dessa forma, não é possível aplicar nenhum dos critérios de congruência neste caso.</p>
<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Válido!</p> <p>Para determinar o ângulo $\angle AFC = \angle FAB + \angle ABF$. Esse resultado é fundamental porque permite relacionar medidas angulares e, em seguida, estabelecer a semelhança entre os triângulos envolvidos.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Válido!</p> <p>O cálculo do semiperímetro é um passo necessário para a aplicação da fórmula de Heron, que será utilizada na etapa final.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>O Teorema de Pitágoras aplica-se exclusivamente a triângulos retângulos. Como o problema indica a presença de um ângulo reto, podemos utilizá-lo. Sabendo que $BD=2$ e que já foi determinado $AB=4$, é possível aplicar a relação pitagórica para calcular o valor de x.</p>	<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não apresenta nenhuma condição que indique a divisão de um ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação do Teorema da Bissetriz Interna neste problema.</p>
	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Válido!</p> <p>Como o objetivo é determinar a área de ABC, a fórmula de Heron se torna adequada, pois, a partir dos lados já conhecidos, ela fornece diretamente a área.</p>	<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não apresenta nenhuma condição que indique a divisão de um ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação do Teorema da Bissetriz Interna neste problema.</p>	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não solicita o cálculo da área e não há necessidade desse procedimento para a resolução do problema. Por isso, a fórmula da área do triângulo não se aplica neste caso.</p>

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 51 - Manual do Juiz (PROBLEMA 3) – Apêndice D

PROBLEMA 3 FÁCIL		PROBLEMA 3 MÉDIO	
<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não apresenta nenhuma condição que indique a divisão de um ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação do Teorema da Bissetriz Interna neste problema.</p>	<p>4 Crítérios da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>A aplicação da semelhança não é necessária, pois as medidas relevantes já estão explicitamente determinadas no enunciado. Dessa forma, os critérios de semelhança não contribuem para a resolução deste problema.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Este é o ponto de partida para calcular o lado AB, já que o triângulo AOB é retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos AB, e a partir desse resultado é possível determinar BD, pela relação $BD=AB-4$.</p>	<p>4 Crítérios da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.</p>
<p>21 Propriedade de tangência da circunferência: Não é válido!</p> <p>No enunciado não há qualquer condição que indique a presença de uma tangência. Portanto, essa propriedade não se aplica neste problema e não contribui para a resolução.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.</p>	<p>15 Propriedades do quadrado: Válido!</p> <p>Neste passo, já sabemos que $AB = R\sqrt{2}$. Pela propriedade do quadrado, concluímos que DF também mede $R\sqrt{2}$.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.</p>
<p>15 Propriedades do quadrado: Válido!</p> <p>Reconhecer que todos os lados do quadrado são iguais é essencial para a resolução. Pelo desenho, temos $AM = R\sqrt{2}$, o que implica diretamente que AB também mede $R\sqrt{2}$.</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!</p> <p>Embora seja possível considerar relações de complementaridade entre ângulos, esse conceito não é necessário neste problema, pois o valor do raio já pode ser determinado diretamente pela aplicação do Teorema da Potência de um Ponto (carta 14).</p>	<p>11 Crítérios de congruência de triângulos : Válido!</p> <p>Para relacionar os segmentos AB e CF, é necessário determinar valores parciais de CF. Como existe uma congruência entre os triângulos CDA e FEM, determinamos que $EF=3$ e $EM=4$. Essa correspondência de lados iguais é fundamental para a resolução.</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!</p> <p>Embora seja possível considerar relações de complementaridade entre ângulos, esse conceito não é necessário neste problema, pois o valor do raio já pode ser determinado diretamente pela aplicação do Teorema da Potência de um Ponto (carta 14).</p>
<p>14 Teorema da potência de um ponto (caso interno): Válido!</p> <p>Neste problema há a presença de uma circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Assim, podemos estabelecer a relação $AD \cdot BD = CD \cdot FD$ Esse resultado é útil para determinar o raio da circunferência, etapa fundamental na resolução.</p>		<p>14 Teorema da potência de um ponto (caso interno): Válido!</p> <p>Neste problema há a presença de uma circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Assim, podemos estabelecer a relação $AD \cdot BD = CD \cdot FD$ Esse resultado é útil para determinar o raio da circunferência, etapa fundamental na resolução.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 52 - Manual do Juiz (PROBLEMA 3 e 4) – Apêndice D

PROBLEMA 3 DIFÍCIL		PROBLEMA 4 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL	
<p>16 Propriedades da circunferência: Válido!</p> <p>Uma abordagem é utilizar propriedades de circunferência (com relações métricas) para reinterpretar o problema, oferecendo uma perspectiva geométrica diferente para a solução.</p>	<p>15 Propriedades do quadrado: Válido!</p> <p>Neste passo, já sabemos que $AB = R\sqrt{2}$. Pela propriedade do quadrado, concluímos que DF também mede $R\sqrt{2}$.</p>	<p>15 Propriedades do quadrado: Válido!</p> <p>Utiliza-se que o quadrado possui lados iguais e ângulos retos, o que é fundamental para estabelecer relações geométricas e de semelhança no problema.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Ao estabelecermos uma relação de semelhança (pelo caso AA) entre os triângulos FGB e FBC, descobrimos uma incógnita em função de outra, um passo importante para a próxima etapa.</p>
<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Este é o segundo ponto para calcular o lado AB, já que o triângulo AOB é retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos AB, e a partir desse resultado é possível determinar BD, pela relação $BD=AB-4$.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>A aplicação da semelhança não é necessária, pois as medidas relevantes já estão explicitamente determinadas nos itens anteriores. Dessa forma, os critérios de semelhança não contribuem para a resolução deste problema.</p>	<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!</p> <p>O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do quadrilátero inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, temos: $a^2 + b^2 = 13^2$. E, com a relação $a \cdot b = 78$, obtida no item anterior, conseguimos determinar os valores de a.</p>
<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Válido!</p> <p>Para relacionar os segmentos AB e CF, é necessário determinar valores parciais de CF. Como existe uma congruência entre os triângulos CDA e FEM, determinamos que $EF=3$ e $EM=4$. Essa correspondência de lados iguais é fundamental para a resolução.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O cálculo do perímetro ou do semiperímetro não é necessário para a resolução deste problema. Assim, esse conceito não contribui para uma solução mais direta e objetiva.</p>	<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Válido!</p> <p>Observa-se a congruência entre os triângulos BAE e CBF pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto). Assim, concluímos que CF possui a mesma medida de BE, ou seja, 13.</p>	<p>19 Fórmula da área do quadrado: Válido!</p> <p>Neste último passo, basta calcular a área do quadrado utilizando a fórmula $A=a^2$.</p>
	<p>14 Teorema da potência de um ponto (caso interno): Válido!</p> <p>Neste problema há a presença de uma circunferência, condição indispensável para a aplicação do Teorema da Potência de um Ponto. Assim, podemos estabelecer a relação $AD \cdot BD = CD \cdot FD$. Esse resultado é útil para determinar o raio da circunferência, etapa fundamental na resolução.</p>	<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Por mais que o problema já destaque pontos importantes, como os ângulos, é necessário confirmar o ângulo BGF, que é suplementar ao ângulo EGF. Então temos o ângulo BGF = 90 graus.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 53 - Manual do Juiz (PROBLEMA 5 e 6) – Apêndice D

PROBLEMA 5 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL		PROBLEMA 6 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL	
<p>18 Teorema do ângulo inscrito: Não é válido!</p> <p>O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do Ângulo Inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.</p>	<p>10 Definição de ângulos suplementares: Não é válido!</p> <p>Não precisa usar esta ideia.</p>	<p>18 Teorema do ângulo inscrito: Não é válido!</p> <p>O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do Ângulo Inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.</p>	<p>15 Propriedades do quadrado: Não é válido!</p> <p>O problema não envolve um quadrado nem exige o uso de suas propriedades. Portanto, este conceito não é necessário para a resolução.</p>
<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!</p> <p>O problema não envolve circunferência, condição necessária para a aplicação do Teorema do quadrilátero inscrito. Portanto, este teorema não se aplica neste caso.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>Em algum momento, poderíamos utilizar a ideia de semelhança com razão 1 entre os triângulos BAE e BDE, mas isso já foi demonstrado anteriormente, no item 11.</p>	<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Embora o ângulo AEC pareça obviamente reto, sua determinação exige uma relação suplementar. Como $\angle AEB=90^\circ$, obtemos $\angle AEC=180^\circ - \angle AEB= 90^\circ$, o que corresponde exatamente à definição de ângulos suplementares.</p>	<p>16 Propriedades da circunferência: Não é válido!</p> <p>O problema não apresenta nenhuma circunferência, condição indispensável para a aplicação dessas propriedades. Assim, elas não se aplicam neste caso.</p>
<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Válido!</p> <p>Observa-se a congruência entre os triângulos BAE e BDE pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto). Assim, concluímos que BD possui a mesma medida de AB, ou seja, 30.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, temos: $BC^2 + 30^2 = 40^2$. E, resultando $BC=50$, conseguimos determinar o valor de x que é a diferença de $BC=50$ menos $BD=30$, sendo $x=20$.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Há semelhança entre os triângulos AEC e CED, pelo caso Ângulo-Ângulo (AA). A partir dessa relação, é possível estabelecer uma proporção entre os lados correspondentes e determinar que $EC=2$.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, temos: $4^2 + (a-2)^2 = a^2$. E, resultando $a=5$.</p>
<p>19 Fórmula da área do quadrado: Não é válido!</p> <p>Não trabalhamos com quadrado e muito menos com a ideia de área.</p>			<p>20 Fórmula da área do triângulo: Válido!</p> <p>Ao determinar o valor de a, o problema pode ser decomposto em dois triângulos, permitindo calcular a área de cada um separadamente.</p>

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 54 - Manual do Juiz (PROBLEMA 7 e 8) – Apêndice D

PROBLEMA 7 FÁCIL/MÉDIO/DIFÍCIL		PROBLEMA 8 FÁCIL	
<p>18 Teorema do ângulo inscrito: Válido!</p> <p>Como o arco OP mede 40°, pelo Teorema do Ângulo Inscrito concluímos que $\angle OAP = 20^\circ$.</p>	<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Para determinar $\angle OPC$, utilizamos a relação de suplementar. Como $\angle APC = 180^\circ$ e $\angle APO = 80^\circ$, segue que: $\angle OPC = 100^\circ$.</p>	<p>18 Teorema do ângulo inscrito: Não é válido!</p> <p>Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.</p>	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento é solicitado calcular a área; embora fosse possível usar algum artifício nesse sentido, a ideia é sempre resolver da maneira mais simples.</p>
<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>Neste problema aparecem diversos triângulos isósceles. Qualquer análise de um deles já justifica a aplicação da propriedade:</p> <p>Como $AP = AO$ (pelo triângulo AOP), temos $\angle APO = \angle AOP$.</p> <p>Como $AO = CO$ (pelo triângulo AOC), segue que $\angle OAP = \angle OCP$.</p> <p>Como $OB = OC$ (pelo triângulo OBC), obtemos $\angle OBC = \angle OCB$.</p>	<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Válido!</p> <p>Para determinar o $\angle BOC$, usamos a soma de $\angle OPC + \angle OCP$. Isso resulta em $\angle BOC = 120^\circ$.</p> <p>Observação: Neste passo poderia ser substituído por outros passos que resultariam na mesma ideia.</p>	<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>Ao analisar o triângulo ABC, observamos que $\angle CAB$ é igual a $\angle BCA$, indicando que $AB = CB = 5$.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Usamos a semelhança dos triângulos AHC e CMB, considerando que $CM = x/2$. A partir disso, já podemos determinar o valor de x (CA).</p>
<p>9 Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!</p> <p>Este teorema pode ser aplicado em conjunto com a propriedade do triângulo isósceles.</p> <p>Por exemplo: Para o triângulo AOP, se $\angle OAP = 20^\circ$ e $\angle APO = \angle AOP$ então, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos: $\angle OAP + \angle APO + \angle AOP = 180^\circ$. Portanto, $\angle APO = \angle AOP = 80^\circ$.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Não é válido!</p> <p>Não é possível aplicar o Teorema de Pitágoras neste problema, pois em nenhum momento foi identificado um triângulo retângulo (ângulo de 90°) que permitisse sua utilização.</p>	<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!</p> <p>Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.</p>	<p>15 Propriedades do quadrado: Não é válido!</p> <p>Não ajuda em nada esta propriedade.</p>
	<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>Este passo, já utilizado no início do problema, é aqui lembrado para aplicação final, podendo ter sido justificado anteriormente.</p>	<p>11 Critérios de congruência de triângulos: Válido!</p> <p>Embora já tenha sido justificado no item 2), este passo pode ser válido aqui para reforçar a ideia de que os triângulos AMB e CMB são congruentes</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 55 - Manual do Juiz (PROBLEMA 8) – Apêndice D

PROBLEMA 8 MÉDIO		PROBLEMA 8 DIFÍCIL	
<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Sabemos automaticamente que $\angle AHC$ é 90°, pois ele é suplementar a $\angle BHC$: $180^\circ - \angle BHC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.</p>	<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!</p> <p>Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.</p>	<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Sabemos automaticamente que $\angle AHC$ é 90°, pois ele é suplementar a $\angle BHC$: $180^\circ - \angle BHC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.</p>	<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Válido!</p> <p>Trata-se de um artifício para viabilizar um passo futuro (semelhança), no qual o ângulo $\angle ABC$ é dividido em dois.</p>
<p>9 Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!</p> <p>Se $\angle AHC = 90^\circ$ e $\angle HCA = \alpha$, pela soma dos ângulos internos do triângulo: $90^\circ + \alpha + \angle CAH = 180^\circ$. Concluímos que $\angle CAH = 90^\circ - \alpha$.</p>	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento é solicitado calcular a área; embora fosse possível usar algum artifício nesse sentido, a ideia é sempre resolver da maneira mais simples.</p>	<p>9 Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!</p> <p>Se $\angle AHC = 90^\circ$ e $\angle HCA = \alpha$, pela soma dos ângulos internos do triângulo: $90^\circ + \alpha + \angle CAH = 180^\circ$. Concluímos que $\angle CAH = 90^\circ - \alpha$.</p>	<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Não é válido!</p> <p>Esta carta não é compatível, pois o problema não envolve nenhuma circunferência.</p>
<p>6 Definição de ângulos complementares: Válido!</p> <p>Uma maneira de determinar o ângulo C é calculando primeiro $\angle BCH$. Como $\angle BCH$ é complementar a $\angle HBC$, temos $\angle BCH = 90^\circ - 2\alpha$, o que nos leva a $\angle ACB (C) = 90^\circ - \alpha$.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Usamos a semelhança dos triângulos AHC e CMB, considerando que $CM = x/2$. A partir disso, já podemos determinar o valor de $x (CA)$.</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Válido!</p> <p>Uma maneira de determinar o ângulo C é calculando primeiro $\angle BCH$. Como $\angle BCH$ é complementar a $\angle HBC$, temos $\angle BCH = 90^\circ - 2\alpha$, o que nos leva a $\angle ACB (C) = 90^\circ - \alpha$.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Usamos a semelhança dos triângulos AHC e CMB, considerando que $CM = x/2$. A partir disso, já podemos determinar o valor de $x (CA)$.</p>
<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>Ao analisar o triângulo ABC, observamos que $\angle CAB$ é igual a $\angle BCA$, indicando que $AB = CB = 5$.</p>		<p>2 Propriedade do triângulo isósceles: Válido!</p> <p>Ao analisar o triângulo ABC, observamos que $\angle CAB$ é igual a $\angle BCA$, indicando que $AB = CB = 5$.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 56 - Manual do Juiz (PROBLEMA 9) – Apêndice D

PROBLEMA 9 FÁCIL		PROBLEMA 9 MÉDIO	
<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não aparece nenhuma condição de divisão de ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação da bissetriz interna.</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.</p>	<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não aparece nenhuma condição de divisão de ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação da bissetriz interna.</p>	<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Válido!</p> <p>Como os vértices do quadrilátero estão sobre a circunferência, ele é cíclico. Assim, podemos aplicar a propriedade de que ângulos opostos de um quadrilátero inscrito somam 180°. Sendo $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$.</p>
<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Esta carta é válida, pois permite calcular o lado AC. Como o triângulo AOC é retângulo, temos: $OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow R^2 + R^2 = AC^2 \Rightarrow AC = R\sqrt{2}$.</p>	<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Esta carta é válida, pois permite calcular o lado AC. Como o triângulo AOC é retângulo, temos: $OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow R^2 + R^2 = AC^2 \Rightarrow AC = R\sqrt{2}$.</p>
<p>4 CrITÉRIOS da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Aplicamos para desvendar o valor do R (raio), ficando: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot CB \cdot \cos(135^\circ)$.</p>	<p>4 CrITÉRIOS da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Aplicamos para desvendar o valor do R (raio), ficando: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot CB \cdot \cos(135^\circ)$.</p>
<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>		<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 57 - Manual do Juiz (PROBLEMA 9 e 10) – Apêndice D

PROBLEMA 9 DIFÍCIL		PROBLEMA 10 FÁCIL	
<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não aparece nenhuma condição de divisão de ângulo em duas partes iguais. Portanto, não há aplicação da bissetriz interna.</p>	<p>8 Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito): Válido!</p> <p>Como os vértices do quadrilátero estão sobre a circunferência, ele é cíclico. Assim, podemos aplicar a propriedade de que ângulos opostos de um quadrilátero inscrito somam 180°. Sendo $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Inicialmente, consideramos o triângulo OCE: aplicando a lei dos cossenos, temos:</p> $OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2 \cdot OC \cdot CE \cdot \cos(60^\circ)$, resultando em $R^2 = OC^2 + 8^2 - 2 \cdot OC \cdot 8 \cdot \cos(60^\circ)$, a qual chamamos de equação (a).	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.</p>
<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Esta carta é válida, pois permite calcular o lado AC. Como o triângulo AOC é retângulo, temos: $OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow R^2 + R^2 = AC^2 \Rightarrow AC = R \cdot \sqrt{2}$.</p>	<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é válido!</p> <p>No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparece ângulo de 90°, logo não é possível esta definição.</p>
<p>16 Propriedades da circunferência: Válido!</p> <p>Para compreender melhor a resolução, é útil redesenhar a figura completa, destacando a circunferência e considerando suas propriedades fundamentais, como a igualdade dos raios ($AO = OC = R$).</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Aplicamos para desvendar o valor do R (raio), ficando: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot CB \cdot \cos(135^\circ)$.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Aplicamos novamente a lei dos cossenos, agora considerando o triângulo OCD:</p> $OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2 \cdot OC \cdot CD \cdot \cos(120^\circ)$, o que resulta em $R^2 = OC^2 + 5^2 - 2 \cdot OC \cdot 5 \cdot \cos(120^\circ)$, a qual chamamos de equação (b).
<p>18 Teorema do ângulo inscrito: Válido!</p> <p>Esta carta funciona como um "pulo do gato", pois nos direciona para descobrir o ângulo ABC. Para isso, utilizamos o teorema do ângulo inscrito, lembrando que seu ângulo central correspondente é uma perpendicular (90°).</p>		<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>	<p>Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R.</p> <p>Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.</p>

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 58 - Manual do Juiz (PROBLEMA 10) – Apêndice D

PROBLEMA 10 MÉDIO		PROBLEMA 10 DIFÍCIL	
<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Para determinar o ângulo DCE, observamos que ele é suplementar à soma $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Assim, concluímos que $\angle DCE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.</p>	<p>16 Propriedades da circunferência: Válido!</p> <p>Uma das propriedades da circunferência é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R).</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparecem ângulos cuja soma seja 90°, logo esta definição não se aplica.</p>
<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Inicialmente, consideramos o triângulo OCE: aplicando a lei dos cossenos, temos:</p> $OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2 \cdot OC \cdot CE \cdot \cos(60^\circ),$ <p>resultando em</p> $R^2 = OC^2 + 8^2 - 2 \cdot OC \cdot 8 \cdot \cos(60^\circ),$ <p>a qual chamamos de equação (a).</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparece ângulo de 90°, logo não é possível esta definição.</p>	<p>10 Definição de ângulos suplementares: Válido!</p> <p>Para determinar o ângulo DCE, observamos que ele é suplementar à soma $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Assim, concluímos que $\angle DCE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Não é válido!</p> <p>Em nenhum momento do problema aparece ângulo de 90°, logo não é possível esta definição.</p>
<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido!</p> <p>Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Aplicamos novamente a lei dos cossenos, agora considerando o triângulo OCD:</p> $OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2 \cdot OC \cdot CD \cdot \cos(120^\circ),$ <p>o que resulta em</p> $R^2 = OC^2 + 5^2 - 2 \cdot OC \cdot 5 \cdot \cos(120^\circ),$ <p>a qual chamamos de equação (b).</p> <p>Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R.</p> <p>Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Inicialmente, consideramos o triângulo OCE: aplicando a lei dos cossenos, temos:</p> $OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2 \cdot OC \cdot CE \cdot \cos(60^\circ),$ <p>resultando em</p> $R^2 = OC^2 + 8^2 - 2 \cdot OC \cdot 8 \cdot \cos(60^\circ),$ <p>a qual chamamos de equação (a).</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Válido!</p> <p>Aplicamos novamente a lei dos cossenos, agora considerando o triângulo OCD:</p> $OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2 \cdot OC \cdot CD \cdot \cos(120^\circ),$ <p>o que resulta em</p> $R^2 = OC^2 + 5^2 - 2 \cdot OC \cdot 5 \cdot \cos(120^\circ),$ <p>a qual chamamos de equação (b).</p> <p>Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R.</p> <p>Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.</p>
<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>		<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 59 - Manual do Juiz (PROBLEMA 11) – Apêndice D

PROBLEMA 11 FÁCIL		PROBLEMA 11 MÉDIO/DIFÍCIL	
<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido! O primeiro passo é calcular o valor de OD aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo correspondente. Assim, obtemos $OD = 3$.</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido! Não se aplica neste problema, pois não há necessidade.</p>	<p>16 Propriedades da circunferência: Válido! Uma das propriedades da circunferência é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R).</p>	<p>6 Definição de ângulos complementares: Não é válido! Não se aplica neste problema, pois não há necessidade.</p>
<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é válido! No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido! Este é o segundo passo da resolução. Sabendo que $OD = 3$, obtemos $CD = 1$ e, portanto, $OC = 4$. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, descobrimos o valor de x pela conhecida tripla pitagórica (3, 4, 5). Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido! O primeiro passo é calcular o valor de OD aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo correspondente. Assim, obtemos $OD = 3$.</p>	<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido! Este é o segundo passo da resolução. Sabendo que $OD = 3$, obtemos $CD = 1$ e, portanto, $OC = 4$. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, descobrimos o valor de x pela conhecida tripla pitagórica (3, 4, 5). Observação: este segundo passo poderia ter sido desenvolvido junto com a primeira etapa, encerrando o problema de forma direta.</p>
<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido! Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.</p>	<p>17 Lei dos cossenos: Não é válido! Apesar de a Lei dos Cossenos ser uma generalização do Teorema de Pitágoras (já que para ângulo de 90° temos $\cos 90^\circ = 0$), neste caso não há necessidade de aplicá-la. O problema já foi resolvido no passo anterior com o Teorema de Pitágoras, chegando diretamente ao valor de x.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Não é válido! Não se aplica neste problema, pois não há triângulos semelhantes evidentes para relacionar lados ou ângulos.</p>	<p>3 Teorema do ângulo externo do triângulo: Não é válido! No problema não há necessidade de usar ângulo externo, pois todos os ângulos essenciais já são determinados.</p>
<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido! O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>		<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido! O enunciado não pede cálculo de área por Heron e nem solicita o perímetro da figura, portanto este conceito não é necessário.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

Figura 60 - Manual do Juiz (PROBLEMA 12) – Apêndice D

PROBLEMA 12 FÁCIL		PROBLEMA 12 MÉDIO/DIFÍCIL	
<p>16 Propriedades da circunferência: Não é válido!</p> <p>A aplicação das propriedades da circunferência não é válida neste caso, pois nenhum ponto do problema foi definido sobre uma circunferência específica.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>Não há necessidade de calcular o perímetro ou semiperímetro, pois o foco está na área do quadrado e em medidas específicas, não no contorno total do triângulo.</p>	<p>15 Propriedades do quadrado: Válido!</p> <p>Utiliza-se que o quadrado possui lados iguais e ângulos retos, o que é fundamental para estabelecer relações geométricas e de semelhança no problema.</p>	<p>5 Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: Não é válido!</p> <p>Não há necessidade de calcular o perímetro ou semiperímetro, pois o foco está na área do quadrado e em medidas específicas, não no contorno total do triângulo.</p>
<p>1 Teorema da bissetriz interna do triângulo: Não é válido!</p> <p>Não há segmentos ou ângulos que caracterizem uma bissetriz interna no triângulo, tornando a aplicação desse teorema inválida.</p>	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Não é válido!</p> <p>Não é necessário calcular a área de qualquer triângulo, pois o objetivo é determinar a área do quadrado com base em relações de semelhança e medidas específicas.</p>	<p>9 Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo: Válido!</p> <p>Permite concluir que os ângulos agudos nos triângulos retângulos DAO e DEC são complementares, o que é essencial para confirmar a semelhança entre eles e avançar na resolução.</p>	<p>20 Fórmula da área do triângulo: Não é válido!</p> <p>Não é necessário calcular a área de qualquer triângulo, pois o objetivo é determinar a área do quadrado com base em relações de semelhança e medidas específicas.</p>
<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Estabelece-se a semelhança entre os triângulos DAO e EDC, permitindo relacionar as incógnitas a e b por meio de proporções.</p>	<p>19 Fórmula da área do quadrado: Válido!</p> <p>A área do quadrado é calculada diretamente como a.a, fechando a solução do problema com base nas relações estabelecidas anteriormente.</p>	<p>4 Critérios da semelhança de triângulos: Válido!</p> <p>Estabelece-se a semelhança entre os triângulos DAO e EDC, permitindo relacionar as incógnitas a e b por meio de proporções.</p>	<p>19 Fórmula da área do quadrado: Válido!</p> <p>A área do quadrado é calculada diretamente como a.a, fechando a solução do problema com base nas relações estabelecidas anteriormente.</p>
<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Aplica-se o teorema ao triângulo AOD, relacionando seus lados para encontrar os valores de a e b, onde a corresponde ao lado do quadrado.</p>		<p>7 Teorema de Pitágoras: Válido!</p> <p>Aplica-se o teorema ao triângulo AOD, relacionando seus lados para encontrar os valores de a e b, onde a corresponde ao lado do quadrado.</p>	

Fonte: elaborado pelo autor, 2025.

APÊNDICE E (RESOLUÇÃO LARANJA)

Este apêndice detalha o passo a passo correspondente à resolução original de cada problema atribuído à Carta Laranja, categoria classificada como de alto grau do jogo. A estrutura apresentada serve como referência tanto para o juiz (mediador ou avaliador), que a utilizará como base para aferir as estratégias, além do manual da partida, e o desempenho dos participantes, quanto para os alunos.

Do ponto de vista educacional, a sistematização dessas resoluções tem como objetivo permitir que os jogadores compreendam a fundamentação lógica e metodológica por trás de cada solução, contribuindo para a assimilação de processos de raciocínio crítico e resolução sistemática de desafios. Dessa forma, busca-se não somente avaliar resultados, mas também incentivar a transposição didática do aprendizado.

A transposição didática, algo que não foi mencionado até então, embora possa parecer repetitivo, atua como um mecanismo pedagógico crucial para a fixação de conteúdo e a consolidação das competências desenvolvidas durante o jogo.

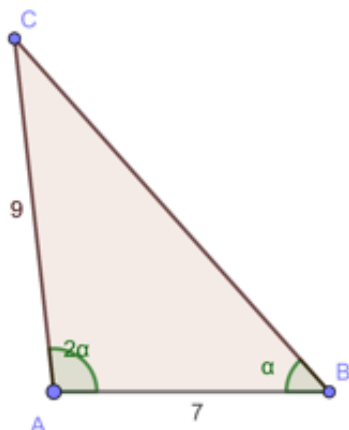
Segue abaixo as resoluções de cada problema laranja original (difícil).

Observação: As passagens destacadas em **negrito** referem-se a etapas provenientes da Carta Branca, conforme a mecânica do jogo. A decisão de detalhar os cálculos neste apêndice, ainda que o foco do jogo seja a estratégia e não a exatidão numérica, visa proporcionar uma documentação completa do processo para estudo e auditoria.

A seguir, apresentam-se a resolução dos problemas laranja, conforme versão entregue aos alunos, segue abaixo:

1 DIFÍCIL

Determine a área do triângulo ABC

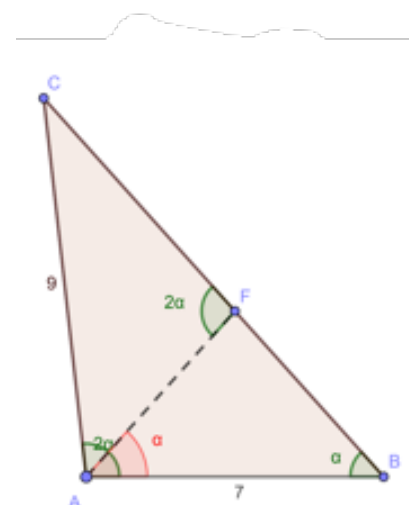


No problema 1, é solicitado determinar a área do triângulo ABC. A alternativa mais adequada é utilizar a fórmula da área de Heron, mas, para isso, é necessário calcular a medida do lado BC.

Para encontrá-lo, aplicamos o **Teorema da bissetriz interna do triângulo**, que divide o ângulo $\angle BAC$, que mede 2α , em duas partes iguais. Na adaptação do desenho, aparecem dois ângulos iguais: $\angle FAB = \alpha$ e $\angle FBA = \alpha$.

Assim, forma-se um triângulo isósceles, ou seja, aplica-se a **Propriedade do triângulo isósceles**. Dessa forma, concluímos que os lados FA e FB são iguais, como pode ser observado na segunda representação.

Para determinar o ângulo $\angle AFC$, aplicamos o **Teorema do ângulo externo do triângulo**, que afirma que ele é a soma dos ângulos $\angle FAB$ e $\angle FBA$. Assim, temos: $\angle FAB + \angle FBA = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Pelo desenho 2, conseguimos identificar o que é necessário na figura.



A partir daí, aplicamos os **Crítérios da semelhança de triângulos** entre o triângulo BAC e o triângulo AFC.

Como AF é igual a FB, chamamos essa medida de x . Dessa forma, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{9}{y+xy+x} = \frac{9}{77} = \frac{xx}{99}, \text{ sendo } FC=y. \text{ Os valores são: } x=FB=\frac{2121}{44} \text{ e } y=FC=\frac{2727}{44}.$$

Vamos somar os lados: $FB + FC = x + y = 12$, logo $BC = 12$. Agora temos os três lados do triângulo: $AB = 7$, $AC = 9$ e $BC = 12$.

Antes de aplicar a fórmula de Heron, é preciso calcular o perímetro ou o semi-perímetro.

Definição de perímetro ou semiperímetro do triângulo: o perímetro é a soma dos lados, e o semiperímetro é metade dessa soma. Fazendo o cálculo: $2P = 7 + 9 + 12 \Rightarrow 2P = 28 \Rightarrow P = 14$. Observação: P (maiúsculo) representa o semiperímetro, enquanto p (minúsculo) representa o perímetro, isto é, $p = 2P$.

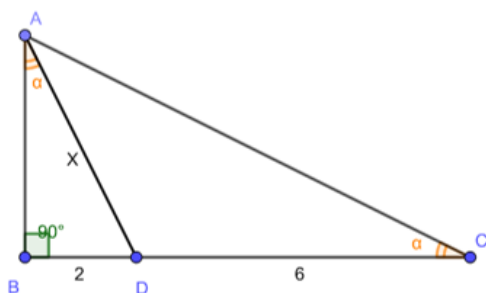
Aplicando a **Fórmula da área do triângulo** (Heron):

$$A = \frac{\sqrt{(P)(P-l_1)(P-l_2)(P-l_3)}\sqrt{(P)(P-l_1)(P-l_2)(P-l_3)}}{\sqrt{(14)(14-7)(14-9)(14-12)}\sqrt{(14)(14-7)(14-9)(14-12)}} \Rightarrow A = 14\sqrt{5}\sqrt{5} \text{ (u.a.)}$$

2 DIFÍCIL

Na figura a seguir, considere o triângulo representado. Determine o valor do segmento $AD=x$.

Observação: todas as informações necessárias para a resolução estão indicadas na própria figura.



No problema 2, a alternativa mais adequada e direta para a resolução é, em um primeiro momento, aplicar os **Crêterios da semelhança de triângulos** entre os triângulos ABD e CBA.

Dessa forma, obtemos a seguinte relação: $\frac{2}{AB} = \frac{2}{AB} = \frac{x}{AC}$
 $\frac{x}{AC} = \frac{2}{2+6} = \frac{2}{8} \Rightarrow AB^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow AB = 4 \text{ (u.m.)}$

Analisando o triângulo interno ABD, observamos que já conhecemos dois lados e que existe um ângulo de 90 graus. Assim, podemos aplicar o **Teorema de Pitágoras**, obtendo:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow$$

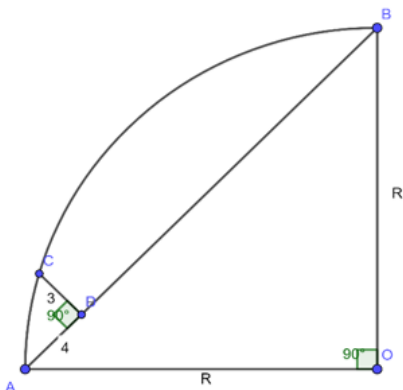
$$x^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow$$

$$\text{Então: } AD = x = 2\sqrt{5} \text{ (u.m.)}$$

3 DIFÍCIL

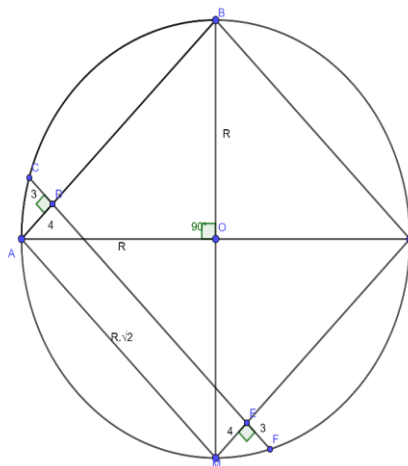
Conforme o desenho indicado, um triângulo retângulo com lados 3 e 4 está inscrito em um setor circular de 90° .

Determine o valor do raio R da circunferência.



No problema 3, para compreender e visualizar melhor a questão, é interessante redesenhar a figura. Para isso, é necessário conhecer as **Propriedades da circunferência**.

O desenho está ilustrado abaixo, com todos os seus segmentos prolongados.



Alguns destes próximos passos não precisam seguir uma ordem rígida, podendo ser feitos em paralelo.

Primeiro, vamos determinar o segmento AB. Para isso, aplicamos o **Teorema de Pitágoras**: $AB^2 = AO^2 + BO^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$. Portanto, $AB = R\sqrt{2}$.

É interessante redesenhar o quadrado dentro da circunferência. Embora seja algo intuitivo, é importante lembrar das **Propriedades do quadrado**, ou seja, ele possui os quatro lados iguais, com ângulos retos.

Em seguida, podemos visualizar os **Critérios de congruência de triângulos**, observando que o triângulo ADC é congruente (igual) ao triângulo MEF.

Já sabemos que $AB = R\sqrt{2}$ e que $AD = 4$. Logo: $BD = R\sqrt{2} - 4$.

Sabemos também que $CD = 3$ (dado no enunciado). Além disso, como $AM = DE = \sqrt{2}$, concluímos que: $FD = FE + ED = 3 + R\sqrt{2}$.

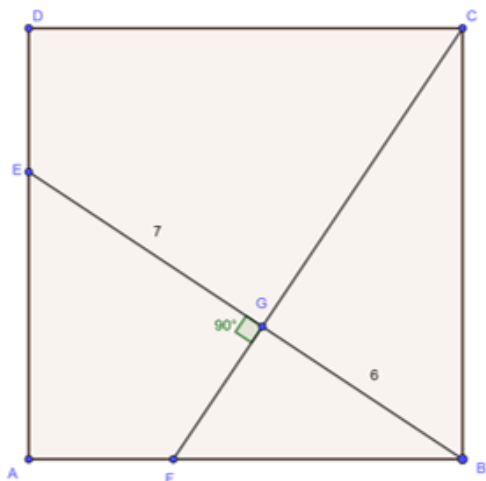
Agora, segmentamos as partes para aplicar o **Teorema da potência de um ponto (caso interno)**, que estabelece: $AD \cdot BD = CD \cdot FD$

Substituindo: $4 \cdot (R\sqrt{2} - 4) = 3 \cdot (3 + R\sqrt{2})$

Desenvolvendo pela distributiva e isolando R, obtemos o valor de $R = \frac{25\sqrt{2}25\sqrt{2}}{2 \quad 2}$ (u.m).

4 DIFÍCIL

Calcule a área do quadrado ABCD, sabendo que os segmentos EG e GC são perpendiculares entre si, com comprimentos EG=7 e GB=6, conforme a figura.



No problema 4, o ponto de partida fundamental é destacar as **Propriedades do quadrado**, lembrando que todos os lados são iguais e que ele é formado por ângulos retos (90°). Assim, temos o ângulo $\angle BAE = \angle ABC = 90^\circ$.

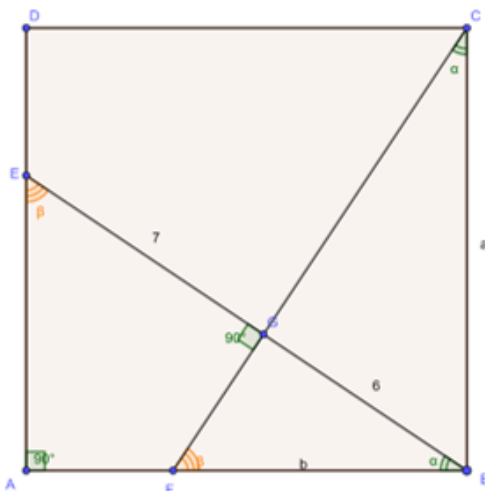
Vamos analisar o triângulo BAE. Chamamos o ângulo $\angle ABE$ de α (i). Sabemos que $\angle BAE = 90^\circ$ e adotamos o ângulo $\angle AEB = \beta$, de forma que a soma dos ângulos internos é $\alpha + 90^\circ + \beta$.

Observa-se aqui os **Crêterios de congruência de triângulos** entre BAE e CBF, pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto), já que $AB = BC$. Assim, concluímos que CF possui a mesma medida de BE, ou seja, 13.

Em paralelo com essa situação, reforçamos o ângulo reto (90°) em $\angle BGF$, que se dá pela **Definição de ângulos suplementares**: $\angle BGF + \angle EGF = 180^\circ$.

Agora, analisando o triângulo BGF: inicialmente (i) temos que $\angle ABE = \angle FBG = \alpha$, e que $\angle BGF = 90^\circ$. Logo, concluímos que o ângulo $\angle BFG$ é β (ângulo faltante).

Podemos redesenhar da seguinte forma abaixo:



Analisando o triângulo FBC, temos que o ângulo $\angle BFC = \beta$, o ângulo $\angle FBC = 90^\circ$, e o ângulo que falta é $\angle BCF = \alpha$.

Podemos aplicar os **Crêterios da semelhança de triângulos** entre BGF e BCF. Dessa forma, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{FG}{b} = \frac{b}{b} = \frac{6}{a}$$

Daí resulta:

$$a \cdot b = 6 \cdot 13$$

$$a \cdot b = 78 \text{ (ii)}$$

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** no triângulo CBF, por existir um ângulo reto, temos:

$$a^2 + b^2 = 13^2$$

$$a^2 + b^2 = 169 \text{ (iii)}$$

Agora, resolvemos o sistema formado pelas equações (ii) e (iii):

$$(ii) a \cdot b = 78$$

$$(iii) a^2 + b^2 = 169$$

A solução fornece os valores de a e b.

No caso, encontramos:

$$a = 3\sqrt{13}$$

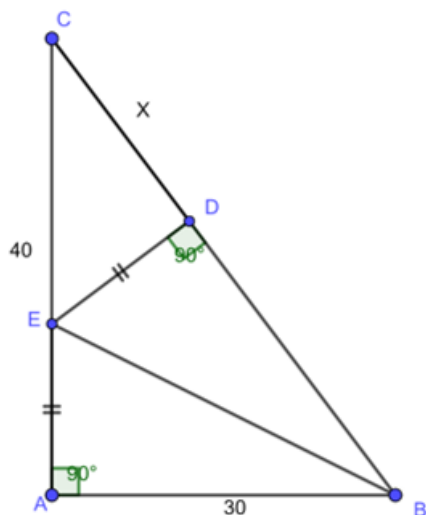
Como o problema pede a área do quadrado, utilizamos a **Fórmula da área do quadrado**:

$$A = a^2 = 117 \text{ (u.a)}$$

5 DIFÍCIL

Considere o triângulo ABC, cujas medidas estão representadas na figura.

Calcule o valor do segmento CD, indicado por X.



No problema 5, o enunciado não descreve diretamente, mas pelo desenho fica evidente que os segmentos AE e DE são iguais ($AE = DE$).

A partir disso, aplicamos os **Crítérios de congruência de triângulos** entre os triângulos BAE e BDE, pelo caso especial HC (hipotenusa-cateto). Assim, concluímos que BD possui a mesma medida de AB, ou seja: $BA = BD = 30$.

Aplicando o **Teorema de Pitágoras**, no triângulo ABC por existir um ângulo reto em BAC, temos:

$$\begin{aligned} BC^2 &= 30^2 + 40^2 \\ BC^2 &= 900 + 1600 \\ BC^2 &= 2500 \\ BC &= 50 \end{aligned}$$

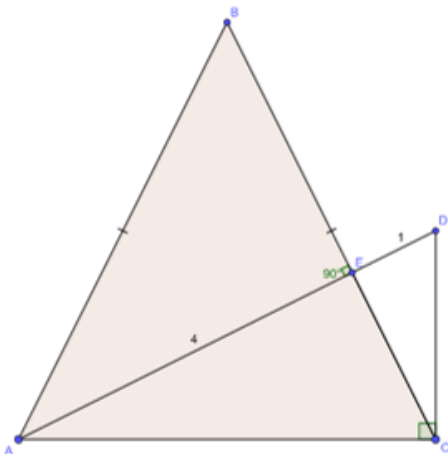
Dessa forma, conseguimos determinar o valor de x, que é a diferença entre $BC = 50$ e $BD = 30$:

$$x = 20$$

6 DIFÍCIL

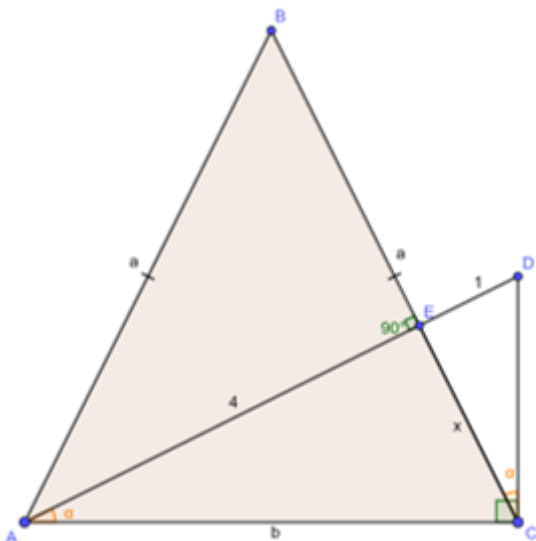
Calcule a área do triângulo ABC, sendo $AB=BC$, conforme indicado na figura.

Utilize o triângulo auxiliar ACD para apoiar a resolução, considerando os segmentos $AE=4$ e $ED=1$.



ideia, $\angle DEC = 90^\circ$. Assim, o ângulo que sobra é $\angle DCE = \alpha$.

Um esboço abaixo para ficar mais claro a ideia:



Analisando o triângulo AEB, observamos que existe um ângulo reto ($\angle AEB = 90^\circ$). Dessa forma, aplicamos o **Teorema de Pitágoras**: $4^2 + (a - 2)^2 = a^2$.

Resolvendo, obtemos: $a = 5$. Como o problema pede para determinar a área, utilizamos a

Fórmula da área do triângulo, que será: $A = \frac{(4,5) \cdot (4,5)}{2} = 10$ (u.a)

No problema 6, um ponto de partida é que, embora o ângulo AEC pareça obviamente reto, sua determinação exige uma relação suplementar. Como $\angle AEB = 90^\circ$, obtemos: $\angle AEC = 180^\circ - \angle AEB = 90^\circ$.

Isso corresponde exatamente à **Definição de ângulos suplementares**.

Outro conceito é considerar o ângulo $\angle CAD = \alpha$, apenas para deixar evidente.

Agora, vamos analisar os triângulos:

- Triângulo AEC: já sabemos que $\angle AEC = 90^\circ$. Logo, o ângulo que sobra é $\angle ACE$, que adotamos como β .
- Triângulo ACD: sendo $\angle CAD = \alpha$ e, pelo enunciado do desenho, $\angle ACD = 90^\circ$, concluímos que o ângulo que sobra é $\angle ADC = \beta$.
- Triângulo CDE: já sabemos que $\angle ADC = \angle EDC = \beta$. Automaticamente, pela primeira

Agora, aplicamos os **Crítérios da semelhança de triângulos** entre AEC e CED. Obtemos a seguinte relação:

$$\frac{xx}{11} = \frac{b}{CD} = \frac{44}{xx}, \text{ isso resulta em:}$$

$$x^2 = 1 \cdot 4 = 4$$

$$\text{Logo, } x = 2.$$

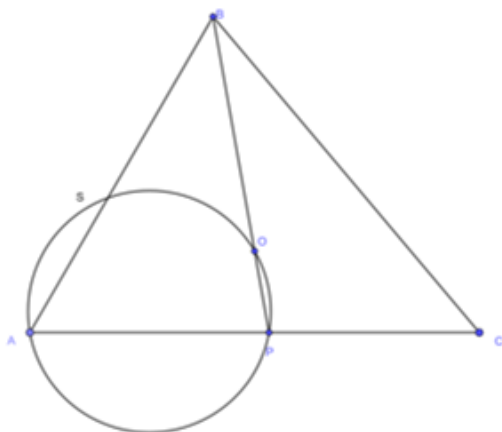
Sabemos pelo enunciado que $AB = CB$, e chamamos essa medida de "a". Assim, BE será a diferença de CE, ficando:

$$BE = a - 2.$$

7 DIFÍCIL

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a interseção das retas BO e AC , e S a circunferência circunscrita ao triângulo AOP . Suponha que BO é igual a AP e que a medida do arco OP em S , que não contém o ponto A , é igual a 40 graus.

Determine a medida do ângulo OBC .



- No triângulo AOC : como $AO = CO$, segue que $\angle OAP = \angle OCP = 20^\circ$.

Para determinar $\angle OPC$, utilizamos a **Definição de ângulos suplementares**. Como $\angle APC = 180^\circ$ e $\angle APO = 80^\circ$, segue que: $\angle OPC = 100^\circ$.

Para determinar $\angle BOC$, usamos a soma de $\angle OPC + \angle OCP$, pelo **Teorema do ângulo externo do triângulo**. Assim: $\angle BOC = 120^\circ$.

(Observação: este passo poderia ser feito de outras formas, mas todas levam à mesma ideia.)

No triângulo OBC : como $OB = OC$, temos $\angle OBC = \angle OCB$. Sabendo que $\angle BOC = 120^\circ$, sobra 60° para os outros dois ângulos. Logo: $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$.

Resposta final: $\angle OBC = 30^\circ$.

No problema 7, é interessante redesenhar todos os passos ou pontos importantes.

O enunciado fala do circuncentro, então devemos redesenhar um círculo onde os pontos A , B e C estão na circunferência e marcar o raio R . Assim, $R = AO = OB = OC$. Como o enunciado também diz que $BO = AP$, temos: $AP = OB = R$.

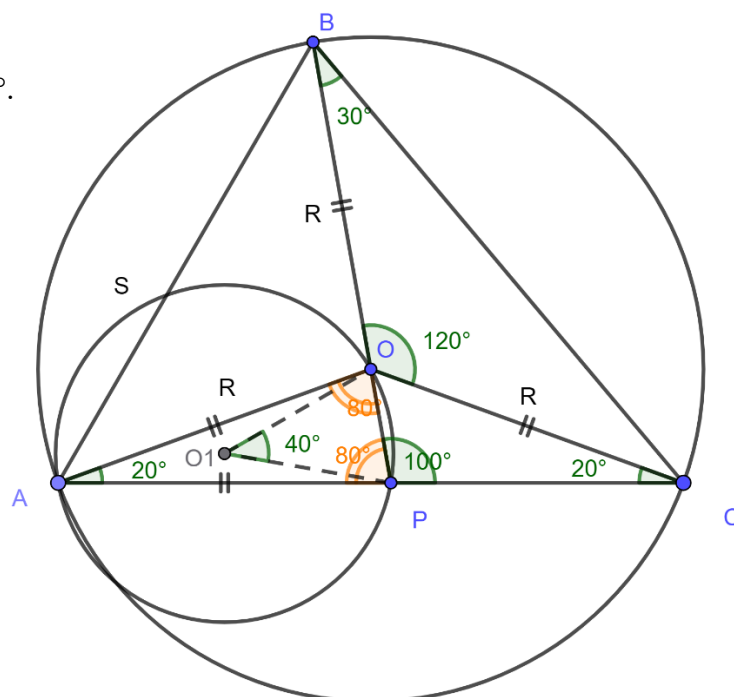
O arco OP mede 40° . Pelo **Teorema do Ângulo Inscrito**, concluímos que: $\angle OAP = 20^\circ$.

Neste problema aparecem diversos triângulos isósceles (**Propriedade do triângulo isósceles**).

- No triângulo AOP : como $AP = AO$, temos $\angle APO = \angle AOP$. Pela soma dos ângulos internos, se $\angle OAP = 20^\circ$ e $\angle APO = \angle AOP$, então:

$$\angle OAP + \angle APO + \angle AOP = 180^\circ$$

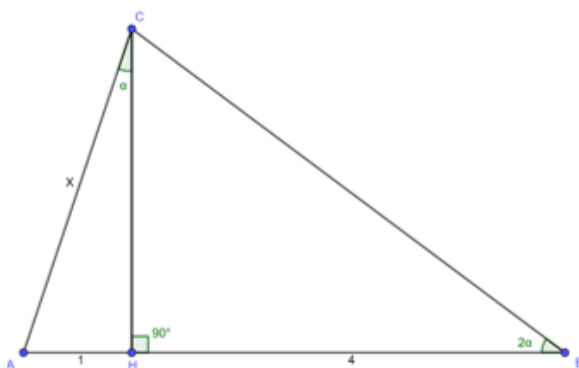
$$\text{Portanto, } \angle APO = \angle AOP = 80^\circ.$$



8 DIFÍCIL

No triângulo ABC, queremos descobrir o valor de x, que representa o lado AC. Sabemos que uma altura foi traçada do ponto C até o lado AB, formando um ângulo de 90 graus no ponto H. É dado que AH vale 1 e HB vale 4.

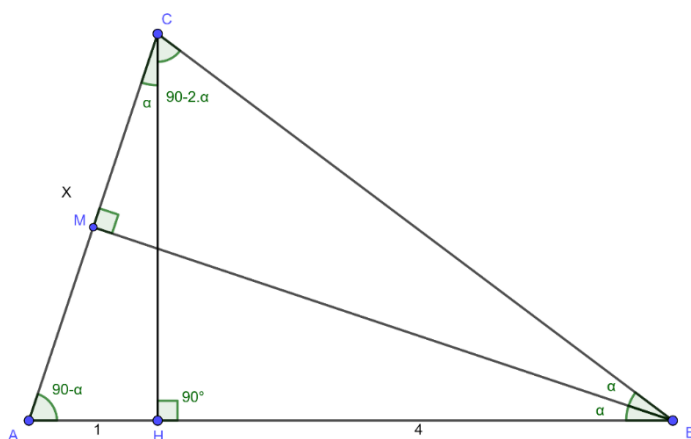
O ângulo no vértice C (ACH) é α e o ângulo no vértice B é 2α .



Ângulos $\angle CAB$ e $\angle BCA$ são iguais, o que indica, pela **propriedade do triângulo isósceles**, que $AB = CB = 5$.

Um detalhe interessante é que, no mesmo triângulo ABC, podemos aplicar o **Teorema da Bissetriz Interna**. Esse recurso divide o ângulo $\angle ABC$ em duas partes iguais, o que será útil em passos futuros envolvendo a semelhança de triângulos.

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar.



No **problema 8**, sabemos inicialmente que o ângulo $\angle AHC$ é de 90° , pois ele é suplementar a $\angle BHC$. Pela **definição de ângulos suplementares**, temos:

$$\angle AHC = 180^\circ - \angle BHC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

No triângulo AHC, aplicamos o **teorema da soma dos ângulos internos do triângulo**. Sendo $\angle AHC = 90^\circ$ e $\angle HCA = \alpha$, temos:

$$90^\circ + \alpha + \angle CAH = 180^\circ.$$

$$\text{Logo, } \angle CAH = 90^\circ - \alpha.$$

Agora, vamos analisar o triângulo HCB para determinar o ângulo $\angle HCB$. Pela **definição de ângulos complementares**, como $\angle BCH$ é complementar a $\angle HBC$, obtemos:

$$\angle BCH = 90^\circ - 2\alpha. \text{ Assim, o ângulo } \angle ACB \text{ (C) será: } \angle ACB = 90^\circ - \alpha.$$

No triângulo ABC, observamos que os

Usando o **Crterios da semelhança de triângulos** dos triângulos AHC e CMB, considerando que $CM = x/2$. A partir disso, já podemos determinar o valor de x (CA).

Ira fica a seguinte relação:

$$\frac{1}{x/2} = \frac{1}{5} = \frac{xx}{MBMB}, \text{ resultando em}$$

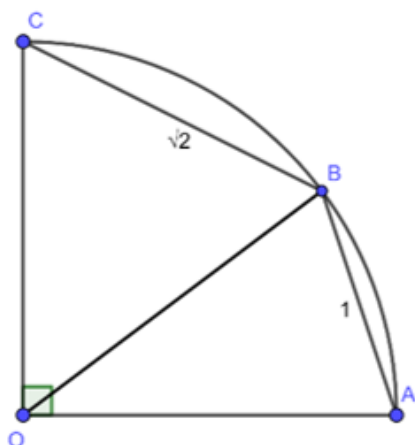
$$x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10} \sqrt{10} \text{ (u.m)}$$

$$\text{Então: } AC = \sqrt{10} \sqrt{10} \text{ (u.m)}$$

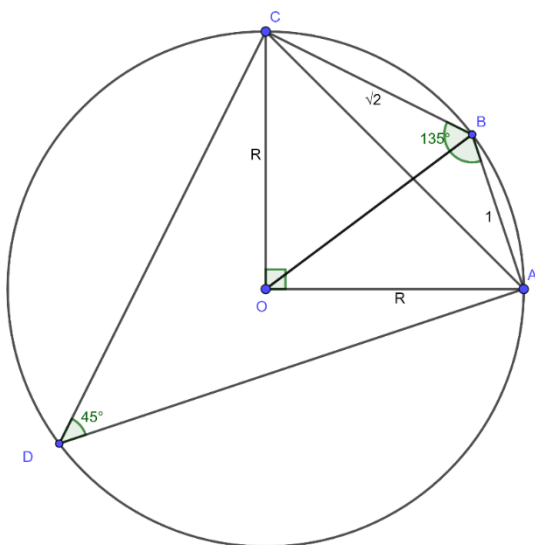
9 DIFÍCIL

No desenho abaixo, temos um quarto de círculo com centro em O. Os pontos A e C estão sobre os eixos e formam ângulos retos com O. O ponto B está sobre o arco do quarto de círculo. Sabemos que $AB = 1$ e $BC = \sqrt{2}$.

Qual é o valor do segmento OA?



Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar.



Como o triângulo AOC é retângulo, pelo **Teorema de Pitágoras** temos:

$$OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow R^2 + R^2 = AC^2 \Rightarrow AC = R\sqrt{2}$$

Aplicando a **Lei dos cossenos**, para desvendar o valor do R (raio), ficando:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(135^\circ)$$

$$(R\sqrt{2})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$R = AO = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (u.m.)}$$

No problema 9, primeiro ponto de partida para compreender melhor a resolução, é útil redesenhar a figura completa, destacando a circunferência e considerando suas propriedades fundamentais, como a igualdade dos raios ($AO = OC = R$), ou seja, é fundamental saber as **propriedades da circunferência**.

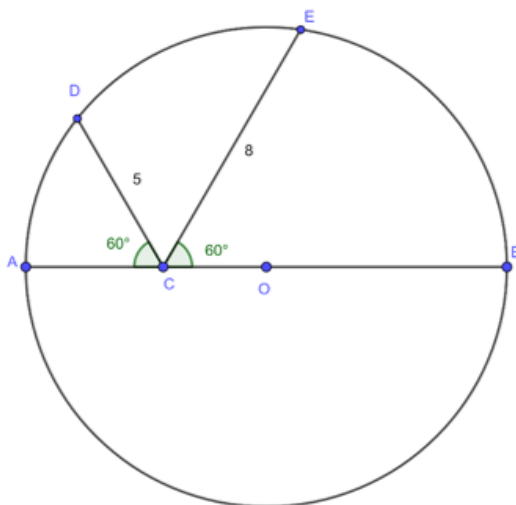
Para descobrir o ângulo $\angle ABC$, utilizamos o **teorema do ângulo inscrito**, lembrando que seu ângulo central correspondente é uma perpendicular (90°). Refletindo em $\angle ADC = 45^\circ$.

Como os vértices do quadrilátero estão sobre a circunferência, ele é cíclico. Assim, podemos aplicar a propriedade de que ângulos opostos de um quadrilátero inscrito somam 180° (**Teorema do quadrilátero cíclico (inscrito)**). Sendo $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$.

10 DIFÍCIL

Calcule o raio da circunferência (OA = OB).

Os dados estão indicados no desenho.



$$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2 \cdot OC \cdot CE \cdot \cos(60^\circ)$$

$$OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2 \cdot OC \cdot CE \cdot \cos(60^\circ),$$

resultando em $R^2 = OC^2 + 8^2 - 2 \cdot OC \cdot 8 \cdot \cos(60^\circ)$

$$R^2 = OC^2 + 8^2 - 2 \cdot OC \cdot 8 \cdot \cos(60^\circ),$$

a qual chamamos de equação (a).

Analisando o triângulo OCD, reaplicamos a **Lei dos cossenos** novamente, teremos:

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2 \cdot OC \cdot CD \cdot \cos(120^\circ) \quad OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2 \cdot OC \cdot CD \cdot \cos(120^\circ),$$

o que resulta em

$$R^2 = OC^2 + 5^2 - 2 \cdot OC \cdot 5 \cdot \cos(120^\circ) \quad R^2 = OC^2 + 5^2 - 2 \cdot OC \cdot 5 \cdot \cos(120^\circ),$$

a qual chamamos de equação (b).

Resolvendo o sistema formado pelas equações (a) e (b), obtemos os valores de OC e do raio R, que será:

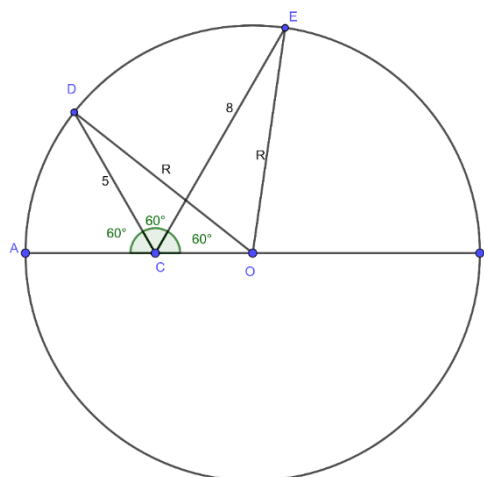
$$OC=3 \text{ (u.m)} \text{ e o raio: } R=7 \text{ (u.m)}$$

No problema 10, o ponto de partida é perceber que uma das **propriedades da circunferência** é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R).

Outro passo é determinar o ângulo DCE. Observamos que ele é a **definição de ângulos suplementar** da soma $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Assim, concluímos que $\angle DCE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar:

Analisamos o triângulo OCE, e aplicamos a **Lei dos cossenos**, tendo:

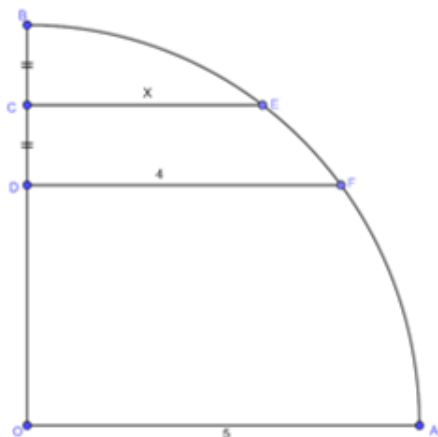


11 DIFÍCIL

Temos um quarto de circunferência, com raio igual a 5. Sabemos que os segmentos DC e CB são iguais e o segmento DF mede 4.

Calcule o valor de X (segmento CE).

Obs: $AO \parallel DF \parallel CE$ (paralelas entre si).



No problema 11, é perceber as **propriedades da circunferência**, que uma delas é que todos os pontos pertencentes a ela estão à mesma distância do centro. Isso garante que os segmentos OE e OD possuem a mesma medida, ambos iguais a um raio (R), ou seja, $R=AO=OB=OE=OF=5$.

Analisando o triângulo ODF, aplicamos o **Teorema de Pitágoras**, por ter um ângulo reto em $\angle ODF$ (90°) paralelo, isso é garantido por ser um quarto da circunferência. Logo:

$$OF^2 = OD^2 + DF^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + OD^2 \Rightarrow OD=3.$$

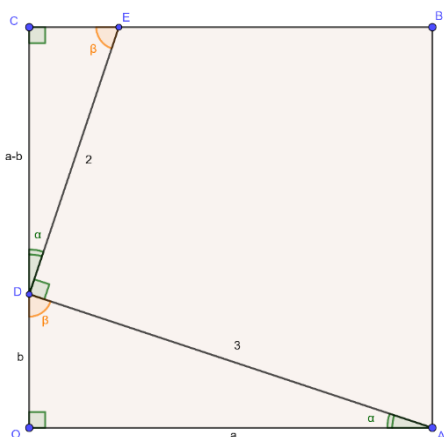
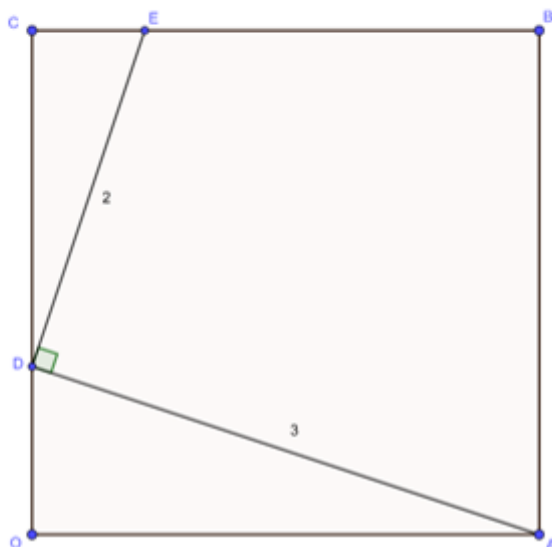
Como sabemos que $OB = R=5$, e sendo $BC=CD$. Resulta em $CD=5-3=2$, que reflete em $BC=CD=1$.

Analisando o triângulo OCE, temos $OC=4$, $CE=x$ e $OE=5$. Aplicamos o **Teorema de Pitágoras** e resultará em $5^2 = 4^2 + x^2$. Então: $x = CE = 3$ (u.m).

12 DIFÍCIL

No desenho, temos um quadrilátero ABCO. Dentro dele, estão destacados dois triângulos: $\triangle DAO$ e $\triangle DEC$. Sabemos que $DE=2$, $DA=3$ e o ângulo $\angle ADE$ é reto.

Calcule a área do quadrilátero ABCO.



No problema 12, sabe-se que o quadrado possui lados iguais e ângulos retos, o que é fundamental para estabelecer relações geométricas e de semelhança no problema, neste caso usamos as **Propriedades do quadrado**.

Utilizar a ideia do **Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo**, é fundamental. Analisando o triângulo AOD, podemos considerar $\angle OAD = \alpha$, sendo $\angle AOD = 90^\circ$, e adotando $\angle ODA = \beta$, para estabelecer uma ideia, que resulta em $\beta = 90 - \alpha$. Analisando o triângulo DEC, sendo $\angle DCE = 90^\circ$ e vamos determinar o $\angle CDE$ do seguinte modo: $\angle ODC = \angle ODA + \angle ADE + \angle CDE$

$$180 = \alpha + 90 + \angle CDE, \text{ logo:}$$

$$\angle CDE = 90 - \alpha = \beta, \text{ e como sabemos } \angle DCE = 90^\circ, \angle DEC = \alpha.$$

Para melhor visualização, o problema pode ser redesenhado, destacando essa construção auxiliar.

Estabelece-se o **Crítérios da semelhança de triângulos** entre DAO e EDC, permitindo relacionar as incógnitas a e b por meio de proporções.

$$\frac{b}{CE} = \frac{b}{ED} = \frac{a}{a-b} = \frac{a}{b} \text{ que resulta em } a=3b.$$

Aplicando agora o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo AOD, relacionamos seus lados para encontrar os valores de a e b , onde a corresponde ao lado do quadrado: $3^2 = a^2 + b^2$.

Resolvendo a equação, obtemos: $a^2 = 81/10$.

Como o problema pede a área do quadrado, aplicamos a **fórmula da área do quadrado**: $A = a \times a = a^2 = 81/10$ (u.a).

