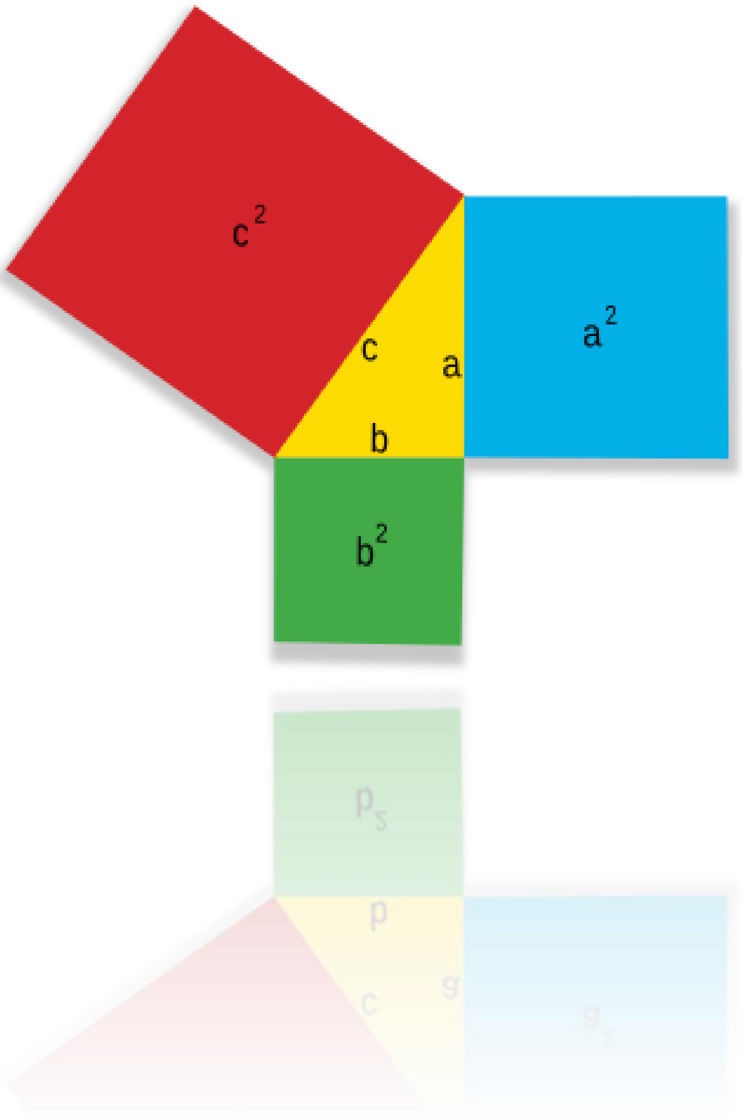
LUCIAN AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

PEDRO FRANCO DE SÁ

O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA ATIVIDADES EXPERIMENTAIS



BELÉM-PA
2026

Lucian Augusto Oliveira da Silva
Pedro Franco de Sá

O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Produto Educacional apresentado como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

ISBN: 978-65-02-08194-5

BELÉM-PA
2026

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

S586e Silva, Lucian Augusto Oliveira da
O Ensino do Teorema de Pitágoras via Atividades Experimentais / Lucian Augusto Oliveira da Silva, Pedro Franco de Sá. — Belém, 2026.
99 f. : il. color.

ISBN: 978-65-02-08194-5
Produto educacional vinculado à dissertação "Um diagnóstico do ensino do teorema de pitágoras: a perspectiva dos professores paraenses" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGEM) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Belém, 2026.

1. Ensino de Matemática. 2. Ensino Fundamental. 3. Teorema de Pitágoras. 4. Diagnóstico do Ensino. I. Sá, Pedro Franco de . II. Título

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB-2/1345

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA ATIVIDADES EXPERIMENTAIS".**

Mestrando: **LUCIAN AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA**

Data da avaliação**: 15/04/2026**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio

(x) Professores do Ensino Fundamental (x) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

( ) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software (x) Livro digital

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ____

( ) Não (x) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(x) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

( ) Sim, onde: ____

( ) Não, justifique: ____

(x) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(x) Sim, onde: ensino profissional e ambientes interdisciplinares formais e informais

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

( ) Sim, onde: ____

( ) Não, justifique: ____

(x) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(x) Não se aplica

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

(x) Alunos do Ensino Fundamental

(x) Alunos do Ensino Médio

(x) Professores do Ensino Fundamental

(x) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ______________________________

( ) outros membros da comunidade, tais como ____________________________________

O produto educacional foi considerado:

(x) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Documento assinado digitalmente
gov.br PEDRO FRANCO DE SA
Data: 27/04/2026 08:18:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. **Pedro Franco de Sá** (Presidente) ______________________________
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Documento assinado digitalmente
gov.br ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO
Data: 23/04/2026 19:34:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. **Roberto Paulo Bibas Fialho** (Examinador 1) ______________________________
Doutor em Ciências e Matemática
IES de obtenção do título: UFPA

Documento assinado digitalmente
gov.br SAUL RODRIGO DA COSTA BARRETO
Data: 22/04/2026 23:37:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. **Saul Rodrigo da Costa Barreto** (Examinador 2) ______________________________
Doutor em Educação, Ciências e Matemática
IES de obtenção do título: UFPA

Documento assinado digitalmente
gov.br DANIELE ESTEVES PEREIRA SMITH
Data: 22/04/2026 22:10:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. **Daniele Esteves Pereira Smith** (Examinadora 3)
Doutora em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

O material aqui apresentado surge como consequência da dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA), intitulada “UM DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: A PERSPECTIVA DE PROFESSORES PARAENSES” Sob as orientações do Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, fundamentando-se no diagnóstico das dificuldades de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras realizado sob a ótica de professores de matemática, o trabalho destrincha os diversos aspectos referentes a este objeto matemático, abrangendo dimensões históricas, matemáticas e curriculares para materializar uma proposta pedagógica inovadora, disponível com livre acesso em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1178507.

Diante da necessidade de reestruturar o ensino de um dos conceitos mais notáveis da Geometria Plana, a obra oferece um Produto Educacional direcionado ao 9º ano do Ensino Fundamental, estruturado sob a metodologia do Ensino de Matemática por Atividades Experimentais.

Historicamente, embora Pitágoras de Samos (nascido por volta de 572 a.C.) possua grande notoriedade, as informações sobre seu legado são majoritariamente baseadas em menções de outros pensadores. A escola pitagórica funcionava como uma irmandade com ritos secretos, guiada pelo lema de que “tudo é número”, onde se acreditava que a essência da realidade era de natureza matemática.

O teorema estabelece que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos ($a^2=b^2+c^2$). Geometricamente, isso significa que a área do quadrado formado sobre a hipotenusa equivale à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

No âmbito curricular brasileiro, a proposta alinha-se aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Enquanto ao PCN sugerem abordagens que integrem verificações experimentais e demonstrações para superar o aspecto puramente mecânico, a BNCC estabelece competências específicas para o 9º ano (habilidades EF09MA13 e EF09MA14), focando na resolução de problemas e relações métricas. Além disso, o teorema é monitorado pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que exige proficiência tanto no cálculo da hipotenusa quanto dos catetos em diferentes níveis de complexidade.

Tratando-se da metodologia adotada, o Ensino por Atividades Experimentais, defendida por Sá (2009), busca transformar o aluno em um agente ativo e investigador. O professor assume o papel de mediador, proporcionando situações favoráveis à descoberta e à independência cognitiva, partindo do concreto para a abstração. O processo de aula é rigorosamente estruturado em momentos de Organização, Apresentação, Execução, Registro, Análise e Institucionalização, garantindo que o conhecimento seja sistematizado e humanizado através de paralelos históricos.

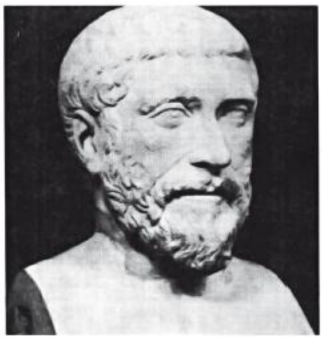
O produto educacional consiste em uma sequência de sete atividades experimentais ordenadas logicamente. O percurso inicia com a soma dos ângulos internos de um triângulo e a classificação quanto aos lados e ângulos. A atividade 4 introduz as nomenclaturas de catetos e hipotenusa, preparando o aluno para a atividade 5, onde ocorre a descoberta da relação $a^2=b^2+c^2$.

A sequência avança para a Generalização do Teorema, mostrando que a relação de áreas funciona para qualquer polígono regular semelhante construído sobre os lados, e encerra-se com o estudo dos ternos pitagóricos e seus múltiplos. Para consolidar o aprendizado, o material inclui uma Bateria de Aprofundamento com questões do ENEM, reforçando a aplicabilidade do conceito em situações-problema reais.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Diante do levantamento histórico e bibliográfico de autores como Eves (2011) e Boyer (1974), por exemplo, se constata que Pitágoras de Samos é um dos matemáticos com maior notoriedade na história, não há um grande número de informações concretas a respeito de seu legado, muito do que se sabe são menções em algumas obras de determinados pensadores, como no Sumário de *Eudemiano de Proclo*, que fundamenta os primeiros passos da matemática grega, de acordo com a obra, Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C em uma ilha grega chamada de *Samos*; em Eves (2011) é explanado a possibilidade de que Pitágoras tenha sido um pupilo de *Tales* devido à proximidade dele com *Mileto* e a diferença de idade ser de aproximadamente 50 anos (tales sendo mais velho), no entanto em Boyer (1974) essa possibilidade é colocada como improvável, justamente por essa diferença de meio século entre seus nascimentos.

Figura 1 - Busto alusivo a Pitágoras de Samos



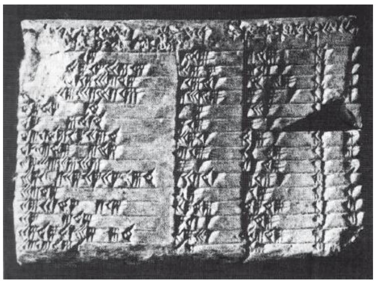
Fonte: Eves (2011, p. 98)

Em Eves (2011) e Boyer (1974) se elucida que Pitágoras obteve a oportunidade de viajar e residir em diversos lugares e assim enriquecer seus conhecimentos, por exemplo, no Egito e muito provavelmente na Índia. Ao retornar a sua cidade deparou-se com o governo do tirano *Polícrates*, tomando a atitude de se mudar para o porto marítimo de Crotona, fundando nesse período a conhecida escola pitagórica que se caracterizava por ser uma irmandade unida e com ritos secretos, nela se desenvolviam os estudos da filosofia, matemática e ciências naturais, em consequência dessa expansão e reconhecimento da escola, os pitagóricos enfrentaram diversas perseguições e ataques, provocando a fuga de Pitágoras da região, vivendo por volta de seus 80 anos, é possivelmente sendo assassinado; a escola deu continuidade ao menos mais 200 anos de atividade (Eves, 2011).

De acordo com Eves (2011) a filosofia pitagórica se baseava em supor que a essência humana e material seriam os números inteiros. Uma frase que foi atribuída a Pitágoras é justamente a que se refere que “tudo é número”, bem provável, também se considerava como lema dos pitagóricos. Boyer (1974) pontua a dificuldade de se provar a veracidade desses relatos, pois diversas frases e contribuições matemáticas desenvolvidas pelos pitagóricos foram atribuídas a Pitágoras, até mesmo o famoso teorema que carrega seu nome presume-se que os babilônicos já obtinham o seu conhecimento prático (Boyer, 1974).

Da Silva, Fanti, Pedroso (2016) sinalizam a existência de evidências concretas que provam o manuseio dos babilônicos com o teorema de Pitágoras, dentre diversos documentos que datam de meados de 1800 a 1600 a.C a placa de Plimpton 322, possui uma relação de 15 linhas e colunas preenchidas com ternos pitagóricos.

Figura 2 - Placa de Plimpton 322



Fonte: Eves (2011, p. 65)

Segundo Ribeiro (2013), os pitagóricos viviam em uma sociedade permanente e eram vegetarianos, não possuíam bens pessoais, esse grupo chegou a ser constituído por cerca de 300 membros que diariamente acompanhavam os ensinamentos de Pitágoras, sendo obrigada a seguir uma determinada sequência de regras:

> Que, em seu nível mais profundo, a realidade é de natureza matemática.
> Que a filosofia pode ser utilizada para a purificação espiritual.
> Que a alma pode elevar-se para unir-se com o divino.
> Que certos símbolos são de natureza mística.
> Que todos os membros da sociedade devem manter absoluta lealdade e sigilo. (Ribeiro, 2013, p. 6).

Ainda em Ribeiro (2013) é verificada a presença de mulheres na comunidade, atitude não tão comum para época, além do mais, é destacada a presença de outros tipos de membros, os que não faziam parte de maneira efetiva (*acusmáticos*), estes não tinham obrigação de sair de suas casas, nem lhe eram impostos o vegetarianismo e poderiam acumular posses. Os pitagóricos tinham como símbolo de representatividade o pentagrama/ pentágono estrelado, para eles os números revelavam determinados significados, atribuindo sentido exotérico, o pentagrama como um todo também era visto em representação da união entres os casais, a seguir será apresentado alguns significados em relação aos números listados por Ribeiro (2013).

Zero – absoluto e infinito, estado latente.

Um – razão, a origem de todos os números, o inicio de todas as coisas.

Dois – opinião, o feminino, principio passivo, o transitório.

Três – harmonia, o masculino, representando a estabilidade.

Quatro – justiça, imutável e equitativa.

Cinco – a união do primeiro número par (2) com o primeiro número ímpar (3), representação autêntica do homem.

Seis – número da criação.

Sete – único de 1 a 10 que não tem fator ou produto, associado a saúde, símbolo do homem perfeito.

Oito – duplo quadrado, significa pureza, da igualdade entre homens e amor (3 + 5).

Nove – tripla trindade, símbolo da justiça.

Dez – extremamente reverenciado por pitagóricos, era a soma dos quatro primeiros números (1 + 2 + 3 + 4).

Tratando-se ainda de números, existia uma grande discussão a respeito dos *irracionais*. Uma reta numérica contém uma infinidade de pontos que podem ser representados por números, tanto positivos, negativos e fracionários, conjunto de números esses denominados como *racionais*, de maneira geral, são números que podem ser representados por p / q, sendo p e q inteiros e $q \neq 0$, dessa forma se limitava o pensamento dos matemáticos, com a descoberta dos irracionais pelos pitagóricos esse pensamento se tornou caótico (Eves, 2011).

Tal descoberta relata Eves (2011), se desencadeou com muita surpresa, pois para os pitagóricos tudo poderia ser representado por números inteiros; ademais, essa ideia se contrariava em relação a sua filosofia e até mesmo ao senso comum, não sendo nada intuitivo. Ribeiro (2013) explana a não aceitação dos números irracionais pelos pitagóricos, sendo proibidos de estudar ou divulgar qualquer conteúdo relacionado, para eles os números possuíam uma conotação harmônica do universo, e os irracionais acabavam por desconfigurar essa harmonia.

De acordo com Eves (2011) $\sqrt{2}$ foi por um longo período o único número irracional constatado, o que provocou na comunidade insatisfação e desavenças, existiam alguns contos populares relatando que, possivelmente, *Hipaso* foi arremessado ao mar pelo motivo de ter revelado segredos a terceiros, outra versão narra que ele foi banido da comunidade com “direito” a exibição de um túmulo em seu nome simbolizando a sua morte para os membros.

É possível citar muitas outras contribuições de Pitágoras para ciências e outras áreas: é-lhe associado a descoberta na música de quando se divide uma corda ao meio é aumentado o som em uma oitava; como filosofo defendia que a justiça ou punição deveria ser aplicada proporcionalmente a cada ato estabelecido, premissa denominada como “justiça aritmética” (Silva, 2014). Nesse sentido, se corrobora a importância de Pitágoras no desenvolvimento das diversas áreas do conhecimento humano, no entanto, como foco do trabalho, no tópico seguinte se destrinchará de maneira específica o teorema que leva seu nome (Teorema de Pitágoras) e algumas de suas particularidades matemáticas, a exemplo de generalizações do teorema.

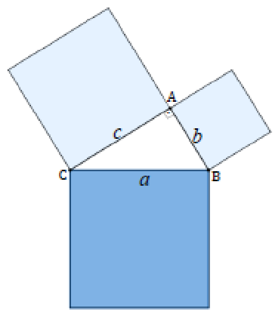
3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema que carrega o nome de Pitágoras enuncia que: dado um triângulo retângulo cujo seu maior lado é denominado por *hipotenusa*, é o resultado da soma dos quadrados formados pelos outros dois lados (*catetos),* todos elevados a segunda potência. Sendo "a" a hipotenusa, "b" e "c" os catetos, equivale dizer que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A seguinte estrutura pode ser representada geometricamente, assim como Da Silva, Fanti, Pedroso (2016), explanam em seu artigo, de modo geral, a área dos quadrados formados a partir dos lados *b* e *c* do triângulo, são somados e consequentemente o resultado é igual à área do quadrado formado pelo lado *a* (hipotenusa).

Figura 3 - Representação geométrica do T.P



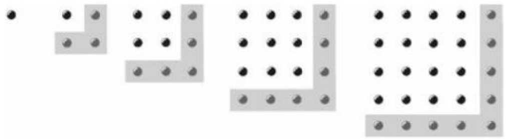
Fonte: Da Silva, Fanti, Pedroso (2016, p. 25)

É valido ressaltar, também que, *a reciprocidade do teorema de Pitágoras* é verdadeira, logo, sendo *a, b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo, e consequentemente "$a^2 = b^2 + c^2$", então o triângulo se caracteriza como retângulo (DA Silva, Fanti, Pedroso, 2016).

Como já mencionado anteriormente, outros povos já demonstraram ciência de tal conhecimento; conforme Lima (1991) relata, babilônicos e egípcios dominavam casos particulares do teorema, há a constatação de um documento chinês, datado de mais de 1000 anos antes de Cristo, nele, de acordo com Lima (1991) se encontra a afirmação "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa"; na Índia, antes de Cristo também, encontraram-se registros da sabedoria que triângulos com os lados 3, 4, 5 ou 5, 12, 13 se configuravam como retângulos, nesse sentido, para Lima (1991) tudo indica que Pitágoras ou algum de seus discípulos revolucionou a história da matemática sendo o primeiro a demonstrar o teorema.

Segundo Roque (2012) o teorema para Pitágoras/pitagóricos se direcionava a resultados aritméticos e não geométricos, se referindo como “aritmética” a padrões numéricos, o desenvolvimento do teorema decorreu através das “tripas pitagóricas”, que dependia de a soma de dois números quadrados ser igual a outro número quadrado, sendo as triplas constituídas apenas por números inteiros, sendo esses valores associados a medida dos lados de um triângulo retângulo.

Figura 4: representação do Gnomon



Fonte: Roque (2012, p. 87)

Conforme Roque (2012) relata, é bem possível que os pitagóricos chegassem as triplas através do que eles denominavam como *gnomon* - sinônimo de número ímpar -, sendo formado pela sequência de números quadrados sucessivamente a partir do 1, os gnomons podem ser visualizados na Figura 4, são representados por faixas na cor mais escura, a gradação dos quadrados devem respeitar o crescimento dos gnomons através dos números ímpares, por exemplo, para sair dos gnomons com 3 pontos – que forma um quadrado de 4 pontos -, deve se atribuir o próximo número ímpar (5), formando um quadrado de 9 pontos, dando continuidade a esse procedimento, haverá um momento em que os gnomons também serão constituídos por um valor quadrado, representado no último quadrado da figura (4), seguindo a sequência lógica: 9 + 16 = 25, sendo 9 o valor dos gnomons; 16 os remanescentes e 25 o total; nota-se que cada valor é quadrado de um número ($3^2 + 4^2 = 5^2$), dando origem a primeira tripla pitagórica: 3, 4 e 5 (Roque, 2012).

Nesse sentido, Roque (2012) destaca que:

> O método usado para encontrar triplas pitagóricas não é suficiente para assegurar a validade geométrica do teorema “de Pitágoras” em todos os casos. Tal método permite gerar algumas triplas, como (3, 4, 5), mas não todas as triplas de números que podem medir os lados de um triângulo retângulo, sobretudo porque essas medidas não são necessariamente dadas por números naturais. (Roque, 2012, p. 88).

3.1 DEMONSTRAÇÕES ACERCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Assim como foi citado anteriormente, o que se especula é que Pitágoras tenha grande influência no desenvolvimento pregresso na demonstração da proposição, tal fato pode ser constatado em Eves (2011). Um dos aspectos que torna o teorema mais intrigante é certamente sua demonstração, ou ainda, suas demonstrações, pois ele apresenta uma gama delas, *Os Elementos* de Euclides com a tradução de Bicudo (2009) releve em sua proposição 47 uma demonstração do teorema, Loomis (1968), um grande aficionado pela proposição, cataloga cerca de 370 demonstrações. A obra *the phytagoran proposition* do autor estadunidense, Elisha Scott Loomis, o livro possui duas edições, sendo a sua 2ª edição contendo cerca de 370 demonstrações, que de acordo com o Autor se dividem em quatro tipos:

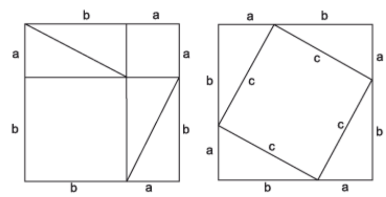
> Aquelas baseadas em Relações Lineares (implicando o conceito de tempo) – Provas Algébricas.
> Aqueles baseados na comparação de áreas (implicando o conceito de espaço) – provas Geométricas.
> Aquelas baseadas na Operação Vetorial (implicando o conceito de direção) – provas Quaterniônicas.
> Aquelas baseadas na Massa e na velocidade (implicando o conceito de força) – provas Dinâmicas. (Loomis, 1968, VII – VIII, tradução nossa).

O Autor destaca mais alguns outros objetivos referentes ao trabalho como o fato de o número de provas algébricas e geométricas serem ilimitadas; a existência de apenas dez tipos de figuras geométricas das quais uma prova geométrica pode ser deduzida e nenhum tipo de prova trigonométrica é possível, pois seus princípios fundamentais partem da proposição pitagórica (Loomis, 1968). Nesse sentido, seguidamente será apresentado um apanhado de demonstrações que possuem notável destaque.

3.1.1 DEMONSTRAÇÃO DE PITÁGORAS

A primeira demonstração que será explanada se trata do que provavelmente foi desenvolvida por Pitágoras, Eves (2011) e Lima (1991) discorrem que se refere a uma demonstração “geométrica” baseada em decomposição, como ilustrado na Figura 5, dado dois quadrados de lados *a* + *b*, o primeiro constituído por 2 quadrados – um de lado a e outro de lado b – e 4 triângulos semelhantes de catetos *a* e *b*; o quadrado do lado direito é formado por 4 triângulos congruentes ao dado, e um quadrado lado *c*, logo, logicamente, a soma das áreas dos quadrados do lado esquerdo deve ser igual a área do quadrado de lado c representado à direita, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 5 - Demonstração de Pitágoras

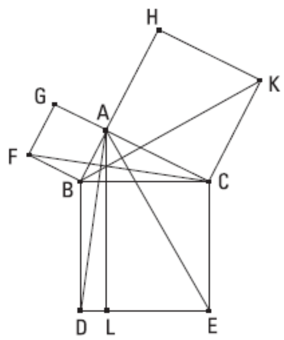


Fonte: Eves (2011, p. 103)

3.1.2 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES

Tal demonstração se localiza no livro I da obra *Os elementos* de Euclides (300 a.C), com a tradução de Bicudo (2009), especificamente a proposição 47 que diz “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (Euclides, 2009, p. 132. Tradução Bicudo).

Figura 6 - Demonstração de Euclides



Fonte: Euclides (2009, p. 133)

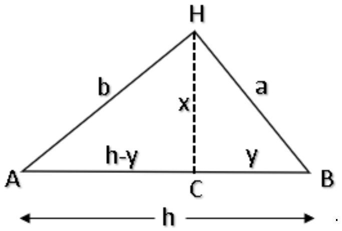
Observando a Figura 6 proposta acima, verifica-se que a proposição conjectura que dado um triângulo retângulo ABC, com o ângulo reto em BÂC, afirma-se que o quadrado construído sobre $\overline{BC}$ é igual a soma dos quadrados construídos sobre $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$. Dado o quadrado BDEC construído sobre $\overline{BC}$ e respectivamente GFBA e HACK construídos sobre $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$, se traça a partir de A o segmento $\overline{AL}$ sendo paralelo a $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ e tenha ponto em comum com $\overline{AD}$ e $\overline{FC}$, por conseguinte, salienta-se a colinearidade dos pontos C,A, G e consequentemente B, A, H; logo o triângulo ABD é congruente ao FBC, corroborado pelo caso LAL (lado, ângulo, lado), assim como o paralelogramo de diagonal $\overline{BL}$ é o dobro do triângulo ABD e o quadrado GFBA o dobro do triângulo FBC, então o paralelogramo de diagonal $\overline{BL}$ é igual ao quadrado GFBA, seguindo a lógica, prova-se que o paralelogramo de diagonal $\overline{CL}$ é igual ao quadrado HACK; o quadrado BDEC, nesse sentido, é igual a soma dos quadrados GFBA e HACK.

Lima (1991) elenca mais algumas demonstrações do teorema em consequência de sua maneira de construção ou por quem foram demonstradas, a exemplo de um presidente dos Estados Unidos e até mesmo por Leonardo da Vinci, demonstrações exibidas em tópicos subsequentes.

3.1.3 DEMONSTRAÇÃO “UM”

Referente a essa demonstração que se faz presente na obra de Loomis (1968), se configura como a primeira apresentada dentre as mais de 400 catalogadas, trata-se de uma demonstração de caráter algébrico e baseada em propriedades de semelhança entre triângulos, de acordo com o enunciado, segue que:

Figura 7 - Demonstração "UM"



Fonte: Autoria Própria (2023)

Dado um triângulo retângulo ABH, traça-se um segmento $\overline{\mathrm{HC}}$ perpendicular a $\overline{\mathrm{AB}}$, sendo os três triângulos formados (ABH, ACH e HCB) semelhantes entre si, por conveniência denota-se $\overline{\mathrm{BH}}$, $\overline{\mathrm{HA}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{HC}}$, $\overline{\mathrm{CB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$ como *a, b, h, x, y e h-y* respectivamente. Visto que dado três triângulos semelhantes, sendo eles relacionados por semelhança, possibilita a formação de nove proporções simples, tais proporções resultam nas seguintes equações:

(1) $\frac{h}{b} = \frac{b}{h-y} \therefore b^2 = h^2 - hy.$

(2) $\frac{h}{b} = \frac{a}{x} \therefore ab = hx.$

(3) $\frac{b}{h-y} = \frac{a}{x} \therefore bx = ah - ay.$

(4) $\frac{h}{a} = \frac{b}{x} \therefore ab = hx.$

(5) $\frac{h}{a} = \frac{a}{y} \therefore a^2 = hy.$

(6) $\frac{b}{x} = \frac{a}{y} \therefore xa = by.$

(7) $\frac{b}{a} = \frac{h-y}{x} \therefore bx = ah - ay.$

(8) $\frac{b}{a} = \frac{x}{y} \therefore xa = by.$

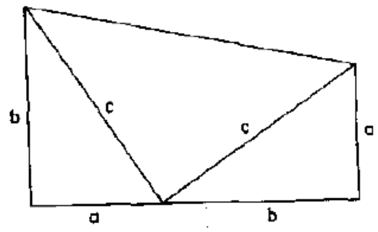
(9) $\frac{h-y}{x} = \frac{x}{y} \therefore x^2 = hy - y^2.$

Verificando-se que as equações (2) e (4) são iguais, assim com as (3) e (7); (6) e (8), fica evidente a existência de seis equações distintas apenas. Combinando-se as equações (1) $b^2 = h^2 - hy$ e (5) $a^2 = hy$ se obtém a equação $h^2 = a^2 + b^2$. Loomis (1968) ressalta ainda que, além dessa demonstração ser a conhecida mais curta – se considerar a cronologia da afirmação – ela é um corolário de uma verdade mais ampla (princípio da similaridade), devido os lados homólogos de triângulos semelhantes serem proporcionais.

3.1.4 DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE

Tal de demonstração foi desenvolvida por James Abram Garfield, foi um presidente dos Estados Unidos da América (EUA) que governou por pouco tempo, pois, ele foi assassinado após 4 meses de mandato, além do mais, possuía o cargo de general e era um grande admirador de matemática (Lima, 1991). De acordo com a proposição, dado um trapézio, como mostra a Figura 8.

Figura 8 - Demonstração do Presidente



Fonte: Lima (1991, p. 55)

De bases a e b, altura a + b, sua área é igual à soma das bases dividida por dois, multiplicado pela altura, sendo que, essa mesma é igual soma das áreas de três triângulos retos.

$\frac{a+b}{2}\ x\ (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$

Realizando a simplificação da equação:

$\frac{a+b}{2}\ x\ (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$;

$(a+b)^2 = 2\ x\ \frac{(2ab+c^2)}{2}$;

$(a+b)^2 = 2ab + c^2;$

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$;

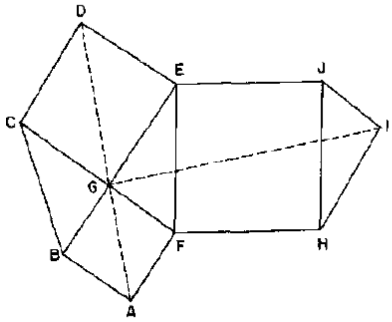
Obtém-se:

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

3.1.5 DEMONSTRAÇÃO DE DA VINCI

Outro notável nome que desenvolveu uma demonstração do teorema de Pitágoras citado por Lima (1991) foi Leonardo da Vinci, de acordo com sua proposição ilustrada na Figura 9.

Figura 9 - Demonstração de da Vinci



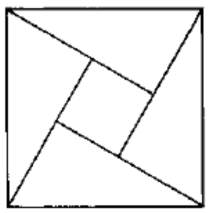
Fonte: Lima (1991, p. 55)

Da Vinci ao construir o triângulo retângulo EGF e os respectivos quadrados GBAF e DCGE sobre os catetos e o quadrado EFHJ sobre a hipotenusa, estabeleceu o triângulo JHI a partir do lado JH do quadrado EFHJ, em seguida traçou o segmento $\overline{GI}$ e os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{GA}$; os quadriláteros DCBA, DAFE, GFHI e EGIJ são congruentes entre si, consequentemente os hexágonos DCBAFE e EGFHIJ possuem a mesma medida de área, nesse sentido, emerge o resultado que a área do quadrado EFHJ advém da soma das áreas dos quadrados GBAF e DCGE (Lima, 1991).

3.1.6 DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA

Em consonância com Eves (1992) essa demonstração se trata da mais breve conhecida, foi estabelecida pelo conhecido hindu Bhaskara, sem atribuir nenhuma explicação apresentou um diagrama apenas escrito “Veja” conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 - Demonstração Bhaskara

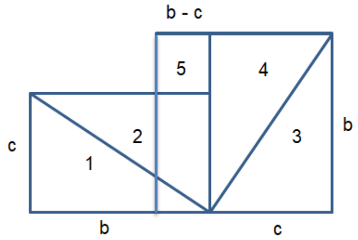


Fonte: Eves (1992, p. 56)

Bastian (2000) expõe duas formas de interpreta o que foi pontuada por Bhaskara, a demonstração, dependendo da estratégia utilizada pode ser do tipo algébrico ou geométrico:

O quadrado maior (A_1), com seus lados referentes à hipotenusa de todos os quatro triângulos congruentes entre si, pode ser decomposto, juntamente com um quadrado menor de lado “b-c”, como ilustra a Figura 11 (A_2).

Figura 11 – Demonstração de Bhaskara



Fonte: Bastian (2000, p. 56)

Nesse sentido, sabe-se que a área de (A_1) é igual a área de (A_2), e como área de (A_1) = a^2;

E área de (A_2) = $b^2 + c^2$, pois:

$A_2 = bc + bc + (b-c)^2$

$A_2 = 2bc + (b-c)^2$

$A_2 = 2bc + b^2 – 2bc + c^2$

$A_2 = b^2 + c^2$.

Então $a^2 = b^2 + c^2$.

De maneira algébrica, observando a Figura 11:

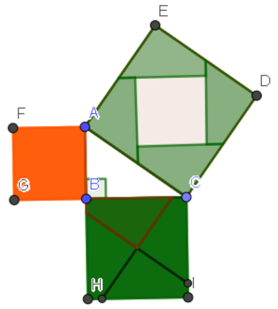
$4\frac{bc}{2} + (b-c)^2 = a^2$, logo: $2bc + b^2 - 2bc + c^2 = a^2$, então: $b^2 + c^2 = a^2$.

3.1.7 DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

A demonstração desenvolvida por Henry Perigal, um contador nascido em Londres, amante de astronomia e matemática constitui a obra de Loomis (1968), sua estratégia de demonstração se baseava no denominado método de *dissecção:*

Conforme ilustra a Figura 12, após construir um triângulo retângulo com seus respectivos quadrados traçados a partir dos lados do triângulo, traça-se um segmento paralelo a hipotenusa no quadrado construído referente ao maior cateto e que passe através de seu centro, posteriormente, delimita-se outro segmento, nesse caso deve ser perpendicular ao anterior, passando também por seu centro, logo , é possível perceber a origem de quatro quadriláteros congruentes entre si no quadrado BCIH, esses polígonos serão reorganizados internamente ao quadrado EDCA (formado a partir da hipotenusa), de modo que estabeleçam um quadrado em seu centro, que demarcar exatamente a área do quadrado FABG, demonstrando assim, a proposição pitagórica.

Figura 12 - Demonstração de Perigal



Fonte: Autoria Própria (2023)

3.1.8 DEMONSTRAÇÃO DE LEIBNIZ

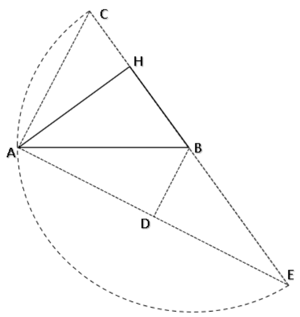
Conforme Loomis (1968) explana, essa é uma suposta demonstração desenvolvida por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), se caracteriza como uma algébrica demonstração indireta, que conjectura:

Se (1) $HA^2 + HB^2 = AB^2$, então (2) $HA^2 = AB^2 - HB^2$;

Daí (3) $HA^2 = (AB + HB).(AB – HB)$.

Dada a Figura 13, considere $\overline{BE}$ e $\overline{BC}$ iguais a $\overline{AB}$, sendo B o centro do semicírculo CAE, traça-se $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$, e $\overline{BD}$ sendo perpendicular a $\overline{AE}$. Por conseguinte, efetua-se o produto entre as equações (4) HE = AB + HB e (5) HC = AB – HB, assim, HE x HC = HA^2, que acaba por ser verdade, pois os triângulos AHC e EHA são semelhantes.

Figura 13 - Demonstração de Leibniz



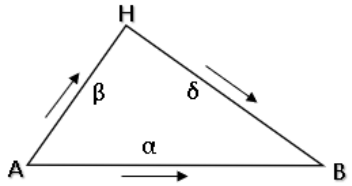
Fonte: Autoria Própria (2023)

Nota-se que o ângulo CAH = AEH, desta maneira, (7) $\frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HE}}$; já que o ângulo HAC = E, então o ângulo CAH = EAH. Nesse sentido, denota-se ainda que AEH + EAH = 90° e CAH + EAH = 90°, logo o ângulo EAC = 90°. Com o vértice A pertencente ao semicírculo, o ângulo EAC está inscrito no semicírculo, sendo ainda, um ângulo reto. Como a equação (1) por intermédio dos cálculos desenvolvidos a partir dela, desencadeia em um triângulo retângulo, ao se inverter o processo e seguir a lógica, ou seja, saindo do triângulo retângulo, se chega à equação pretendida $h^2 = a^2 + b^2$.

3.1.9 DEMONSTRAÇÃO QUATERNIÔNICA

De acordo com o que já foi anteriormente exposto, Loomis (1968) apresenta quatro maneiras de demonstração do teorema de Pitágoras, sendo já apresentadas algumas geométricas e algébricas, logo, o foco da abordagem nesse momento se direciona as demonstrações quaterniônicas, ou análise vetorial, inserindo o conceito de direção como forma de estratégia de demonstração. Loomis (1968) apresenta quatro demonstrações que incorporam essa característica, segue a construção de uma delas.

Figura 14 - Demonstração Quaterniônica



Fonte: Autoria Própria (2023)

Com o suporte da Figura 14, observe que *α, β* e *δ* representam tanto os lados, as direções e distâncias, (para facilitar *a, b* e *g* substituirão *α, β* e *δ* respectivamente). Pelo princípio da direção, a = b + g, ademais, como H é um ângulo reto, então é valido que b.g = 0.

Dado (1) a = b + g, elevando-se (1) ao quadrado se obtém (2) $a^2 = (b + g)^2 \rightarrow a^2 = b^2 + 2.b.g + g^2$. Como o produto entre b e g é 0, logo $a^2 = b^2 + g^2$, sendo $\overline{\mathrm{AB}} = \alpha$, $\overline{\mathrm{BH}} = \delta$ e $\overline{\mathrm{AH}} = \beta$, pode-se representar, dessa forma: $h^2 = a^2 + b^2$.

Por fim, Loomis (1968) destaca algumas provas envolvendo o estudo de dinâmica, após análise metodológica e bibliográfica, delibera-se pela não demonstração nesse presente trabalho, ficando a critério do leitor o aprofundamento em determinada temática.

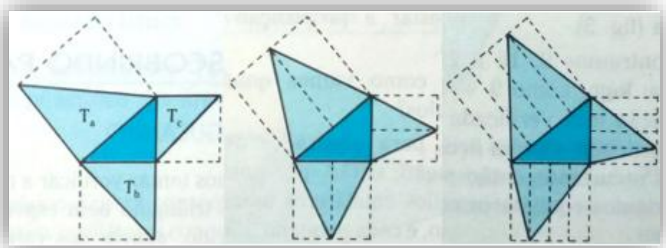
3.2 EXTENSÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Até o presente momento se verificou a veracidade do teorema de Pitágoras e algumas maneiras de corroborar a proposição, nesse sentido, é fato que dado um triângulo retângulo é construído quadrados a partir de seus lados, a soma das áreas dos quadrados formados por meio dos catetos é igual a área do quadrado construído a partir de sua hipotenusa. Consequentemente, é possível investigar se essa ideia se limita apenas a área de quadrados ou se estende para outras figuras geométricas.

3.2.1 EXTENSÕES TRIÂNGULARES

Barbosa (1993) analisa se essa mesma lógica é válida para triângulos. De forma semelhante de como foi desenvolvido com quadrados, nesse momento a análise parte de triângulos obtidos a partir de quadrados.

Figura 15 - Triângulos traçados a partir de quadrados



Fonte: Barbosa (1993, p. 27)

Observam-se com o auxílio da Figura 15, três exemplos de triângulos formados a partir da construção de quadrados, cada um deles representa a metade da área de seu respectivo quadrado, sendo assim:

$T_b = \frac{Qb}{2}$; $T_c = \frac{Qc}{2}$;

Somando, então:

$T_b + T_c = \frac{Qb + Qc}{2}$

Sabe-se que pelo teorema de Pitágoras:

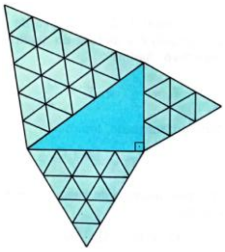
$Q_b + Q_c = Q_a$, logo:

$T_b + T_c = \frac{Qa}{2} = T_a$.

Validando assim, a respectiva proposição.

Seguindo essa lógica, torna-se conveniente a verificação em triângulos equiláteros.

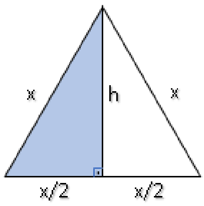
Figura 16 - Triângulos compostos por áreas unitárias



Fonte: Barbosa (1993, p. 28)

Como ilustra a Figura 16, a estratégia se consolida com um triângulo clássico de lados 3, 4 e 5 em unidades de comprimento e pequenos triângulos de áreas unitárias, ficando evidente após a contagem: 9 + 16 = 25, um caso bem particular, porém, que agrega mais credibilidade. Nesse sentido é pertinente provar para triângulos equiláteros traçados a partir de triângulos retângulos quaisquer.

Figura 17 - Triângulo equilátero de lado x



Fonte: Autoria Própria (2023)

Acompanhando a ilustração da Figura 17, estabelece-se incialmente a fórmula da área de um triângulo equilátero de lado x, verifique que a altura (h) do triângulo divide a figura em dois triângulos retos e é mediatriz da base, selecionando um desses triângulos e aplicando o teorema de Pitágoras, se resulta:

$x^2 = h^2 + (\frac{x}{2})^2$;

$h^2 = \frac{3x^2}{4}$;

$h = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando-se na fórmula para área de um triângulo de área T_x, de lado x, se obtém:

$T_x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Tratando-se de triângulos equiláteros de catetos *b* e *c*, consequentemente de maneira respectiva $T_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ e $T_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

Ao se realizar a soma entre eles, teremos:

$T_b + T_c = \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4}$.

Sendo $b^2 + c^2 = a^2$, é válido:

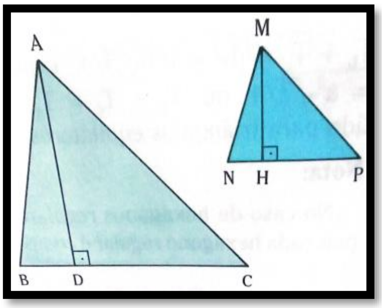
$T_b + T_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

Logo: $T_b + T_c = T_a$.

Nesse sentido, verificando-se o rigor matemático, fica evidente que o padrão da proposição pitagórica em termos de áreas, engloba também, triângulos equiláteros. É pertinente observar, haja vista que *hexágonos regulares* podem ser interpretados como uma composição de triângulos equiláteros congruentes, por consequência a afirmação é igualmente verdadeira para eles.

Expandido um pouco mais a lógica, Barbosa (1993) verifica se a proposição pitagórica é verdadeira para triângulos semelhantes. A princípio prova-se um lema essencial a construção: "Se dois triângulos são semelhantes, então possuem as áreas proporcionais aos quadrados dos comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer".

Figura 18 - Triângulos Semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 30)

Dados os triângulos semelhantes ABC e MNP, ilustrados na Figura 18, relacionando as alturas AD e MH com os relativos lados BC e NP respectivamente, sendo esses triângulos semelhantes, as medidas das alturas são proporcionais as medidas dos lados homólogos.

$\frac{\text{AD}}{\text{MH}} = \frac{\text{BC}}{\text{NP}}$.

Por outro lado, as áreas dos respectivos triângulos (T e T') são resultadas de:

$\text{T} = \frac{\text{BC} \cdot \text{AD}}{2}$; $\text{T}' = \frac{\text{NP} \cdot \text{MH}}{2}$,

Ao se efetuar a divisão, obtém-se:

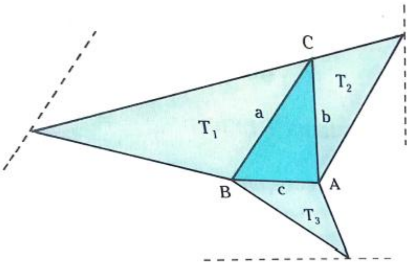
$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{\text{BC} \cdot \text{AD}}{\text{NP} \cdot \text{MH}}$.

Porém, fazendo-se uso da relação antecedente se possibilita:

$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{\text{BC} \cdot \text{BC}}{\text{NP} \cdot \text{NP}} = \frac{(\text{BC})^2}{(\text{NP})^2}$.

Estabelecido a prova anterior, define-se nesse momento um triângulo retângulo BAC composto por três triângulos semelhantes, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 - Triângulos BAC composto por triângulos semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 31)

Em consonância com o lema apresentado:

$\frac{T2}{T1} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{T3}{T1} = \frac{c^2}{a^2}$,

Resultando em:

T2 = $\frac{b^2}{a^2}$. T1 e T3 = $\frac{b^2}{a^2}$. T1,

Somando:

T2 + T3 = $\frac{(b^2 + c^2).T1}{a^2}$,

Consequentemente $b^2 + c^2 = a^2$ resultando em T2 + T3 = T1, chega-se à prova que a área de um triângulo qualquer construído sobre a hipotenusa é igual soma das áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre os catetos. Barbosa (1993) destaca ainda como nota, que:

> [...] a proposição vale mesmo que os triângulos não sejam semelhantes; mas é necessário que as alturas sejam as mesmas dos triângulos semelhantes. Em outras palavras, as alturas devem ser proporcionais aos lados do triângulo retângulo (Barbosa, 1993, p. 31).

3.2.2 EXTENSÕES RETILÍNEAS

Barbosa (1993) apresenta ainda, um apanhado de extensões que se encontram na sua grande maioria em função de outra forma geométrica, caracterizada nas figuras seguintes como áreas hachuradas, que variam desde figuras retilíneas a curvilíneas, seguem algumas retilíneas.

- Como ilustra a Figura 20, apresentando triângulos equiláteros a partir dos lados do triângulo retângulo, simultaneamente as áreas hachuradas E_a, E_b e E_c, sendo elas respectivamente, relativas à hipotenusa (*a*) e os catetos (*b* e *c*), seguem *(Q = áreas dos quadrados; T = áreas dos triângulos equiláteros)*:

$E_b = Q_b – T_b$;

$E_c = Q_c - T_c$;

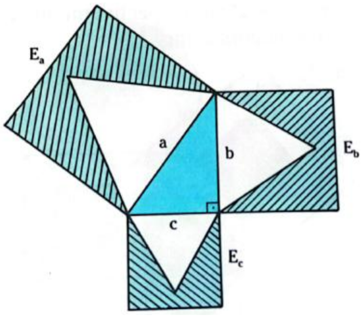
Somando:

$E_b + E_c = (Q_b + Q_c) - (T_b + T_c)$

Utilizando-se da proposição de áreas, obtém-se:

$E_b + E_c = Q_a - T_a = E_a$.

Figura 20 - Extensão entre triângulo equilátero e quadrado



Fonte: Barbosa (1993, p. 33)

➢ Sendo os quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, os quadrados hachurados são construídos a partir dos pontos médios dos quadrados circunscritos, logo, segue que *(QI = áreas dos quadrados inscritos)*:

$QI_b = \frac{Q_b}{2}$, $QI_c = \frac{Q_c}{2}$;

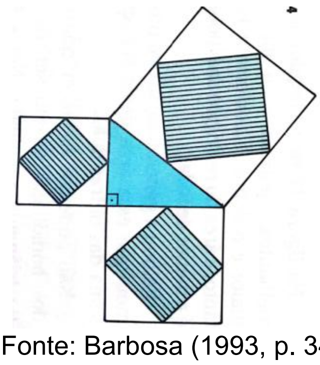
Somando:

$QI_b + QI_c = \frac{(Q_b + Q_c)}{2}$;

Aplicando a proposição pitagórica:

$QI_b + QI_c = \frac{Q_a}{2} = QI_a$.

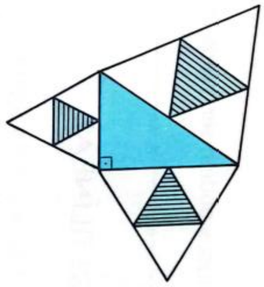
Figura 21 - Extensão entre quadrados inscritos a partir de pontos médios



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➢ De analogia semelhante a Figura 21, a Figura 22 projeta agora, ao invés quadrados, triângulos inscritos em triângulos equiláteros, traçados a partir dos lados dos triângulos retangulares, sendo os vértices dos triângulos hachurados estabelecidos nos pontos médios em questão.

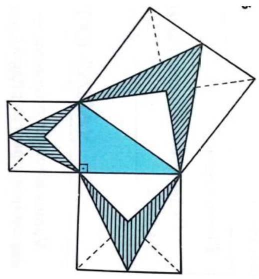
Figura 22 - Extensão entre triângulos inscritos a partir de pontos médios



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

- Dado os quadrados externamente, as figuras inscritas e devidamente hachuradas são traçadas a partir das diagonais e pontos médios dos quadrados correspondentes, respeitando assim, a proposição pitagórica, acompanhe na Figura 23.

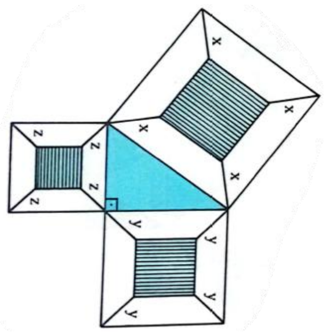
Figura 23 - Extensão a partir de diagonais e pontos médios dos quadrados correspondentes



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

- A ilustração da Figura 24 é composta por quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, com quadrados inscritos e desenvolvidos em função da quarte parte (1/4) das diagonais, representadas por *x, y* e *z*.

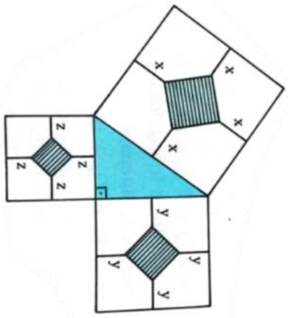
Figura 24 - Extensão a partir de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, com quadrados inscritos e desenvolvidos em função da quarte parte das diagonais



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

- A Figura 25 é composta por quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, com quadrados menores inscritos e traçados a partir da terça parte (1/3) das diagonais, representadas por *x, y* e *z*.

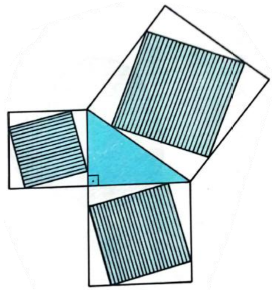
Figura 25 - Extensão a partir de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, com quadrados menores inscritos e traçados a partir da terça parte das diagonais



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➢ Situação um pouco mais elaborada, nesse caso os quadrados hachurados e inscritos, interceptam pontos que dividem os lados dos quadrados circunscritos em uma mesma razão (k), acompanhe a ilustração na Figura 26.

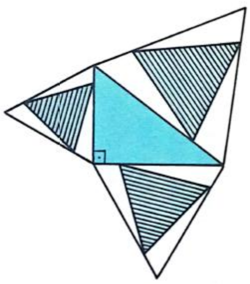
Figura 26 - Extensão entre quadrados inscritos a partir de uma razão k



Fonte: Barbosa (1993, p. 35)

➢ Finalizando as retilíneas, a ilustração da Figura 27 possui o mesmo princípio da figura anterior, ou seja, a figura geométrica hachurada e inscrita, interceptam pontos que dividem os lados da circunscrita em uma mesma razão (k), no entanto, nesse caso as figuras são triângulos equiláteros.

Figura 27 - Extensão entre triângulos inscritos a partir de uma razão k



Fonte: Barbosa (1993, p. 35)

3.2.3 EXTENSÕES CURVILÍNEAS OU MISTAS

Barbosa (1993) apresenta mais algumas extensões do teorema de Pitágoras, porém, agora são casos com características não retilíneas, ou seja, figuras curvilíneas ou mistas, que variam desde segmentos de retas a arcos de circunferências. Barbosa (1993) destaca ainda que:

> [...] Hipócrates foi o descobridor do primeiro caso de quadratura de figura curvilínea, quando mostrou que a soma das áreas de duas “lúnulas” era igual à área de um triangulo retângulo isósceles, ainda que a proposição seja válida também para triângulos retângulos quaisquer (Barbosa, 1993, p. 35).

➢ Este primeiro caso da Figura 28, refere-se a círculos inscritos nos respectivos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo. Sejam C_a, C_b e C_c as áreas dos círculos inscritos que estão hachurados, logo:

$C_b = \pi(\frac{b}{2})^2 = \frac{\pi b^2}{4}$; $C_c = \pi(\frac{c}{2})^2 = \frac{\pi c^2}{4}$;

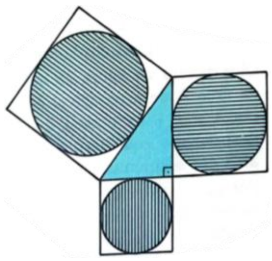
Somando:

$C_b + C_c = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{4}$,

Porém, lembrando que pela proposição pitagórica, $b^2 + c^2 = a^2$, portanto:

$C_b + C_c = \frac{\pi a^2}{4} = \pi(\frac{a}{2})^2 = C_a$.

Figura 28 - Extensão a partir de círculo inscrito em quadrado

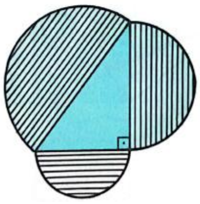


Fonte: Barbosa (1993, p. 35)

➢ Conforme a Figura 29 ilustra, os semicírculos hachurados possuem o diâmetro igual aos respectivos lados do triângulo. Logo, temos que:

$SC_b + SC_c = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{8} = \frac{\pi a^2}{8} = SC_a$.

Figura 29 - Extensão de semicírculos sobre os lados do triângulo retângulo



Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

➢ A extensão presente na Figura 30 em particular, possui característica um tanto quanto diferente das demais. A geometria dessa figura é composta pelo triângulo retângulo, e as “lúnulas”, que são obtidas a partir delimitação entre dois arcos de circunferência, assemelhando-se com o formatado da lua, observe a ilustração da Figura 30 para melhor compreensão.

As lúnulas são extremidades conectadas aos respectivos lados do triângulo, dessa maneira, temos:

$L_b = SC_b – X$ e $L_c = SC_c – Y$;

Dessa maneira:

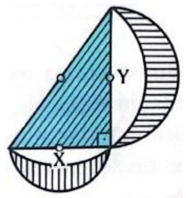
$L_b + L_c = (SC_b + SC_c) – (X + Y)$;

E observando a figura ():

$L_b + L_c = SC_a – (X + Y)$; ou ainda:

$L_b + L_c = T$, sendo T a área do triângulo retângulo.

Figura 30 - Extensão a partir de "lúnulas"



Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

- As imagens presentes na Figura 31 são denominadas de arcos ogivais, que estão com seus diâmetros delimitados com os respectivos lados do triângulo. Observe na Figura 32 que a cada uma das áreas (A) dos arcos ogivais é dada por A = T + 2S, sendo T a área do triângulo equilátero e 2S área dos segmentos circulares, de outro ponto de vista, T + S é 1/6 da área de um círculo em que o raio é o lado do triângulo retângulo, portanto:

$T + S = \frac{\pi R^2}{6}$ ou ainda, $S = \frac{\pi R^2}{6} – T$,

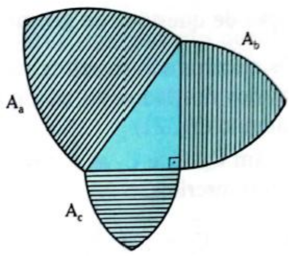
Logo:

$Ab + Ac = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{3} – (T_b + T_c)$,

E como $b^2 + c^2 = a^2$ e $T_b + T_c = T_a$, então é valido:

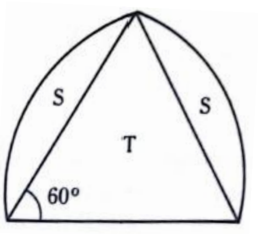
$Ab + Ac = \frac{\pi a^2}{3} – T_a = A_a$.

Figura 31 - Extensão de Arcos ogivais



Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

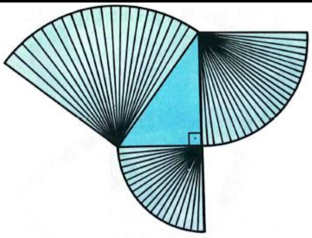
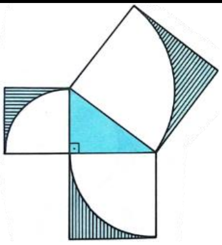
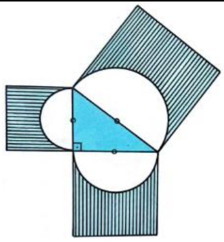
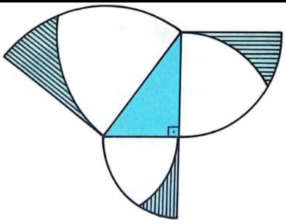
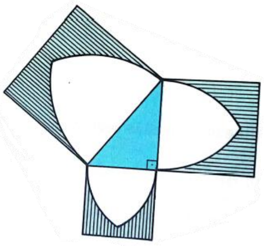
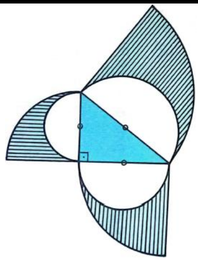
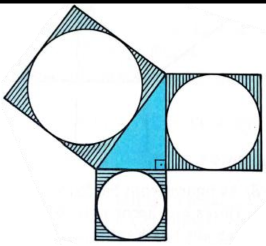
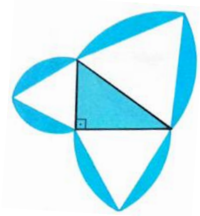
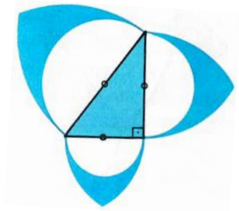
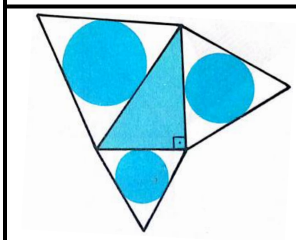
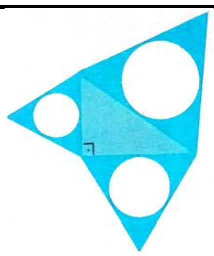
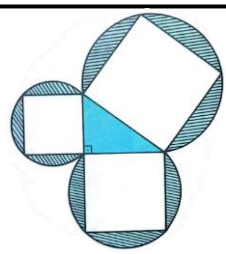
Figura 32 - Arcos ogivais



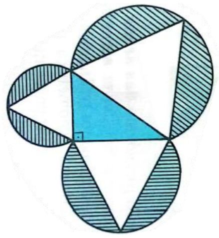
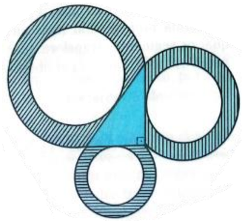
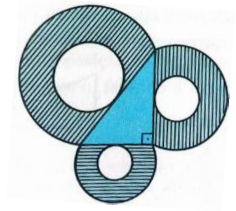
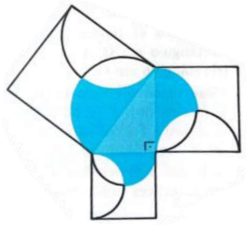
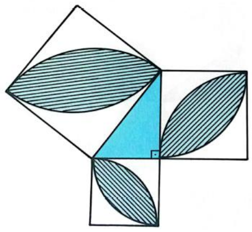
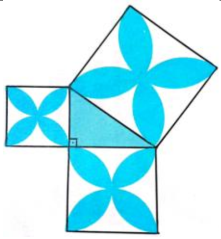
Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

Barbosa (1993) destaca mais um apanhado de extensões que se aplicam ao padrão anteriormente exposto, válido para figuras mistas ou curvilíneas, que serão apresentadas nos Quadros 1 e 2 a seguir.

Quadro 1 - Extensões curvilíneas e mistas (continua)

 As imagens hachuradas representam a quarta parte de círculos.	 As imagens hachuradas representam o lado externo de quadrante de círculos e interna aos quadrados.	 As imagens hachuradas representam a parte externa de semicírculos e internos a quadrados.
 As imagens hachuradas representam as partes externas dos arcos ogivais e internas a quadrantes.	 As imagens hachuradas representam as partes externas de arcos ogivais e internas a quadrantes.	 As imagens hachuradas representam as partes externas de semicírculos e internas a quadrantes.
 As imagens hachuradas representam partes internas de quadrados e externas a círculos inscritos.	 As imagens em azul representam partes externas de triângulos equiláteros e internos a arcos ogivais.	 As imagens em azul representam partes externas de semicírculos e internos a arcos ogivais.
 As imagens em azul representam círculos inscritos em triângulos equiláteros.	 As imagens em azul representam partes externas de triângulos equiláteros e externos a círculos inscritos.	 As imagens hachuradas representam partes externas a quadrados e internas a círculos circunscritos, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.

Quadro 2 - Extensões curvilíneas e mistas (conclusão)

 As imagens hachuradas representam partes externas a triângulos equiláteros e internos a círculos circunscritos, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.	 As imagens hachuradas representam coroas circulares dos círculos inscritos e circunscritos aos quadrados, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.	 As imagens hachuradas representam coroas circulares dos círculos inscritos e circunscritos aos triângulos equiláteros, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.
 As imagens em azuis representadas em cada quadrado são resultado de dois semicírculos de centro nos pontos médios dos quadrados.	 As imagens hachuradas representam arcos de circunferências com centros em vértices opostos dos quadrados.	 As imagens em azuis representam semicircunferências de centros nos pontos médios dos lados dos quadrados.

Fonte: Adaptado de Barbosa (1993).

Por fim, Barbosa (1993) destaca em nota que a proposição pitagórica é verdadeira para todos os casos anteriormente citados, mas cabe a observação da necessidade de semelhança entre as figuras devidamente construídas em função dos respectivos lados do triângulo retângulo, ademais, se o leitor aprofundar a lógica perceberá que, os segmentos transformados apresentam medidas proporcionais aos seus lados correspondentes, o que de fato acaba por resultar em uma generalização.

O tópico anterior acaba por expor que o teorema de Pitágoras não se delimita apenas – tratando-se de áreas – a quadrados gerados pelos lados do triângulo retângulo, ficando claro que existem outras figuras geométricas que são válidas pela proposição pitagórica. Sendo assim, o tópico a seguir se direciona a revelar não apenas casos particulares da proposição, mas sim a busca por possíveis generalizações.

3.3 GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

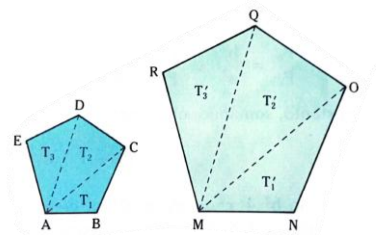
De acordo com o que Barbosa (1993) retrata sobre as extensões, pode-se inicialmente argumentar a generalização do teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes, visto que, os casos de quadrados e triângulos evidenciados já se encontram inclusos nessa proposição mais geral. O lema a seguir serve de base para o desenvolvimento da argumentação.

Lema: se dois polígonos (convexos ou côncavos) são semelhantes, então possuem as áreas proporcionais aos quadrados das medidas de dois lados homólogos quaisquer.

Dito isso, dado dois polígonos semelhantes de áreas P e P', dividindo-os a partir de suas diagonais, obtém-se os triângulos semelhantes, como ilustra a Figura 33.

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MO} = \frac{AD}{MQ} = \cdots = k.$$

Figura 33 - Polígonos semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 31)

Consequentemente, seus quadrados também são proporcionais:

$$\frac{AB^2}{MN^2} = \frac{AC^2}{MO^2} = \frac{AD^2}{MQ^2} = \cdots = k^2.$$

Logo:

$$\frac{T_1}{T_1} = \frac{AB^2}{MN^2}, \frac{T_2}{T_2} = \frac{AC^2}{MQ^2}, \text{etc.}$$

Portanto, através de comparação:

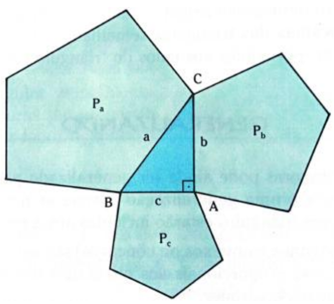
$$\frac{T_1}{T_1} = \frac{T_2}{T_2} = \frac{T_3}{T_3} = \cdots = k^2.$$

Utilizando-se a propriedade das razoes iguais: a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, então:

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \cdots} = k^2, \text{ ou } \frac{P}{P'} = k^2.$$

Remetendo-se ao lema anteriormente citado, possibilita-se provar essa generalização do teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes. Acompanhado a ilustração da Figura 34, observe que o triângulo retângulo forma 3 polígonos semelhantes a partir de seus respectivos lados, de áreas P_a, P_b e P_c.

Figura 34 - Generalização para polígonos semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 32)

Logo:

$\frac{P_b}{P_a} = \frac{b^2}{a^2}$ e $\frac{P_c}{P_a} = \frac{c^2}{a^2}$ ou $P_b = \frac{b^2}{a^2} P_a$ e $P_c = \frac{c^2}{a^2} P_a$.

Somando:

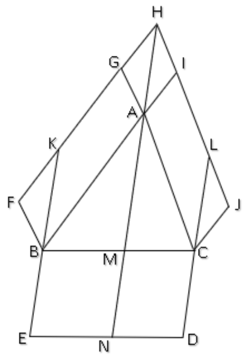
$P_b + P_c = \frac{b^2+c^2}{a^2} x P_a$.

E sendo consequentemente $b^2 + c^2 = a^2$, então $P_c + P_b = P_a$. Generalizando assim o teorema de Pitágoras, se tratando de áreas, para polígonos semelhantes.

3.3.1 GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS

Segundo Loomis (1968) e Lima (1991) o teorema de Pitágoras se configura como um caso particular da demonstração de Pappus, matemático grego que provavelmente viveu por volta de 300 a 400 a.C. o teorema de Pappus diz que dado um triângulo qualquer e sobre dois de seus lados forem construídos paralelogramos, sua soma é igual ao paralelogramo resultante do terceiro lado. Observe a seguir a construção com mais detalhe.

Figura 35 - Generalização de Pappus



Fonte: Autoria Própria (2023)

Conforme a Figura 35 ilustra, dado o triângulo arbitrário ABC, traça-se dois paralelogramos em relação a AB e AC (ABFG e ACJI, respectivamente), sendo H a interseção de seus prolongamentos, nesse sentido AHKB possui a mesma área que

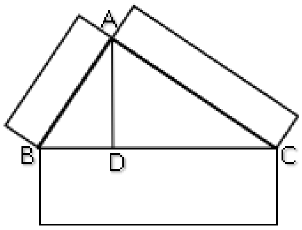
ABFG, que por sua vez é igual, também a BMNE. Sendo MBNE igual ABGF, analogamente CDNM e CAIJ são iguais, logo, BCDE é resultado da das áreas de ABFG e CAIJ, observe que a demonstração se baseia em uma simples propriedade relativa à geometria plana, pois, dois paralelogramos que possuem bases e alturas iguais, logicamente suas áreas são iguais.

3.3.2 GENERALIZAÇÃO DE EUCLIDES

Euclides, como já foi devidamente citado neste trabalho, com uma contribuição da demonstração do teorema de Pitágoras, possui uma generalização da proposição em uma de suas obras, no livro VI, proposição 31, que enuncia:

"Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto. " (Euclides, 2009, p. 264. Tradução Bicudo).

Figura 36 - Generalização Euclides



Fonte: Autoria Própria (2023)

Dado o triângulo ABC disposto na Figura 36, reto em BAC, afirma-se que a figura sobre BC é igual as figuras semelhantes, e semelhantemente descritas sobre BA, AC. Traça-se a perpendicular AD, consequentemente, resulta em outros dois triângulos (ABD e ADC), sendo semelhantes ao triângulo ABC e entre si. Nesse sentido, CB está para BA assim como AB para BD, sendo os três segmentos proporcionais, a primeira está para a terceira, do mesmo modo que a figura sobre a primeira está para a descrita similarmente sobre a segunda, logo, CB está para BD assim como a figura sobre CB está para a semelhante e semelhantemente descrita sobre BA. Seguindo a mesma lógica, como BC está também para CD, a figura sobre BC está para a sobre CA, além do mais, ressalta-se que BC está para BD, DC, assim como a figura sobre BC está para as semelhantes descritas semelhantemente sobre BA, AC. Porém, BC é igual a BD, DC, portanto a figura sobre BC é igual as figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre BA, AC. Logo se evidencia que estabelecido um triângulo retângulo a figura construída sobre a hipotenusa é resultado da soma das figuras semelhantes construídas sobre os catetos, como se busca provar (Euclides, 2009, p. 264. Tradução Bicudo).

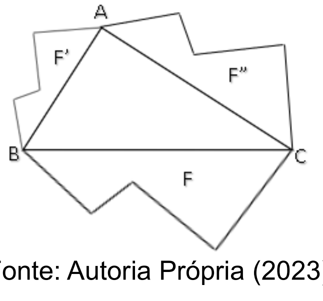
3.3.3 GENERALIZAÇÃO DE POLYA

Conforme Lima (1991) e Barbosa (1993) relatam, George Polya foi um matemático húngaro que viveu em torno de 1887- 1985, sendo um notável matemático de sua época, atuava de professor a conferencista em diversas universidades, principalmente na de Stanford, Estados Unidos. Polya desenvolveu uma demonstração do teorema de Pitágoras, que concomitantemente, generaliza a proposição em destaque, tal argumento se encontra em uma de suas obras, denominada de “Induction and Analogy in Mathematics”, a lógica de sua argumentação tem bases no lema anteriormente exposto, que diz: *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

Polya admite que dado duas figuras F e F’, serão semelhantes quando a cada ponto A de F, corresponde – e essa correspondência é única – a um ponto A’ de F’, intitulado de *homólogos*, de tal modo que, se A, B são pontos quaisquer de F e A’,B’ sendo seus homólogos em F’, então a razão $\frac{A'B'}{A\,B}$ resulta em uma constante *k (razão de semelhança de F para F’)*.

Exemplificando o caso a partir de dois triângulos, eles serão semelhantes se, somente se, os ângulos de um deles sejam congruentes aos ângulos do outro. Em contrapartida, dois quadrados, um de lado L e o outro L’, são semelhantes e a razão entre seus lados é *k.* A proposição que Polya busca consolidar, considera que: Se F, F’ e F”, são semelhantes entre si, traçadas a partir da hipotenusa de um triângulo retângulo e seus respectivos catetos, logo, a área F é resultado da soma das figuras F’ e F”, como ilustra a Figura 37.

Figura 37 - Generalização de Polya



Fonte: Autoria Própria (2023)

Denotando a hipotenusa como *c* e os catetos respectivamente sendo *a* e *b,* logo a razão de semelhança de F' para F" é $\frac{b}{a}$, F' para F é $\frac{c}{a}$, e F" para F é $\frac{c}{b}$.

Como consequência, se G, G' e G" são figuras traçadas de forma análoga a situação anterior, então:

$$\frac{G'}{G"} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F"};$$

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G"}{F"};$$

Analogamente, resulta-se:

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G}{F}.$$

Nesse sentido:

$$\frac{G}{F} = \frac{G'}{F'} = \frac{G"}{F"} = g.$$

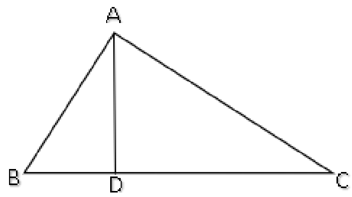
Que se pode reescrever da seguinte forma:

G = g.F; G' = g.F'; G" = g.F".

Logicamente, definido três figuras semelhantes F, F' e F" construídas a partir dos lados de um triângulo retângulo, de modo que F = F' + F", então como efeito, G = G' + G", sendo essas áreas de figuras semelhantes quaisquer, construídas da mesma forma.

Para consolidar, toma-se um triângulo retângulo ABC ilustrado na Figura 38, com o segmento perpendicular CD (altura).

Figura 38 - Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autoria Própria (2023)

O triângulo ABC denota-se como F, F'= ABD e F" = ACD, portanto, é explicito que F, F' e F" são figuras semelhantes entre si, e claramente F = F' + F".

3.3.4 GENERALIZAÇÃO DE THABIT

Por fim, destaca-se a generalização de um matemático notável do mundo islâmico, Thabit Ibn Qurra (836 – 901). Costa (2022) expõe sua tradução a respeito das palavras do matemático sobre a generalização do teorema de Pitágoras.

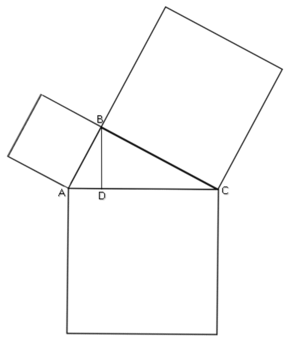
> Este é o triângulo ABC. Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice B interceptam AC deste triângulo e fazer com isso um ângulo igual ao ângulo ABC. Esta linha é uma linha qualquer BD, como no primeiro desenho da imagem[...], situação em que esta linha se cruza com a base para formar dois ângulos iguais a ABC e isso corresponde ao ângulo ABC ser um ângulo reto; A linha BD é perpendicular a AC aqui. Ou, como visto no segundo desenho [...], ocorrem duas linhas como BA' e BC'. Nesta segunda situação, o ângulo ABC não é perpendicular e é igual aos ângulos AA'B e CC'B. Assim, a soma dos quadrados dos lados AB e BC é a área retangular de AC multiplicada pela soma de AD e DC, no caso em que a primeira imagem representa, e soma de AA' e CC', no caso das imagens restantes. (Thabit, 1958, p.546, tradução: Costa 2022, p. 66).

Observe que dado o enunciado, torna-se visível duas situações, o primeiro caso se trata de um caso particular do teorema de Pitágoras, atribuído a triângulos retos, o segundo caso se refere a triângulos que possuem seus ângulos diferentes de 90 graus, dispondo, dessa forma, uma generalização do teorema de Pitágoras.

1º caso: Dado o triângulo ABC na Figura 39, traça-se uma ou duas linhas de B para AC, ressalta-se que esses novos ângulos formados em AC devem ser congruentes ao ângulo ABC (90º), consequentemente BD é perpendicular a AC. Logo a soma dos quadrados dos lados AB e BC resultam na área retangular de AC multiplicada pela soma de AD e DC.

$(AB)^2 = (BC)^2 = (AD + DC).AC$

Figura 39 - Representação geométrica do 1º caso

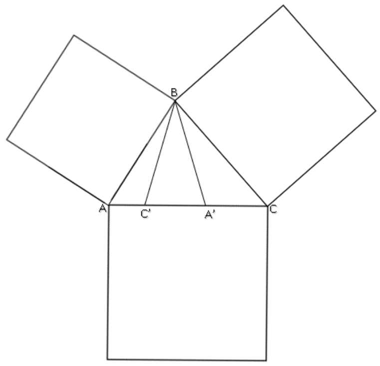


Fonte: Autoria Própria (2023)

2º caso: Dado o triângulo ABC na Figura 40, traça-se uma ou duas linhas de B para AC, gerando assim, dois segmentos BC' e BA', sendo seus ângulos congruentes ao ângulo ABC (diferente de 90º), logo, a soma dos quadrados formados pelos lados AB e BC resultam na área obtida por AC multiplicado pela soma de AA' e CC'.

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AA' + CC').AC$

Figura 40 - Representação geométrica do 2º caso



Fonte: Autoria Própria (2023)

Thabit destaca ainda, se houver o interesse em expandir a ideia de generalização, cabe ao interessado observar que a soma de quaisquer figuras que sejam semelhantes dispostas sobre os segmentos BC e AB, será igual a outra figura similar e proporcional disposta sobre o lado remanescente, da mesma maneira que a soma entre AA' e CC' é proporcional a AC (Costa, 2022, p. 74).

3.3.5 GENERALIZAÇÃO POR INTEGRAIS

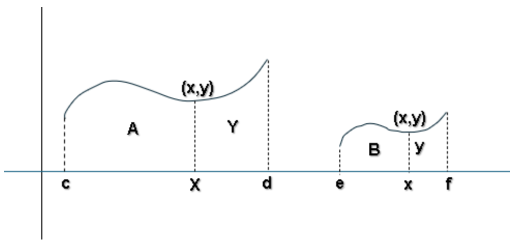
Esta demonstração se encontra no livro "DE PITÁGORAS A FERMAT" de autoria de Rui dos Santos Barbosa e José Mária Filiardo Bassalo, ambos até a presente data de publicação da obra, professores Adjuntos da Universidade Federal do Pará. De acordo com Barbosa e Bassalo (1978) a generalização é baseada nas ideias presentes no livro "De l'explications dans les Sciences", de Emile Meyerson, que foram analisadas por Bachelard.

Para realização da demonstração é necessário pontuar algumas relações que serão obtidas através de teoremas que serão demonstrados.

DEFINIÇÃO: Dizemos que uma função Y = F(X) definida sobre um intervalo de amplitude <u>a</u> é <u>semelhante</u> a uma função y = f(x), definida sobre um intervalo de amplitude <u>b</u>, se para todo ponto (X,Y) de F, existe um único ponto (x,y) de f, tal que:

$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$ (Sendo $\frac{b}{a}$ a razão de semelhança)

Figura 41 - Representação gráfica da função Y



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 5)

Da definição anterior é possível escrever que:

$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \rightarrow \mathrm{X} = \frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{b}}$ (1);

E

$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{Y}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \rightarrow \mathrm{y} = \frac{\mathrm{bY}}{\mathrm{a}}$ (2).

Portanto, dada uma função Y = F (X) definida em um intervalo de amplitude a, podemos determinar a função y = f(x) definida em um intervalo de amplitude b, semelhante a função F, usando as relações de semelhança definida anteriormente, semelhança essa que corresponde ao produto de uma homotetia por deslocamento (conjunto de translações e rotações). Assim, de acordo com a relação (2), temos:

$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{bY}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{bF(X)}}{\mathrm{a}}$ e pela relação (1), temos:

$\mathrm{y} = \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{b}}\right).\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ (3).

TEOREMA 1: Se A é a área limitada pela função F definida no intervalo de amplitude a (Figura 41) e B, a área limitada pela função f, semelhante à F, definida no intervalo de amplitude b, então $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Por definição de integral, temos:

$A = \int_c^d F(X)\, dX = \int_c^{c+a} F(X)\, dX$

E,

$B = \int_e^f f(x)\, dx = \int_e^{e+b} F\left(\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{b}}\right).\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\, .dx$ (Devido (3)).

Realizando a substituição de variável na expressão de B indicada abaixo:

$\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{b}} = u$, então, temos:

$dx = \frac{b}{\mathrm{a}}.du$, logo, para x = e, $u = \frac{ae}{\mathrm{b}}$, e para x = e+b, $u = \frac{ae}{\mathrm{b}} + a$. Assim, a integral B tomará a forma:

$$B = \int_e^{e+b} \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}.F\left(\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{b}}\right).dx = \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2.\int_{\frac{ae}{\mathrm{b}}}^{\frac{ae}{\mathrm{b}}+a} F(\mathrm{u}).du = \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2.\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{c}+a} F(\mathrm{u}).du = \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2.A$$ (Via definição e hipótese do Teorema 1).

Portanto:

$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2$. C.Q.D (COMO QUERIAMOS DEMONSTRAR)

TEOREMA 2: Sejam f_1 (x) e f_2 (x) funções contínuas semelhantes, no sentido da definição apresentada anteriormente e definidas em intervalos I e J de amplitude a e b, respectivamente. Se c_1 pertence a I e é tal que $f_1(c_1)$ é valor médio de f_1, então existe um único ponto (c_2, f_2 (c_2)) de f_2 correspondente a (c_1, f_1 (c_1)), c_2 pertencente a J, tal que f_2 (c_2) é valor médio de f_2.

DEMONSTRAÇÃO: Segundo o teorema 1, podemos escrever que:

B= $\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2 .A$, de modo que A e B representam as áreas sob as curvas f_1 e f_2, conforme a Figura 42.

Pelo teorema do valor médio, podemos escrever que:

$$A = \int_o^e f_1\ (x)dx = \ f_1(c_1).a$$

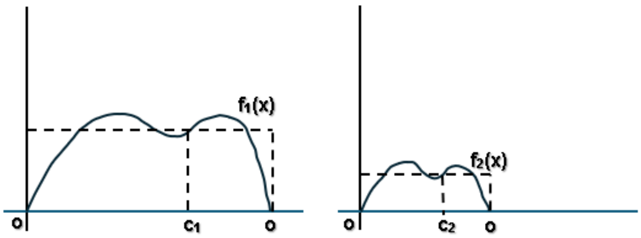
Sendo, como vimos acima,

B= $\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2 .A$, então:

B= $\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2 f_1(c_1).a = \frac{b^2}{a} f_1(c_1)$ (4).

Como cada ponto de f_1 (x) possui um único ponto correspondente em f_2 (x),

Figura 42 - Representação gráfica de f_1 (x) e f_2 (x)



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 7)

de acordo com a definição dada anteriormente (Figura 42), suponhamos que (c_2, f_2 (c_2)) seja o correspondente em f_2 do ponto (c_1, f_1(c_1)) de f_1, então:

$\frac{c_2}{c_1} = \frac{f_2(c_2)}{f_1(c_1)} = \frac{b}{a}$ ou $f_1(c_1) = \frac{a}{b} f_2(c_2)$, que substituindo em (4), resulta:

B= $\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)^2 .\frac{a}{b}.f_2(c_2) = f_2(c_2).b$

Sendo,

$B = \int_o^b f_2\ (x)dx$, então $B = \int_o^b f_2\ (x)dx = \ f_2(c_2).b$

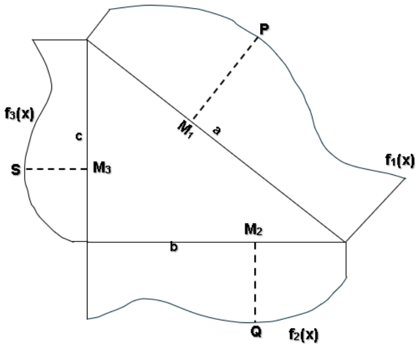
Provando assim que, $f_2(c_2)$ um valor médio de f_2. (C.Q.D)

<u>TEOREMA GENERALIZADO DE PITÁGORAS</u>

Em triângulo retângulo a área limitada por uma função integrável, definida sobre a hipotenusa, é igual a soma das áreas limitadas por suas funções semelhantes, definidas sobre os catetos (demonstraremos para o caso de funções continuas).

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ funções definidas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, respectivamente, como mostra a Figura 43.

Figura 43 - Funções integráveis construídas sobre os lados de um triângulo retângulo



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 8)

Sendo as funções contínuas e definidas sobre intervalos finitos, então elas possuem máximos f_1 (M_1), f_2 (M_2) e f_3 (M_3), respectivamente. Como as funções são, por hipótese, semelhantes no sentido definido por nós, consequentemente os pontos P, Q e S (Figura 43), são tais que:

$\frac{M_2}{M_1} = \frac{f_2 M_2}{f_1 M_1} = \frac{b}{\mathrm{a}}$; $\frac{M_3}{M_1} = \frac{f_3 M_3}{f_1 M_1} = \frac{c}{\mathrm{a}}$, e, portanto:

$f_2 M_2 = \frac{b}{\mathrm{a}} f_1 M_1$ (5)

$f_3 M_3 = \frac{c}{\mathrm{a}} f_1 M_1$ (6)

Sendo as áreas limitadas pelas funções f1, f2 e f3 designadas por A, B e C, respectivamente, então, de acordo com o teorema do valor médio, podemos escrever:

$A = \int_o^a f_1\,(x)dx = f_1(x_1).a$, onde 0 ≥ x_1 ≥ a (7)

$B = \int_o^b f_2\,(x)dx = f_2(x_2).b$, onde 0 ≥ x_2 ≥ b, portanto:

B = $\frac{b}{a}$ $f_1(x_1).b$ (segundo nossa definição de semelhança)

B = $\frac{b^2}{a} f_1(x_1)$ (8)

Sendo:

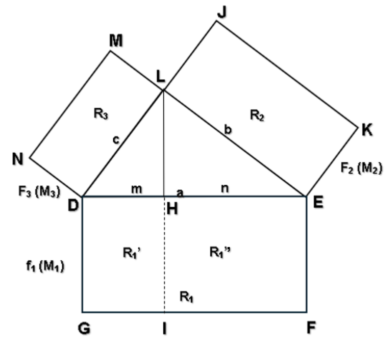
$$C = \int_o^c f_3\,(x)dx = f_3(x_3).c$$

Então pelo teorema (2):

C = $\frac{c}{a}$ $f_1(x_1).c$ ou C = $\frac{c^2}{a} f_1(x_1)$ (9)

Construamos agora sobre os lados a, b e c do triângulo retângulo, retângulos de alturas f_1 (M_1), f_2 (M_2) e f_3 (M_3), respectivamente, e designamos suas áreas por R_1, R_2 e R_3, como mostra a Figura 44.

Figura 44 - Retângulos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 10)

De acordo com a Figura 44, é possível escrever que:

$R_1 = a.\overline{DG} = a.f_1(M_1)$ (10)

$R_2 = b.\overline{EK} = b.f_2(M_2)$

$R_3 = c.\overline{HD} = c.f_3(M_3)$

De acordo com as relações (5) e (6), é válido:

$R_2 = \frac{b^2}{a} f_1 M_1$ (11)

E

$R_3 = \frac{b^2}{a} f_1 M_1$ (12)

Dividindo-se (7) por (10), (8) por (11) e (9) por (12), resulta em:

$$\frac{A}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(M_1)}; \frac{B}{R_2} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(M_1)} \; e \; \frac{C}{R_3} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(M_1)}$$

Ou

$$\frac{A}{R_1} = \frac{B}{R_2} = \frac{C}{R_3} \quad (13)$$

Tracemos agora, em sequência, a altura relativa à hipotenusa ($\overline{LH}$) e a prolonguemos até interceptar o lado $\overline{GF}$ do retângulo DEFG, no ponto I (Figura 44).

Sendo a área do retângulo GDHI, que representaremos por $R_1{}'$, dada por $R_1' = m \,.\, f_1(M_1)$.

Como as relações métricas em um triângulo retângulo permitem que escrevamos:

$c^2 = a.m$, então:

$R_1' = \frac{c^2}{a}\; m \,.\, f_1(M_1)$ e, segundo (12), resulta: $R_3 = R_1'$.

De maneira análoga, é possível provar que $R_2 = R_1''$, de modo que R_1'' representa a área do retângulo HEFI (Figura 44).

Com a luz dos argumentos, conclui-se que:

$R_2 + R_3 = R'_1 + R''_1 = R_1$ (14)

Utilizando a relação (13), obtém-se:

$\frac{B+C}{R_2+R_3} = \frac{B}{R_2} = \frac{C}{R_3} = \frac{A}{R_1}$, portanto $\frac{B+C}{R_2+R_3} = \frac{A}{R_1}$ e usando a relação (14), surge:

A = B + C (C.Q.D)

COROLÁRIO: No caso particular em que $f_1(\mathrm{x}) = a, f_2(\mathrm{x}) = b\ e\ f_3(\mathrm{x}) = c$, o teorema (3) permite escrever que:

$a^2 = b^2 + c^2$, o conhecido Teorema de Pitágoras.

Sendo assim, com a luz dos argumentos apresentados, conclui-se a exposição de um apanhado de extensões e generalizações intimamente relacionadas ao teorema de Pitágoras, que por sua vez, de alguma forma atribuem relevância ao trabalho que se desenvolve.

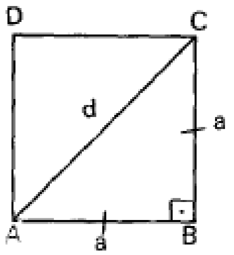
3.4 ALGUMAS APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras possibilita uma diversidade de aplicações, Dolce e Pompeo (1997) expõe algumas:

I. Diagonal do quadrado

Sendo o quadrado ABCD representado na Figura 45, de lados *a* e diagonal *d*, para calcular o valor de sua diagonal, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, logo: $d^2 = a^2 + a^2 \longrightarrow d^2 = 2a^2 \longrightarrow \mathbf{d = a\sqrt{2}}$.

Figura 45 - Quadrado ABCD



Fonte: Dolce e Pompeo (1997, p. 239)

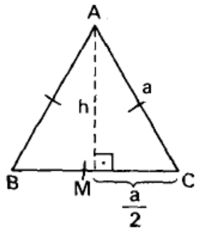
O mesmo procedimento poderia ser reproduzido com o triângulo ACD.

II. Triângulo equilátero (Altura)

Dado um triângulo equilátero ABC, de altura *h* e lados *a* como representa a Figura 46, sendo M o ponto médio do segmento BC, ficando evidente que o segmento AM = h, nesse sentido, ao se aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo AMC:

$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow \mathbf{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Figura 46 - Triângulo equilátero ABC



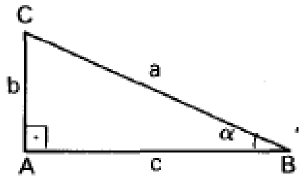
Fonte: Dolce e Pompeo (1997, p. 239)

O procedimento é valido para qualquer altura traçada no triângulo em questão.

III. Seno, cosseno e tangente (30°, 45º e 60º)

Dado um triângulo retângulo, cujo um de seus ângulos agudos é representado por α, de acordo com a Figura 47:

Figura 47 - Triângulo retângulo



Fonte: Dolce e Pompeo (1997, p. 240)

Então, se possibilita definir:

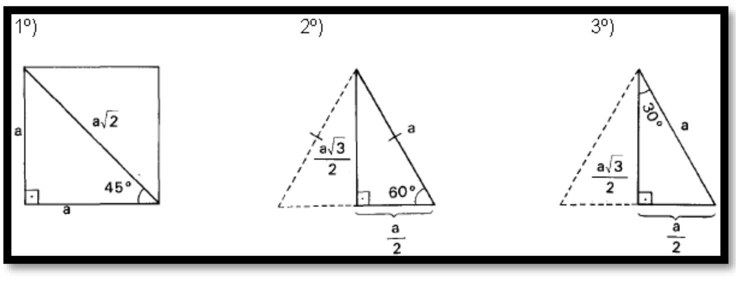
Sen α = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$, logo, **sen α =** $\mathbf{\frac{b}{a}}$

Cos α = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$, logo, **cos α =** $\boldsymbol{\frac{c}{a}}$

tg α = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{b}{c}$, logo, **tg α =** $\boldsymbol{\frac{b}{c}}$

Por conseguinte, fazendo uso dos valores anteriormente estabelecidos:

Figura 48 - Representação geométrica do Sen; Cos. e Tg de **α**



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (1997).

Sen 45° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \times \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a^2 2} = \frac{\sqrt{2}}{\mathbf{2}}$.

Cos 45° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \times \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a^2 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tg 45° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{a}{a} = 1$.

Sen 60° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cos 60° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

Tg 60° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{a} = .\sqrt{3}$.

Sen 30° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

Cos 30° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tg 30° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Dessa forma, se concretiza por intermédio do teorema de Pitágoras o desenvolvimento de valores que se manifestam com significativa frequência no estudo da trigonometria, comumente denominado por *ângulos notáveis*.

Tabela 1 - Ângulos notáveis

	30°	45°	60°
SEN	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COS	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TG	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autoria Própria (2023)

Posteriormente, a abordagem se direcionará ao conhecido último teorema de Fermat, que basicamente o teorema de Pitágoras se revela um caso partícular do teorema em questão, que expõe um enunciado simples descrito por Fermat, no entanto, com uma demonstração extremamente complexa que perdurou por cerca de 300 anos sem prova.

3.5 DE PITÁGORAS A FERMAT

De acordo com autores como Boyer (1974), Eves (2011) e Gundlach (1992), Pierre de Fermat (1601 – 1665) um “amante” da matemática, deixou algumas contribuições para a comunidade, ao exemplo da teoria dos números, que acarretou diversas conjecturas, dentre elas destaca-se a seguinte:

"Não existem inteiros positivos x, y, z, n, sendo n>2, de modo que $x^n + y^n = z^n$".

Tal conjectura, segundo Boyer (1974), Eves (2011) e Gundlach (1992), tornou-se muito notável e conhecida como "O último teorema de Fermat", Fermat enunciou o teorema nas margens de sua obra "Arithmetica de Diofanto", com a seguinte nota:

> Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência, ou em geral uma potência qualquer de duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu certamente achei uma prova admirável desse fato, mas a margem é demasiada estreita para contê-la.(Gundlach, 1992, p. 64).

Não há como se ter certeza se Fermat obtinha tal prova verdadeiramente, o que se tem conhecimento é que ele demonstrou para n = 4, posteriormente outros matemáticos demonstraram para alguns valores específicos, Euler apresentou para n = 3, melhorada ao decorrer do tempo por outros indivíduos, em meados de 1825 Legendre e Dirichlet provaram para n = 5, de forma independente, Kummer, um matemático de origem alemã avançou de forma significativa em 1843 (Gundlach, 1992).

O enunciado desenvolvido por Fermat instigou diversos matemáticos, e frustrou quanto a sua solução por no mínimo três séculos, porém, um jovem chamado Andrew Wiles se deparou com o teorema de Pitágoras e sua gama de ternos, no livro "O último problema" (E. T. Bell) que acabou por despertar a sua curiosidade (Singh 2002).

O teorema de Pitágoras valida a equação $a^2 + b^2 = c^2$, logo, existem números em que o seu quadrado é resultado da soma de dois outros quadrados, no entanto, no livro é abordada a mesma ideia para outros expoentes, por exemplo, $a^3 + b^3 = c^3$, parece ser uma tarefa impossível achar valores que validem a equação, ademais, quanto maior for o valor desse expoente, mais difícil ainda encontrar valores que a satisfaça, pois, como Fermat afirmou, não existiria solução para *n>2,*deixando assim, Wiles frustrado e furioso (Singh 2002).

Em meados de 1993, Andrew se encontravam no Instituto Isaac Newton, onde apresentou para o mundo, ou melhor, para um seleto grupo de matemáticos a sua trabalhosa demonstração do teorema de Fermat, após a conclusão, ele virou-se para o público presente é exclamou "acho que vou parar por aqui", após sete longos anos de trabalho árduo chegava ao fim de um grande mistério da matemática, muito embora, tal demonstração passaria ainda por rigorosa validação por um grupo de matemáticos (Singh 2002).

De acordo com Singh (2002), Andrew submetera seu trabalho à revista *Inventiones Mathematicae*, que corriqueiramente seleciona cerca de três avaliadores, porém, dada a relevância e complexidade do trabalho, nomeou seis avaliadores, o artigo foi divido em seis seções, com o intuito de facilitar a tarefa. Um dos avaliadores, Nick Katz, responsável pelo capítulo 3, notou um erro expressivo ao decorrer de suas leituras, o qual, Wiles não obtinha explicação.

Não necessariamente, o erro desqualifica o trabalho desenvolvido, porém, Wiles deveria esclarecer seus argumentos demonstrados. Só no ano seguinte (1994) ele conseguira, de forma definitiva, solucionar o erro encontrado, o trabalho foi novamente publicado no *Annals of Mathematics*, em maio de 1995, terminando assim, um dos grandes quebra-cabeças da humanidade, com uma grande contribuição para ramo da teoria dos números (Singh 2002).

Por fim, esta seção buscou consolidar aporte matemático e histórico suficiente para o desenvolvimento deste trabalho, a análise minuciosa incorporou fatos e pressupostos históricos sobre a vida e obra de Pitágoras, constata-se também, a construção da proposição pitagórica e algumas notáveis demonstrações do teorema, além de suas extensões e generalizações, para assim finalizar com o tema estritamente ao teorema, O último teorema de Fermat.

4. O TEOREMA DE PITÁGORAS NO CURRÍCULO NACIONAL

Este tópico tem como objetivo abordar os aspectos curriculares do ensino de matemática e do teorema de Pitágoras em documentos oficiais em diversos âmbitos educacionais, explanar e entender o que a BNCC e os PCN deliberam em seus documentos a respeito do ensino da temática como diretriz ou parâmetro atualmente.

4.1 DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS

É possível destacar dois principais documentos oficiais que norteiam a educação brasileira, um de caráter não normativo (Parâmetros Curriculares Nacionais) e um normativo (Base Nacional Comum Curricular), o objetivo em questão é identificar suas principais diretrizes de ensino e destrinchar em que momento esses e outros documentos abordam em seus textos o teorema de Pitágoras.

4.2 OS PARÂMENTOS CURRICULARES NACIONAIS

De acordo com Brasil (1997), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), buscam ser um referencial de qualidade no ensino fundamental do País, sua principal funcionalidade é orientação e a devida coerência nos investimentos que norteiam a educação do Brasil.

Tratando-se de organização, os PCN se distribuem em ciclos, cada um com duração de dois anos, o primeiro ciclo se refere a primeira e segunda série; o segundo, a terceira e quarta série, e assim segue sucessivamente para as demais séries do ensino fundamental. De acordo com Brasil (1998) as áreas que os PCN abordam são: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências Naturais, Educação Física, Arte e Língua Estrangeira; acredita-se que tais áreas do conhecimento possuem uma grande relevância no processo formativo do indivíduo, contemplando conteúdos que proporcionam relevância social (Brasil, 1998).

A respeito da matemática o Documento discorre que a área está presente na vida de todos, sendo necessária a compreensão de quantificar, calcular, localizar objetos no espaço, ler gráficos e realizar previsões, logo é fundamental o avanço cognitivo, superando o aspecto puramente mecânico, com a resolução de problemas se destacando no desenvolvimento de atividades em sala de aula. A matemática ultrapassa também diferentes culturas, logo, a adequação se faz indispensável no processo de ensino, incorporando ainda, recursos tecnológicos da comunicação (Brasil, 1998).

Nos PCN é exposto ainda que, para o cumprimento de seus propósitos em relação a matemática é viável:

> • incorporam o estudo dos recursos estatísticos constituindo um bloco de conteúdos denominado Tratamento de Informação;
> • indicam aspectos novos no estudo dos números e operações, privilegiando o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão de diferentes significados das operações;
> • propõem novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo;
> • enfatizam a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial;
> • destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações;
> • apresentam uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições;
> • recomendam o uso de calculadoras nas aulas de Matemática (Brasil, p. 60, 1998).

Referindo-se especificamente ao objeto matemático em questão é verificado sua presença dentro dos conteúdos do quarto ciclo, no tópico CONCEITOS E PROCEDIMENTOS, e o item *espaço e forma,* em seu último subitem se esclarece que: “Verif*icações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras. ”* (Brasil, p. 89, 1998).

Sugere-se a abordagem do Teorema de Pitágoras de uma maneira mais abrangente, infere-se que o objetivo e a construção da ideia da proposição, suas possibilidades e delimitações, são importantes também a devida aplicabilidade do teorema em situações cada vez mais próximas da realidade, sem fugir do rigor matemático necessário, por fim, é explorado a sua demonstração, que pode ser enriquecido por conteúdos já trabalhados, como a composição e manipulação de figuras planas.

É importante ressaltar, de acordo ainda com Brasil (1998), embora os alunos estejam a iniciar a manipulação com demonstrações, como a de Pitágoras, é relevante não abandonar as abordagens empíricas, pois, possibilitam a construção de conjecturas e ampliam o nível de compreensão dos conceitos.

4.3 A BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM

Conforme exposto em Brasil (2018), a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento de cunho normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua jornada pela educação básica. A BNCC é uma normativa de referência nacional, que visa alinhar os planejamentos educacionais de municípios, estados e do Distrito Federal, suas diretrizes buscam estabelecer aporte na formação dos professores, na elaboração dos conteúdos, nos critérios e métodos avaliativos e na adequação dos espaços de ensino (Brasil, 2018).

As aprendizagens essenciais estabelecidas na BNCC devem contribuir e assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais que incorporam o documento, para a BNCC competência é a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para solucionar problemas complexos do dia a dia, e o pleno exercício de cidadão e a atividade laboral (Brasil, 2018).

De acordo com argumentos estabelecidos, identifica-se o objeto de conhecimento em foco “Teorema de Pitágoras” citado de maneira direta, na etapa final do Ensino fundamental (Anos Finais), mais pontualmente no 9º ano, com a unidade temática GEOMETRIA.

Quadro 3 - Citação do T.P de acordo com unidade temática

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Geometria	• Relações métricas no triângulo retângulo. • Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.

Fonte: Brasil (2018)

Seguido de suas respectivas habilidades EF09MA13 e EF09MA14, elencadas no Quadro 4 a seguir:

Quadro 4 - Descrição das habilidades referentes ao T.P na BNCC

HABILIDADES	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: Brasil (2018)

Percebe-se que o Teorema de Pitágoras possua uma ampla aplicabilidade, que flutua entre diversas etapas do ensino e dos conteúdos matemáticos, é abordado de maneira muito específica e breve.

4.4 SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é realizado periodicamente a cada dois anos, desde 1990, possuindo como objetivo avaliar a qualidade, equidade e eficiência do País, nas diversas camadas governamentais, desenvolvendo assim, indicadores educacionais com fins comparativos dos dados e elaboração aprimorada de políticas públicas devidamente fundamentadas (Brasil, 2019).

Tendo em vista os dados coletados e discussões estabelecidas, a proposta se baseia em um sistema avaliativo para aferir a qualidade da educação por intermédio de Eixos: Equidade, Direitos Humanos e Cidadania, Ensino-Aprendizagem, Investimento, Atendimento Escolar, Gestão e Profissionais Docentes.

A matriz de referência preliminar do Saeb alinha-se as perspectivas da BNCC, entre outras Matrizes de relevância nacional, nesse sentido, a área de Matemática – assim como as demais áreas – é constituída pelo *Eixo do Conhecimento*, sendo utilizado as mesmas cinco unidades temáticas da BNCC (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) e o Eixo Cognitivo que imprime como base o agrupamento das competências do ensino de matemática presente na BNCC (Brasil, 2019).

O Teorema de Pitágoras localiza-se no eixo do conhecimento de Geometria, para os anos finais do ensino fundamental (9º ANO), sendo a habilidade 9G2.4, como indicado no Quadro 5.

Quadro 5 - Citação do T.P de acordo com o eixo de cognitivo

EIXOS COGNITIVOS		
EIXOS DO CONHECIMENTO	RESOLVER PROBLEMAS E ARGUMENTAR	
GEOMETRIA	9G2.4	Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras.

Fonte: Adaptado de Brasil (2019, p. 107)

O Saeb disponibiliza ademais, um relatório que ilustra a escala de proficiência de algumas disciplinas de acordo com resultados de anos anteriores, esse documento estipula possíveis níveis de entendimento dos alunos ao se projetarem as habilidades necessárias, com a existência de um nivelamento final e inicial, logo cada etapa (nível) é constituída por pontuação do desempenho. Cada nível indica o que se espera que o aluno esteja hábil de executar, caso sua pontuação seja maior do que determinado nível, infere-se que a probabilidade de sucesso com o item correspondente seja maior, a lógica é válida para pontuações menores.

O teorema de Pitágoras por sua vez, encontra-se em diferentes níveis de proficiência (nível 6 e 7) como indicado no Quadro 6, haja vista que um assunto pode ser abordado de diferentes maneiras, variando o grau de percepção dos alunos.

Quadro 6 - Citação do T.P de acordo com nível de proficiência do E.F

NÍVEL	DESCRIÇÃO DO NÍVEL
Nível 6: Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	ESPAÇO E FORMA Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos.
Nível 7: Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos.

Fonte: Adaptado de Brasil (2020, p. 25-26)

A título de informação, o teorema de Pitágoras é novamente abordado no 3º ano do ensino médio. O Quadro 7 apresenta especificamente os trechos referentes ao Teorema de Pitágoras no 3º ano do E.M.

Quadro 7 - Citação do T.P de acordo com nível de proficiência do E.M

NÍVEL	DESCRIÇÃO DO NÍVEL
Nível 6: Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	**ESPAÇO E FORMA:** Resolver problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico, a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura.
Nível 7: Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	**ESPAÇO E FORMA:** Determinar, com o uso do Teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico.
Nível 8: Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425	**ESPAÇO E FORMA:** Determinar uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras.

Fonte: Adaptado de Brasil (2020)

Verifica-se assim uma gradativa abordagem do teorema de Pitágoras, variando de ideias mais elementares a aplicações em diferentes perspectivas e temáticas, alinhadas a Base Nacional Curricular Comum, diretrizes anteriormente explanadas.

5. O ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE EXPERIMENTAL

O ensino de matemática nas escolas sempre imprimiu um caráter de grande relevância, sendo a disciplina um fator de destaque nos currículos, tal fato gerou algumas consequências dentro do meio acadêmico, discussões e possibilidades acabaram por serem cada vez mais presentes em encontros, seminários e outros tipos de eventos com o mesmo intuito: buscar soluções para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, Sá (2009) pontua a importância da estratégia metodológica do ensino por atividades aliado a outros saberes na Educação Matemática.

Sá (2009) destaca, para que o indivíduo desenvolva suas capacidades como ser humano e cidadão funcional, podendo realizar suas necessidades do cotidiano de maneira satisfatória e independente, é indispensável aplicações metodológicas que priorizem a ação docente dos professores, com um ensino direcionado na ordem do concreto e partindo para abstração, desenvolvendo a perspectiva de aluno ativo e participativo no seu processo de aprendizagem, sendo um agente questionador quando necessário.

Cabe ao professor proporcionar ao aluno situações favoráveis à descoberta de novos conhecimentos, ao levantamento de hipóteses e a exploração e experimentação de ideias, logo, o caminho esperado que o aluno trilhe é o da investigação, que cheguem a questionamentos de “que” e “porque” se definiu aquela estratégia de solução para cada problemática de forma específica, atribuindo ao aluno independência cognitiva (Sá, 2009).

Em relação ao papel das escolas, Sá (2009) define como importante a oferta de plenas condições de implementação do ensino por atividades, porém, não de forma exclusiva, ou seja, o êxito das práticas são mais dependentes de um devido planejamento por parte dos professores e uma ação dedicada com envolvimento pelos alunos, seguindo essa lógica, o professor deve acreditar nas medidas de trabalho a serem implementadas, pois, motivado por tal pensamento, certamente o processo de adaptação com possíveis déficits ou carências encontradas será mais palpável.

Tendo em vista as constantes mudanças contemporâneas que acabam for influenciar o ambiente escolar e o perfil dos alunos, Sá (2009) ressalta a importância da autocrítica na perspectiva dos docentes, que devem sempre reavaliar suas práticas metodológicas, **o que** e **como** devem ensinar e estar ciente da presença massiva dos aparatos tecnológicos, para que assim possa conduzir o aluno aos objetivos e reduzir o máximo possível às distrações (Sá, 2009).

Consequentemente, para que esses aperfeiçoamentos ocorram o professor deve buscar durante toda sua prática docente, meios de aprimorar o processo de aprendizagem do aluno, emerge-se então a relevância do professor em dar continuidade em sua formação e desenvolver a troca de experiência com seus pares, abrindo mão por muitas vezes de suas zonas de conforto, para assim, testar novas estratégias metodológicas. Fica evidente assim o quão é necessária à entrega do professor e sua constante movimentação acadêmica, para proporcionar melhores condições de aprendizagem (Sá, 2009).

O ensino da matemática baseado na estratégia metodológica de atividades trabalha com a possiblidade de construção dos conhecimentos a todo instante, sendo cada etapa do processo pertinente para um objetivo final e prováveis discussões durante o percurso pedagógico. Nesse sentido, torna-se crucial a adequada elaboração do professor dessas atividades, além das orientações de forma correta e assertiva, de modo que, essas medidas acarretam impacto direto no processo de aprendizado do aluno (Sá, 2009).

Com a luz dos argumentos, Sá (2009) apresenta uma sugestão de elementos essenciais que devem marcar presença na elaboração de atividades que seguem tal viés metodológico:

> As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> Toda atividade deve procurar conduzir o aluno à construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
> As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (Sá, 2009, p. 18).

Ademais, Sá (2019) apresenta algumas características do ensino de matemática por atividades, o que acaba por justificar a metodologia como uma tendência na Educação Matemática, e consequentemente distingue-a das outras.

1) É diretivo;

2) Tem compromisso com o conteúdo;

3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;

4) É estruturado;

5) É sequencial;

6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas;

7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes;

8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade;

9) Não dispensa a participação do professor;

10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos;

11) É iterativo entre estudantes e professor (Sá, 2019, p. 16-17).

Sá (2019) destaca ainda forma de organização do ensino por atividades. O objetivo da estratégia metodológica se divide em duas possibilidades: **Conceituação** e **Redescoberta**.

As atividades por conceituação se caracterizam em desenvolver no aluno a percepção de diferentes situações ou objetos matemáticos; por outro lado, as atividades de redescoberta se direcionam a exploração de objetos matemáticos, com a finalidade de descobrir relações ou propriedades (Sá, 2019).

De modo transversal, as atividades podem se destrinchar por d*emonstração* ou *experimentação*. Na demonstração o professor se responsabiliza pelas atitudes iniciais, e os alunos apenas registram suas observações, para posteriormente discutirem os resultados e assim alcançar o objetivo da atividade proposta, normalmente essa estratégia é utilizada em decorrência de limitações de manipulação com os materiais; na experimentação o professor trata de desenvolver a atividade, na qual será executada pelos alunos, estratégia que atribui mais autonomia no aprendizado do indivíduo. Vale salientar que ambos os modos são aplicáveis na conceituação e na redescoberta. (Sá, 2019).

De acordo com Sá (2019), uma aula desenvolvida através dos moldes do ensino por atividade de Conceituação ou Redescoberta se organiza em momentos, que são os seguintes:

1. Organização – preferencialmente, divide-se em grupos de 2 a 4 alunos, podendo ocorrer individualmente, mas não é recomendado, pois não ocorre a troca de ideias. O professor deve orientar o processo como um todo, sem empregar imposições.

2. Apresentação – o professor trata de distribuir os materiais necessários para atividades, juntamente com o roteiro; sugere-se que o docente separe os materiais em kits, com o objetivo de poupar tempo.

3. Execução – esse é o momento da ação! Aqui o professor manipula os materiais, realiza cálculos e/ou medições, além de promover comparações. Consequentemente, após as ações do professor, os alunos deveram trabalhar de maneira autônoma, cabendo ao professor apenas em orientar os educandos e sanar suas dúvidas. A concentração é primordial, sendo necessário seguir as orientações presentes no roteiro disponibilizado, as interferências devem ser mínimas, apenas para garantir o andamento da atividade.

4. Registro – finalizado a execução, os alunos deverão sistematizar as informações adquiridas, sendo o professor responsável em verificar essa etapa, para minimizar possíveis “ruídos” de informação e dificultem o aprendizado.

5. Análise – nessa etapa, projeta-se que os alunos desenvolvam uma análise das informações e consigam perceber as características presentes no objeto matemático em questão, sendo esse o primeiro resquício de conceituação.

6. Institucionalização – esse momento é marcado pela formalização, o professor em decorrências das observações descritas, apresenta o conceito ou definição planejada como objetivo. É importante que o docente solicite as considerações de cada turma e destaca características sobressalentes do objeto matemático, além de traçar paralelos históricos, que possibilitam a humanização do conhecimento.

Finalizado os momentos supracitados, conclui-se a atividade por completo, e como forma complementar, Sá (2019) indica a proposta de um conjunto de questão que se relacionem com o tópico abordado, propiciando um maior aprofundamento e fortalecimento do aprendizado adquirido.

Sá (2019) destaca também, o desenvolvimento do *planejamento de uma atividade de conceituação e redescoberta,* sendo os momentos que a compõe indispensáveis para o melhor desempenho do processo:

a) Determinação – momento de seleção da definição ou conceito a ser trabalhado, sendo importante uma determinação prévia, para evitar improvisos e modificações.

b) Construção do objetivo – momento em que o professor deve elaborar o objetivo da atividade a ser proposta, ressalta-se que essa descrição não pode explicitar o conceito a ser institucionalizado, para não influenciar o objetivo final e o processo a ser construindo.

c) Elaboração do procedimento – nesse momento o professor precisa desenvolver um caminho ativo, ou seja, uma estratégia que após ser finalizada seja possível identificar características ou regularidades pertinentes ao conceito planejado, o professor necessita elaborar a estratégia de maneira minuciosa para evitar a incorporação de conceitos inadequados.

d) Seleção do material – aqui se torna crucial a elaboração da atividade por completo, pois, o docente listará todos os materiais necessários para o pleno andamento da atividade, logo, o conhecimento sobre todas as etapas já deve permanecer claro.

e) Elaboração do espaço de registro – o momento é adequado para definir um espaço de registro das informações observadas, além das informações pertinentes ao objeto matemático, é interessante reservar um espaço para outros tipos de observações.

f) Previsão das observações – nesse momento, cabe ao professor projetar possíveis observações que podem aparecer nos espaços registros, podem variar entre observações válidas ou não válidas.

g) Previsão de institucionalização – o momento em questão é pertinente para que o docente apresente o modo de trabalho do conceito estipulado pela atividade, tendo em mente de como vai conectar a formalização do objeto matemático e as observações registradas pelos alunos, independente se são válidas ou não, logo, o professor precisa projetar o maior número de construção possível.

h) Elaboração do roteiro – nesse momento o professor se compromete a desenvolver um roteiro que integre as seguintes informações básicas: Título, Objetivo, Material, Procedimento, espaço de registro, espaço de observação e espaço de conclusão, sendo aconselhável a não disponibilidade de linhas para transcrição das informações, visando o estimulo a autonomia de escrita do aluno e não se limitar a um número imposto.

i) Verificação – o momento é pertinente para investigar os processos da atividade por completo, se todos os momentos estão de acordo com o objetivo e segue uma lógica estabelecida, o professor deve verificar se a construção das etapas possibilita a observação das características esperadas do objeto matemático, o processo é válido para os materiais que serão utilizados, pois, caso exista alguma incoerência, o professor precisa realizar as correções.

j) Elaboração do desafio – este momento se faz presente de maneira específica nas atividades por redescoberta, o professor, através de uma questão solicita aos alunos a busca por relações registradas logo após a sistematização.

Em decorrência do que Sá (2020) expõe sobre os elementos funcionais de uma atividade, com objetivo de distinguir a metodologia do ensino por atividade de outras tendências na Educação Matemática, visto que, a estratégia se caracteriza por apresentar aulas via tarefas experimentais organizadas e planejadas pelos docentes para proporcionar ao aluno um conhecimento matemático específico, o que se denominava apenas como ensino por atividades, agora se determina como ensino por atividades experimentais.

Diante do exposto a respeito do ensino de matemática por atividades experimentais, apresenta-se a seguir uma proposta de sequência evolvendo o teorema de Pitágoras e temáticas interligadas ao objeto, composta por sete atividades, elaboradas de acordo com as características e momentos descritos anteriormente.

6. PROPOSTA DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Esta sequência de Ensino via Atividades Experimentais é composta por 7 propostas de abordagem, que incidem sobre o objeto matemático tema deste Produto Educacional, o teorema de Pitágoras. O público alvo se direciona a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II.

Os conteúdos trabalhados visam desenvolver a construção e formalização de particularidades acerca da proposição pitagórica, que estão dispostos na seguinte ordem: soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, classificação de triângulos em relação aos seus ângulos e lados, definição e generalização do teorema e ternos pitagóricos.

Cada atividade explora objetivos diferentes, possibilitando sua aplicação individualizada, porém, para o pleno desenvolvimento da sequência, orienta-se que as atividades sejam apresentadas de forma ordenada. Logo, seguindo a lógica, ao aplicar as Atividades Experimentais em uma turma do ensino regular, o professor deve dividir a turma em grupos de no mínimo dois alunos e no máximo quatro alunos.

- ✓ **ATIVIDADE 1**

A primeira atividade referente a sequência tem como objetivo conceituar uma condição de existência de um triângulo qualquer, que a soma entre seus três ângulos é igual a 180º. A partir da atividade projeta-se que o aluno observe o conceito e internalize que independente do contexto a propriedade é sempre válida.

Para o desenvolvimento correto da proposta, o aluno deverá preencher o quadro de atividade disposto, acompanhado do Quadro de triângulos 6 (ANEXO F), observando a existência de 10 triângulos distintos, para cada um deles o indivíduo deve nomear os seus vértices por A, B ou C, sem repetição, em seguida, completar o quadro de atividade com as medidas indicadas. O último procedimento para cada um dos triângulos é somar o valor dos três ângulos, resultando assim, no ângulo de 180º.

O professor, nesse sentido, tem a função de institucionalizar a observação desejada, enfatizando que se trata de uma condição de existência para todo e qualquer triângulo.

Título: A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Objetivo: Descobrir uma propriedade referente a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Material: Roteiro de atividade, Quadro de triângulos, lápis/caneta, régua.

Procedimentos:

- Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 6, denomine seus ângulos, sem repetição, por A, B ou C.

Com as informações obtidas, preencha o quadro de atividade:

TRIÂNGULOS	MEDIDA DO ÂNGULO A	MEDIDA DO ÂNGULO B	MEDIDA DO ÂNGULO C	SOMA ENTRE OS ÂNGULOS (A+B+C)
01				
02				
03				
04				
05				
06				
07				
08				
09				
10				

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÃO:

É de conhecimento comum que o desenvolvimento de cada atividade é subjetivo, podendo desencadear diversas possiblidades, projeta-se assim que, cada uma das atividades seja suficientemente necessária para a devida conceituação ou redescoberta dos objetivos estipulados, porém, as dificuldades fazem parte da realidade do processo de ensino e aprendizagem, dessa forma, ao fim de cada atividade experimental se propõe um quadro de previsões com conclusões ou observações que os alunos podem tomar nota.

Segue no Quadro 8 as previsões para atividade experimental 1:

Quadro 8 - Previsões atividade 1

CLASSIFICAÇÃO	**OBSERVAÇÃO**
Válida e desejada	• A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º.
Válida e não desejada	• Um triângulo não pode conter dois ângulos de 90º.
Inválida e não desejada	• Existem triângulos com a soma dos ângulos internos diferentes de 180º. • A soma entre três ângulos quaisquer é sempre 180º.
Não formulada	• Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	• Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2026)

✓ **ATIVIDADE 2**

Esta atividade experimental tem como finalidade conceituar os tipos de triângulos existentes, considerando as medidas de seus lados (equilátero, isósceles e escaleno). O indivíduo deverá, com o auxílio de uma régua, realizar as medições dos lados de cada triângulo (Quadro de triângulos 1 – ANEXO A), observar as variações possíveis e categorizar dentro das 3 possiblidades disposta no quadro de atividade, recomenda-se ademais, que o professor auxilie o aluno no registro das aferições, a depender da disponibilidade de material, é recomendado a indicação da medida na proximidade de cada aresta. Consequentemente, após o procedimento se torna possível classifica-las em decorrência de características especificas.

Título: CLASSIFICANDO TRIÂNGULOS (PARTE 1)

Objetivo: Conceituar os tipos de triângulos de acordo com seus lados.

Material: Roteiro de atividade, Quadro de triângulos, lápis/caneta, régua.

Procedimento:

- Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 1, determine com auxílio de uma régua a medida de cada lado.
- Em seguida, marque com um X entre as três opções do Quadro de atividade abaixo a que melhor caracteriza cada triângulo.

Com as informações obtidas, preencha o quadro de atividade:

TRIÂNGULOS	TODOS OS LADOS COM MEDIDAS DIFERENTES	DOIS LADOS DE MESMA MEDIDA	TODOS OS LADOS COM MEDIDAS IGUAIS
01			
02			
03			
04			
05			
06			
07			
08			
09			
10			

OBSERVAÇÕES:

Após a aplicação da atividade, cabe ao professor institucionalizar o conhecimento construído pelo aluno, esse momento simboliza a “exclamação” diante de tudo aquilo que foi observado ou concluído. O professor tem a autonomia de apresentar sua própria configuração de institucionalização, se utilizando dos mais variados materiais, toda via, fica como sugestão o balão de “INFORMAÇÃO”, sendo presente apenas no material do professor.

INFORMAÇÃO!

Um triângulo que possui as medidas de **todos os três lados iguais** é definido como TRIÂNGULO EQUILÁTERO.

Um triângulo que possui as medidas de **dois de seus lados iguais** é definido como TRIÂNGULO ISÓSCELES.

Um triângulo que possui as medidas **todos os seus lados** diferentes é definido como TRIÂNGULOS ESCALENO.

Segue no Quadro 9 as previsões para atividade experimental 2:

Quadro 9 - Previsões atividade 2

CLASSIFICAÇÃO	**OBSERVAÇÃO**
Válida e desejada	• Triângulos que possuem as medidas de todos os lados iguais são classificados como equiláteros. • Triângulos que possuem as medidas de dois lados iguais são classificados como isósceles. • Triângulos que possuem as medidas de todos os lados diferentes são classificados como escalenos.
Válida e não desejada	• Todo triângulo equilátero é isósceles.
Inválida e não desejada	• Todo triângulo isósceles é equilátero.
Não formulada	• Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	• Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2026)

✓ **ATIVIDADE 3**

A atividade tem como objetivo conceituar os tipos de triângulos de acordo com as medidas de seus ângulos internos, classificando-os em três tipos (acutângulo, obtusângulo e retângulo). Os procedimentos para o desenvolvimento da atividade são semelhantes aos descritos na atividade 2, porém, o foco agora está na medição dos ângulos, logo, o aluno deverá utilizar o transferidor como ferramenta, a partir dele aferir os ângulos internos de cada triângulo composto no respectivo Quadro de triângulos 2 (ANEXO B), e enquadrando cada um dentro de três possiblidades que os caracteriza.

O professor deve estar com a atenção redobrada no momento da aferição dos ângulos, para auxiliar os alunos na devida utilização do transferidor. Diferentemente da régua a ferramenta é pouco aplicada em sala de aula, dessa maneira, visando a redução de resultados não desejados, indica-se que o educador realize a intervenção adequadamente.

Título: CLASSIFICANDO TRIÂNGULOS (PARTE 2)

Objetivo: Conceituar os tipos de triângulos de acordo com seus ângulos.

Material: Roteiro de atividade, Quadro de triângulos, lápis/caneta, transferidor.

Procedimento:

- Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 2, determine com auxílio do transferidor a medida de cada ângulo.
- Em seguida, marque com um X entre as três opções do Quadro de atividade abaixo a que melhor caracteriza cada triângulo.

Com as informações obtidas, preencha o quadro de atividade:

TRIÂNGULOS	TODOS OS ANGULOS MENORES QUE 90º	UM ÂNGULO MAIOR QUE 90º	UM ÂNGULO DE 90º
01			
02			
03			
04			
05			
06			
07			
08			
09			
10			

OBSERVAÇÕES:

INFORMAÇÃO!

Um triângulo que possui **todos os três ângulos agudos** (menores que 90°) é definido como TRIÂNGULO ACUTÂNGULO.

Um triângulo que possui **um ângulo obtuso** (maior que 90° e menor que 180°) é definido como TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO.

Um triângulo que possui **um ângulo reto** (exatamente 90°) é definido como TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Segue no Quadro 10 as previsões para atividade experimental 3:

Quadro 10 - Previsões atividade 3

CLASSIFICAÇÃO	**OBSERVAÇÃO**
Válida e desejada	• Triângulos que possuem todos os ângulos internos menores que 60º são classificados como acutângulos. • Triângulos que possuem um ângulo interno maior que 90º e menor que 180º são classificados como obtusângulos. • Triângulos que possuem um ângulo interno igual a 90º são classificados como retângulos.
Válida e não desejada	• Triângulos que possuem um ângulo interno "aberto" são classificados como obtusângulos. • Triângulos que possuem todos os ângulos internos "fechados" são classificados como acutângulos. • Triângulos que possuem um ângulo interno representados por um quadrado são retângulos.
Inválida e não desejada	• Triângulos "pequenos" são classificados acutângulos. • Triângulos "grandes" são classificados obtusângulos. • Triângulos que possuem ângulo interno em formato de "L" são classificados como retângulos.
Não formulada	• Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	• Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2026)

Em decorrência do exposto na Atividade experimental (conceituação) 3 sobre a classificação dos triângulos de acordo com seus ângulos internos, a Atividade de aprofundamento 1, tem por finalidade aperfeiçoar e introduzir, através de 11 questões selecionadas, outras perspectivas sobre o objeto matemático estudado.

Logo, com a proposta, projeta-se para os alunos a exposição de temáticas que divergem da linearidade de aulas tradicionais, com pouca possibilidade de autonomia no ensino, e a promoção de didáticas mais dinâmicas e exploratórias.

ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO 1

1) Um triângulo possui ângulos de 30°, 60° e 90°. Qual é a sua classificação quanto aos ângulos?

2) Se um triângulo tem ângulos de 100°, 40° e 40°, como ele é classificado em relação aos seus ângulos?

3) Um triângulo equilátero possui todos os ângulos iguais. Qual é a classificação angular de um triângulo equilátero?

4) Um triângulo isósceles pode ser acutângulo? Justifique com um exemplo de medidas de ângulos.

5) É possível que um triângulo tenha dois ângulos obtusos? Por quê?

6) É possível que um triângulo tenha dois ângulos retos? Por quê?

7) Um triângulo pode ser ao mesmo tempo, retângulo e acutângulo? Por quê?

8) Um triângulo pode ser ao mesmo tempo, obtusângulo e acutângulo? Por quê?

9) Um poste de luz forma um ângulo de 90° com o solo. Se um cabo de sustentação é preso ao topo do poste e ao solo, que tipo de triângulo é formado pelo poste, o solo e o cabo?

10) Em um jogo de bilhar, uma bola é lançada e atinge uma das tabelas formando um triângulo com a tabela e sua trajetória. Se um dos ângulos desse triângulo é de 110°, qual a classificação angular desse triângulo?

11) Se um triângulo tem um ângulo de 60° e outro de 70°, qual é a medida do terceiro ângulo e qual a classificação angular desse triângulo?

- ✓ **ATIVIDADE 4**

Para a Atividade, projeta-se que o aluno através da construção de uma diversidade de triângulos (ANEXO C) observe ao final o conceito de triângulos retângulos e suas particularidades, dentre elas a denominação específica de seus lados (catetos e hipotenusa).

A atividade introduz o aluno nas primeiras definições do Teorema de Pitágoras, que corresponde na determinação do seu maior lado como hipotenusa e a relação com o ângulo de 90 graus, ademais, a formação do ângulo reto por dois segmentos intitulados de catetos. Formando assim os elementos primários da proposição.

Título: OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivo: Conceituar os lados de um triângulo retângulo.

Material: Roteiro de atividade, Quadro de triângulos, lápis ou caneta e régua (opcional).

Procedimento: Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 3;

- Identifique o ângulo reto.
- Identifique o lado oposto ao ângulo reto.
- Identifique os lados que formam o ângulo reto.

Com as informações obtidas, preencha o quadro de atividade:

TRIÂNGULO	VÉRTICE DO ÂNGULO RETO	LADO OPOSTO AO ÂNGULO RETO	LADOS QUE FORMAM O ÂNGULO RETO
01			
02			
03			
04			
05			
06			
07			
08			
09			
10			

OBSERVAÇÕES:

INFORMAÇÃO!

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são atribuídos de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é denominado por **HIPOTENUSA**. Os lados que formam o ângulo reto são denominados como **CATETOS**.

Segue no Quadro 11 as previsões para atividade experimental 4:

Quadro 11 - Previsões atividade 4

CLASSIFICAÇÃO	**OBSERVAÇÃO**
Válida e desejada	• A hipotenusa é o maior lado. • Os catetos são menores que a hipotenusa. • A hipotenusa sempre está à frente do ângulo reto. • Os catetos formam o ângulo reto.
Válida e não desejada	• Tem dois lados pequenos e um grande.
Inválida e não desejada	• A soma dos catetos é igual a hipotenusa. • Os catetos têm a mesma medida sempre. • Atribuir o lado declinado sempre como hipotenusa.
Não formulada	• Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	• Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2026)

A Atividade de aprofundamento visa reforçar e internalizar os elementos apresentados na atividade 4 sobre triângulos retangulares, com a disposição de questões que abordem a temática e viabilizem perspectivas distintas, a proposta se caracteriza como um momento introdutório para a definição do Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO 2

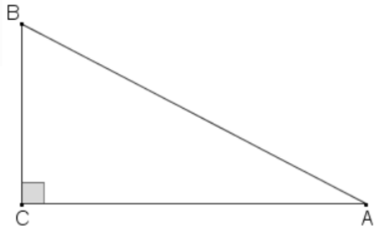
1) Em um triângulo retângulo, como é chamado o lado oposto ao ângulo de 90 graus?

2) Quais são os nomes dos dois lados que formam o ângulo reto em um triângulo retângulo?

3) Observe o triângulo retângulo ABC abaixo (assuma que o ângulo em C é ângulo reto).

a) Identifique qual lado é a **hipotenusa**.

b) Identifique quais lados são os **catetos**.



4) Complete a frase: Em um triângulo retângulo, o lado que está **oposto** ao ângulo reto é sempre a ___________, e é o lado mais ___________ do triângulo.

5) Considere um triângulo retângulo DEF, onde o lado DE é o mais longo.

a) Qual dos vértices (D, E ou F) deve ser o ângulo reto? Por quê?

b) Quais são os catetos neste triângulo?

6) Se um pedaço de madeira é apoiado em uma parede, formando um triângulo retângulo com o chão, qual parte desse "triângulo" imaginário seria a hipotenusa? E quais seriam os catetos?

7) Todos os triângulos possuem catetos e hipotenusa? Por quê?

8) Qual é a principal diferença de **posição** entre a hipotenusa e os catetos em relação ao ângulo reto de um triângulo retângulo?

9) É possível que um cateto seja o lado mais longo de um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.

10) Imagine um escorregador em um parque. A parte que você desliza forma a hipotenusa de um triângulo retângulo com o chão e a estrutura vertical. Se a altura da estrutura vertical é um cateto, qual seria o outro cateto?

✓ **ATIVIDADE 5**

Para a atividade 5 os participantes deverão preencher o Quadro de triângulos 4 (ANEXO D) com os dados corretamente, nesse sentido, projeta-se que eles observem e concluam a ideia do Teorema de Pitágoras, ou seja, dado um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos.

É possível que os alunos observem ainda que, quando o triângulo for obtuso, o quadrado do maior lado será maior que a soma dos quadrados dos lados remanescentes, seguindo a mesma lógica, caso o triângulo seja agudo, o quadrado do maior lado, será menor que a soma dos quadros dos outros lados restantes. Portanto, pretende-se que o aluno desenvolva a percepção do comportamento de triângulos na relação direta entre seus ângulos e seus lados.

Título: TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivo: Descobrir uma relação entre os tipos de triângulos e os seus lados.

Material: roteiro da atividade, quadro de triângulos, lápis ou caneta.

Procedimentos: Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 4;

- Identifique o tipo de acordo com seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo).
- Identifique o lado de maior medida por **a**;
- Identifique o segundo maior lado por **b**;
- Identifique o menor lado por **c**;
- Eleve ao quadrado cada lado identificado.

Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade:

Triângulo	Tipo de triângulo	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	Qual é a relação entre a^2 e $b^2 + c^2$?		
						MENOR	MAIOR	IGUAL
01								
02								
03								
04								
05								
06								
07								
08								
09								
10								
11								
12								

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÃO:

Segue no Quadro 12 as previsões para atividade experimental 5:

Quadro 12 - Previsões atividade 5

CLASSIFICAÇÃO	OBSERVAÇÃO
Válida e desejada	Dado um triângulo retângulo, a^2 é igual soma entre b^2 e c^2. Dado um triângulo obtusângulo, a^2 é maior que a soma entre b^2 e c^2. Dado um triângulo acutângulo, a^2 é menor que soma entre b^2 e c^2.
Válida e não desejada	Os valores de a^2 são maiores que b^2 e c^2.
Inválida e não desejada	Os valores de a^2 sempre são maiores que b^2 e c^2.
Não formulada	Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2024)

A atividade de aprofundamento 3, oportunizará aos alunos o exercício da prática do que se internalizou com a atividade 5, além de refinar seus métodos de resolução e verificar possíveis variáveis em relação ao teorema de Pitágoras. As situações são apresentadas de forma contextualizada, no ímpeto de aproximar o ensino do objeto matemático com sua realidade, atribuindo funcionalidade ao aprendizado matemático.

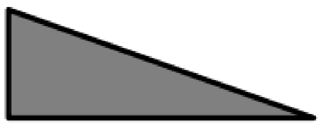
ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO 3

1)Entre as possibilidades de lados para um triângulo, a única que NÃO forma um triângulo retângulo é a de lados:

a) 3, 4 e 5. b) 6, 8 e 10. c) 5, 12 e 13. d) 6, 7 e 10. e) 6, 7 e 10.

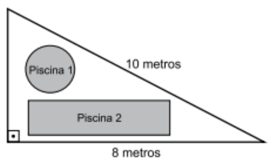
2)Sabe-se que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo igual a 50 cm e a altura relativa a ela mede 24 cm. Logo, a medida do menor cateto desse triângulo retângulo é igual a?

3)A imagem a seguir ilustra um triângulo retângulo cujos dois lados maiores medem respectivamente 17 cm e 15 cm.



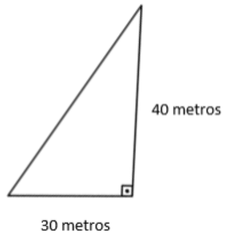
É correto afirmar que o lado menor do triângulo é igual a?

4)O setor das piscinas de uma escola, é delimitado por um espaço na forma de um triângulo retângulo com dimensões apresentadas na figura a seguir:

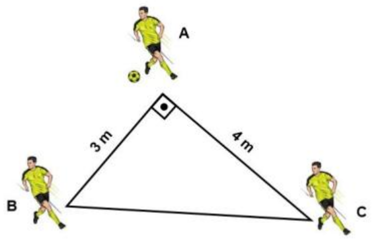


Este setor será totalmente protegido por uma cerca, cujo preço do metro linear é R$ 90,00. Desse modo, para cercar todo o setor triangular apresentado, o custo total será de?

5)João gosta de caminhar em uma quadra triangular (conforme figura abaixo) de seu bairro. Quantas voltas ele precisa dar nessa quadra para caminhar 3km?

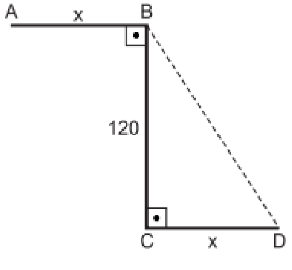


6)Em uma jogada ensaiada o Jogador A passa a bola para o jogador B que passa para o jogador C.



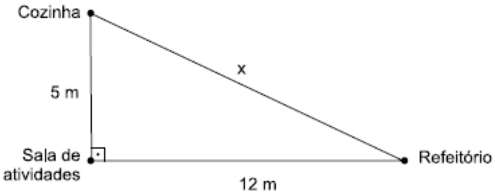
Considerando que a trajetória da bola é linear e eles estão parados em seus lugares, qual é o total da distância percorrida pela bola nessa jogada?

7)Para ir do ponto A até o ponto D, seguindo o trajeto indicado em negrito na figura, em que as distâncias são dadas em metros, Gonçalo percorre um total de 300m.



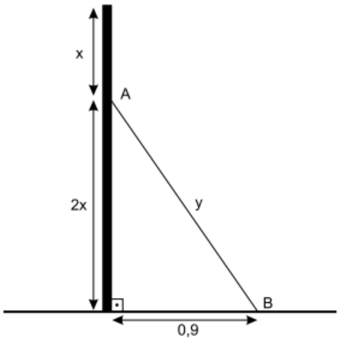
É correto afirmar que, se Gonçalo caminhasse do ponto A até o ponto B, e do ponto B diretamente ao ponto D pelo trajeto indicado na figura pela linha pontilhada, ele iria percorrer um total de?

8)O centro comunitário onde Ana é voluntária está em reformas e a passagem direta da cozinha para o refeitório foi interditada. Assim, para servir no refeitório as refeições feitas na cozinha, ela deverá passar pela sala de atividades.



Dessa maneira, o trajeto ficará maior em quantos metros?

9)Uma barra metálica retilínea tem uma das extremidades posicionada no solo (ponto B) e a outra extremidade apoiada em um muro (ponto A), conforme mostra a figura, cujas dimensões estão indicadas em metros.



Se o muro tem 1,8 m de altura, então o comprimento da barra metálica é igual a?

10)A figura seguinte mostra o cruzamento de algumas avenidas de uma cidade, onde as medidas estão em km.

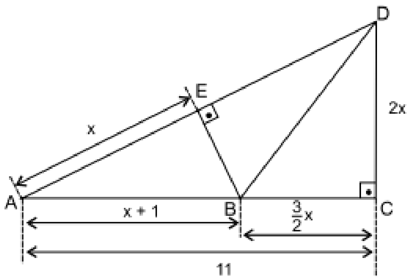


Figura fora de escala

Um motorista que percorrer os trechos $\overline{AE}+\overline{EB}+\overline{BD}$ terá percorrido um total de?

- ✓ **ATIVIDADE 6**

A atividade experimental 6 tem como objetivo apresentar a relação do Teorema de Pitágoras com áreas de polígonos regulares, de modo que, sejam semelhantes entre si e formados a partir dos lados de um triângulo retângulo, o aluno ao observar cada construção no Quadro de triângulos 5 (ANEXO E) e somar as áreas descritas, deverá concluir que a soma das áreas dos polígonos formados a partir dos catetos é igual a área do polígono formado a partir da hipotenusa.

Dessa maneira, o aluno obtém um primeiro contato com o conceito de Generalização da proposição Pitagórica. Comumente trata-se de um conceito pouco trabalhado ao se abordar a temática e de forma limitada apenas a quadrados.

Logo, tendo em vista possíveis dificuldades que o aluno pode enfrentar na absorção do conteúdo, a atividade experimental pretende facilitar a construção da ideia previamente estabelecida.

Título: O TEOREMA DE PITÁGORAS E ÁREA DE POLÍGONOS

Objetivo: Descobrir uma relação entre o teorema de Pitágoras e os polígonos formados a partir dos lados do triângulo retângulo.

Material: roteiro da atividade, quadro de triângulos, lápis ou caneta.

Procedimentos: Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 5;

- Identifique o tipo de acordo com seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo).
- Identifique o tipo de polígono construídos a partir dos lados.
- Indique a área de cada polígono construído sobre os lados (Área (A1); (A2); (A3)).

Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade:

Triângulo	Tipo de triângulo	Tipo de polígono	Área (A3)	Área (A2)	Área (A1)	Área (A2)+(A1)	Qual é a relação entre (A3) e (A2)+(A1) ?		
							Maior	Menor	Igual
(1)									
(2)									
(3)									
(4)									
(5)									
(6)									
(7)									
(8)									
(9)									
(10)									

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÃO:

Segue no Quadro 13 as previsões para atividade experimental 6:

Quadro 13 - Previsões atividade 6

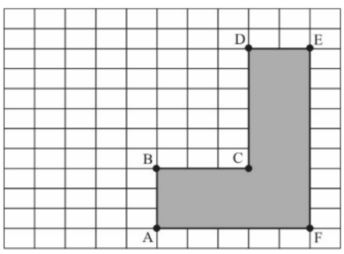
CLASSIFICAÇÃO	CONCLUSÃO
Válida e desejada	• Dado um triângulo retângulo, com polígonos semelhantes construídos a partir dos seus lados, (A3) = (A2) + (A1). • Dado um triângulo acutângulo, com polígonos semelhantes construídos a partir dos seus lados, (A3) < (A2) + (A1). • Dado um triângulo obtusângulo, com polígonos semelhantes construídos a partir dos seus lados, (A3) > (A2) + (A1).
Válida e não desejada	• Os valores da área (A3) são maiores que (A2) e (A1).
Inválida e não desejada	• Os valores da área (A3) sempre são maiores que (A2) e (A1). • Dado um triângulo retângulo, a soma das áreas dos polígonos construídos a partir de seus catetos, sempre será igual à área do polígono construído a partir da hipotenusa, mesmo que não sejam semelhantes.
Não formulada	• Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	• Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2024)

A atividade de aprofundamento 4 tem como objetivo dispor questões semelhantes ao que foi trabalhado na atividade experimental 6, de modo que o aluno aprimore e internalize a temática de áreas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo e suas pertinentes variações em situações contextualizadas.

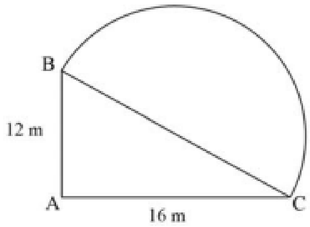
ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO 4

1) No diagrama a seguir, todos os quadradinhos têm 1cm de lado. Qual é o maior comprimento?

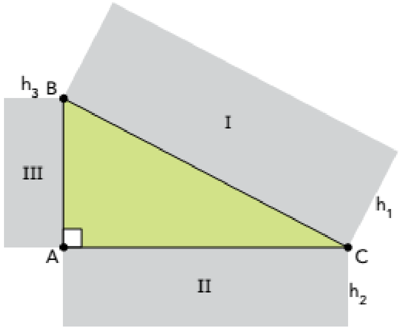


A)AE (B) CD+CF (C) AC+CF (D) FD (E) AC+CE

2) Um jardim tem a forma da figura, sendo ΔABC um triângulo retângulo em A e $\widehat{BC}$ um arco de diâmetro $\overline{BC}$. De acordo com as medidas dadas na figura e usando π = 3,14, a área desse jardim em m^2 é?

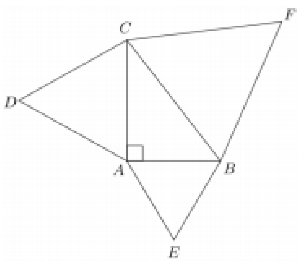


3) Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e os retângulos semelhantes I, II e III, de alturas h1 , h2 e h3 respectivamente proporcionais às bases $\overline{BC}$. $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Se AC = 4m e AB = 3m, a razão $4h_2 + 3h_3 / h_1$ é igual a?

4) Em um triângulo retângulo ABC são construídos três triângulos equiláteros, conforme Figura a seguir.



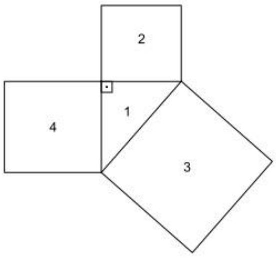
Com base na informação e na Figura imediatamente anterior, analise as proposições e indique como VERDADEIRO ou FALSO.

I – A soma das áreas dos triângulos ACD e ABE é igual à área do triângulo CBF. (   )

II – Se as medidas dos catetos do triângulo retângulo são respectivamente 9cm e 12cm, logo a área do triângulo CBF 230 cm^2. (   )

III – Sendo o ABC um triângulo retângulo isósceles, logo os triângulos ABE e ACD possuem a medida de suas áreas iguais. (   )

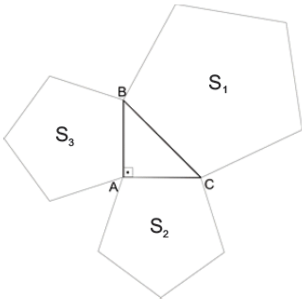
5) Um terreno foi dividido em 4 lotes, com o objetivo de se realizar uma construção no lote 1, de fazer um jardim nos lotes 2 e 3 e, no lote 4, fazer um espaço de estudo e biblioteca. O lote 1 tem o formato de um triângulo retângulo e os lotes 2, 3 e 4 são quadrados. O lote 2 tem uma área de 40000 m^2 e o lote 3 tem 62500 m^2 de área



(Figura sem escala)

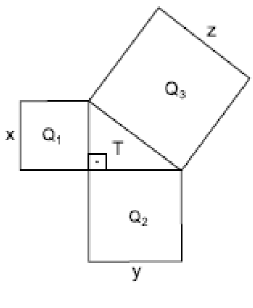
De acordo com os dados, o lado do lote 4 mede, em metros?

6) Sobre os lados do triângulo retângulo ABC, foram desenhados pentágonos regulares cujas áreas são S_1 ,S_2 e S_3 , conforme indica a figura abaixo. Sabendo-se que 2 3 os lados AB e AC têm o mesmo comprimento, é correto afirmar que:



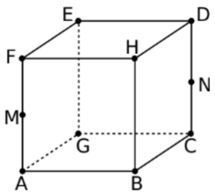
a) $S_1 < S_2 < S_3$ b) $S_1^2 = s_2^2 + s_3^2$ c) $S_1 > S_2 + S_3$ d) $S_1 = S_2 + S_3$ e) $S_2 = S_1/S_3$

7) Um jardim é formado por três canteiros quadrados, Q_1 , Q_2 e Q_3 , de lados iguais a x, y e z, e por uma região gramada T, no formato de um triângulo retângulo, conforme mostra a figura:



e a soma das áreas dos três canteiros quadrados é igual a 50 m^2 , então a medida z do lado do canteiro Q_3 é, em metros, igual a?

8) Uma formiga esperta, que passeia sobre a superfície do cubo abaixo, faz sempre o menor caminho possível entre dois pontos. O cubo tem arestas de tamanho 1 cm.



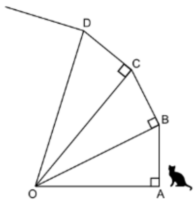
Qual distância a formiga esperta percorrerá se ela for:

a) Do vértice A ao vértice B?

b) Do ponto M ao ponto N?

c) Do vértice A ao vértice D?

9) Uma gata anda sempre em saltos de comprimento 1 m. Inicialmente, esta gata está no ponto A da figura abaixo, que está a uma distância de 2 m do ponto O. Em seguida, ela salta para o ponto B, distante 1 m do ponto A e tal que o segmento AB é perpendicular ao segmento OA. Em seguida, a gata salta do ponto B para o ponto C, distante 1 m do ponto B e tal que BC é perpendicular ao segmento OB, e assim por diante.

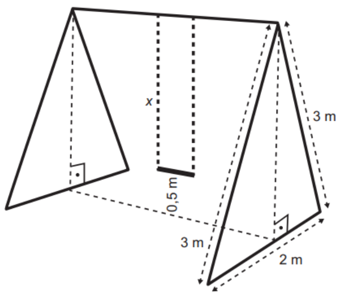


a) Qual o comprimento do segmento OB?

b) Qual o comprimento do segmento OC?

c) Após 2014 saltos, a que distância do ponto O estará a gata? Após quantos saltos ela estará a exatos 45 m do ponto O?

10) Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x. A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.



Nessas condições, o valor, em metro, de x é igual a?

- ✓ **ATIVIDADE 7**

O Teorema de Pitágoras atribui inúmeras funcionalidades para o cotidiano da sociedade, considerando a simplicidade de enunciação, ademais, a proposição emerge alguns padrões de genuíno interesse, ao exemplo dos ternos pitagóricos, bem como já citado nesse trabalho, logo a atividade experimental busca disponibilizar a construção de tal ideia.

Com o auxílio do Quadro de triângulos 6 (ANEXO F) os alunos deverão preencher as lacunas da atividade 7, assim, projeta-se que eles observam o padrão estabelecido para que assim possam materializar o conceito dos ternos pitagóricos.

Título: TERNOS PITAGÓRICOS

Objetivo: Descobrir que dada as medidas dos lados de um triângulo retângulo, com valores inteiros, são ternos pitagóricos, assim como seus múltiplos.

Material: roteiro da atividade, quadro de triângulos, lápis ou caneta.

Procedimentos: Para cada triângulo disposto no Quadro de triângulos 6;

- Identifique o tipo de acordo com seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo).
- Identifique o lado de maior medida por **a**;
- Identifique o segundo maior lado por **b**;
- Identifique o menor lado por **c**;
- Em "m" determine um número natural qualquer diferente de zero e maior que um.
- Multiplique cada lado do triângulo pelo valor escolhido.

Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade:

Triângulo	**Tipo de triângulo**	**Lados**	**m**	**m x lados (a,b,c)**							**Qual a relação entre (m.a)^2 e (m.b)^2 + (m.c)^2 ?**		
				m.a	**(m.a)^2**	m.b	**(m.b)^2**	m.c	**(m.c)^2**	**(m.b)^2 + (m.c)^2**	**maior**	**menor**	**igual**
01		a = b = c =											
02		a = b = c =											
03		a = b = c =											
04		a = b = c =											
05		a = b = c =											
06		a = b = c =											
07		a = b = c =											
08		a = b = c =											
09		a = b = c =											
10		a = b = c =											

OBSERVAÇÕES:

CONCLUSÃO:

Segue no Quadro 14 as previsões para atividade experimental 7:

Quadro 14 - Previsões atividade 7

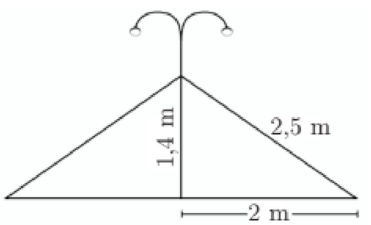
CLASSIFICAÇÃO	OBSERVAÇÃO
Válida e desejada	Dado um triângulo retângulo, com seus lados formados por números inteiros positivos, ao se multiplicar os lados por naturais maiores que "1", origina-se novos ternos pitagóricos. Os ternos pitagóricos são primos entre si.
Válida e não desejada	Os valores do lado a são maiores que o lado b e c.
Inválida e não desejada	Os valores do lado a sempre são maiores que o lado b e c.
Não formulada	Indivíduos que não apresentaram resposta.
Não esperada	Indivíduos que apresentaram respostas diferentes do que se projetava.

Fonte: Autoria Própria (2024)

Quanto à atividade de aprofundamento 5, atribui como finalidade à plena absorção da ideia apresentada na atividade 7, nesse sentido, os tópicos abordam os ternos pitagóricos através de outras perspectivas, visando a internalização e a prática do conteúdo.

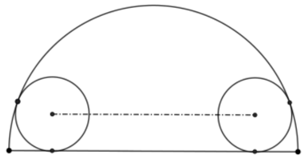
ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO 5

1) Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram presos cabos no poste, a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme a figura.



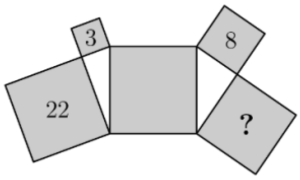
Um professor de Matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

2) Duas circunferências de raio 8cm são tangentes a uma semicircunferência de raio 25cm e ao seu diâmetro como ilustra a figura a seguir.

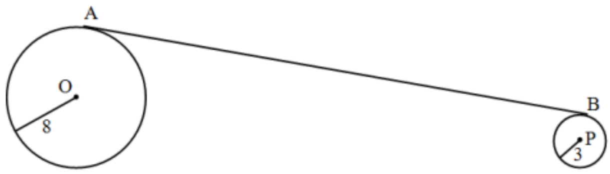


Qual a distância, em cm, entre os centros das duas circunferências menores?

3) Cinco quadrados e dois triângulos retângulos são reunidos para formar a figura ao lado. Os números 3, 8 e 22, dentro de três quadrados, indicam suas áreas em metros quadrados. Qual é a área do quadrado com o ponto de interrogação?

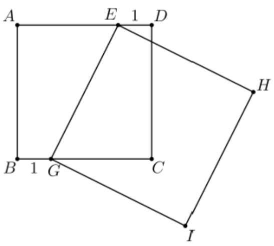


4) Os pontos O e P são os centros de duas circunferências que possuem raios medindo, respectivamente, 8 cm e 3 cm, conforme a figura. Se OP = 5 $\sqrt{37}$ cm e se AB é tangente a essas circunferências, em A e B, então AB em cm?



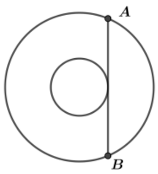
5) Uma escada extensível cujo comprimento pode variar entre 10 e 20 metros está apoiada em uma parede vertical de altura superior a 20 metros, de forma que a base da escada dista 5 metros da base da parede, medidos sobre um chão horizontal. Quais são a menor e a maior altura que a escada poder alcançar, com a extremidade superior apoiada na parede?

6) ABCD e um quadrado cuja medida do lado é igual a 4. Toma-se os pontos E e G sobre os lados AD e BC, respectivamente, conforme a figura, tais que DE = BG = 1 e constrói-se o quadrado EHIG.

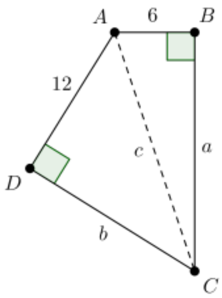


A área do quadrado EHIG é igual a?

7) Os dois círculos da figura abaixo são concêntricos e AB e uma corda do círculo de maior raio e tangente ao círculo de menor raio. Se o raio do círculo maior e 13 cm e AB = 24cm, o raio do círculo menor, em centímetros, é?

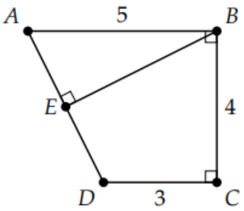


8) No quadrilátero ABCD, os ângulos internos B e D são retos. Sendo AB = 6, BC = a, CD = b e AD = 12, o valor de $\sqrt{a^2 + b^2}$ é?



9) Uma pirâmide de base quadrada tem todas as suas arestas congruentes, de medida 8 cm. Qual a altura da pirâmide (em relação à base quadrada) em cm?

10) No trapézio ABCD da figura abaixo estão indicados os ângulos retos e as medidas dos segmentos.



Qual a razão entre as medidas de BE e AD?

Finalizado a proposta de sequência de atividades experimentais para o ensino do teorema de Pitágoras, disponibiliza-se um apanhado de questões presentes em diversas aplicações do ENEM, com o objetivo de aprofundar a prática de forma avançada e diretiva.

7. QUESTÕES – ENEM

1) (**2008 – ENEM)** O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

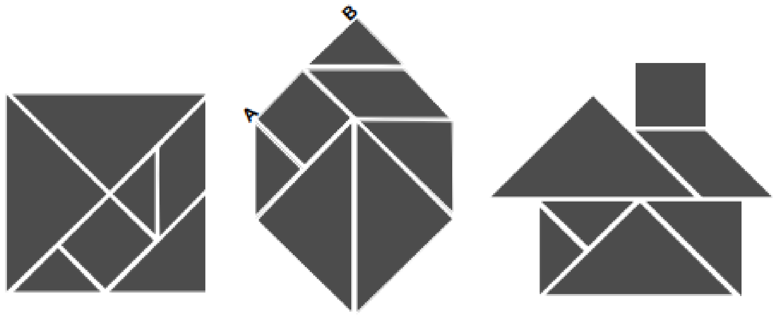
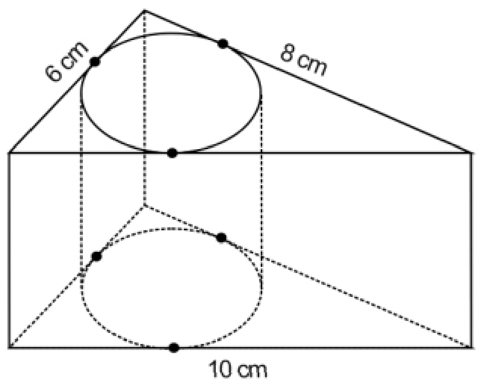


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) 4 cm^2 .
b) 8 cm^2 .
c) 12 cm^2 .
d) 14 cm^2 .
e) 16 cm^2 .

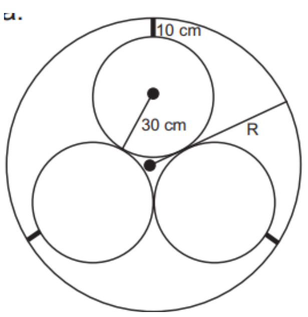
2) **(2010 – ENEM)** Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a:

a) 1cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) 5 cm

3) (2013 – ENEM) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

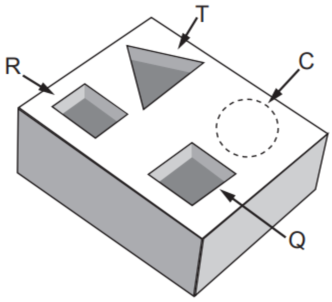
O valor de R, em centímetros, é igual a:

a) 64,0
b) 65,5
c) 74,0
d) 81,0
e) 91,0

4) (2014 – ENEM) Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão. O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é:

a) 4.
b) 8.
c) 9.
d) 12.
e) 20.

5) (2016 – ENEM) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C). O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para √2 e √3 , respectivamente. Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

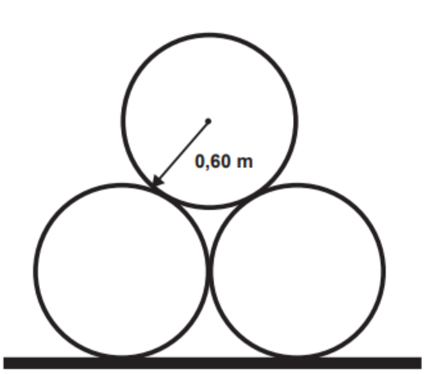
6) (2017 – ENEM) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

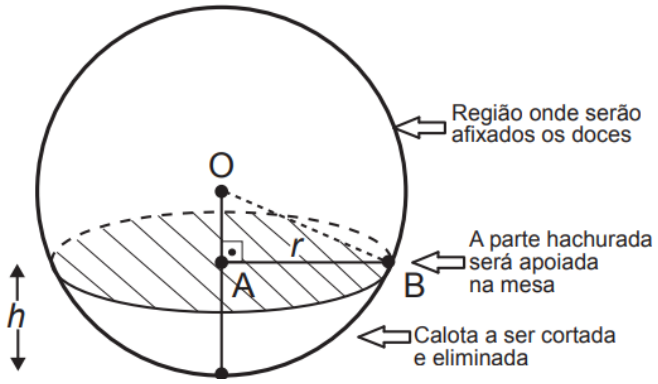
Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) 2,82
b) 3,52
c) 3,70
d) 4,02
e) 4,20

7) (2017 – ENEM) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a:

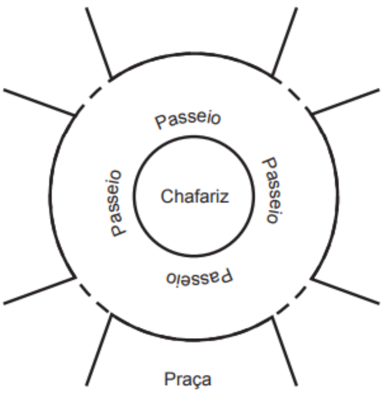
a) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$
b) $10 - \sqrt{91}$
c) 1
d) 4
e) 5

8) (2018 – ENEM) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

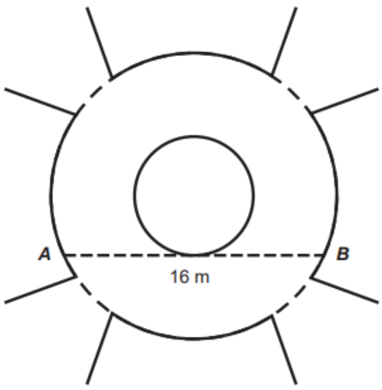
Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é:

a) 14
b) 12
c) $7\sqrt{2}$
d) $6 + 4\sqrt{2}$
e) $6 + 2\sqrt{2}$

9) (2018 – ENEM) A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



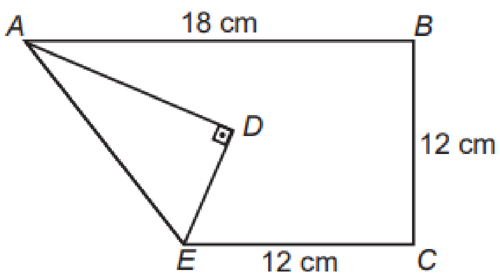
O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado. A medida encontrada pelo engenheiro foi:

a) 4π
b) 8π
c) 48π
d) 64π
e) 192π

10) (2019 – ENEM) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é:

a) $2\sqrt{22}$ cm.
b) $6\sqrt{3}$ cm.
c) 12 cm.
d) $6\sqrt{5}$ cm.
e) $12\sqrt{2}$ cm.

11) (2020 – ENEM) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.


Figura 1

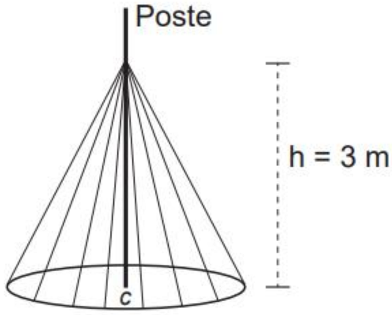
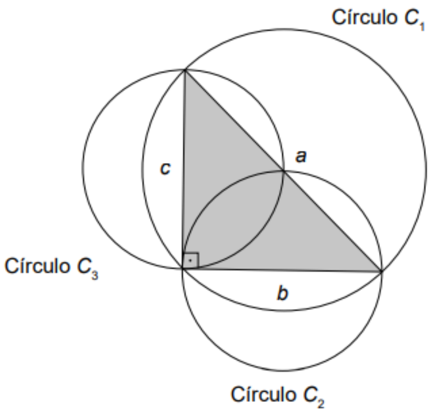


Figura 2

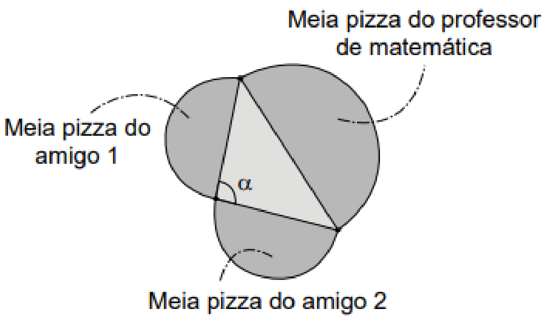
A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão. Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva. Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de:

a) 4,00.
b) 4,87.
c) 5,00.
d) 5,83.
e) 6,26.

12) (2023/179) Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo retângulo, tendo a como medida da hipotenusa. Esses valores a, b e c são, respectivamente, os diâmetros dos círculos C_1 , C_2 e C_3, como apresentados na figura.



Observe que essa construção assegura, pelo teorema de Pitágoras, que área (C_1)=área(C_2)+área(C_3). Um professor de matemática era conhecedor dessa construção e, confraternizando com dois amigos em uma pizzaria onde são vendidas pizzas somente em formato de círculo, lançou um desafio: mesmo sem usar um instrumento de medição, poderia afirmar com certeza se a área do círculo correspondente à pizza que ele pedisse era maior, igual ou menor do que a soma das áreas das pizzas dos dois amigos. Assim, foram pedidas três pizzas. O professor as dividiu ao meio e formou um triângulo com os diâmetros das pizzas, conforme indicado na figura.

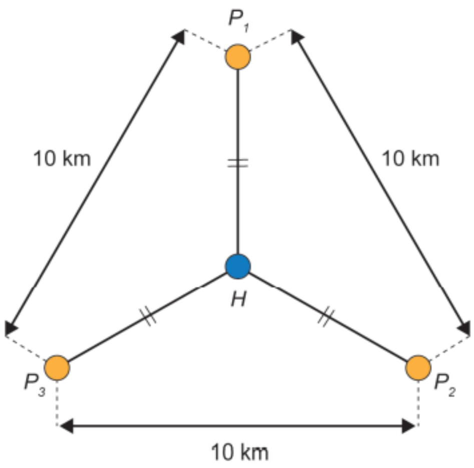


A partir da medida do ângulo α, o professor afirmou que a área de sua pizza é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas.

A área da pizza do professor de matemática é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas, pois:

a) $0° < \alpha < 90°$
b) $\alpha = 90°$
c) $90° < \alpha < 180°$
d) $\alpha = 180°$
e) $180° < \alpha < 360°$

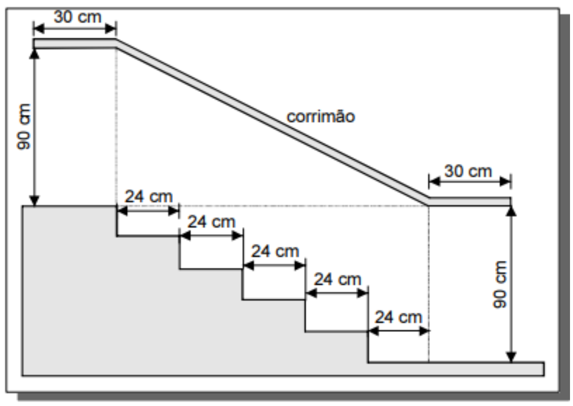
13) **(2024 – ENEM)** A prefeitura de uma cidade planeja construir três postos de saúde. Esses postos devem ser construídos em locais equidistantes entre si e de forma que as distâncias desses três postos ao hospital dessa cidade sejam iguais. Foram conseguidos três locais para a construção dos postos de saúde que apresentam as características desejadas, e que distam 10 km entre si, conforme o esquema, no qual o ponto H representa o local onde está construído o hospital; os pontos P_1, P_2 e P_3, os postos de saúde; e esses quatro pontos estão em um mesmo plano.



A distância, em quilômetro, entre o hospital e cada um dos postos de saúde, é um valor entre:

a) 2 e 3.
b) 4 e 5.
c) 5 e 6.
d) 7 e 8.
e) 8 e 9.

14) **(2006/62)** Na figura, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:



a) 1,8 m.
b) 1,9 m.
c) 2,0 m.
d) 2,1 m.
e) 2,2 m.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Bem como já descrito, este Produto Educacional intitulado “O Ensino do Teorema de Pitágoras via Atividades Experimentais” é constituído como desdobramento prático da pesquisa de mestrado desenvolvida através do PPGEM-UEPA, motivado pela necessidade de explorar meios alternativos de abordagem do ensino do teorema de Pitágoras, que se diferem de metodologias tradicionais.

A proposta aqui exposta se fundamenta através da metodologia do Ensino de Matemática via Atividades Experimentais, que define o educando como um agente ativo e investigador do processo de sua aprendizagem. Sendo assim, ao longo da sequência de sete atividades, buscou-se transitar de construções concretas para abstratas, possibilitando ao aluno não apenas a memorizar fórmulas, mas também, descobrir relações métricas e propriedades geométricas vinculadas à proposição pitagórica.

A construção deste material levou em conta o estudo diagnóstico realizado com docentes da rede pública, o qual revelou que a escassez de recursos didáticos e pedagógicos é uma das maiores carências enfrentadas no cotidiano da sala de aula. Assim, este produto oferece um roteiro estruturado que guia o professor no papel de mediador, facilitando a transição entre o conhecimento empírico e a formalização matemática.

Além disso, as atividades foram rigorosamente alinhadas às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente para o desenvolvimento das habilidades EF09MA13 e EF09MA14, e aos níveis de proficiência exigidos pelo Saeb. A inclusão de uma seção de generalizações e de uma bateria de questões do ENEM reforça a preocupação em demonstrar a aplicabilidade do teorema em contextos reais e complexos, preparando o aluno para desafios acadêmicos futuros.

Conclui-se que este material não é um fim em si mesmo, mas um recurso dinâmico que exige a autocrítica e o engajamento do docente. Espera-se que a utilização desta sequência didática contribua para uma aprendizagem significativa, fomentando a independência cognitiva dos alunos e humanizando o conhecimento matemático por meio de seus aspectos históricos e experimentais. A entrega deste produto à comunidade escolar visa, portanto, minimizar as dificuldades de ensino-aprendizagem identificadas na pesquisa e oferecer um caminho pedagógico que valorize o pensar e o refletir do estudante.

9. REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos**. São Paulo: Atual, 1993.

BARBOSA, R.S.; BASSALO, J.M.F. **DE PITÁGORAS A FERMAT**. Pará: UFPA. 1978.

BASTIAN, Irma Verri. **O teorema de Pitágoras.** 229 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, 2000.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Sistema de Avaliação da Educação Básica.** Documentos de Referência Versão Preliminar. Brasília, 2019.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Escalas de Proficiência do Saeb**. Brasília, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.** Brasília, MEC/SEF. 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC/SEF. 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:**terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, MEC/SEF. 1998.

BOYER, C. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

COSTA, Allyson Emanuel Januário da. **THABIT IBN QURRA (836-901) E A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: ALIANDO HISTÓRIA, TECNOLOGIA E INVESTIGAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA.** Dissertação – UFRN. Natal, 2022.

DA SILVA, João Evangelista Brito; FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; PEDROSO, Hermes Antônio. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2016.

DOLCE, O.; POMPEO J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana.** 7ª ed. São Paulo. 1997.

EUCLIDES. ***Os elementos*.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GUNDLACH, Bernard H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: números e numerais**. Trad. Hygino H. Domingues. Atual Editora, 1992.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. Dissertação (mestrado em matemática) – Universidade federal de viçosa, Minas Gerais, 2013.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ª edição. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2012.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades.** 1ª Ed. Pará: SINEPEM, 2019.

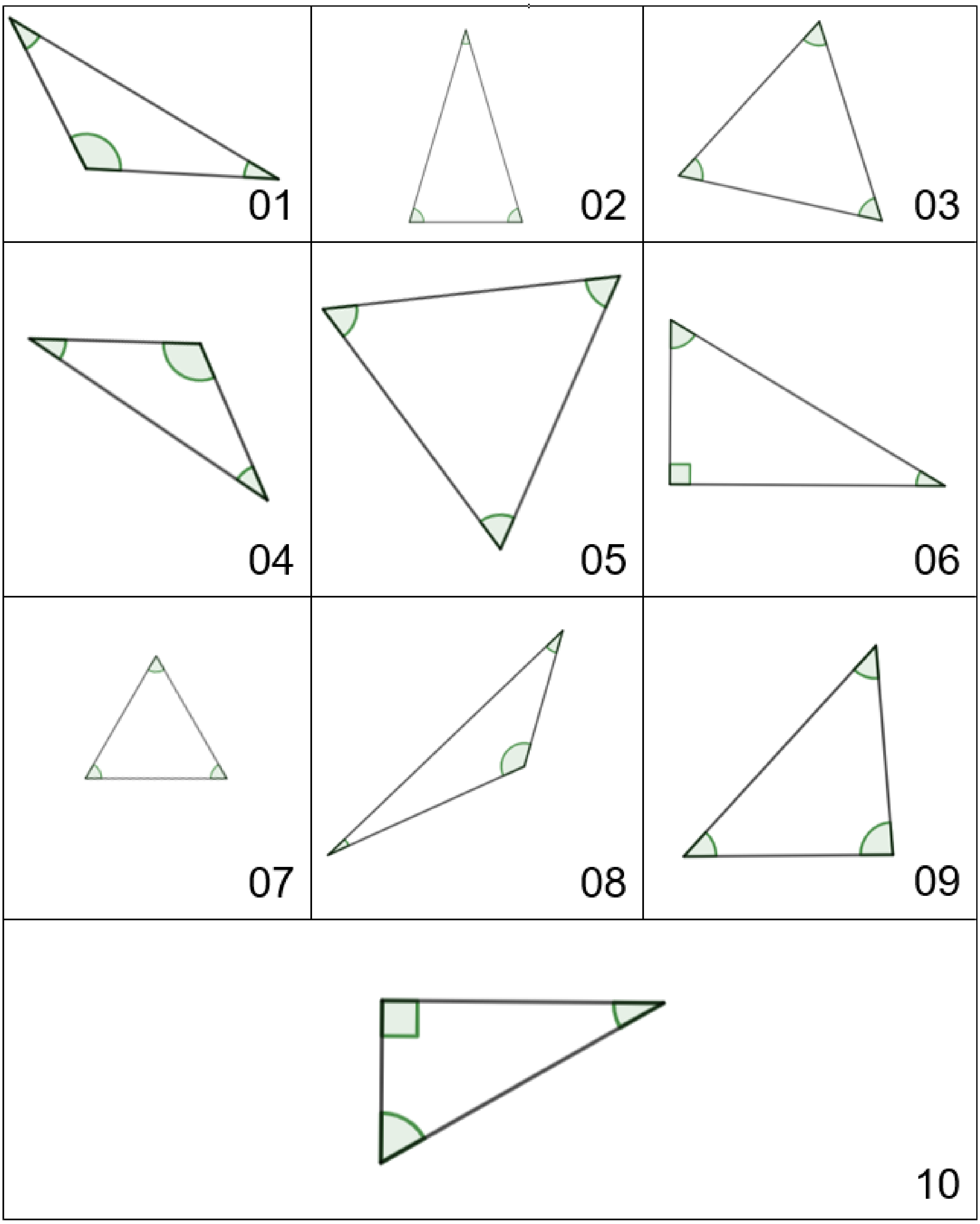
SÁ, Pedro Franco de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **REMATEC**, v. 15, n. 35, p. 143-162, 2020.

SILVA, João Evangelista Brito da. Teorema de Pitágoras: **algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra**. Dissertação (mestrado em matemática) – Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto 2014.

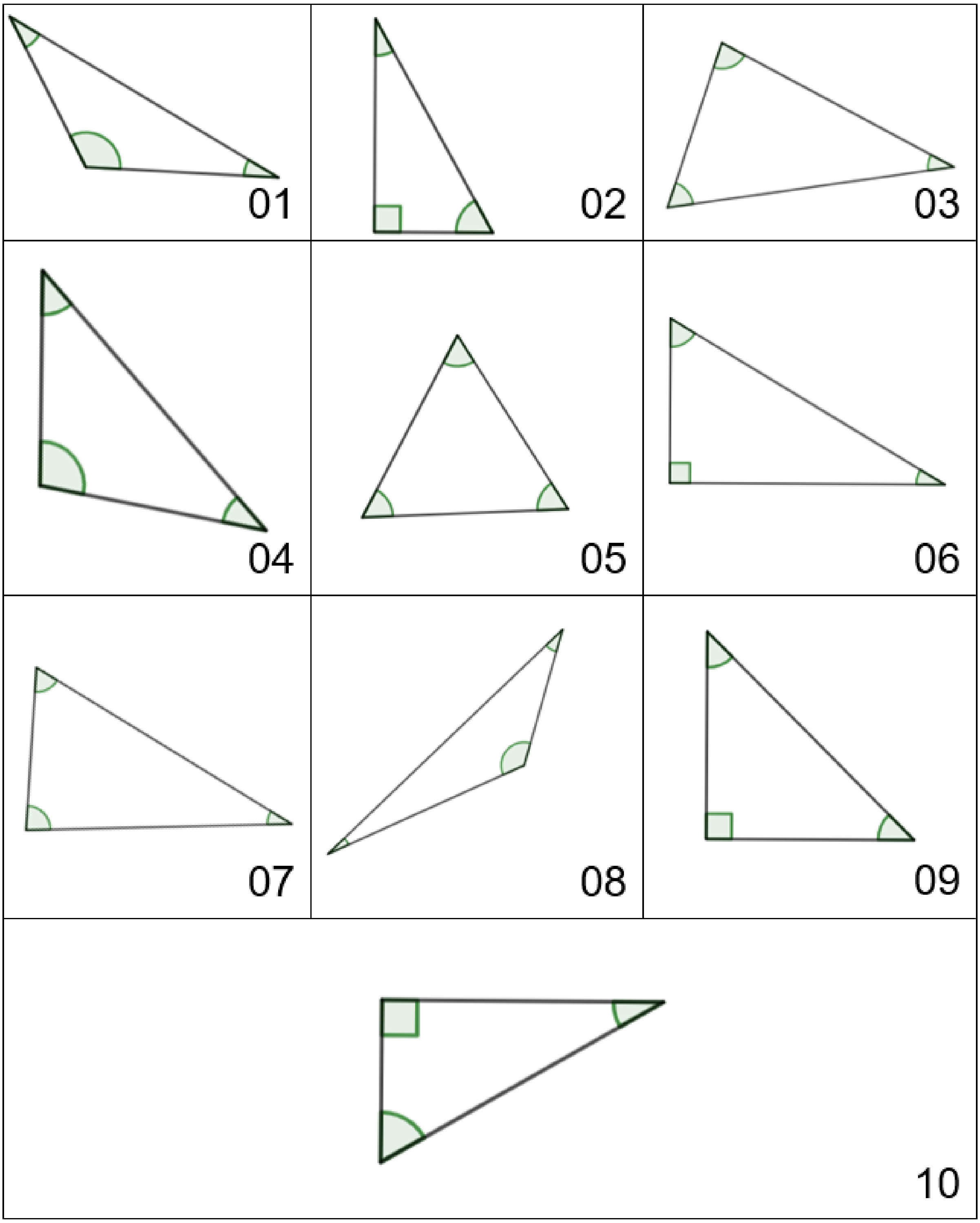
SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat** – A História do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 9ª.ed. Trad. Jorge Luiz Calife. Record, 2002.

10. APÊNDICES

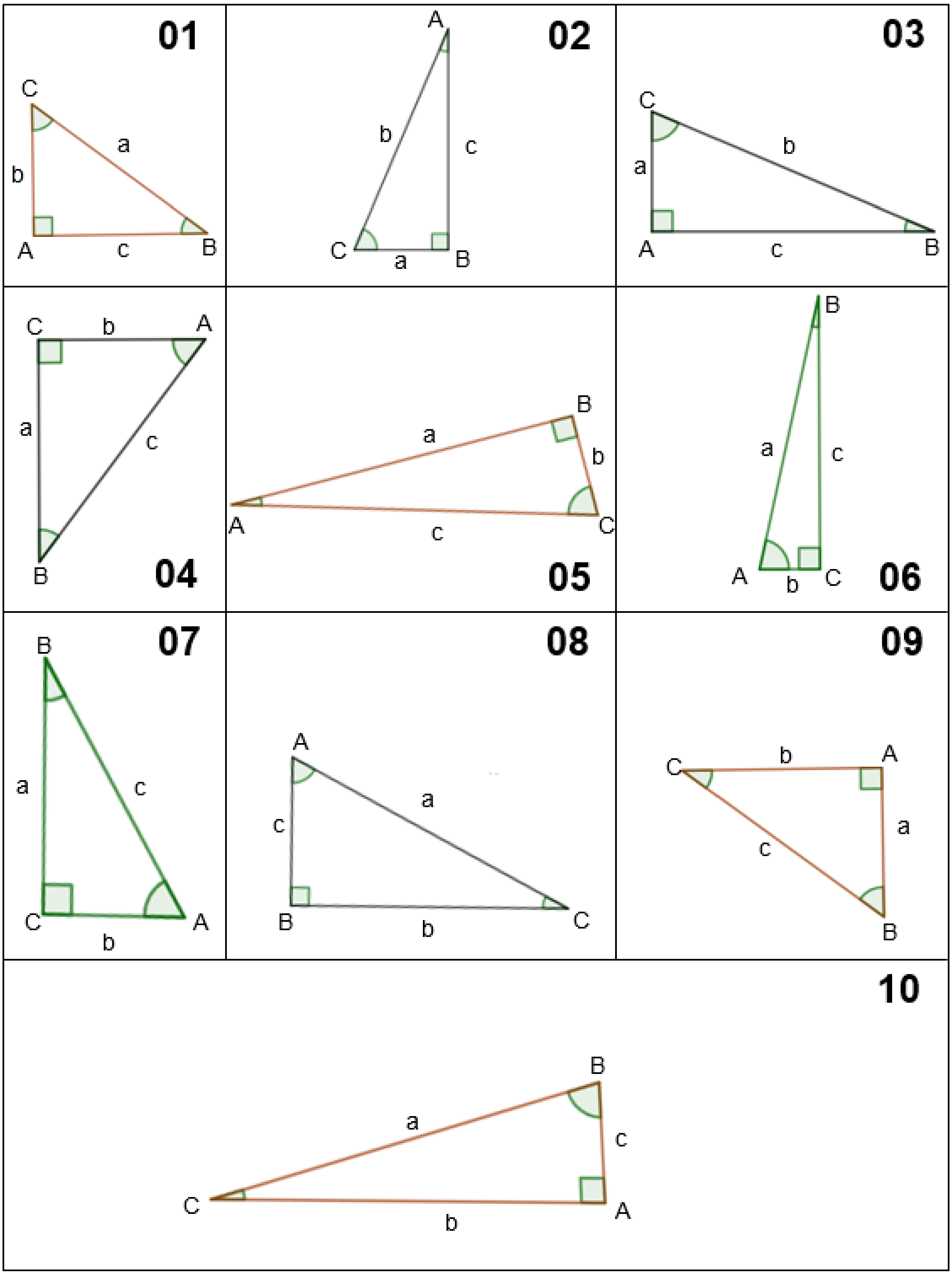
APÊNDICE A: QUADRO DE TRIÂNGULOS 1



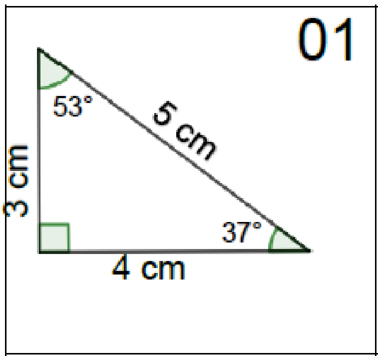
APÊNDICE B: QUADRO DE TRIÂNGULOS 2

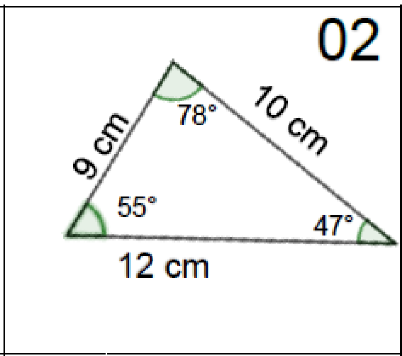


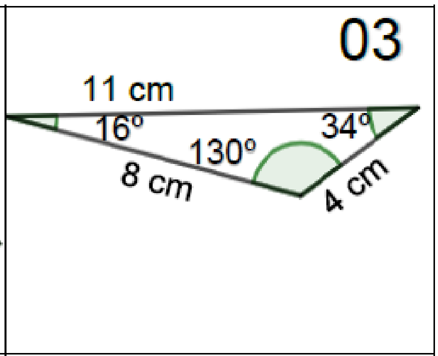
APÊNDICE C: QUADRO DE TRIÂNGULOS 3

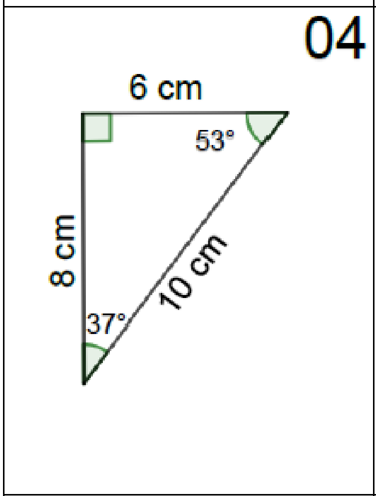


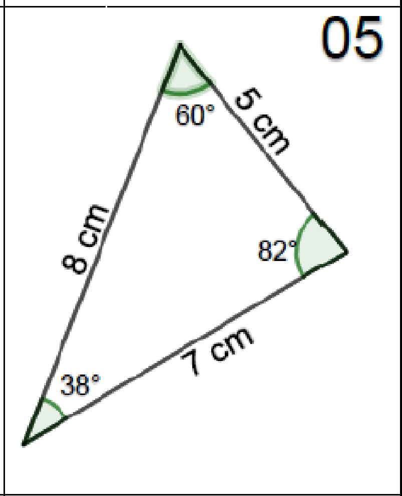
APÊNDICE D: QUADRO DE TRIÂNGULOS 4

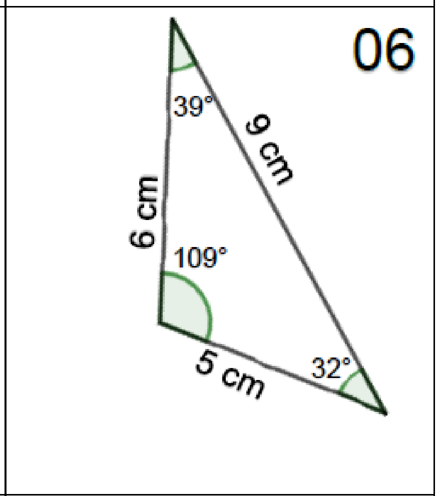


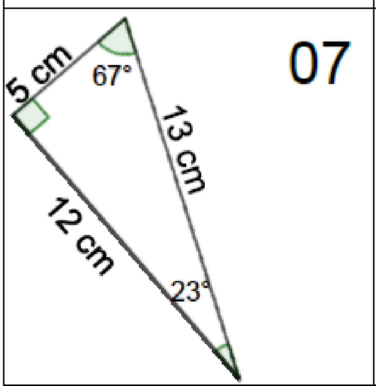


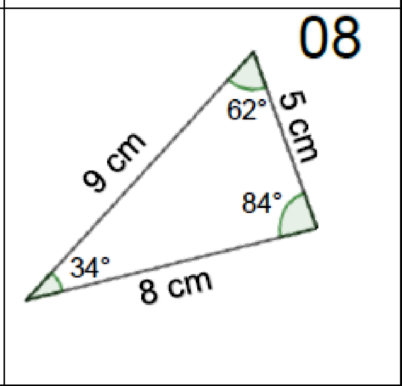


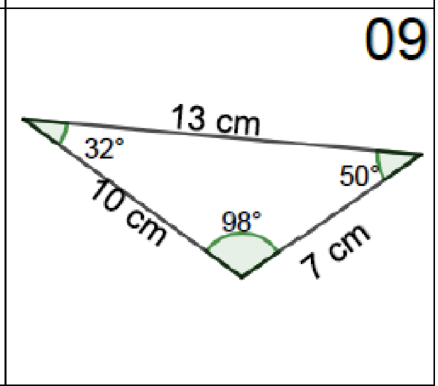


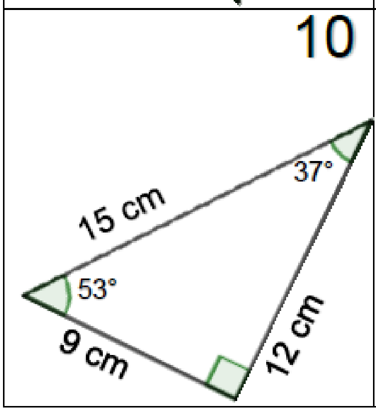


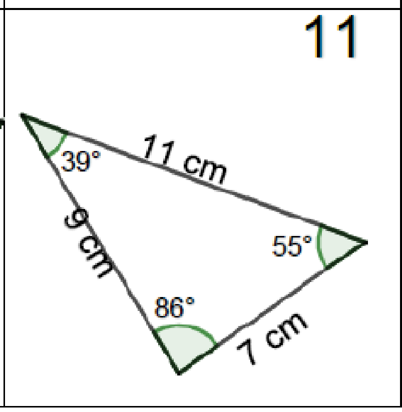


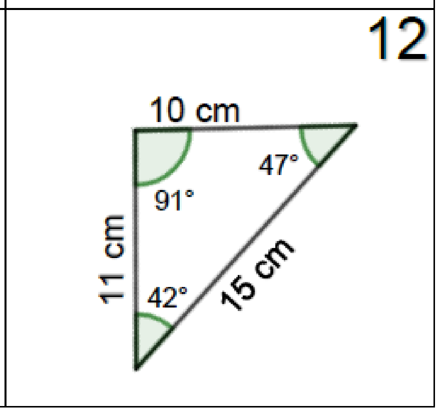




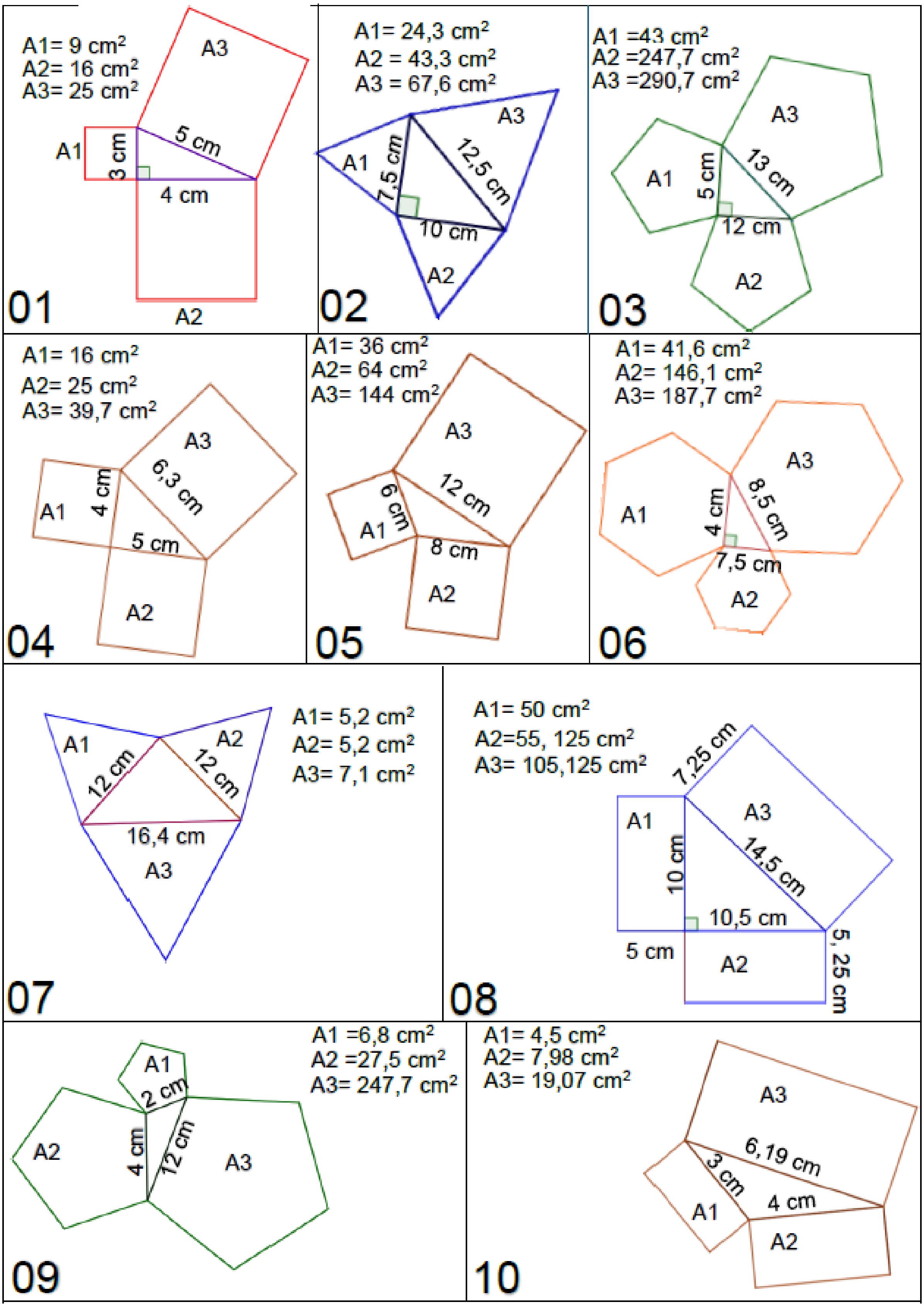




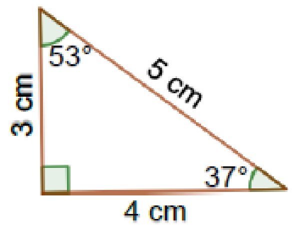




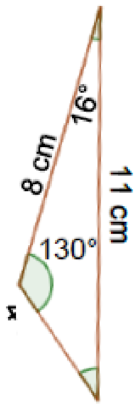
APÊNDICE E: QUADRO DE TRIÂNGULOS 5



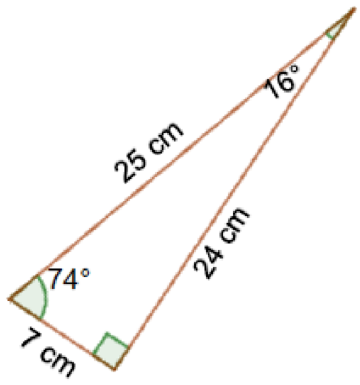
APÊNDICE F: QUADRO DE TRIÂNGULOS 6



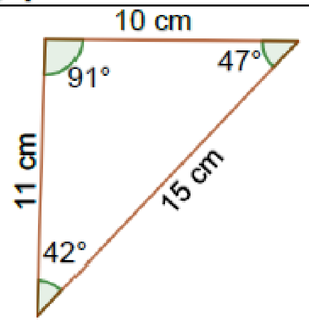
01



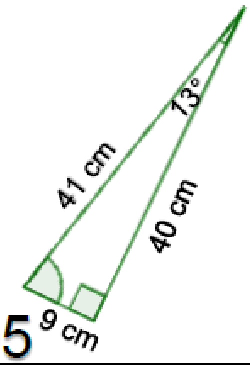
02



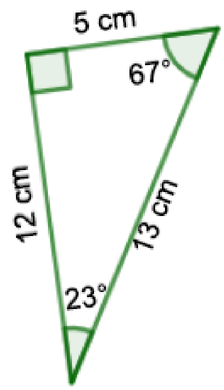
03



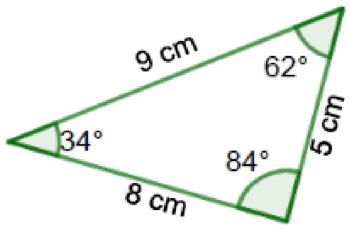
04



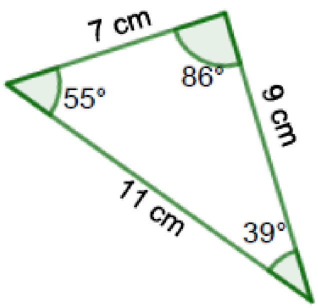
05



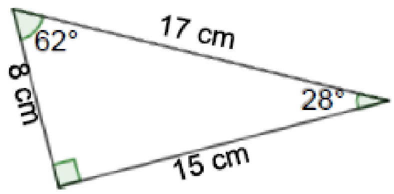
06



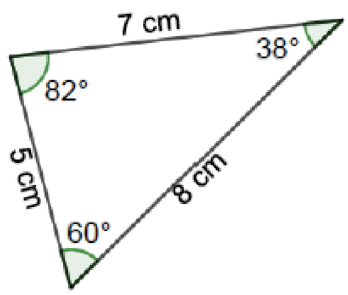
07



08



09



10

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem