


DUAS CIRCUNFERÊNCIAS NO PLANO

Dulce Mary de Almeida

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística

 <https://orcid.org/0000-0001-8783-8233>

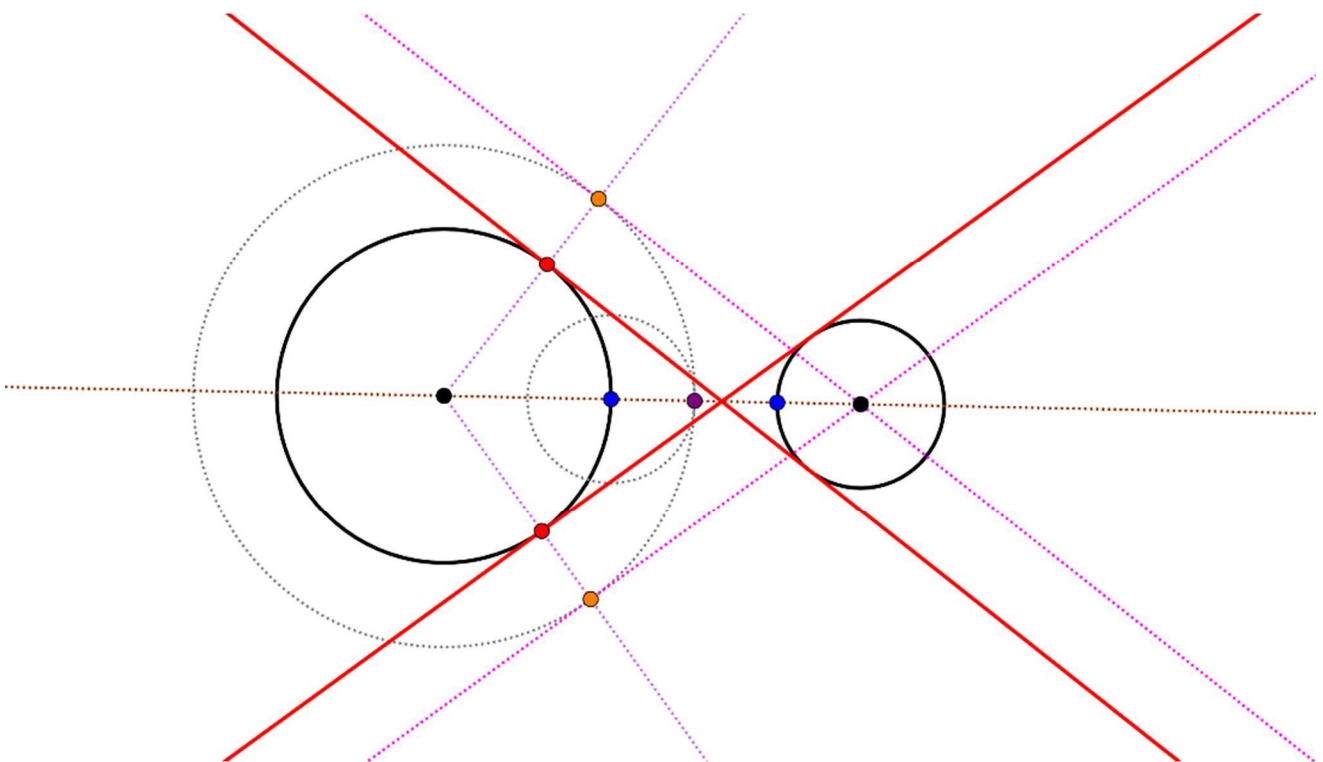
dulce.almeida@ufu.br

Júlio César Costa

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística

 <https://orcid.org/0009-0007-5754-5369>

julio.costa04@ufu.br



Uberlândia - MG
2026

Duas circunferências no plano

Two circumferences in the plane

Dulce Mary de Almeida¹

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística

 <https://orcid.org/0000-0001-8783-8233>

Júlio César Costa²

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística

 <https://orcid.org/0009-0007-5754-5369>

Resumo

O estudo da posição relativa de duas circunferências no plano e das construções com régua sem escala e compasso (construções geométricas) das tangentes comuns a duas circunferências, dadas no mesmo plano, são ferramentas fundamentais na resolução do Problema de Apolônio. A busca por soluções desse problema estimulou pesquisas de métodos da Geometria, da Álgebra e de processos analíticos que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. O objetivo deste texto é apresentar uma redação desse estudo de forma clara, coesa e objetiva, a qual geralmente não se encontra de forma detalhada nos textos clássicos de Geometria Euclidiana que tratam desse conteúdo. Espera-se que o mesmo sirva como texto preliminar para aqueles que pretendem avançar seus estudos em Geometria Euclidiana, mais especificamente nas construções geométricas e, posteriormente, na resolução do Problema de Apolônio, o qual, na sua abordagem original, consiste na construção geométrica de uma circunferência tangente a três circunferências dadas.

Palavras-chave: Duas circunferências, Posição relativa, Tangentes comuns, Construções geométricas, Circunferências exteriores.

Abstract

The study of the relative position of two circumferences in the plane and the constructions, with a scaleless ruler and compass (geometric constructions), of the tangents common to two circumferences, given in the same plane, are fundamental tools in solving Apollonius' Problem. The search for solutions to this problem stimulated research into methods of Geometry and Algebra and analytical processes that greatly contributed to the development

¹ dulce.almeida@ufu.br

² julio.costa04@ufu.br

of Mathematics. The objective of this article is to present a text of this study in a clear, cohesive and objective way, which is generally not found in detail in classic Euclidean Geometry texts that deal with this content. We hope that it will serve as a preliminary text for those who intend to advance their studies in Euclidean Geometry, more specifically in geometric constructions and later in solving the Problem of Apollonius which, in its original approach, consists of the geometric construction of a circumference tangent to three circumferences given.

Keywords: Two circumferences, Relative position, Common tangents, Geometric constructions, Exterior circumferences.

Duas circunferências no plano

É importante enfatizar que este texto³ foi estruturado com base em Muniz Neto (2013), onde a Proposição 1) e as construções C) e D) são deixadas como exercícios. O texto é complementado com ilustrações, embasado em sólida fundamentação teórica e tem por objetivo contribuir para um melhor entendimento dos aspectos matemáticos teóricos e geométricos relacionados à posição relativa de duas circunferências situadas num mesmo plano, bem como das construções geométricas das retas tangentes comuns a essas duas circunferências.

Posição relativa entre duas circunferências

A proposição abaixo fornece a caracterização da posição relativa de duas circunferências em termos dos seus raios e das distâncias entre os seus centros.

Proposição 1: Sejam C_1 e C_2 duas circunferências distintas de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente. Seja $a = d(O_1, O_2)$, então:

- i) $C_1 \cap C_2$ consiste de um único ponto se, e somente se, $a = r_1 + r_2$ ou $a = |r_1 - r_2|$;
- ii) $C_1 \cap C_2$ consiste de dois pontos se, e somente se, $|r_1 - r_2| < a < r_1 + r_2$;
- iii) $C_1 \cap C_2$ é vazio se, e somente se, $a > r_1 + r_2$ ou $a < |r_1 - r_2|$.

Demonstração: Considere um sistema de coordenadas ortogonais tal que as equações de C_1 e C_2 sejam dadas por $x^2 + y^2 = r_1^2$ e $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r_2^2$. Pelo menos um dentre os números reais c e d deve ser diferente de zero, pois C_1 e C_2 são distintas. Suponha, sem perda de generalidade, que $c \neq 0$ e considere o sistema:

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x - c)^2 + (y - d)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 & (1.1) \\ x = \frac{-1}{2c} [r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2 + 2dy] & (1.2) \end{cases}$$

Substituindo a equação (1.2) na equação (1.1), obtemos o sistema equivalente:

³ Este texto é parte da dissertação de mestrado defendida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT UFU, orientada pela primeira autora e defendida pelo segundo autor, Costa (2023).

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{c^2} + 1 \right) y^2 + \frac{d}{c^2} (r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2) y + \frac{1}{4c^2} (r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2)^2 - r_1^2 = 0 & (1.3) \\ x = \frac{-1}{2c} [r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2 + 2dy] & (1.4) \end{cases}$$

O discriminante da equação do 2º grau na variável y dada em (1,3) é:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{c^2} [(4d^2 + 4c^2)r_1^2 - (r_2^2 - r_1^2 - d^2 - c^2)^2] \\ &= \frac{1}{c^2} [-(d^2 + c^2)^2 + (2r_1^2 + 2r_2^2)(d^2 + c^2) - (r_2^2 - r_1^2)^2] \end{aligned}$$

Assim, o sistema S tem uma solução, duas soluções ou nenhuma solução se, e somente se, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$, respectivamente.

Considerando a função do 2º grau (em z):

$c^2\Delta = f(z) = -z^2 + (2r_1^2 + 2r_2^2)z - (r_2^2 - r_1^2)^2$, onde $z = d^2 + c^2$. Tem-se:

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = (r_1 + r_2)^2$ ou $c^2 + d^2 = (r_1 - r_2)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = r_1 + r_2$ ou $\sqrt{c^2 + d^2} = |r_1 - r_2|$.

Analisando o sinal da função $f(z)$ e lembrando que $a = \sqrt{c^2 + d^2}$ segue que:

i) $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = r_1 + r_2$ ou $a = |r_1 - r_2|$.

ii) $\Delta > 0 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| < a < r_1 + r_2$.

iii) $\Delta < 0 \Leftrightarrow a > r_1 + r_2$ ou $a < |r_1 - r_2|$.

E isso completa a demonstração.

Segue a definição que nomeia duas circunferências em relação a posição relativa delas no plano.

Definição: Duas circunferências C_1 e C_2 de centros O_1 e O_2 , raios r_1 e r_2 , $a = d(O_1, O_2)$ são denominadas:

- i) Circunferências tangentes se satisfazem a condição i) da Proposição 1. No caso em que $a = r_1 + r_2$, são denominadas circunferências tangentes exteriormente; no caso em que $a = |r_1 - r_2|$, são denominadas circunferências tangentes interiormente.
- ii) Circunferências secantes se satisfazem a condição ii) da Proposição 1)
- iii) Circunferências exteriores se $a > r_1 + r_2$.
- iv) Circunferências interiores se $a < |r_1 - r_2|$.

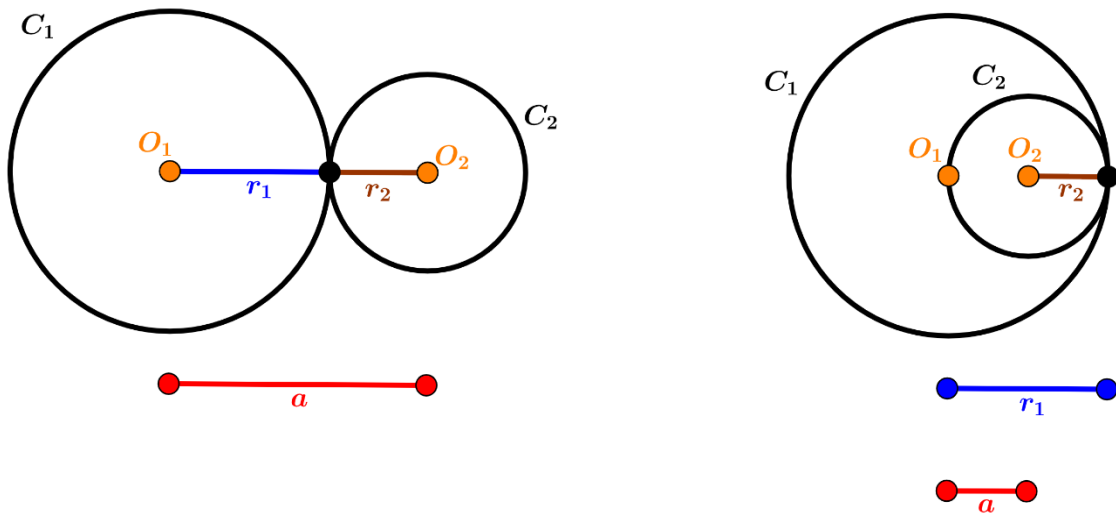


Figura1: Duas circunferências tangentes exteriormente e interiormente

Reta tangente a uma circunferência

Para prosseguir com o estudo das construções geométricas das tangentes comuns a duas circunferências dadas, faz-se necessário enunciar o resultado de Geometria Euclidiana Plana que fornece a caracterização da reta tangente a uma circunferência, bem como descrever o processo de construção geométrica das duas retas tangentes à uma circunferência dada passando por um ponto exterior dado, que se encontram em Rezende et al (2000), conforme segue.

Teorema 2: Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma circunferência é que ela seja perpendicular ao raio que une o centro ao ponto de tangência.

Construção A: Reta tangente passando por um ponto P externo à circunferência dada

Seja uma circunferência C de centro O e raio r e um ponto P exterior à C .

- i) Trace a circunferência D de diâmetro \overline{OP} .
- ii) Seja $\{A, B\} = C \cap D$.
- iii) Trace a reta t que passa pelos pontos P e A e a reta s que passa pelos pontos P e B .

Afirmação: As retas t e s são tangentes à circunferência C passando por P .

Justificativa: Por construção, \overline{OP} é o diâmetro da circunferência D e consequentemente

o ângulo $\angle OAP$ é reto pois está inscrito numa semicircunferência. De forma análoga o ângulo $\angle OBP$ também é reto. Segue da caracterização da reta tangente a uma circunferência como a reta perpendicular ao raio passando pelo ponto de tangência que, as retas que passam pelos pontos P e A (reta t) e pelos pontos P e B (reta s) são retas tangentes à C passando por P .

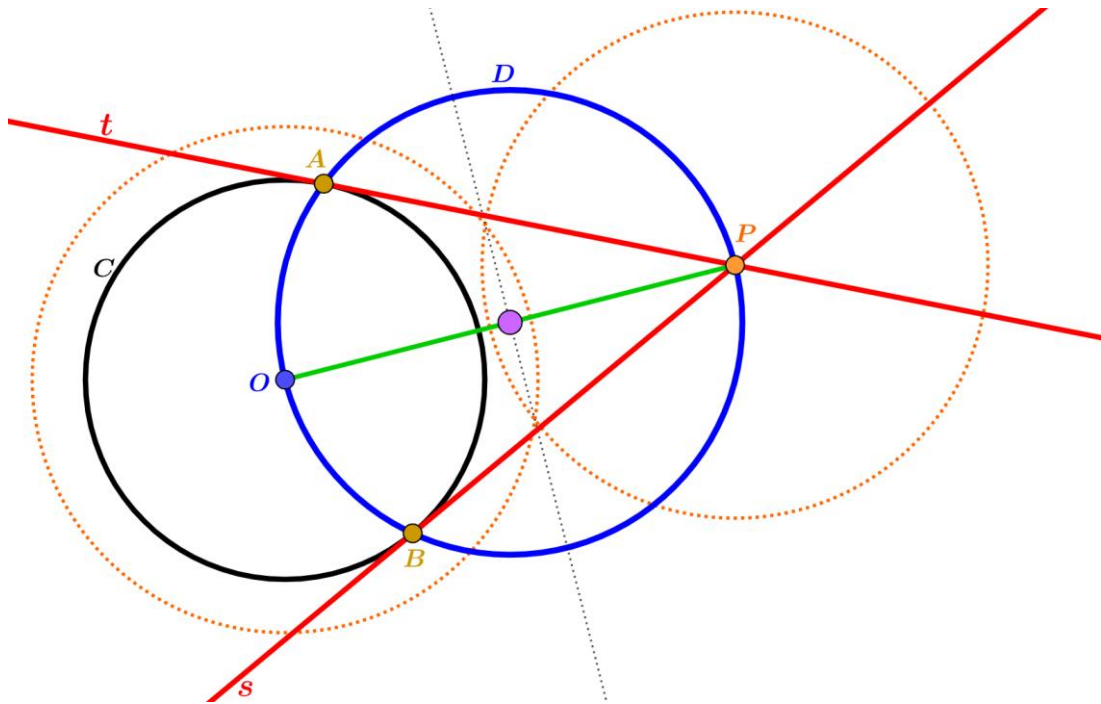


Figura 2: Construção da reta tangente passando por um ponto P externo à uma circunferência dada

Construções geométricas das tangentes comuns a duas circunferências

Na sequência descreveremos os passos das construções geométricas (construções com régua sem escala e compasso), juntamente com suas justificativas, das retas tangentes comuns à duas circunferências tangentes exteriormente e à duas circunferências exteriores, de raios distintos.

Construção B: Retas tangentes comuns a duas circunferências tangentes exteriormente de raios distintos

Considere duas circunferências tangentes exteriormente, C_1 e C_2 , de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 com $r_1 > r_2$, respectivamente.

- i) Trace a reta r que passa pelos centros O_1 e O_2 das circunferências.
- ii) Construa o ponto médio M do segmento de reta O_1O_2 .

- iii) Construa a circunferência auxiliar C_3 de centro O_1 e raio medindo $r_1 - r_2$
- iv) Construa uma outra circunferência C_4 de centro M e raio $\overline{MO_1}$.
- v) Sejam R e Q os pontos de intersecção entre as circunferências auxiliares C_3 e C_4 .
- vi) Trace as semirretas com origem em O_1 , $\overrightarrow{O_1R}$ e $\overrightarrow{O_1Q}$.
- vii) Denote por A e B os pontos de intersecção das semirretas traçadas no passo anterior com a circunferência C_1 . A e B são os pontos de tangência em C_1 .
- viii) Construa agora uma outra circunferência auxiliar C_5 de centro M e raio \overline{AM} .
- ix) Denote por C e D os pontos de intersecção entre as circunferências C_5 e C_2 de modo que C e A estejam do mesmo lado de r (e conseqüentemente B e D estão do outro lado de r). C e D são os pontos de tangência em C_2 .
- x) Trace as retas: s passando por A e C , t passando por B e D .
- xi) Trace a reta u perpendicular à r passando por P , ponto de tangência de C_1 e C_2 .

Afirmção: As retas s , t e u são as retas tangentes comuns as duas circunferências C_1 e C_2 .

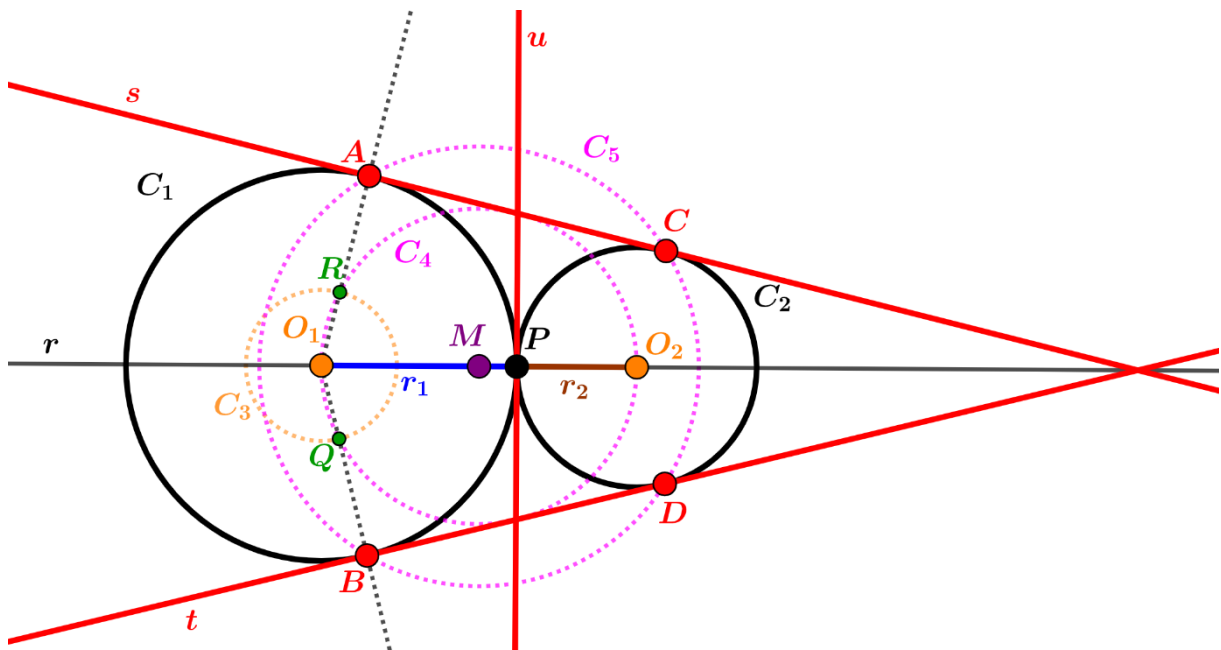


Figura 3: Construção das retas tangentes a duas circunferências tangentes exteriormente

Justificativa: Por construção a reta u satisfaz a condição de tangência no ponto P dada no Teorema 2 para ambas as circunferências C_1 e C_2 .

Também, por construção tem-se: $d(A, R) = d(C, O_2) = r_2^2$ e $m(\angle O_1RO_2) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle O_2RA) = 90^\circ$, pois $\angle O_2RO_1$ é ângulo inscrito na semicircunferência de centro M com diâmetro $\overline{O_1O_2}$ e O_1, R e A são colineares.

Além disso, da construção realizada segue que os triângulos ARM e CO_2M são congruentes pelo caso de congruência Lado-Lado-Lado. Também são congruentes os ângulos $\angle O_2RM$ e $\angle RO_2M$, pois o triângulo MRO_2 é isósceles de base $\overline{RO_2}$. E segue então que:

$$\begin{aligned} m(\angle CO_2R) &= m(\angle CO_2M) - m(\angle RO_2M) = m(\angle ARM) - m(\angle O_2RM) \\ &= m(\angle O_2RA) = 90^\circ \end{aligned}$$

Portanto, O_2RAC é retângulo e conseqüentemente s é reta tangente comum à C_1 e C_2 . A prova de que t é tangente comum à C_1 e C_2 é inteiramente análoga a realizada para a reta s .

Construção C: Retas tangente exteriores comuns a duas circunferências exteriores de raios distintos

Considere duas circunferências exteriores, C_1 e C_2 , de centros O_1 e O_2 e raios k_1 e k_2 com $k_1 > k_2$, respectivamente.

- i) Trace a reta r que passa por O_1 e O_2 .
- ii) Seja A um dos pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência C_1 e, B um dos pontos de intersecção entre r e a circunferência C_2 , de tal maneira que O_1, A, B e O_2 estejam alinhados nessa ordem, conforme Figura 4.
- iii) Construa uma circunferência C_3 de centro A e raio $d(O_2, B)$.
- iv) Seja G o ponto de intersecção entre a reta r e a circunferência C_3 de forma que G seja interno à C_1 .
- v) Construa uma circunferência C_4 de centro O_1 e raio $\overline{GO_1}$.
- vi) Trace as retas s e t tangentes à circunferência C_4 passando por O_2 , veja Construção A desse artigo.
- vii) Denote por M e N os pontos de intersecção entre s e t com a circunferência C_4 , respectivamente.
- viii) Trace as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$.
- ix) Sejam P e Q os pontos de intersecção entre as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$ com a circunferência C_1 , respectivamente.
- x) Trace a reta u passando por P de forma que u seja paralela à reta s .
- xi) Trace a reta v passando por Q de forma que v seja paralela à reta t .

Afirmação: u e v são as retas tangentes exteriores comuns a duas circunferências exteriores C_1 e C_2 .

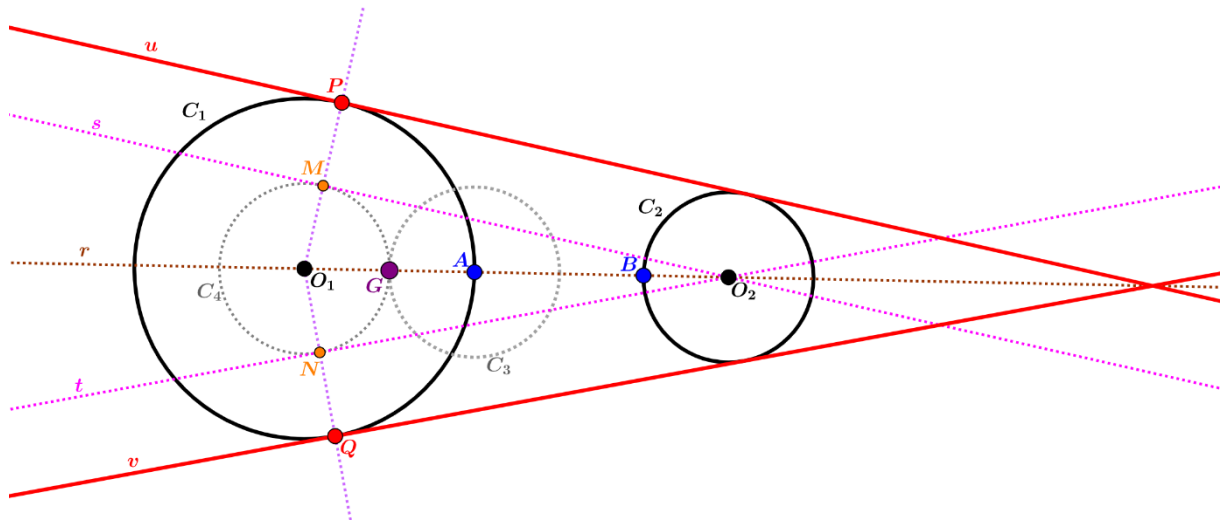


Figura 4: Construção das retas tangentes exteriores a duas circunferências exteriores

Justificativa: Por construção o comprimento do raio de C_4 é $d(O_1, G) = k_1 - k_2 \Rightarrow d(s, u) = d(P, M) = k_2$, visto que $P \in u$, $M \in s$ e \overline{PM} é perpendicular à ambas, u e s .

Seja R o pé da perpendicular a u que passa por O_2 . Temos $d(R, O_2) = d(s, u) = k_2 \Rightarrow R \in C_2 \cap u$.

Portanto u é a reta que passa por P e R e é perpendicular à $\overline{PO_1}$ e à $\overline{RO_2}$, logo é tangente comum à C_1 e C_2 . Analogamente prova-se que v é tangente comum à C_1 e C_2 .

Construção D: Retas tangentes interiores comuns a duas circunferências exteriores de raios distintos

Considere duas circunferências exteriores, C_1 e C_2 , de centros O_1 e O_2 e raios k_1 e k_2 com $k_1 > k_2$, respectivamente.

- i) Trace a reta r que passa por O_1 e O_2 .
- ii) Seja A um dos pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência C_1 e, B um dos pontos de intersecção entre r e a circunferência C_2 , de tal maneira que O_1, A, B e O_2 estejam alinhados nessa ordem, conforme Figura 5.
- iii) Construa uma circunferência C_3 de centro A e raio $d(O_2, B)$.
- iv) Seja G o ponto de intersecção entre a reta r e a circunferência C_3 de forma que G seja externo à C_1 .

- v) Construa uma circunferência C_4 de centro O_1 e raio $\overline{GO_1}$.
- vi) Trace as retas s e t tangentes à circunferência C_4 passando por O_2 , veja Construção A desse artigo.
- vii) Denote por M e N os pontos de intersecção entre s e t com a circunferência C_4 , respectivamente.
- viii) Trace as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$.
- ix) Sejam P e Q os pontos de intersecção entre as semirretas $\overrightarrow{O_1M}$ e $\overrightarrow{O_1N}$ com a circunferência C_1 , respectivamente.
- x) Trace a reta u passando por P de forma que u seja paralela à reta s .
- xi) Trace a reta v passando por Q de forma que v seja paralela à reta t .

Afirmção: u e v são as retas tangentes interiores comuns a duas circunferências exteriores C_1 e C_2 .

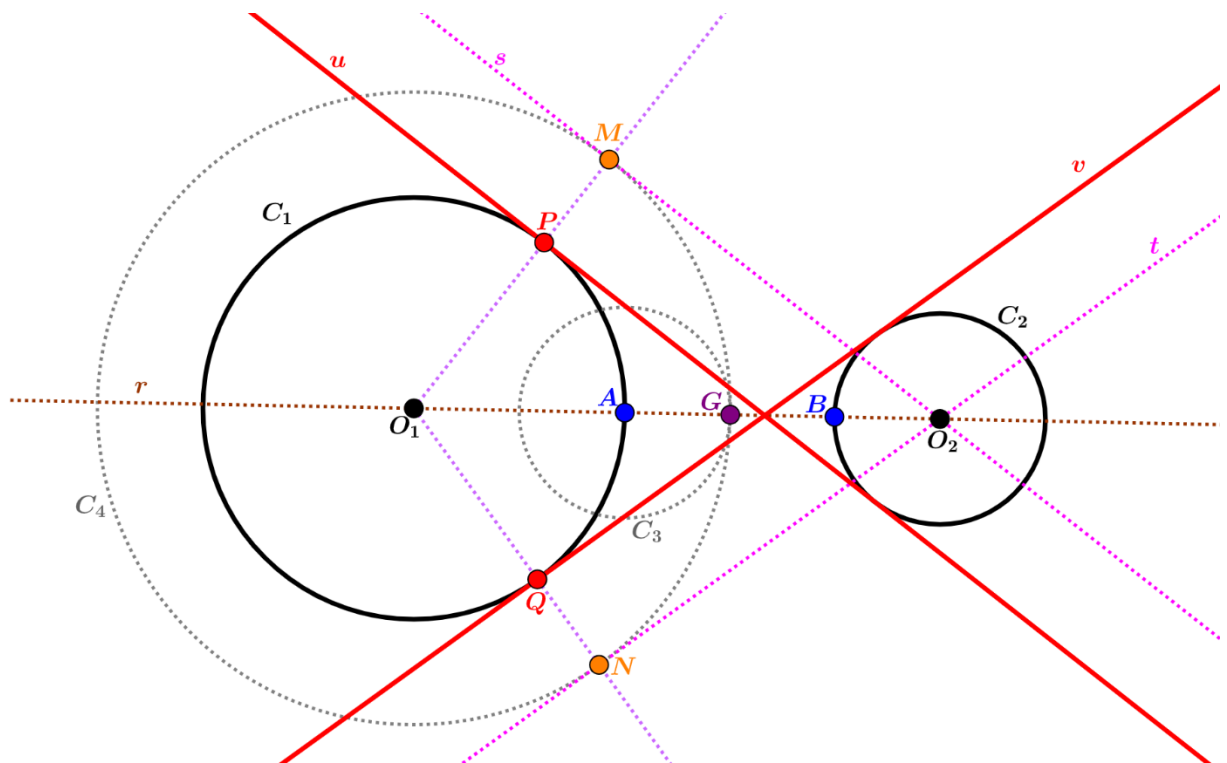


Figura 5: Construção das retas tangentes interiores a duas circunferências exteriores

Justificativa: Por construção o comprimento do raio de C_4 é $d(O_1, G) = k_1 + k_2 \Rightarrow d(s, u) = d(P, M) = k_2$, visto que $P \in u$, $M \in s$ e \overline{PM} é perpendicular à ambas, u e s .

Seja R o pé da perpendicular a u que passa por O_2 . Temos $d(R, O_2) = d(s, u) = k_2 \Rightarrow R \in C_2 \cap u$.

Portanto u é a reta que passa por P e R e é perpendicular à $\overline{PO_1}$ e à $\overline{RO_2}$, logo é tangente comum à C_1 e C_2 . Analogamente prova-se que v é tangente comum à C_1 e C_2 .

Conclusões

As resoluções de problemas de construções geométricas trazem um importante desenvolvimento do raciocínio lógico e, em geral, são utilizadas como ferramentas para completar e auxiliar o aprendizado da Geometria. Neste texto, as construções geométricas desenvolvidas contribuem para um melhor entendimento do conceito de reta tangente a uma ou duas circunferências. As justificativas dessas construções são exemplos de aplicações dos seguintes conteúdos de Geometria Euclidiana Plana: paralelismo e perpendicularismo de duas retas no plano, ponto médio de segmento, congruência de triângulos, ângulos inscritos em uma semicircunferência, caracterização de quadriláteros que são retângulos e distância entre retas paralelas. Espera-se que este material facilite o aprendizado desses conceitos, contribua para o desenvolvimento de habilidades de argumentação lógica e sirva como referência para os estudantes que pretendem aprofundar seus estudos em Geometria.

Referências

Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria* (Coleção PROFMAT). Sociedade Brasileira de Matemática.

Rezende, E. Q. F. & Queiroz, M. L. B. (2000). *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Editora da UNICAMP.

Costa, J. C. (2023). *A inversão geométrica* (Dissertação de Mestrado PROFMAT-UFU). Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.469>.