Construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes: uma proposta didática para o 8º ano

PROFMAT - UFRPE

Alex Victor Bispo

Dr. Marcelo Pedro dos Santos

Recife

2026

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Esta proposta didática é um produto educacional ligado a uma pesquisa de dissertação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) ministrado na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e que tem o objetivo de apresentar paradoxos matemáticos que possam ser utilizados como estratégia de ensino e popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF). No caso específico desta proposta, que é formada por seis atividades principais, são utilizadas a versão clássica do Paradoxo da Dicotomia, atribuído a Zenão de Eleia (490 a.C. – 430 a.C) como um problema motivador e uma versão para o movimento de rotação, além de outras quatro situações-problema, de modo que as três primeiras atividades tratam sobre ponto médio, mediatrizes e circuncentro e as três últimas, sobre bissetrizes e incentro. As habilidades trabalhadas nesta proposta são a EF08MA15 e EF08MA17, sendo, então, o público-alvo os estudantes do 8º ano do EFAF.

Este produto educacional foi elaborado pelo mestrando Alex Victor Bispo da Silva para obtenção do grau de Mestre do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat, da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e seu principal objetivo é apresentar aos docentes leitores uma proposta de utilização do Paradoxo da Dicotomia como problema motivador para o ensino da construção e investigação das mediatrizes e bissetrizes, além do desenvolvimento das habilidades argumentativas e do raciocínio hipotético-dedutivo dos discentes.

A obra é formada por uma avaliação diagnóstica sobre congruência de triângulos — alguns dos problemas dessa avaliação foram retirados ou adaptados de (Giovanni Júnior, 2022) — e seis atividades principais, sendo a versão clássica do Paradoxo da Dicotomia o problema motivador da Atividade I, iniciando o estudo da mediatriz, aplicando-a para localizar pontos médios. O Paradoxo da Dicotomia pode ser enunciado da seguinte forma.

Paradoxo da Dicotomia

Um corredor pretende percorrer certo trajeto finito em linha reta. Ora, antes que ele alcance o final desse trajeto, deve percorrer $1/2$ dele. Depois disso, ele deverá percorrer a metade do trecho restante, ou seja $1/4$ do trajeto total. Ainda, ele deverá percorrer a metade do quarto que falta, ou seja, $1/8$. Analogamente, ele percorrerá mais $1/16$, $1/32$, $1/64$ e assim *ad infinitum* do trajeto, de sorte que o corredor precisará percorrer infinitos trechos antes de chegar no fim do trajeto. Logo, é impossível que o corredor alcance o final do trajeto.

Continuando o estudo da mediatriz, na Atividade II ela é reconhecida como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos distintos dados. Já na Atividade III esse conhecimento é aplicado para resolver o problema motivador do "ponto médio" das três igrejas, começando, assim, o estudo do circuncentro de um triângulo.

Na Atividade IV, que inicia o estudo sobre as bissetrizes e suas aplicações, utiliza-se como problema motivador uma versão para o movimento de rotação do Paradoxo da Dicotomia, cujo enunciado segue abaixo.

Paradoxo da Dicotomia de Rotação

Uma bailarina pretende fazer um movimento de giro de uma volta completa em relação ao seu próprio eixo. Entretanto, para completar uma volta, antes ela terá que completar meia volta. Porém, antes disso, ela terá que completar um quarto de volta. Mas, ainda, antes disso, ela terá que completar um oitavo de volta. Ora, semelhantemente, ela precisará completar 16 avos de volta, 32 avos de volta, 64 avos de volta e assim por diante, de sorte que ela precisará completar infinitas frações de volta até, finalmente, completar o movimento. Portanto, é impossível que a bailarina realize o movimento de giro completo.

Por fim, a partir da Atividade V, reconhece-se a bissetriz de um ângulo como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos seus lados, afigurando-se como duas retas perpendiculares, e aplica-se, na Atividade VI, esse conhecimento para localizar o centro de um chafariz inscrito numa praça com formato triangular, ou seja, localizar o incentro dessa praça.

1

INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

No texto de apresentação da área de Matemática do Ensino Fundamental, a BNCC diz que, sobretudo ao final dessa etapa, pode-se estimular “a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas a partir de outras” (BRASIL, 2018). Como o professor notará, na maior parte das atividades motivadoras e dos exercícios de fixação, espera-se que os alunos percebam algumas propriedades das mediatrizes e bissetrizes a partir, no início, dos seus conhecimentos prévios sobre, principalmente, congruência de triângulos e das construções geométricas realizadas e, progressivamente, das outras propriedades já percebidas e demonstradas por eles próprios nas primeiras aulas desta proposta didática.

Assim, vale chamar a atenção do docente leitor novamente para o objetivo principal desta proposta, que não se restringe ao mero ensino dos conteúdos de construção e investigação das mediatrizes e bissetrizes, mas também busca o desenvolvimento das competências e habilidades de argumentar e raciocinar matematicamente dos discentes, sendo isto parte da definição do letramento matemático, que favorece “o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2018). Em outras palavras, o objetivo não é a transmissão de conteúdos matemáticos, mas a construção destes pelos alunos por meio da abordagem própria da Matemática, que é a demonstração matemática, esta, por sua vez, valendo-se da heurística das construções por régua e compasso. Portanto, as atividades propostas, nos primeiros itens, conduzem os alunos a conjecturar possíveis propriedades dos conceitos estudados e, depois, pedem que demonstrem matematicamente essas conjecturas.

2

A PROPOSTA DIDÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

CONTEÚDOS ABORDADOS

- Ponto médio e construção de mediatriz
- Mediatriz como um lugar geométrico
- Circuncentro
- Construção de bissetrizes interna e externa
- Bissetriz como um lugar geométrico.
- Incentro

TEMA

Construção de mediatrizes e bissetrizes e aplicações.

JUSTIFICATIVA

A construção é, segundo a BNCC, uma das principais ideias matemáticas fundamentais associadas à Geometria. Ela desenvolve o pensamento geométrico dos estudantes, pois permite que eles compreendam e explorem propriedades relacionadas à simetria, à congruência e aos lugares geométricos. A prática com régua e compasso, além de fortalecer a habilidade motora e o raciocínio espacial, contribui para a valorização da Matemática como ciência que nasce de problemas práticos e se organiza de forma lógica e rigorosa. Além disso, o ensino da construção de mediatrizes e bissetrizes e suas propriedades é uma oportunidade para que os alunos apliquem os seus conhecimentos sobre congruência de triângulos, inclusive para realizarem demonstrações simples, contribuindo para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo, como também preconiza a BNCC.

Nesta sequência didática, à luz das metodologias de Resolução de Problemas e História da Matemática, utiliza-se o Paradoxo da Dicotomia como problema motivador a fim de tornar as aulas mais interessantes e contextualizadas. Por causa de suas características contraintuitiva, desafiante, criativa e ousada, paradoxos têm o potencial em despertar a curiosidade do aluno e, assim, o seu interesse em compreender melhor os conceitos apresentados. Esse interesse é fundamental para que haja a efetiva aprendizagem dos conteúdos, entendendo-se que o aluno só aprende se tiver interesse em aprender.

COMPETÊNCIAS

- **Competência geral 2**: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- **Competência específica 1**: Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- **Competência específica 2**: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- **Competência específica 3**: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- **Competência específica 6**: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- **Competência específica 8**: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletiva-

mente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

HABILIDADES DA BNCC

- **(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
- **(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

- Construir mediatrizes e bissetrizes, reconhecendo as suas propriedades, e aplicá-las na resolução de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conhecer o Paradoxo da Dicotomia, reconhecendo o seu contexto histórico e filosófico, inclusive compreendendo os seus argumentos e falácias e classificando-o como um paradoxo do tipo falsídico.
- Autoestimar-se quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimento de forma colaborativa.
- Perseverar na busca de soluções para problemas e também de um melhor entendimento de conceitos e procedimentos.
- Defender o seu ponto de vista por meio de argumentos e conceitos de forma clara, fundamentada, lógica, empática e respeitosa.
- Reconhecer que há problemas impossíveis fisicamente, mas possíveis matematicamente.
- Demonstrar, com o rigor matemático, propriedades geométricas.
- Aplicar os casos de congruência de triângulos para resolver problemas e compreender as propriedades de mediatrizes e bissetrizes.
- Dividir um segmento pela metade utilizando somente régua não graduada e compasso.

- Construir a mediatriz de um segmento utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Reconhecer a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados.
- Reconhecer que as mediatrizes dos lados de um triângulo intersectam-se no seu circuncentro.
- Dividir um ângulo pela metade utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Reconhecer e demonstrar geometricamente que a bissetriz de um ângulo não nulo e menor que 360° como a mediatriz de qualquer segmento cujos extremos são os pontos de interseção de um arco centrado no vértice do ângulo.
- Reconhecer a bissetriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados de um ângulo.
- Reconhecer que as bissetrizes internas de um triângulo intersectam-se no seu incentro.
- Construir as bissetrizes internas e externas de um ângulo utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Medir ângulos com um transferidor.

PÚBLICO-ALVO

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

PERFIL DAS TURMAS

Turma com 30 a 40 alunos. Como pré-requisito, a turma já deverá ter estudado sobre os casos de congruência de triângulos, inclusive ter realizado construções de triângulos congruentes com régua e compasso.

RECURSOS

Régua, compasso, transferidor, quadro branco, marcadores e apagador de quadro branco

AVALIAÇÃO

A avaliação ocorrerá de forma contínua, participativa e cumulativa, avaliando-se diagnosticamente os conhecimentos prévios dos alunos sobre os casos de congruência de triângulos e as suas habilidades para construir triângulos congruentes e formativamente a construção dos conhecimentos e o desenvolvimento das habilidades e atitudes seguintes:

- a compreensão dos paradoxos;
- a compreensão dos conceitos e propriedades apresentados;
- a capacidade argumentativa;
- a colaboração e participação nas discussões em grupo e no debate com toda a turma, fazendo isso de maneira respeitosa
- a aplicação, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e as propriedades aprendidas das mediatrizes e bissetrizes, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral para resolver os problemas propostos;
- a realização das construções geométricas necessárias e as suas aplicações para investigar as propriedades das mediatrizes e bissetrizes e resolver os problemas propostos;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução das atividades motivadoras e dos exercícios de fixação.

Ainda, para a avaliação somativa, poderá ser utilizado os exercícios de fixação propostos ou outros instrumentos avaliativos a critério do professor.

3

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

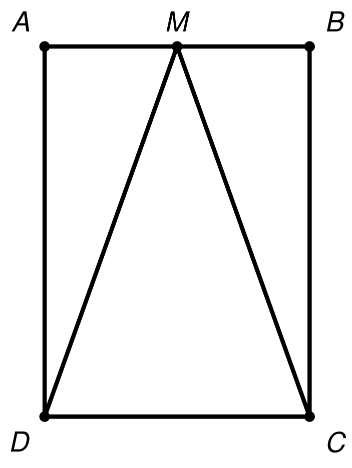
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

1. Desenhe em seu caderno um segmento horizontal *AB* qualquer.

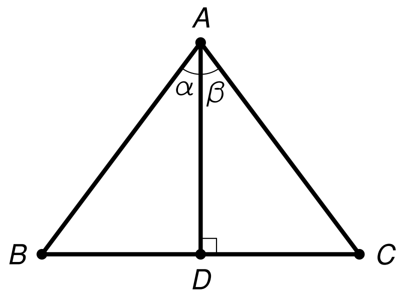
   (a) Construa um triângulo isósceles qualquer cuja base é o segmento *AB*.

   (b) É possível construir um triângulo congruente e distinto ao do item (a) com base também em *AB*? Se sim, construa-o.

2. A figura mostra um retângulo, no qual *M* é o ponto médio do lado *AB*. Prove que o triângulo *DMC* é isósceles.



3. No triângulo *ABC*, $\overline{BD} = \overline{CD}$.



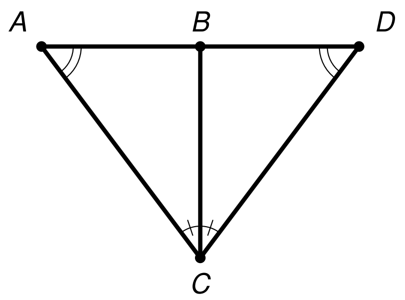
Nessas condições, mostre que

(a) $\overline{AB} = \overline{AC}$

(b) $\alpha = \beta$

(c) $\widehat{B} = \widehat{C}$

4. Os triângulos ABC e DBC da figura apresentam os ângulos congruentes assinalados com marcas iguais.



Nessas condições, mostre que os triângulos ABC e DBC são congruentes. Justifique por escrito cada etapa da resolução.

4

ATIVIDADE I – DICOTOMIA DO CAMINHO

- **Conteúdo abordado:** ponto médio e construção mediatriz.
- **Quantidade de aula/tempo:** 4 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Considere a ilustração da Figura 4.1 de um caminho em linha reta a ser percorrido por um corredor.

(a) Apenas com o auxílio de um compasso e uma régua, porém não fazendo nenhum tipo de medição com ela, divida esse caminho em duas partes iguais localizando o seu ponto médio.

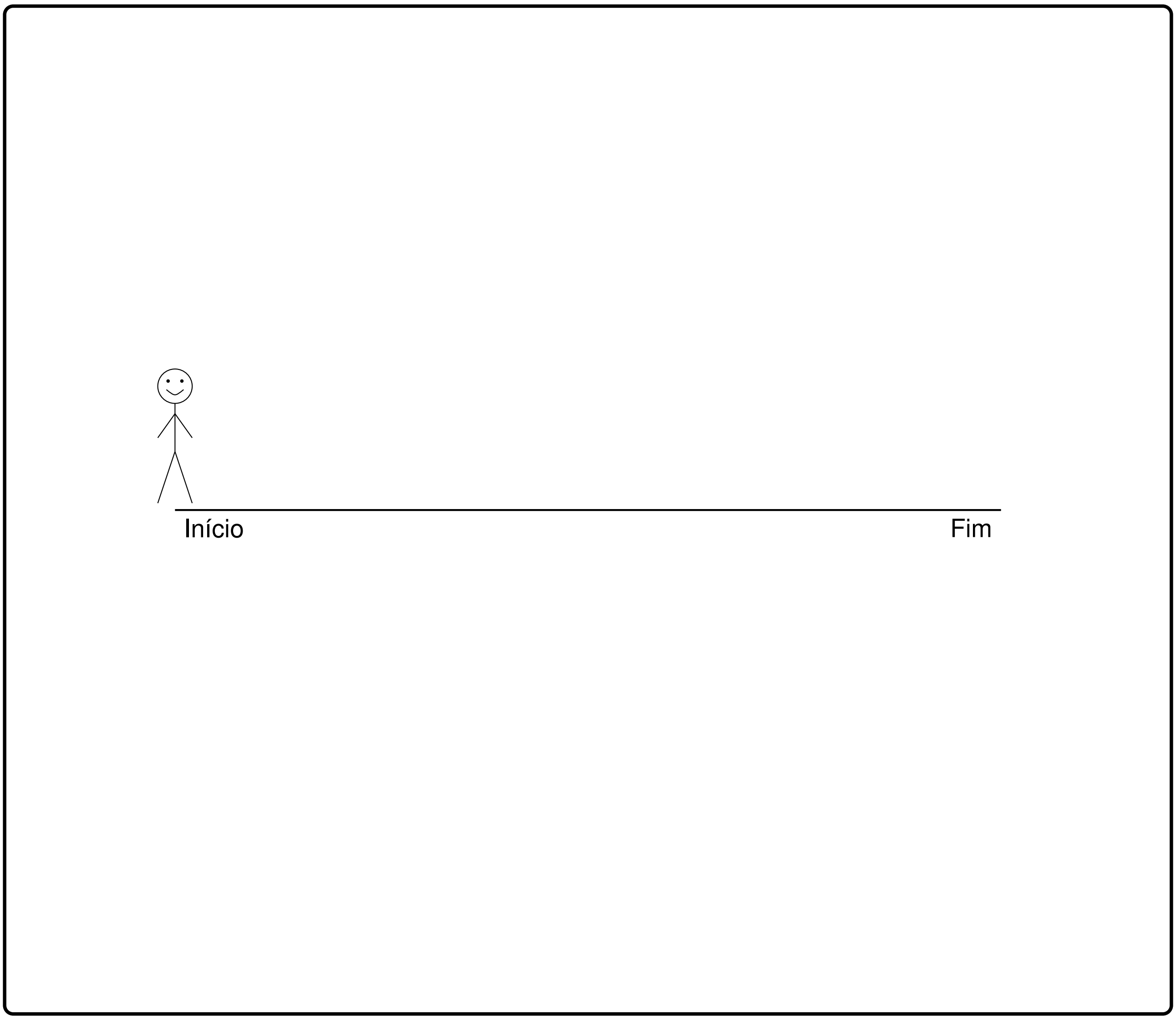
(b) Na mesma ilustração, divida a segunda metade do caminho na metade.

(c) Divida o último segmento resultante do item anterior também na metade. Realize esse mesmo processo mais cinco vezes.

(d) O que você percebe sobre o comportamento dos sucessivos pontos médios localizados?

(e) Converse com um colega e discutam se seria possível fazer mais cinquenta divisões similares às dos itens anteriores.

Figura 4.1: Dicotomia do caminho



Fonte: o autor

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Neste momento, as ferramentas de desenho necessárias são somente a régua e o compasso, e deve o professor ressaltar aos alunos para não medirem os segmentos com a régua. O professor pode organizar os alunos em duplas ou trios para resolver a atividade, embora, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a habilidade EF08MA15, entregará uma ficha da atividade para todos e pedirá que cada um resolva e faça as construções geométricas em sua própria ficha.

Aqui o professor será apenas um mediador, agindo apenas quando necessário para orientar os alunos sobre o uso correto das ferramentas de desenho, tirar dúvidas, levar os alunos a lembrar dos casos de congruência de triângulos e a pensar em como poderiam aplicá-los para a resolução da atividade.

APRESENTAÇÃO DO PARADOXO E DISCUSSÃO

Este momento será iniciado com a apresentação do Paradoxo da Dicotomia, usando a terminologia de pontos médios, contextualizando histórico e filosoficamente tanto o paradoxo como o seu criador. Aqui, dever-se-á perguntar aos alunos sobre o que eles entendem por paradoxo e explicar o significado de dicotomia. Ainda, incitar-se-á a turma à discussão e à análise dos argumentos e da conclusão absurda, questionando os alunos sobre a divisibilidade do espaço e tempo — se é infinita ou finita, se tem comprimento mínimo ou não —, sobre a soma dos infinitos deslocamentos ou dos infinitos intervalos de tempo para concluir cada trecho — se seria infinita ou finita, e o porquê — e sobre a possibilidade de realizar infinitas tarefas em um intervalo de tempo finito. Continuando a discussão, o professor pedirá para que cada dupla ou trio compartilhe com toda a turma as suas respostas aos itens (d) e (e), justificando-as.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Depois da discussão, o professor mostrará para e com toda a turma — seguindo o mesmo espírito dialogal e colaborativo — como dividir um segmento apenas com régua e compasso, explicando que a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos arcos de mesmo raio e centrados, cada um, numa das extremidades do segmento divide-o na metade e é perpendicular a ele, demonstrando isso de forma matematicamente rigorosa e por meio dos casos de congruência de triângulos, e denotando-a por mediatriz.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

1. Trace segmentos com as seguintes medidas e divida-os em partes como indicado em cada item.

    (a) 8 cm e em 4 partes.

    (b) 10 cm e em 8 partes.

    (c) 12 cm e em 16 partes.

2. É possível, com o auxílio apenas de mediatrizes, dividir um segmento em seis partes congruentes? Justifique.

3. Considerando o Paradoxo da Dicotomia, trace um segmento de 12 cm em cada item abaixo representando o trajeto a ser percorrido e localize nele o ponto até onde o corredor chegou sabendo que ele percorreu

    (a) $3/4$ do caminho.

(b) $^3/_8$ do caminho.

(c) $^5/_8$ do caminho.

(d) $^7/_{16}$ do caminho.

(e) $^{11}/_{16}$ do caminho.

(f) $^9/_{32}$ do caminho.

(g) $^{21}/_{48}$ do caminho.

(h) $^{125}/_{400}$ do caminho.

4. Certo corredor já completou $^3/_7$ de um caminho que ele quer percorrer. É possível representar isso num segmento apenas com o auxílio de mediatrizes? Justifique.

5. As obras de Zenão se perderam com o tempo e não chegaram a esta era, de sorte que o que se sabe dele são citações, em maior parte indiretas, de outros filósofos e comentadores, como Platão, Aristóteles, Proclo e Simplício. Segundo Proclo, Zenão enunciou pelo menos quarenta paradoxos em seus livros, porém somente alguns poucos deles sobreviveram e são conhecidos hoje pela humanidade. Pesquise outros paradoxos de Zenão e analise-os respondendo as seguintes perguntas.

   (a) Eles são todos falsídicos?

   (b) Quais são os argumentos e, se houver, as falácias por trás deles?

   (c) O que Zenão queria provar ao enunciar cada um deles?

   (d) Você consegue ver semelhanças desses paradoxos com o Paradoxo da Dicotomia? Se sim, quais?

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a compreensão do paradoxo, inclusive seus argumentos, falácias e classificação, por meio da colaboração e participação na discussão e na análise coletiva;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese, fazendo isso de maneira ética, respeitando o direito de fala e de opinião dos colegas;

- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral, para a localização do ponto médio de um segmento e para a construção e compreensão das propriedades da mediatriz;

- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e

- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação, além da realização da pesquisa solicitada.

5

ATIVIDADE II – RODOVIAS QUE SE CRUZAM

- **Conteúdo abordado**: mediatriz como um lugar geométrico.
- **Quantidade de aulas/tempo**: 3 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Paulo está dirigindo por uma extensa avenida que corta, na metade e perpendicularmente, uma estrada que conecta os municípios de Ararinha e Boitatá. Ambas as rodovias seguem em linha reta, não possuindo nenhum tipo de curva.

(a) Prove que a distância de Paulo a Ararinha é igual à distância dele a Boitatá. Despreze a largura da avenida.

(b) Prove que qualquer pessoa que esteja equidistante a ambas as cidades está na avenida (ou no seu prolongamento).

(c) Existe uma outra estrada perpendicular a avenida. Desprezando as larguras de cada rodovia, é possível que esta estrada cruze com a estrada de Ararinha e Boitatá? Justifique a sua resposta.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Espera-se aqui que os alunos logo reconheçam que a avenida é a mediatriz da estrada e utilizem esse conhecimento, junto com a aplicação da congruência de triângulos, para resolver os itens (a) e (b) da atividade.

Para o item (c), os alunos precisarão reconhecer que duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta são paralelas, aplicando o conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é sempre $180°$.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o docente resolve coletivamente a atividade, formalizando o conceito de mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades do segmento, explicando que isso prova que a mediatriz de um segmento sempre é a mesma independentemente do comprimento do raio dos arcos necessários para construí-la.

GENERALIZAÇÃO

No item (c), o docente generaliza o problema a demonstrar que se duas retas distintas são perpendiculares a uma mesma reta, então elas são paralelas. Ele pode fazer isso por meio do *reductio ad absurdum*, supondo que as duas retas não são paralelas, ou seja, supondo que elas se cruzam, e aplicando o fato de que a soma interna dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a $180°$.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

1. Sejam r uma reta e P um ponto no plano. Construa uma reta perpendicular a r e que passe por P considerando que

    (a) $p \in r$

    (b) $p \notin r$

2. Considerando o exercício anterior, prove que só existe uma reta perpendicular.

    Dica: em ambos os casos, suponha que existam duas e considere os ângulos formados por elas.

3. Sejam r uma reta e P ponto fora de r. Construa, com régua e compasso, a reta paralela a r e que passa pelo ponto P.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese;

- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e soma dos ângulos internos de um triângulo, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral, para resolver a atividade e os exercícios, além de compreender as propriedades da mediatriz;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

6

ATIVIDADE III – “PONTO MÉDIO” DAS TRÊS IGREJAS

- **Conteúdo abordado**: circuncentro.
- **Quantidade de aulas/tempo**: 2 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

A Igreja Presbiteriana do Brasil é uma federação de Igrejas locais organizadas em concílios que guardam gradação entre si. Um desses concílios é o Presbitério que exerce jurisdição sobre Igrejas locais de uma certa região. Na cidade do Recife, as Igrejas Presbiterianas de Areias, Barro e Caçote pertencem a um mesmo presbitério e pretendem fazer um trabalho social que atenda aos três bairros. Juntas decidiram começar esse trabalho num ponto que esteja igualmente distante de cada uma das sedes.

(a) Localize no mapa acima o ponto em que as igrejas devem começar o trabalho.

(b) Existe algum outro ponto em que elas poderiam começar o trabalho? Justifique.

(c) Explique porque não seria possível localizar um ponto equidistante das três igrejas caso elas fossem colineares. Existe algum outro caso em que também seria impossível localizar tal ponto?

Figura 6.1: Mapa das três igrejas no Google Maps

Fonte: Google Maps, 2025

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

O objetivo dessa atividade é que os alunos consigam interpretar esse problema real para um problema geométrico, tomando cada Igreja local como um ponto no plano e localizar o ponto que esteja equidistante aos outros três.

Caso os alunos não entendam isso de forma independente, pode o professor guiá-los a essa descoberta e questioná-los sobre como eles poderiam aplicar os conceitos geométricos estudados na aula anterior para encontrar esse ponto.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o professor demonstra com os alunos que as mediatrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectam num mesmo ponto.

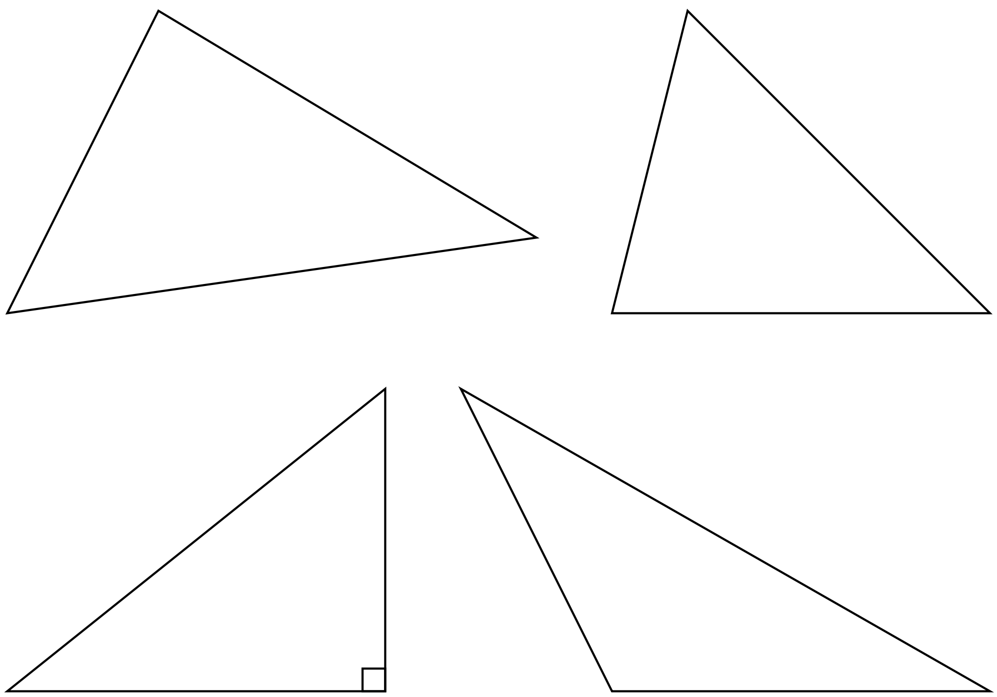
GENERALIZAÇÃO

Depois de resolver a atividade com a turma, o professor observará que o ponto encontrado é o centro da circunferência que passa pelas três igrejas, generalizando isso para quaisquer três pontos no plano. Explicará também que essa circunferência **circunscreve** o triângulo definido pelos três pontos — isto é, passa pelos seus três vértices e a sua região delimitada contém o triângulo — e, sendo assim, o seu centro é chamado de **circuncentro**. Ou seja, as mediatrizes de um triângulo intersectam-se todas no circuncentro desse triângulo.

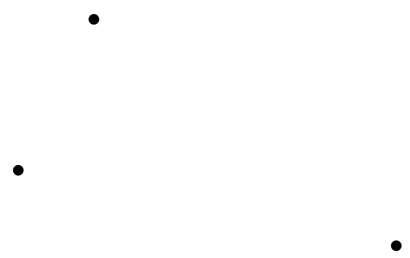
MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Construa, com régua e compasso, os seguintes lugares geométricos.

(a) As mediatrizes dos lados dos triângulos abaixo.

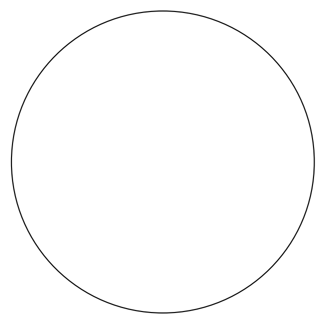


(b) A circunferência que passa pelos três pontos abaixo.



(c) A circunferência que passa pelos dois pontos abaixo e cujo centro está na reta r.

(d) O centro da circunferência abaixo.



PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, o conceito de mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos dados para resolver problemas;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

7

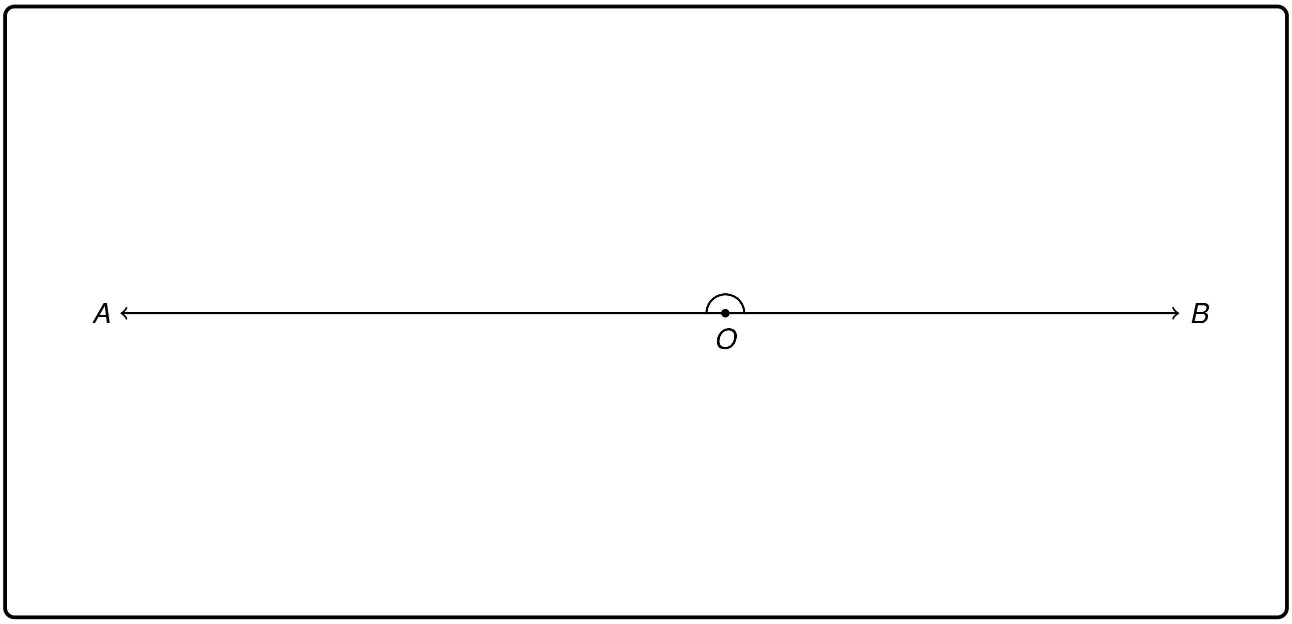
ATIVIDADE IV – DICOTOMIA DO ÂNGULO

- **Conteúdo abordado**: construção de bissetrizes interna e externa.
- **Quantidade de aulas/tempo**: 3 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Considere o ângulo raso abaixo com vértice em O. Com o auxílio apenas de régua e compasso, faça e responda o que se pede abaixo. Utilize o transferidor apenas para verificar se a sua construção está correta.

Figura 7.1: Dicotomia do ângulo



Fonte: o autor

(a) Divida o ângulo $\widehat{AOB}$ na metade traçando uma semirreta com origem em O.

(b) Analogamente ao item anterior, divida um dos ângulos resultantes do item anterior na metade.

(c) Divida na metade o ângulo resultante do item anterior no qual um dos lados é a semirreta $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OB}$ e repita esse processo sucessivo de dicotomias mais duas vezes.

(d) Note que cada vez mais a medida dos ângulos resultantes diminui. Em algum momento, depois de um número extremamente grande de dicotomias sucessivas, é possível que a medida dos ângulos resultantes seja igual a $0°$? Justifique.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Neste momento, as ferramentas de desenho necessárias são a régua, o compasso e o transferidor, sendo este apenas utilizado para verificação das construções, devendo o professor ressaltar aos alunos para não medirem os segmentos com a régua. O professor pode organizar os alunos em duplas ou trios para resolver a atividade, embora, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a habilidade EF08MA15, entregará uma ficha da atividade para todos e pedirá que cada um resolva e faça as construções geométricas em sua própria ficha.
Aqui o professor será apenas um mediador, agindo apenas quando necessário para orientar os alunos sobre o uso correto das ferramentas de desenho, tirar dúvidas, levar os alunos a lembrar dos casos de congruência de triângulos e a pensar em como poderiam aplicá-los para a resolução da atividade.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO (PARTE 1)

Neste momento, o professor explicará que a semirreta ou a reta que divide um ângulo na metade é chamada de **bissetriz interna** — ou apenas de bissetriz — desse ângulo.
A partir da aplicação dos casos de congruência de triângulo, mostrará, junto com a turma e por meio do rigor matemático, que a bissetriz de um ângulo não nulo e menor que uma volta completa é a mediatriz dos segmentos cujos extremos equidistam do vértice desse ângulo.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS (PARTE 1)

1. Trace as bissetrizes internas dos seguintes ângulos.

    (a) $60°$

    (b) $30°$

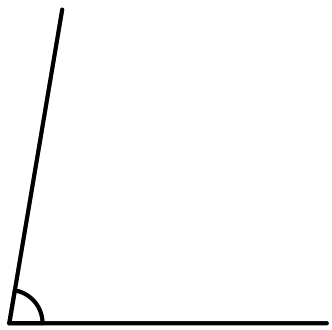
    (c) $100°$

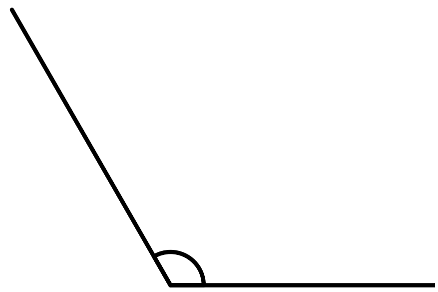
(d) $120°$

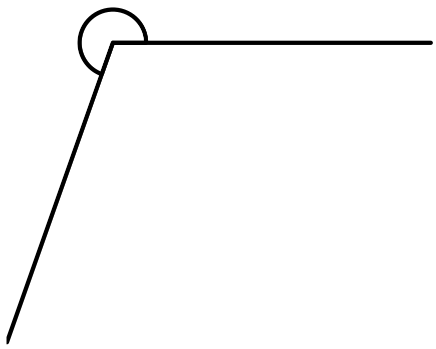
(e) $270°$

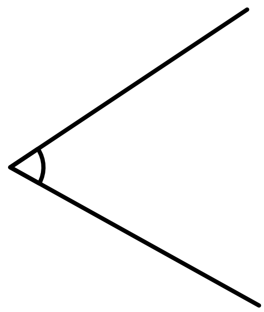
(f) $320°$

2. Divida os seguintes ângulos em quatro partes.









EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO (PARTE 2)

Aqui o professor dá uma breve pausa na exercitação para apresentar a bissetriz externa de um ângulo menor que $180°$ como a bissetriz interna do ângulo externo a esse ângulo. Logo, a bissetriz externa de um ângulo divide o seu ângulo externo na metade.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS (PARTE 2)

1. Trace a bissetriz externa de cada um dos seguintes ângulos abaixo e depois verifique com um transferidor se você as traçou corretamente

(a) $30°$

(b) 45°

(c) 60°

(d) 90°

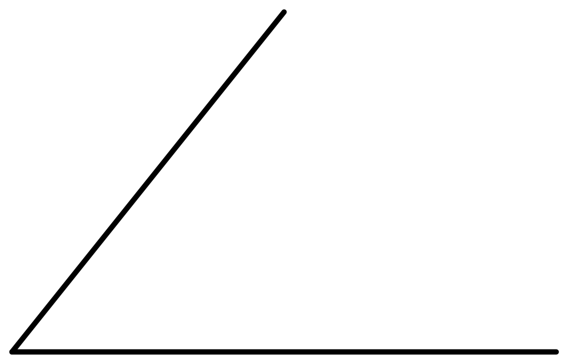
(e) 100°

(f) 120°

(g) 135°

(h) 150°

2. Considere o ângulo abaixo.



   (a) Trace as duas bissetrizes, a interna e a externa, desse ângulo.

   (b) Qual é a medida do ângulo entre as duas bissetrizes? Verifique a sua resposta medindo o ângulo com um transferidor.

   (c) Converse com um colega e descubram se a medida do ângulo entre as bissetrizes internas e externas é sempre a mesma independentemente da medida desse ângulo. Justifiquem as suas respostas com argumentos geométricos gerais.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a compreensão do paradoxo por meio da colaboração e participação na discussão e na análise coletiva;

- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese, fazendo isso de maneira ética, respeitando o direito de fala e de opinião dos colegas;

- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e o conceito de mediatrizes para dividir um ângulo pela metade e para a construção e compreensão das propriedades das bissetrizes interna e externa de um ângulo;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

8

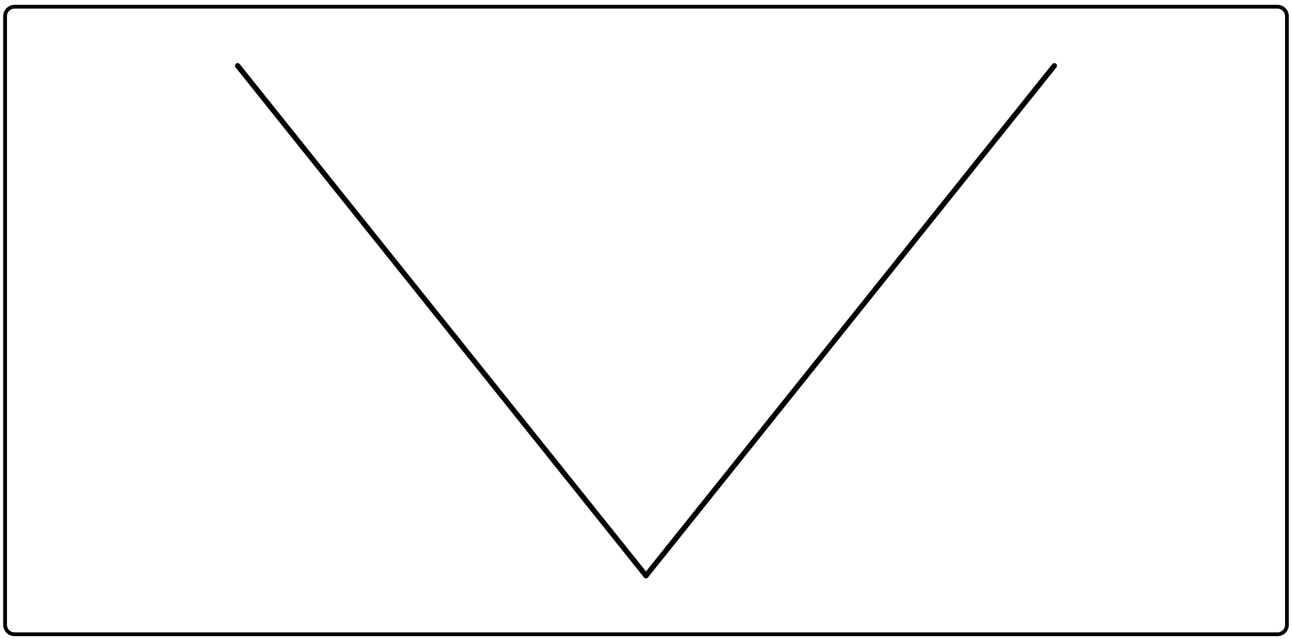
ATIVIDADE V – VENDEDORES DE SORVETE

- **Conteúdo abordado**: bissetriz como um lugar geométrico.
- **Quantidade de aulas/tempo**: 1 aula de 50 minutos.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Numa praia peninsular triangular, as pessoas costumam ficar sentadas em tendas fixas distribuídas por toda a praia enquanto os vendedores vão oferecendo os seus produtos de tenda em tenda. André e Bruno são vendedores ambulantes de sorvete nessa praia e sempre entram em conflito por causa da disputa pela clientela. Um dia, para acabar com os conflitos, decidiram dividir a península em dois territórios e cada um teria a exclusividade de venda sobre um dos territórios. Eles dividiram assim: a tenda que estivesse mais próxima da margem leste seria atendida por André e as tendas mais próximas da margem oeste, por Bruno. Para que eles pudessem identificar com facilidade se certa tenda estava dentro de seu território ou não e para que nenhum cliente ficasse exatamente a mesma distância de ambas as margens, eles decidiram também marcar na areia para delimitar os territórios. Qual é o lugar geométrico que faz essa delimitação? Justifique geometricamente a sua resposta.

Figura 8.1: Praia com formato acutangular



Fonte: o autor

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Tendo em vista que nas aulas anteriores já foi-se investigado o conceito de mediatriz como lugar geométrico, espera-se que os alunos consigam resolver esta atividade de maneira análoga.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o docente resolve coletivamente a atividade, demonstrando que, se um ponto interno de um ângulo está na bissetriz interna desse ângulo, então ele equidista dos lados deste, explicando que isso prova que a bissetriz interna de um ângulo é única independentemente do comprimento do raio dos arcos necessários para construí-la.

GENERALIZAÇÃO

O professor apresenta uma definição mais ampla de bissetriz, a de lugar geométrico de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo, considerando aqui, também, o prolongamento desses lados. Assim, a bissetriz de um ângulo qualquer, não somente de um ângulo convexo, são duas retas perpendiculares, sendo que uma delas divide o ângulo na metade.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade argumentativa e de aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e os conceitos já aprendidos sobre bissetrizes para resolver o problema motivador; e
- a utilização adequada das ferramentas de desenho.

9

ATIVIDADE VI – CONSTRUINDO UM CHAFARIZ

- **Conteúdo abordado**: incentro.
- **Quantidade de aulas/tempo**: 2 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Quer-se construir um novo chafariz circular na Praça Parque Amorim, no bairro da Boa Vista, Recife. O atual chafariz está localizado dentro da área de um gramado com formato triangular e pretende-se construir um novo de modo que ele toque os três lados do gramado em um único ponto cada um. Para isso, os responsáveis pela obra decidiram encontrar primeiro o centro do chafariz para, a partir dele, demarcar os seus limites para a sua construção.

(a) Mostre que o centro do chafariz, se realmente existir, dista igualmente dos três lados do gramado.

(b) Construa o chafariz, utilizando apenas régua e compasso.

(c) Mostre que sempre é possível encontrar o centro do chafariz independentemente do formato do gramado triangular e, ainda, que ele é único, explicando como encontrá-lo somente com régua e compasso.

Figura 9.1: Mapa da Praça Parque Amorim

Fonte: Google Maps, 2025

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

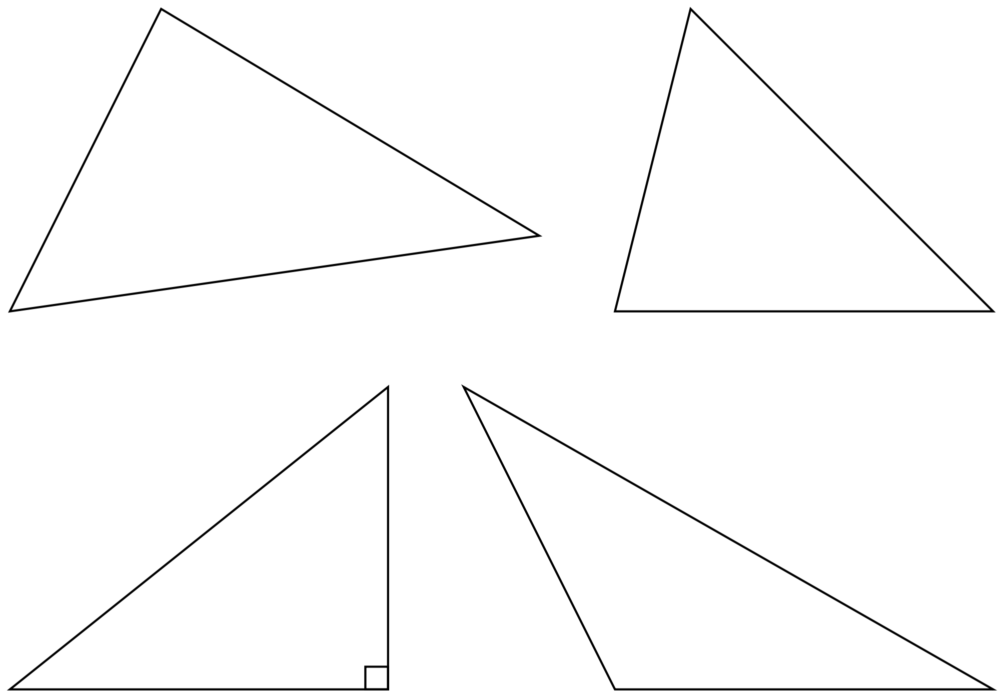
Espera-se que os alunos sigam de maneira análoga ao que foi feito na Atividade 3 para aplicar as bissetrizes para localizar o centro do chafariz.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o professor demonstra com os alunos que as bissetrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectam num mesmo ponto, chamado de incentro, e mostra como construir a circunferência inscrita no triângulo.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Construa, com régua e compasso a circunferência inscrita em cada um dos triângulos abaixo.



PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade argumentativa e de aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e os conceitos já aprendidos sobre bissetrizes resolver o problema motivador e os exercícios de fixação;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico.

Referências Bibliográficas

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2018. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/⟩. Acesso em 5 de dez. de 2025.

Giovanni Júnior, J. R. *A conquista matemática: 8º ano, Ensino Fundamental – Anos Finais*. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2022.