



Universidade do Estado do Pará  
Centro de Ciências Sociais e Educação  
Departamento de Matemática, Estatística e Informática  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática  
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática  
Linha de Pesquisa: Metodologia para ensino de Matemática  
no nível Fundamental

LUCIAN AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

**UM DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE  
PITÁGORAS: A PERSPECTIVA DE PROFESSORES  
PARAENSES**

BELÉM/PA  
2026

**LUCIAN AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA**

**UM DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE  
PITÁGORAS: A PERSPECTIVA DE PROFESSORES  
PARAENSES**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no nível Fundamental.  
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

BELÉM/PA  
2026

LUCIAN AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA


**UM DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: A  
PERSPECTIVA DE PROFESSORES PARAENSES**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data de aprovação: 15/04/2026

Banca examinadora


Documento assinado digitalmente  
 PEDRO FRANCO DE SA  
Data: 27/04/2026 08:25:20-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

\_\_\_\_\_. Orientador

**Prof. Dr. Pedro Franco de Sá**

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN

Universidade Federal do Rio Grande do Norte


Documento assinado digitalmente  
 ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO  
Data: 23/04/2026 19:34:03-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

\_\_\_\_\_. Examinador Interno

**Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho**

Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA

Universidade do Estado do Pará


Documento assinado digitalmente  
 SAUL RODRIGO DA COSTA BARRETO  
Data: 22/04/2026 23:37:07-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

\_\_\_\_\_. Examinador Interno

**Prof. Dr. Saul Rodrigo da Costa Barreto**

Doutor em Educação, Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA

Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente  
 DANIELE ESTEVES PEREIRA SMITH  
Data: 22/04/2026 22:10:15-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

\_\_\_\_\_. Examinador Externo

**Profa. Dra. Daniele Esteves Pereira Smith**

Doutora em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN

Universidade Federal do Pará

**Belém – PA**

**2026**

***Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará***

---

S586d Silva, Lucian Augusto Oliveira da  
Um diagnóstico do ensino do teorema de pitágoras: a perspectiva dos  
professores paraenses / Lucian Augusto Oliveira da Silva. — Belém, 2026.  
171 f.

Orientador: Prof. Dr. Pedro de Franco Sá  
Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática)  
- Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e  
Educação (CCSE), 2026.

1. Ensino de Matemática. 2. Ensino Fundamental. 3. Teorema de Pitágoras. 4.  
Diagnóstico do Ensino. I. Título.

---

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB-2/1345

## DEDICATÓRIA

Dedico esta obra, com profundo afeto e gratidão, aos meus familiares, pilares indispensáveis em cada etapa desta jornada, sem os quais esta conquista não seria possível.

À minha saudosa avó, Raimunda Neusa Guimarães Silva, cujos ensinamentos e força ajudaram a consolidar meus princípios e a moldar o ser humano que sou hoje.

Aos meus pais, Lucimar Guimarães Oliveira Silva e Carlos Augusto Freitas da Silva, minha base e exemplo maior de resiliência. Agradeço por terem feito da minha educação uma prioridade absoluta, abdicando, por vezes, de seus próprios sonhos para prover minhas necessidades e permitir que eu alcançasse os meus.

Ao meu querido irmão, Luan Augusto Oliveira da Silva, que com sua vinda ao mundo me apresentou as lições mais genuínas sobre a vida e a essência do amor ao próximo.

## AGRADECIMENTO

Agradeço, de início, a Deus, por me permitir alcançar meus objetivos profissionais e pessoais. Ele me guiou nesta próspera, embora árdua, jornada. Em muitos momentos de atribulação, cheguei a duvidar do meu merecimento ou da minha competência para ocupar os espaços conquistados, mas Ele sempre me mostrou que eu era capaz de superar cada desafio.

Aos meus pais, por nunca terem desistido de mim e por me fortalecerem nos momentos de fraqueza. Chego a esta etapa fundamental da minha vida primordialmente por causa deles. Espero, um dia, ser metade do que vocês são; vocês foram e continuam sendo o espelho em que deposito minhas maiores aspirações.

À minha amada, Juliana Gomes dos Santos, que teve participação integral neste processo. Expresso minha gratidão por sua compreensão e apoio nos momentos em que precisei me ausentar para me debruçar sobre os estudos; com você, aprendi a ser mais dedicado e resiliente diante das dificuldades. Agradeço, ademais, à minha querida sogra, Ângela Gomes dos Santos, por ter me acolhido com tanto carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, por acreditar em meu potencial. Sem seus enriquecedores conselhos e pertinentes orientações — tanto acadêmicas quanto de vida —, este trabalho não teria alcançado tamanha solidez. É instigante e renovador observar a forma como o senhor projeta o processo educacional.

Por fim, agradeço à Universidade do Estado do Pará (UEPA), instituição que me abriu portas e ofereceu valiosas oportunidades. Esta universidade é composta por excelentes profissionais, desde o corpo docente até os quadros administrativo e operacional; cada um deles contribui para que a UEPA seja um ambiente acolhedor e genuinamente comprometido com a excelência das pautas educacionais.

## RESUMO

SILVA, Lucian Augusto Oliveira da. **UM DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: A PERSPECTIVA DE PROFESSORES PARAENSES.** Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2026.

O presente trabalho consiste em uma dissertação desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). A pesquisa surge da necessidade de investigar a importância deste teorema no Ensino Fundamental, visto que ele é um objeto matemático central que se relaciona com diversas etapas e áreas do conhecimento. A questão norteadora do estudo busca entender como se caracteriza o processo de ensino, aprendizagem e avaliação do Teorema de Pitágoras no 9º ano do Ensino Fundamental da rede pública no Estado do Pará, sob a perspectiva dos docentes. O objetivo geral da pesquisa foi realizar um diagnóstico das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem desse teorema, fundamentando-se na ótica de professores de matemática. A metodologia adotada caracteriza-se como um estudo diagnóstico de abordagem mista (qualitativa e quantitativa). O percurso metodológico foi estruturado em sete etapas, incluindo um teste-piloto com 30 discentes para validação do instrumento e a aplicação definitiva de um questionário eletrônico via Google Forms a 32 professores da rede pública de municípios como Belém, Ananindeua e Abaetetuba. A análise dos dados incluiu o tratamento estatístico inferencial por meio do Teste Exato de Fisher no software JAMOV. Os resultados revelam que as dificuldades dos discentes são influenciadas por carências na formação continuada e escassez de recursos didáticos. A análise via Teste Exato de Fisher comprovou que variáveis do perfil docente — como escolaridade, tempo de serviço e participação em cursos — não possuem associação significativa com as práticas ou percepções dos professores, evidenciando que os obstáculos mapeados possuem natureza estrutural e sistêmica na rede pública paraense. As principais dificuldades mapeadas residem na resolução de problemas e na inabilidade com operações básicas, além da confusão recorrente entre catetos e hipotenusa. No âmbito avaliativo, a totalidade dos docentes utiliza provas escritas, complementadas por trabalhos e produções no caderno. Para a fixação dos conteúdos, predominam as listas de exercícios extraclasse e o uso do livro didático. As aulas são iniciadas majoritariamente por situações-problema, embora persista o modelo tradicional de conceito seguido de exemplos. A seleção dos conteúdos fundamenta-se primordialmente na BNCC e nos livros didáticos, reforçando que os entraves identificados independem da trajetória individual do docente. Com base nos resultados da pesquisa realizada foi elaborado um produto educacional na forma de livro digital contendo uma proposta de sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais que está disponível em <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1178508>, com livre acesso.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. Ensino Fundamental. Teorema de Pitágoras. Diagnóstico do Ensino.

## ABSTRACT

SILVA, Lucian Augusto Oliveira da. **A DIAGNOSIS OF THE TEACHING OF THE PYTHAGOREAN THEOREM: THE PERSPECTIVE OF TEACHERS FROM PARÁ.** Dissertation of the Graduate Program in Mathematics Teaching – State University of Pará, Belém, 2026.

This study is a master's thesis developed within the Professional Master's Program in Mathematics Teaching at the State University of Pará (UEPA). The research stems from the need to investigate the importance of the Pythagorean Theorem in Middle School, as it is a central mathematical object linked to various stages and fields of knowledge. The guiding question seeks to understand the teaching, learning, and assessment processes of the Pythagorean Theorem in the 9th grade of public schools in the State of Pará, from the teachers' perspective. The general objective was to diagnose the difficulties students face in the teaching-learning process of this theorem, based on the viewpoint of mathematics teachers. The methodology is characterized as a diagnostic study with a mixed approach (qualitative and quantitative). The methodological path was structured in seven stages, including a pilot test with 30 students for instrument validation and the final application of an electronic questionnaire via Google Forms to 32 public school teachers from municipalities such as Belém, Ananindeua, and Abaetetuba. Data analysis included inferential statistical treatment using Fisher's Exact Test in the JAMOVI software. The results reveal that student difficulties are influenced by gaps in continuing education and a shortage of didactic resources. The analysis via Fisher's Exact Test proved that teacher profile variables—such as education level, length of service, and participation in courses—have no significant association with their practices or perceptions, highlighting that the identified obstacles are structural and systemic in nature within the Pará public school system. The main difficulties mapped reside in problem-solving and inability to perform basic operations, in addition to recurring confusion between legs and hypotenuse. Regarding assessment, all teachers use written tests, supplemented by assignments and notebook activities. For content reinforcement, out-of-class exercise lists and textbooks predominate. Lessons are mostly initiated through problem-situations, although the traditional model of concept followed by examples persists. Content selection is primarily based on the BNCC and textbooks, reinforcing that the identified barriers are independent of the teacher's individual trajectory. Based on the research results, an educational product was developed in the form of a digital book containing a proposal for a didactic sequence based on teaching mathematics through experimental activities, which is available at <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1178508>, with free access.

**Keywords:** Mathematics Teaching. Middle School. Pythagorean Theorem. Teaching Diagnosis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Busto alusivo a Pitágoras de Samos	20
Figura 2 - Placa de Plimpton 322	21
Figura 3 - Representação geométrica do T.P	24
Figura 4 – representação do Gnomon	25
Figura 5 - Demonstração de Pitágoras	27
Figura 6 - Demonstração de Euclides	27
Figura 7 - Demonstração "UM"	28
Figura 8 - Demonstração do Presidente	29
Figura 9 - Demonstração de da Vinci	30
Figura 10 - Demonstração Bhaskara	31
Figura 11 – Demonstração de Bhaskara	31
Figura 12 - Demonstração de Perigal	32
Figura 13 - Demonstração de Leibniz	33
Figura 14 - Demonstração Quaterniônica	33
Figura 15 - Triângulos traçados a partir de quadrados	34
Figura 16 - Triângulos compostos por áreas unitárias	35
Figura 17 - Triângulo equilátero de lado $x$	35
Figura 18 - Triângulos Semelhantes	37
Figura 19 - Triângulos BAC composto por triângulos semelhantes	37
Figura 20 - Extensão entre triângulo equilátero e quadrado	38
Figura 21 - Extensão entre quadrados inscritos a partir de pontos médios	39
Figura 22 - Extensão entre triângulos inscritos a partir de pontos médios	39
Figura 23 - Extensão a partir de diagonais e pontos médios dos quadrados correspondentes	40
Figura 24 - Extensão a partir de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, com quadrados inscritos e desenvolvidos em função da quarta parte das diagonais	40
Figura 25 - Extensão a partir de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, com quadrados menores inscritos e traçados a partir da terceira parte das diagonais	40
Figura 26 - Extensão entre quadrados inscritos a partir de uma razão $k$	41
Figura 27 - Extensão entre triângulos inscritos a partir de uma razão $k$	41

Figura 28 - Extensão a partir de círculo inscrito em quadrado	42
Figura 29 - Extensão de semicírculos sobre os lados do triângulo retângulo	42
Figura 30 - Extensão a partir de "lúnulas"	43
Figura 31 - Extensão de Arcos ogivais	43
Arcos ogivais	43
Figura 32 -	43
Figura 33 - Polígonos semelhantes	46
Figura 34 - Generalização para polígonos semelhantes	47
Figura 35 - Generalização de Pappus	47
Figura 36 - Generalização Euclides	48
Figura 37 - Generalização de Polya	49
Figura 38 - Triângulo retângulo ABC	50
Figura 39 - Representação geométrica do 1º caso	51
Figura 40 - Representação geométrica do 2º caso	52
Figura 41 - Representação gráfica da função Y	52
Figura 42 - Representação gráfica de $f_1(x)$ e $f_2(x)$	54
Figura 43 - Funções integráveis construídas sobre os lados de um triângulo retângulo	55
Figura 44 - Retângulos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo	56
Figura 45 - Quadrado ABCD	57
Figura 46 - Triângulo equilátero ABC	58
Figura 47 - Triângulo retângulo	58
Figura 48 - Representação geométrica do Sen; Cos. e Tg de $\alpha$	58

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Extensões curvilíneas e mistas (continua)	44
Quadro 2 - Extensões curvilíneas e mistas (conclusão)	45
Quadro 3 - Citação do T.P de acordo com unidade temática	64
Quadro 4 - Descrição das habilidades referentes ao T.P na BNCC	64
Quadro 5 - Citação do T.P de acordo com o eixo de cognitivo	65
Quadro 6 - Citação do T.P de acordo com nível de proficiência do E.F	66
Quadro 7 - Citação do T.P de acordo com nível de proficiência do E.M	66
Quadro 8 - Estudos revisados	68
Quadro 9 - Classificação dos Relógios de Sol	91
Quadro 10 - Compilado de gráficos que quantificam e comparam as respostas dos alunos	92
Quadro 11- Estrutura da primeira atividade no Desmos	96
Quadro 12- Estrutura da segunda atividade no Desmos	97
Quadro 13- Saberes prévios necessários para aprender o Teorema de Pitágoras	105
Quadro 14- Dificuldades encontradas pelos alunos na aplicação do Teorema de Pitágoras	105
Quadro 15 - Aprendizagem significativa	106
Quadro 16 - Critérios adotados na análise da Praxeologia Matemática	127
Quadro 17 - Descrição dos momentos e critério de análise da Praxeologia Didática	127
Quadro 18 – Alinhamento de objetivos às perguntas do questionário	132
Quadro 19 – Unidades temáticas de matemática (BNCC)	145
Quadro 20 – Teorema de Pitágoras e a Unidade Temática	148
Quadro 21 – Habilidades atribuídas ao teorema de Pitágoras (BNCC)	148

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ângulos notáveis	59
Tabela 2 - Quantitativo de acertos e incorreções no questionário prévio	93
Tabela 3 - Quantitativo de acertos e incorreções no questionário posteriori	93
Tabela 4 - Resultado da avaliação externa	102
Tabela 5 - Distribuição dos docentes por sexo	134
Tabela 6 - Distribuição de Faixa etária predominante	135
Tabela 7 - Distribuição de relatos quanto a oferta de formação continuada	136
Tabela 8 - Distribuição de frequência de participação dos docentes	136
Tabela 9 - Distribuição de tempo de serviço	137
Tabela 10 - Distribuição de início das aulas	138
Tabela 11 - Distribuição de recursos em falta	139
Tabela 12 - Distribuição de seleção de conteúdos	140
Tabela 13 - Distribuição de seleção de conteúdos	141
Tabela 14 - Distribuição de fixação de conteúdos	142
Tabela 15 - Distribuição de percepção de dificuldade em matemática	143
Tabela 16 - Distribuição de afinidade em matemática	143
Tabela 17 - Distribuição de principais dificuldades em matemática	144
Tabela 18 - Distribuição por importância de Unidades Temáticas	146
Tabela 19 - Tópicos e conteúdos referentes ao teorema de Pitágoras	149
Tabela 20 - Distribuição de recurso didático mais eficiente no ensino do teorema de Pitágoras	152
Tabela 21 - Distribuição de erros mais frequentes	152
Tabela 22 - Contingência entre a escolaridade e o início das aulas	156
Tabela 23 - Contingência entre a escolaridade e o método de fixação do conteúdo	157
Tabela 24 - Contingência entre a escolaridade e a dificuldade de ensinar matemática	157
Tabela 25 - Contingência entre a escolaridade e a afinidade dos alunos com a matemática	158
Tabela 26 - Contingência entre o tempo de serviço e o início das aulas	159
Tabela 27 - Contingência entre o tempo de serviço e o método de fixação do conteúdo	160

Tabela 28 - Contingência entre o tempo de serviço e a dificuldade de ensinar matemática	160
Tabela 29 - Contingência entre o tempo de serviço e a afinidade dos alunos com a matemática	161
Tabela 30 - Contingência entre a formação continuada e o início das aulas	162
Tabela 31 - Contingência entre a formação continuada e o método de fixação do conteúdo	163
Tabela 32 - Contingência entre a formação continuada e a dificuldade de ensinar matemática	163
Tabela 33 - Contingência entre a formação continuada e a afinidade dos alunos com a matemática	164

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comparação do índice de desempenho dos alunos na aplicação do pré-teste e pós-teste	94
Gráfico 2 - Afirmações sobre o Teorema de Pitágoras e o nível de concordância	95
Gráfico 3 - Resultado da avaliação interna	103
Gráfico 4 - Pesquisa de satisfação	103
Gráfico 5 - Avaliação quanto a adequação da linguagem utilizada na S.D	106
Gráfico 6 - Clareza das atividades propostas	107
Gráfico 7 - Sexo dos professores	134
Gráfico 8 - Faixa etária	135
Gráfico 9 - “A rede de ensino onde você atua oferece formação continuada.”	135
Gráfico 10 - “Quando a rede de ensino onde você trabalha, ou ainda outras instituições, ofertam curso de formação continuada.”	136
Gráfico 11 - Tempo de serviço como professor	137
Gráfico 12 - “Como você costuma iniciar suas aulas de matemática.”	137
Gráfico 13 - “Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas de matemática.”	139
Gráfico 14 - “Você seleciona os conteúdos de matemática a partir de que.”	139
Gráfico 15 - “Quais as principais formas de avaliação que você costuma aplicar/utilizar.”	141
Gráfico 16 - “Para fixar o conteúdo ministrado, você costuma.”	142
Gráfico 17 - “Você considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada.”	142
Gráfico 18 - “Seus alunos gostam de matemática.”	143
Gráfico 19 - “Quais as maiores dificuldades dos seus alunos nas aulas de matemática.”	144
Gráfico 20 - : “Qual unidade temática de matemática você considera mais importante nas suas aulas.”	146
Gráfico 21 - Em sua opinião, que recurso didático-pedagógico é/seria mais eficiente no ensino do teorema de Pitágoras.”	152

Gráfico 22 - “Quanto aos erros apresentados na resolução de problemas do teorema de Pitágoras, você destacaria como mais frequente.”

152

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>2. ASPECTOS HISTÓRICOS DO TEOREMA DE PITÁGORAS</b> .....	20
<b>3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DO TEOREMA DE PITÁGORAS</b> .....	24
3.1 DEMONSTRAÇÕES ACERCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	25
3.1.1 DEMONSTRAÇÃO DE PITÁGORAS .....	26
3.1.2 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES .....	27
3.1.3 DEMONSTRAÇÃO “UM” .....	28
3.1.4 DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE .....	29
3.1.5 DEMONSTRAÇÃO DE DA VINCI .....	30
3.1.6 DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA .....	30
3.1.7 DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL .....	31
3.1.8 DEMONSTRAÇÃO DE LEIBNIZ .....	32
3.1.9 DEMONSTRAÇÃO QUATERNIÔNICA .....	33
3.2 EXTENSÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	34
3.2.1 EXTENSÕES TRIÂNGULARES .....	34
3.2.2 EXTENSÕES RETILÍNEAS .....	38
3.2.3 EXTENSÕES CURVILÍNEAS OU MISTAS .....	41
3.3 GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	45
3.3.1 GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS .....	47
3.3.2 GENERALIZAÇÃO DE EUCLIDES .....	48
3.3.3 GENERALIZAÇÃO DE POLYA .....	49
3.3.4 GENERALIZAÇÃO DE THABIT .....	50
3.3.5 GENERALIZAÇÃO POR INTEGRAIS .....	52
3.4 ALGUMAS APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....	57
3.5 DE PITÁGORAS A FERMAT .....	59
<b>4. O TEOREMA DE PITÁGORAS NO CURRÍCULO NACIONAL</b> .....	62
4.1 DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS .....	62
4.2 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS .....	62
4.3 A BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM .....	64
4.4 SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA .....	65
<b>5. REVISÃO DE ESTUDOS</b> .....	67
5.1 ESTUDOS TEÓRICOS (E.T) .....	69
5.2 ESTUDOS EXPERIMENTAIS (E.E) .....	86
5.3 ESTUDOS DIAGNÓSTICOS (E.D) .....	108
5.4 ESTUDOS DE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (E.A.L.D) .....	122
<b>6. DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: PERSPECTIVA DE PROFESSORES PARAENSES</b> .....	130
6.1 PERCURSO METODOLÓGICO .....	130
6.2 ANÁLISE DO PERFIL DOS DOCENTES E SUAS ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS .....	134
6.3 MAPEAMENTO DE DIFICULDADES E ERROS RECORRENTES .....	147
6.4 TESTE EXATO DE FISHER .....	154
6.4.1 ASSOCIAÇÕES RELACIONADAS À ESCOLARIDADE DO DOCENTE .....	156
6.4.2 ASSOCIAÇÕES RELACIONADAS AO TEMPO DE SERVIÇO DO DOCENTE .....	158
6.4.3 ASSOCIAÇÕES RELACIONADAS A PARTICIPAÇÃO EM FORMAÇÃO CONTINUADA DO DOCENTE .....	161
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	165
<b>8. REFERÊNCIAS</b> .....	168
<b>9. ÍNDICE REMISSIVO</b> .....	171

## 1. INTRODUÇÃO

A Matemática, ao longo da história, consolidou-se como um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento da sociedade. Sua influência está em toda parte, servindo de base para avanços tecnológicos, melhoria da expectativa de vida e otimização da logística global. No cenário educacional, essa disciplina não se resume a decorar fórmulas, mas busca a compreensão dos padrões que explicam a realidade. Dentro desse vasto campo, o teorema de Pitágoras destaca-se como um objeto matemático central, cuja importância no Ensino Fundamental é clara por conectar diversas áreas do conhecimento e etapas do ensino.

Historicamente, o legado de Pitágoras de Samos e de sua escola pitagórica, fundada por volta de 572 a.C., vai além do campo dos números, trazendo para a matemática uma característica filosófica onde "tudo é número". Embora achados arqueológicos, como a placa Plimpton 322, mostrem que babilônios e egípcios já conheciam casos específicos do teorema mil anos antes de Cristo, atribui-se aos pitagóricos a primeira demonstração formal da regra. Esta estabelece que, em um triângulo retângulo, a área do quadrado desenhado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados desenhados sobre os catetos ( $a^2 = b^2 + c^2$ ).

Apesar dessa relevância milenar, o processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras enfrenta desafios sérios na atualidade. Pesquisas de autores como Alves (2019), Silva (2022), Majoni (2021) e Lino (2019) indicam que o ensino deste objeto muitas vezes se reduz a um aspecto puramente mecânico, priorizando a repetição de cálculos em vez da percepção geométrica e da investigação científica. No Estado do Pará, esse cenário é agravado por fatores como a carência de formação continuada e a escassez de recursos didático-pedagógicos adequados nas escolas públicas.

Esta pesquisa, portanto, surge da necessidade de realizar um diagnóstico situado na realidade paraense, buscando compreender, sob a ótica de 32 docentes da rede pública de municípios como Belém, Ananindeua e Abaetetuba, como se caracteriza o ensino e a avaliação deste teorema no 9º ano do Ensino Fundamental. O estudo se justifica pela identificação de falhas no domínio total do conceito por parte dos alunos, muitas vezes limitados por dificuldades em conteúdos básicos e pela falta de metodologias variadas que estimulem o pensamento crítico.

No âmbito das diretrizes nacionais, o trabalho alinha-se aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Enquanto os PCN sugerem que o ensino deve superar o exercício mecânico e integrar verificações experimentais e demonstrações, a BNCC estabelece competências específicas, como as habilidades EF09MA13 e EF09MA14, que exigem que o aluno seja capaz de demonstrar relações métricas e resolver problemas complexos envolvendo o teorema. Além disso, o monitoramento pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), reforça a necessidade de progressão na proficiência, indo desde cálculos simples até a aplicação em figuras tridimensionais.

Diante do problema diagnosticado — a predominância de um ensino tradicional e descontextualizado —, esta pesquisa deu origem a dois materiais distintos: a presente dissertação de mestrado e, em paralelo, um Produto Educacional criado em formato de um livreto independente. É importante destacar que este livreto não está inserido no corpo desta dissertação, configurando-se como uma proposta literária complementar intitulada "O Ensino do Teorema de Pitágoras via Atividades Experimentais".

Este livreto fundamenta-se na metodologia do Ensino de Matemática por Atividades Experimentais, defendida por Sá (2009). A ideia central é transformar o aluno em um agente ativo e investigador, quebrando a passividade da sala de aula tradicional. A obra paralela consiste em uma sequência de sete atividades experimentais organizadas de forma lógica, divididas em momentos de Organização, Apresentação, Execução, Registro, Análise e Institucionalização. O objetivo desse material complementar é oferecer ao professor um roteiro pronto para viabilizar uma aprendizagem significativa, partindo do concreto para a abstração.

A questão norteadora desta dissertação busca responder: **“Como se caracteriza o processo de ensino, aprendizagem e avaliação do Teorema de Pitágoras no 9º ano do Ensino Fundamental da rede pública no Estado do Pará, sob a perspectiva dos docentes?”**. Para responder a esse questionamento, o objetivo geral consistiu em realizar um diagnóstico das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras, fundamentando-se na ótica de professores de matemática; cujos resultados serviram de base para a criação do livreto de atividades experimentais mencionado.

Para atingir esses propósitos e oferecer uma visão completa do objeto de estudo, a dissertação está organizada em seis seções fundamentais:

A Seção 2 mergulha nos aspectos históricos, detalhando a origem do teorema e a filosofia da escola pitagórica.

A Seção 3 apresenta um robusto aporte matemático, catalogando diversas demonstrações (geométricas, algébricas e quaterniônicas) e explorando extensões e generalizações do teorema.

A Seção 4 analisa o tratamento do teorema nos documentos curriculares nacionais (PCN, BNCC e Saeb).

A Seção 5 traz uma revisão detalhada de estudos teóricos, experimentais e diagnósticos recentes produzidos no Brasil.

A Seção 6 descreve o percurso metodológico da pesquisa de campo e apresenta a análise do diagnóstico realizado com os 32 professores paraenses, mapeando os erros recorrentes dos alunos e as carências da rede pública.

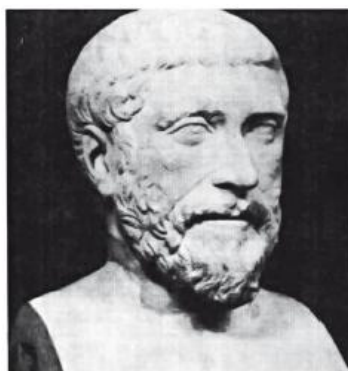
A Seção 7 expõe as considerações finais, sintetizando as contribuições do diagnóstico e os fundamentos que justificaram a criação do livreto paralelo.

Dessa forma, este trabalho não busca apenas diagnosticar um problema educacional regional, mas apresentar, por meio de uma produção acadêmica e literária conjunta, uma solução prática fundamentada que contribua para a melhoria do ensino de geometria, incentivando a descoberta e a independência cognitiva dos estudantes.

## 2. ASPECTOS HISTÓRICOS DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Diante do levantamento histórico e bibliográfico de autores como Eves (2011) e Boyer (1974), por exemplo, se constata que Pitágoras de Samos é um dos matemáticos com maior notoriedade na história, não há um grande número de informações concretas a respeito de seu legado, muito do que se sabe são menções em algumas obras de determinados pensadores, como no Sumário de *Eudemiano de Proclo*, que fundamenta os primeiros passos da matemática grega, de acordo com a obra, Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C em uma ilha grega chamada de *Samos*; em Eves (2011) é explanado a possibilidade de que Pitágoras tenha sido um pupilo de *Tales* devido à proximidade dele com *Mileto* e a diferença de idade ser de aproximadamente 50 anos (tales sendo mais velho), no entanto em Boyer (1974) essa possibilidade é colocada como improvável, justamente por essa diferença de meio século entre seus nascimentos.

Figura 1 - Busto alusivo a Pitágoras de Samos



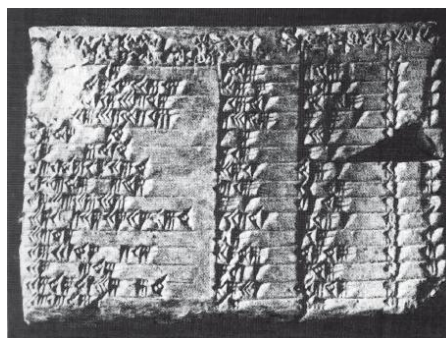
Fonte: Eves (2011, p. 98)

Conforme apontado por Eves (2011) e Boyer (1974) se elucida que Pitágoras obteve a oportunidade de viajar e residir em diversos lugares e assim enriquecer seus conhecimentos, por exemplo, no Egito e, muito provavelmente, à Índia. Ao retornar a sua cidade deparou-se com o governo do tirano *Polícrates*, tomando a atitude de se mudar para o porto marítimo de Crotona, fundando nesse período a conhecida escola pitagórica que se caracterizava por ser uma irmandade unida e com ritos secretos, nela se desenvolviam os estudos da filosofia, matemática e ciências naturais, em consequência dessa expansão e reconhecimento da escola, os pitagóricos enfrentaram diversas perseguições e ataques, provocando a fuga de Pitágoras da região, vivendo por volta de seus 80 anos, é possivelmente sendo assassinado; a escola deu continuidade ao menos mais 200 anos de atividade (Eves, 2011).

De acordo com Eves (2011) a filosofia pitagórica se baseava em supor que a essência humana e material seriam os números inteiros. Uma frase que foi atribuída a Pitágoras é justamente a que se refere que “tudo é número”, bem provável, também se considerava como lema dos pitagóricos. Boyer (1974) pontua a dificuldade de se provar a veracidade desses relatos, pois diversas frases e contribuições matemáticas desenvolvidas pelos pitagóricos foram atribuídas a Pitágoras, até mesmo o famoso teorema que carrega seu nome presume-se que os babilônicos já obtinham o seu conhecimento prático (Boyer, 1974).

Da Silva, Fanti e Pedroso (2016) sinalizam a existência de evidências concretas que provam o manuseio dos babilônicos com o teorema de Pitágoras, dentre diversos documentos que datam de meados de 1800 a 1600 a.C a placa de Plimpton 322, possui uma relação de 15 linhas e colunas preenchidas com ternos pitagóricos.

Figura 2 - Placa de Plimpton 322



Fonte: Eves (2011, p. 65)

Segundo Ribeiro (2013), os pitagóricos viviam em uma sociedade permanente e eram vegetarianos, não possuíam bens pessoais, esse grupo chegou a ser constituído por cerca de 300 membros que diariamente acompanhavam os ensinamentos de Pitágoras, sendo obrigada a seguir uma determinada sequência de regras:

Que, em seu nível mais profundo, a realidade é de natureza matemática.

Que a filosofia pode ser utilizada para a purificação espiritual.

Que a alma pode elevar-se para unir-se com o divino.

Que certos símbolos são de natureza mística.

Que todos os membros da sociedade devem manter absoluta lealdade e sigilo. (Ribeiro, 2013, p. 6).

Ainda em Ribeiro (2013) é verificada a presença de mulheres na comunidade, atitude não tão comum para época, além do mais, é destacada a presença de outros tipos de membros, os que não faziam parte de maneira efetiva (*acusmáticos*), estes

não tinham obrigação de sair de suas casas, nem lhe eram impostos o vegetarianismo e poderiam acumular posses. Os pitagóricos tinham como símbolo de representatividade o pentagrama/ pentágono estrelado, para eles os números revelavam determinados significados, atribuindo sentido exotérico, o pentagrama como um todo também era visto em representação da união entres os casais, a seguir será apresentado alguns significados em relação aos números listados por Ribeiro (2013).

**Zero** – absoluto e infinito, estado latente.

**Um** – razão, a origem de todos os números, o início de todas as coisas.

**Dois** – opinião, o feminino, principio passivo, o transitório.

**Três** – harmonia, o masculino, representando a estabilidade.

**Quatro** – justiça, imutável e equitativa.

**Cinco** – a união do primeiro número par (2) com o primeiro número ímpar (3), representação autêntica do homem.

**Seis** – número da criação.

**Sete** – único de 1 a 10 que não tem fator ou produto, associado a saúde, símbolo do homem perfeito.

**Oito** – duplo quadrado, significa pureza, da igualdade entre homens e amor (3 + 5).

**Nove** – tripla trindade, símbolo da justiça.

**Dez** – extremamente reverenciado por pitagóricos, era a soma dos quatro primeiros números (1 + 2 + 3 + 4).

Tratando-se ainda de números, existia uma grande discussão a respeito dos *irracionais*. Uma reta numérica contém uma infinidade de pontos que podem ser representados por números, tanto positivos, negativos e fracionários, conjunto de números esses denominados como *racionais*, de maneira geral, são números que podem ser representados por  $p / q$ , sendo  $p$  e  $q$  inteiros e  $q \neq 0$ , dessa forma se limitava o pensamento dos matemáticos, com a descoberta dos irracionais pelos pitagóricos esse pensamento se tornou caótico (Eves, 2011).

Tal descoberta relata Eves (2011), se desencadeou com muita surpresa, pois para os pitagóricos tudo poderia ser representado por números inteiros; ademais, essa ideia se contrariava em relação a sua filosofia e até mesmo ao senso comum, não sendo nada intuitivo. Ribeiro (2013) explana a não aceitação dos números irracionais pelos pitagóricos, sendo proibidos de estudar ou divulgar qualquer

conteúdo relacionado, para eles os números possuíam uma conotação harmônica do universo, e os irracionais acabavam por desconfigurar essa harmonia.

De acordo com Eves (2011)  $\sqrt{2}$  foi por um longo período o único número irracional constatado, o que provocou na comunidade insatisfação e desavenças, existiam alguns contos populares relatando que, possivelmente, *Hipaso* foi arremessado ao mar pelo motivo de ter revelado segredos a terceiros, outra versão narra que ele foi banido da comunidade com “direito” a exibição de um túmulo em seu nome simbolizando a sua morte para os membros.

É possível citar muitas outras contribuições de Pitágoras para ciências e outras áreas: é-lhe associado a descoberta na música de quando se divide uma corda ao meio é aumentado o som em uma oitava; como filósofo defendia que a justiça ou punição deveria ser aplicada proporcionalmente a cada ato estabelecido, premissa denominada como “justiça aritmética” (Silva, 2014). Nesse sentido, se corrobora a importância de Pitágoras no desenvolvimento das diversas áreas do conhecimento humano, no entanto, como foco do trabalho, no tópico seguinte se destrinchará de maneira específica o teorema que leva seu nome (Teorema de Pitágoras) e algumas de suas particularidades matemáticas, a exemplo de generalizações do teorema.

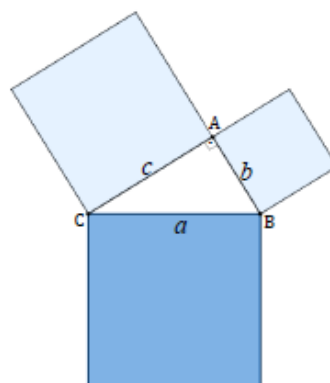
### 3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema que carrega o nome de Pitágoras enuncia que: dado um triângulo retângulo cujo seu maior lado é denominado por *hipotenusa*, é o resultado da soma dos quadrados formados pelos outros dois lados (*catetos*), todos elevados a segunda potência. Sendo “a” a hipotenusa, “b” e “c” os catetos, equivale dizer que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A seguinte estrutura pode ser representada geometricamente, assim como Da Silva, Fanti e Pedroso (2016), explanam em seu artigo, de modo geral, a área dos quadrados formados a partir dos lados *b* e *c* do triângulo, são somados e conseqüentemente o resultado é igual à área do quadrado formado pelo lado *a* (hipotenusa).

Figura 3 - Representação geométrica do T.P



Fonte: Da Silva, Fanti e Pedroso (2016, p. 25)

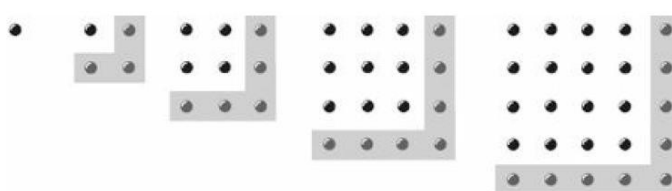
É válido ressaltar, também que, a *reciprocidade do teorema de Pitágoras* é verdadeira, logo, sendo *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo, e conseqüentemente “ $a^2 = b^2 + c^2$ ”, então o triângulo se caracteriza como retângulo (Da Silva, Fanti e Pedroso, 2016).

Como já mencionado anteriormente, outros povos já demonstraram ciência de tal conhecimento; conforme Lima (1991) relata, babilônicos e egípcios dominavam casos particulares do teorema, há a constatação de um documento chinês, datado de mais de 1000 anos antes de Cristo, nele, de acordo com Lima (1991) se encontra a *afirmação* “Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa”; na Índia, antes de Cristo também, encontraram-se registros da sabedoria que triângulos com os lados 3, 4, 5 ou 5, 12, 13 se configuravam como retângulos, nesse sentido, para Lima (1991) tudo

indica que Pitágoras ou algum de seus discípulos revolucionou a história da matemática sendo o primeiro a demonstrar o teorema.

Segundo Roque (2012) o teorema para Pitágoras/pitagóricos se direcionava a resultados aritméticos e não geométricos, se referindo como “aritmética” a padrões numéricos, o desenvolvimento do teorema decorreu através das “tripas pitagóricas”, que dependia de a soma de dois números quadrados ser igual a outro número quadrado, sendo as triplas constituídas apenas por números inteiros, sendo esses valores associados a medida dos lados de um triângulo retângulo.

Figura 4 – representação do Gnomon



Fonte: Roque (2012, p. 87)

Conforme Roque (2012) relata, é bem possível que os pitagóricos chegassem as triplas através do que eles denominavam como *gnomon* - sinônimo de número ímpar -, sendo formado pela sequência de números quadrados sucessivamente a partir do 1, os gnomons podem ser visualizados na Figura 4, são representados por faixas na cor mais escura, a gradação dos quadrados devem respeitar o crescimento dos gnomons através dos números ímpares, por exemplo, para sair dos gnomons com 3 pontos; que forma um quadrado de 4 pontos; deve se atribuir o próximo número ímpar (5), formando um quadrado de 9 pontos, dando continuidade a esse procedimento, haverá um momento em que os gnomons também serão constituídos por um valor quadrado, representado no último quadrado da figura (4), seguindo a sequência lógica:  $9 + 16 = 25$ , sendo 9 o valor dos gnomons; 16 os remanescentes e 25 o total; nota-se que cada valor é quadrado de um número ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ), dando origem a primeira tripla pitagórica: 3, 4 e 5 (Roque, 2012).

Nesse sentido, Roque (2012) destaca que:

O método usado para encontrar triplas pitagóricas não é suficiente para assegurar a validade geométrica do teorema “de Pitágoras” em todos os casos. Tal método permite gerar algumas triplas, como (3, 4, 5), mas não todas as triplas de números que podem medir os lados de um triângulo retângulo, sobretudo porque essas medidas não são necessariamente dadas por números naturais. (Roque, 2012, p. 88).

### 3.1 DEMONSTRAÇÕES ACERCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Assim como foi citado anteriormente, o que se especula é que Pitágoras tenha grande influência no desenvolvimento progresso na demonstração da proposição, tal fato pode ser constatado em Eves (2011). Um dos aspectos que torna o teorema mais intrigante é certamente sua demonstração, ou ainda, suas demonstrações, pois ele apresenta uma gama delas, *Os Elementos* de Euclides com a tradução de Bicudo (2009) releve em sua proposição 47 uma demonstração do teorema, Loomis (1968), um grande aficionado pela proposição, cataloga cerca de 370 demonstrações. A obra *the pythagorean proposition* do autor estadunidense, Elisha Scott Loomis, o livro possui duas edições, sendo a sua 2ª edição contendo cerca de 370 demonstrações, que de acordo com o Autor se dividem em quatro tipos:

Aquelas baseadas em Relações Lineares (implicando o conceito de tempo) – Provas Algébricas.

Aqueles baseados na comparação de áreas (implicando o conceito de espaço) – provas Geométricas.

Aquelas baseadas na Operação Vetorial (implicando o conceito de direção) – provas Quaterniônicas.

Aquelas baseadas na Massa e na velocidade (implicando o conceito de força) – provas Dinâmicas. (Loomis, 1968, VII – VIII, tradução nossa).

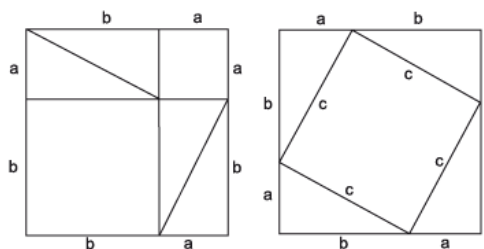
O Autor destaca mais alguns outros objetivos referentes ao trabalho como o fato de o número de provas algébricas e geométricas serem ilimitadas; a existência de apenas dez tipos de figuras geométricas das quais uma prova geométrica pode ser deduzida e nenhum tipo de prova trigonométrica é possível, pois seus princípios fundamentais partem da proposição pitagórica (Loomis, 1968). Nesse sentido, seguidamente será apresentado um apanhado de demonstrações que possuem notável destaque.

### 3.1.1 DEMONSTRAÇÃO DE PITÁGORAS

A primeira demonstração que será explanada se trata do que provavelmente foi desenvolvida por Pitágoras, Eves (2011) e Lima (1991) discorrem que se refere a uma demonstração “geométrica” baseada em decomposição, como ilustrado na Figura 5, dado dois quadrados de lados  $a + b$ , o primeiro constituído por 2 quadrados; um de lado  $a$  e outro de lado  $b$ ; e 4 triângulos semelhantes de catetos  $a$  e  $b$ ; o quadrado do lado direito é formado por 4 triângulos congruentes ao dado, e um quadrado lado  $c$ , logo, logicamente, a soma das áreas dos quadrados do lado

esquerdo deve ser igual a área do quadrado de lado  $c$  representado à direita, ou seja,  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Figura 5 - Demonstração de Pitágoras

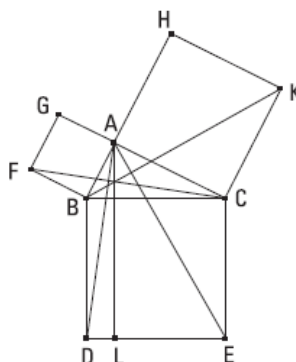


Fonte: Eves (2011, p. 103)

### 3.1.2 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES

Tal demonstração se localiza no livro I da obra *Os elementos* de Euclides (300 a.C), com a tradução de Bicudo (2009), especificamente a proposição 47 que diz “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (Euclides, 2009, p. 132. Tradução Bicudo).

Figura 6 - Demonstração de Euclides



Fonte: Euclides (2009, p. 133)

Observando a Figura 6 proposta acima, verifica-se que a proposição conjectura que dado um triângulo retângulo ABC, com o ângulo reto em  $\widehat{BAC}$ , afirma-se que o quadrado construído sobre  $\overline{BC}$  é igual a soma dos quadrados construídos sobre  $\overline{BA}$  e  $\overline{AC}$ . Dado o quadrado BDEC construído sobre  $\overline{BC}$  e respectivamente GFBA e HACK construídos sobre  $\overline{BA}$  e  $\overline{AC}$ , se traça a partir de A o segmento  $\overline{AL}$  sendo paralelo a  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  e tenha ponto em comum com  $\overline{AD}$  e  $\overline{FC}$ , por conseguinte, salienta-se a colinearidade dos pontos C,A, G e consequentemente B, A, H; logo o triângulo ABD é congruente ao FBC, corroborado pelo caso LAL (lado, ângulo, lado), assim como o paralelogramo de diagonal  $\overline{BL}$  é o dobro do triângulo ABD e o quadrado GFBA o dobro do triângulo FBC, então o paralelogramo de

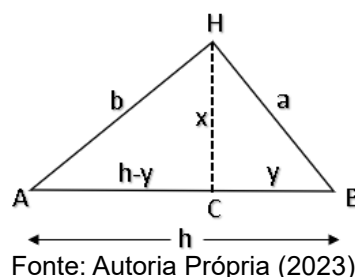
diagonal  $\overline{BL}$  é igual ao quadrado GFBA, seguindo a lógica, prova-se que o paralelogramo de diagonal  $\overline{CL}$  é igual ao quadrado HACK; o quadrado BDEC, nesse sentido, é igual a soma dos quadrados GFBA e HACK.

Lima (1991) elenca mais algumas demonstrações do teorema em consequência de sua maneira de construção ou por quem foram demonstradas, a exemplo de um presidente dos Estados Unidos e até mesmo por Leonardo da Vinci, demonstrações exibidas em tópicos subsequentes.

### 3.1.3 DEMONSTRAÇÃO “UM”

Referente a essa demonstração que se faz presente na obra de Loomis (1968), se configura como a primeira apresentada dentre as mais de 400 catalogadas, trata-se de uma demonstração de caráter algébrico e baseada em propriedades de semelhança entre triângulos, de acordo com o enunciado, segue que:

Figura 7 - Demonstração "UM"



Dado um triângulo retângulo ABH, traça-se um segmento  $\overline{HC}$  perpendicular a  $\overline{AB}$ , sendo os três triângulos formados (ABH, ACH e HCB) semelhantes entre si, por conveniência denota-se  $\overline{BH}$ ,  $\overline{HA}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{HC}$ ,  $\overline{CB}$  e  $\overline{AC}$  como  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $x$ ,  $y$  e  $h-y$  respectivamente. Visto que dado três triângulos semelhantes, sendo eles relacionados por semelhança, possibilita a formação de nove proporções simples, tais proporções resultam nas seguintes equações:

$$(1) \quad \frac{h}{b} = \frac{b}{h-y} \quad \therefore b^2 = h^2 - hy.$$

$$(2) \quad \frac{h}{b} = \frac{a}{x} \quad \therefore ab = hx.$$

$$(3) \quad \frac{b}{h-y} = \frac{a}{x} \quad \therefore bx = ah - ay.$$

$$(4) \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{x} \quad \therefore ab = hx.$$

$$(5) \quad \frac{h}{a} = \frac{a}{y} \quad \therefore a^2 = hy.$$

$$(6) \quad \frac{b}{x} = \frac{a}{y} \quad \therefore xa = by.$$

$$(7) \quad \frac{b}{a} = \frac{h-y}{x} \quad \therefore bx = ah - ay.$$

$$(8) \quad \frac{b}{a} = \frac{x}{y} \quad \therefore xa = by.$$

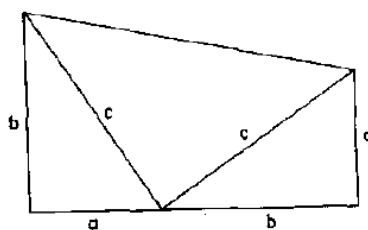
$$(9) \quad \frac{h-y}{x} = \frac{x}{y} \quad \therefore x^2 = hy - y^2.$$

Verificando-se que as equações (2) e (4) são iguais, assim com as (3) e (7); (6) e (8), fica evidente a existência de seis equações distintas apenas. Combinando-se as equações (1)  $b^2 = h^2 - hy$  e (5)  $a^2 = hy$  se obtém a equação  $h^2 = a^2 + b^2$ . Loomis (1968) ressalta ainda que, além dessa demonstração ser a conhecida mais curta (se considerar a cronologia da afirmação) ela é um corolário de uma verdade mais ampla (princípio da similaridade), devido os lados homólogos de triângulos semelhantes serem proporcionais.

### 3.1.4 DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE

Tal de demonstração foi desenvolvida por James Abram Garfield, foi um presidente dos Estados Unidos da América (EUA) que governou por pouco tempo, pois, ele foi assassinado após 4 meses de mandato, além do mais, possuía o cargo de general e era um grande admirador de matemática (Lima, 1991). De acordo com a proposição, dado um trapézio, como mostra a Figura 8.

Figura 8 - Demonstração do Presidente



Fonte: Lima (1991, p. 55)

De bases  $a$  e  $b$ , altura  $a + b$ , sua área é igual à soma das bases dividida por dois, multiplicado pela altura, sendo que, essa mesma é igual soma das áreas de três triângulos retos.

$$\frac{a+b}{2} \times (a + b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

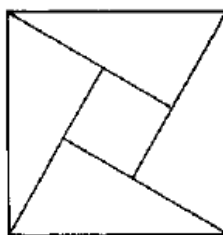
Realizando a simplificação da equação:

$$\frac{a+b}{2} \times (a + b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2};$$

$$(a + b)^2 = 2 \times \frac{(2ab+c^2)}{2};$$



Figura 10 - Demonstração Bhaskara

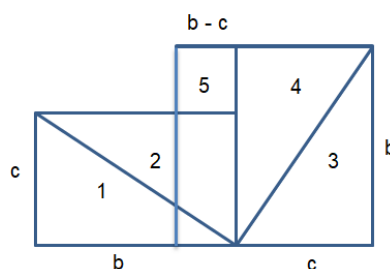


Fonte: Eves (1992, p. 56)

Bastian (2000) expõe duas formas de interpretar o que foi pontuada por Bhaskara, a demonstração, dependendo da estratégia utilizada pode ser do tipo algébrico ou geométrico:

O quadrado maior ( $A_1$ ), com seus lados referentes à hipotenusa de todos os quatro triângulos congruentes entre si, pode ser decomposto, juntamente com um quadrado menor de lado “b-c”, como ilustra a Figura 11 ( $A_2$ ).

Figura 11 – Demonstração de Bhaskara



Fonte: Bastian (200, p. 56)

Nesse sentido, sabe-se que a área de ( $A_1$ ) é igual a área de ( $A_2$ ), e como área de ( $A_1$ ) =  $a^2$ ;

E área de ( $A_2$ ) =  $b^2 + c^2$ , pois:

$$A_2 = bc + bc + (b-c)^2$$

$$A_2 = 2bc + (b-c)^2$$

$$A_2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

$$A_2 = b^2 + c^2.$$

$$\text{Então } a^2 = b^2 + c^2.$$

De maneira algébrica, observando a Figura 11:

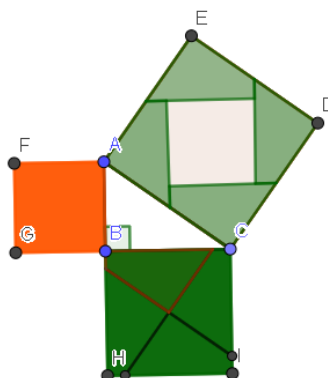
$$4 \frac{bc}{2} + (b-c)^2 = a^2, \text{ logo: } 2bc + b^2 - 2bc + c^2 = a^2, \text{ então: } b^2 + c^2 = a^2.$$

### 3.1.7 DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

A demonstração desenvolvida por Henry Perigal, um contador nascido em Londres, amante de astronomia e matemática constitui a obra de Loomis (1968), sua estratégia de demonstração se baseava no denominado método de *dissecção*:

Conforme ilustra a Figura 12, após construir um triângulo retângulo com seus respectivos quadrados traçados a partir dos lados do triângulo, traça-se um segmento paralelo a hipotenusa no quadrado construído referente ao maior cateto e que passe através de seu centro, posteriormente, delimita-se outro segmento, nesse caso deve ser perpendicular ao anterior, passando também pro seu centro, logo, é possível perceber a origem de quatro quadriláteros congruentes entre si no quadrado BCIH, esses polígonos serão reorganizados internamente ao quadrado EDCA (formado a partir da hipotenusa), de modo que estabeleçam um quadrado em seu centro, que demarcar exatamente a área do quadrado FABG, demonstrando assim, a proposição pitagórica.

Figura 12 - Demonstração de Perigal



Fonte: Autoria Própria (2023)

### 3.1.8 DEMONSTRAÇÃO DE LEIBNIZ

Conforme Loomis (1968) explana, essa é uma suposta demonstração desenvolvida por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), se caracteriza como uma algébrica demonstração indireta, que conjectura:

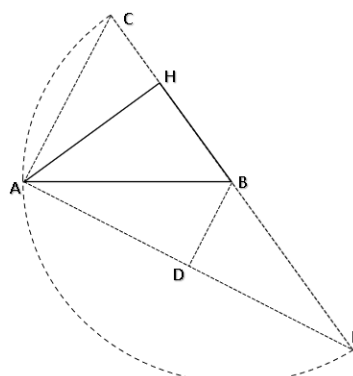
$$\text{Se (1) } HA^2 + HB^2 = AB^2, \text{ então (2) } HA^2 = AB^2 - HB^2;$$

$$\text{Daí (3) } HA^2 = (AB + HB).(AB - HB).$$

Dado a Figura 13, considere  $\overline{BE}$  e  $\overline{BC}$  iguais a  $\overline{AB}$ , sendo B o centro do semicírculo CAE, traça-se  $\overline{AE}$  e  $\overline{AC}$ , e  $\overline{BD}$  sendo perpendicular a  $\overline{AE}$ . Por conseguinte, efetua-se o produto entre as equações (4)  $HE = AB + HB$  e (5)  $HC = AB - HB$ , assim,

$HE \times HC = HA^2$ , que acaba por ser verdade, pois os triângulos AHC e EHA são semelhantes.

Figura 13 - Demonstração de Leibniz



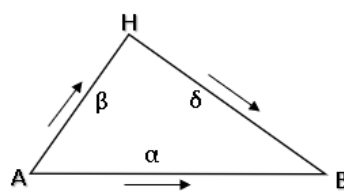
Fonte: Autoria Própria (2023)

Nota-se que o ângulo  $CAH = AEH$ , desta maneira, (7)  $\frac{HC}{AH} = \frac{HA}{HE}$ , já que o ângulo  $HAC = E$ , então o ângulo  $CAH = EAH$ . Nesse sentido, denota-se ainda que  $AEH + EAH = 90^\circ$  e  $CAH + EAH = 90^\circ$ , logo o ângulo  $EAC = 90^\circ$ . Com o vértice A pertencente ao semicírculo, o ângulo  $EAC$  está inscrito no semicírculo, sendo ainda, um ângulo reto. Como a equação (1) por intermédio dos cálculos desenvolvidos a partir dela, desencadeia em um triângulo retângulo, ao se inverter o processo e seguir a lógica, ou seja, saindo do triângulo retângulo, se chega à equação pretendida  $h^2 = a^2 + b^2$ .

### 3.1.9 DEMONSTRAÇÃO QUATERNIÔNICA

De acordo com o que já foi anteriormente exposto, Loomis (1968) apresenta quatro maneiras de demonstração do teorema de Pitágoras, sendo já apresentadas algumas geométricas e algébricas, logo, o foco da abordagem nesse momento se direciona as demonstrações quaterniônicas, ou análise vetorial, inserindo o conceito de direção como forma de estratégia de demonstração. Loomis (1968) apresenta quatro demonstrações que incorporam essa característica, segue a construção de uma delas.

Figura 14 - Demonstração Quaterniônica



Fonte: Autoria Própria (2023)

Com o suporte da Figura 14, observe que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  representam tanto os lados, as direções e distâncias, (para facilitar  $a$ ,  $b$  e  $g$  substituirão  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  respectivamente). Pelo princípio da direção,  $a = b + g$ , ademais, como  $H$  é um ângulo reto, então é válido que  $b.g = 0$ .

Dado (1)  $a = b + g$ , elevando-se (1) ao quadrado se obtém (2)  $a^2 = (b + g)^2 \rightarrow a^2 = b^2 + 2.b.g + g^2$ . Como o produto entre  $b$  e  $g$  é 0, logo  $a^2 = b^2 + g^2$ , sendo  $\overline{AB} = \alpha$ ,  $\overline{BH} = \delta$  e  $\overline{AH} = \beta$ , pode-se representar, dessa forma:  $h^2 = a^2 + b^2$ .

Por fim, Loomis (1968) destaca algumas provas envolvendo o estudo de dinâmica, após análise metodológica e bibliográfica, delibera-se pela não demonstração nesse presente trabalho, ficando a critério do leitor o aprofundamento em determinada temática.

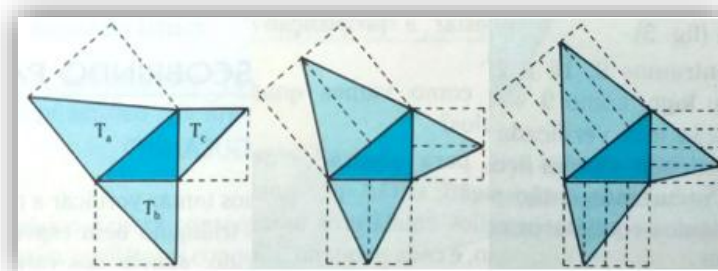
### 3.2 EXTENSÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Até o presente momento se verificou a veracidade do teorema de Pitágoras e algumas maneiras de corroborar a proposição, nesse sentido, é fato que dado um triângulo retângulo é construído quadrados a partir de seus lados, a soma das áreas dos quadrados formados por meio dos catetos é igual a área do quadrado construído a partir de sua hipotenusa. Conseqüentemente, é possível investigar se essa ideia se limita apenas a área de quadrados ou se estende para outras figuras geométricas.

#### 3.2.1 EXTENSÕES TRIÂNGULARES

Barbosa (1993) analisa se essa mesma lógica é válida para triângulos. De forma semelhante de como foi desenvolvido com quadrados, nesse momento a análise parte de triângulos obtidos a partir de quadrados.

Figura 15 - Triângulos traçados a partir de quadrados



Fonte: Barbosa (1993, p. 27)

Observam-se com o auxílio da Figura 15, três exemplos de triângulos formados a partir da construção de quadrados, cada um deles representa a metade da área de seu respectivo quadrado, sendo assim:

$$T_b = \frac{Q_b}{2}; T_c = \frac{Q_c}{2};$$

Somando, então:

$$T_b + T_c = \frac{Q_b + Q_c}{2}$$

Sabe-se que pelo teorema de Pitágoras:

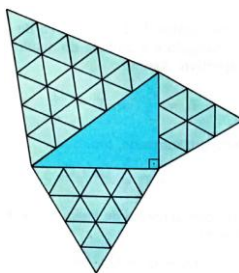
$$Q_b + Q_c = Q_a, \text{ logo:}$$

$$T_b + T_c = \frac{Q_a}{2} = T_a.$$

Validando assim, a respectiva proposição.

Seguindo essa lógica, torna-se conveniente a verificação em triângulos equiláteros.

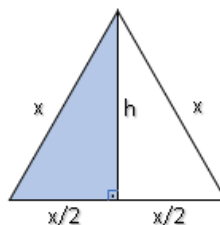
Figura 16 - Triângulos compostos por áreas unitárias



Fonte: Barbosa (1993, p. 28)

Como ilustra a Figura 16, a estratégia se consolida com um triângulo clássico de lados 3, 4 e 5 em unidades de comprimento e pequenos triângulos de áreas unitárias, ficando evidente após a contagem:  $9 + 16 = 25$ , um caso bem particular, porém, que agrega mais credibilidade. Nesse sentido é pertinente provar para triângulos equiláteros traçados a partir de triângulos retângulos quaisquer.

Figura 17 - Triângulo equilátero de lado  $x$



Fonte: Autoria Própria (2023)

Acompanhando a ilustração da Figura 17, estabelece-se inicialmente a fórmula da área de um triângulo equilátero de lado  $x$ , verifique que a altura ( $h$ ) do

triângulo divide a figura em dois triângulos retos e é mediatriz da base, selecionando um desses triângulos e aplicando o teorema de Pitágoras, se resulta:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2;$$

$$h^2 = \frac{3x^2}{4};$$

$$h = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando-se na fórmula para área de um triângulo de área  $T_x$ , de lado  $x$ , se obtém:

$$T_x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tratando-se de triângulos equiláteros de catetos  $b$  e  $c$ , conseqüentemente de maneira respectiva  $T_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$  e  $T_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ .

Ao se realizar a soma entre eles, teremos:

$$T_b + T_c = \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4}.$$

Sendo  $b^2 + c^2 = a^2$ , é válido:

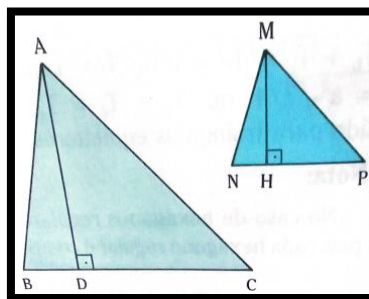
$$T_b + T_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

Logo:  $T_b + T_c = T_a$ .

Nesse sentido, verificando-se o rigor matemático, fica evidente que o padrão da proposição pitagórica em termos de áreas, engloba também, triângulos equiláteros. É pertinente observar, haja vista que *hexágonos regulares* podem ser interpretados como uma composição de triângulos equiláteros congruentes, por conseqüência a afirmação é igualmente verdadeira para eles.

Expandido um pouco mais a lógica, Barbosa (1993) verifica se a proposição pitagórica é verdadeira para triângulos semelhantes. A princípio prova-se um lema essencial a construção: *Se dois triângulos são semelhantes, então possuem as áreas proporcionais aos quadrados dos comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.*

Figura 18 - Triângulos Semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 30)

Dados os triângulos semelhantes ABC e MNP, ilustrados na Figura 18, relacionando as alturas AD e MH com os relativos lados BC e NP respectivamente, sendo esses triângulos semelhantes, as medidas das alturas são proporcionais as medidas dos lados homólogos.

$$\frac{AD}{MH} = \frac{BC}{NP}$$

Por outro lado, as áreas dos respectivos triângulos (T e T') são resultadas de:

$$T = \frac{BC \cdot AD}{2}; T' = \frac{NP \cdot MH}{2},$$

Ao se efetuar a divisão, obtém-se:

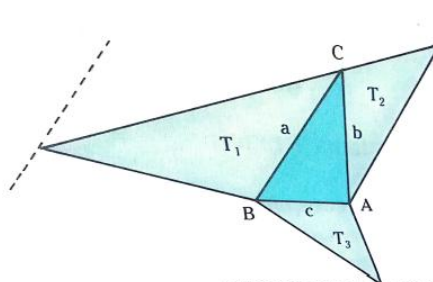
$$\frac{T}{T'} = \frac{BC \cdot AD}{NP \cdot MH}$$

Porém, fazendo-se uso da relação antecedente se possibilita:

$$\frac{T}{T'} = \frac{BC \cdot BC}{NP \cdot NP} = \frac{(BC)^2}{(NP)^2}$$

Estabelecido a prova anterior, define-se nesse momento um triângulo retângulo BAC composto por três triângulos semelhantes, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 - Triângulos BAC composto por triângulos semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 31)

Em consonância com o lema apresentado:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{T_3}{T_1} = \frac{c^2}{a^2},$$

Resultando em:

$$T_2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot T_1 \text{ e } T_3 = \frac{c^2}{a^2} \cdot T_1,$$

Somando:

$$T_2 + T_3 = \frac{(b^2 + c^2) \cdot T_1}{a^2},$$

Consequentemente  $b^2 + c^2 = a^2$  resultando em  $T_2 + T_3 = T_1$ , chega-se à prova que a área de um triângulo qualquer construído sobre a hipotenusa é igual soma das áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre os catetos. Barbosa (1993) destaca ainda como nota, que:

[...] a proposição vale mesmo que os triângulos não sejam semelhantes; mas é necessário que as alturas sejam as mesmas dos triângulos semelhantes. Em outras palavras, as alturas devem ser proporcionais aos lados do triângulo retângulo (Barbosa, 1993, p. 31).

### 3.2.2 EXTENSÕES RETILÍNEAS

Barbosa (1993) apresenta ainda, um apanhado de extensões que se encontram na sua grande maioria em função de outra forma geométrica, caracterizada nas figuras seguintes como áreas hachuradas, que variam desde figuras retilíneas a curvilíneas, seguem algumas retilíneas.

➤ Como ilustra a Figura 20, apresentando triângulos equiláteros a partir dos lados do triângulo retângulo, simultaneamente as áreas hachuradas  $E_a$ ,  $E_b$  e  $E_c$ , sendo elas respectivamente, relativas à hipotenusa ( $a$ ) e os catetos ( $b$  e  $c$ ), seguem ( $Q$  = áreas dos quadrados;  $T$  = áreas dos triângulos equiláteros):

$$E_b = Q_b - T_b;$$

$$E_c = Q_c - T_c;$$

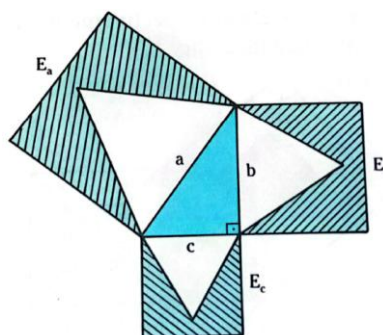
Somando:

$$E_b + E_c = (Q_b + Q_c) - (T_b + T_c)$$

Utilizando-se da proposição de áreas, obtém-se:

$$E_b + E_c = Q_a - T_a = E_a.$$

Figura 20 - Extensão entre triângulo equilátero e quadrado



Fonte: Barbosa (1993, p. 33)

➤ Sendo os quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, os quadrados hachurados são construídos a partir dos pontos médios dos quadrados circunscritos, logo, segue que ( $QI = \text{áreas dos quadrados inscritos}$ ):

$$QI_b = \frac{Q_b}{2}, \quad QI_c = \frac{Q_c}{2};$$

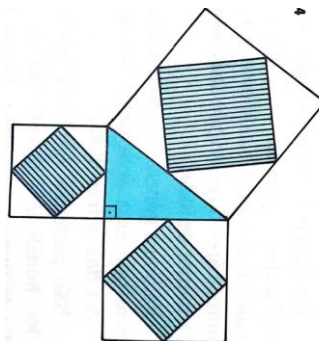
Somando:

$$QI_b + QI_c = \frac{(Q_b + Q_c)}{2};$$

Aplicando a proposição pitagórica:

$$QI_b + QI_c = \frac{Q_a}{2} = QI_a.$$

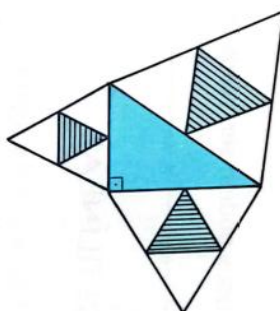
Figura 21 - Extensão entre quadrados inscritos a partir de pontos médios



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➤ De analogia semelhante a Figura 21, a Figura 22 projeta agora, ao invés quadrados, triângulos inscritos em triângulos equiláteros, traçados a partir dos lados dos triângulos retangulares, sendo os vértices dos triângulos hachurados estabelecidos nos pontos médios em questão.

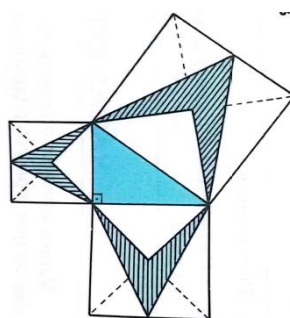
Figura 22 - Extensão entre triângulos inscritos a partir de pontos médios



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➤ Dado os quadrados externamente, as figuras inscritas e devidamente hachuradas são traçadas a partir das diagonais e pontos médios dos quadrados correspondentes, respeitando assim, a proposição pitagórica, acompanhe na Figura 23.

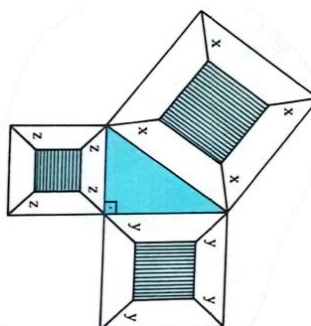
Figura 23 - Extensão a partir de diagonais e pontos médios dos quadrados correspondentes



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➤ A ilustração da Figura 24 é composta por quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, com quadrados inscritos e desenvolvidos em função da quarta parte ( $1/4$ ) das diagonais, representadas por  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

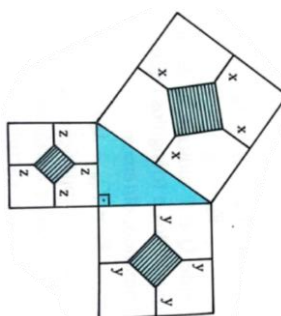
Figura 24 - Extensão a partir de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, com quadrados inscritos e desenvolvidos em função da quarta parte das diagonais



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➤ A Figura 25 é composta por quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, com quadrados menores inscritos e traçados a partir da terça parte ( $1/3$ ) das diagonais, representadas por  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

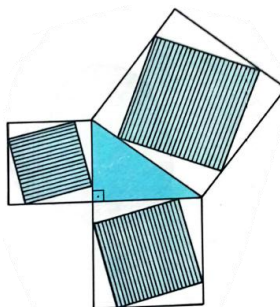
Figura 25 - Extensão a partir de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, com quadrados menores inscritos e traçados a partir da terça parte das diagonais



Fonte: Barbosa (1993, p. 34)

➤ Situação um pouco mais elaborada, nesse caso os quadrados hachurados e inscritos, interceptam pontos que dividem os lados dos quadrados circunscritos em uma mesma razão ( $k$ ), acompanhe a ilustração na Figura 26.

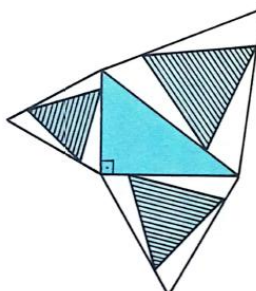
Figura 26 - Extensão entre quadrados inscritos a partir de uma razão k



Fonte: Barbosa (1993, p. 35)

➤ Finalizando as retilíneas, a ilustração da Figura 27 possui o mesmo princípio da figura anterior, ou seja, a figura geométrica hachurada e inscrita, interceptam pontos que dividem os lados da circunscrita em uma mesma razão (k), no entanto, nesse caso as figuras são triângulos equiláteros.

Figura 27 - Extensão entre triângulos inscritos a partir de uma razão k



Fonte: Barbosa (1993, p. 35)

### 3.2.3 EXTENSÕES CURVILÍNEAS OU MISTAS

Barbosa (1993) apresenta mais algumas extensões do teorema de Pitágoras, porém, agora são casos com características não retilíneas, ou seja, figuras curvilíneas ou mistas, que variam desde segmentos de retas a arcos de circunferências. Barbosa (1993) destaca ainda que:

[...] Hipócrates foi o descobridor do primeiro caso de quadratura de figura curvilínea, quando mostrou que a soma das áreas de duas "lúnulas" era igual à área de um triângulo retângulo isósceles, ainda que a proposição seja válida também para triângulos retângulos quaisquer (Barbosa, 1993, p. 35).

➤ Este primeiro caso da Figura 28, refere-se a círculos inscritos nos respectivos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo. Sejam  $C_a$ ,  $C_b$  e  $C_c$  as áreas dos círculos inscritos que estão hachurados, logo:

$$C_b = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{4}; C_c = \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{4};$$

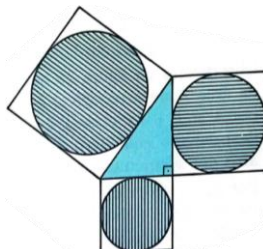
Somando:

$$C_b + C_c = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{4},$$

Porém, lembrando que pela proposição pitagórica,  $b^2 + c^2 = a^2$ , portanto:

$$C_b + C_c = \frac{\pi a^2}{4} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = C_a.$$

Figura 28 - Extensão a partir de círculo inscrito em quadrado

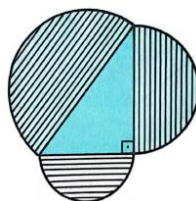


Fonte: Barbosa (1993, p. 35)

➤ Conforme a Figura 29 ilustra, os semicírculos hachurados possuem o diâmetro igual aos respectivos lados do triângulo. Logo, temos que:

$$SC_b + SC_c = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{8} = \frac{\pi a^2}{8} = SC_a.$$

Figura 29 - Extensão de semicírculos sobre os lados do triângulo retângulo



Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

➤ A extensão presente na Figura 30 em particular, possui característica um tanto quanto diferente das demais. A geometria dessa figura é composta pelo triângulo retângulo, e as “lúnulas”, que são obtidas a partir delimitação entre dois arcos de circunferência, assemelhando-se com o formatado da lua, observe a ilustração da Figura 30 para melhor compreensão.

As lúnulas são extremidades conectadas aos respectivos lados do triângulo, dessa maneira, temos:

$$L_b = SC_b - X \text{ e } L_c = SC_c - Y;$$

Dessa maneira:

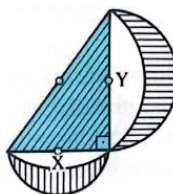
$$L_b + L_c = (SC_b + SC_c) - (X + Y);$$

E observando a figura ():

$$L_b + L_c = SC_a - (X + Y); \text{ ou ainda:}$$

$$L_b + L_c = T, \text{ sendo } T \text{ a área do triângulo retângulo.}$$

Figura 30 - Extensão a partir de "lúnulas"



Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

➤ As imagens presentes na Figura 31 são denominadas de arcos ogivais, que estão com seus diâmetros delimitados com os respectivos lados do triângulo. Observe na Figura 32 que a cada uma das áreas (A) dos arcos ogivais é dada por  $A = T + 2S$ , sendo T a área do triângulo equilátero e 2S área dos segmentos circulares, de outro ponto de vista,  $T + S$  é  $1/6$  da área de um círculo em que o raio é o lado do triângulo retângulo, portanto:

$$T + S = \frac{\pi R^2}{6} \text{ ou ainda, } S = \frac{\pi R^2}{6} - T,$$

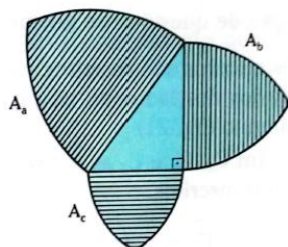
Logo:

$$A_b + A_c = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{3} - (T_b + T_c),$$

E como  $b^2 + c^2 = a^2$  e  $T_b + T_c = T_a$ , então é válido:

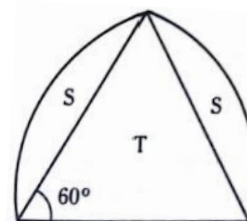
$$A_b + A_c = \frac{\pi a^2}{3} - T_a = A_a.$$

Figura 31 - Extensão de Arcos ogivais



Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

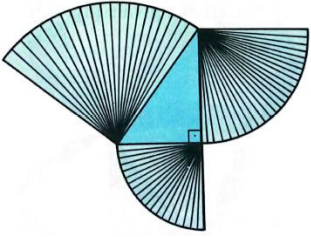
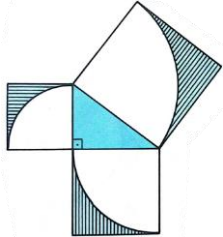
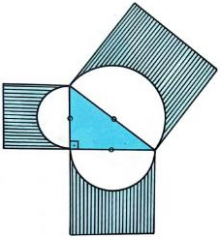
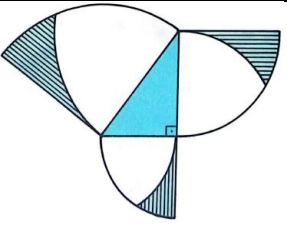
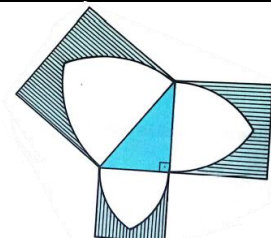
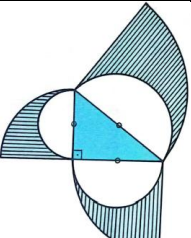
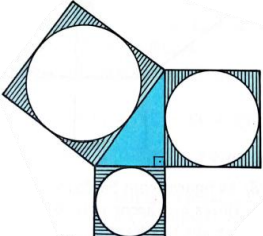
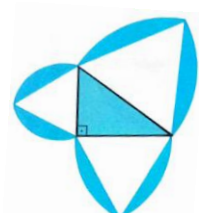
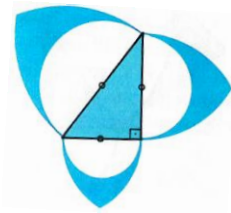
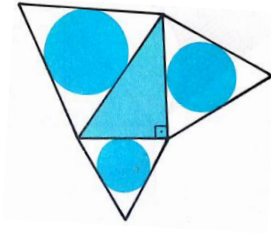
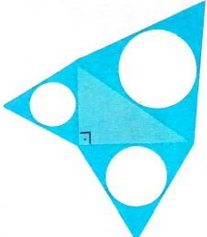
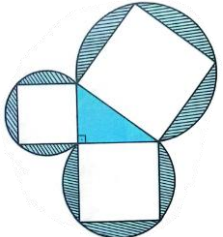
Figura 32 - Arcos ogivais



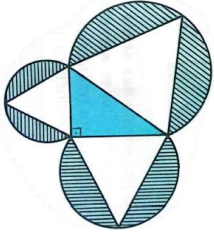
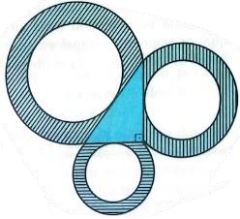
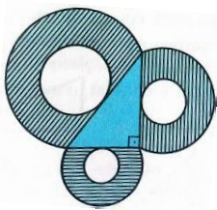
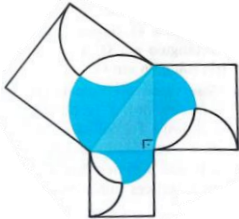
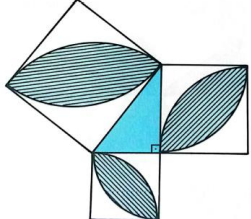
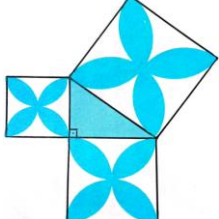
Fonte: Barbosa (1993, p. 36)

Barbosa (1993) destaca mais um apanhado de extensões que se aplicam ao padrão anteriormente exposto, válido para figuras mistas ou curvilíneas, que serão apresentadas nos Quadros 1 e 2 a seguir.

Quadro 1 - Extensões curvilíneas e mistas (continua)

 <p>As imagens hachuradas representam a quarta parte de círculos.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam o lado externo de quadrante de círculos e interna aos quadrados.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam a parte externa de semicírculos e internos a quadrados.</p>
 <p>As imagens hachuradas representam as partes externas dos arcos ogivais e internas a quadrantes.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam as partes externas de arcos ogivais e internas a quadrantes.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam as partes externas de semicírculos e internas a quadrantes.</p>
 <p>As imagens hachuradas representam partes internas de quadrados e externas a círculos inscritos.</p>	 <p>As imagens em azul representam partes externas de triângulos equiláteros e internos a arcos ogivais.</p>	 <p>As imagens em azul representam partes externas de semicírculos e internos a arcos ogivais.</p>
 <p>As imagens em azul representam círculos inscritos em triângulos equiláteros.</p>	 <p>As imagens em azul representam partes externas de triângulos equiláteros e externos a círculos inscritos.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam partes externas a quadrados e internas a círculos circunscritos, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.</p>

Quadro 2 - Extensões curvilíneas e mistas (conclusão)

 <p>As imagens hachuradas representam partes externas a triângulos equiláteros e internos a círculos circunscritos, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam coroas circulares dos círculos inscritos e circunscritos aos quadrados, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam coroas circulares dos círculos inscritos e circunscritos aos triângulos equiláteros, com exceção das regiões relativas aos lados do triângulo.</p>
 <p>As imagens em azuis representadas em cada quadrado são resultado de dois semicírculos de centro nos pontos médios dos quadrados.</p>	 <p>As imagens hachuradas representam arcos de circunferências com centros em vértices opostos dos quadrados.</p>	 <p>As imagens em azuis representam semicircunferências de centros nos pontos médios dos lados dos quadrados.</p>

Fonte: Adaptado de Barbosa (1993).

Por fim, Barbosa (1993) destaca em nota que a proposição pitagórica é verdadeira para todos os casos anteriormente citados, mas cabe a observação da necessidade de semelhança entre as figuras devidamente construídas em função dos respectivos lados do triângulo retângulo, ademais, se o leitor aprofundar a lógica perceberá que, os segmentos transformados apresentam medidas proporcionais aos seus lados correspondentes, o que de fato acaba por resultar em uma generalização.

O tópico anterior acaba por expor que o teorema de Pitágoras não se delimita apenas; tratando-se de áreas; a quadrados gerados pelos lados do triângulo retângulo, ficando claro que existem outras figuras geométricas que são válidas pela proposição pitagórica. Sendo assim, o tópico a seguir se direciona a revelar não apenas casos particulares da proposição, mas sim a busca por possíveis generalizações.

### 3.3 GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

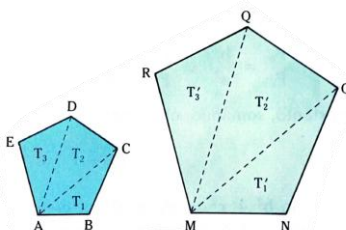
De acordo com o que Barbosa (1993) retrata sobre as extensões, pode-se inicialmente argumentar a generalização do teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes, visto que, os casos de quadrados e triângulos evidenciados já se encontram inclusos nessa proposição mais geral. O lema a seguir serve de base para o desenvolvimento da argumentação.

*Lema:* se dois polígonos (convexos ou côncavos) são semelhantes, então possuem as áreas proporcionais aos quadrados das medidas de dois lados homólogos quaisquer.

Dito isso, dado dois polígonos semelhantes de áreas  $P$  e  $P'$ , dividindo-os a partir de suas diagonais, obtém-se os triângulos semelhantes, como ilustra a Figura 33.

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MO} = \frac{AD}{MQ} = \dots = k.$$

Figura 33 - Polígonos semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 31)

Consequentemente, seus quadrados também são proporcionais:

$$\frac{AB^2}{MN^2} = \frac{AC^2}{MO^2} = \frac{AD^2}{MQ^2} = \dots = k^2.$$

Logo:

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{AB^2}{MN^2}, \frac{T_2}{T'_2} = \frac{AC^2}{MO^2}, \text{ etc.}$$

Portanto, através de comparação:

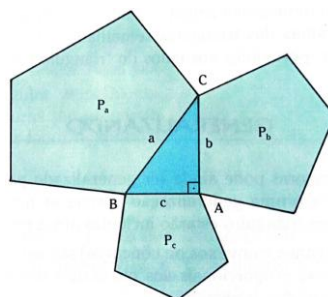
$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_3}{T'_3} = \dots = k^2.$$

Utilizando-se a propriedade das razões iguais: a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, então:

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \dots} = k^2, \text{ ou } \frac{P}{P'} = k^2.$$

Remetendo-se ao lema anteriormente citado, possibilita-se provar essa generalização do teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes. Acompanhado a ilustração da Figura 34, observe que o triângulo retângulo forma 3 polígonos semelhantes a partir de seus respectivos lados, de áreas  $P_a$ ,  $P_b$  e  $P_c$ .

Figura 34 - Generalização para polígonos semelhantes



Fonte: Barbosa (1993, p. 32)

Logo:

$$\frac{P_b}{P_a} = \frac{b^2}{a^2} \text{ e } \frac{P_c}{P_a} = \frac{c^2}{a^2} \text{ ou } P_b = \frac{b^2}{a^2} P_a \text{ e } P_c = \frac{c^2}{a^2} P_a.$$

Somando:

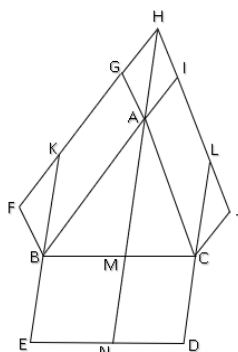
$$P_b + P_c = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \times P_a.$$

E sendo consequentemente  $b^2 + c^2 = a^2$ , então  $P_c + P_b = P_a$ . Generalizando assim o teorema de Pitágoras, se tratando de áreas, para polígonos semelhantes.

### 3.3.1 GENERALIZAÇÃO DE PAPPUS

Segundo Loomis (1968) e Lima (1991) o teorema de Pitágoras se configura como um caso particular da demonstração de Pappus, matemático grego que provavelmente viveu por volta de 300 a 400 a.C. o teorema de Pappus diz que dado um triângulo qualquer e sobre dois de seus lados forem construídos paralelogramos, sua soma é igual ao paralelogramo resultante do terceiro lado. Observe a seguir a construção com mais detalhe.

Figura 35 - Generalização de Pappus



Fonte: Autoria Própria (2023)

Conforme a Figura 35 ilustra, dado o triângulo arbitrário ABC, traça-se dois paralelogramos em relação a AB e AC (ABFG e ACJI, respectivamente), sendo H a interseção de seus prolongamentos, nesse sentido AHKB possui a mesma área que

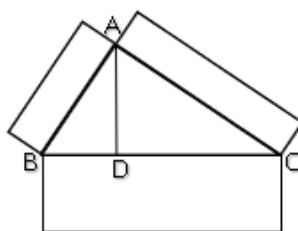
ABFG, que por sua vez é igual, também a BMNE. Sendo MBNE igual ABGF, analogamente CDNM e CAIJ são iguais, logo, BCDE é resultado da das áreas de ABFG e CAIJ, observe que a demonstração se baseia em uma simples propriedade relativa à geometria plana, pois, dois paralelogramos que possuem bases e alturas iguais, logicamente suas áreas são iguais.

### 3.3.2 GENERALIZAÇÃO DE EUCLIDES

Euclides, como já foi devidamente citado neste trabalho, com uma contribuição da demonstração do teorema de Pitágoras, possui uma generalização da proposição em uma de suas obras, no livro VI, proposição 31, que enuncia:

“Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto.” (Euclides, 2009, p. 264. Tradução Bicudo).

Figura 36 - Generalização Euclides



Fonte: Autoria Própria (2023)

Dado o triângulo ABC disposto na Figura 36, reto em BAC, afirma-se que a figura sobre BC é igual as figuras semelhantes, e semelhantemente descritas sobre BA, AC. Traça-se a perpendicular AD, conseqüentemente, resulta em outros dois triângulos (ABD e ADC), sendo semelhantes ao triângulo ABC e entre si. Nesse sentido, CB está para BA assim como AB para BD, sendo os três segmentos proporcionais, a primeira está para a terceira, do mesmo modo que a figura sobre a primeira está para a descrita similarmente sobre a segunda, logo, CB está para BD assim como a figura sobre CB está para a semelhante e semelhantemente descrita sobre BA. Seguindo a mesma lógica, como BC está também para CD, a figura sobre BC está para a sobre CA, além do mais, ressalta-se que BC está para BD, DC, assim como a figura sobre BC está para as semelhantes descritas semelhantemente sobre BA, AC. Porém, BC é igual a BD, DC, portanto a figura sobre BC é igual as figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre BA, AC. Logo se evidencia que estabelecido um triângulo retângulo a figura construída sobre a hipotenusa é

resultado da soma das figuras semelhantes construídas sobre os catetos, como se busca provar (Euclides, 2009, p. 264. Tradução Bicudo).

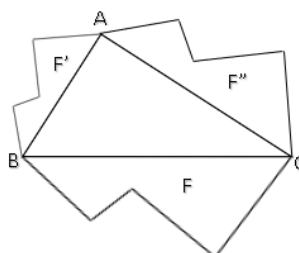
### 3.3.3 GENERALIZAÇÃO DE POLYA

Conforme Lima (1991) e Barbosa (1993) relatam, George Polya foi um matemático húngaro que viveu em torno de 1887- 1985, sendo um notável matemático de sua época, atuava de professor a conferencista em diversas universidades, principalmente na de Stanford, Estados Unidos. Polya desenvolveu uma demonstração do teorema de Pitágoras, que concomitantemente, generaliza a proposição em destaque, tal argumento se encontra em uma de suas obras, denominada de “Induction and Analogy in Mathematics”, a lógica de sua argumentação tem bases no lema anteriormente exposto, que diz: *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

Polya admite que dado duas figuras  $F$  e  $F'$ , serão semelhantes quando a cada ponto  $A$  de  $F$ , corresponde (e essa correspondência é única) a um ponto  $A'$  de  $F'$ , intitulado de *homólogos*, de tal modo que, se  $A, B$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $A', B'$  sendo seus homólogos em  $F'$ , então a razão  $\frac{A'B'}{AB}$  resulta em uma constante  $k$  (*razão de semelhança de  $F$  para  $F'$* ).

Exemplificando o caso a partir de dois triângulos, eles serão semelhantes se, somente se, os ângulos de um deles sejam congruentes aos ângulos do outro. Em contrapartida, dois quadrados, um de lado  $L$  e o outro  $L'$ , são semelhantes e a razão entre seus lados é  $k$ . A proposição que Polya busca consolidar, considera que: Se  $F, F'$  e  $F''$ , são semelhantes entre si, traçadas a partir da hipotenusa de um triângulo retângulo e seus respectivos catetos, logo, a área  $F$  é resultado da soma das figuras  $F'$  e  $F''$ , como ilustra a Figura 37.

Figura 37 - Generalização de Polya



Fonte: Autoria Própria (2023)

Denotando a hipotenusa como  $c$  e os catetos respectivamente sendo  $a$  e  $b$ , logo a razão de semelhança de  $F'$  para  $F''$  é  $\frac{b}{a}$ ,  $F'$  para  $F$  é  $\frac{c}{a}$ , e  $F''$  para  $F$  é  $\frac{c}{b}$ .

Como consequência, se  $G$ ,  $G'$  e  $G''$  são figuras traçadas de forma análoga a situação anterior, então:

$$\frac{G'}{G''} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F''};$$

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''};$$

Analogamente, resulta-se:

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G}{F}.$$

Nesse sentido:

$$\frac{G}{F} = \frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''} = g.$$

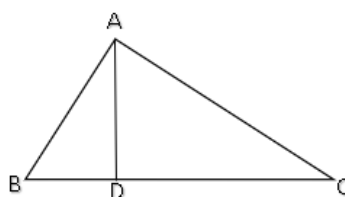
Que se pode reescrever da seguinte forma:

$$G = g.F; G' = g.F'; G'' = g.F''.$$

Logicamente, definido três figuras semelhantes  $F$ ,  $F'$  e  $F''$  construídas a partir dos lados de um triângulo retângulo, de modo que  $F = F' + F''$ , então como efeito,  $G = G' + G''$ , sendo essas áreas de figuras semelhantes quaisquer, construídas da mesma forma.

Para consolidar, toma-se um triângulo retângulo  $ABC$  ilustrado na Figura 38, com o segmento perpendicular  $CD$  (altura).

Figura 38 - Triângulo retângulo  $ABC$



Fonte: Autoria Própria (2023)

O triângulo  $ABC$  denota-se como  $F$ ,  $F' = ABD$  e  $F'' = ACD$ , portanto, é explícito que  $F$ ,  $F'$  e  $F''$  são figuras semelhantes entre si, e claramente  $F = F' + F''$ .

### 3.3.4 GENERALIZAÇÃO DE THABIT

Por fim, destaca-se a generalização de um matemático notável do mundo islâmico, Thabit Ibn Qurra (836 – 901). Costa (2022) expõe sua tradução a respeito das palavras do matemático sobre a generalização do teorema de Pitágoras.

Este é o triângulo  $ABC$ . Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice  $B$  interceptam  $AC$  deste triângulo e fazer com isso um ângulo igual ao ângulo  $ABC$ . Esta linha é uma linha qualquer  $BD$ , como no primeiro desenho

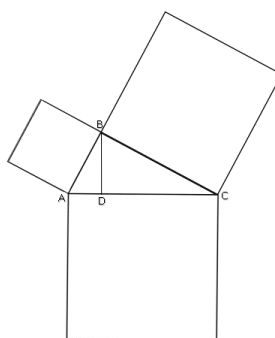
da imagem[...], situação em que esta linha se cruza com a base para formar dois ângulos iguais a  $ABC$  e isso corresponde ao ângulo  $ABC$  ser um ângulo reto; A linha  $BD$  é perpendicular a  $AC$  aqui. Ou, como visto no segundo desenho [...], ocorrem duas linhas como  $BA'$  e  $BC'$ . Nesta segunda situação, o ângulo  $ABC$  não é perpendicular e é igual aos ângulos  $AA'B$  e  $CC'B$ . Assim, a soma dos quadrados dos lados  $AB$  e  $BC$  é a área retangular de  $AC$  multiplicada pela soma de  $AD$  e  $DC$ , no caso em que a primeira imagem representa, e soma de  $AA'$  e  $CC'$ , no caso das imagens restantes. (Thabit, 1958, p.546, tradução: Costa 2022, p. 66).

Observe que dado o enunciado, torna-se visível duas situações, o primeiro caso se trata de um caso particular do teorema de Pitágoras, atribuído a triângulos retos, o segundo caso se refere a triângulos que possuem seus ângulos diferentes de 90 graus, dispondo, dessa forma, uma generalização do teorema de Pitágoras.

**1º caso:** Dado o triângulo  $ABC$  na Figura 39, traça-se uma ou duas linhas de  $B$  para  $AC$ , ressalta-se que esses novos ângulos formados em  $AC$  devem ser congruentes ao ângulo  $ABC$  ( $90^\circ$ ), conseqüentemente  $BD$  é perpendicular a  $AC$ . Logo a soma dos quadrados dos lados  $AB$  e  $BC$  resultam na área retangular de  $AC$  multiplicada pela soma de  $AD$  e  $DC$ .

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AD + DC).AC$$

Figura 39 - Representação geométrica do 1º caso

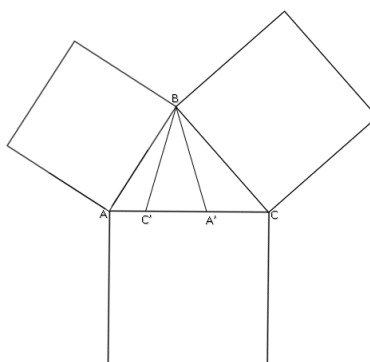


Fonte: Autoria Própria (2023)

**2º caso:** Dado o triângulo  $ABC$  na Figura 40, traça-se uma ou duas linhas de  $B$  para  $AC$ , gerando assim, dois segmentos  $BC'$  e  $BA'$ , sendo seus ângulos congruentes ao ângulo  $ABC$  (diferente de  $90^\circ$ ), logo, a soma dos quadrados formados pelos lados  $AB$  e  $BC$  resultam na área obtida por  $AC$  multiplicado pela soma de  $AA'$  e  $CC'$ .

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AA' + CC').AC$$

Figura 40 - Representação geométrica do 2º caso



Fonte: Autoria Própria (2023)

Thabit destaca ainda, se houver o interesse em expandir a ideia de generalização, cabe ao interessado observar que a soma de quaisquer figuras que sejam semelhantes dispostas sobre os segmentos BC e AB, será igual a outra figura similar e proporcional disposta sobre o lado remanescente, da mesma maneira que a soma entre AA' e CC' é proporcional a AC (Costa, 2022, p. 74).

### 3.3.5 GENERALIZAÇÃO POR INTEGRAIS

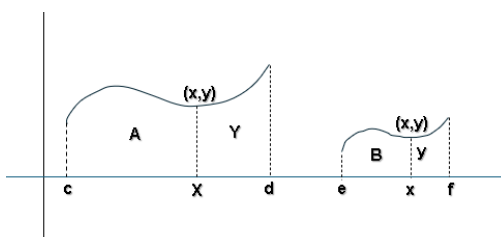
Esta demonstração se encontra no livro “DE PITÁGORAS A FERMAT” de autoria de Rui dos Santos Barbosa e José Mária Filiardo Bassalo, ambos até a presente data de publicação da obra, professores Adjuntos da Universidade Federal do Pará. De acordo com Barbosa e Bassalo (1978) a generalização é baseada nas ideias presentes no livro “De l’explications dans les Sciences”, de Emile Meyerson, que foram analisadas por Bachelard.

Para realização da demonstração é necessário pontuar algumas relações que serão obtidas através de teoremas que serão demonstrados.

DEFINIÇÃO: Dizemos que uma função  $Y = F(X)$  definida sobre um intervalo de amplitude  $\underline{a}$  é semelhante a uma função  $y = f(x)$ , definida sobre um intervalo de amplitude  $\underline{b}$ , se para todo ponto  $(X,Y)$  de  $F$ , existe um único ponto  $(x,y)$  de  $f$ , tal que:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{b}{a} \text{ (Sendo } \frac{b}{a} \text{ a razão de semelhança)}$$

Figura 41 - Representação gráfica da função Y



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 5)

Da definição anterior é possível escrever que:

$$\frac{x}{X} = \frac{b}{a} \rightarrow X = \frac{ax}{b} \quad (1);$$

E

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a} \rightarrow y = \frac{bY}{a} \quad (2).$$

Portanto, dada uma função  $Y = F(X)$  definida em um intervalo de amplitude  $a$ , podemos determinar a função  $y = f(x)$  definida em um intervalo de amplitude  $b$ , semelhante a função  $F$ , usando as relações de semelhança definida anteriormente, semelhança essa que corresponde ao produto de uma homotetia por deslocamento (conjunto de translações e rotações). Assim, de acordo com a relação (2), temos:

$$y = \frac{bY}{a} = \frac{bF(X)}{a} \text{ e pela relação (1), temos:}$$

$$y = F\left(\frac{ax}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} \quad (3).$$

**TEOREMA 1:** Se  $A$  é a área limitada pela função  $F$  definida no intervalo de amplitude  $\underline{a}$  (Figura 41) e  $B$ , a área limitada pela função  $f$ , semelhante à  $F$ , definida no intervalo de amplitude  $\underline{b}$ , então  $\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Por definição de integral, temos:

$$A = \int_c^d F(X) dX = \int_c^{c+a} F(X) dX$$

E,

$$B = \int_e^f f(x) dx = \int_e^{e+b} F\left(\frac{ax}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} \cdot dx \quad (\text{Devido (3)}).$$

Realizando a substituição de variável na expressão de  $B$  indicada abaixo:

$$\frac{ax}{b} = u, \text{ então, temos:}$$

$$dx = \frac{b}{a} \cdot du, \text{ logo, para } x = e, u = \frac{ae}{b}, \text{ e para } x = e+b, u = \frac{ae}{b} + a. \text{ Assim, a}$$

integral  $B$  tomará a forma:

$$B = \int_e^{e+b} \frac{b}{a} \cdot F\left(\frac{ax}{b}\right) \cdot dx = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \int_{\frac{ae}{b}}^{\frac{ae}{b}+a} F(u) \cdot du = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \int_c^{c+a} F(u) \cdot du = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot A \quad (\text{Via definição e hipótese do Teorema 1}).$$

Portanto:

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2. \text{ C.Q.D (COMO QUERIAMOS DEMONSTRAR)}$$

**TEOREMA 2:** Sejam  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  funções contínuas semelhantes, no sentido da definição apresentada anteriormente e definidas em intervalos  $I$  e  $J$  de amplitude  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$ , respectivamente. Se  $c_1$  pertence a  $I$  e é tal que  $f_1(c_1)$  é valor médio de  $f_1$ , então

existe um único ponto  $(c_2, f_2(c_2))$  de  $f_2$  correspondente a  $(c_1, f_1(c_1))$ ,  $c_2$  pertencente a  $J$ , tal que  $f_2(c_2)$  é valor médio de  $f_2$ .

DEMONSTRAÇÃO: Segundo o teorema 1, podemos escrever que:

$$B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot A, \text{ de modo que } A \text{ e } B \text{ representam as áreas sob as curvas } f_1 \text{ e } f_2,$$

conforme a Figura 42.

Pelo teorema do valor médio, podemos escrever que:

$$A = \int_0^e f_1(x) dx = f_1(c_1) \cdot a$$

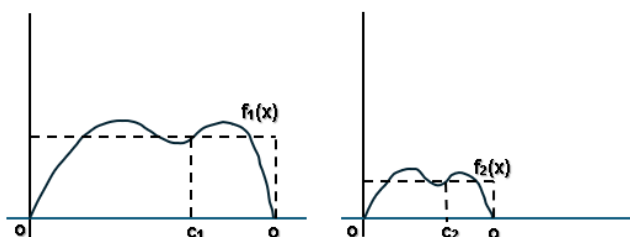
Sendo, como vimos acima,

$$B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot A, \text{ então:}$$

$$B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 f_1(c_1) \cdot a = \frac{b^2}{a} f_1(c_1) \quad (4).$$

Como cada ponto de  $f_1(x)$  possui um único ponto correspondente em  $f_2(x)$ ,

Figura 42 - Representação gráfica de  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 7)

de acordo com a definição dada anteriormente (Figura 42), suponhamos que  $(c_2, f_2(c_2))$  seja o correspondente em  $f_2$  do ponto  $(c_1, f_1(c_1))$  de  $f_1$ , então:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{f_2(c_2)}{f_1(c_1)} = \frac{b}{a} \text{ ou } f_1(c_1) = \frac{a}{b} f_2(c_2), \text{ que substituindo em (4), resulta:}$$

$$B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{a}{b} \cdot f_2(c_2) = f_2(c_2) \cdot b$$

Sendo,

$$B = \int_0^b f_2(x) dx, \text{ então } B = \int_0^b f_2(x) dx = f_2(c_2) \cdot b$$

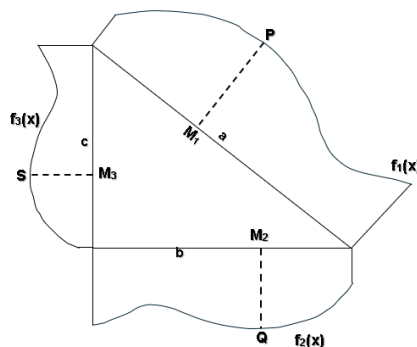
Provando assim que,  $f_2(c_2)$  um valor médio de  $f_2$ . (C.Q.D)

### TEOREMA GENERALIZADO DE PITÁGORAS

Em triângulo retângulo a área limitada por uma função integrável, definida sobre a hipotenusa, é igual a soma das áreas limitadas por suas funções semelhantes, definidas sobre os catetos (demonstraremos para o caso de funções contínuas).

DEMONSTRAÇÃO: Sejam  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  e  $f_3(x)$  funções definidas sobre a hipotenusa  $\underline{a}$  e sobre os catetos  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  de um triângulo retângulo, respectivamente, como mostra a Figura 43.

Figura 43 - Funções integráveis construídas sobre os lados de um triângulo retângulo



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 8)

Sendo as funções contínuas e definidas sobre intervalos finitos, então elas possuem máximos  $f_1(M_1)$ ,  $f_2(M_2)$  e  $f_3(M_3)$ , respectivamente. Como as funções são, por hipótese, semelhantes no sentido definido por nós, conseqüentemente os pontos P, Q e S (Figura 43), são tais que:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{f_2 M_2}{f_1 M_1} = \frac{b}{a}; \quad \frac{M_3}{M_1} = \frac{f_3 M_3}{f_1 M_1} = \frac{c}{a}, \text{ e, portanto:}$$

$$f_2 M_2 = \frac{b}{a} f_1 M_1 \quad (5)$$

$$f_3 M_3 = \frac{c}{a} f_1 M_1 \quad (6)$$

Sendo as áreas limitadas pelas funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  designadas por A, B e C, respectivamente, então, de acordo com o teorema do valor médio, podemos escrever:

$$A = \int_0^a f_1(x) dx = f_1(x_1) \cdot a, \text{ onde } 0 \leq x_1 \leq a \quad (7)$$

$$B = \int_0^b f_2(x) dx = f_2(x_2) \cdot b, \text{ onde } 0 \leq x_2 \leq b, \text{ portanto:}$$

$$B = \frac{b}{a} f_1(x_1) \cdot b \text{ (segundo nossa definição de semelhança)}$$

$$B = \frac{b^2}{a} f_1(x_1) \quad (8)$$

Sendo:

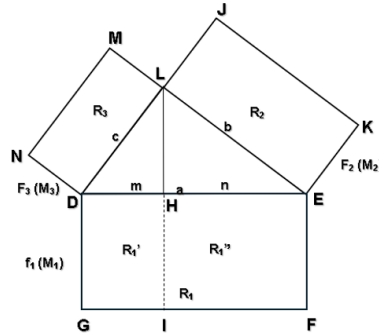
$$C = \int_0^c f_3(x) dx = f_3(x_3) \cdot c$$

Então pelo teorema (2):

$$C = \frac{c}{a} f_1(x_1) \cdot c \text{ ou } C = \frac{c^2}{a} f_1(x_1) \quad (9)$$

Construamos agora sobre os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  do triângulo retângulo, retângulos de alturas  $f_1(M_1)$ ,  $f_2(M_2)$  e  $f_3(M_3)$ , respectivamente, e designamos suas áreas por  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , como mostra a Figura 44.

Figura 44 - Retângulos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo



Fonte: Barbosa e Bassalo (1978, p. 10)

De acordo com a Figura 44, é possível escrever que:

$$R_1 = a \cdot \overline{DG} = a \cdot f_1(M_1) \quad (10)$$

$$R_2 = b \cdot \overline{EK} = b \cdot f_2(M_2)$$

$$R_3 = c \cdot \overline{HD} = c \cdot f_3(M_3)$$

De acordo com as relações (5) e (6), é válido:

$$R_2 = \frac{b^2}{a} f_1 M_1 \quad (11)$$

E

$$R_3 = \frac{b^2}{a} f_1 M_1 \quad (12)$$

Dividindo-se (7) por (10), (8) por (11) e (9) por (12), resulta em:

$$\frac{A}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(M_1)}; \quad \frac{B}{R_2} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(M_1)} \quad e \quad \frac{C}{R_3} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(M_1)}$$

Ou

$$\frac{A}{R_1} = \frac{B}{R_2} = \frac{C}{R_3} \quad (13)$$

Tracemos agora, em sequência, a altura relativa à hipotenusa ( $\overline{LH}$ ) e a prolonguemos até interceptar o lado  $\overline{GF}$  do retângulo DEFG, no ponto I (Figura 44).

Sendo a área do retângulo GDHI, que representaremos por  $R_1'$ , dada por  $R_1' = m \cdot f_1(M_1)$ .

Como as relações métricas em um triângulo retângulo permitem que escrevamos:

$$c^2 = a \cdot m, \text{ então:}$$

$$R_1' = \frac{c^2}{a} m \cdot f_1(M_1) \text{ e, segundo (12), resulta: } R_3 = R_1'.$$

De maneira análoga, é possível provar que  $R_2 = R_1''$ , de modo que  $R_1''$  representa a área do retângulo HEFI (Figura 44).

Com a luz dos argumentos, conclui-se que:

$$R_2 + R_3 = R_1' + R_1'' = R_1 \quad (14)$$

Utilizando a relação (13), obtém-se:

$$\frac{B+C}{R_2+R_3} = \frac{B}{R_2} = \frac{C}{R_3} = \frac{A}{R_1}, \text{ portanto } \frac{B+C}{R_2+R_3} = \frac{A}{R_1} \text{ e usando a relação (14),}$$

surge:

$$A = B + C \text{ (C.Q.D)}$$

**COROLÁRIO:** No caso particular em que  $f_1(x) = a$ ,  $f_2(x) = b$  e  $f_3(x) = c$ , o teorema (3) permite escrever que:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ o conhecido Teorema de Pitágoras.}$$

Sendo assim, com a luz dos argumentos apresentados, conclui-se a exposição de um apanhado de extensões e generalizações intimamente relacionadas ao teorema de Pitágoras, que por sua vez, de alguma forma atribuem relevância ao trabalho que se desenvolve.

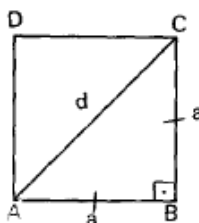
### 3.4 ALGUMAS APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras possibilita uma diversidade de aplicações, Dolce e Pompeo (1997) expõe algumas:

#### I. Diagonal do quadrado

Sendo o quadrado ABCD representado na Figura 45, de lados  $a$  e diagonal  $d$ , para calcular o valor de sua diagonal, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, logo:  $d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d^2 = 2a^2 \rightarrow d = a\sqrt{2}$ .

Figura 45 - Quadrado ABCD



Fonte: Dolce e Pompeo (1997, p. 239)

O mesmo procedimento poderia ser reproduzido com o triângulo ACD.

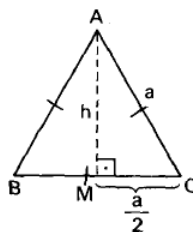
#### II. Triângulo equilátero (Altura)

Dado um triângulo equilátero ABC, de altura  $h$  e lados  $a$  como representa a Figura 46, sendo M o ponto médio do segmento BC, ficando evidente que o

segmento  $AM = h$ , nesse sentido, ao se aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo AMC:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Figura 46 - Triângulo equilátero ABC



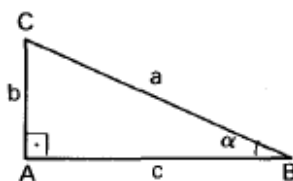
Fonte: Dolce e Pompeo (1997, p. 239)

O procedimento é válido para qualquer altura traçada no triângulo em questão.

### III. Seno, cosseno e tangente ( $30^\circ$ , $45^\circ$ e $60^\circ$ )

Dado um triângulo retângulo, cujo um de seus ângulos agudos é representado por  $\alpha$ , de acordo com a Figura 47:

Figura 47 - Triângulo retângulo



Fonte: Dolce e Pompeo (1997, p. 240)

Então, se possibilita definir:

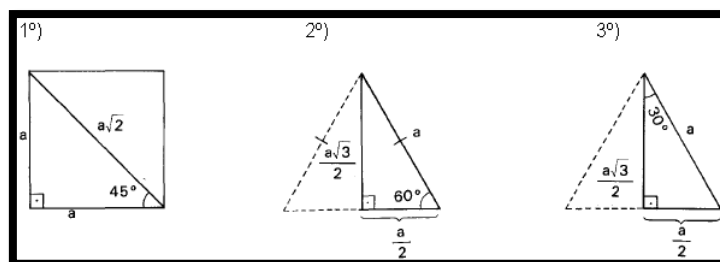
$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \text{ logo, } \mathbf{\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}, \text{ logo, } \mathbf{\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}, \text{ logo, } \mathbf{\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}}$$

Por conseguinte, fazendo uso dos valores anteriormente estabelecidos:

Figura 48 - Representação geométrica do Sen; Cos. e Tg de  $\alpha$



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (1997).

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \times \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a^2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a^2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tg } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{a} = 1.$$

$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tg } 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{a} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tg } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dessa forma, se concretiza por intermédio do teorema de Pitágoras o desenvolvimento de valores que se manifestam com significativa frequência no estudo da trigonometria, comumente denominado por *ângulos notáveis*.

Tabela 1 - Ângulos notáveis

	30°	45°	60°
SEN	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COS	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TG	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autoria Própria (2023)

Posteriormente, a abordagem se direcionará ao conhecido último teorema de Fermat, que basicamente o teorema de Pitágoras se revela um caso particular do teorema em questão, que expõe um enunciado simples descrito por Fermat, no entanto, com uma demonstração extremamente complexa que perdurou por cerca de 300 anos sem prova.

### 3.5 DE PITÁGORAS A FERMAT

De acordo com autores como Boyer (1974), Eves (2011) e Gundlach (1992), Pierre de Fermat (1601 – 1665) um “amante” da matemática, deixou algumas contribuições para a comunidade, ao exemplo da teoria dos números, que acarretou diversas conjecturas, dentre elas destaca-se a seguinte:

“Não existem inteiros positivos  $x, y, z, n$ , sendo  $n > 2$ , de modo que  $x^n + y^n = z^n$ ”.

Tal conjectura, segundo Boyer (1974), Eves (2011) e Gundlach (1992), tornou-se muito notável e conhecida como “O último teorema de Fermat”, Fermat enunciou o teorema nas margens de sua obra “Arithmetica de Diofanto”, com a seguinte nota:

Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência, ou em geral uma potência qualquer de duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu certamente achei uma prova admirável desse fato, mas a margem é demasiada estreita para contê-la. (Gundlach, 1992, p. 64).

Não há como se ter certeza se Fermat obtinha tal prova verdadeiramente, o que se tem conhecimento é que ele demonstrou para  $n = 4$ , posteriormente outros matemáticos demonstraram para alguns valores específicos, Euler apresentou para  $n = 3$ , melhorada ao decorrer do tempo por outros indivíduos, em meados de 1825 Legendre e Dirichlet provaram para  $n = 5$ , de forma independente, Kummer, um matemático de origem alemã avançou de forma significativa em 1843 (Gundlach, 1992).

O enunciado desenvolvido por Fermat instigou diversos matemáticos, e frustrou quanto a sua solução por no mínimo três séculos, porém, um jovem chamado Andrew Wiles se deparou com o teorema de Pitágoras e sua gama de ternos, no livro “O último problema” (E. T. Bell) que acabou por despertar a sua curiosidade (Singh, 2002).

O teorema de Pitágoras valida a equação  $a^2 + b^2 = c^2$ , logo, existem números em que o seu quadrado é resultado da soma de dois outros quadrados, no entanto, no livro é abordada a mesma ideia para outros expoentes, por exemplo,  $a^3 + b^3 = c^3$ , parece ser uma tarefa impossível achar valores que validem a equação, ademais, quanto maior for o valor desse expoente, mais difícil ainda encontrar valores que a satisfaça, pois, como Fermat afirmou, não existiria solução para  $n > 2$ , deixando assim, Wiles frustrado e furioso (Singh, 2002).

Em meados de 1993, Andrew se encontravam no Instituto Isaac Newton, onde apresentou para o mundo, ou melhor, para um seleto grupo de matemáticos a sua trabalhosa demonstração do teorema de Fermat, após a conclusão, ele virou-se para o público presente e exclamou “acho que vou parar por aqui”, após sete longos anos de trabalho árduo chegava ao fim de um grande mistério da matemática, muito

embora, tal demonstração passaria ainda por rigorosa validação por um grupo de matemáticos (Singh, 2002).

De acordo com Singh (2002), Andrew submeteu seu trabalho à revista *Inventiones Mathematicae*, que corriqueiramente seleciona cerca de três avaliadores, porém, dada a relevância e complexidade do trabalho, nomeou seis avaliadores, o artigo foi dividido em seis seções, com o intuito de facilitar a tarefa. Um dos avaliadores, Nick Katz, responsável pelo capítulo 3, notou um erro expressivo ao decorrer de suas leituras, o qual, Wiles não obtinha explicação.

Não necessariamente, o erro desqualifica o trabalho desenvolvido, porém, Wiles deveria esclarecer seus argumentos demonstrados. Só no ano seguinte (1994) ele conseguiu, de forma definitiva, solucionar o erro encontrado, o trabalho foi novamente publicado no *Annals of Mathematics*, em maio de 1995, terminando assim, um dos grandes quebra-cabeças da humanidade, com uma grande contribuição para o ramo da teoria dos números (Singh, 2002).

Por fim, esta seção buscou consolidar o aporte matemático e histórico suficiente para o desenvolvimento deste trabalho, a análise minuciosa incorporou fatos e pressupostos históricos sobre a vida e obra de Pitágoras, constata-se também, a construção da proposição pitagórica e algumas notáveis demonstrações do teorema, além de suas extensões e generalizações, para assim finalizar com o tema estritamente ao teorema, O último teorema de Fermat.

## **4. O TEOREMA DE PITÁGORAS NO CURRÍCULO NACIONAL**

Este tópico tem como objetivo abordar os aspectos curriculares do ensino de matemática e do teorema de Pitágoras em documentos oficiais em diversos âmbitos educacionais, explicar e entender o que a BNCC e os PCN deliberam em seus documentos a respeito do ensino da temática como diretriz ou parâmetro atualmente.

### **4.1 DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS**

É possível destacar dois principais documentos oficiais que norteiam a educação brasileira, um de caráter não normativo (Parâmetros Curriculares Nacionais) e um normativo (Base Nacional Comum Curricular), o objetivo em questão é identificar suas principais diretrizes de ensino e destrinchar em que momento esses e outros documentos abordam em seus textos o teorema de Pitágoras.

### **4.2 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**

De acordo com Brasil (1997), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), buscam ser um referencial de qualidade no ensino fundamental do País, sua principal funcionalidade é orientação e a devida coerência nos investimentos que norteiam a educação do Brasil.

Tratando-se de organização, os PCN se distribuem em ciclos, cada um com duração de dois anos, o primeiro ciclo se refere a primeira e segunda série; o segundo, a terceira e quarta série, e assim segue sucessivamente para as demais séries do ensino fundamental. De acordo com Brasil (1998) as áreas que os PCN abordam são: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências Naturais, Educação Física, Arte e Língua Estrangeira; acredita-se que tais áreas do conhecimento possuem uma grande relevância no processo formativo do indivíduo, contemplando conteúdos que proporcionam relevância social (Brasil, 1998).

A respeito da matemática o Documento discorre que a área está presente na vida de todos, sendo necessária a compreensão de quantificar, calcular, localizar objetos no espaço, ler gráficos e realizar previsões, logo é fundamental o avanço cognitivo, superando o aspecto puramente mecânico, com a resolução de problemas

se destacando no desenvolvimento de atividades em sala de aula. A matemática ultrapassa também diferentes culturas, logo, a adequação se faz indispensável no processo de ensino, incorporando ainda, recursos tecnológicos da comunicação (Brasil, 1998).

Nos PCN é exposto ainda que, para o cumprimento de seus propósitos em relação a matemática é viável:

- incorporam o estudo dos recursos estatísticos constituindo um bloco de conteúdo denominado Tratamento de Informação;
- indicam aspectos novos no estudo dos números e operações, privilegiando o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão de diferentes significados das operações;
- propõem novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdo, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo;
- enfatizam a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial;
- destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações;
- apresentam uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições;
- recomendam o uso de calculadoras nas aulas de Matemática (Brasil, p. 60, 1998).

Referindo-se especificamente ao objeto matemático em questão é verificado sua presença dentro dos conteúdos do quarto ciclo, no tópico CONCEITOS E PROCEDIMENTOS, e o item *espaço e forma*, em seu último subitem se esclarece que:

“Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.” (Brasil, p. 89, 1998).

Sugere-se a abordagem do Teorema de Pitágoras de uma maneira mais abrangente, infere-se que o objetivo e a construção da ideia da proposição, suas possibilidades e delimitações, é importante também a devida aplicabilidade do teorema em situações cada vez mais próximas da realidade, sem fugir do rigor matemático necessário, por fim, é explorado a sua demonstração, que pode ser enriquecido por conteúdos já trabalhados, como a composição e manipulação de figuras planas.

É importante ressaltar, de acordo ainda com Brasil (1998), embora os alunos estejam a iniciar a manipulação com demonstrações, como a de Pitágoras, é

relevante não abandonar as abordagens empíricas, pois, possibilitam a construção de conjecturas e ampliam o nível de compreensão dos conceitos.

### 4.3 A BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM

Conforme exposto em Brasil (2018), a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento de cunho normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua jornada pela educação básica. A BNCC é uma normativa de referência nacional, que visa alinhar os planejamentos educacionais de municípios, estados e do Distrito Federal, suas diretrizes buscam estabelecer aporte na formação dos professores, na elaboração dos conteúdos, nos critérios e métodos avaliativos e na adequação dos espaços de ensino (Brasil, 2018).

As aprendizagens essenciais estabelecidas na BNCC devem contribuir e assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais que incorporam o documento, para a BNCC competência é a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para solucionar problemas complexos do dia a dia, e o pleno exercício de cidadão e a atividade laboral (Brasil, 2018).

De acordo com argumentos estabelecidos, identifica-se o objeto de conhecimento em foco “Teorema de Pitágoras” citado de maneira direta, na etapa final do Ensino fundamental (Anos Finais), mais pontualmente no 9º ano, com a unidade temática GEOMETRIA.

Quadro 3 - Citação do T.P de acordo com unidade temática

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
<b>Geometria</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relações métricas no triângulo retângulo.</li> <li>• Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.</li> </ul>

Fonte: Brasil (2018)

Seguido de suas respectivas habilidades EF09MA13 e EF09MA14, elencadas no Quadro 4 a seguir:

Quadro 4 - Descrição das habilidades referentes ao T.P na BNCC

<b>HABILIDADES</b>	<p><b>(EF09MA13)</b> Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.</p> <p><b>(EF09MA14)</b> Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.</p>
--------------------	--

Fonte: Brasil (2018)

Percebe-se que o Teorema de Pitágoras possua uma ampla aplicabilidade, que flutua entre diversas etapas do ensino e dos conteúdos matemáticos, é abordado de maneira muito específica e breve.

#### 4.4 SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é realizado periodicamente a cada dois anos, desde 1990, possuindo como objetivo avaliar a qualidade, equidade e eficiência do País, nas diversas camadas governamentais, desenvolvendo assim, indicadores educacionais com fins comparativos dos dados e elaboração aprimorada de políticas públicas devidamente fundamentadas (Brasil, 2019).

Tendo em vista os dados coletados e discussões estabelecidas, a proposta se baseia em um sistema avaliativo para aferir a qualidade da educação por intermédio de Eixos: Equidade, Direitos Humanos e Cidadania, Ensino-Aprendizagem, Investimento, Atendimento Escolar, Gestão e Profissionais Docentes.

A matriz de referência preliminar do Saeb alinha-se as perspectivas da BNCC, entre outras Matrizes de relevância nacional, nesse sentido, a área de Matemática, assim como as demais áreas, é constituída pelo *Eixo do Conhecimento*, sendo utilizado as mesmas cinco unidades temáticas da BNCC (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) e o Eixo Cognitivo que imprime como base o agrupamento das competências do ensino de matemática presente na BNCC (Brasil, 2019).

O Teorema de Pitágoras localiza-se no eixo do conhecimento de Geometria, para os anos finais do ensino fundamental (9º ANO), sendo a habilidade 9G2.4, como indicado no Quadro 5.

Quadro 5 - Citação do T.P de acordo com o eixo de cognitivo

EIXOS COGNITIVOS	
EIXOS DO CONHECIMENTO	RESOLVER PROBLEMAS E ARGUMENTAR
GEOMETRIA	9G2.4 Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras.

Fonte: Adaptado de Brasil (2019, p. 107)

O Saeb disponibiliza ademais, um relatório que ilustra a escala de proficiência de algumas disciplinas de acordo com resultados de anos anteriores, esse documento estipula possíveis níveis de entendimento dos alunos ao se projetarem

as habilidades necessárias, com a existência de um nivelamento final e inicial, logo cada etapa (nível) é constituída por pontuação do desempenho. Cada nível indica o que se espera que o aluno esteja hábil de executar, caso sua pontuação seja maior do que determinado nível, infere-se que a probabilidade de sucesso com o item correspondente seja maior, a lógica é válida para pontuações menores.

O teorema de Pitágoras por sua vez, encontra-se em diferentes níveis de proficiência (nível 6 e 7) como indicado no Quadro 6, haja vista que um assunto pode ser abordado de diferentes maneiras, variando o grau de percepção dos alunos.

Quadro 6 - Citação do T.P de acordo com nível de proficiência do E.F

NÍVEL	DESCRIÇÃO DO NÍVEL
Nível 6: Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	<b>ESPAÇO E FORMA</b> Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos.
Nível 7: Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos.

Fonte: Adaptado de Brasil (2020, p. 25-26)

A título de informação, o teorema de Pitágoras é novamente abordado no 3º ano do ensino médio. O Quadro 7 apresenta especificamente os trechos referentes ao Teorema de Pitágoras no 3º ano do E.M.

Quadro 7 - Citação do T.P de acordo com nível de proficiência do E.M

NÍVEL	DESCRIÇÃO DO NÍVEL
<b>Nível 6:</b> Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	<b>ESPAÇO E FORMA:</b> Resolver problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um <b>triângulo pitagórico</b> , a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura.
<b>Nível 7:</b> Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	<b>ESPAÇO E FORMA:</b> Determinar, com o uso do Teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um <b>triângulo retângulo não pitagórico</b> .
<b>Nível 8:</b> Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425	<b>ESPAÇO E FORMA:</b> Determinar uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o <b>Teorema de Pitágoras</b> .

Fonte: Adaptado de Brasil (2020, grifo nosso)

Verifica-se assim uma gradativa abordagem do teorema de Pitágoras, variando de ideias mais elementares a aplicações em diferentes perspectivas e temáticas, alinhadas a Base Nacional Curricular Comum, diretrizes anteriormente explanadas.

Em suma, a análise dos documentos curriculares nacionais (PCN e BNCC) reforça que o ensino do Objeto abordado deve transcender a aplicação mecânica de fórmulas, priorizando a investigação experimental e o desenvolvimento de habilidades que integrem a geometria e a álgebra no cotidiano do aluno.

## 5. REVISÃO DE ESTUDOS

Esse tópico possui o objetivo de mapear e verificar trabalhos desenvolvidos no Brasil que abordem o Teorema de Pitágoras de maneira expressiva e significativa, a coleta desses arquivos se desencadeou remotamente por meio de sites como: PROFMAT, UEPA, (PPGEM), Catálogo de teses e dissertações da Capes, periódicos Capes e Google Acadêmico. Os principais termos utilizados como palavras-chave nas buscas, foram: “Teorema de Pitágoras”, “triângulo retângulo” e “relações métricas no triângulo retângulo”.

Ao fim da coleta, observou-se a presença de cerca de 70 trabalhos, entre artigos, monografias e dissertações, logo, foi necessária uma filtragem mais criteriosa, motivada pelo rigor e a profundidade dos textos, a priorização se direcionou às dissertações produzidas no intervalo de cinco anos (contando a partir de 2019). Depreende-se duas fontes originárias dessas pesquisas, o Catálogo de teses e dissertações da Capes e o Profmat, todos os trabalhos presentes no Profmat se encontram no Catálogo de teses e dissertações da Capes.

Ao todo houve a catalogação de 19 dissertações, sendo estas divididas em quatro categorias previamente estabelecidas com base em trabalhos como de Barros (2021) e Santos (2020):

**Estudo Teórico (E.T):** Barros (2021) pontua o E.T, como sendo trabalhos que propõe ideias e/ou conceitos a respeito do ensino de um objeto de estudo, incluindo os que realizam alguma reflexão a respeito da temática. Santos (2020) enriquece a abordagem destacando que o E.T não implica na iminente relevância perante a realidade, mas sim, sendo decisivo na promoção adequada de condições interventivas.

Os estudos presentes nessa categoria, aprofundados no rigor matemático ou não, abordam definições, conceitos, demonstrações e aplicações com relação a um objeto matemático, inclui-se aqui também, trabalhos de fins puramente bibliográficos.

**Estudo Experimental (E.E):** Segundo Barros (2021), esses estudos possuem princípio de ensino diferente do tradicional, que se baseia em apresentar a definição, seguido respectivamente de exemplos e exercícios. Para Santos (2020), trata-se de estudos que trabalham atividades que propiciam ao aluno à compreensão dos assuntos e participação ativa desse processo.

Essa categoria é composta, por exemplo, com propostas de sequências didáticas, aplicativos e jogos que quebram com a ideia de ensino tradicional e promovem ludicidade, tecnologia da informação e comunicação e desperta o interesse e a curiosidade no educando, sendo essas aplicadas a algum público específico.

**Estudo Diagnóstico (E.D):** Destaca Barros (2021) que, esse estudo tem por finalidade esclarecer e revelar possíveis dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de um determinado objeto. Santos (2020) traça um paralelo entre a medicina que comumente se refere ao diagnóstico como uma investigação em soluções para determinados problemas, com a Educação, possivelmente sendo até mais complexo, pois, a variação dos fatores é mais ampla.

Agrupam-se aqui pesquisas que revelam características investigativas, que por meio de entrevistas, questionários, formulários etc., conseqüentemente, podem gerar informações quantitativas ou qualitativas essenciais para questionamentos levantados.

**Estudo de Análise de Livro Didático (E.A.L.D):** Aqui se baseiam estudos que objetivamente se propõe a análise de livros didáticos presentes na educação brasileira que abordam o teorema de Pitágoras, para verificar a forma de implementação dos assuntos e como se desenvolvem.

O Quadro 8 a seguir, descreve algumas informações de cada trabalho, sendo sua respectiva *categorização de estudo, autor, ano (de publicação), local (originário de publicação)*.

Quadro 8 - Estudos revisados

Categorização	Trabalho	Autor	Ano	Local
E.T	Trigonometria e números complexos: Uma abordagem elementar com aplicações.	Clenilton Fernandes Alves	2019	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Teorema de Pitágoras e construções geométricas com o geogebra.	Dêner Maia Rocha	2023	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Uma proposta para o ensino do teorema de Pitágoras com uso do aplicativo Pythagorea.	Marcela de Oliveira	2021	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Ternos pitagóricos e quase pitagóricos.	Francisco Otacilio Silva Assis	2020	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Dissecções e quebra-cabeças pitagóricos.	Jéssica Ferreira de Alcântara	2021	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Generalização do teorema de Pitágoras por triedro triretangular.	Marlos Luis Rocha Martins	2023	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes

	Algumas demonstrações do teorema de Pitágoras e uma proposta pedagógica com base nas ternas pitagóricas.	Pedro Lázaro Martins Alves	2020	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
E.E	Teorema de Pitágoras: uma proposta de ensino-aprendizagem com o uso de rotação por estações.	Alex Deni Alves	2023	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	O uso do gnômon como recurso didático no ensino e aprendizagem do teorema de Pitágoras no ensino fundamental.	Valdirene Lima Cerqueira Barbosa	2020	Catálogo de teses dissertações da Capes
	Uma proposta de ensino para o teorema de Pitágoras a partir de uma perspectiva histórica.	Jandir Luiz Pereira dos Santos	2021	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Uma história em quadrinhos para contribuição na produção de significados acerca do teorema de Pitágoras sob princípios do modelo dos campos semânticos.	Higor Soares Majoni	2021	Catálogo de teses dissertações da Capes
	Teorema de Pitágoras e os ternos pitagóricos.	Carlos Augusto Corrêa	2019	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	Uma sequência didática envolvendo recursos digitais nas aulas de matemática para aprender o teorema de Pitágoras.	Claudia Valin dos Santos	2022	Catálogo de teses dissertações da Capes
E.D	Thabit Ibn Qurra (836-901) e a generalização do teorema de Pitágoras: aliando história, tecnologia e investigação no ensino de matemática.	Allyson Emanuel Januário da Costa	2022	Catálogo de teses dissertações da Capes
	A compreensão do teorema de Pitágoras pelos alunos com deficiência visual: um estudo sobre as representações semióticas em geometria.	Erica Francielle Moreira Damaceno	2022	Catálogo de teses dissertações da Capes
	As contribuições do uso da história da matemática no ensino do teorema de Pitágoras com os alunos da educação de jovens e adultos (EJA).	Carla Marilla Caldeirani Lino	2019	Catálogo de teses dissertações da Capes
	O ensino do teorema de Pitágoras: concepções de professores e Uma proposta de abordagem.	Janaína Teodoro dos Santos Galvão	2021	Catálogo de teses dissertações da Capes
E.A.L.D	O teorema de Pitágoras e seus desafios no ensino fundamental: uma análise em livros didáticos.	Odaílton Silva dos Santos	2023	Profmat/ Catálogo de teses dissertações da Capes
	A teoria antropológica do didático como uma ferramenta metodológica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.	Iolanda Possidônio dos Santos Silva	2022	Catálogo de teses dissertações da Capes

Fonte: Autoria Própria (2024)

A seguir, descrevem-se os trabalhos apresentados no Quadro 8, com maiores detalhes de seus desenvolvimentos, na ordem que segue acima.

## 5.1 ESTUDOS TEÓRICOS (E.T)

➤ ESTUDO 1 (E.T)

O trabalho de Alves (2019), refere-se a abordagem elementar de conceitos da trigonometria e números complexos para possibilitar que alunos do ensino básico tenham meios de inserção inicial dos conteúdos aplicados, seu objetivo é explanar de forma assertiva tópicos que compõe esses objetos matemáticos. Alves (2019) destaca ainda que, a construção de sua pesquisa se justifica perante a necessária implementação dos assuntos, até de seu nível mais básico, para o aprimoramento de uma cultura matemática e demais áreas do conhecimento.

Alves (2019) aborda o Teorema de Pitágoras inicialmente após definir as principais colocações a respeito das relações métricas nos triângulos retângulos, a partir da secção de um triângulo retângulo em dois novos triângulos retângulos semelhantes e a pertinente manipulação dos conceitos se resulta a construção da proposição pitagórica. Em sequência, agora, sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo, ao explanar os ângulos notáveis e o auxílio do triângulo ilustrado na Figura 49, apresenta a *relação fundamental da trigonometria*:

Dado o triângulo retângulo, obtém-se,

$$\text{Cos } \alpha = \frac{c}{a}, \text{ Sen } \alpha = \frac{b}{a}, \text{ então,}$$

$$C = a \cdot \text{Cos } \alpha \text{ e } b = a \cdot \text{Sen } \alpha.$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

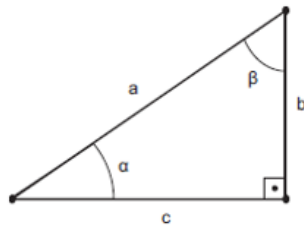
$$a^2 = (a \cdot \text{Cos } \alpha)^2 + (a \cdot \text{Sen } \alpha)^2 = a^2 \text{Cos}^2 \alpha + a^2 \text{Sen}^2 \alpha = a^2 (\text{Cos}^2 \alpha + \text{Sen}^2 \alpha).$$

Ao dividir ambos os membros por  $a^2$ , resultam-se na relação esperada:

$$\text{Cos}^2 \alpha + \text{Sen}^2 \alpha = 1.$$

Figura 49 - Ângulos notáveis e um triângulo retângulo

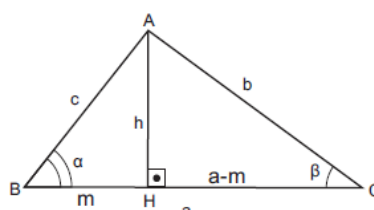
$\alpha$	30°	45°	60°
sen $\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos $\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg $\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Fonte: Alves (2019)

Ao apresentar a Lei dos Senos e dos Cossenos, Alves (2019) se utiliza do Teorema de Pitágoras para auxiliar a demonstração da Lei dos Cossenos:

Figura 50 - Triângulo AHC e AHB



Fonte: Alves (2019)

Considerando o triângulo exposto na Figura 50, aplica-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos AHC e AHB, que resulta:

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2 \quad (1), \quad c^2 = h^2 + m^2 \quad (2).$$

Obtém-se de (1) e (2),

$$b^2 - c^2 = (a - m)^2 - m^2 = a^2 - 2am, \text{ logo:}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \quad (3).$$

Em contrapartida,  $\text{Cos } \alpha = \frac{m}{c}$  ou ainda,  $m = c \cdot \text{Cos } \alpha$ .

Sendo assim é possível substituir m em (3),

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a c \cdot \text{Cos } \alpha.$$

De forma análoga, também é válido,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2a c \cdot \text{Cos } \theta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a c \cdot \text{Cos } \beta.$$

Demonstrando assim, a Lei dos Cossenos com a contribuição da proposição pitagórica, como se pretendia.

Após finalizar a exposição dos aportes teóricos por completo dos objetos matemáticos supracitados, Alves (2019) se utiliza de um apanhado de 14 problemas com fim de aplicabilidade dos conteúdos e suas respectivas soluções.

Por fim, Alves (2019), considera que os assuntos trabalhados em sua pesquisa têm sido cada vez mais negligenciados ao se tratar de currículo da educação básica, que conseqüentemente, dificulta o pleno desenvolvimento de habilidades matemáticas que se projetam nos estudantes em resolver situações cotidianas, como na sua formação profissional e até mesmo acadêmica. Ademais, para Alves (2019) seu trabalho revela que o custo para a exposição dos objetos matemáticos em questão é baixo ou ainda, quase inexistente, ao se comparar com o grau de relevância e a necessidade para uma base matemática sólida.

### ➤ ESTUDO 2 (E.T)

O trabalho desenvolvido por Rocha (2023) destrincha sobre o Teorema de Pitágoras e as construções geométricas aplicadas a uso de tecnologias no ensino,

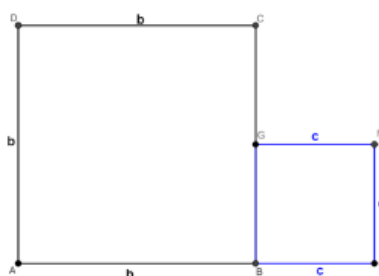
seu objetivo é aprofundar os estudos a respeito dos objetos citados. Para Rocha (2023), esse direcionamento se justifica devido as grandes dificuldades que os alunos da educação básica se encontram diante da utilização da proposição pitagórica, e o amplo conhecimento do assunto é necessário, visando à redução de danos coordenada por professores.

Além da abordagem do Teorema de Pitágoras com algumas demonstrações, Rocha (2023) apresenta construções geométricas com a utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra.

Por conseguinte Rocha (2023) ao explanar um pouco mais o Teorema de Pitágoras, destrincha algumas demonstrações, extensão, generalização e a reciprocidade do Teorema, podendo-se destacar uma demonstração em específico, a de George Biddell Airy (1801 – 1892), um astrônomo, matemático e geofísico britânico, suas contribuições ganham destaque devido a relação entre matemática e principalmente o estudo da astronomia, segue a demonstração:

Dado um quadrado ABCD de lado  $b$ , e outro quadrado BEFG de lado  $c$ , como ilustra a Figura 51.

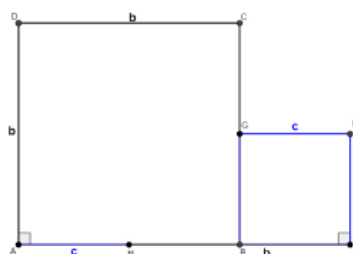
Figura 51 - Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Rocha (2023)

Infere-se que  $b \geq c$  e H pertencente a AE de modo que  $AH = c$  e  $HE = b$ :

Figura 52 - Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Rocha (2023)

Nesse sentido,

$$HA = FE$$

$$H\hat{A}D = F\hat{E}H$$

$$AD = EH$$

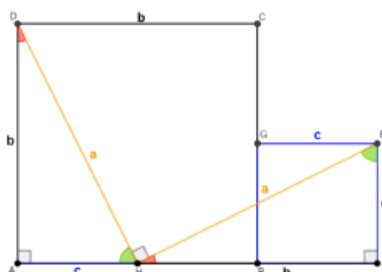


$$HAD \cong FEH,$$

Que resulta  $DH = HF = a$ .

Os triângulos  $HAD$  e  $FEH$  são retangulares e sendo  $AHE = 180^\circ$ , então  $DHF = 90^\circ$ :

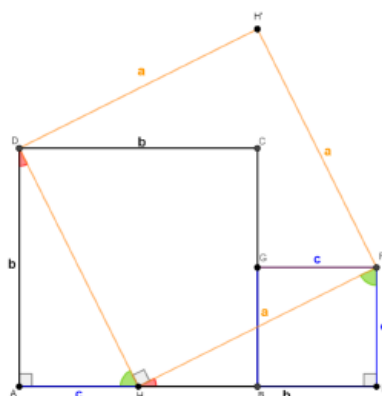
Figura 53 - Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Rocha (2023)

Agora se traça dois novos segmentos de medidas  $a$ ; o primeiro dando origem em  $F$ , paralelo a  $HD$ ; o segundo com origem em  $D$ , paralelo a  $HF$ , logo, cria-se um ponto ( $H'$ ) que é a interseção entre  $FH'$  e  $DH'$ , como  $HD$  é paralelo a  $FH'$  e  $HF$  paralelo a  $DH'$  e  $DHF = 90^\circ$ , resulta-se  $FH'D = 90^\circ$ , assim o quadrilátero  $DHFH'$  é um quadrado de lado  $a$ .

Figura 54 - Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Rocha (2023)

Trançando o segmento  $H'C$ , observa-se a construção dos triângulos  $FGH'$  e  $H'CD$ , sabendo que  $BCD = 90^\circ$  e como:

$$\left. \begin{array}{l} H'D = a = FH \\ H'DC = FHE \\ DC = b = HE \end{array} \right\} \longrightarrow HDC \cong FHE,$$

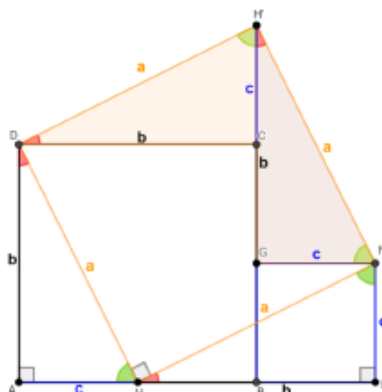
Então,  $H'CD = FEH = 90^\circ$ , logo  $H'CB = HCD + DCB = 180^\circ$ ,  $H'CD = 90^\circ$ , analogamente,  $BGF = 90^\circ$  e sendo  $H'GB = 180^\circ$ , resulta-se  $H'GF = 90^\circ$ , além do mais,  $FH'G + DH'C = 90^\circ$ , ou seja,  $FH'G = 90^\circ - DH'C$ , e no triângulo  $H'CD$ , como  $H'CD = 90^\circ$  os ângulos  $DH'C + H'DC = 90^\circ$  e  $H'DC = 90^\circ - DH'C$ , daí ângulo  $FH'G = H'DC$ , como consequência,  $DH'C = H'FG$ , assim:

$$\left. \begin{array}{l} GFH' = CH'D \\ FH' = H'D \\ FH'G = H'DC \end{array} \right\} \xrightarrow{A.L.A.} GFH' \equiv CH'D.$$

Com isso,  $GF = CH' = c$ ,  $GH' = CD = b$ .

De outra perspectiva, ao rotacionar o triângulo DAH no sentido anti-horário, tomado D como referência, em  $90^\circ$  relativo ao ponto F, rotaciona-se o triângulo FEH, que resulta H' como imagem de H, C de A e G de E.

Figura 55 - Demonstração Airy



Fonte: Rocha (2023)

Portanto, é possível a afirmação que  $HAD \equiv FEH \equiv FGH' \equiv H'CD$ , assim:

$$A(DHFH') = A(ABCD) + A(BEFG)$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

No capítulo a respeito das construções geométricas no GeoGebra, Rocha (2023) apresenta três problemas com suas respectivas soluções via construção no software:

- Construção de um triângulo retângulo, conhecendo as medidas de seus catetos, justificando em seguida que de fato o triângulo é retângulo.
- Demonstração do Teorema de Pitágoras de maneira intuitiva, conhecendo-se as medidas de seus catetos, com base na demonstração de Airy.
- Demonstração de uma forma de obter a solução gráfica para equações do tipo  $x^2 + b^2 = ax$ , onde  $a, b > 0$ .

Em suas considerações finais, Rocha (2023) discorre que, a grande variedade de aplicações da proposição pitagórica contribui de forma significativa na absorção de novos conceitos matemáticos e situações problemas do cotidiano, pela facilidade na compreensão do Teorema, para Rocha (2023), seu trabalho possibilita contribuir no aperfeiçoamento dos professores do ensino fundamental e médio. Ainda para Rocha (2023) com as demonstrações expostas o professor poderá desenvolver

aulas com maior diversificação, principalmente com o auxílio do GeoGebra, logo Rocha (2023) defende que sua pesquisa enriquece a formação continuada dos professores e favorece o aprendizado do Teorema de Pitágoras ao aluno.

➤ **ESTUDO 3 (E.T)**

Em Oliveira (2021) é definido o uso de tecnologias digitais a exemplo das plataformas GeoGebra e Pythagorea como metodologia e a disposição de fichas de trabalho sendo utilizadas pelo alunos e professores, com o objetivo de apresentar uma proposta de ensino através do desenvolvimento de fichas didáticas que possam auxiliar de maneira remota ou presencial os estudantes do 9º ano ensino fundamental visando o estímulo da melhor compreensão dos conceitos matemáticos em relação ao comprimento e áreas de figuras a partir do Teorema de Pitágoras.

Oliveira (2021) propõe a aplicação de fichas didáticas em conjuntos com aplicativos e materiais concretos, na prerrogativa de fortalecer a aprendizagem. São duas fichas, denominadas de: *Ficha A* – Teorema de Pitágoras e distâncias; *Ficha B* – Área de figuras planas e Teorema de Pitágoras.

A *Ficha A* trabalha o Teorema de Pitágoras, com o objetivo de revisar o conteúdo e calcular distâncias numa malha quadriculada através do Teorema, a utilização dessa ficha necessita o conhecimento prévio do aluno em relação a proposição pitagórica, o avanço das fases se desencadeia em decorrência da descoberta das distâncias propostas.

Essa proposta é composta por três etapas, a primeira tem o intuito de familiarização por parte do aluno com o aplicativo; a segunda tem o viés comparativo entre suas resoluções e uma demonstração realizada no GeoGebra; a terceira o aluno irá desenvolver um geoplano de madeira e pregos para estabelecer uma manipulação mais verossímil.

A *ficha B* incorpora as áreas de figuras planas e o Teorema de Pitágoras, com os objetivos de calcular e comparar áreas de figuras planas e calcular distâncias numa malha quadriculada, durante o desenvolvimento da atividade, o aluno deverá trabalhar maneira integral na manipulação do software e o material concreto, visando o aprimoramento dos conhecimentos em questão.

Por outro lado, a proposta em questão contém apenas duas etapas, a primeira, assim como na proposta anterior se trata de familiarização do aluno em relação ao aplicativo e a malha quadriculada; a segunda etapa o aluno deverá comparar áreas através da indução de retomada de seus conhecimentos a respeito

do Teorema, procedimento esse que será realizado através da manipulação de quebra-cabeças.

Ambas são compostas pela ficha do professor, que atribui instruções necessárias para o andamento da atividade de acordo com uma sequência previamente estabelecida e os materiais de utilização prevista, e as fichas para os alunos na modalidade remota e presencial, com os procedimentos e atividades elaboradas.

Oliveira (2021), conclui que o trabalho do ensino da matemática através de aplicativos, pode gerar um efeito positivo, tendo em vista que tal abordagem pode auxiliar os alunos, tratando-se de incentivo na aprendizagem. Ao considerar o contexto temporal da elaboração do trabalho, dificuldades de interação em decorrência da pandemia emergem na sociedade, logo, as adaptações das aulas tornam-se imprescindível, juntamente com acolhimento mais fortificado desses indivíduos.

#### ➤ ESTUDO 4 (E.T)

O referente estudo desenvolvido por Assis (2020) se encaixa possivelmente como um dos mais profundamente teóricos listados no Quadro (8), sua finalidade foi realizar uma pesquisa que se relacione às soluções com coordenadas naturais de equações do tipo  $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$  com  $r$  racional pertencente ao intervalo  $(-1,1)$ ; que se intitula ternos quase pitagóricos, mostrando que a equação sempre admite as soluções com coordenadas naturais, logo, a partir de um ângulo  $\alpha \in (0, \pi)$  com cosseno racional também é sempre possível a construção de triângulos que os lados possuem medidas inteiras.

Primeiramente, Assis (2020) define os ternos pitagóricos, a partir da condição para que três números reais positivos  $(x, y$  e  $z)$  sejam correspondentes aos lados de um triângulo, pela desigualdade triangular, se  $x, y$  e  $z$  correspondem a medida dos lados de um triângulo qualquer, logo é válido:

$$x < y + z \quad (1),$$

$$y < x + z \quad (2),$$

$$z < x + y \quad (3),$$

No entanto, se for o maior lado, basta a verificação da desigualdade (1), sendo as demais consequências, dessa maneira é possível definir terno triangular como o conjunto de três números reais positivos que satisfazem (1), sendo  $x$  o maior. Sendo  $(x, y$  e  $z)$ , por exemplo, ternos de números reais positivos que

satisfaçam a equação  $x^2 = y^2 + z^2$  (4), daí se conclui que  $y^2 < x^2$  ou  $y < x$  de maneira semelhante se chega que  $z < x$ , então  $x$  é o maior deles, somando agora,  $2yz$  aos dois membros:

$$x^2 + 2xz = y^2 + z^2 + 2yz,$$

$$x^2 + 2yz = (y + z)^2,$$

a partir do obtido acima se retira:

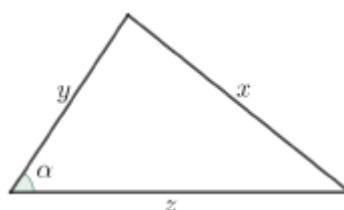
$$x^2 < (y + z)^2, \text{ ou ainda } x < y + z,$$

que implica que o terno é triangular.

Em síntese, se um terno de números reais positivos satisfaz (4), então o terno é triangular, por outra perspectiva, observe que pela recíproca do Teorema de Pitágoras se um terno triangular satisfaz a equação (4), logo correspondem as medidas de um triângulo retângulo. Direcionando o foco apenas em ternos de números naturais, segue a seguinte definição “Se um terno de números naturais ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) satisfaz a equação (4), então este será denominado de terno pitagórico”, por fim é válido tomar nota do lema “Se um terno ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) é pitagórico e  $k$  pertence aos naturais, então o terno ( $kx$ ,  $ky$  e  $kz$ ) também é pitagórico”.

Com a luz dos argumentos a respeito dos ternos pitagóricos, Assis (2020) estende essa noção com um novo conceito “ternos quase pitagóricos”, se um terno de números naturais ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) satisfazem a equação  $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$ , para qualquer “ $r$ ” pertencente ao intervalo  $(-1, 1)$  racional, então denomina-se de *terno r-quase pitagórico*. Posteriormente, Assis (2020) apresenta expressões que fornecem e caracterizam os ternos quase pitagóricos, a exemplo de quando se aplica a lei dos cossenos, logo, os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  são correspondentes as medidas dos lados de um triângulo e “ $r$ ” ao cosseno do ângulo oposto a  $x$  (maior lado).

Figura 56 - Lei dos Cossenos



Fonte: Assis (2020)

O teorema adiante garante a existência de ternos  $r$ -quase pitagóricos:

Dado um número racional  $r = m/n$  pertencente ao intervalo  $(-1, 1)$  com  $m$  pertencente aos Inteiros e  $n$  aos Naturais, tem-se para quaisquer  $a$  pertencente aos Naturais e  $b$  aos Inteiros que  $x_r = n(a^2 + b^2) + 2mab$ ,  $y_r = n(a^2 - b^2)$ ,  $z_r = 2a(ma + nb)$ ,

são inteiros que satisfazem  $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$ , ao supor que  $a > |b|$  e  $b > -ra$ , então  $(x_r, y_r, z_r)$  é um *terno r-quase pitagórico*

Em seguida, Assis (2020) expõe exemplos que mostram a aplicabilidade das relações que dispõe ternos quase pitagóricos, para depois identificar as principais diferenças em relação aos ternos pitagóricos. Para melhor compreensão exibisse aqui o exemplo 3.1.

EXEMPLO: Determine um triângulo que possua lados com medidas inteiras e um ângulo interno cujo valor do cosseno é igual a  $-1/3$ .

SOLUÇÃO: Sabendo que  $r$  corresponde ao cosseno do ângulo dado, então  $r = -1/3$ , segue que  $m = -1$  e  $n = 3$ . Utilizando as relações que fornecem os ternos quase pitagóricos:

$$x_r = 3(a^2 + b^2) - 2ab; y_r = 3(a^2 - b^2) \text{ e } z_r = 2a(-a + 3b),$$

Com  $a = 2$  e  $b = 1$ ;

$$x_r = 3(2^2 + 1^2) - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 5 - 4 = 15 - 4 = 11$$

$$y_r = 3(2^2 - 1^2) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$z_r = 2 \cdot 2(-2 + 3 \cdot 1) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Portanto, temos  $11^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot (-1/3) \cdot 9 \cdot 4$ , implicando pela lei dos cossenos que esses valores são correspondentes as medidas dos lados de um triângulo que o ângulo interno oposto ao lado  $x_r$  (11), tem valor do cosseno  $-1/3$ .

Assis (2020) analisa em decorrência dos ternos quase pitagóricos obtidos através dos exemplos e observações que: nos ternos pitagóricos, tomando  $x$  como lado oposto ao ângulo reto, este sempre será o maior valor entre os ternos, que não necessariamente ocorre nos ternos quase pitagóricos; é possível obter ternos quase pitagóricos de primos entre si, com os três valores ímpares, por outro lado, nos pitagóricos de primos entre si sempre será composto por dois números ímpares e um par; outra interessante diferença se trata de nos ternos pitagóricos para um fixado em " $r$ ", é obtido um único par de naturais para  $y$  e  $z$ , porém, nos quase pitagóricos é possível ter até três combinações distintas.

Sequencialmente, Assis (2020) destaca algumas relações a respeito dos ternos quase pitagóricos e as orientações presentes na BNCC, na busca de identificar possíveis habilidades que abordam o tema. O primeiro citado por Assis (2020) se trata do (EM13MAT309) "Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvam triângulos, em variados contextos", de acordo

com Assis (2020) os estudos dos ternos quase pitagóricos atribuem suporte ao desenvolvimento da habilidade citada.

Assis (2020) refere-se também a habilidade (EF08MA06) “Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações”, com os ternos quase pitagóricos sendo participativos na proposta, logo, para Assis (2020) as relações que foram exposta em seu trabalho podem contribuir de maneira direta no desenvolvimento das competências de matemática presentes na BNCC, como efeito, colabora no pleno desenvolvimento dos estudantes do ensino básico.

Como conclusão, Assis (2020) delibera que de acordo com a generalização dos ternos pitagóricos apresentada, que se designada por ternos r-quase pitagóricos, contempla áreas presentes na BNCC, como a álgebra, exigindo soluções para as equações quadráticas expostas, observa-se também que o cálculo desses valores numéricos auxilia alunos no desenvolvimento e aprimoramento de habilidades ligadas a resolução de problemas, em suma, para Assis (2020) os estudos dos ternos quase pitagóricos contribuiriam significativamente nas diretrizes das competências específicas de matemática, que em conjunto das competências das demais áreas promovem o desenvolvimento dos estudantes integralmente.

#### ➤ ESTUDO 5 (E.T)

O presente trabalho a ser descrito de Alcântara (2021), discorre sobre a abordagem da demonstração e generalização do Teorema de Pitágoras, além da equivalência entre áreas de figuras planas, através de manipulação geométrica com o suporte de dissecções (quebra-cabeças), com o objetivo de apresentar um material didático e lúdico, através da proposta de atividades que viabilizem ao professor trabalhar as demonstrações pitagóricas no ambiente escolar.

Alcântara (2021) descreve as dissecções matemáticas como método de decompor de forma sistemática uma figura geométrica, possibilitando a reorganização e recompondo a fim de construir outra figura, embora seja executável a realização de dissecções em quaisquer polígonos planos, não trata de uma tarefa fácil, exigindo demasiada precisão e noção espacial. O contexto histórico dos quebra-cabeças é minimamente interessante, sendo os primeiros registros da época de Platão, tratando do desafio de decomposição de um quadrado maior em dois quadrados iguais, utilizando apenas quatro peças, sendo alguns desses quebra-cabeças representação geométricos para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Alcântara (2021) saliente que existe diversos tipos de dissecções, no entanto destaca alguns tipos apenas.

- *Dissecções Translacionais ( sem rotação)*: caracterizam-se pela secção de duas ou mais figuras geométricas, sendo possível a translação as peças de uma figura para outra sem a rotação.

- *Dissecções articuladas (com dobradiças)*: Podem ser totalmente ou parcialmente articuladas, caso todas as peças estejam conectadas com dobradiças e seja possivelmente a formação de uma espécie de corrente, ao se girar em um determinado sentido, reúne-se as peças formando uma figura geométrica, e ao ser girado em outro sentido, forma-se outro quebra-cabeça.

Estabelecido as tipologias anteriormente, Alcântara destrincha três técnicas de dissecção que visão reunir as peças de uma figura em detrimento à formação de outra com mesma medida de área.

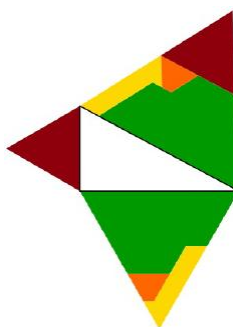
- *Tira – P (P- strip)*: esse tipo de tira possui como protótipo um paralelogramo, para produzir uma dissecção por esse método é necessário cortar o primeiro polígono e organizar as peças que podem ser repetidas, com o propósito de forma uma faixa infinita no formato de paralelogramo, o mesmo procedimento deve ser feito com o segundo polígono.

- *Tesselação (mosaico/pavimentação)*: é um conjunto de figuras planas ladrilhadas que recobrem o plano, sendo que as figuras não se sobrepõem, essas figuras são chamadas de elementos de tesselação, podendo ser utilizado mais de uma na mesma ladrilhagem.

- *Racional*: secção de uma figura realizando corte em paralelo a um determinado segmento que corresponde aos lados da figura, o comprimento desse segmento é o produto entre um número racional e lado que é paralelo.

Isto posto, Alcântara (2021) estabelece conexão com o Teorema de Pitágoras, se utilizando das dissecções para demonstrar a proposição de forma geométrica, dentre algumas exemplificações descritas, cabe a exposição de Cyrus Bradley, a partir de dois triângulos equiláteros que após a secção as peças podem ser descoladas visando a formação de outro triângulo equilátero, com área sendo resultado da soma das áreas dos outros triângulos iniciais.

Figura 57 - Demonstração do Teorema de Pitágoras com triângulos



Fonte: Alcântara (2021)

Com a ilustração da Figura 57, torna-se mais evidente a visualização, percebe-se a construção de três triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo, sendo possível a dedução através do processo de dissecação que a medida da área do triângulo que se encontra sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos. Tal dissecação se trata de um *racional*, pois, os segmentos que cortam a figura são paralelos a algum lado do triângulo, caracteriza também, por *articulada*, visto que, na manutenção das três peças interligadas, formam um triângulo equilátero ou trapézio, com o auxílio do encaixe e movimentação.

Para completar a linha lógica de sua pesquisa, Alcântara (2021) propõe um apanhado de exercícios para ser trabalhado em sala de aula, ele destaca que a premissa desses respectivos problemas é que o indivíduo tenha sucesso em movimentar e organizar as peças dispostas para montar outras figuras semelhantes e de áreas equivalentes.

Como considerações finais, Alcântara (2021) pontua a incontestabilidade do trabalho de demonstrações em sala de aula da educação do ensino básico, para o aluno desenvolver a percepção que a matemática não se resume apenas em resolução de problemas, que muitas das vezes acabam por não atribuir sentido, muito menos valor ao seu cotidiano, embora a aplicação dessas práticas nem sempre seja uma tarefa fácil de implementar.

Nesse sentido, Alcântara (2021) imprime a importância de seu trabalho, na proposta de oferecer meios metodológicos não ortodoxos que possibilitem promoção do ensino, juntamente com ludicidade ao demonstrar o Teorema de Pitágoras, conseqüentemente, o aluno possui a oportunidade de manusear e construir o conhecimento desejável.

➤ **ESTUDO 6 (E.T)**

A presente pesquisa, de Martins (2023) tem como objetivo apresentar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras a partir de *triedros tri-retangulares*, após definir alguns pontos do contexto histórico da proposição e o conceito do poliedro em questão, é abordado as possíveis relações entre as temáticas, além da relevância que as generalizações do Teorema podendo atribuir para a educação básica.

De acordo com Martins (2023), dado a importância da Geometria para o ensino de matemática e aplicabilidade na resolução de problemas, nesse caso em específico, o Teorema de Pitágoras, por muitas vezes o ensino desse objeto matemático se restringe a triângulos retângulos, com sua generalização não sendo suficientemente explorada, haja vista a incomensurabilidade de seu potencial matemático. Nesse sentido, Martins (2023) justifica o desenvolvimento e a proposta de seu trabalho, visando suprir as necessidades explanadas.

Conforme Martins (2023) descreve, o *triedro tri-retangular* se trata de um conjunto de três segmentos de retas que possuem um ponto em comum, formando ângulos retos entre si, uma de suas propriedades que se destaca refere-se que as medidas das arestas presentes em cada plano compõem a proporção 3: 4 : 5, implicando o triedro como tri-retangular, sendo possível o cálculo de suas demais arestas, tomando-se nota de apenas uma.

Martins (2023) trata de estabelecer relação entre o triedro tri-retangular e o Teorema de Pitágoras, de modo que o Teorema tem utilização no cálculo da distância entre dois pontos em um sistema de coordenadas tridimensional, para tal, imagine um ponto P contido no triedro tri-retangular, com as seguintes coordenadas  $(x, y, z)$  e outro ponto Q  $(x', y', z')$ , nesse sentido, as distâncias desses pontos são dadas por:

$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

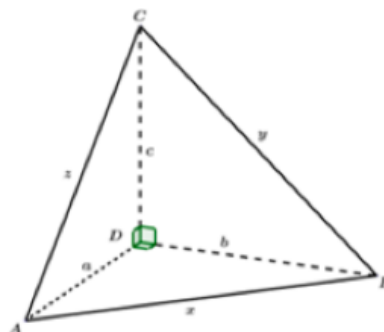
Observe que a seguinte fórmula é desenvolvida a partir do Teorema de Pitágoras.

Outro ponto de destaque que Martins (2023) explana, são os “resultados da pesquisa”, esse tópico apresenta generalizações do Teorema de Pitágoras que podem ser desenvolvidas por intermédio do triedro tri-retangulares, partindo do Teorema que diz “Num triedro tri-retangular, o quadrado da área do triângulo ABC é igual à soma dos quadrados das áreas dos outros três quadrados”.

Ao todo, Martins (2023) ressalta quatro generalizações, logo, cabe a abordagem de uma delas.

Generalização 1: Considere um triedro tri-retangular de vértice D, seccionado por um plano qualquer, originando o tetraedro ABCD com  $AD = a$ ,  $BD = b$  e  $CD = c$ .

Figura 58 - Tetraedro Tri-retangular ABCD



Fonte: Martins (2023)

Sejam  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  as áreas dos triângulos retângulos BCD, ACD e ABD, respectivamente, e  $X$  a área do triângulo ABC, logo:

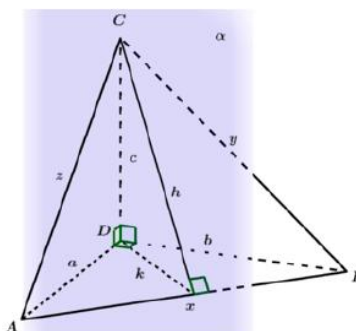
$$S_1 = \frac{bc}{2}, S_2 = \frac{ac}{2} \text{ e } S_3 = \frac{ab}{2}.$$

Deve-se mostrar:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = X^2.$$

Em sequência projeta-se o plano  $\alpha$ , que passa por CD e perpendicular a  $x$ , obtendo os segmentos  $k$  e  $h$ , perpendiculares a  $x$ .

Figura 59 - Tetraedro Tri-retangular ABCD com interseção em um plano  $\alpha$



Fonte: Martins (2023)

Dessa forma,  $X = \frac{hx}{2}$ ,  $h^2 + c^2$  e  $S_3 = \frac{xk}{2}$ .

Ao elevar a equação  $X = \frac{hx}{2}$  ao quadrado:

$$X^2 = \frac{h^2 x^2}{4}.$$

Como  $h^2 = k^2 + c^2$ , então:

$$X^2 = \frac{(k^2 + c^2) \cdot x^2}{4} = \frac{k^2 \cdot x^2 + c^2 \cdot x^2}{4} = \frac{4S_3^2 + c^2 \cdot (a^2 + b^2)}{4} = \frac{4S_3^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{4} = \frac{4S_3^2 + 4S_2^2 + 4S_1^2}{4}$$

$$= S_3^2 + S_2^2 + S_1^2.$$

$$\text{Portanto, } X^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Com a luz dos argumentos, Martins (2023) pontua algumas colocações a respeito das generalizações apresentadas em seu trabalho, a 1 e 2 são mais pertinentes no ensino médio, tendo vista a aplicação de conteúdos básicos de geometria e álgebra, propiciando aos alunos uma forma de aprofundamento dos conteúdos estabelecidos. As generalizações 3 e 4 por abordarem tópicos de produto vetorial e integral dupla, são mais pertinentes no ensino superior, dado o grau de complexidades dos assuntos, imputável a alunos de matemática e física.

Por fim, Martins (2023) reafirma a importância do estudo das generalizações do Teorema de Pitágoras aplicado a triedros tri-retangulares, considerando a sua importância para o ensino de matemática, possibilitando a resolução de problemas em situações tridimensionais, a exemplo da medição de volumes de sólidos geométricos. Além do mais, o desenvolvimento desses estudos no ensino básico pode ajudar no aprimoramento do pensamento lógico de forma mais significativa, e fortalecer a interdisciplinaridade, levando em consideração a vasta conexão dos conteúdos com outras áreas do conhecimento.

Portanto, Martins (2023), conclui que seu trabalho possui uma grande relevância para aprofundar o conhecimento matemático, além de oferece novas perspectivas do Teorema de Pitágoras através da generalização por triedro tri-retangular e viabilizar a continuidade de estudos sobre os respectivos objetos matemáticos para pesquisadores futuros.

#### ➤ ESTUDO 7 (E.T)

Alves, P. (2020), observa que o Teorema de Pitágoras embora agregue de forma significativa no ensino, acaba por ser transmitido de maneira pragmática na sala de aula, aborda-se normalmente sua definição, exemplos e resoluções de problemas, atribuindo pouca importância as suas demonstrações e particularidades, como o caso dos ternos pitagóricos, por essa lógica, Alves, P (2020) argumenta como motivação o desenvolvido de seu trabalho, com intuito de subsidiar alunos e professores no que se refere o ensino do Teorema de Pitágoras.

Pontualmente Alves, P. (2020), destaca como seu objetivo geral a oferta de um material que possa contribuir o trajeto do professor e uma alternativa de fonte

para alunos com interesse nas demonstrações e ternos pitagóricos. Como objetivo específico é definido através das demonstrações diferentes perspectivas para todo e qualquer interessado no assunto do Teorema de Pitágoras, possibilitando ao professor determinar a melhor abordagem dependendo do contexto.

Alves, P. (2020) descreve a metodologia do estudo como sendo do tipo “levantamento bibliográfico”, através de livros, artigos e sites.

Um tópico interessante que Alves, P. (2020) explana, trata-se da relação do Teorema de Pitágoras com sequência de Fibonacci. Vale lembrar que essa sequência é um padrão numérico em que o primeiro e segundo termos são 1, e os termos subsequentes é resultado da soma dos dois termos anteriores “1,1,2,3,5,8,13, ...” e assim segue de forma sucessiva.

De maneira mais formal, a definição estabelece que: *Dá-se o nome de sequência de Fibonacci,  $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ , com  $F_1 = F_2 = 1$ , para todo  $n$  maior que 2.*

Dito isso, uma publicação no periódico Scripta Mathematica da Yeshiva University, Charles W. Raine revela em 1948 uma relação que ao tomar quatro números de Fibonacci consecutivos, multiplicando seus extremos, resulta-se em um dos catetos de triângulo retângulo, por conveniência, multiplica-se os dois termos mais centrais entre si e posteriormente por dois, resultando no outro cateto, com a hipotenusa sendo um número de Fibonacci dado por  $F_{2n+3}$ .

Formalizando: Dado quatro números de Fibonacci consecutivos,  $F_n, F_{n-1}, F_{n-2}, F_{n-3}$  e  $a, b$  e  $c$  definidos respectivamente como  $a = F_n.F_{n-3}$ ,  $b = 2.F_{n-1}.F_{n-2}$  e  $c = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2$ , a terna  $(a,b,c)$  é pitagórica.

Como exemplificação, tem-se: Dada a sequência de Fibonacci 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., verifique se os números 2, 3, 5, 8 podem gerar uma terna pitagórica.

SOLUÇÃO: Seja  $F_n = 2$ ,  $F_{n-1} = 3$ ,  $F_{n-2} = 5$  e  $F_{n-3} = 8$ , então,

$$a = F_n.F_{n-3} = 2.8 = 16$$

$$b = 2.F_{n-1}.F_{n-2} = 2.3.5 = 30$$

$$c = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 = 3^2 + 5^2 = 34.$$

Agora basta verificar se os valores resultantes acima obedecem ao Teorema de Pitágoras, logo, de fato que:

$$16^2 + 30^2 = 34^2$$

$$246 + 900 = 1156.$$

No tópico subsequente, Alves, P. (2020) apresenta três propostas pedagógicas por meio de atividades, para promover o engajamento e o aprendizado

sobre os conteúdos abordados. A primeira atividade intitulada “Desenho Geométrico (Utilizando Régua e Compasso)”, possui como objetivo desenvolver através de régua e compasso segmentos perpendiculares para que assim o aluno seja habilitado a solucionar um problema exposto.

A atividade seguinte “Uso do Excel como ferramenta para compreensão das ternas Pitagóricas Primitivas”, busca evidenciar, por meio de planilha no Excel, valores de ternas pitagóricas primitivas, para que assim o indivíduo introjete a percepção das particularidades e características da temática.

A última proposta “Geometria espacial (Demonstrar aplicação das ternas e resolução de atividades)”, possui o intuito de aplicar as ternas pitagóricas na geometria espacial, com o auxílio de caixas no formato de paralelepípedos retangulares e um apanhado de contextos, destinado a alunos do segundo ano do ensino médio.

Desta maneira, Alves, P. (2020) conclui que dada a relevância da proposição pitagórica, a partir de seu trabalho foi possível perceber as diversas formas de demonstrar e explorar o Teorema, dependendo do professor encaixar as melhores abordagens de acordo com as características de suas turmas e alunos, ademais, as fórmulas que geram ternos pitagóricos, propiciam um senso de investigação ao educando e reforçam a ludicidade, mostrando a versatilidade e aplicação dessa particularidade da Proposição.

Em suma, para Alves, P. (2020), as demonstrações do Teorema de Pitágoras e a apropriação das formulações geradoras de ternas pitagóricas se tornam indispensáveis para o pleno desenvolvimento cognitivo do educando.

## **5.2 ESTUDOS EXPERIMENTAIS (E.E)**

### **➤ ESTUDO 1 (E.E)**

O referente trabalho, de Alves, A. (2023) apresenta uma proposta de ensino do Teorema de Pitágoras com a utilização de metodologias ativas, por intermédio do modelo de Rotação por Estações, inter-relacionado as tecnologias digitais.

Alves, A. (2023) apresenta a Rotação por Estações como um modelo de metodologia ativa, que consiste na criação em um circuito constituído por “estações de trabalho”, de modo que o aluno deve percorrê-las no objetivo de desenvolver habilidades, elas apresentam uma temática, sendo cada uma das estações com

abordagens diferentes e independentes estimulando o sistema sensorial amplamente. Nesse modelo o aluno é possibilitado de desenvolver habilidades autônomas e colaborativas, além do mais, é admitido ao professor o desenvolvimento do trabalho coletivo ou individualizado.

Vinculado ao modelo de Rotação por Estações, Alves, A. (2023) desenvolveu uma plataforma digital intitulada “Ambiente Pitagórico”, trata-se de um espaço virtual de aprendizagem, no qual tem o objetivo de auxiliar sendo um recurso digital e apoio para professor ao ministrar aulas a respeito do Teorema de Pitágoras, o ambiente é constituído por atividades que estimulam o aprendizado sobre o contexto histórico da proposição, jogos, experimentos, exercícios e materiais multimídias. Ademais, um importante destaque do ambiente se refere por estar separado por estações, como já foi mencionado, isso possibilita o professor, caso necessário, utilizar a plataforma apenas para fins de organização de aula, e ao aluno como forma de revisão do assunto explanado.

O ambiente elaborado por Alves, A. (2023), contém seis estações diferentes:

➤ **ESTAÇÃO PITÁGORAS:** O aluno entra em contato com a história sobre Pitágoras; vídeo de podcast para aprofundamento do contexto; proposição de questão a respeito do exposto para o aluno responder.

➤ **ESTAÇÃO TRIÂNGULO RETÂNGULO:** Aqui o aluno é convidado conhecer/ reconhecer a definição de triângulo retângulo e algumas características, por fim, é disposta uma atividade de verificação de aprendizagem.

➤ **ESTAÇÃO JOGOS:** Exposição do compilado de jogos desenvolvidos visando o auxílio no ensino do Teorema de Pitágoras, os jogos possuem o formato de “QUIZ”, alguns deles tem como objetivo revisar conteúdos de base importantes para o entendimento do Teorema, a exemplo da potenciação e a simplificação de radicais.

➤ **ESTAÇÃO TEOREMA DE PITÁGORAS:** Esta estação organiza em quatro partes, a primeira “O que diz o teorema”, contém um material em PDF com duas maneiras de enunciar o Teorema de Pitágoras, mais exemplos de aplicação para serem solucionados; em “Exemplos”, como o nome sugere, expõe alguns exemplos de situações problemas seguidos de suas respectivas soluções; “Quero assistir ao vídeo”, dispõe uma sobre o Teorema de Pitágoras através de um desenho animado; a última opção “Atividade”, o aluno encontra alguns problemas para

resolver sobre a proposição pitagórica e verificar se absorveu os conceitos da forma mais adequada.

➤ **ESTAÇÃO EXPERIMENTOS:** Possibilita ao aluno ler uma demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando semelhança de triângulos e realizar dois experimentos para acompanhar o funcionamento do Teorema.

➤ **ESTAÇÃO EXERCÍCIOS:** Em último estágio, é proposto ao educando uma bateria de exercícios, dez ao todo, adaptados de livros didáticos selecionados por Alves, A. (2023), ficando a critério do usuário a ordem própria ordem de resolução.

Para a experimentação das propostas apresentadas, Alves, A. (2023) elaborou três cenários de aprendizagem, sendo estes, aplicados a uma turma do 9º ano do ensino fundamental, composta por 24 alunos, processo se desencadeou em duas semanas, ao todo seis aulas, duas por cenário, cada um composto por quatro estações de trabalho. Em uma aula anterior, Alves, A. (2023) tratou de organizar a turma em quatro grupos de seis, com um aluno exercendo a liderança.

A identificação das respectivas estações coincidia com os dispostos no ambiente pitagórico, para atribuir familiaridade, além de obterem acesso de um link de direcionamento para o ambiente. Os cenários posteriores obtinham um funcionamento independente das estações, não sendo necessário ao aluno um conhecimento prévio para desenvolver as atividades.

Após a aplicação dos cenários, Alves, A. (2023) destaca alguns comentários pertinentes referentes ao observado. Em relação ao cenário 1, Alves, A. (2023) pontua que houve uma resistência dos alunos quanto ao tempo previamente estabelecido para cada estação, com a dificuldade de se adaptar com uma atividade diferente que trabalhava até o momento, no entanto, após a devida intervenção de continuidade, uma maior aderência foi obtida.

Na estação seguinte (estação Pitágoras), Alves, A. (2023) verificou uma indisposição dos educandos ao se deparem com a leitura, até o momento de perceberem que se tratava de um texto sucinto e informações pontuais a respeito de Pitágoras, o que despertou um maior interesse. A terceira troca de estação, foi o motivo de maior interesse pelos alunos, o podcast tratou de instigá-los, devido ao enredo do que foi apresentado e a afinidade pela voz do interlocutor.

A estação jogos, de maneira semelhante, despertou demasiado interesse dos alunos, além de existir apenas três formas de erros e um temporizador para

responder, ranking com os nomes dos indivíduos estimula uma saudável competitividade.

Quanto ao cenário de aprendizagem para aula 2, Alves, A. (2023), relatou que não encontrou grandes dificuldades, uma considerável parcela dos alunos despertou interesse pela atividade proposta, apenas um apanhado deles encontrava-se desmotivado, em consequência de desentendimento de ideias, solucionado após uma pontual intervenção.

Na estação experimento 1, o obstáculo estava relacionado ao fato dos alunos não compreenderem a aplicabilidade de forma lúdica, do Teorema de Pitágoras através da medida de áreas planas; a estação experimento 2, a dificuldade encontrada foi de origem técnica, de modo que, os alunos não possuíam habilidade suficiente no manuseio do Geogebra através do *touchpad* presente no *notebook*; a estação 3 (jogos) apresentou dois desafios: um jogo (triângulo retângulo) e um quebra-cabeça, a maior dificuldade encontrava se direciona ao quebra-cabeça, com alguns alunos concluído o processo devido a intervenção dos educadores.

A última estação (Teorema de Pitágoras) apresentou-se a formalização da proposição para os alunos, por intermédio de um vídeo que exibia duas maneiras de enunciá-lo, sendo o formato de animação um fator potencializador do processo. Por fim, os alunos foram convidados a solucionar algumas atividades a respeito do objeto matemático em questão, cinco alunos não desenvolveram a solução de maneira satisfatória, porém, com a possibilidade refazer em suas residências.

No cenário de aprendizagem para aula 3, de acordo com Alves, A. (2023), os alunos já se apresentavam mais adaptados a dinâmica trabalhada, nas atividades presentes na estação de experimentos, a recíproca do Teorema de Pitágoras foi referida, sendo desenvolvido um triângulo retângulo no Geogebra e conjecturado que a proposição é válida, e o contrário da mesma forma, surge nessa proposta especulações e dúvidas entre os educandos, essa interação foi importante para a conclusão da etapa.

As estações remanescentes, de exercícios, estabeleciam como objetivo oferecer atividades comumente encontradas nas salas de aulas e livros didáticos, a problemática não consistia em apenas definir a medida de um dos lados do triângulo retângulo, conhecendo a medida dos demais, mas sim, sendo desafiados a solucionar diversidades das situações proposta e refletirem a respeito da aplicabilidade da proposição pitagórica.

Para Alves, A. (2023), a aplicação da Rotação por Estações através dos cenários propostos priorizou a condução do processo de maneira fluida e eficiente, buscando otimizar o processo de ensino do objeto matemático sugerido, com intervenções pedagógicas sempre que visualizado como necessário para manter o alinhamento dos resultados projetados.




Portanto, Alves, A. (2023), observa que a aplicação da Rotação por Estações, dentre diversas outras metodologias ativas dispostas para o processo de ensino, propicia ao indivíduo dinamismo e ludicidade, tornando o aluno um agente ativo e protagonista do pleno desenvolvimento de seu conhecimento. Alves, A. (2023), pondera ainda a que, seu trabalho almeja estabelecer continuidade e aprofundamento dos levantamentos registrados, na busca de uma exaustiva melhora dos recursos tecnológicos propostos.

#### ➤ ESTUDO 2 (E.E)

A dissertação de autoria de Barbosa (2020) retrata a contribuição da astronomia como aporte didático para o ensino de Geometria, considerando as dificuldades apresentadas por estudantes do ensino fundamental no aprendizado de matemática. A pesquisa apresenta resultados coletados de duas turmas, 8º e 9º ano do E.F, na faixa etária de 12 a 18 anos, totalizando 72 indivíduos, no colégio Estadual José Ferreira Pinto, em Feira de Santana-BA.

Barbosa (2020) descreve que, desde os primórdios da humanidade o tempo era contando através do movimento do sol e pela posição das estrelas, até mesmo posterior a invenção do relógio mecânico, progressivamente foram desenvolvidos calendários, categorização das estações do ano, até a divisão do dia em horas, influenciando em costumes religiosos e culturais praticados até hoje. O Relógio de Sol compunha uma das formas de medir a hora através do sol, Barbosa (2020) expõe alguns modelos frequentemente utilizados no Quadro 9.

Quadro 9 - Classificação dos Relógios de Sol

Relógio de Sol	Imagem	Características
Horizontal		<ul style="list-style-type: none"> <li>-Gnômon alinhado com o meridiano local;</li> <li>-Ponto de origem das linhas de hora voltada para o Norte Verdadeiro, quando instalado no hemisfério sul;</li> <li>-Este relógio recebe a incidência direta do sol, durante todo período entre o nascer e o pôr do sol, durante o ano todo.</li> </ul>
Vertical		<ul style="list-style-type: none"> <li>-Mostrador perpendicular ao plano horizontal;</li> <li>-Face perpendicular à direção norte/sul; os de face perpendicular à direção leste/oeste são universais;</li> <li>-Face voltada para o leste indicará apenas as horas da manhã e a voltada para oeste as da tarde.</li> </ul>
Equatorial		<ul style="list-style-type: none"> <li>-Tipo inclinado e pode ser instalado em qualquer lugar, desde que, o ajuste do ângulo formado pelo plano do "mostrador" e o horizontal seja igual à colatitude do lugar (latitude - 90°);</li> <li>- É Equatorial porque a superfície onde estão inscritas as linhas de hora fica num plano paralelo ao do equador.</li> </ul>
Polar		<ul style="list-style-type: none"> <li>-Projetado para ser assentado sobre superfícies inclinadas em ângulo igual ao da latitude do lugar e alinhado com o eixo leste/oeste;</li> <li>-As linhas de hora são paralelas entre si e simétricas em relação à linha do meio-dia;</li> <li>- O gnômon, paralelo ao eixo terrestre.</li> </ul>
Analêmico		<ul style="list-style-type: none"> <li>- O objeto cuja sombra é projetada para marcar a hora, é vertical e as horas são marcadas por pontos sobre uma elipse;</li> <li>- O objeto precisa ser movido dependendo da época do ano de forma que a sombra intercepte na elipse no ponto correto, o objeto pode ser uma pessoa.</li> </ul>

Fonte: Barbosa (2020)

Este equipamento, com seus modelos mais tradicionais são compostos por artefato que possibilita a projeção da sombra, denominado de Gnômon, conseqüentemente é conhecido também por tal nome. Esses artefatos são utilizados no meio acadêmico, comumente como forma de ensino de fenômenos naturais, se tratando de matemática é possível a aplicação de conteúdos como o cálculo da bissetriz de um ângulo, circunferência, trigonometria e até mesmo o Teorema de Pitágoras.

Nesse sentido, Barbosa (2020) acredita que a aplicação de uma situação didática se utilizando desse aparato proporciona auxílio no ensino de fenômenos astronômicos e desperta um maior interesse em relação a temática, além de estabelecer conexões com o ensino de geometria através de problemáticas presentes no cotidiano.

Após a aplicação da experimentação, Barbosa (2020) pontua algumas colocações, se tratando das situações didáticas, a aceitação dos alunos do contrato didático referente a problemática é considerada como satisfatória, assim como nas situações adidáticas, mesmo quando lhe foram necessários a intervenção do professor. É observado também que, embora a organização e o planejamento do experimento estejam devidamente estabelecidos a ruptura com as regras estipuladas é inevitável, Barbosa (2020) cita alguns exemplos, como no caso de

alunos que devem resolver uma atividade sem interferência do professor, porém, insistem pelo respectivo auxílio, manifestações análogas são recorrentes.

Barbosa (2020) destaca ainda bons resultados da dinâmica em grupo na sala aula, favorecendo a interação entre os participantes e fomentando uma rede de apoio com seus pares, além de potencializar a confiança e diminuir os níveis de ansiedade, deixando um pouco de lado a metodologia do medo ao erro e a conjectura da ideia que não existe apenas uma forma de construção do pensamento lógico.

No tópico de resultados, Barbosa (2020) expõe algumas respostas obtidas na coleta dos questionários aplicados na análise preliminar e na análise posteriori, sequencialmente, é apresentado um gráfico que quantifica e compara as respostas obtidas, para todas as turmas participantes.

Quadro 10 - Compilado de gráficos que quantificam e comparam as respostas dos alunos

Gráfico 1 - Comparação dos resultados obtidos nos questionários de análise preliminar e análise posteriori na turma do 8º ano.

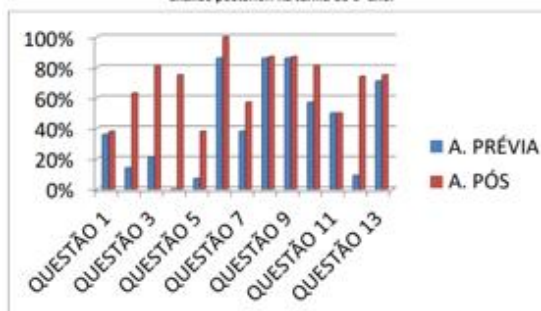
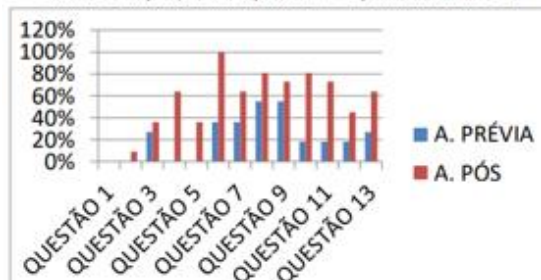


Gráfico 2-Comparação análise prévia e análise posteriori na turma 9º B



Gráfico 3 - Comparação análise prévia e análise posteriori na turma 9º E



Fonte: Barbosa (2020)

Visando a precisão na leitura dos dados, Barbosa (2020) categorizou as respostas coletas em quatro aspectos: corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. A Tabela 2 apresenta os resultados do questionário preliminar, ou seja,

aplicando antes do início das atividades, no intuito de sondar as concepções dos alunos a respeito da temática abordada.

Tabela 2 - Quantitativo de acertos e incorreções no questionário prévio

Questão	Correta		Parcialmente correta		Incorreta		Em branco		Total
	n°	%	n°	%	n°	%	n°	%	
1	8	11	0	0	58	80,5	6	8,5	72
2	10	14	0	0	52	72	10	14	72
3	22	30,5	0	0	40	55,5	10	14	72
4	0	0	0	0	44	61	28	39	72
5	0	0	0	0	32	44,5	40	55,5	70
6	52	72	0	0	18	25	2	3	72
10	16	23	38	53	10	14	8	10	72
11	26	36	0	0	26	36	20	28	72

Fonte: Barbosa (2020)

Barbosa (2020) observa que o número de incorreções é maior do que acertos, ademais, evidencia-se um significativo número de questões em branco, principalmente nas questões 4 e 5, devido ao fato dos alunos não possuírem o domínio do Teorema de Pitágoras, fato que para Barbosa (2020) não se justifica, pois trata-se de um conteúdo já estudado em outro momento.

Tabela 3 - Quantitativo de acertos e incorreções no questionário posteriori

Questão	Correta		Parcialmente correta		Incorreta		Em branco		Total
	n°	%	n°	%	n°	%	n°	%	
1	10	14	0	0	56	78	6	8	72
2	22	31	0	0	46	63	4	6	72
3	46	64	0	0	24	33	2	3	72
4	40	56	16	22	12	16	4	6	72
5	34	47	8	12	14	19	16	22	72
6	64	89	0	0	8	11	0	0	72
10	38	52	22	30	4	6	8	12	72
11	50	69	0	0	14	19	8	12	72

Fonte: Barbosa (2020)

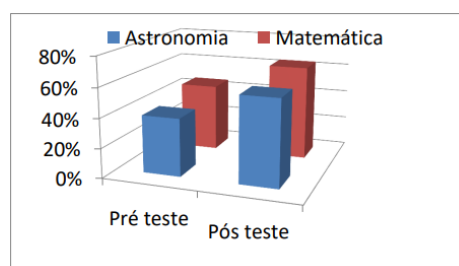
A Tabela 3 apresentada anteriormente expressa os resultados do questionário posteriori, Barbosa (2020), pondera a mudança na coleta, com número de acertos sendo maior que o de incorreções, com predominância nas que trabalham o Teorema de Pitágoras, verifica-se também, o decaimento no número de questões em branco respondidas pelos educandos.

De forma complementar, Barbosa (2020) elabora um produto pedagógico para auxiliar o ensino de matemática e astronomia através da ludicidade, o jogo “Astromatematizar”, aplicado a 32 alunos do 8º ano do E.F, precedente a realização

do jogo, aplicou-se um questionário com 15 questões composto por aritmética de nível básico e astronomia.

Após a apresentação do jogo, suas regras e seus respectivos objetivos, os alunos desenvolveram o proposto, finalizado as atividades, o questionário foi reaplicado, apresentando os resultados expostos no Gráfico 1 a seguir.

Gráfico 1 - Comparação do índice de desempenho dos alunos na aplicação do pré-teste e pós-teste



Fonte: Barbosa (2020)

Por fim, Barbosa (2020) constata a relevância da aplicação de atividades experimentais desenvolvidas pela ótica de situações didáticas a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, tal conjectura é perceptível considerado a participação e o nível de participação presenciado. Embora o envoltório dos materiais elaborados tenha natureza simplória, os resultados obtidos são demasiadamente satisfatórios, provocando uma maior motivação aos alunos e ao ensino de matemática, em consequência do aprendizado palpável e presente em seu cotidiano.

A realização do jogo, ainda por Barbosa (2020), desencadeou benéficos para o processo de ensino e aprendizagem dos objetos abordados, tendo em vista a ativa presença e participação dos discentes nas etapas elencadas, motivados pela competitividade os alunos acabaram por acertar mais questões, esta atividade propõe ludicidade no processo, estabelecendo a quebra do paradigma das salas de aulas tradicionais, instigou o interesse acerca do conhecimento da astronomia e a matemática, sendo adaptável para as diversas áreas das ciências.

### ➤ ESTUDO 3 (E.E)

A pesquisa de Santos (2021) apresenta uma proposta de ensino do teorema de Pitágoras, no intuito de desvincular a perspectiva de uma matemática crua, sem problematização, com conceitos e ideias inquestionáveis, para tanto, é explorado três práticas históricas (escola pitagórica, matemática chinesa e Euclides), através de um apanhado de atividades dispostas em uma plataforma digital (Desmos), sendo aplicadas a estudantes do Ensino Médio.

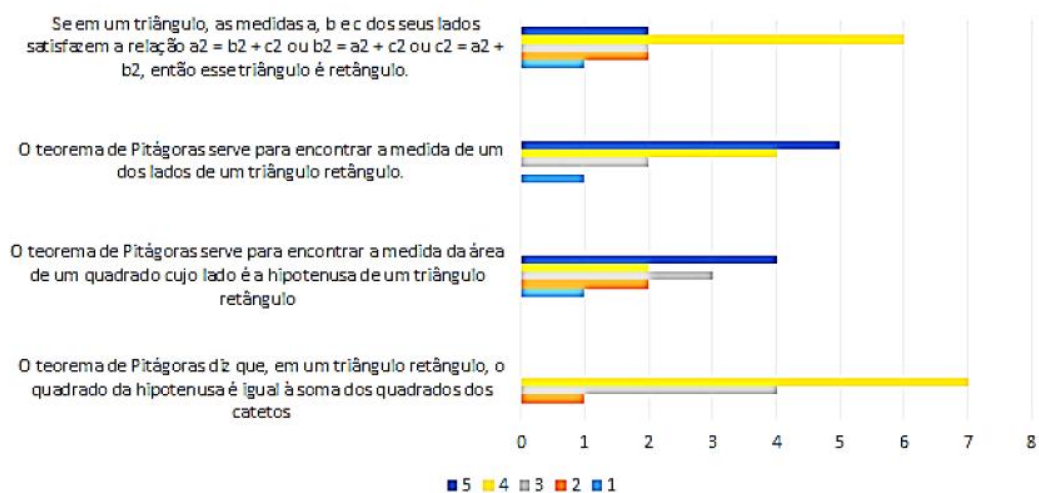
Santos (2021) define como objetivo expoente do trabalho a investigação de possíveis contribuições que a história da matemática pode proporcionar ao ensino do Teorema de Pitágoras. Dado a realidade do ensino da matemática se pautar predominantemente de maneira descontextualizada e diversos obstáculos, Santos (2021) justifica o desenvolvimento de sua dissertação, ademais, o Teorema de Pitágoras se categoriza como um conteúdo bem frequentemente no cotidiano do professor e do aluno, por muitas das vezes se resumindo a formulação que o representa, sem aprofundamento de conceitos e características.

Nesse sentido, Santos (2021) designa a seguinte questão de pesquisa “ Usar momentos do desenvolvimento histórico dos conceitos referentes ao Teorema de Pitágoras pode auxiliar a desenvolver uma visão problematizada sobre o Teorema?” (Santos, 2021, p. 11).

Santos (2021) expõe no Gráfico 2, sobre o questionário inicial, contendo a computação das respostas de algumas afirmações propostas na quarta pergunta em relação ao Teorema de Pitágoras.

Gráfico 2 - Afirmações sobre o Teorema de Pitágoras e o nível de concordância

Indique o seu grau de concordância de 1 a 5 sobre as seguintes afirmações:



Fonte: Santos (2021)

Santos (2021) observa que a última afirmação que se refere à enunciação do Teorema de Pitágoras, nenhum dos alunos sinalizou com nível máximo, demonstrando escassez no pleno domínio do conceito. A primeira afirmação refere-se sobre a recíproca da proposição pitagórica, pouco abordado pelos livros didáticos, com a maioria das respostas indicando concordância parcial.

Quanto a aplicação das atividades, foram necessários quatro encontros, sendo o último o desenvolvimento avaliativo dos alunos a respeito das atividades,

que totalizaram duas. A primeira atividade foi disposta em 10 páginas, na plataforma Desmos, obedecendo a seguinte estrutura.

Quadro 11- Estrutura da primeira atividade no Desmos

Página	Tarefa a ser desenvolvida
1	Página de abertura
2	Introdução ao contexto histórico da escola pitagórica e de suas práticas com os números, por meio das configurações espaciais de pontinhos.
3	Descrição do que é um <i>gnomon</i> .
4	Tarefa para representar alguns <i>gnomons</i> em uma malha de pontos e preencher uma tabela com o intuito de relacionar os pontos do <i>gnomon</i> com o número quadrado associado.
5	Tarefa para preencher uma tabela com total de pontos da figura anterior, número de pontos somente do <i>gnomon</i> atual e o total de pontos da figura atual, sem o recurso de representar em uma malha.
6	Destacar como a sequência recursiva de números quadrados está sendo formada.
7	Relacionar a sequência recursiva de números quadrados com a obtenção de triplas pitagóricas.
8	Tarefa para determinar uma tripla pitagórica, usando o recurso do <i>gnomon</i> para formar números quadrados.
9	Apresentar uma fórmula que permite determinar triplas pitagóricas.
10	Registrar um <i>feedback</i> da atividade

Fonte: Santos (2021)

Ao finalizar a atividade de maneira integral, Santos (2021) aplicou o questionário com o propositor de gerar devolutivas a respeito da mesma, com 9 dos participantes sinalizando positivamente, a exemplo da resposta a seguir.

Figura 60 - Feedback de um aluno em relação a indagação "O que você achou da atividade?"

Muito bom, aprendi coisas que eu nunca teria o interesse de pesquisar, e percebi que o teorema de pitágoras não é apenas triângulos, e sim uma coisa maior.

Fonte: Santos (2021)

De acordo com a perspectiva de Santos (2021), a atividade 1 entregou resultados satisfatórios, os alunos por sua grande maioria demonstraram-se engajados, solicitando até mais atividades semelhantes, além do feedback deixado pelos estudantes, o que deixou evidente o quão foi produtivo a atividade desenvolvida.

A segunda atividade desenvolvida e aplicada por Santos (2021) trata-se do “Problema Chinês no período do século I da Era comum”, tal atividade demandou dois encontros, com a participação de 17 alunos, segue o planejamento no Quadro 12.

Quadro 12- Estrutura da segunda atividade no Desmos

Página	Tarefa a ser desenvolvida
1	Página de abertura
2	Introdução ao contexto histórico da prática, no caso, do problema chinês e algumas curiosidades sobre esse problema.
3	Apresentação da versão do problema a ser utilizado, no caso a versão publicada no ano de 1213 e o significados dos caracteres presentes.
4	Apresentação da unidade de medida a ser utilizado ao longo da atividade.
5	Tarefa para responder sobre a figura geométrica que aparece com os lados na cor preta, responder qual o valor da sua área e dividir esta figura seguindo a tarefa solicitada.
6	Seguindo a divisão proposta na tarefa anterior, a tarefa é determinar o valor da área de cada retângulo formado e o valor da área de cada triângulo.
7	Tarefa para responder sobre a figura geométrica que aparece com os lados na cor verde, responder qual o valor da sua área.
8	Tarefa para determinar a medida do segmento na cor verde (hipotenusa).
9	Tarefa para responder que tipo de triângulo foi formado e qual a medida dos três lados de cada triângulo.
10	Tarefa para responder se houve a percepção do resultado da tarefa anterior com as triplas pitagóricas.
11	Apresentação da relação do problema chinês com a fórmula atual do Teorema de Pitágoras.
12	Registrar um <i>feedback</i> da atividade.

Fonte: Santos (2021)

Finalizado a atividade, solicitou-se aos alunos uma devolutiva em relação ao desenvolvimento da atividade novamente, obtendo respostas semelhantes como a representada na Figura 61.

Figura 61 - Feedback de um aluno em relação a indagação "O que você achou dessa atividade?"

Muito interessante. Apesar de algumas dificuldades no início, com a utilização dos recursos, a atividade me ajudou a construir uma linha de pensamento que foi se conectando. Os exercícios seguiram uma ordem sequencial dinâmica, que também contribuiu com o entendimento. Em suma, me trouxe uma nova visão do teorema, gostei bastante.

Fonte: Santos (2021)

Santos (2021) enfatiza ainda que, a atividade apresentou uma menor participação dos alunos, alguns obtiverem demasiada dificuldade e acabaram por não concluir, Santos (2021) acredita que tal fato seja consequência do contexto geométrico, com ênfase em erros básicos de geometria plana por parte dos

participantes, além da dificuldade no manuseio da plataforma digital, seguindo essa lógica, atitudes como uma aula de reconhecimento do Desmos e a melhoria no entendimento dos enunciados poderiam causar um efeito de melhoria no desenvolvimento da atividade.

Posterior a aplicação das atividades, Santos (2021) disponibilizou aos participantes um questionário final, para verificar o que chamou a atenção em relação as atividades, suas novas impressões sobre o Teorema de Pitágoras e sugestões de melhoria para as atividades.

Diante do exposto, Santos (2021) conclui que, dado o objetivo da investigação em verificar possíveis contribuições a história da matemática podem trazer para o processo de ensino, apoiados com a questão de pesquisa “Usar momentos do desenvolvimento histórico dos conceitos referentes ao Teorema de Pitágoras pode auxiliar a desenvolver uma visão problematizada sobre esse teorema?”.

Logo, para Santos (2021), contato dos alunos com as práticas históricas abordadas contribuem significativamente na produção de novos sentidos da proposição pitagórica, conseqüentemente, Santos (2021) considera a produção desses significados como indícios da problematização do Teorema. Em suma, com a afirmativa da problematização, acredita-se que as propostas estabelecidas contribuíram para a problematização da matemática através da história.

Santos (2021) finaliza observando que, embora existam resultados positivos na coleta dos dados, deve-se ter atenção na disseminação de mais estudos, pois, a condução das atividades foi relativamente limitada, com pouca aderência dos alunos na segunda proposta, portanto, torna-se necessário uma análise mais minuciosa dos sentidos produzidos pelos alunos.

#### ➤ ESTUDO 4 (E.E)

O presente trabalho, de Majoni (2021), refere-se ao desenvolvimento e utilização da História em Quadrinhos “Problemas com o Teorema de “Pitágoras”?” Como possível potencializador no ensino de matemática a luz de práticas históricas, diante do exposto, segue a presente questão de pesquisa: *De que maneira uma HQ pode contribuir para que os estudantes produzam significados acerca do Teorema de Pitágoras, na concepção do modelo dos Campos Semânticos?*

Conseqüentemente, Majoni (2021) destaca como objetivo geral da pesquisa “analisar a produção de significados no uso das Histórias em Quadrinhos nos

processos de ensino e aprendizagem do conteúdo “Teorema de Pitágoras”, alinhando-se com os seguintes objetivos específicos”:

Identificar características e potencialidades do uso de HQ para o ensino do Teorema de Pitágoras a partir de ideias centrais do Modelo dos Campos Semânticos;

Elaborar tarefas e orientações utilizando as HQ para práticas de ensino e aprendizagem relacionadas ao Teorema de Pitágoras inserido no produto educacional;

Trabalhar as tarefas elaboradas auxiliadas pela HQ como recurso didático para o ensino do Teorema de Pitágoras;

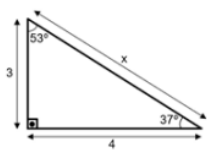
Discutir a produção de significados dos estudantes utilizando as HQs em aulas de matemática;

Analisar (ou discutir) o potencial da HQ como recurso didático e reestruturá-la, a partir dos resultados, como produto educacional (Majoni, 2021, p. 20-21.)

Na seção seguinte, Majoni (2021) destrincha com maiores detalhes, os resultados obtidos referentes a análise de dados e algumas discussões, utilizando-se de nomes fictícios para indicar a respostas. Como já citado, a atividade 1 possuía o propósito de verificar quais conhecimentos os alunos obtinham sobre o Teorema de Pitágoras, a exemplo da questão 1 e 3 apresentada por Majoni (2021), que descreve triângulos retângulos com a medida de dois lados, com a intenção de se encontrar a terceira medida.

Figura 62 - Recorte das questões 1 e 3

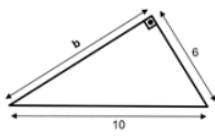
**QUESTÃO 1:** Ache o valor da medida  $x$  referente ao lado do triângulo abaixo:



**Observação:** caso seja necessário, utilize  $\text{sen } 37^\circ \cong 0,6$ ,  $\text{cos } 37^\circ \cong 0,8$ ,  $\text{tg } 37^\circ \cong 0,75$ ,  $\text{sen } 53^\circ \cong 0,8$ ,  $\text{cos } 53^\circ \cong 0,6$  e  $\text{tg } 53^\circ \cong 1,3$ .

---

**QUESTÃO 3:** Calcule o valor da medida  $b$  indicada no triângulo retângulo abaixo:



Fonte: Majoni (2021, p. 114)

Para Majoni (2021), existe a presença de produção de conhecimento, concomitante a produção de significados diferentes, até mesmo com os indivíduos que reconheciam a enunciação da proposição pitagórica sem apresentar as respostas esperadas.

Uma das respostas interessantes que Majoni (2021) destaca está relacionada a questão 2, que são equações incompletas do 2º grau para que os alunos associem os valores disponibilizados na maneira correta.

Figura 63 - Recorte da questão 2

**QUESTÃO 2:** Resolva a equação  $A^2 + B^2 = C^2$ , em que:

- a) Os valores de A e B são respectivamente 8 e 6.
- b) Os valores de A e C são respectivamente 12 e 13.
- c) Os valores de B e C são respectivamente 8 e 17.

Fonte: Majoni (2021, p. 118)

O quantitativo de respostas coletadas foi maior nesse item, Majoni (2021) defende a ideia de que muitos alunos reproduziram o pensamento generalizado, quando transmite conceitos mais gerais a situações particulares. Majoni (2021) ainda que alguns dos participantes não demonstrassem nenhum tipo de significado diante das questões estabelecidas, que pode ser consequência de alguns obstáculos epistemológicos:

- I. As aulas não presenciais, em decorrência do Covid-19;
- II. A forma de representação das equações;
- III. A premissa do erro enraizada no pensamento do aluno.

Posteriormente, os alunos foram questionados a respeito de seus pensamentos quando se fala em Teorema de Pitágoras, uma parcela significativa descreveu principalmente os trechos “triângulos, catetos, hipotenusa e ângulo de 90º”, a exemplo de algumas transcrições ilustradas na Figura 64.

Figura 64 - "Pensamento" de alunos sobre o Teorema de Pitágoras

[Maria Hill\_T2]: *Na minha mente vem um triangulo com 90º na ponta. A conta exata eu não sei, mas eu lembro que tem as letras: A, B, C, essas letras têm valores aí se monta a equação.*

[Peter Parker\_T1]: *Teorema de Pitágoras é uma fórmula matemática para calcular triângulos.*

[Goten\_T3]: *Teorema de Pitágoras é a soma dos catetos da hipotenusa. É usada para calcular os triângulos de lados iguais. Normalmente tem o ângulo de 90º.*

[Elektra\_T1]: *É uma conta que utiliza cateto e hipotenusa.*

Fonte: Majoni (2021, p. 121)

Após análise dos resultados obtidos de acordo com a aplicação de todas as atividades propostas, Majoni (2021) considera válida a aplicação de HQ como ferramenta didática no ensino do Teorema de Pitágoras, proporcionando dinamismo na sala de aula e ampliando o aporte motivacional para o aluno. Além do mais, o professor tem a possibilidade de explorar a investigação através do comando de registros de conceitos, definições e exemplos pertinentes a proposição pitagórica.

Em contrapartida, deve-se atentar a possíveis obstáculos que esse processo pode ocasionar como o fato de impressões relevantes sobre a temática acabarem por não ter a devida atenção ou até mesmo passarem despercebido, compromisso direcionado ao professor, que tem a responsabilidade de prestar as devidas orientações necessárias.

De modo geral, Majoni (2021), observa que a utilização de HQ no ensino do Teorema de Pitágoras, foi favorável na produção de significados e conhecimentos, independentemente do tipo de ação apresentado, contribuindo de forma satisfatória no processo de aprendizagem do aluno, tanto através da geometria, quanto da álgebra. Portanto o objetivo da pesquisa “analisar a produção de significados no uso das Histórias em Quadrinhos nos processos de ensino e aprendizagem do conteúdo “Teorema de Pitágoras”, obteve sucesso, sendo as respostas coletas nas atividades alicerce para tal conclusão”.

➤ **ESTUDO 5 (E.E)**

Corrêa (2019), desenvolve uma sucinta pesquisa, que se dedica a demonstrar que o Teorema de Pitágoras e os ternos pitagóricos são temáticas que podem ser trabalhadas paralelamente em sala de aula, nesse sentido, Corrêa (2019) propõe a aplicação de uma nova fórmula geradora de ternas pitagóricas. Tal proposta foi realizada em uma turma de 9º ano do ensino fundamental em Santa Maria – DF, projetando a melhoria no desempenho da compreensão do aluno e a abordagem mais aprofundada dos conteúdos propostos.

Além de propor uma maneira diferente do habitual de gerar ternos pitagóricos, esperando a melhoria no desenvolvimento da aprendizagem do aluno, esta pesquisa objetiva também a recomendação de abordagens e metodologias inovadoras para o ensino de matemática com a utilização de tecnologias.

Com o auxílio da tabela de ternos pitagóricos primitivos, Corrêa (2019) acompanha com turma possíveis padrões presentes e inicia um debate para a composição de novas fórmulas, emergindo assim um dispositivo prático que viabiliza a determinação de infinitos ternos pitagóricos: dado número  $p$ , sendo  $p$  ímpar e maior ou igual a 3.

Sabendo que um terno pitagórico tem a forma  $a^2 + b^2 = c^2$ , na presença dos alunos, buscou-se ternos gerados por  $p$ , de modo que dois números pertencentes aos ternos apresentassem de maneira de consecutiva, dessa maneira:

$$p^2 + n^2 = (n+1)^2,$$

$$p^2 = (n+1)^2 - n^2,$$

$$p^2 = 2n + 1.$$

Tal fórmula abre a possibilidade de calcular ternos a partir de  $p$ , com os demais valores consecutivos, segundo o autor, através da utilização de softwares específicos diversos testes foram executados, que acabaram por corroborar a validade da fórmula resultante.

Posteriormente, o processo foi um pouco diferente, com a verificação de ternos pitagóricos não primitivo, no intuito de revelar uma estrutura para quando  $p$  for um número par. Seguindo uma construção análoga a anterior, com  $p^2 + n^2 = (n+2)^2$ , resulta-se a fórmula  $p^2 = 4n + 4$ .

Após a conclusão das formulações, Corrêa (2019) aplica três tipos de avaliações. A primeira busca avaliar o grau de satisfação dos alunos, por intermédio de um questionário; a segunda se refere a avaliação interna das aprendizagens adquiridas, através de um teste; a terceira se trata de uma avaliação externa, realizada com o apoio do site da OBMEP.

A avaliação externa é composta por 12 questões de níveis diversificados presentes no portal da OBMEP, a seleção dessas atividades segue uma ordem aleatória independente do usuário, com a necessidade de se obter um aproveitamento mínimo de 70% para gerar o certificado referente a esse módulo. De acordo com Corrêa (2019), o objetivo dessa avaliação é colocar o aluno diante da prática para verificar o grau dos conhecimentos adquiridos.

Tabela 4 - Resultado da avaliação externa

AVALIAÇÃO FINAL PORTAL DA MATEMÁTICA - OBMEP							
ALUNO	ACERTOS	APROVEITAMENTO	RESULTADO	ALUNO	ACERTOS	APROVEITAMENTO	RESULTADO
1	11	92%	APROVADO	21	12	100%	APROVADO
2	11	92%	APROVADO	22	12	100%	APROVADO
3	12	100%	APROVADO	23	9	75%	APROVADO
4	10	83%	APROVADO	24	11	92%	APROVADO
5	12	100%	APROVADO	25	12	100%	APROVADO
6	12	100%	APROVADO	26	9	75%	APROVADO
7	11	92%	APROVADO	27	FALTOU	FALTOU	REFAZER
8	8	66%	REFAZER	28	11	92%	APROVADO
9	6	50%	REFAZER	29	12	100%	APROVADO
10	12	100%	APROVADO	30	12	100%	APROVADO
11	12	100%	APROVADO	31	11	92%	APROVADO
12	11	92%	APROVADO	32	12	100%	APROVADO
13	10	83%	APROVADO	33	9	75%	APROVADO
14	12	100%	APROVADO	34	10	83%	APROVADO
15	12	100%	APROVADO	35	12	100%	APROVADO
16	12	100%	APROVADO	36	12	100%	APROVADO
17	11	92%	APROVADO	37	11	92%	APROVADO
18	12	100%	APROVADO	38	12	100%	APROVADO
19	11	92%	APROVADO				
20	10	83%	APROVADO				

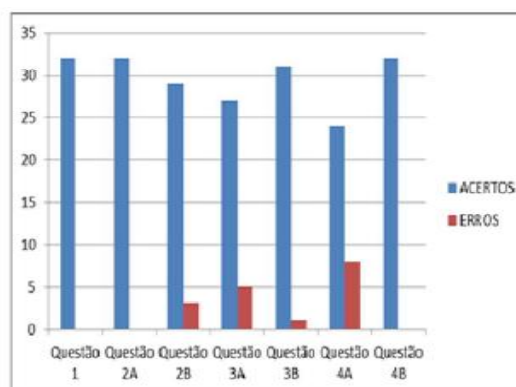
Fonte: Corrêa (2019, p. 32)

Os resultados apresentados na Tabela 4, segundo Corrêa (2019) demonstram resultados satisfatórios, pois, dentre os 38 alunos da turma, 18 atingiram nota

máxima, e 35 foram aprovados, com um aproveitamento de cerca de 90%, que sugere a efetividade da metodologia adotada.

A avaliação interna foi elaborada pelo professor, composta por quatro questões, com o objetivo de verificar a construção do conhecimento acerca do tema pelos alunos, além de disponibilizar dados palpáveis para auxiliar em possíveis tomadas de decisão projetando melhorias.

Gráfico 3 - Resultado da avaliação interna

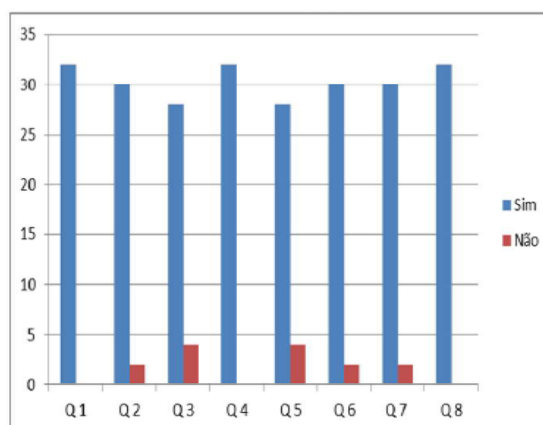


Fonte: Corrêa (2019, p. 34)

Conforme Corrêa (2019) expõe, os resultados obtidos alcançaram todos os objetivos almejados pela proposta, todas as questões ultrapassaram a marca de 24 acertos, dentre as atividades desenvolvidas, em 3 delas o índice de acerto chegou a 100%, indicando a importante contribuição ao se trabalhar os temas de maneira paralela.

Por fim, Corrêa (2019) disponibilizou aos estudantes participantes a avaliação de satisfação, que é constituída por questionário no qual os alunos podem indicar suas impressões e opiniões a respeito da pesquisa desenvolvida.

Gráfico 4 - Pesquisa de satisfação



Fonte: Corrêa (2019, p. 36)

Corrêa (2019) interpreta que os resultados coletados são positivos, devido ao registro significativo de impressões afirmativas para a metodologia adotada,

fortalecendo o sucesso dos objetivos projetados e gerando motivação necessária para a continuidade de pesquisas futuras e de implementações de metodologias diversificadas no processo de ensino de matemática.

Portanto, Corrêa (2019) conclui que, ao se considerar a proposta de disponibilizar uma nova proposta metodológica para o ensino do Teorema de Pitágoras, permitiu a reflexão de benefícios e consequências da implementação de diferentes recursos didáticos e verificar de que maneira esses materiais podem auxiliar no processo de aprendizagem.

Mesmo diante de algumas dificuldades, ao exemplo da carência de recursos, os alunos demonstraram interesse pelo tema trabalhado em sala de aula, as avaliações e impressões construídas pelos educandos corroboram com fato de sucesso diante dos objetos almejados pela pesquisa. O trabalho com a tecnologia pelos alunos de maneira correta estabelece um ambiente enriquecedor, motivador e lúdico, podendo ajudar a assimilar de maneira mais rápida conceitos abstratos, tirar dúvidas, revisar, calcular e estender o ambiente da sala de aula para o virtual (Corrêa, 2019).

#### ➤ ESTUDO 6 (E.E)

A presente pesquisa de Santos (2022) tem como objetivo central propor uma metodologia de ensino que viabilize maneira mais fácil, atrativo e significativo o ensino do Teorema de Pitágoras, o material em questão se trata de uma sequência didática aplicada por meios tecnológicos. Ademais, alguns objetivos específicos são descritos: identificação dos problemas de entendimento da proposição pitagórica e as falhas/limitações dos materiais comumente utilizados de forma significativa; listar situações do cotidiano que o Teorema de Pitágoras é passível de aplicação; identificação dos recursos didáticos e digitais é apropriada para o processo de ensino e aprendizagem do aluno; a elaboração, descrição e avaliação de uma sequência didática que se relacione com tecnologias

Quanto aos resultados obtidos por Santos (2022), torna-se pertinente nesse momento o destaque de alguns pontos da análise da roda de conversa e a avaliação da sequência didática desenvolvida. A roda foi composta por cinco professores de matemática, sendo o primeiro questionamento se referindo as quais conhecimentos prévios os alunos deveriam obter para a imersão do aprendizado do Teorema de Pitágoras, o Quadro 13 apresentam algumas respostas coletadas.

Quadro 13- Saberes prévios necessários para aprender o Teorema de Pitágoras

Saberes	Respostas
<ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar o triângulo retângulo</li> <li>Identificar os elementos do triângulo retângulo</li> <li>Identificar o ângulo reto</li> <li>Calcular potências</li> <li>Construir triângulos</li> <li>Interpretar textos</li> <li>Ilustrar situações problema</li> </ul>	<p>Participante A: “(...), ele precisa ter a visualização geométrica da figura e precisa resolver as potências.”</p> <p>Participante B: “Saber construir os triângulos, que eu entendo ser a base da parte de Geometria.”</p> <p>Participante D: “é a interpretação de texto, porque o aluno precisa primeiro compreender o problema. Em seguida, eu também posso dizer que seria a parte algébrica.”</p> <p>Participante E: “Identificar o que é um triângulo retângulo.”</p>

Fonte: Santos (2022, p. 36)

Conforme os fatos, para Santos (2022) os professores ao elaborar suas aulas devem manter a preocupação em manter a relação dos conteúdos da grade curricular em sintonia com os conhecimentos prévios estabelecidos pelos alunos, sendo o planejamento um fator crucial no desenvolvimento desse processo de construção.

Outro questionamento que se destaca em um segundo momento é quais são as percepções dos professores ao avaliarem os alunos, tratando-se do Teorema de Pitágoras, o objetivo estava em torno de consolidar subsídios necessários para o desenvolvimento de atividades que resolvessem essas dificuldades, os Quadros 14 e 15, expressam algumas falas dos entrevistados.

Quadro 14- Dificuldades encontradas pelos alunos na aplicação do Teorema de Pitágoras

Dificuldades encontradas	Respostas
<ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar a hipotenusa.</li> <li>Ilustrar as situações problema quando a figura não é dada.</li> <li>Calcular potências.</li> <li>Realizar cálculos algébricos.</li> <li>Aplicar em situações do cotidiano.</li> <li>Identificar o triângulo retângulo em determinados contextos.</li> </ul>	<p>Participante A:” identificação da hipotenusa; a questão da potência em si, quando ele vai calcular; identificar um triângulo retângulo em determinados contextos.”</p> <p>Participante A: “é a questão da potência em si, quando ele vai calcular, quando ele vê a medida do triângulo ao quadrado, muitas vezes, ele não consegue ver esta relação.”</p> <p>Participante B: “Quando vem um problema para eles ilustrarem e desenvolverem, eles têm muita dificuldade.”</p> <p>Participante A: “eu não vejo uma facilidade, num primeiro momento, dos alunos identificarem um triângulo retângulo em determinados contextos</p> <p>Participante C: “qualquer que seja a variável, sempre tem que ser a hipotenusa, mas se a letra muda de posição no triângulo, quando ela deixa de ser a hipotenusa, o aluno tende a se confundir(...)”</p> <p>Participante D: “Eu acho que uma questão primária que atrapalha muito a gente é a interpretação de texto, porque o aluno precisa primeiro compreender o problema.”</p>

Fonte: Santos (2022, p. 37)

Quadro 15 - Aprendizagem significativa

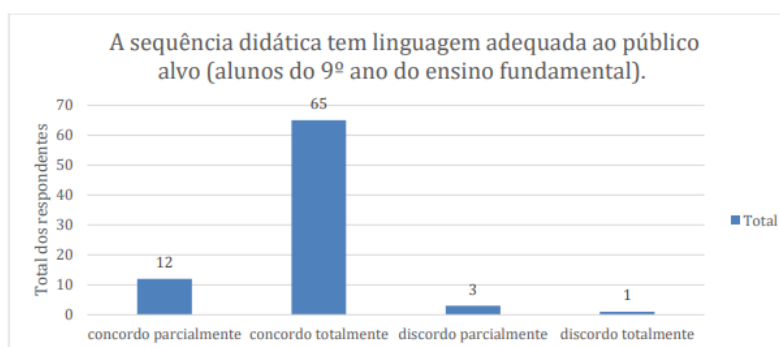
Aprendizagem significativa	Respostas
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Necessidade de se utilizar situações mais próximas das vivências dos alunos.</li> <li>• Os alunos acreditam que não vão usar determinado conteúdo.</li> <li>• A falta de uma geometria com aplicação.</li> <li>• Aplicar em situações do cotidiano.</li> <li>• Identificar o triângulo retângulo em determinados contextos.</li> </ul>	<p>Participante A: “A problemática toda está na questão mesmo da visualização da figura e relacionar essas figuras dentro da sua realidade no seu dia a dia. Então, é necessário buscar essa conexão. Eu vejo que eles não conseguem transportar isso.</p> <p>Participante C: “(...)houve uma falta, ao longo de um bom tempo em nossa vida, houve uma falta dessa geometria mais aplicada, mais bem vista, mas pontuada, e isso fez com que até alguns professores não tenham tido tanto acesso.”</p> <p>Participante D:” (...) não enxergam determinadas situações do cotidiano deles com um pensamento mais matemático, eles acham que nunca vão usar aquilo na vida deles e vão largando de mão e não dão um significado àquele conteúdo.</p>

Fonte: Santos (2022, p. 37 – 38)

Santos (2022) observa de acordo com os relatos que, muitos alunos demonstram dificuldades de conteúdos já ministrados e não absorvido pelos educandos, com predominância na realização em conexões de situações do cotidiano com o Teorema de Pitágoras, logo, Santos (2022) conjectura que esses indivíduos não atribuíram aprendizagem significativa.

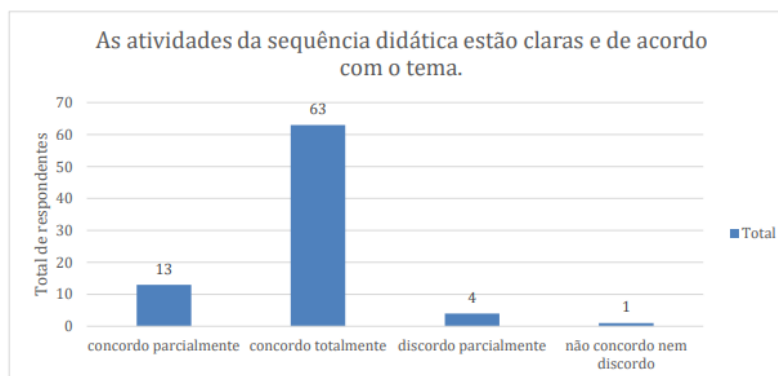
Após o desenvolvimento da sequência didática, Santos (2022) desenvolve um material com fins avaliativos, no intuito de coletar e catalogar as impressões dos professores a respeito do recurso didático proposto. Buscando por compreender de que maneira os recursos e as metodologias podem contribuir na aprendizagem do aluno na perspectiva dos discentes, tratando-se da adequação da linguagem transposta e clareza nas atividades, os Gráficos 5 e 6 relevam os percentuais computados.

Gráfico 5 - Avaliação quanto a adequação da linguagem utilizada na S.D



Fonte: Santos (2022, p. 58)

Gráfico 6 - Clareza das atividades propostas



Fonte: Santos (2022, p. 58)

Como fica evidenciado nos Gráficos anteriores (5 e 6), uma parcela significativa sinaliza que “concorda totalmente” com as indagações referidas. Nesse sentido, Santos (2022) enfatiza a importância do professor em estar atento à linguagem que utilizará na elaboração das atividades, para diminuir a possibilidade de dúvidas; outra preocupação que professor deve estar em alerta é a clareza de suas palavras, a adequação deve ser essencial, buscando por não utilizar palavras que não fazem parte do vocabulário do alunado, porém, mantendo o devido rigor matemático, exigindo do professor a sensibilidade de explorar novos significados gradativamente.

Por fim, Santos (2022) pondera reflexões em decorrência de resultados obtidos, a roda de conversa permitiu evidenciar que os alunos necessitam de determinados conhecimentos prévios para estabelecer o aprendizado da proposição pitagórica; a utilização de recursos de tecnologia e multimídia é válida para a construção de atividades introdutórias; o livro didático é um material relevante no processo de ensino, porém não deve ser o único meio; a matemática deve ser trabalhada de forma significativa na vida do aluno, explorando situações reais, não mergulhando com exclusividade na abstração.

Diante dos expostos, foi possível a elaboração de uma sequência didática que demonstrou eficiência na perspectiva de professores de matemática, de modo que a S.D pode atribuir relevância social e contribuir no aprendizado do Teorema de Pitágoras, ademais, o material se manifestou com adequação e clareza de linguagem empregada. Portanto, a mediação do ensino através da aplicação de uma sequência didática incorporada por aparatos tecnológicos, contribuiu no processo de ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras, tornando-o mais atrativo e

significativo, e conseqüentemente estimulando a participação e reduzindo os danos recorrentes no ensino de matemática (Santos, 2022).

### 5.3 ESTUDOS DIAGNÓSTICOS (E.D)

#### ➤ ESTUDO 1 (E.D)

A pesquisa elaborada por Costa (2022) se direciona a História da matemática, especificamente de origens Islâmicas medievais, dado a sua relevância devido a influência na matemática ocidental, sendo a produção do estudioso Thabit Ibn Qurra foco da investigação realizada, com a exploração da Generalização do Teorema de Pitágoras válido para um triângulo qualquer, buscando-se estabelecer nesse sentido, maneiras de como as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação podem auxiliar melhoria na compreensão desse contexto.

Tais esforços alinhados por Costa (2022), visam a construção de um produto educacional que foi aplicado em um momento secundário no trabalho. A dissertação é caracterizada como qualitativa do tipo bibliográfica, apresentando a seguinte questão-foco:

Quais as possibilidades de estudo sobre a generalização do Teorema de Pitágoras, segundo Thabit Ibn Qurra, voltados para o ensino de Matemática podem ser mobilizadas num caderno de atividades, na perspectiva da aliança entre História da Matemática, Tecnologias Digitais, via Investigação Matemática? (Costa, 2022, p. 20).

O desenrolar do levantamento bibliográfico culminou no documento “Sâbit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi”, com a tradução “O completo Teorema de Pitágoras feito por Thabit ibn Qurra”, transcrita originalmente em árabe e com uma tradução em turco, o trabalho apresenta uma prova atribuída historicamente a Sócrates, que na realidade foi concebida por Thabit. Tal documento foi utilizado com destaque nas análises da pesquisa, gerando dados e informações para a elaboração de fichamentos, gráficos, tabelas, traduções, textos históricos e exploratórios, com a finalidade de serem utilizados na construção das atividades para o produto educacional (Costa, 2022).

A etapa subsequente do trabalho refere-se sobre a pesquisa-ação, momento de aplicação dos testes desenvolvidos e aprimoramento, para que em sequência o produto passe pela validação, o processo foi desencadeado em um curso de extensão a professores em formação inicial e continuada, além de pesquisadores de áreas afins, como Ensino, Educação e História da Matemática e Ciências. Os

instrumentos utilizados compreendem questionários, entrevistas, fotografias e vídeos, áudios, entre outros (Costa, 2022).

Após a realização dos levantamentos necessários à pesquisa, Costa (2022) desenvolve um organograma no intuito de ilustrar de maneira sucinta o caminho traçado, revelação de pontos cruciais e conclusões estabelecidas no entorno da Generalização do Teorema de Pitágoras de Thabit, como contexto histórico e algumas obras. Nesse sentido, em consonância com as reflexões e levantamentos realizados, o autor estrutura o produto educacional a ser proposto, no intuito de obter esclarecimentos sobre a questão de pesquisa anteriormente citada.

O produto basicamente é descrito como um caderno de atividades que incorpora elementos históricos e investigativos da matemática, além das tecnologias digitais de informação e comunicação, no qual tem como objetivo em reconhecer as potencialidades didáticas dos elementos supracitados a partir da Generalização do Teorema de Pitágoras proposta por Thabit, além incentivar a reflexão da aplicabilidade das generalizações matemáticas no cotidiano e contribuir de forma significativa na formação do docente (Costa, 2022).

Posteriormente, consolidado as potencialidades exploratórias, Costa (2022) define as temáticas que serão abordadas no produto educacional: enunciado retórico, tratamento dos casos especiais e as reflexões sobre generalização, além da atribuição de traços históricos de Thabit que se relacionam com o contexto medieval, trabalhados em paralelo com produções da mesma época e geografia. Logo, como consequência do exposto, surge a intitulação de três atividades.

1. Conhecendo o documento, Thabit e seu contexto.
2. Investigando a generalização do teorema de Pitágoras desenvolvida por Thabit, a partir da carta a um amigo.
3. Refletindo com Thabit sobre generalização, a partir da carta a um amigo (Costa, 2022, p. 82)

As atividades, de acordo com Costa (2022), foram aplicadas em três encontros com até 2 horas de duração, vale ressaltar que o curso foi desenvolvido remotamente, com 11 inscritos e 6 participantes ativos, com o auxílio de um questionário no Google Forms as inscrições foram formalizadas, obtendo também algumas informações, como sexo, idade e formação, entre outros dados (Costa 2022)

Isto posto, com as devidas aplicações e impressões dos indivíduos, o terceiro encontro foi utilizado para o fechamento, com o questionário final foi possível realizar

cruzamento das informações inicialmente coletadas, ao exemplo de quando Costa (2022) indaga a respeito da aliança entre HM, TD e IM:

Figura 65 - Resposta do cursista sobre a aliança entre HM, TD E IM do questionário final

sim, a aliança possibilitou por meio da HM conhecer o contexto em que viveu thabit e conhecer o motivo que o levou a mostrar a generalização do teorema de pitágoras. A IM nos levou a traçar conjecturas, ou seja, construir nossas próprias hipóteses e a utilização do GeoGebra deixou tudo mais claro em razão da visualização da construção. Acredito que a junção das três tendências ajudou demais no sucesso da atividade.

Fonte: Costa (2022, p. 129)

Para Costa (2022), a resposta presente na Figura 65, juntamente com as demais, revela que definitivamente as produções de Thabit contribuíram significativamente para a compreensão do relator, porém outros elementos como a investigação e a história da matemática fizeram parte desse enriquecimento, mostrando a relevância da aliança.

Logo, na perspectiva de Costa (2022), considerando-se os objetivos traçados pela pesquisa e a questão foco estabelecida, os resultados apresentados demonstram avanços nas informações históricas significativamente, pois os dados coletados indicam que os indivíduos sinalizaram uma melhora na compreensão, além do mais, Costa (2022), atribui como resultado se tratando de História da Matemática, a precisa adequação de fontes históricas como recurso investigativo.

Em decorrência da aplicação do caderno de atividades, Costa (2022) observa determinados pontos, o primeiro está relacionado ao conhecimento matemático como produção humana, tal fato se confirma na apresentação das obras de Thabit, além da construção no Geogebra, desenvolvendo a percepção no aluno da matemática como produção humana.

O uso da tecnologia, de acordo com Costa (2022), teve grandes contribuições na construção do conhecimento, tendo em vista que o Geogebra foi utilizado como recurso didático para fins comparativos no alcance de um objetivo, logo, a tecnologia não foi aplicada de forma descontextualizada, cabe ressaltar o uso das atividades na manipulação das informações históricas, no entanto, a validação foi estritamente dependente da relação tecnológica e seres humanos.

Costa (2022) percebe que os participantes do trabalho apresentam preocupação com formalização da matemática, seja ela escrita ou oralizada, ademais a matemática em sua forma genuína é percebida por Costa (2022), logo viabilizou o contato dos indivíduos com as ideias proposta, conseqüentemente, para aplicação do referente produto educacional haverá necessidade de adaptação do

material dependendo do nível de instrução matemática presente em cada amostra ou turma, para aperfeiçoar os benefícios do material (Costa, 2022).

Costa (2022) defende que a produção do conhecimento investigativo possibilitou a exploração, investigação e experimentação da matemática em torno da análise do documento de Thabit. As práticas propiciaram também aos participantes, autonomia na construção do conhecimento e a disposição como criadores ativos do processo, tendo em vista que os docentes conjecturaram ideias e levantaram hipóteses, com realização de testes projeções através do Geogebra por exemplo.

Outro fator destacado por Costa (2022) refere-se à possibilidade didática na relação entre o professor e o aluno, sendo o professor direcionador da produção ativa do aluno, nesse momento o destaque não se remete ao professor como protagonista desse processo, que descaracteriza a importância do docente.

A otimização do tempo foi um fator de grande relevância, o Geogebra permitiu através de seus recursos próprios explorarem algumas situações diferentes dentro da temática “Generalização do Teorema de Pitágoras” sem se preocupar em recriar o mesmo ambiente diversas vezes, sendo esse tempo propício a ser utilizado na profundidade da investigação (Costa, 2022).

Por fim, Costa (2022), visualiza o desenvolvimento do trabalho benéfico para formação continuada dos docentes, de modo que promoveu aos participantes a percepção da função da História da Matemática no ensino; métodos e técnicas com grande potencial de trabalho em sala aula de aula, que se diferenciam dos modelos tradicionais e obsoletos. Costa (2022) reforça a importância de o professor adequar, organizar e flexibilizar os horários, o planejamento torna-se fundamental para o melhor desempenho e fluidez do processo.

#### ➤ ESTUDO 2 (E.D)

A dissertação de Damaceno (2022) possui o intuito de investigar a aprendizagem do Teorema de Pitágoras em alunos com deficiência visual, de modo geral, o objetivo é compreender como se desenvolve o processo de interação com os variados registros de representação e suas articulações em relação às atividades que envolvem o Teorema de Pitágoras, sendo mais específico: verificar quais são as representações que alunos com D.V utilizam no processo de ensino do Teorema de Pitágoras; identificar as representações que os alunos utilizam no trabalho com o Teorema de Pitágoras; identificar como o aluno com D.V realiza o tratamento e a conversão entre representação e o Teorema de Pitágoras.

Nesse sentido, Damaceno (2022) busca contribuir com o professor que trabalha com alunos que possuem D.V a obter resultados mais significativos, considerando as dificuldades que grande parte apresenta. Para tanto, anterior a proposta de produtos que possam auxiliar o professor e o aluno, necessita-se verificar como o ensino desse processo tem se encaminhado, além das melhores estratégias e recursos aplicáveis ao ensino do Teorema de Pitágoras a alunos deficientes visuais. Logo, Damaceno (2022) recorre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica como aporte teórico, de acordo com as contribuições de Almouloud (2003, 2004, 2016, 2017) e Duval (2012, 2017).

A investigação é de cunho qualitativo, com entrevista aos professores, ex-alunos e alunos do Centro de Apoio Pedagógico para Atendimento às Pessoas com Deficiência Visual (CAP), com as devidas aprovações do Comitê de Ética em Pesquisa e o consentimento esclarecido dos participantes.

De início Damaceno (2022), entrevista três professores que fazem parte do corpo docente do CAP-GO, com direcionamento previamente estabelecido, adaptando-se as perguntas ao decorrer da entrevista quando necessário, a investigação estava em torno da percepção dos professores em relação aos registros de representação que se associam à geometria; de que forma os D.V reconhecem os registros em linguagem natural; como se apropriam deles; entre outros questionamentos.

Posteriormente, Damaceno (2022) realiza uma entrevista com alunos com D.V que tiveram a oportunidade de estudar o conteúdo, cabe ressaltar que assim como com os professores, os alunos foram entrevistados remotamente, o foco estava em verificar como os alunos aprendiam o Teorema de Pitágoras; se houve o auxílio de algum recurso pedagógico e quais foram; como eles interagem com esses materiais, entre outras perguntas.

Em decorrência dos alunos com cegueira congênita não possuem memória visual, a confecção dos objetos deverá ser por estímulo tátil, os alunos com algum resquício de memória visual poderão associar as figuras geométricas. Apenas Karla (nome fictício), dentre os quatro alunos participantes possui memória visual, pois iniciou a perda aos seis anos de idade (Damaceno, 2022).

Damaceno (2022) esclarece que para coleta dos dados se baseou no processo de sistematização e análise com a sugestão de Fiorentini e Lorenzato (2009), com a fase de análise envolvendo a organização das informações transcritas

por categorias ou unidades de significados, com a finalidade de confrontamento das respostas, na perspectiva de indicação de padrões ou regularidades importantes.

Nesse sentido, considerando os objetivos da pesquisa, a pergunta norteadora e questão foco, foram estabelecidas categorias distintas:

- I. Representações utilizadas no processo de ensino;
- II. Representações utilizadas pelos alunos;
- III. Tratamento e a conversão entre representações distintas do Teorema de Pitágoras;

Para o andamento da pesquisa, Damaceno (2022) define a análise vertical, sendo cada categoria analisada individualmente, para que no fim seja confrontada as informações e resulte em conclusões projetadas de acordo com objetivos traçados.

A respeito das “Representações utilizadas no processo de ensino”, Damaceno (2022) investigou de acordo com as falas coletadas a forma com que os objetos eram apresentados aos alunos nas aulas sobre o Teorema de Pitágoras, possibilitando corroborar que as representações associadas ao conteúdo são a língua materna, a representação algébrica e figuras geométricas. Tratando-se das representações geométricas evidenciou-se a diferença entre as representações do braille e à tinta, e a importância do emprego da linguagem adequada apresentada em sala de aula (Damaceno, 2022).

Os recursos táteis são imprescindíveis, sendo os materiais manipuláveis o melhor acesso aos alunos em compreender as figuras geométricas, cada material é indicado apresentar sua respectiva descrição e propriedades. Quanto a formulação que representa o Teorema de Pitágoras é primordial a compreensão dos elementos, conceitos e particularidades vinculadas, tanto para o aluno com D.V ou não, os indivíduos devem manipular a fórmula de maneira dedutiva, intuitiva e investigativa (Damaceno, 2022).

Tratando-se de “Identificar as representações que os alunos utilizam”, é importante ressaltar que as figuras geométricas são representadas com auxílio da construção de materiais manipuláveis, principalmente quando se fala de alunos com cegueira congênita, pois o aluno que não possui memória visual deverá construir seus significados através de leitura tátil, sendo necessária a captação dos detalhes para que posterior consolide uma visão mais geral do material (Damaceno, 2022).

Damaceno (2022) observa sobre cuidado com mecanização da aprendizagem, fenômeno essa não apenas apresenta com alunos D.V, no processo de ensino é natural que o indivíduo utilize representações que o considere significativas, nesse sentido, o aluno acaba por priorizar uma representação, renunciando às demais, que pode ocasionar ruído na compreensão, tornando os conteúdos abstratos e sem sentido para eles.

No que tange em “Identificar como o aluno realiza o tratamento e a conversão entre as representações distintas do Teorema de Pitágoras” observa-se subjetividade na questão, dependendo de como foram desenvolvidos os estímulos, sua história pessoal e o contexto da aprendizagem. As representações das figuras comumente dependem de materiais manipuláveis para a melhor compreensão, sendo uma tarefa inviável apenas com a mentalização (Damaceno, 2022).

Damaceno (2022) identifica a dificuldade nos alunos em compreender a conversão, conseqüentemente, o aluno desenvolve uma prática mecanizada e resume seu aprendizado em decorar e replicar fórmulas. Logo, para Damaceno (2022), com base em Duval (2017) e Almouloud (2017), explana a importância da diversidade de registros, pois, para desenvolver estudos sobre dificuldades no ensino de matemática é necessário priorizar a conversão das representações, no entanto, essas variedades são aplicadas no processo de ensino e aprendizagem com pouca frequência (Damaceno, 2022).

Em virtude da coleta dos dados obtidos, Damaceno (2022) produziu seu produto educacional visando contemplar alunos com D,V ou não, o autor acredita que a maioria dos alunos tem acesso a dispositivos eletrônicos (celular, computador ou tablet), à vista disso, desenvolveu-se um *podcast* educacional com uma atividade sobre o Teorema de Pitágoras. De maneira complementar, Damaceno (2022) disponibilizou um caderno educacional contendo orientações pertinentes ao material, acrescido de atividades sugeridas sobre a proposição pitagórica.

Como conclusão, Damaceno (2022) pontua a unanimidade entre os alunos a importância da aplicação do material concreto como auxiliador na visualização e descrição das figuras planas e das expressões algébricas, estando a responsabilidade com professor em alinhar dependendo da necessidade, as mais adequadas representações de acordo com a individualidade de cada um, para os mais variados ambientes.

Damaceno (2022) ressalta ainda a colocação dos professores sobre relevância do respeito às limitações e conhecimentos de cada aluno, tendo a base matemática papel fundamental nesse processo, considerando os conhecimentos prévios para absorção do Teorema de Pitágoras, possibilitando, de acordo com essa lógica, a conexão entre os diversos conteúdos existentes na matemática.

A manipulação tátil é recursos mais efetivo para o melhor aprendizado dos alunos D.V, recursos esses que podem ser utilizados com alunos que não possuem D.V, logo o cuidado no desenvolvimento deve ser minucioso, o aluno necessita verificar as particularidades do material para que depois conjecture de forma geral a situação, assim, o professor deve confeccionar esses materiais de representação se atentando ao excesso de detalhes, que podem dificultar a identificação dos objetos (Damaceno, 2022).

Portanto, Damaceno (2022) considera que mudanças nas práticas de ensino, mesmo que pequenas, podem propiciar benefícios aos alunos D.V, tendo em vista que, possuem a mesma capacidade de aprendizagem comparados aos que não possuem D.V, a depender apenas de adaptações necessárias e específicas em decorrência de sua condição visual, o ato de ouvir os indivíduos oportuniza aprofundar cada vez mais em possíveis soluções viáveis (Damaceno, 2022).

### ➤ ESTUDO 3 (E.D)

Lino (2019), inicialmente, explana sua experiência como formando e licenciado de matemática e observa a respeito da desmotivação dos alunos no aprendizado da disciplina, além da insuficiência no arcabouço matemático que uma parcela significativa dos professores apresentava, não atribuindo a devida importância da história para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, na visão de Lino (2019), tal fato corrobora com a necessidade de implementação mais incisiva da temática.

Nesse sentido, Lino (2019) estabelece como questão central “ Quais são as contribuições do uso da História da Matemática no ensino de Geometria, em particular, do Teorema de Pitágoras para alunos da EJA?”. Em decorrência de dificuldades observadas em turma de Educação de jovens e Adultos (EJA), como o fato de muitos alunos não aplicarem a fórmula e os cálculos de maneira correta, por não absorverem a compreensão da ideia em seu sentido mais amplo.

Logo, a pesquisa de Lino (2019) se direciona ao aprofundamento dos estudos da História da Matemática, tendo como finalidade a disponibilização de informação e

cultura matemática suficiente para o pleno desenvolvimento cognitivo desses indivíduos, para tanto, necessita-se o pleno domínio dos professores atuantes nesse processo.

Lino (2019) articula como objetivo geral da pesquisa “discutir as possíveis potencialidades do uso da História da Matemática no ensino de Geometria e, em especial, no ensino do Teorema de Pitágoras, focando as possíveis contribuições no processo de ensino/aprendizagem dos alunos de uma sala de EJA”, posteriormente ao exposto, Lino (2019) elenca um apanhado de objetivos específicos:

- Discutir o papel da História Matemática no ensino e aprendizagem da Geometria;
- Propor uma sequência de atividades que utilizam a História da Matemática como recurso metodológico no processo de ensino e aprendizagem de Geometria;
- Analisar as contribuições do uso da História da Matemática para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos (Lino, 2019, p. 16).

Como consequência dos objetivos informados, Lino (2019) apresenta questões norteadoras, no intuito encaminhar a dissertação:

- Como usar a História da Matemática para o ensino de Geometria?
- O uso da História da Matemática em uma sala de aula da EJA contribui para um processo de ensino que promova mudança de atitude em relação à Matemática, despertando o interesse e a motivação dos alunos?
- Quais os resultados obtidos com o uso da História da matemática? (Lino, 2019, p. 16-17).

Para o desenvolvimento da pesquisa, Lino (2019) determinou como local, uma escola Estadual, localizada em Três Lagoas-MS, seu funcionamento se estende aos três períodos do dia, contando com a matrícula de 900 alunos. A escola atende alunos do Ensino fundamental, médio e EJA.

Para a realização da pesquisa, 39 alunos foram inseridos, sendo 17 deles descritos por características principais dentro de sala de aula, tanto com dificuldades e qualidades, no intuito de representar um pouco da realidade da massa e apresentar nuances de uma amostra significativa. Lino (2019) registra ademais, as impressões da equipe escolar, e suas respectivas apresentações.

Quanto a metodologia direcionada por Lino (2019), é do tipo qualitativa, possibilitando constatar as contribuições propiciadas através da proposta de ensino a alunos constituintes da turma selecionada. Para a coletada dos dados, o pesquisador se utilizou de diário de campo, registro de imagens, produção dos

alunos (afolha de atividades, avaliação, produtos gerados em decorrência das atividades) e questionário.

Para análise dos dados catalogados, Lino (2019) dividiu o processo em dois momentos, a primeira se refere ao “estado de arte”, que de acordo com o autor, caracteriza-se como uma análise qualitativa em decorrência de um minucioso levantamento bibliográfico acerca da temática proposta e possíveis contribuições no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, nesse caso em particular, o ensino de matemática.

O segundo momento da análise dos dados, duas unidades foram articuladas, sendo a primeira uma sequência didática desenvolvida por Lino (2019); a segunda retrata os registros de atividades realizadas em sala de aula, imagens e relatos das ações dos alunos, e a contribuição da equipe escolar, contando com exatamente 10 encontros para o fechamento das atividades propostas.

A construção das S.D foi baseada de acordo com o levantamento dos estudos realizados e obteve como referência as demonstrações presentes no capítulo dois do trabalho. O ponto de partida das atividades estava na abordagem do Teorema de Pitágoras por intermédio da História da Matemática, cujo seu planejamento projetava a introdução de níveis de dificuldades acessíveis aos alunos, concomitantemente, desafiador para a turma EJA, no encontro final o aluno deveria apresentar demonstrações do Teorema de Pitágoras à comunidade escolar (Lino, 2019).

A atividade 1, “construção de tabelas”, inicialmente, tinha como objetivo desenvolver a ideia do termo “quadrado de um número”, para que em seguida associa-se a áreas de quadrados, posteriormente, Lino (2019), apresentou uma tabela com ternos pitagóricos, com uma coluna destacando a soma dos quadrados dos catetos, e a hipotenusa imediatamente ilustrado ao seu lado, na perspectiva que o aluno perceba que  $a^2 + b^2 = c^2$ .

A proposta 2, “demonstração do Teorema de Pitágoras usando quadriculados”, desencadeou-se oportunamente após a proposição ser enunciada e alguns registros históricos serem explanados. Essa atividade teve como objetivo retomar a História a partir da demonstração do uso de figuras quadriculadas (Lino, 2019).

Seguindo a mesma premissa da atividade anterior, a proposta 3, “demonstração do Teorema de Pitágoras por dissecção (quebra-cabeça)”, baseia-se pela demonstração de Henry Perigal, dissecando o quadro construído sobre o maior

cateto, através de dois segmentos que se intersectam em seu centro, um segmento paralelo a hipotenusa e outro perpendicular, dividem o quadrado em quatro quadriláteros convexos e congruentes, tal procedimento possibilita interpretar o Teorema geometricamente, através da ludicidade (Lino, 2019).

A atividade seguinte (4), “Utilização de barbante e questionamentos”, deu início através do fato histórico que no Egito antigo já se havia conhecimento de princípios do Teorema de Pitágoras, pois, construíam-se triângulos medindo 3,4 e 5 unidades de comprimento, através de uma corda com 12 nós espaçados igualmente e assim delimitasse ângulos retos. Diante do exposto, Lino (2019), com o objetivo de replicar esse fato, disponibilizou aos alunos barbantes e determinou que os alunos investigassem a possibilidade de construir os ângulos retos a partir dos 12 nós estabelecidos (Lino, 2019).

Consolidado as atividades anteriores, a 5, “Resolução de atividades”, como o próprio título sugere, tratou de propor aos alunos uma folha de atividades com questões sobre o teorema de Pitágoras, podendo ser solucionadas individualmente ou em grupo, as propostas visam proporcionar novos desafios aos alunos, solicitando conceitos já abordados para problemáticas possivelmente inéditas (Lino, 2019).

A atividade final (6), “Feira de Ciências e Matemática da EJA”, tratou da exposição de trabalhos ou conteúdos relacionados ao Teorema de Pitágoras pelos alunos participantes da pesquisa. A primeira atividade selecionada foi uma demonstração com a utilização de areia, baseada em uma demonstração semelhante, que se utiliza água (Lino, 2019).

Outra atividade elaborada pelos alunos foi uma demonstração por dissecação, construído em MDF, o material foi cedido pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), umas das aulas serviu para o reconhecimento do material a ser apresentado. Um grupo foi escolhido para tomar a frente das explicações ao público, sendo responsáveis em descrever a validação das atividades e contextualizar sobre a história do Teorema de Pitágoras, algumas outras atividades complementaram as apresentações da feira (Lino, 2019).

Portanto, tendo em vistas os levantamos realizados, produtos/atividades desenvolvidas e dados coletados, potencializaram de forma significativa o desenvolvimento cognitivo e cultural dos alunos, rompendo com estigmas presentes

na realidade do ensino de matemática tradicional e vigente que esses educandos constroem ao decorrer de formação educacional (Lino, 2019).

O envolvimento e dedicação dos professores-pesquisadores foram essenciais, esses agentes interviam de maneira assertiva sempre que necessário para manter a ordem e o fluxo dos objetivos projetados pela pesquisa. Os produtos e elementos serviram como fator de curiosidade e motivação, dando margem para discussões e questionamentos pertinentes, agregando como consequência a participação ativa dos indivíduos (Lino, 2019).

Lino (2019) acredita que a História da Matemática como recurso metodológico de ensino possibilita na potencialização do processo de ensino e aprendizagem, com o auxílio das atividades os alunos tiveram diferentes perspectivas de uma mesma ideia, provocando atitudes e soluções diferentes para cada particularidade.

Portanto, a História da Matemática se caracteriza como um instrumento de desmitificação e desalienação do processo de ensino de matemática, haja vista a percepção para as diversas formalizações de um mesmo conceito, com outros argumentos válidos, ademais, as apresentações de algumas demonstrações distintas oportunizaram a exposição de questões a serem solucionadas dependendo do contexto proposto. Logo, a pesquisa, assume colaboração positiva ao desenvolvimento profissional dos educadores e pesquisadores e aponta a importância no compromisso em se refletir sobre as próprias práticas docentes que a categoria estabelece na educação (Lino, 2019).

#### ➤ **ESTUDO 4 (E.D)**

Galvão (2021) introdutoriamente retrata o surgimento do interesse em desenvolver o trabalho, sendo a partir de sua formação acadêmica, com a percepção de dificuldades que os alunos do ensino regular apresentam no processo de aprendizagem do Teorema de Pitágoras, logo, com o ingresso no programa de Mestrado na UEPB, decidiu desenvolver uma pesquisa com base em metodologias não tradicionais para auxiliar no ensino de Geometria, especificamente, o Teorema de Pitágoras.

De acordo com Galvão (2021), a pesquisa tem como objetivo geral “Investigar o ensino de Geometria em relação ao Teorema de Pitágoras.”, em decorrência do formato que a dissertação apresenta (a ser explana em seguida), os objetivos de cada artigo são destacados a seguir:

- Analisar a concepção de professores sobre a abordagem do Teorema de Pitágoras nas aulas de Geometria;
- Propor uma sequência didática para os professores do Ensino Fundamental acerca do Teorema de Pitágoras. (Galvão, 2021, p. 12).

Quanto a metodologia selecionada, Galvão (2021), indica que se trata de uma pesquisa do tipo qualitativa, sendo uma investigação matemática e exploratória, composta por sete agentes participantes, todos os professores da rede pública de ensino com mais de cinco anos de atuação. Para a coleta de dados, utilizaram-se as entrevistas como instrumento principal, são materiais semiestruturados, por acreditar na melhor adequação do recurso, tendo em vista a possibilidade de interação mais dinâmica entre o pesquisador e os participantes.

O objetivo da entrevista se direciona em verificar e compreender a forma de utilização das metodologias aplicadas em sala de aula para o ensino do Teorema de Pitágoras pelos professores, seguindo a perspectiva que a formação inicial do docente não se define como suficiente visando a plena garantia do aprendizado do aluno nas aulas de matemática (Galvão, 2021).

Em relação ao método de análise de dados, projetando o sucesso dos objetivos estipulados, Galvão (2021), após finalizar as entrevistas e transcrevê-las, analisou os pontos visto como mais pertinentes ao se referir de Teorema de Pitágoras, de metodologias utilizadas pelos docentes em sala de aula, a recursos pedagógicos que auxiliem o ensino do objeto matemático (Galvão, 2021).

O trabalho de Galvão (2021) segue um modelo não tradicional, o formato *multipaper*, sendo um conjunto de trabalhos (normalmente artigos), constituídos ou não de capítulo de introdução, logo a presença de diferentes objetivos, métodos de pesquisa, revisão de literatura, resultados, considerações e discussões são válidas.

Realizado as entrevistas pertinentes ao artigo 1, Galvão (2021) apresenta o resultado das análises com destaque a dois questionamentos: quais metodologias esses professores recorrem para abordagem do Teorema de Pitágoras em sala de aula e se eles fazem a utilização de algum recurso pedagógico visando a compreensão desse conteúdo.

A resposta do professor P5, referente a primeira pergunta, é um recorte da realidade da abordagem de um professor que não se delimita a métodos tradicionais do ensino.

Figura 66 - Relato do professor P5

Trabalho os conceitos fundamentais da geometria, pelo simples fato de que os alunos têm que verificar, têm que analisar o mundo em que convive e nós sabemos que o nosso cotidiano é rodeado de geometria, a forma da nossa casa, a forma do ambiente, ou seja, nossa própria instituição é constituída de formas geométricas, então por esse fato, eu acho muito importante os alunos estudarem os conceitos, principais da geometria pra eles verem que a geometria está em tudo que eles vivem, eles vivem com a matemática, eles vivem a geometria e não percebem que estão vivendo dentro da geometria (P5).

Fonte: Galvão (2021, p. 41)

A fala de P5 indica o quanto é importante o trabalho dos conceitos básicos da Geometria, haja vista a aplicabilidade da matemática no cotidiano do aluno, logo, é necessário explorar o conteúdo através de mecanismo palpáveis, relacionando as características dos objetos matemáticos através de situações problemas presentes em sua realidade (Galvão, 2021).

Tratando-se do questionamento sobre a utilização de materiais pedagógicos nas aulas sobre Teorema de Pitágoras, a fala dos professores P4, P6 e P7, demonstra práticas divergentes das tradicionais.

Figura 67 - Respostas dos professores P4, P6 e P7

Sequências didáticas de Nivelamento (SD), material didático manipulável, Sites e Vídeos no Youtube (P4).

Nas poucas vezes em que ensinei este conteúdo, acabei utilizando um material concreto, utilizei 25 quadradinhos para trabalhar na apresentação deste conteúdo para os alunos. Utilizei também o livro didático e algumas vezes quando necessário fiz pesquisas na internet para encontrar situações-problemas que se encaixassem melhor no cotidiano dos meus alunos, quando não encontrava, acabava elaborando situações-problemas (P6).

Sim, livro didático, internet e vídeos (P7).

Fonte: Galvão (2021, p. 44).

Fica evidente de acordo com relatos, que esses professores se preocupam em trabalhar métodos diferenciados na abordagem da proposição pitagórica, indo na direção contrária de abordagens que se baseiam em aulas tradicionais e passivas, sendo o professor em muitos momentos protagonista no processo, enviesado com a responsabilidade de “transmitir” conhecimento e os alunos apenas “aprender”, sem autonomia do seu próprio desenvolvimento cognitivo (Galvão, 2021).

Nesse sentido, amparado nas entrevistas coletadas, Galvão (2021) considera que uma parcela dos professores se utiliza de métodos mecânicos de abordagem, demonstrando um estado de acomodação de suas práticas, embora tenha relatos positivos com relação a aplicação de recursos pedagógicos diferenciados, há professores que limitam a abordagem apenas a livros didáticos.

Outra problemática indicada é a formação inadequada dos alunos em etapas anteriores do ensino, muitos apresentam dificuldade na leitura e interpretação dos enunciados, conseqüentemente, os professores encontram dificuldade em relacionar situações problemas sobre o Teorema de Pitágoras em sala de aula (Galvão, 2021).

No entanto, Galvão (2021) observa a presença de professores que demonstram interesse em adotar novas práticas pedagógicas mais eficientes para o processo de ensino e aprendizagem de seus alunos, sendo essencial que esses docentes percebam a importância de realizar aulas dinâmicas, produtivas, interessantes e motivadoras, característica que vinculadas ao sabor seu saber pedagógico proporcionam uma aprendizagem mais abrangente do Teorema de Pitágoras.

O artigo 2, propõe uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras para professores do Ensino Fundamental, embasada em processo metodológico exploratório, na perspectiva de contribuir com a formação dos discentes por meio de uma abordagem alternativa do ensino de matemática. O desenvolvimento da S.D contou materiais concretos e situações problemas próximas o suficiente da realidade dos alunos, oferecendo mais autonomia no processo e mínima interferência dos educadores (Galvão, 2021).

A sequência didática desenvolvida é composta por três atividades, sendo duas delas elaboradas em função de demonstrações e aplicações do Teorema de Pitágoras, e a outra atividade se relacionando com o jogo “Trilha Pitagórica”, Galvão (2021) apresenta as atividades através de quadros, com seus respectivos títulos, objetivos, materiais utilizados, duração da atividade e descrição, cabe ressaltar que as produções são adaptações de outros autores: Santos (2018) e Silva (2016).

Mediante ao exposto, Galvão (2021), pontua que tendo em vista os objetivos traçados pelo trabalho, houve contribuição para uma abordagem mais ampla ao se tratar do Teorema de Pitágoras. A sequência didática disponibilizou uma alternativa diversificada de prática pedagógica a ser adotada pelo professor de matemática, promovendo um enriquecimento na didática desse profissional.

Portanto, Galvão (2021) considera o desenvolvimento de sua dissertação de significativa importância no que tange o emprego da Geometria, especificamente o Teorema de Pitágoras, aplicada em sala de aula para a obtenção de uma aprendizagem mais eficiente do objeto matemático selecionado.

#### **5.4 ESTUDOS DE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (E.A.L.D)**

##### **➤ ESTUDO 1 (E.A.L.D)**

Considerando o que a Constituição retrata sobre o acesso e garantia do direito de todos os cidadãos a Educação de qualidade, e a perspectiva de documentos oficiais como os PCN em relação ao ensino de matemática desde a década de 90, Santos (2023) observa a negligência do ensino de Geometria, sendo priorizada a manipulação algébrica no processo, conseqüentemente, o Teorema de Pitágoras como conteúdo constituinte da Geometria, não tem sua potencialidade exploratória geométrica abordada com efetividade (Santos, 2023).

Diante disso, surge o questionamento para Santos (2023), de como os livros didáticos vem apresentando o Teorema de Pitágoras nas últimas quatro décadas. Exposto a problemática, o trabalho de Santos (2023), tem como objetivo exibir uma análise da forma de abordagem do Teorema de Pitágoras e suas demonstrações em um apanhado de livros didáticos, com o propósito de identificar as fundamentações lógicas e práticas presente nesses materiais, projetando abordagens mais aquedadas para a melhoria de desempenho do processo de ensino e aprendizagem de matemática.

A dissertação de Santos (2023) segue o processo metodológico através de um levantamento bibliográfico com composição de dados quantitativos, sendo planejadas a partir de matérias previamente catalogadas e organizadas, nesse caso em específico, utilizando-se predominantemente de artigos científicos e livros. O levantamento bibliográfico se destrincha em duas etapas distintas: *seleção e pré-análise; exploração do material*.

Os exemplares que compõem a avaliação são utilizados nas escolas da rede pública de Porto Velho – RO, burocraticamente os livros didáticos são previamente disponibilizados pelas editoras credenciadas ao Ministério da Educação, via PNLD, para serem validados pelos professores, e assim, após sua seleção, são distribuídos e utilizados nas escolas durante o período vigente (Santos, 2023).

A segunda etapa do processo se configura como análise no sentido mais completo da palavra, pois, nesse momento o material será explorado, tendo como objetivo a verificação das abordagens de demonstrações do Teorema de Pitágoras presente nos livros, pontuando critérios como: estratégias adotadas pelos autores, dentre argumentos, manipulação geométrica, utilização de materiais manipuláveis, entre outros aspectos (Santos, 2023).

Santos (2023) seleciona quatro livros didáticos para o andamento da análise:

I. A conquista da matemática: teoria e aplicação: 8ª série/ José Ruy Giovanni, Benedicto Castrucci. – São Paulo: FTD, 1985.

II. A conquista da matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais/ José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. – Ed. renovada. – São Paulo: FTD, 2009.

III. A conquista da matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais/ José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. – 4. Ed. – São Paulo: FTD, 2018.

IV. Projeto Teláris: Matemática: ensino fundamental 2/ Luiz Roberto Dante. – 2. Ed. – São Paulo: Ática, 2015. – (Projeto Teláris: matemática).

O objetivo é verificar e analisar o desenvolvimento e forma de abordagem que os livros tomam sobre as demonstrações do Teorema de Pitágoras, com a representação de alguns recortes temporais, sendo edições de diferentes épocas em um intervalo de 40 anos, além do mais, os exemplares são dos mesmos autores, na perspectiva de observar o que as mesmas pessoas, descreveram sobre o mesmo assunto em diferentes momentos, no mesmo espaço, Porto Velho – RO (Santos, 2023).

O livro 4, foi utilizado como parâmetro comparativo, tendo em vista a oferta de demonstrações diferentes das comumente utilizadas, priorizando outras formas de manipulação, que não exigem, necessariamente, um conhecimento algébrico apurado (Santos, 2023).

Em consequência do desenvolvimento da análise, surge o interesse de Santos (2023) em produzir uma sequência didática para o melhor aproveitamento do ensino do Teorema de Pitágoras, o material não foi aplicado a nenhuma turma, surgindo até o momento como uma proposta promissora, cujo objetivos são:

- Instigar o lado investigativo dos estudantes através da aplicação de um questionário inicial;
- Explorar o Teorema de Pitágoras de forma geométrica e algébrica com algumas demonstrações;
- Avaliar o êxito do aprendizado desenvolvido utilizando um questionário final com abordagens distintas.

Ressalta-se ainda que, a sequência didática se utiliza das demonstrações através de materiais manipuláveis, como: folha de papel sulfite, cartolinas e outros materiais de fácil acesso e manuseio aos indivíduos (Santos, 2023).

Por fim, Santos (2023) ao finalizar a análise aos livros didáticos selecionados, conclui que as demonstrações do Teorema de Pitágoras presentes nos livros mais atuais, ainda são as mesmas adotadas em exemplares mais antigos (1985), “A Conquista da matemática”, é utilizado como material pedagógico em Porto Velho – RO, desde meados da década de oitenta, mesmo a publicação de novas edições (2009, 2018), é observado que o autor emprega a mesma demonstração que não atribui aplicabilidade de maneira significativa no cotidiano do aluno.

Poucas alterações são realizadas nos livros, como pequenas orientações pedagógicas para os professores e alguns fatos históricos a respeito do objeto em pequenos trechos; os exercícios em grande maioria são explorados de forma algébrica, até se encontra formas geométricas, mas sem muita funcionalidade, servindo mais com ilustração (Santos, 2023).

Tendo em vista a necessidade de domínio de conceitos geométricos, presente em situações do dia a dia do aluno, e a escassez dessa abordagem em livros didáticos, Santos (2023) indica como uma possível exploração metodológica a utilização de matérias manipuláveis, haja visto a pertinente adequação de algumas demonstrações (demonstração de Perigal e Bhaskara) com relação a esse tipo de recurso pedagógico.

Em suma, Santos (2023) expõe que, de acordo com análise dos livros didáticos selecionados, os autores se dedicam as demonstrações do Teorema de Pitágoras predominantemente por estratégias algébricas, ocasionando desestímulo aos estudantes ao explorarem a proposição de significativa importância para a matemática. Santos (2023) sugerem ainda, outras formas de abordagem do conteúdo, a exemplo dos materiais manipuláveis e as sequências didáticas, instigando o pensamento lógico e investigativo do aluno, além da implementação da ludicidade.

#### ➤ ESTUDO 2 (E.A.L.D)

A pesquisa de Silva (2022) apresenta como objetivo geral a realização de uma análise das Praxeologias Matemáticas e Didáticas no que se referem relações métricas no triângulo retângulo presentes em livros didáticos de uma mesma coleção, dos anos finais do fundamental e do médio, na perspectiva dos mesmos autores, a fim de identificar como se articula a transição dessas etapas por esses materiais.

Ademais, Silva (2022) estabelece objetivos específicos à pesquisa:

- Caracterizar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas das relações métricas no triângulo retângulo das coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Caracterizar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas das relações métricas no triângulo retângulo das coleções de livros didáticos do Ensino Médio;
- Analisar como acontece a passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio em coleções de livros didáticos escritos pelo mesmo autor (Silva, 2022, p. 17).

Silva (2022) esclarece que a dificuldade encontrada em sua trajetória acadêmica ao aprender e compreender conteúdos relacionados à geometria acabou por instigar seu interesse em relevar motivos e possíveis soluções para a problemática. Em decorrência da percepção sobre o conteúdo, Silva (2022) delimita os estudos nas relações métricas no triângulo retângulo, justificado pela pouca produção de trabalhos voltados para tal objeto matemático, além de ser fundamental em diversos eixos temáticos da matemática: geometria, grandezas e unidades, números e álgebra.

A escolha de análise a livros didáticos foi consequência da utilização do material como recurso mais frequentemente utilizado no auxílio do processo de ensino e aprendizagem de matemática, por vezes, torna-se o único meio de disponibilizado para o trabalho das disciplinas em sala de aula (Silva, 2022).

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard (1999) e colaboradores, foram utilizados como base teórica para o desenvolvimento da Dissertação, pois, possibilita a caracterização das Praxeologias Matemáticas e Didáticas, permitindo assim, analisar os livros didáticos e as práticas de ensino dos docentes (Silva, 2022).

Tratando-se de procedimento metodológico, o trabalho de Silva (2022) que configura através de uma abordagem qualitativa, após a coleta e seleção dos livros didáticos que constituem o processo, determinou-se a linha de análise das Praxeologias Matemáticas e Didáticas, seguindo o padrão baseado em Bittar (2017).

A análise dos livros didáticos se divide em duas etapas: Curso e Atividades Propostas. A primeira fase (Curso) conta as definições, propriedades, resultados e a resolução de exercícios, possibilitando nesse momento identificar como professor trabalhar as atividades e as características das propostas que considera mais relevante, com sinalização do conjunto de Tarefas e reorganização em tipos se considerando a proximidade, sendo consequência, os blocos praxeológicos

produzidos e aplicados na investigação das Atividades Propostas (Bittar, 2017 apud Silva, 2022).

Finalizado a primeira etapa, o foco de Silva (2022) se direciona à análise das Atividades Propostas, buscando-se verificar as atividades constituintes e quais técnicas se projeta que o aluno utilize na resolução. Para tanto, houve a necessidade de compreender quais estratégias o autor do livro didático espera que os estudantes façam uso, sendo a retomada da análise do Curso e o embasamento através do manual do professor as principais ferramentas para o alcance do objetivo (Silva, 2022).

Dado o que foi construído nas etapas supracitadas, Silva (2022), após uma leitura minuciosa dos livros didáticos, identificou dois blocos: prático-teórico e teórico-tecnológico. Para a análise praxeológica do saber matemático dos blocos, os critérios de embasamento se encontram em Rosa dos Santos (2015) e Chevallard (1999).

Quadro 16 - Critérios adotados na análise da Praxeologia Matemática

Elemento da praxeologia	Critérios adotados
<b>Tipo de tarefa (T)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificação.</li> <li>• Representatividade.</li> <li>• Razão de ser.</li> <li>• Importância.</li> <li>• Pertinência.</li> </ul>
<b>Técnica (<math>\tau</math>)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fáceis de utilização.</li> <li>• Confiáveis e aceitáveis.</li> <li>• Abrangentes.</li> <li>• Possíveis de evoluir.</li> <li>• Bem elaboradas.</li> </ul>
<b>Tecnologia e Teoria [<math>\theta</math>, <math>\Theta</math>]</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicitação do conceito.</li> <li>• Apresentação e justificativa do enunciado.</li> <li>• Tipo de justificativa: canônica ou não.</li> <li>• Forma de justificativa: explicativa, dedutiva, etc.</li> <li>• Validade de argumentação.</li> <li>• Exploração do bloco tecnológico-teórico.</li> </ul>

Fonte: Silva (2022, p. 40-41).

Em seguida, Silva (2022) realiza a análise das escolhas didáticas dos autores ao ensino das relações métricas no triângulo retângulo, com o emprego dos seis momentos descritos em Chevallard (1999) e adaptado em Rosa dos Santos (2015), elencados no Quadro 17.

Quadro 17 - Descrição dos momentos e critério de análise da Praxeologia Didática

Momentos	Critério de análise
Primeiro encontro	Como se inicia o assunto de relações métricas no triângulo retângulo?
Exploração do Tipo de Tarefas e de elaboração de uma Técnica	Como se dá a exploração do Tipo de Tarefas? Como é feita a elaboração da Técnica?
Constituição do ambiente tecnológico-teórico	Como é realizada a construção das justificativas referente a Técnica?
Trabalho da Técnica	Quando acontece a construção do seu domínio? Da precisão? Há criação de novas Técnicas?
Institucionalização	Como se concretiza o momento de institucionalização?
Avaliação	Como acontece a avaliação das relações pessoais e institucionais?

Fonte: Silva (2022, p. 41)

Definido as Praxeologias, Silva (2022) interpreta os dados coletados, para poder descrever as abordagens dos autores referentes ao objeto matemático em questão, seguido de uma comparação entre os livros do Ensino fundamental e do Ensino Médio, com o intuito de esclarecer como se desenvolve a transição didática dos saberes matemáticos em livros estabelecidos nas escolas.

Quanto aos livros didáticos selecionados, refere-se à coleção do Ensino Fundamental e Médio de mesmos autores do último PNLD aprovado (considerando a cronologia do desenvolvimento da pesquisa), com a participação das seguintes coleções:

- ENSINO FUNDAMENTAL: *Matemática Realidade & Tecnologia*. De Joamir de Souza; *Teláris Matemática*. De Dante.
- ENSINO MÉDIO: *#Contato Matemática*. De Joamir Souza e Jacqueline Garcia; *Matemática Contexto & Aplicações*. De Dante.

A identificação dos anos que contemplam o ensino das relações métricas no triângulo retângulo é estipulada através de dois documentos de vigência nacional. A Base Nacional Curricular Comum (BNCC, 2017); para as determinações do Ensino Fundamental foi o Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco, visto que o documento segue bases do PCN (Silva, 2022).

Conseqüentemente, identificou-se na BNCC o Ensino das relações métricas no triângulo retângulo no 9º ano, através da Unidade Temática Geometria, com os seguintes objetivos: relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, verificações experimentais e demonstrações. No currículo de Matemática do Estado de Pernambuco o ensino conteúdo em questão é localizado no 1º ano do Ensino Médio, na Unidade Temática de Geometria, possuindo como objetivo de aprendizagem: utilização da semelhança de triângulos para definir as relações métricas no triângulo retângulo, (até mesmo o Teorema de Pitágoras), e assim aplicar na resolução de problemas (Silva, 2022).

Finalizado a análise detalhada dos livros didáticos, Silva (2022) observa que, as abordagens das relações métricas no triângulo retângulo são semelhantes, porém, algumas escolhas didáticas se diferem, Joamir Souza explora a temática de forma abstrata, sem se preocupar com a aplicabilidade no cotidiano, trazendo como consequência o ensino tradicional e tecnicista, baseado em repetição. Dante, por outra perspectiva utiliza situações práticas no desenvolvido do conteúdo, muito embora, referindo-se à análise das Praxeologias Matemáticas, tende a exagerar no

método da repetição, fixando a aprendizagem através de um saber mecanizado (Silva, 2022).

Nesse sentido, Silva (2022) acredita que as abordagens utilizadas pelos autores analisados acabam por contribuir na permanência e intensificação das dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo e a Geometria como um todo. Dessa maneira, sugere-se que os professores no momento da escolha dos livros didáticos tenham a percepção da abordagem utilizada no livro, se é adequada aos seus objetivos metodológicos e supre a necessidade para o desenvolvimento cognitivo do estudante.

Portanto, Silva (2022) conclui que esta pesquisa pode fornecer amparo científico suficiente na elaboração de trabalhos futuros. A análise das Praxeologias Matemáticas e Didáticas possibilitou a identificação das praxeologias adotadas por autores de livros didáticos, respondendo assim, a problemática de pesquisa e gerando sucesso nos objetivos traçados.

Nesse momento, compreende-se como finalizado o tópico de Revisão de Estudos referente às produções em torno do Teorema de Pitágoras no Brasil, descrevendo 19 dissertações, elaboradas no intervalo de 2019 à 2023, revelando um prospecto do encaminhamento do ensino de matemática adotado no País, com identificação das principais características didáticas e metodológicas no objetivo de um ensino mais significativo para os alunos do ensino regular, além da observância de como se tem desenvolvido o processo formativo dos profissionais ativos na Educação.

## **6. DIAGNÓSTICO DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: PERSPECTIVA DE PROFESSORES ATUANTES NA EDUCAÇÃO PARAENSES**

Considerando os desafios persistentes no ensino da Matemática, especificamente no que tange ao Teorema de Pitágoras, este estudo propõe um diagnóstico dos principais aspectos acerca dos entraves no processo de ensino-aprendizagem desse objeto de conhecimento. A investigação fundamenta-se na perspectiva de docentes da rede pública de ensino do Estado do Pará, visando compreender as dinâmicas de abordagem, avaliação e apreensão do teorema no 9º ano do Ensino Fundamental.

O objetivo central desta pesquisa consistiu em realizar um diagnóstico das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras, fundamentando-se na ótica de professores de matemática que atuam ou já atuaram na educação paraense, identificando os fatores determinantes para erros recorrentes e os principais obstáculos ao domínio pleno do conteúdo. Os resultados indicam que as barreiras de aprendizagem são multifatoriais, com ênfase na acentuada defasagem em conceitos básicos precedentes e na escassez de estratégias metodológicas diversificadas no cotidiano escolar.

Evidencia-se que os impasses identificados estão intrinsecamente vinculados à carência de programas de formação continuada e à insuficiência de recursos didático-pedagógicos nas instituições de ensino. Ademais, o diagnóstico revela uma dicotomia pedagógica relevante: embora o corpo docente tenda a considerar a Matemática um componente de fácil transmissão, verifica-se um baixo índice de afinidade dos alunos com a disciplina. Tal disparidade sinaliza uma lacuna persistente entre a transposição didática e a efetiva aprendizagem.

Nesse sentido, o presente diagnóstico não se limita ao mapeamento das dificuldades vigentes, mas constitui o alicerce teórico-prático para a proposição de intervenções didáticas e para o desenvolvimento de um Produto Educacional direcionado à superação dos problemas elencados.

### **6.1 PERCURSO METODOLÓGICO**

### **1) Determinação dos informantes:**

O grupo de informantes desta pesquisa é constituído por professores de Matemática vinculados à rede pública de ensino do Estado do Pará. A escolha desse público foi estratégica, visando captar a perspectiva de profissionais que vivenciam diretamente os desafios do ensino de geometria na realidade escolar paraense.

Como Critérios de Inclusão e Atuação Profissional, os participantes foram selecionados com base em sua experiência docente no 9º ano do Ensino Fundamental, etapa em que o Teorema de Pitágoras é formalmente introduzido conforme as diretrizes curriculares nacionais. O critério de inclusão considerou professores que estivessem em exercício ou que tivessem experiência recente com essa série, garantindo que os relatos fossem fundamentados na prática pedagógica real e no domínio das habilidades previstas pela BNCC para esse nível de ensino.

A pesquisa buscou uma representação regionalizada, envolvendo docentes lotados em unidades escolares da Região Metropolitana (Belém, Ananindeua e Marituba) e de municípios adjacentes. Estão representadas na amostra as realidades educacionais de cidades como Belém, Ananindeua, Marituba e Santa Izabel, além de municípios com características distintas, como Abaetetuba e Vigia. Essa diversidade geográfica permite que o diagnóstico reflita diferentes contextos da rede pública estadual e municipal do Pará.

### **2) Determinação dos instrumentos:**

O instrumento selecionado foi o questionário estruturado online, utilizando a plataforma Google Forms. A escolha justificou-se pela necessidade de coleta remota devido ao cenário pandêmico de fevereiro de 2022 e pela facilidade de alcançar docentes em diferentes localizações geográficas de forma simultânea.

### **3) Elaboração do instrumento:**

O questionário foi desenhado de forma técnica e sequencial, composto por cinco seções principais.

*Seção 1 (Ética)* – Apresentação do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para garantir o sigilo e a voluntariedade. Para preservar a concisão desta obra, o TCLE, as matrizes de resultados e os dados primários não

foram incluídos como apêndices físicos, tais documentos se encontram sob posse do autor, disponíveis para consulta e validação.

*Seção 2 (Bloco I - Perfil)* – Coleta de dados sociodemográficos e profissionais (gênero, idade, formação e tempo de serviço) para identificar o capital cultural dos docentes.

*Seção 3 (Bloco II - Práticas Pedagógicas)* – Investigação sobre métodos de início de aula, formação continuada e recursos didáticos utilizados.

*Seção 4 (Bloco III - Matriz de Dificuldades)* – Uma escala de percepção onde os professores classificaram o grau de complexidade de 17 tópicos específicos (revisões de 2º grau, triângulos pitagóricos, números irracionais, entre outros).

*Seção 5 (Específica)* – Questões sobre a unidade temática mais importante e os erros mais frequentes dos alunos.

Com base na descrição das seções apresentadas, e os respectivos objetivos para cada pergunta elaborada e selecionada, o Quadro 18, reflete as etapas da elaboração do instrumento de forma sucinta.

Quadro 18 – Alinhamento de objetivos às perguntas do questionário

BLOCO TEMÁTICO	PERGUNTA DO QUESTIONÁRIO	OBJETIVO DA PERGUNTA
<b>Bloco I: Questões gerais</b>	Sexo do professor.	Identificar o gênero dos docentes participantes.
	Faixa etária.	Apresentar a distribuição de idade dos entrevistados.
	Nível de escolaridade e formação acadêmica.	Verificar a qualificação acadêmica e a natureza da instituição de formação (pública/privada).
	Tempo de serviço como professor.	Quantificar a experiência profissional no magistério.
	Município de atuação.	Mapear a abrangência geográfica da pesquisa e identificar o contexto regional dos informantes.
<b>Bloco II: Questões de Ensino</b>	Como você costuma iniciar suas aulas de matemática?	Identificar as estratégias de ensino predominantes (diretas ou exploratórias).
	Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas?	Mapear carências de recursos didáticos, pedagógicos ou de formação inicial.
	A partir de que você seleciona os conteúdos?	Verificar a influência da BNCC, PCN e livros didáticos no planejamento docente.
	Quais as principais formas de avaliação que você aplica?	Identificar os instrumentos avaliativos mais comuns (provas, trabalhos, observação).
	Para fixar o conteúdo ministrado, você costuma...?	Analisar se a prática pedagógica prioriza a resolução de listas de exercícios e repetição.
	Oferta de formação continuada pela rede de ensino.	Verificar se as instituições de ensino provêm atualização profissional aos docentes.

	Frequência de participação em cursos de formação.	Medir o engajamento do professor em atividades de aperfeiçoamento quando ofertadas.
	Você considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada?	Captar a percepção do docente sobre a complexidade da própria disciplina.
	Seus alunos gostam de matemática?	Avaliar a visão do professor sobre a afinidade e o interesse discente pela matéria.
	Quais as maiores dificuldades dos seus alunos nas aulas?.	Mapear os entraves gerais no aprendizado (cálculo, interpretação, conceitos).
	Qual unidade temática você considera mais importante?.	Identificar a prioridade dada aos blocos de conteúdos (ex: Álgebra vs. Geometria).
<b>Bloco III: Quadro de dificuldades</b>	Grau de dificuldade em 17 tópicos do Teorema de Pitágoras.	Diagnosticar o nível de complexidade percebido em cada subtema do teorema (da introdução à aplicação).
<b>Bloco IV: Questões específicas</b>	Que recurso didático seria mais eficiente no ensino do teorema?	Identificar ferramentas ideais para a transposição didática do objeto de estudo.
	Quais os erros mais frequentes dos alunos na resolução do teorema?	Classificar as falhas discentes entre erros de compreensão, aplicação ou inabilidade operacional.

Fonte: Autoria própria (2026)

#### 4) Validação do instrumento:

O instrumento foi submetido a um teste-piloto com 30 discentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM/UEPA). Essa etapa visou validar a clareza da linguagem, a adequação técnica dos termos matemáticos e a funcionalidade na Matriz de Dificuldades, garantindo que o questionário estivesse alinhado às habilidades EF09MA13 e EF09MA14 da BNCC.

#### 5) Revisão do instrumento:

Após o teste-piloto, o instrumento passou por revisões. Um ajuste significativo foi o detalhamento da natureza da instituição de ensino (pública ou privada) na trajetória acadêmica e profissional dos informantes, permitindo um diagnóstico mais preciso sobre as origens da formação docente e o suporte institucional recebido.

#### 6) Aplicação do instrumento:

A aplicação definitiva ocorreu em fevereiro de 2022, em específico, aceitando respostas de 11/02/2022 a 25/02/2022. O recrutamento foi realizado via redes sociais (Facebook, LinkedIn e WhatsApp) e correio eletrônico. Foram contatados cerca de 200 profissionais, resultando em uma adesão final de 32 respondentes que preencheram o instrumento integralmente.

#### 7) Sistematização:

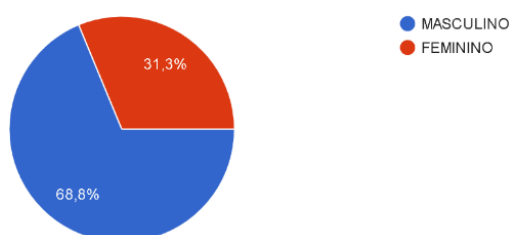
Os dados quantitativos foram organizados em gráficos e tabelas percentuais para identificar padrões de dificuldade. Os dados qualitativos (justificativas abertas) foram tabulados para permitir uma análise interpretativa das crenças pedagógicas dos professores sobre o ensino do teorema.

Exposto a sequência de etapas articuladas para o desenvolvimento do percurso metodológico, apresenta-se a seguir os resultados obtidos a partir da aplicação do formulário e suas respectivas análises.

## 6.2 ANÁLISE DO PERFIL DOS DOCENTES E SUAS ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS

Tratando-se dos resultados obtidos na pesquisa com os 32 participantes, é notória a predominância do sexo masculino com 68,6%; um pouco mais de 2/3 dos entrevistados, e sexo feminino com 31,3%. Essa distribuição pode ser visualizada no Gráfico 7, e seus valores absolutos e relativos estão detalhados na Tabela 5.

Gráfico 7 - Sexo dos professores



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

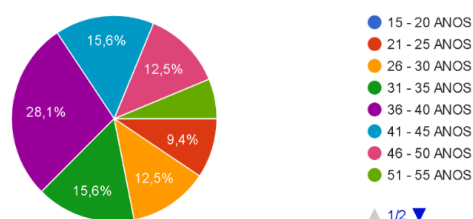
Tabela 5 - Distribuição dos docentes por sexo

SEXO DO PROFESSOR	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
MASCULINO	22	68,6%
FEMININO	10	31,3%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

No que tange à distribuição etária dos docentes, observa-se que o grupo predominante se situa na faixa de 36 a 40 anos, representando 28,1% da amostra, quase o dobro do segundo maior percentual identificado. A composição completa das faixas etárias pode ser observada no Gráfico 8 e os dados de frequência absoluta e relativa em predominância estão detalhados na Tabela 6.

Gráfico 8 - Faixa etária



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 6 - Distribuição de Faixa etária predominante

FAIXA ETÁRIA (PREDOMINANTE)	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
ENTRE 36 E 40 ANOS	9	28,1%

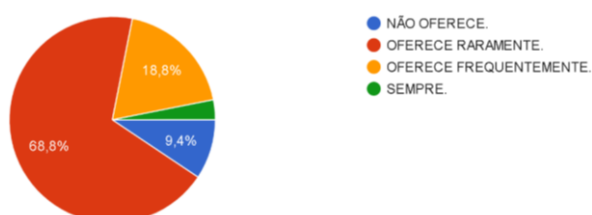
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Em relação a escolaridade e formação dos entrevistados, 78,1% concluíram o ensino médio na modalidade regular do ensino público, ou seja, mais de  $\frac{3}{4}$  dos professores; 100% possuem graduação de licenciatura em matemática, sendo 87,5% em instituição pública. No que se refere a formação continuada (pós-graduação), 71,8% possuem algum tipo de especialização, com 52% em instituições privadas; 37,5% apresentam mestrado, com todos em instituição pública, e apenas 1 dos 32 professores contêm doutorado, fica evidente ao realizar a leitura dos dados que a tendência se constitui nos discentes darem cada vez menos continuidade em sua formação, que podem se justificar por inúmeros fatores, de não incentivo institucional e profissional à estrutura familiar não favorável, segundo Oliveira; Prada (2010):

[...] ser educador é educar-se permanentemente, para possibilitar o reconhecimento de que cada novo conhecimento, construído pelos professores com seus estudantes, gera novas relações com outros conhecimentos, novas procuras, perguntas, dúvidas e novas construções, num processo contínuo e a partir do cotidiano do exercício profissional docente. (Oliveira; Prada, 2010, p. 117).

Desta maneira, a formação dos professores pode ser um ponto crucial no auxílio das dificuldades do ensino de matemática, destacando-se assim, a importância do incentivo e a disponibilidade de acesso aos professores em sua formação continuada.

Gráfico 9 - "A rede de ensino onde você atua oferece formação continuada."



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 7 - Distribuição de relatos quanto a oferta de formação continuada

OFERTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
OFERECE RARAMENTE	22	68,8%
OFERECE FREQUENTEMENTE	6	18,8%
NÃO OFERECE	3	9,4%
SEMPRE	1	3%

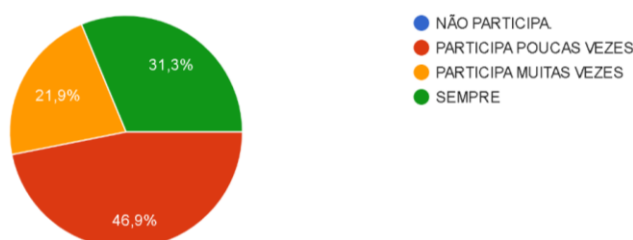
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Quanto à *formação continuada oferecida pelas redes de ensino* que cada professor participante integra, detalhados pelo Gráfico 9 e Tabela 7, 68,8% afirmam que é oferecido raramente, 9,4% dizem que não é oferecido e 18,8% assinalam que é oferecido com frequência, ou seja, o índice da frequência de cursos de formação disponibilizados a esses profisses acaba sendo insuficiente, dada a relevância dessa prática, levando-se em conta que:

[...] a escola é um espaço coletivo de formação de professores, em que intervêm inúmeras variáveis na construção do coletivo e na compreensão e prática da construção coletiva das propostas políticas a partir dos interesses, necessidades, ideias e concepções teóricas e ideológicas que interatuam no cotidiano escolar, em que os professores vivenciam necessidades, anseios, desejos e dificuldades que precisam ser superadas e/ou possibilitadas sua transformação. (Oliveira; Prada, 2010, p. 127).

Entende-se a importância de dar continuidade a formação dos professores, tendo em vista que, são mediadores no processo de ensino-aprendizagem dos alunos, sendo um professor mais qualificado, implica na melhor compreensão e consequentemente dificuldades minimizadas.

Gráfico 10 - "Quando a rede de ensino onde você trabalha, ou ainda outras instituições, ofertam curso de formação continuada."



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 8 - Distribuição de frequência de participação dos docentes

FREQUÊNCIA DE PARTICIPAÇÃO	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
PARTICIPA POUCAS VEZES	15	46,9%
SEMPRE	10	31,3%
PARTICIPA MUITAS VEZES	7	21,9%
NÃO PARTICIPA	—	—

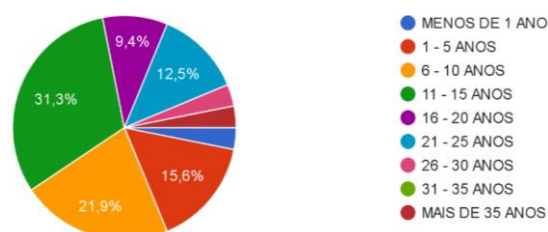
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

De acordo com que os índices do Gráfico 10 e os valores absolutos assinalados na Tabela 8, mais da metade dos professores (31,3%, sempre e 21,9%,

participa muitas vezes) afirmam que participam de formação continuada significativamente, quando lhe são ofertados pelas redes de ensino, pode-se considerar como um índice positivo nesse contexto, no entanto, 46,9% pontuam a sua pouca frequência na participação, como destacado anteriormente, a formação do professor é um ato dinâmico, a participação se faz de grande relevância, cabendo ao docente se fazer cada vez mais presente nesse processo e as instituições educacionais e governamentais estimularem a prática.

A título de informação, como se observa a seguir no Gráfico 11 e através de outra perspectiva na Tabela 9, ressalta-se que do total dos entrevistados, mais da metade (59,4%) possui mais de 10 anos em serviço como professor.

Gráfico 11 - Tempo de serviço como professor



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 9 - Distribuição de tempo de serviço

TEMPO DE SERVIÇO (PREDOMINANTE)	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
MAIS DE 10 ANOS	19	59,4%
MENOS DE 10 ANOS	13	40,6%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Referente às questões gerais de ensino, o questionamento de *como normalmente o professor costuma iniciar suas aulas de matemática*, de acordo com os resultados obtidos, 62,5% estrutura suas aulas a partir de uma situação problema, parte para a introdução ao assunto que norteia a aula, outra parcela significativa, de 28,1%, assinalou que inicia do conceito, seguido de exemplos e exercícios. O mapeamento dessas estratégias de introdução de conteúdos está visível no Gráfico 12 e na Tabela 10.

Gráfico 12 - "Como você costuma iniciar suas aulas de matemática."



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 10 - Distribuição de início das aulas

INÍCIO DAS AULAS DE MATEMÁTICA	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
A PARTIR DE UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA	20	62,5%
PELO CONCEITO, SEGUIDO DE EXEMPLOS E EXERCÍCIOS	9	28,1%
OUTRAS FORMAS	3	9,4%

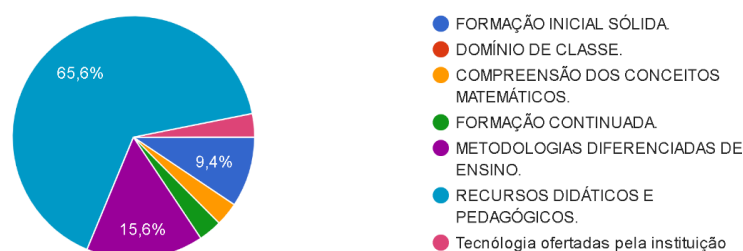
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

A estrutura das aulas de um professor e como ele articula estratégias de ensino são de extrema importância, levando-se em consideração a subjetividade de cada aluno no tempo de aprendizagem e absorção, o professor deve elaborar planejamentos que possuam aproveitamento satisfatório e totalitário, logo, deve incorporar o entendimento de todos os alunos ou minimamente uma parcela considerável.

Ponte (2005) situa estratégia de ensino- aprendizagem como uma unidade planejada, no qual depende de fatores, curriculares, subjetivos, condicionais e contextuais do espaço; além do mais, define 2 aspectos que delimitam métodos de abordagem na elaboração de uma aula: o modo como se produz a informação e a natureza das tarefas propostas aos alunos; disso, decorre a bifurcação de estratégias apontadas pelo autor, no caso, *estratégia direta*, nesse caso o professor assume o papel centralizado, com pouca movimentação do aluno, construindo um processo passivo na ideia de “transferência do conhecimento”, corriqueiramente seguido de exemplos e intensificação da resolução de exercícios posteriormente como forma de avaliação da absorção dos conhecimentos, fica evidente a prática de resolução de exercícios se tornando finalidade nesse processo.

Outra estratégia apontada é a *exploratória*, nesse caso o aluno assume um papel ativo, cabe salientar a palavra “ativo”, pois, ambos (professor e aluno) possuem protagonismo significativo, no entanto, o aluno não assume a posição de mero espectador, já o professor se faz presente como mediador e provocador, geralmente suas aulas partem de situações problemas e tem como finalidade o conceito de algum objeto, na estratégia direta se presume um caminho linear em que o aluno compreende inicialmente o conceito estabelecido para conseguinte aplicar em exercícios, por outro lado, a exploratória possibilita um processo inverso logo a estratégia exploratória busca preencher lacunas e valorizar o “pensar” e o “refletir” do aluno dentro daquilo que é abordado.

Gráfico 13 - “Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas de matemática.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms, 2022

Tabela 11 - Distribuição de recursos em falta

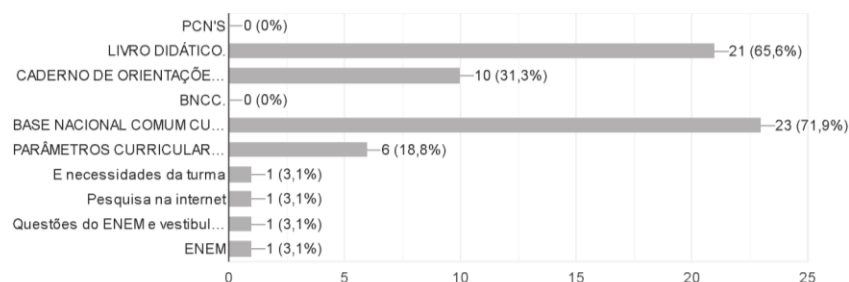
RECURSOS EM FALTA AO MINISTRAR AULAS	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
RECURSOS DIDÁTICOS E PEDAGÓGICOS	21	65,6%
METODOLOGIAS DIFERENCIADAS	5	15,6%
FORMAÇÃO INICIAL SÓLIDA (DO ALUNO)	3	9,4%
OUTROS	3	9,4%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Questionados sobre as maiores carências no cotidiano escolar, 65,6% dos participantes apontaram o déficit de recursos didáticos e pedagógicos como o principal obstáculo. A relação completa das necessidades sentidas pelos docentes está apresentada no Gráfico 13 e na Tabela 11.

Segundo Souza (2007, p. 111), “recurso didático é todo o material utilizado como auxílio no ensino- aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos”, infere-se então, que os recursos didáticos se relacionam com o que é concreto e palpável; quanto que o pedagógico se trata de atitudes e ações, nesse sentido, ambos não se desvinculam no processo de ensino e aprendizagem; 15,6% apresentam as *metodologias diferenciadas de ensino* e 9,4% à formação *inicial sólida*, nesse caso a do aluno, essas colocações podem ocasionar problemas no entendimento do aluno, sendo pontos importantes destacados pelos professores para o auxílio na prática do ensino da matemática.

Gráfico 14 - “Você seleciona os conteúdos de matemática a partir de que.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 12 - Distribuição de seleção de conteúdos

BASE PARA SELEÇÃO DE CONTEÚDOS (MÚLTIPLA ESCOLHA)	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
BNCC	23	71,9%
LIVROS DIDÁTICOS	21	65,5%
CADERNO DE ORIENTAÇÃO DA REDE	10	31,3%
PCN	6	18,8%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

O ato de ser professor exige alguns aspectos, dentre eles está o planejamento, delinear o que será abordado, como será abordado e até mesmo a ordem dos conteúdos, para isso, o sistema educacional brasileiro conta com alguns documentos oficiais que norteiam esse processo ao exemplo dos PCN, é oferecido como parâmetro curricular aos professores da educação básica através de diretrizes, não tem caráter normativo e obrigatoriedade; há também a BNCC, que já possui caráter normativo a ser estabelecido no País, atribui um conjunto de aprendizagens essenciais a serem parte do ensino básico e suas modalidades.

O Gráfico 14 e a Tabela 12, sistematizam valores referentes ao questionamento de *como os professores selecionam os seus conteúdos de matemática*, o participante tem como possibilidade assinalar mais de uma forma. Dentre os 32 participantes, 23 deles (71,9%), pontuaram que utilizam a BNCC para a seleção de seus conteúdos, em seguida, 21(65,5%) utilizam livros didáticos, 10 (31,3%) o caderno de orientação da rede, e apenas 6 (18,8%) os PCN.

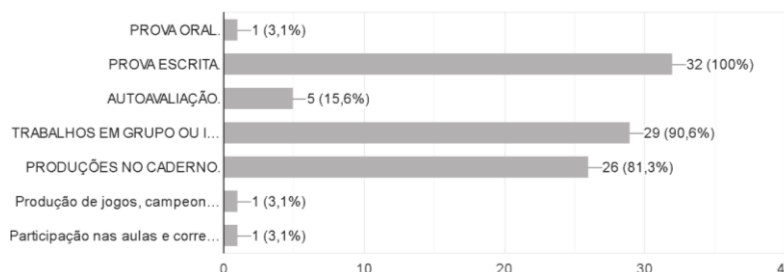
Percebe-se o quantitativo considerável de discentes que fazem o uso de livros didáticos como parâmetro para a seleção de seus conteúdos, embora o livro didático tenha grande utilidade no processo de ensino e aprendizagem, o professor corre o risco (por inúmeros motivos) de se tornar refém dessa alternativa, vale lembrar que o livro didático é uma ferramenta que auxilia tanto o professor, quanto o aluno, mas por muitas das vezes acaba se tornando o meio exclusivo no processo de ensino, como ressalta Dante (1996):

Muitos professores, na falta de outros materiais instrucionais, tornam-se, voluntariamente ou não, escravos do livro didático. Suas preocupações constituem-se "dar" toda a matéria contida no livro em lugar de trabalhar as ideias essenciais daquela série. O foco é o livro de ponta a ponta e não a aprendizagem do aluno. (Dante, 1996, p. 88).

Logo, é importante salientar a incontestável utilidade do livro didático dentro e fora de sala de aula, o aluno, por exemplo, nem sempre irá depender de explicações do professor, fazendo o uso do livro como facilitador, mas se deve observar o livro

não como um fim nesse processo, mas sim como um meio que pode auxiliar aprendizagem e o ensino.

Gráfico 15 - “Quais as principais formas de avaliação que você costuma aplicar/utilizar.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 13 - Distribuição de seleção de conteúdos

PRINCIPAIS FORMAS DE AVALIAÇÃO (MÚLTIPLA ESCOLHA)	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
PROVA ESCRITA	32	100%
TRABALHOS (INDIVIDUAIS OU EM GRUPO)	29	90,6%
PRODUÇÃO NO CADERNO	26	81,3%
AUTOAVALIAÇÃO	5	15,6%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Observa-se que 100% dos professores participantes se utilizam da prova escrita no processo de avaliação dos alunos, 90,6% deles fazem uso de trabalhos em grupos ou individuais, 81,3% a produção no caderno e apenas 15,6% incorpora auto avaliação como uma prática avaliativa. A diversidade de instrumentos adotados pode ser observada no Gráfico 15 e seus valores detalhados na Tabela 13.

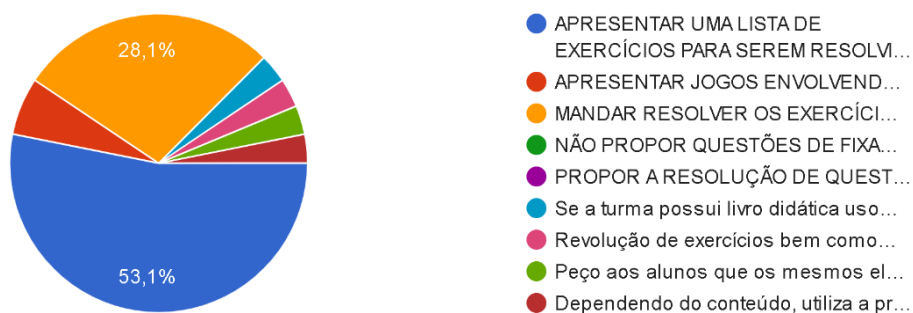
Para Luckesi (2000), o processo de avaliação é composto por dois elementos indissociáveis: *o diagnóstico* e *a decisão* primeiramente vêm o diagnóstico, que se trata em *constatar* e *qualificar* o objeto em questão, nesse caso o aluno, a constatação tem por objetivo determinar as atuais especificações de quem se vai avaliar, para assim se atribuir qualificação de forma positiva ou negativa, obedecendo a critérios previamente estabelecidos. Sendo assim o ato de avaliar no ambiente escolar deve estar alinhado adequadamente a alguns fatores de acordo com a necessidade do educando:

- a) sejam adequados ao tipo de conduta e de habilidade que estamos avaliando (informação, compreensão, análise, síntese, aplicação...);
- b) sejam adequados aos conteúdos essenciais planejados e, de fato, realizados no processo de ensino (o instrumento necessita cobrir todos os conteúdos que são considerados essenciais numa determinada unidade de ensino-aprendizagem);
- c) adequados na linguagem, na clareza e na precisão da comunicação (importa que o educando compreenda exatamente o que se está pedindo dele);
- d) adequados ao processo de aprendizagem do educando (um instrumento não deve dificultar a aprendizagem do educando, mas, ao contrário, servir-lhe de reforço do que já aprendeu).

Responder as questões significativas significa aprofundar as aprendizagens já realizadas.). (Luckesi, 2000, p. 4).

Logo, independente de qual meio de instrumento avaliativo utilizado pelo professor para avaliar seus alunos, deve se atentar sempre para a adequação dos instrumentos e métodos que possam propiciar de forma satisfatória e por sinal, justa aos educandos.

Gráfico 16 - "Para fixar o conteúdo ministrado, você costuma."



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

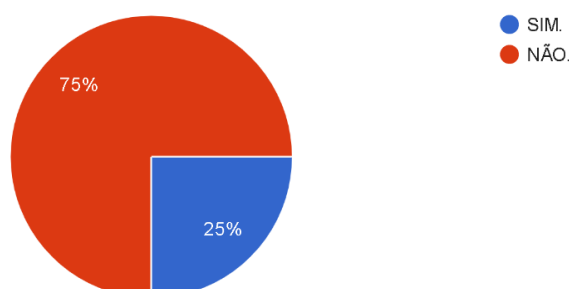
Tabela 14 - Distribuição de fixação de conteúdos

ESTRATÉGIA PARA FIXAÇÃO DE CONTEÚDO	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
LISTAS DE EXERCÍCIOS (EXTRACLASSE)	17	53,1%
EXERCÍCIOS DO LIVRO DIDÁTICO (EM SALA)	9	28,1%
OUTRAS PRÁTICAS	6	18,8%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Em relação a maneira de fixação dos conteúdos utilizadas pelos educadores, a diversidade de instrumentos adotados pode ser observada no Gráfico 16 e seus valores detalhados na Tabela 14. Observa-se que, mais da metade dos participantes (53,1%) assinalaram que fazem uso da apresentação de uma lista de exercícios a serem resolvidas e 28,1% adotam a resolução de exercícios do livro didático, observa-se assim, que menos de 1/5 dos professores não apoiam a fixação de conteúdos por intermédio de resolução de exercícios, corroborando a resolução de exercícios como uma alternativa utilizada por uma parcela significativa de professores.

Gráfico 17 - "Você considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada."



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

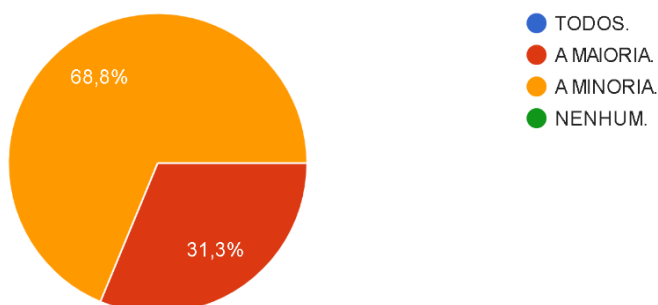
Tabela 15 - Distribuição de percepção de dificuldade em matemática

PERCEPÇÃO SOBRE O ENSINO DA DISCIPLINA	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
FÁCIL	24	75%
DIFÍCIL	8	25%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Quanto a opinião dos participantes em relação às dificuldades no ensino de matemática expostos no Gráfico 17 e na Tabela 15, 75% consideram a matemática como uma disciplina fácil de ser ensinada e 25% consideram difícil, nesse sentido,  $\frac{3}{4}$  dos professores assinalaram como negativo a indagação em questão, que se determina em contrariedade ao Gráfico 18 e Tabela 16.

Gráfico 18 - “Seus alunos gostam de matemática.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 16 - Distribuição de afinidade em matemática

AFINIDADE PELA DISCIPLINA	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
A MINORIA	22	68,8%
A MAIORIA	10	31,3%
TODOS	—	—
NENHUM	—	—

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Não necessariamente, a falta de compreensão esclarece a falta de afinidade com a disciplina, no entanto, não deixa de ser um ponto a ser discutido, o fato de os alunos não gostarem de matemática está ligado ao seu entendimento sobre a disciplina? E se estiver relacionado, o seu entendimento pode ser prejudicado devido a quais fatores?

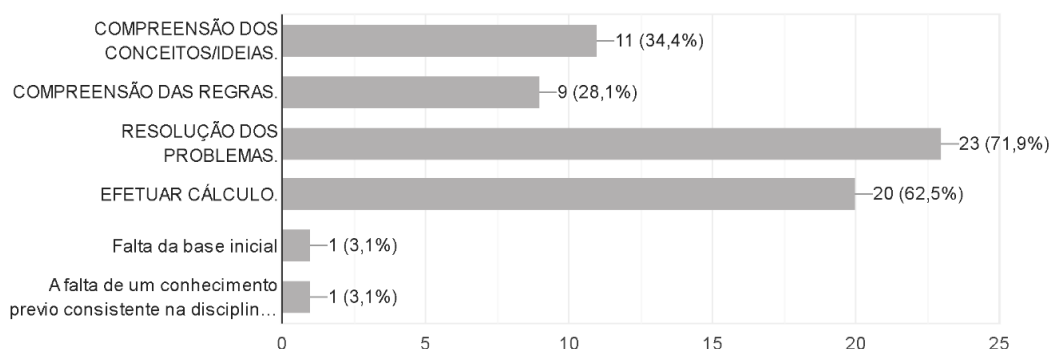
Ser professor aglutina inúmeros desafios, desde o domínio do conteúdo trabalhado a prática de estabelecer relações sociais, além do mais, o ensino necessita ser pautado em organização e planejamento, o educador deve seguir um objetivo através de estratégias previamente “delineadas”, ou seja, ensinar não depende unicamente do grau de conhecimento do educador referente a algum saber, mas perpassa também, pela habilidade em “saber ensinar”, estar disposto a

suprir necessidades individuais e coletivas de uma sociedade. Nesse sentido, para Serrazina (2002), o professor deve:

- Ser um facilitador da aprendizagem significativa dos alunos, gerando conhecimento escolar, uma vez que são os alunos quem aprendem e o professor deve ser capaz de criar as melhores condições para que isso aconteça;
- Ser um investigador dos processos de ensino/aprendizagem que acontecem na sua turma, gerando assim conhecimento profissional;
- Ser um constante construtor do currículo conduzindo experiências com os seus alunos, refletindo sobre elas e reformulando-as;
- Ser um gerador de conhecimento didático significativo ao investigar sobre os processos de desenvolvimento do currículo. (Serrazina, 2002, p. 8).

Que corroboram as ideias apresentadas anteriormente a respeito do papel do professor no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tendo em vista tal problemática, o Gráfico 19, em conjunto com a Tabela 17, representam as dificuldades apresentadas por alunos no processo de ensino-aprendizagem na ótica dos professores.

Gráfico 19 - “Quais as maiores dificuldades dos seus alunos nas aulas de matemática.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 17 - Distribuição de principais dificuldades em matemática

MAIORES DIFICULDADES GERAIS DOS ALUNOS (MÚLTIPLA ESCOLHA)	FREQUÊNCIA	PERCENTUAL
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	23	71,9%
EFETUAR CÁLCULOS	20	62,5%
COMPREENSÃO DE CONCEITOS	11	34,4%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

O Gráfico 19 faz alusão às respostas obtidas dos participantes ao serem questionados sobre quais são as *maiores dificuldades dos seus alunos, referente às aulas de matemática*, dentre as respostas assinaladas está a *resolução de problemas* 71,9% (23 professores), *efetuar cálculos* 62,5% (20 professores), *compreensão dos conceitos/ideias* 34,4% (11 professores) e *compreensão das regras* 28,1% (9 professores). Em síntese, é notório que, segundo a ótica dos

professores, as dificuldades estão atreladas no ato prático da matemática, em se utilizar dos conceitos e elementos estabelecidos para posteriormente aplicá-los.

O documento da BNCC estabelece 5 unidades temáticas que visam disponibilizar um conjunto de orientações para o desenvolvimento de habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, nesse sentido, será a apresentado a seguir no Quadro 19, as unidades presentes no documento e suas respectivas descrições de forma sintetizada.

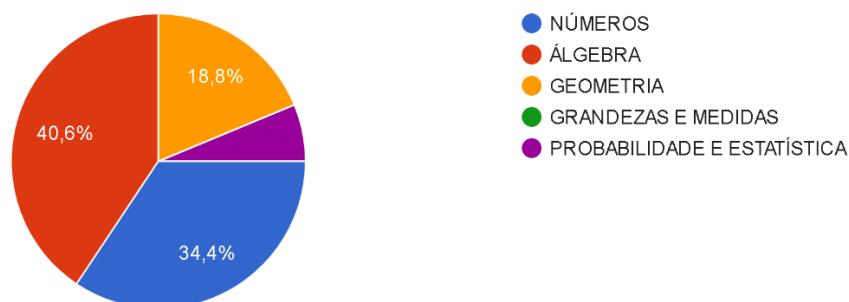
Quadro 19 – Unidades temáticas de matemática (BNCC)

UNIDADES TEMÁTICAS	DESCRIÇÃO
<b>NÚMEROS</b>	Desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática.
<b>ÁLGEBRA</b>	Enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.
<b>GEOMETRIA</b>	Estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.
<b>GRANDEZAS E MEDIDAS</b>	Ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas, ou seja, das relações métricas, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.).
<b>PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA</b>	Propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos.

Fonte: Adaptado de Brasil (2018)

De acordo com as unidades temáticas definidas pela BNCC, no Quadro 19, os professores foram questionados quanto aos *blocos de conteúdos (unidades temáticas) que destacam como mais importante em suas aulas de matemática* (Gráfico 20; Tabela 18), seguido de suas respectivas justificativas ao assinalarem a alternativa, como o intuito da pesquisa não é atribuir nome a cada resposta obtida, será designado numerações aos participantes.

Gráfico 20 - : “Qual unidade temática de matemática você considera mais importante nas suas aulas.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 18 - Distribuição por importância de Unidades Temáticas

UNIDADE TEMÁTICA CONSIDERADA MAIS IMPORTANTE	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
ÁLGEBRA	13	40,6%
NÚMEROS	11	34,3%
GEOMETRIA	6	18,8%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Do total de 32 professores, 11 (34,3%) assinalaram *NÚMEROS* como o mais importante, ao realizar a análise se observa que os participantes determinam como a base do ensino de matemática, que possibilita introduzir as demais unidades temáticas e conteúdos futuramente abordados em sala de aula, a exemplo dos professores 2, 6, 15 e 26:

**Professor 2** – *Penso que se o aluno não tiver um bom entendimento da unidade temática Números terá muita dificuldade nas demais unidades temáticas.*

**Professor 6** – *A parte de Números é o conhecimento básico necessário, que compõem certas operações e conceitos essenciais para o aprendizado dos outros Blocos de Conteúdos.*

**Professor 15** – *São a base para o desenvolvimento dos outros tópicos.*

**Professor 26** – *Necessário na formação inicial dos alunos.*

Tratando-se da unidade temática *ÁLGEBRA*, com o maior índice de escolhas, 13 (40,6%) professores pontuaram como sendo a mais importante, embora, como ressalte o **Professor 1**, “É onde encontramos muita abstração e raciocínio. ”, o pensamento algébrico carregue tal estigma, percebe-se aqui, duas ideias predominantes: a *ÁLGEBRA* está presente nas demais unidades temáticas, além do mais, está em outras disciplinas do ensino, possui aplicabilidade significativa no

cotidiano do aluno. Evidenciam-se essas ideias exemplificadas na fala dos professores 4, 5, 9 e 28:

**Professor 4** – *A partir da álgebra conseguimos atingir um leque maior dos conhecimentos dos alunos, desenvolvendo o pensamento crítico e criativo com problemas que envolvam as incógnitas. Além de ser necessário nos demais conteúdos.*

**Professor 5** – *O pensamento algébrico possibilita uma maior compreensão da nossa realidade.*

**Professor 9** – *Para ser franca, tudo é importante. Mas a álgebra os acompanhará em todas as séries seguintes e outras disciplinas afins. Portanto compreender seus significados e regras são fundamentais.*

**Professor 28** – *A álgebra é utilizada como ferramenta de aprendizagem nos demais blocos da matemática.*

Logo, os participantes atribuem o pensamento algébrico fundamental para o desenvolvimento crítico e lógico do educando, a álgebra ainda imersa em demasiada abstração, o professor sendo o mediador no processo de ensino-aprendizagem, necessita estabelecer estratégias para vincular o pensamento matemático a situações do dia a dia.

A unidade temática *GEOMETRIA*, foi assinalada por 6 professores (18,8%), ao se analisar as devidas justificativas, percebe-se uma diversificação nas respostas, o caso do **Professor 27** “Por ser a parte da matemática que eu tenho mais afinidade. ”, e o **Professor 32** “Minha área. ”, que atribuem suas pontuações a questões subjetivas, quanto que para o **Professor 19** “O bloco ainda é deixado de lado pelo professor. ”, conseqüentemente, não foi perceptível um padrão de justificas significativas.

Cabe salientar que nenhum professor pontuou *GRANDEZAS E MEDIDAS*. Obteve-se apenas 2 participantes (6,3%) destacando *PROBALIDADE E ESTATÍSTICA* como as mais importantes nas suas aulas, o **Professor 22** justificou sua resposta relatando “Os alunos têm dificuldade de aprender. ”, e o **Professor 29** “Por sua aplicabilidade. ”, apresentou como justificativa.

### 6.3 MAPEAMENTO DE DIFICULDADES E ERROS RECORRENTES

Trabalhos como o de Bastian (2000), se atem em investigar acerca do ensino e aprendizagem do teorema de Pitágoras, em decorrência das dificuldades apresentadas por alunos ao aprender e manipular o Teorema, para possibilitar o estudo, se realizou um levantamento histórico e epistemológico do assunto, seguido de um questionário direcionado aos alunos e posteriormente desenvolver uma sequência didática que preencha as lacunas encontradas e ofereçam uma melhor compreensão do teorema de Pitágoras.

Silva e Tashima (2008) destacam em sua pesquisa o aspecto da abordagem do ensino no MMM, e suas consequências de abstração no ensino de matemática, distanciando cada vez mais a aplicabilidade dos conteúdos, no caso a geometria, mais especificamente o teorema de Pitágoras, do meio em que o indivíduo vive, tal problemática deu luz ao objetivo dos estudiosos em investigar as dificuldades de alunos na manipulação do teorema de Pitágoras, para que assim, se desenvolva estratégias mais adequadas para a melhor aprendizagem do Teorema.

Consequentemente, trabalhos como os anteriormente citados corroboram a existência de dificuldades no ensino-aprendizagem do teorema de Pitágoras, na percepção dos educandos, a presente pesquisa busca verificar as dificuldades de acordo com a visão de professores.

O ensino do teorema de Pitágoras em si, de acordo com as diretrizes estabelecidas na BNCC, localiza-se na Unidade Temática de *GEOMETRIA*, relacionados aos objetos matemáticos correlacionados, seguinte o Quadro 20 expõe:

Quadro 20 – Teorema de Pitágoras e a Unidade Temática

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Geometria	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Relações métricas no triângulo retângulo.</li> <li>✓ Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.</li> </ul>

Fonte: Brasil (2018)

Seguido de suas respectivas habilidades EF09MA13 e EF09MA14, elencadas no Quadro 21:

Quadro 21 – Habilidades atribuídas ao teorema de Pitágoras (BNCC)

HABILIDADES	<p><b>(EF09MA13)</b> Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.</p> <p><b>(EF09MA14)</b> Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes</p>
-------------	---

Fonte: Brasil (2018)

Nesse sentido, levando-se em consideração as habilidades expostas anteriormente em relação ao teorema de Pitágoras, foi elaborada uma tabela com conteúdo e tópicos que compõem e vai de encontro ao ensino do teorema de Pitágoras, de conceitos e procedimentos algébricos a aplicabilidade no cotidiano.

A Tabela 19 possui como objetivo verificar quais os conteúdos e tópicos matemáticos que os professores participantes utilizam ao ministrar as aulas referentes ao teorema de Pitágoras, para tal verificação, houve a listagem de 17 **TÓPICOS E CONTEÚDOS**, seguido dos respectivos graus de dificuldades e facilidades: **MUITO FÁCIL, FÁCIL, DIFÍCIL E MUITO DIFÍCIL**, além do mais, os professores obtiveram a possibilidade de assinalar que “**NÃO COSTUMO ENSINAR**”. Destaque-se a seguir, na Tabela 19, de forma percentual, os resultados dos dados coletados.

Tabela 19 - Tópicos e conteúdos referentes ao teorema de Pitágoras

TÓPICOS E CONTEÚDOS: TEOREMA DE PITÁGORAS					
TÓPICOS E CONTEÚDOS	MUITO FÁCIL	FÁCIL	DIFÍCIL	MUITO DIFÍCIL	NÃO COSTUMO ENSINAR
REVISÃO: TIPOS DE TRIÂNGULOS.	15,6%	81,3%	—	—	3,1%
REVISÃO: ESTUDO DOS ÂNGULOS.	12,5%	75,0%	6,3%	—	6,3%
REVISÃO: EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU.	6,3%	31,3%	53,1%	3,1%	6,3%
REVISÃO: UNIDADES DE MEDIDA.	12,5%	50,0%	25,0%	3,1%	9,4%
CONTEXTO HISTÓRICO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	21,9%	50,0%	9,4%	—	18,8%
INTRODUÇÃO DO TEOREMA ATRAVÉS DE UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA.	6,3%	56,3%	34,4%	—	3,1%
DEFINIÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	6,3%	56,3%	37,5%	—	—
DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	3,1%	34,4%	37,5%	12,5%	12,5%
IDENTIFICAÇÃO DOS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO.	12,5%	75,0%	12,5%	—	—
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.	6,3%	21,9%	50,0%	18,8%	3,1%
REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	3,1%	37,5%	53,1%	6,3%	—
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS.	6,3%	34,4%	37,5%	9,4%	12,5%
TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS (TERNOS PITAGÓRICOS).	6,3%	40,6%	46,9%	3,1%	3,1%
NÚMEROS IRRACIONAIS NO TEOREMA DE PITÁGORAS.	3,1%	15,6%	50,0%	12,5%	18,8%
APLICAÇÃO DO TEOREMA PARA O CÁLCULO DA DIAGONAL DE UM QUADRADO.	9,4%	46,9%	28,1%	15,6%	—
APLICAÇÃO DO TEOREMA PARA O CÁLCULO DA ALTURA DE UM TRIÂNGULO.	3,1%	31,3%	46,9%	15,6%	3,1%
TEOREMA DE PITÁGORAS EM SALA DE AULA COM RECURSOS DIDÁTICOS-PEDAGÓGICOS.	6,3%	46,9%	25,0%	—	21,9%

Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Dentre os **TÓPICOS E CONTEÚDOS** e os seus correspondentes graus assinalados pelos professores, observa-se destaque em alguns resultados. É possível verificar que nas revisões (tipos de triângulos, estudos dos ângulos, equação polinomial do 2º grau e unidades de medida), mais da metade dos professores indicaram que abordam em suas aulas para o conteúdo “Teorema de Pitágoras”, e 53,1% relacionaram a revisão de equação polinomial do 2º grau sendo graduado como *difícil*, resultado com significativa discrepância em relação às outras revisões, destacar tal dado é importante, pois, deve-se lembrar de que a representação algébrica do teorema de Pitágoras está diretamente correlacionada a uma equação polinomial do 2º grau, tópico considerado como uma tarefa *difícil* por 53,1% e *muito difícil* por 6,3% dos discentes.

No tópico de *contextualização histórica*, o destaque está no percentual de professores (18,8%) que *não costumam ensinar* em suas aulas de teorema de Pitágoras, juntamente com *números irracionais*, ambos, 18,8% dos participantes *não costumam ensinar*, isso nos mostra uma possível lacuna de aprendizagem do objeto matemático abordado, dando margem para aplicação de predominância abstrata.

Mais de 95% dos professores assinalaram que costumam introduzir o conteúdo do teorema de Pitágoras por intermédio de uma situação-problema, porém, 34,4% apontaram que ainda se trata de uma abordagem *difícil* dentro de sala de aula. Existem algumas estratégias para se construir a definição do que é o teorema de Pitágoras, desde a contextualização histórica, até mesmo por situações problemas, destacando-se essas duas formas na Tabela 19, o plano de ensino deve ser muito bem definido pelo professor, sendo por meio dele que se chega aos objetivos previamente definidos, tal colocação nos auxilia a conjecturar uma possibilidade do porquê 37,5% consideram que *definir o teorema de Pitágoras* é uma tarefa *difícil*.

A demonstração tem como objetivo estabelecer alicerce lógico e matemático a um objeto em questão, a apresentação da demonstração de um conteúdo matemático comumente não se trata de uma abordagem simples, baseado nisso, normalmente, o professor acaba por negligenciar tal temática, 12,5% dos participantes *não costumam ensinar* a demonstração dentro de sala e 12,5% consideram a prática como *muito difícil* de ser ensinado; pode-se evidenciar nesse sentido, que mais da metade dos professores consideram a aplicação de relações métricas no triângulo retângulo ao menos como *difícil*, sendo assim, vale lembrar

que uma das inúmeras maneiras de demonstrar o teorema de Pitágoras é por intermédio das relações anteriormente citadas, logo, os dois tópicos matemáticos possuem estreita relação, que conseqüentemente não vem sendo explorada.

Com relação às representações do teorema de Pitágoras, cerca de 60% dos participantes consideram a representação algébrica ao menos como *difícil* de ser ensinada; tratando-se da representação geométrica, 37,5% e 9,4%, define, respectivamente, como *difícil* e *muito difícil* a sua abordagem, ademais, 12,5% *não costuma ensinar*.

A teoria de Reymond Duval, a respeito dos registros de representação semiótica (TRRS), busca estabelecer conceitos da forma em que o indivíduo adquire e desenvolve pensamentos matemáticos, segundo Flores (2006):

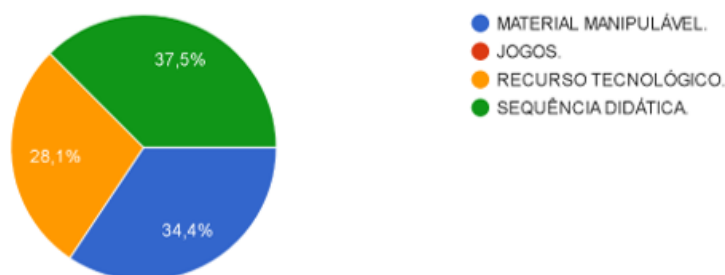
O interesse de Duval está, principalmente, no funcionamento cognitivo do aluno. Para ele, o pensamento é ligado às operações semióticas e, conseqüentemente, não haverá compreensão possível sem o recurso às representações semióticas. Não obstante, as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. (Flores, 2006, p. 4).

Nesse sentido, de acordo com Duval, segundo Flores (2006), o pensamento matemático está intimamente ligado e de maneira indissociável da TRRS, logo, não seria possível a absorção dos conhecimentos matemáticos sem os registros de representações semióticas, além do mais, é destacada a abstração de alguns objetos matemáticos, que inviabiliza a percepção, tendo como saída a exploração da representação, que em determinadas circunstâncias existe mais de uma representação, tal fato, de acordo com Flores (2006) é relevante, pois:

[...] uma única via não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em matemática. Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático – por exemplo,  $f(x) = x$  seria a função, e não uma representação do objeto matemático. Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. (Flores, 2006, p. 4).

Outro tópico presente na Tabela 19 que se destaca é o *teorema de Pitágoras em sala de aula com recursos didáticos-pedagógicos*, dentre as respostas assinaladas em *não costuma ensinar*, o referido tópico possui o maior percentual, com 21,9% dos participantes (em torno de 7 professores do total de 32), tal verificação se contrapõe ao apresentando no Gráfico 21 e Tabela 20.

Gráfico 21 - Em sua opinião, que recurso didático-pedagógico é/seria mais eficiente no ensino do teorema de Pitágoras.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 20 - Distribuição de recurso didático mais eficiente no ensino do teorema de Pitágoras

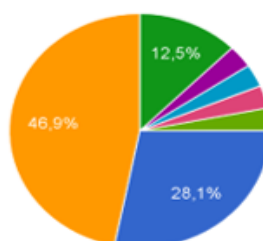
RECURSO DIDÁTICO MAIS EFICIENTE	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
SEQUÊNCIA DIDÁTICA	12	37,5%
MATERIAL MANIPULÁVEL	11	34,4%
RECURSO TECNOLÓGICO	9	28,1%
JOGOS	—	—

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

Isso mostra a dissonância do que os participantes idealizam como estratégias mais eficientes no ensino, com o que realmente é praticado em sala de aula, se tratando dos recursos que podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

Em um momento final, os professores foram indagados a que eles atribuíam os erros apresentados pelos alunos na resolução de problemas matemáticos envolvendo o teorema de Pitágoras, com os dados coletados e representados no Gráfico 22 e Tabela 21.

Gráfico 22 - “Quanto aos erros apresentados na resolução de problemas do teorema de Pitágoras, você destacaria como mais frequente.”



Fonte: Pesquisa de campo via google forms (2022)

Tabela 21 - Distribuição de erros mais frequentes

ERROS FREQUENTES NO TEOREMA DE PITÁGORAS	FREQUÊNCIA (N=32)	PERCENTUAL
INABILIDADE COM OPERAÇÕES MATEMÁTICAS BÁSICAS	15	46,9%
CONFUSÃO ENTRE CATETOS E HIPOTENUSA	9	28,1%
APLICAÇÃO DE ESTRATÉGIAS IRRELEVANTES	4	12,5%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms (2022)

É possível verificar a predominância de alguns resultados: 46,9% dos professores configuram a *inabilidade com as operações matemáticas* como sendo o

mais presente nos erros em resoluções de problemas do teorema de Pitágoras e 28,1% assinalaram a *confusão de um dos catetos com a hipotenusa* e 12,5% atribuíram a frequência dos erros à aplicação *de regras/estratégias irrelevantes*.

Segundo o trabalho de Pereira, Couto e Costa (2016), aplicado a alunos do 9º de uma escola de rede pública em Belém do Pará, elas observaram de acordo com os dados coletados através da atividade diagnóstica aplicada, os erros mais recorrentes dos alunos na resolução de problemas do teorema de Pitágoras, elas desenvolveram três categorias de erros mais presentes de acordo com os resultados obtidos, que auxiliou no desenvolvido das alternativas apresentadas aos professores desta pesquisa: erro na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo (C1); erro na aplicação de regras e estratégias irrelevantes (C2); erro no desenvolvimento das operações matemáticas (C3).

Logo, é possível conjecturar, que se tratando da ótica dos professores, os alunos possuem uma grande defasagem em sua formação de base e a associação e transformação das representações semióticas que fazem parte do conhecimento matemático, no caso em questão, o teorema de Pitágoras.

Verificou-se por intermédio do levantamento, conforme a perspectiva dos educadores que as dificuldades dos alunos ao trabalharem com o teorema de Pitágoras podem ser desencadeadas através de diversos fatores aplicados de maneira pontual ou articuladas.

Dentre essas diversas motivações está a inércia na formação continuada dos professores, tendo em vista, que ofício de educar delibera uma constante reciclagem e aperfeiçoamento diante de suas práticas profissionais, e de acordo com os dados obtidos a realidade acaba por não se encontrar em consonância com determinado ideário. Um das grandes parcelas desses profissionais por sua vez não deram continuidade a sua formação, pois, de acordo com a própria pesquisa, um dos motivos que podemos citar a respeito de possíveis causas é a carência ou até mesmo ausência de incentivos estatais disponibilizados a esses profissionais, mais da metade deles relataram que raramente lhe são ofertados oportunidade de formação continuada.

Outra variável que se destaca é “disponibilização de recursos didático-pedagógicos e a adequação de sua aplicabilidade”, de modo geral, trata-se de mais um fator em que o Estado é insuficiente, o não fornecimento ou sua má distribuição tanto em recursos, quanto material.

Diante de sua totalidade, 65,6% dos entrevistados assinalou a falta desses recursos como sendo o que mais sentem falta ao ministrar suas aulas, em contrapartida, a inadequada utilização desses artifícios podem resultar em consequências não desejadas, uma parcela significativa dos educadores alinham suas estratégias pedagógicas por intermédio de livros didáticos, vale ressaltar que o livro didático como recurso didático/pedagógico se configura como um meio de atingir determinados objetivos educacionais, alguns profissionais acabam por torná-lo um fim do processo de ensino-aprendizagem.

É pertinente destacar uma possível contrariedade em relação aos dados observados, pois 75% dos educadores definem a matemática como uma matéria de fácil ensinamento, que se contrapõe ao fato de 68% assinalarem que seus alunos não possuem afinidade com matéria, logo, constata-se uma lacuna entre o ato de ensinar e o de aprender, não necessariamente o grau de “conhecimento” que um professor possui reflete consequentemente no entendimento do aluno, constatando mais uma vez a importância da formação continuada do educador, o processo de ensino-aprendizagem demanda planejamento e organização, visto que corriqueiramente o professor deverá suprir dificuldades e necessidades individuais e coletivas.

Tratando-se ainda da percepção dos entrevistados, fica evidente que as dificuldades dos alunos com a matemática se direcionam ao ato prático da ciência, a absorção dos conceitos e elementos não definem uma harmonia com a aplicabilidade de situações do cotidiano, tal fato é corroborado pelo dado que assinala 71,9% dos educadores atribuírem a resolução de problema sendo a maior dificuldade dos alunos nas aulas de matemática, além da abstração demasiada de determinados conteúdos, podem contribuir na compreensão dos alunos de forma negativa.

Quanto ao teorema de Pitágoras em si, para os professores, as dificuldades que os alunos apresentam se intensificam em virtude da defasagem adquirida de conteúdos básicos importantes, que foram negligenciados ao decorrer dos anos, logo, se tratando de causa e efeito, esses indivíduos apresentam déficit em sua base matemática.

#### **6.4 TESTE EXATO DE FISHER**

Nesta investigação, a avaliação das influências dos fatores socioprofissionais — segmentados pelos grupos de escolaridade, tempo de serviço e participação em formação continuada — nas estratégias e percepções pedagógicas foi realizada por meio do Teste Exato de Fisher.

O propósito desses 12 cruzamentos estatísticos foi investigar se o perfil individual do docente está associado à escolha da metodologia de início de aula, ao método de fixação do conteúdo, à percepção sobre a dificuldade de ensinar matemática e à visão sobre a afinidade dos alunos com a disciplina.

Segundo Leal; Silva; Sopelete (2005), o Teste Exato de Fisher é uma ferramenta essencial para a análise de dados discretos, nominais ou ordinais, sendo especialmente indicado quando trabalhamos com amostras pequenas. Ele é aplicado quando os dados de dois grupos independentes são classificados em categorias mutuamente exclusivas, como "sim/não" e "positivo/negativo".

Na prática, cada indivíduo é posicionado em apenas uma de duas categorias possíveis, resultando em frequências que são organizadas em uma tabela de contingência 2x2. O Teste calcula a probabilidade exata de observar a distribuição encontrada, o que garante maior precisão quando os valores esperados em cada célula da tabela são baixos.

Para investigar se fatores como o nível de formação ou o tempo de carreira influenciam a condução das aulas, os dados foram processados no software JAMOV (versão 2.6), buscando testar as seguintes hipóteses:

$H_0$  (Hipótese Nula): As variáveis do perfil docente (como o tempo de serviço ou a escolaridade) não afetam a prática pedagógica nem a percepção sobre as dificuldades dos alunos.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): O perfil do professor influencia a maneira como ele conduz as aulas e percebe o desempenho do estudante.

Adotou-se o nível de significância de 5% ( $\alpha=0,05$ ), de modo que um p-valor menor que 0,05 sinaliza um resultado significativo a favor da hipótese  $H_1$ , indicando associação entre os fatores socioprofissionais e o diagnóstico do ensino do Teorema de Pitágoras. Caso contrário, p-valores maiores que 0,05 indicam indícios a favor de  $H_0$ , revelando que as estratégias de ensino e as dificuldades mapeadas são independentes do perfil do professor entrevistado.

### 6.4.1 ASSOCIAÇÕES RELACIONADAS À ESCOLARIDADE DO DOCENTE

Neste tópico, investigou-se se a titulação acadêmica (Até Especialização x Mestrado e Doutorado) exercia influência sobre as variáveis dependentes da pesquisa.

#### I. Escolaridade x Início das Aulas:

$H_0$  (Hipótese Nula): A escolaridade do professor **não afeta** a escolha da metodologia para iniciar a aula.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): Professores com maior titulação tendem a iniciar a aula de forma distinta.

Tabela 22 - Contingência entre a escolaridade e o início das aulas

Escolaridade	Início das aulas		Total
	situação-problema	conceitos/outros	
até especialização	12	9	21
mestrado/doutorado	10	1	11
Total	22	10	32

Testes $\chi^2$	
	Valor p
Teste Exato de Fisher	0.106
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Como  $p > 0,05$ , **aceita-se**  $H_0$ . Não há associação significativa, indicando que a escolha entre situação-problema ou conceitos independe da titulação acadêmica.

#### II. Escolaridade vs. Método de Fixação:

$H_0$  (Hipótese Nula): A escolaridade **não influencia** a escolha do recurso para fixação do conteúdo.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): A titulação do professor influencia o uso de listas de exercícios ou outros recursos.

Tabela 23 - Contingência entre a escolaridade e o método de fixação do conteúdo

Escolaridade	Fixação		Total
	lista de exercício	livro didático/outros	
até especialização	9	12	21
mestrado/doutorado	8	3	11
Total	17	15	32

Testes $\chi^2$	
	Valor p
Teste Exato de Fisher	0.147
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . A preferência pela lista de exercícios é uma prática homogênea entre os diferentes níveis de escolaridade.

### III. Escolaridade vs. Dificuldade de Ensinar:

$H_0$  (Hipótese Nula): A percepção sobre a facilidade ou dificuldade de ensinar matemática **não depende** da escolaridade.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): O nível de escolaridade altera a percepção do docente sobre a complexidade de ensinar a disciplina.

Tabela 24 - Contingência entre a escolaridade e a dificuldade de ensinar matemática

Escolaridade	Dificuldade		Total
	fácil de ensinar	difícil de ensinar	
até especialização	16	5	21
mestrado/doutorado	8	3	11
Total	24	8	32

Testes $\chi^2$	
	Valor p
Teste Exato de Fisher	1.000
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . Existe uma independência absoluta entre o grau de formação e a percepção de que a disciplina é fácil de ensinar.

#### IV. **Escolaridade vs. Afinidade dos Alunos:**

$H_0$  (Hipótese Nula): A percepção docente sobre o gosto dos alunos pela matemática **não está associada** à escolaridade do professor.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): Professores com maior titulação percebem de forma diferente o interesse dos alunos.

Tabela 25 - Contingência entre a escolaridade e a afinidade dos alunos com a matemática

Escolaridade	Afinidade		Total
	gostam de matemática	não gostam de matemática/indiferentes	
até especialização	8	13	21
mestrado/doutorado	2	9	11
Total	10	22	32

Testes $\chi^2$	
	Valor
Teste Exato de Fisher	0.425
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . A visão de que a maioria dos alunos não tem afinidade com a disciplina é compartilhada por todos os perfis de escolaridade.

Todos os p-valores foram superiores a 0,05. Isso indica que possuir uma titulação stricto sensu (Mestrado/Doutorado) não altera de forma significativa a maneira como o docente inicia a aula, fixa o conteúdo ou como percebe a dificuldade de ensinar e a afinidade dos alunos.

#### **6.4.2 ASSOCIAÇÕES RELACIONADAS AO TEMPO DE SERVIÇO DO DOCENTE**

Este tópico investiga se a experiência (Até 10 anos vs. Mais de 10 anos) influencia a prática pedagógica.

## V. Tempo de Serviço vs. Início da Aula:

$H_0$  (Hipótese Nula): tempo de serviço **não afeta** a metodologia de introdução do conteúdo.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): A experiência acumulada na carreira influencia a escolha de como iniciar a aula.

Tabela 26 - Contingência entre o tempo de serviço e o início das aulas

Tempo de serviço	Início das aulas		Total
	situação-problema	conceitos/outros	
até 10 anos	8	5	13
mais de 10 anos	14	5	19
Total	22	10	32

Testes $\chi^2$	
	Valor
Teste Exato de Fisher	0.69 9
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . Professores iniciantes e veteranos estruturam o início de suas aulas de forma similar.

## VI. Tempo de Serviço vs. Método de Fixação:

$H_0$  (Hipótese Nula): A escolha do método de fixação **não depende** do tempo de serviço do docente.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): O tempo de magistério influencia o uso de listas ou livros didáticos.

Tabela 27 - Contingência entre o tempo de serviço e o método de fixação do conteúdo

Tempo de serviço	Fixação		Total
	lista de exercício	livro didático/outros	
até 10 anos	8	5	13
mais de 10 anos	9	10	19
Total	17	15	32

Testes $\chi^2$	
	Valor
Teste Exato de Fisher	0.491
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . A prática de fixação por meio de listas de exercícios é independente da maturidade profissional.

## VII. Tempo de Serviço vs. Dificuldade de Ensinar:

$H_0$  (Hipótese Nula): A percepção sobre a dificuldade de ensinar matemática **não é afetada** pelo tempo de experiência.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): O tempo de serviço influencia como o professor percebe a complexidade do ensino.

Tabela 28 - Contingência entre o tempo de serviço e a dificuldade de ensinar matemática

Tempo de serviço	Dificuldade		Total
	fácil de ensinar	difícil de ensinar	
até 10 anos	9	4	13
mais de 10 anos	15	4	19
Total	24	8	32

Testes $\chi^2$	
	Valor
Teste Exato de Fisher	0.684
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . A visão sobre a facilidade do ensino é comum a professores em diferentes estágios da carreira.

#### VIII. Tempo de Serviço vs. Afinidade dos Alunos:

$H_0$  (Hipótese Nula): O tempo de serviço **não influencia** a percepção docente sobre o interesse dos alunos.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): A experiência do docente altera sua visão sobre a afinidade discente com a matéria.

Tabela 29 - Contingência entre o tempo de serviço e a afinidade dos alunos com a matemática

Tempo de serviço	Afinidade		Total
	gostam de matemática	não gostam de matemática/indiferentes	
até 10 anos	6	7	13
mais de 10 anos	4	15	19
Total	10	22	32

Testes $\chi^2$		
	Valor	p
Teste Exato de Fisher		0.244
N	32	

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . O diagnóstico do desinteresse discente é uma percepção transversal ao tempo de serviço.

Os p-valores altos (variando de 0,244 a 0,699) demonstram uma independência entre o tempo de experiência e as variáveis pedagógicas. A experiência acumulada não resultou em percepções ou métodos significativamente distintos para este objeto matemático.

#### 6.4.3 ASSOCIAÇÕES RELACIONADAS A PARTICIPAÇÃO EM FORMAÇÃO CONTINUADA DO DOCENTE

Este tópico analisa o impacto da frequência em cursos de formação continuada ofertados pelas redes de ensino (Alta x Baixa participação).

### IX. Formação vs. Início da Aula:

$H_0$  (Hipótese Nula): A frequência em formações **não altera** a estratégia de introdução do conteúdo.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): Professores com alta participação em cursos iniciam a aula de forma diferente.

Tabela 30 - Contingência entre a formação continuada e o início das aulas

Formação continuada	Início das aulas		Total
	situação-problema	conceitos/outros	
alta participação	13	4	17
baixa participação	9	6	15
Total	22	10	32

Testes $\chi^2$	
Valor	p
Teste Exato de Fisher	0.450
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . A busca por atualização não resultou em mudanças estatisticamente significativas no início da aula.

### X. Formação vs. Método de Fixação:

$H_0$  (Hipótese Nula): A técnica de fixação de conteúdo **não depende** da participação em formações.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): A formação continuada influencia a escolha dos recursos didáticos para exercícios.

Tabela 31 - Contingência entre a formação continuada e o método de fixação do conteúdo

Formação continuada	Fixação		Total
	lista de exercícios	livro didático/outros	
alta participação	8	9	17
baixa participação	9	6	15
Total	17	15	32

Testes $\chi^2$	
Valor	p
Teste Exato de Fisher	0.502
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . Não há associação entre a frequência em cursos e o método de fixação.

#### XI. Formação vs. Dificuldade de Ensinar:

$H_0$  (Hipótese Nula): A percepção da dificuldade de ensinar **independe** da participação em formação continuada.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): Docentes mais atualizados percebem de forma diferente a complexidade do ensino.

Tabela 32 - Contingência entre a formação continuada e a dificuldade de ensinar matemática

Formação continuada	Dificuldade		Total
	fácil de ensinar	difícil de ensinar	
alta participação	13	4	17
baixa participação	11	4	15
Total	24	8	32

Testes $\chi^2$	
Valor	p
Teste Exato de Fisher	1.000
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Aceita-se  $H_0$ . A percepção sobre a facilidade do ensino é independente da participação em cursos de aperfeiçoamento.

## XII. Formação vs. Afinidade dos Alunos:

$H_0$  (Hipótese Nula): A percepção docente sobre o interesse dos alunos **não está associada** à participação em formações.

$H_1$  (Hipótese Alternativa): Professores que buscam mais cursos percebem de forma distinta o gosto dos alunos pela disciplina.

Tabela 33 - Contingência entre a formação continuada e a afinidade dos alunos com a matemática

Formação continuada	Afinidade		Total
	gostam de matemática	não gostam de matemática/indiferentes	
alta participação	8	9	17
baixa participação	2	13	15
Total	10	22	32

Testes $\chi^2$	
Valor	p
Teste Exato de Fisher	0.060
N	32

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Embora seja o valor mais baixo encontrado, ainda é superior a 0,05, resultando na aceitação de  $H_0$ . Contudo, este valor limiar sugere uma tendência de associação que merece atenção em amostras futuras.

A aceitação da Hipótese Nula ( $H_0$ ) em todos os cruzamentos estatísticos evidencia que as dificuldades e estratégias no ensino do Teorema de Pitágoras no Pará independem do perfil individual do docente (como tempo de serviço, formação ou localização).

Esse resultado sinaliza que os obstáculos mapeados possuem natureza estrutural e sistêmica, e não meramente casual. Tal cenário valida a urgência de uma intervenção metodológica externa e robusta, materializada no Produto Educacional resultante dessa pesquisa, como ferramenta capaz de enfrentar desafios que transcendem as particularidades de cada professor.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao considerar o objetivo geral da pesquisa em desenvolver um diagnóstico das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras, fundamentando-se na ótica de professores de matemática. O desenvolvimento do trabalho teve como base um questionário aplicado a 32 professores que atuam ou já atuaram no ensino da rede pública do Estado do Pará.

Verificou-se por intermédio do levantamento, conforme a perspectiva dos educadores que as dificuldades dos alunos ao trabalharem com o teorema de Pitágoras podem ser desencadeadas através de diversos fatores aplicados de maneira pontual ou articuladas.

Após a análise dos dados pelo Teste Exato de Fisher, percebe-se que fatores como o tempo de carreira, o nível de escolaridade e a participação em cursos não são estritamente comprometedores na forma como o professor ensina ou percebe os erros dos alunos ( $p > 0,05$ ). Esse resultado confirma que os desafios encontrados no ensino do teorema de Pitágoras no Pará são estruturais e sistêmicos, atingindo a todos de maneira semelhante, independentemente da trajetória ou dos títulos de cada profissional.

Essa uniformidade de dificuldades é explicada, em grande parte, pela inércia na formação continuada e pela falta de incentivos estatais. O ofício de educar exige reciclagem constante, mas a realidade das escolas não acompanha esse ideal: mais da metade dos docentes (68,8%) relatou que raramente recebe oportunidades de aperfeiçoamento. Assim, a carência de formação e a escassez de recursos (sentida por 65,6% da amostra) consolidam-se como barreiras que impedem a evolução das práticas pedagógicas na rede pública.

Outra variável que se destaca é disponibilização dos recursos didáticos/pedagógicos e a adequação de sua aplicabilidade, de modo geral, trata-se de mais um fator em que o Estado é insuficiente, o não fornecimento ou sua má distribuição tanto em recursos, quanto material.

Diante de sua totalidade, 65,6% dos entrevistados assinalou a falta desses recursos como sendo o que mais sentem falta ao ministrar suas aulas, em contrapartida, a inadequada utilização desses artifícios podem resultar em

consequências não desejadas, uma parcela significativa dos educadores alinham suas estratégias pedagógicas por intermédio de livros didáticos, vale ressaltar que o livro didático como recurso didático/pedagógico se configura como um meio de atingir determinados objetivos educacionais, alguns profissionais acabam por torná-lo um fim do processo de ensino-aprendizagem.

É pertinente destacar uma possível contrariedade em relação aos dados observados, pois 75% dos educadores definem a matemática como uma matéria de fácil ensinamento, que se contrapõe ao fato de 68,8% assinalarem que seus alunos não possuem afinidade com matéria, logo, constata-se uma lacuna entre o ato de ensinar e o de aprender.

Não necessariamente, o grau de “conhecimento” que um professor possui reflete por consequência no entendimento do aluno, constatando mais uma vez a importância da formação continuada do educador, o processo de ensino-aprendizagem demanda planejamento e organização, visto que corriqueiramente o professor deverá suprir dificuldades e necessidades individuais e coletivas.

Tratando-se ainda da percepção dos entrevistados, fica evidente que as dificuldades dos alunos com a matemática se direcionam ao ato prático da ciência, a absorção dos conceitos e elementos não definem uma harmonia com a aplicabilidade de situações do cotidiano, tal fato é corroborado pelo dado que assinala 71,9% dos educadores atribuírem a resolução de problema sendo a maior dificuldade dos alunos nas aulas de matemática, além da abstração demasiada de determinados conteúdos, podem contribuir na compreensão dos alunos de forma negativa.

Quanto ao teorema de Pitágoras em si, para os professores, as dificuldades que os alunos apresentam se intensificam em virtude da defasagem adquirida de conteúdos básicos importantes, que foram negligenciados ao decorrer dos anos, logo, se tratando de causa e efeito, esses indivíduos apresentam déficit em sua base matemática. Este diagnóstico é reforçado pela identificação da inabilidade com operações matemáticas básicas como o erro mais frequente (46,9%), classificado como Erro C3.

No que tange ao alcance do diagnóstico, reitera-se que os dados foram obtidos a partir de uma amostra de 32 professores que atuaram/ atuam na rede

pública paraense (Estadual e/ou Municipal), tal delimitação quantitativa decorreu das condições impostas pelo cenário pandêmico de fevereiro de 2022, restringindo o recrutamento à modalidade remota, causando impacto direto na adesão dos docentes. No entanto, a validade interna dos dados é assegurada pelo Teste Exato de Fisher, adequado para amostras consideradas pequenas, permitindo identificar a correlação entre variáveis que descrevem o perfil dos professores e suas práticas.

Em consequência dos resultados revelados, disponibiliza-se em paralelo um Produto Educacional baseado no Ensino de Matemática por Atividades Experimentais. Trata-se de uma sequência de sete atividades estruturadas de forma lógica, que variam da soma dos ângulos internos de triângulos, até a descoberta da relação de ternos pitagóricos. A expectativa em torno do material é que o mesmo contribua significativamente no aprendizado dos alunos em matemática, visando a redução das dificuldades sinalizadas através do diagnóstico e sendo uma alternativa pedagógica que considere o conhecimento prático do aluno.

Em suma, o presente trabalho buscou evidenciar possíveis dificuldades que alunos apresentam no processo de ensino-aprendizagem do teorema de Pitágoras, portanto, ao emergir tais dificuldades, surge também algumas causas, no qual possibilitou as pertinentes colocações, além do mais, a pesquisa envereda pelo caráter colaborativo ao desenvolvimento de trabalhos que busquem dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

## 8. REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA, Jéssica Ferreira de. **Dissecções e Quebra-Cabeças Pitagóricos**. Dissertação – UFCA. Juazeiro do Norte, 2021.
- ASSIS, Francisco Otacílio Silva. **Ternos Pitagóricos e Quase Pitagóricos**. Dissertação – UNILAB. Redenção, 2020.
- ALVES, Alex Deni. **Teorema de Pitágoras: uma proposta de ensino-aprendizagem com rotação por Estações**. Dissertação – UFSC. Florianópolis, 2023.
- ALVES, Clenilton Fernandes et al. **Trigonometria e números complexos: uma abordagem elementar com aplicações**. Dissertação – UFMA. São Luís, 2019.
- ALVES, Pedro Lázaro Martins. **Algumas Demonstrações do Teorema de Pitágoras e uma Proposta Pedagógica com Base nas Ternas Pitagóricas**. Dissertação – UECE. Quixadá, 2020.
- BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos padrões pitagóricos: geométricos e numéricos**. São Paulo: Atual, 1993.
- BARBOSA, Rui dos Santos; BASSALO, José Maria Filardo. **DE PITÁGORAS A FERMAT**. Pará: UFPA. 1978.
- BARBOSA, Valdirene Lima Cerqueira. **O USO DO GNÔMON COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação – UEFS. Feira de Santana, 2020.
- BARROS, Rafael Lameira. **O Ensino de Números Irracionais por Atividades**. Dissertação – UEPA. Belém, 2021.
- BASTIAN, Irma Verri. **O teorema de Pitágoras**. 229 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, 2000.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Documentos de Referência Versão Preliminar. Brasília, 2019.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Escalas de Proficiência do Saeb**. Brasília, 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF. 1997.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, MEC/SEF. 1997.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, MEC/SEF. 1998.
- BOYER, Carl. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- CORRÊA, Carlos Augusto. **TEOREMA DE PITÁGORAS E OS TERNOS PITAGÓRICOS**. Dissertação – UnB, Brasília, 2019.
- COSTA, Allyson Emanuel Januário da. **THABIT IBN QURRA (836-901) E A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: ALIANDO HISTÓRIA, TECNOLOGIA E INVESTIGAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA**. Dissertação – UFRN. Natal, 2022.
- DAMACENO, Érica Francielle Moreira. **A compreensão do Teorema de Pitágoras pelos alunos com deficiência visual: um estudo sobre as representações semióticas em geometria**. Dissertação – UFG. Goiânia, 2022.

- DANTE, Luiz Roberto. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**. V. 16, n. 69. Brasília, 1996.
- DA SILVA, João Evangelista Brito; FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; PEDROSO, Hermes Antônio. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2016.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. 7ª ed. São Paulo. 1997.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino Hugueros Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- EVES, Howard. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: **Geometria**. Tradução de Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**, v. 19, n. 26, p. 1-22, 2006.
- GALVÃO, Janaína Teodoro dos Santos. **O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: CONCEPÇÃO DE PROFESSORES E UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM**. Dissertação – UEPB. Campina Grande, 2021.
- GUNDLACH, Bernard H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: números e numerais**. Trad. Hygino H. Domingues. Atual Editora, 1992.
- LEAL, Geraldo Sadoyama; SILVA, Deise Aparecida de Oliveira; SOPELETE, Mônica Camargo. Testes estatísticos. In: MINEO, José Roberto; MINEO, Tiago Wilson Patriarca (org.). **Pesquisa na área biomédica: do planejamento à publicação**. Uberlândia: EDUFU, 2005. cap. 7, p. 153-178. Disponível em: <https://books.scielo.org/id/wh35j/pdf/mineo-9788570785237-07.pdf>. Acesso em: 25 Fev. 2026.
- LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- LINO, Carla Marilla Caldeirani. **AS CONTRIBUIÇÕES DO USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM OS ALUNOS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA)**. Dissertação – Unesp. São José do Rio Preto, 2019.
- LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
- LUCKESI, Cipriano Carlos. O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem. **Revista Pátio**, v. 12, p. 6-11, 2000.
- MAJONI, Higor Soares. **UMA HISTÓRIA EM QUADRINHOS PARA CONTRIBUIÇÃO NA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS ACERCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS SOB PRINCÍPIOS DO MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS**. Dissertação – IFES. Vitória, 2021.
- MARTINS, Marlos Luis Rocha. **Generalização do Teorema de Pitágoras por Triedro tri-retangular**. Dissertação – EUMA. São Luís, 2023.
- OLIVEIRA, Marcela de. **Uma Proposta para o Ensino do Teorema de Pitágoras com uso do Aplicativo Pythagorea**. Dissertação – UEM. Maringá, 2021.
- OLIVEIRA, Valéria de Freitas; PRADA, Luis Eduardo Alvarado. Concepções e políticas de formação continuada de professores: sua construção. **Diálogo Educacional. Curitiba**, v. 10, n. 30, p. 367-387, 2010.
- PEREIRA, Mayara Gabriella Grangeiro; COUTO, Ana Paula Nascimento Pegado; COSTA, Acylena Coelho. Análise de erros em questões de Teorema de Pitágoras:

um estudo com alunos do Ensino Fundamental. **Encontro Nacional de Educação Matemática, XII, São Paulo–SP**, 2016.

PONTE, João Pedro da. **Gestão Curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM. 2005.

R Core Team (2024). *R: A Language and environment for statistical computing*. (Version 4.4) [Computer software]. Retrieved from <https://cran.r-project.org>. (R packages retrieved from CRAN snapshot 2024-08-07).

RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. Dissertação (mestrado em matemática) – Universidade federal de viçosa, Minas Gerais, 2013.

ROCHA, Dêner Maia. **Teorema de Pitágoras e construções geométricas com o GeoGebra**. Dissertação – UFOP. Ouro Preto, 2023.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª edição. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2012.

SANTOS, Claudia Valin dos. **UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENVOLVENDO RECURSOS DIGITAIS NAS AULAS DE MATEMÁTICA PARA APRENDER O TEOREMA DE PITÁGORAS**. Dissertação – UniCarioca, Rio de Janeiro, 2022.

SANTOS, Francisco Nordman Costa. **O Ensino de Polígonos por Atividades Experimentais**. Dissertação – UEPA. Belém, 2020.

SERRAZINA, Lurdes. A formação para o ensino da Matemática: perspectivas futuras. **A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e**, n. 1º, p. 9-19, 2002.

SILVA, Ana Lúcia da; TASHIMA, Marina Massaco. **As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria**. Disponível em: [http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes\\_pde/artigo\\_mari\\_na\\_massaco\\_tashima.pdf](http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_mari_na_massaco_tashima.pdf).

SILVA, Iolanda Possidonio dos Santos. **A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO UMA FERRAMENTA METODOLÓGICA PARA O ESTUDO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**. Dissertação – UFPE. Caruaru, 2022.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat** – A História do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 9ª.ed. Trad. Jorge Luiz Calife. Record, 2002.

SOUZA, Salete Eduardo de. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. **Arq Mudi. Maringá, PR**, v. 11, n. Supl 2, p. 110-114p, 2007.

The jamovi project. **jamovi**. (Version 2.6) [Computer Software]. Retrieved from <https://www.jamovi.org>. 2024.

## 9. ÍNDICE REMISSIVO

<b>A</b>		<b>J</b>	
Andrew Wiles .....	60	James Abram Garfield.....	29
Atividades Experimentais .	18, 167, 170	JAMOVI .....	7, 8, 155
<b>B</b>		<b>L</b>	
Bhaskara .....	9, 30, 31, 125	Leonardo da Vinci.....	28, 30
BNCC .	7, 8, 11,18, 19, 62, 64, 65, 78, 79, 128, 131, 132, 133, 139, 140, 144, 145, 148	Livro Didático.....	68
<b>D</b>		<b>P</b>	
Demonstrações .....	168	Pierre de Fermat.....	59
Diagnóstico.....	7	Pitágoras de Samos .....	9, 17, 20
<b>E</b>		Produto Educacional	18, 130, 164, 167
Elisha Scott Loomis.....	26	p-valor .....	155, 158, 161
Erro .....	166	<b>T</b>	
Estado do Pará.....	1, 2, 4, 6, 7, 17, 18, 130, 131, 165, 172	Teorema de Pitágoras .....	7, 11, 14, 17, 18, 23, 57, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 93, 95, 98, 99, 100, 101, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 128, 129, 130, 131, 133, 148, 149, 155, 164, 168, 169, 170
Estudo Diagnóstico .....	68	Ternos Pitagóricos.....	168
Euclides.....	9, 10, 26, 27, 48, 49, 94	Teste Exato de Fisher .....	7, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165
Extensões.....	11, 44, 45	Thabit Ibn Qurra .....	50, 69, 108
<b>G</b>			
George Polya .....	49		
Google Forms.....	7, 8, 109, 131, 134, 135, 136, 137, 139, 141, 142, 143, 144, 146, 152		
<b>H</b>			
Hipótese Nula	155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164		



Universidade do Estado do Pará  
Centro de Ciências Sociais e Educação  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática  
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo  
66113-200 Belém-PA  
[www.uepa.br/ppgem](http://www.uepa.br/ppgem)