UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DARLIS APARECIDO DA SILVA

PRODUTO EDUCACIONAL: Estudo de funções via modelos de crescimento populacional

2025

Resumo

Este trabalho consiste em um produto educacional voltado para professores do ensino médio. Pretende auxiliar os docentes ao aplicar funções que normalmente são estudadas ao longo do ensino médio, utilizando modelagem matemática de crescimento populacional.

Índice

1 Introdução

Este material destina-se aos professores de Matemática que lecionam no ensino médio, permitindo que trabalhem com modelagem matemática, explorando o uso de funções conhecidas pelos estudantes dos anos finais do ensino fundamental e o emprego de tecnologia, ao utilizar o software *Geogebra* na construção de planilhas e gráficos e na execução dos procedimentos que serão realizados ao longo das atividades.

O estudo de funções no ensino médio é comumente feito através de uma abordagem exclusivamente teórica, trabalhando-se tanto as características algébricas das fórmulas envolvidas quanto as representações gráficas de tais funções. Entretanto, tem-se aí a oportunidade de trabalhar com a modelagem de problemas do mundo real, que podem surgir nas mais diversas áreas, especialmente em Biologia, no que tange ao estudo do crescimento de uma população. Essa abordagem que concilia teoria e prática pode desenvolver nos alunos um maior interesse pela Matemática, ao torná-los parte ativa nos procedimentos que serão desenvolvidos.

Este produto visa levar os estudantes a entender como diferentes funções matemáticas podem aparecer em modelagens envolvendo problemas de crescimento populacional. Em particular, poderão perceber como as funções constantes, afim, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e racionais, presentes no currículo do ensino fundamental e médio, aparecem neste contexto de crescimento populacional.

A pretensão é que esse material possa ser utilizado em aulas interdisciplinares, por exemplo, envolvendo biologia e matemática, além de recursos computacionais. Sugerimos que o professor interessado em trabalhar esta atividade a realize dosadamente, em um conjunto de encontros em quantidade suficiente para que os alunos compreendam todos os procedimentos realizados. O processo de linearização dos modelos envolve a ideia de logaritmo; portanto, caso os alunos ainda não tenham aprendido este assunto, será necessário dedicar uma ou duas aulas para trabalhar este tópico. Além disso, no ajuste do modelo logístico, aparecem os seguintes conceitos: ponto fixo, sequências, subsequências e sequências monótonas. Esses assuntos devem ser trabalhados previamente com os alunos. É recomendável que as aulas sejam realizadas no laboratório de informática, e que os alunos trabalhem em duplas ou em grupos.

Os procedimentos aqui utilizados para realizar o ajuste dos modelos estão descritos no livro de (Bertone et al., 2014). Com a ajuda do software Geogebra, os alunos irão construir dois modelos matemáticos que se ajustem aos os dados de crescimento da população brasileira. Aproveito para sugerir aos colegas professores a leitura de meu trabalho de conclusão do Mestrado PROFMAT (da Silva, 2025), que pode ser acessada na página https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=Darlis+&titulo=&polo=.

Recomendo, ainda, a leitura dos livros (Elaydi, 2005) e (Kot, 2001).

2 Proposta Didática

Consideremos a tabela de dados a seguir:

Tabela 1: Crescimento da população brasileira no período 1940 - 2020

Década	População (em milhões de habitantes)
1940	41
1950	52
1960	71
1970	95
1980	121
1990	147
2000	170
2010	191
2020	203

Os dados representam os valores reais de crescimento da população brasileira ao longo das últimas 8 décadas e foram obtidos no site do (IBGE, 2024). Como podemos determinar o tamanho da população em 2050? E em 2100?

A fim de responder a estas perguntas, vamos propor o trabalho com dois modelos matemáticos de crescimento populacional, a saber: o modelo de crescimento exponencial e o modelo de Beverton-Holt.

Desenvolvemos, a seguir, um roteiro a ser seguido por você, professor, para a execução das explicações e atividades que serão realizadas pelos estudantes. O desenvolvimento desse roteiro consiste na apresentação das características fundamentais de cada modelo e instruções para o uso do software de matemática *Geogebra*, que pode ser acessado online.

Consideraremos, primeiramente, o modelo de crescimento exponencial, que é o modelo de crescimento populacional mais simples que conhecemos.

2.1 O modelo de crescimento exponencial

Chamaremos de $N(t)$ a quantidade de indivíduos da população (em milhões de habitantes) no instante t (t aqui será medido em décadas).

O exemplo mais simples de crescimento populacional considera que a quantidade de indivíduos no instante $t+1$ é proporcional à quantidade de indivíduos no instante t, isto é,

$$N(t+1) = R_0 N(t)$$

Quando $R_0 > 1$, temos crescimento, e quando $0 < R_0 < 1$, temos decrescimento da população.

A razão

$$\frac{N(t+1)}{N(t)}$$

é chamada de **taxa de crescimento per capita**, e determina quantos novos indivíduos são gerados na geração seguinte por cada indivíduo existente na geração atual.

Exemplo 1: Se $N(t) = 100$ e $N(t+1) = 300$, então

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{300}{100} = 3$$

isto é, cada indivíduo contribui para gerar 3 novos indivíduos.

Exemplo 2: Se $N(t) = 100$ e $N(t+1) = 120$, então

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{120}{100} = 1,2$$

isto é,

1 indivíduo $\longrightarrow$ 1,2 novos indivíduos
10 indivíduos $\longrightarrow$ 12 novos indivíduos

Nesse modelo simples, a taxa de crescimento per capita é sempre constante (nota-se que $\dfrac{N(t+1)}{N(t)} = R_0$), isto é, independe do tamanho da população. Portanto, o gráfico da taxa de crescimento per capita é dado por uma reta horizontal:

Figura 1: Taxa de crescimento per capita constante

Assim, se N_0 é a quantidade de indivíduos no início ($t = 0$), temos

$$\begin{aligned}
N(0) &= N_0 \\
N(1) &= R_0 \cdot N(0) = R_0 \cdot N_0 \\
N(2) &= R_0 \cdot N(1) = R_0 \cdot R_0 \cdot N_0 = R_0^2 \cdot N_0 \\
N(3) &= R_0 \cdot N(2) = R_0 \cdot R_0^2 \cdot N_0 = R_0^3 \cdot N_0 \\
&\vdots \\
N(t) &= R_0^t \cdot N_0
\end{aligned}$$

Pode-se sempre encontrar um número real k tal que $e^k = R_0$; portanto pode-se reescrever a equação da seguinte forma

$$N(t) = e^{kt} \cdot N_0 \ ,$$

a qual descreve o **modelo de crescimento exponencial**.

Para ajustar uma curva deste modelo aos dados da tabela 1, é preciso encontrar N_0 e k. Em relação a N_0, este é o primeiro valor da tabela 1, ou seja, N_0 corresponde ao valor da população na década de 40, isto é, 41 milhões de habitantes. Para determinar k, aplica-se a função inversa da função exponencial, a saber, a função logaritmo:

$$\begin{aligned} ln\ N(t) &= ln\ (e^{kt} \cdot N_0) \\ ln\ N(t) &= ln\ e^{kt} + ln\ N_0 \\ ln\ N(t) &= kt + ln\ N_0 \end{aligned}$$

Fazendo $y(t) = ln\ N(t)$, vem

$$y(t) = kt + y_0$$

Usando a substituição $y(t) = ln\ N(t)$, para cada t determina-se o valor de y correspondente, obtendo-se assim a tabela 2.

Os alunos devem perceber que o conjunto de pontos $(t, y(t))$ dados por $y(t) = kt + y_0$ é uma reta. Para a determinação dessa reta, eles utilizarão o Geogebra para executar uma **regressão linear**, que é o processo que encontra a melhor reta que se ajusta a esses pontos.

Solicite a eles que construam a tabela 2 no *Geogebra*, usando a ferramenta *Planilha*. Para isso, devem clicar nos 3 pontos ao lado de *configurações* e selecionar *Planilha*, digitando os valores de t em uma coluna e os de y na outra.

Tabela 2: Conjunto de pontos (t, y)

t	y
0	ln(41) = 3.71
1	ln(52) = 3,95
2	ln(71) = 4,26
3	ln(95) = 4,55
4	ln(121) = 4,8
5	ln(147) = 4,99
6	ln(170) = 5,14
7	ln(191) = 5,25
8	ln(203) = 5,31

Em seguida, devem selecionar a planilha e clicar em **criar lista de pontos**. O *Geogebra* cria os pontos da forma (t, y) e basta na entrada digitar *Regressão linear - Lista de Pontos (l1)*.

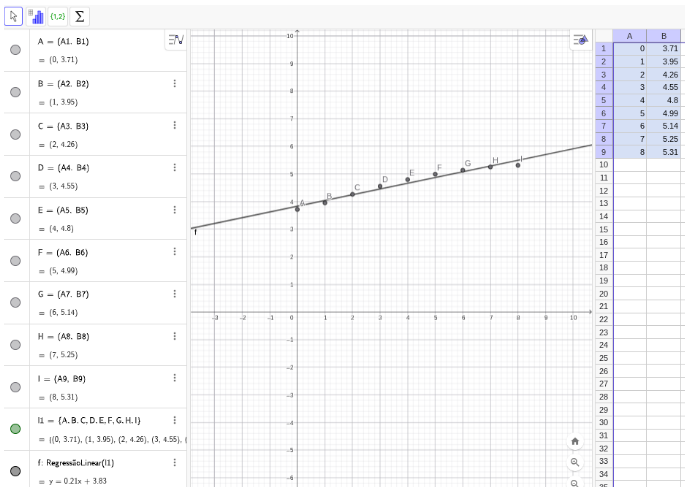


Figura 2: Ajuste linear dos pontos (t, y)

O *Geogebra* fornece a função

$$y = 0,21t + 3,83 \tag{1}$$

Como k é o coeficiente angular dessa reta, então $k = 0,21$. Logo,

$$N(t) = 41 \cdot e^{0,21t} \tag{2}$$

é a função que aproxima os dados da tabela 1.

Criando agora uma lista de pontos com os dados da tabela inicial e digitando no campo de entrada a função obtida para aproximar esses pontos, obtém-se o resultado a seguir:

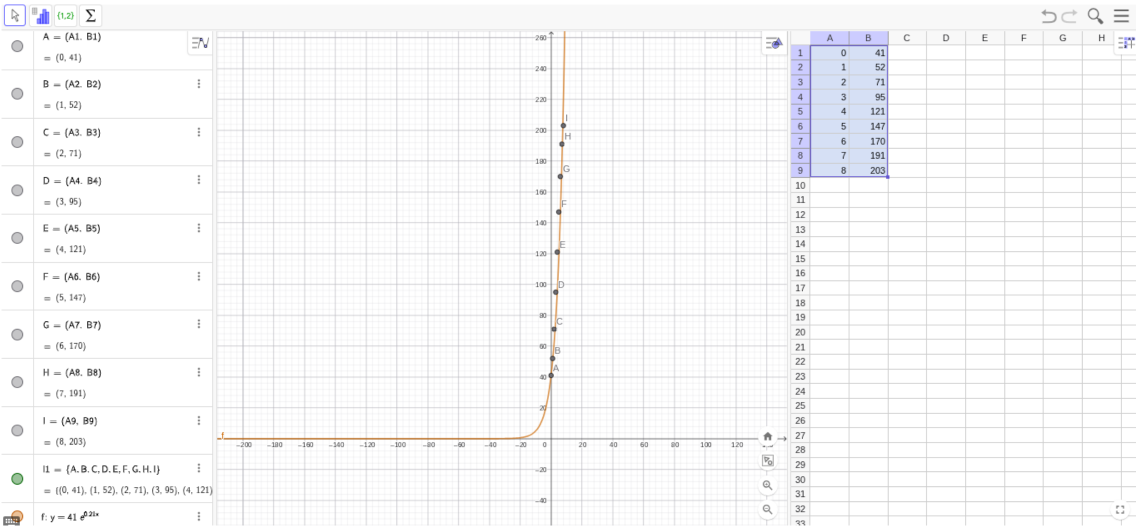


Figura 3: Modelo exponencial de ajuste dos dados da tabela 1

Segundo esse modelo, o número de indivíduos da população em 2050 ($t = 11$) será $N(11) = 41 \cdot e^{2,31} \approx 413$ milhões e em 2100 ($t = 16$) será $N(16) = 41 \cdot e^{3,36} \approx 1$ bilhão e 180 milhões.

Professor, após encerrar a discussão do modelo dado por (2), você deve comentar com seus alunos sobre a necessidade de adotar um modelo mais realista. O modelo exponencial não leva em consideração o tamanho da população com relação à limitação do espaço físico, da quantidade de alimentos e outras variáveis impostas pelo ambiente.

É razoável admitir que, devido a estes fatores, quanto maior o tamanho da população que esteja ocupando um ambiente, menor deveria ser a capacidade de gerar novos indivíduos. Assim, o próximo modelo a ser discutido com os alunos é tal que a taxa de crescimento per capita é afetada pelo tamanho da população. Ele é chamado **modelo de Beverton-Holt**.

2.2 O modelo de Beverton-Holt

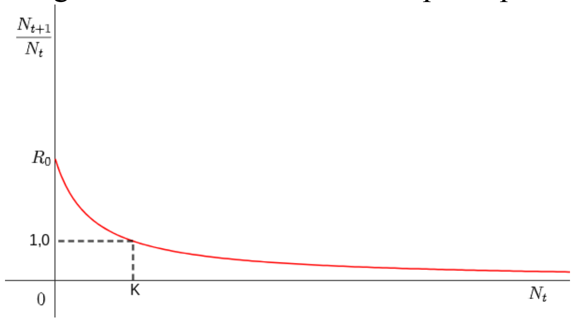
Nesse modelo, consideramos

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{R_0}{1 + \left[\dfrac{R_0 - 1}{K}\right] \cdot N(t)} \quad , R_0 > 1 \; .$$

Para $N(t)$ pequeno, $1 + \left[\dfrac{R_0 - 1}{K}\right] \cdot N(t)$ é próximo de 1, de modo que a taxa de crescimento per capita $\dfrac{N(t+1)}{N(t)}$ fica próxima de R_0. Isso significa que, quando o tamanho da população é pequeno, o modelo anterior se comporta bem.

À medida que o número de indivíduos aumenta, diminui a taxa de crescimento per capita da população. O gráfico da taxa de crescimento per capita para o modelo de Beverton-Holt é mostrada abaixo.

Figura 4: Taxa de crescimento per capita



Professor, propomos que você faça junto aos alunos a dedução da forma da equação que descreve $N(t)$ como função de t, como segue.

$$
\begin{aligned}
N(t+1) &= \frac{R_0 N(t)}{1+\dfrac{R_0-1}{K}\cdot N(t)} = \frac{R_0 N(t)}{\dfrac{K+R_0N(t)-N(t)}{K}} \\
&= \frac{KR_0N(t)}{K-N(t)+R_0N(t)} = \frac{KR_0N(t)}{R_0\left[N(t)+\dfrac{(K-N(t))}{R_0}\right]} \\
&= \frac{KN(t)}{N(t)+\dfrac{(K-N(t))}{R_0}} = \frac{KN(t)}{N(t)\left[1+\dfrac{(K-N(t)}{N(t)}\cdot\dfrac{1}{R_0}\right]} \\
&= \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-N(t)}{N(t)}\right)\cdot\dfrac{1}{R_0}}
\end{aligned}
$$

Então, temos:

$$N(0) = N_0$$

$$N(1) = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-N_0}{N_0}\right)\cdot\dfrac{1}{R_0}}$$

$$N(2) = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-N_1}{N_1}\right)\cdot\dfrac{1}{R_0}}$$

$$= \frac{K}{1+\left(\dfrac{K}{N_1}-1\right)\cdot\dfrac{1}{R_0}} = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K}{\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K-N_0}{N_0}\right)\cdot\dfrac{1}{R_0}}}-1\right)\cdot\dfrac{1}{R_0}}$$

que pode ser reescrito (o que fica a cargo dos alunos, sob sua orientação) como

$$N(2) = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-N_0}{N_0}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{R_0}\right)^2}\ .$$

Do mesmo modo, temos

$$N(3) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_0}\right)^3} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_0}\right)^t} \\
&= \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) \cdot R_0^{-t}} \\
&= \frac{K}{R_0^{-t}\left(\frac{1}{{R_0}^{-t}} + \frac{K - N_0}{N_0}\right)} \\
&= \frac{K \cdot R_0^t}{{R_0}^t + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right)} \\
&= \frac{K \cdot {R_0}^t}{\left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) \cdot K + {R_0}^t}.
\end{aligned}$$

Portanto, $N(t)$ tem a forma

$$N(t) = \frac{K \cdot a^t}{b \cdot K + a^t} = \frac{K}{1 + b \cdot K \cdot a^{-t}}.$$

Podemos ver, da expressão obtida, que $N(t)$ se aproxima de K quando t cresce ilimitadamente, o que pode ser descrito como: $N(t) \to K$ quando $t \to \infty$. Além disso, é claro que, se $N(t)$ se aproxima de K, então $N(t+1)$ se aproxima de K. A constante K é a **capacidade de suporte** do ambiente.

Como $N(t+1) = g(N(t)) = \dfrac{K}{1 + \left(\frac{K - N(t)}{N(t)}\right) \cdot \frac{1}{R_0}}$, se $N(t) = K$, temos que $g(K) = K$.

Portanto, temos que K é um **ponto fixo** da função que determina os pontos $(N(t),\ N(t+1))$. Um ponto fixo de uma função g é um valor x tal que $g(x) = x$, isto é, é um valor tal que o gráfico de $y = g(x)$ encontra o gráfico de $y = x$.

A função $g(N(t))$ pode ser escrita na forma $g(N(t)) = \dfrac{R_0 N(t)}{\left(\dfrac{R_0 - 1}{K}\right) N(t) + 1}$, e portanto é uma função do tipo $g(x) = \dfrac{cx}{1 + dx}$.

Assim, para a determinação do valor da capacidade de suporte K, primeiramente construímos uma tabela com os pontos $(N(t), N(t+1))$, e ajustamos uma função racional do tipo acima a estes pontos.

Tabela 3: Conjunto de pontos (N(t), N(t + 1))

N(t)	N(t + 1)
41	52
52	71
71	95
95	121
121	147
147	170
170	191
191	203
203	203

Para isso, criamos uma lista de pontos com os dados da tabela 3 e digitamos no campo de entrada a função $f(x) = \dfrac{cx}{1 + dx}$. O Geogebra fornece a função $\dfrac{1,57x}{1 + 0,0025x}$. Se necessário, ajustamos o número de casas decimais para 4, clicando na ferramenta *Configurações* e em seguida no campo *Arredondamento*. Em seguida, construímos na mesma tela o gráfico de f e a reta $y = x$. Usando a ferramenta *Interseção de dois objetos*, encontramos o valor de K (veja a figura 5).

Tomaremos como valor aproximado para K o número 223.

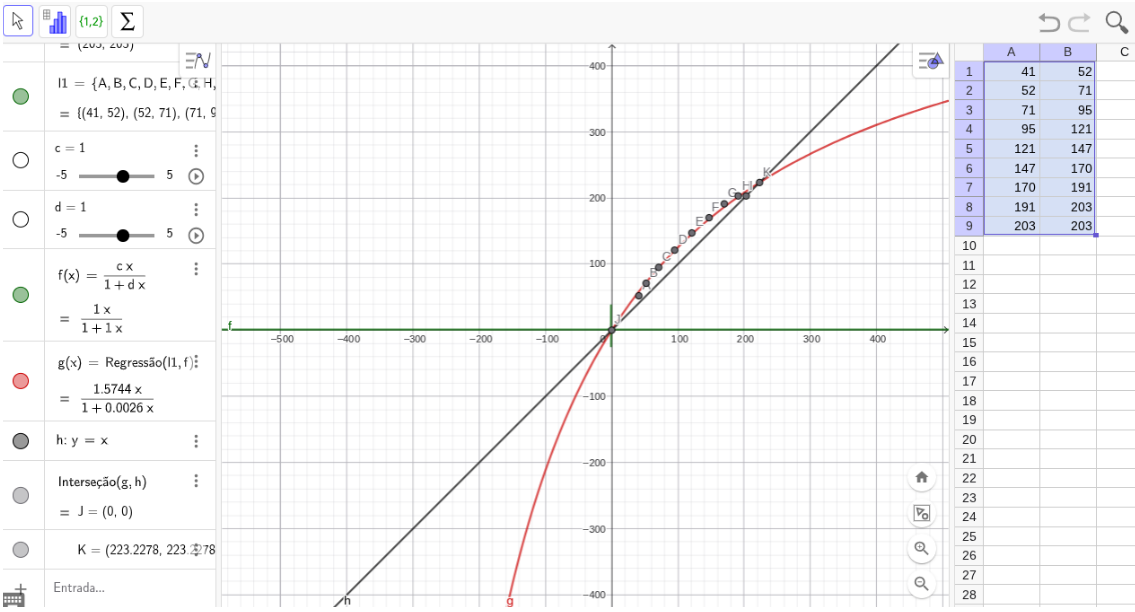


Figura 5: Regressão racional para os dados da tabela 3

Descoberto o valor de K, passamos agora ao processo de determinação dos valores das constantes a e b de nosso modelo. É importante que seus alunos tenham familiaridade com os logaritmos e suas propriedades operatórias.

$$N(t) = \frac{K \cdot a^t}{b \cdot K + a^t}$$

$$\begin{aligned}
N(t) \cdot (bK + a^t) &= K \cdot a^t \\
b \cdot K \cdot N(t) + a^t \cdot N(t) &= K \cdot a^t \\
K \cdot a^t - N(t) \cdot a^t &= b \cdot K \cdot N(t) \\
a^t \cdot (K - N(t)) &= b \cdot K \cdot N(t) \\
\frac{b}{a^t} &= \frac{K - N(t)}{K \cdot N(t)} \\
ln\ b - ln\ a^t &= ln \left[\frac{K - N(t)}{K \cdot N(t)} \right] \\
ln\ b - t \cdot ln\ a &= ln \left[\frac{K - N(t)}{K \cdot N(t)} \right]
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $Y = ln\left[\dfrac{K - N(t)}{K \cdot N(t)}\right]$, com o valor $K = 223$ já descoberto, temos que, para cada t, existe um $N(t)$ e, portanto, um Y correspondente. Os alunos devem agora construir a tabela de pontos (t, Y) e, posteriormente, realizar uma regressão linear que fornece um modelo de ajuste que será usado para calcular os valores de a e b (veja a figura 6).

Tabela 4: Conjunto de pontos (t, Y)

t	Y
0	-3,9167
1	-4,2168
2	-4,646
3	-5,109
4	-5,578
5	-6,0669
6	-6,5727
7	-7,1937
8	-7,7246

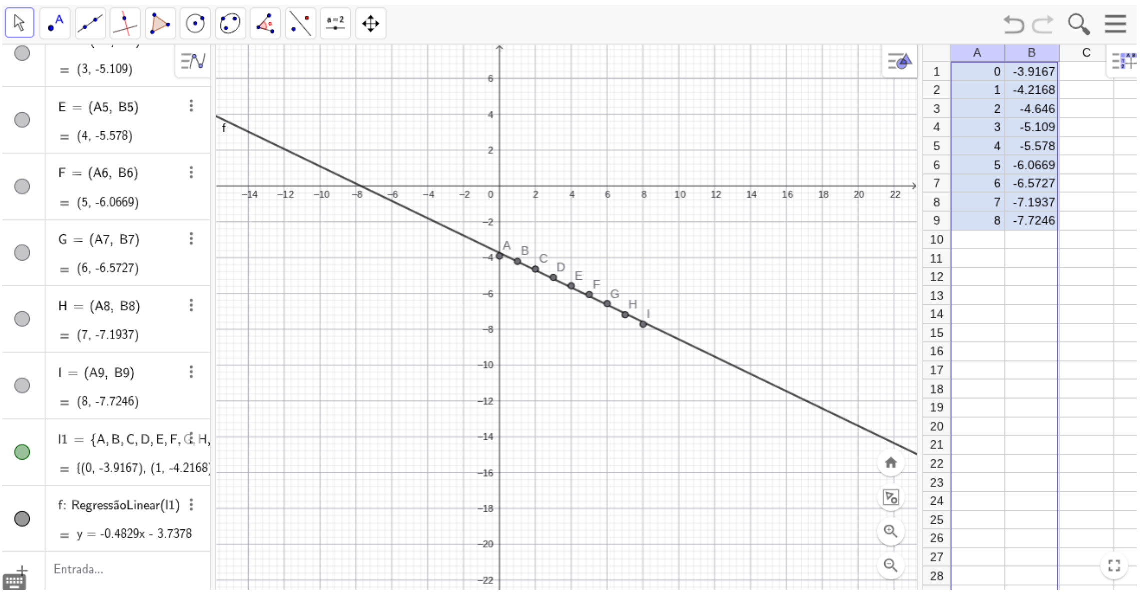


Figura 6: Regressão linear para os dados da tabela 4

O Geogebra fornece a função $y = -0,4829x - 3,7378$. Assim, temos que:

$ln\ a = 0,4829 \iff a = 1,6207$, $ln\ b = -3,7378 \iff 0,0238$ e $b \cdot K = 0,0238 \cdot 223 = 5,30$. Portanto, nosso modelo é dado por

$$N(t) = \frac{K \cdot a^t}{b \cdot K + a^t} = \frac{223 \cdot (1,62)^t}{5,30 + (1,62)^t}$$

Por fim, solicite aos alunos que esbocem os pontos $(t, N(t))$ da tabela 1, juntamente com o modelo de ajuste (lembre-se que fizemos t ser o número de décadas decorridas desde 1940; $N(t)$ é a população correspondente, em milhões de habitantes). O resultado é mostrado na figura abaixo.

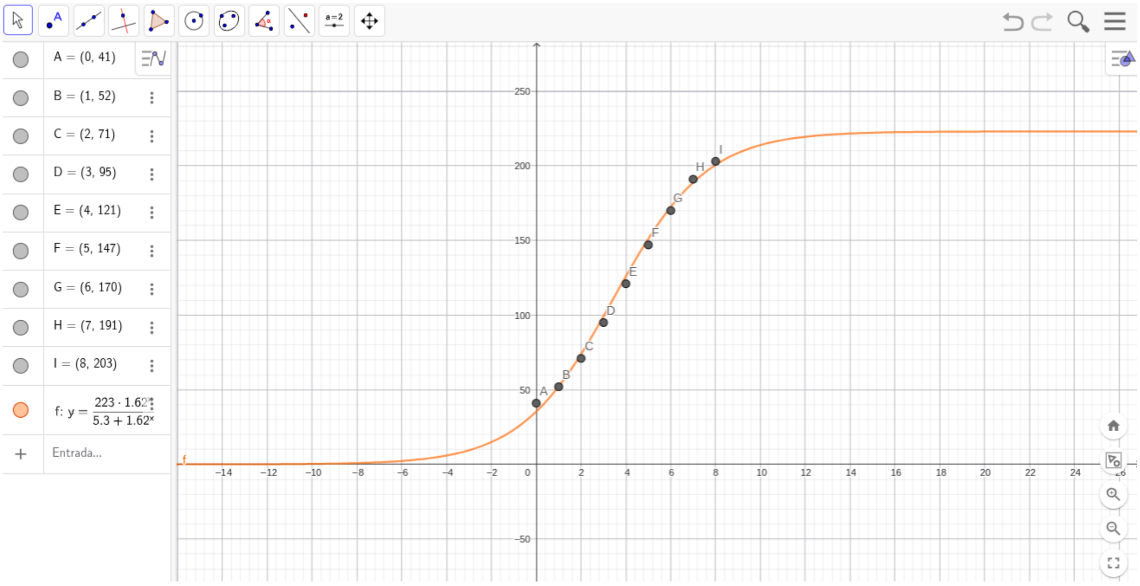


Figura 7: O modelo de ajuste juntamente com os pontos $(t, N(t))$.

Assim como fizemos com o modelo exponencial, vamos utilizar o modelo de Beverton-Holt para prever o tamanho da população em 2050 $(t = 11)$ e em 2100 $(t = 16)$. Temos:

$$N(11) = \frac{223 \cdot (1,62)^{11}}{5,30 + (1,62)^{11}} \approx 217 \text{ milhões de habitantes,}$$

$$N(16) = \frac{223 \cdot (1,62)^{16}}{5,30 + (1,62)^{16}} \approx 222 \text{ milhões de habitantes,}$$

o que nos conduz a valores bem mais realistas.

Referências

Bertone, A. M. A., Bassanezi, R. C., & da Motta Jafelice, R. S. (2014). *Modelagem Matemática*. Universidade Federal de Uberlândia.

da Silva, D. A. (2025). *Estudo de funções via modelos de crescimento populacional* [tese de mestrado, Universidade de São Paulo].

Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equation*. Springer.

IBGE. (2024). Panorama do Censo 2022. https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/

Kot, M. (2001). *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press.