UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PRODUTO EDUCACIONAL

O sistema massa-mola como mediador do ensino das funções trigonométricas

ARTHUR KARNOPP BRÜSKE

JOINVILLE, SC
2026

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Título: O sistema massa-mola como mediador do ensino das funções trigonométricas
Autor: Arthur Karnopp Brüske
Orientadora: Viviane Maria Beuter
Data: 24/03/2026

Produto Educacional: Atividades didáticas por meio da experimentação.
Nível de ensino: Ensino Médio.
Área de Conhecimento: Matemática.
Tema: Álgebra e Geometria.

Resumo:
O presente produto educacional tem como base a construção de um instrumento físico que explora o sistema massa-mola por meio das funções trigonométricas. Este documento apresenta, inicialmente, a conceituação do sistema massa-mola, estabelecendo as relações matemáticas e físicas que fundamentam o seu funcionamento e que serão trabalhadas ao longo do material. Em seguida, são expostos os procedimentos necessários para a construção do instrumento, detalhando as etapas de montagem e as orientações associadas. Além disso, o produto disponibiliza vídeos que permitem ao professor verificar visualmente o movimento oscilatório produzido pelo instrumento, favorecendo a compreensão do comportamento dinâmico do sistema. Ao final, é apresentada uma lista de atividades elaboradas para serem aplicadas com os estudantes, com o objetivo de explorar os conceitos envolvidos de forma prática e significativa.

Palavras-chave: Funções trigonométricas. Sistema massa-mola. Experimentação.

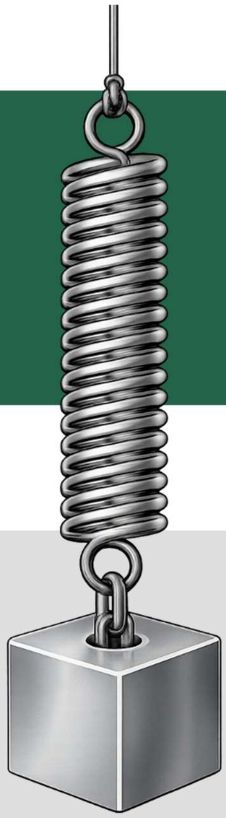
Biblioteca Universitária UDESC: https://repositorio.udesc.br/home

Publicação Associada: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: Da Conceituação Matemática à Experimentação.

URL: http://www.udesc.br/cct/profmat

Arquivo	*Descrição	Formato
1015KB	**Texto completo**	**Adobe PDF**

O sistema massa-mola como mediador do ensino das funções trigonométricas



Capa: Elaborada pelos autores com auxílio do ChatGPT.

Arthur K. Brüske

Viviane M. Beuter

Sumário

Apresentação

Prezado professor, apresento-lhe um produto educacional desenvolvido com o propósito de contribuir para o ensino das funções trigonométricas por meio da utilização do sistema massa-mola como ferramenta didática. A intenção de propor a utilização deste instrumento está relacionada ao vínculo que é possível estabelecer entre a representação trigonométrica com o fenômeno físico. Essa abordagem comparativa possibilita um estudo mais contextualizado das funções, de maneira que o estudante pode obter dados do experimento a fim de modelar valores para a periodicidade, amplitude e fase; conceitos essenciais para funções como seno e cosseno. Essa representação dos conteúdos matemáticos juntamente com o fenômeno físico pode vir a favorecer o processo de aprendizagem de maneira mais significativa. Diante do exposto, é notório que o sistema massa-mola favorece a interdisciplinaridade, possibilitando relações da matemática com a física. Este modelo favorece a não fragmentação tradicional dos conteúdos escolares, oportunizando um estudo mais contextualizado e aplicado, relacionando os conhecimentos científicos e tecnológicos pertencentes ao cotidiano.

A proposta fundamenta-se na compreensão de que muitos estudantes encontram dificuldades em atribuir sentido concreto às funções seno e cosseno quando estas são introduzidas exclusivamente sob uma perspectiva algébrica ou geométrica tradicional. Ao explorar o movimento oscilatório do sistema massa-mola, é possível evidenciar os principais conceitos que tangem as funções trigonométricas, como já citados anteriormente. Assim, o aluno deixa de enxergar gráficos e fórmulas apenas como abstrações e passa a relacioná-los como um fenômeno real.

Esta proposta foi concebida para a aplicação em turmas do ensino médio, mais especificamente no 2º ano, etapa em que as funções trigonométricas costumam integrar o currículo de Matemática. Sua utilização é indicada para um momento posterior ao trabalho inicial do professor com esses conteúdos em sala de aula, operando como um recurso complementar que permite aos estudantes consolidar o aprendizado dos conceitos já introduzidos. Nesse sentido, o instrumento não se propõe a substituir a abordagem didática do professor, mas sim a enriquecê-la.

Vale destacar ainda que esta proposta não possui a intenção de descartar as metodologias tradicionais já consolidadas no ensino da matemática. Na realidade, pode ser vista como um complemento pedagógico para as aulas do docente. O experimento vai de encontro com o que já é estudado em sala de aula, sua aplicação é apenas uma forma de concretizar o conteúdo lecionado.

Atenção

Professor, aqui está outro ponto chave para o alcance de uma maior efetividade com o produto: **recomenda-se a construção do instrumento conforme os procedimentos apresentados na seção a seguir, já que a experiência direta com o instrumento potencializa o envolvimento dos alunos e amplia as possibilidades de exploração didática. Porém, compreendendo as diferentes realidades escolares e estruturais, também serão disponibilizados links de vídeos hospedados na plataforma Vimeo, nos quais o instrumento é apresentado em funcionamento. Dessa forma, mesmo não sendo possível a construção física do sistema, o docente poderá utilizar os registros visuais como recurso complementar.**

Espera-se que este material possa contribuir com sua prática docente, oferecendo uma alternativa metodológica para o ensino das funções trigonométricas.

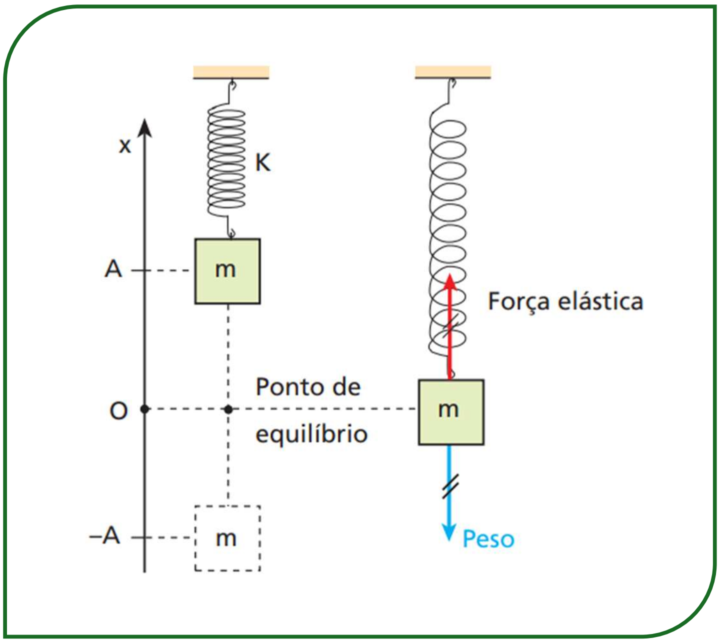
Arthur K. Brüske e Viviane M. Beuter
24 de março de 2026

1

O sistema massa-mola

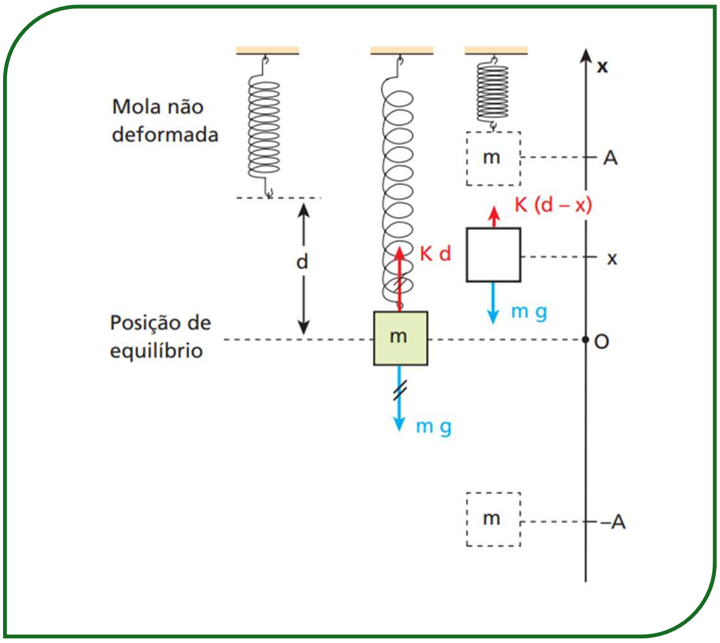
O sistema massa-mola

Inicialmente, será apresentado uma breve discussão sobre o sistema massa-mola expondo o motivo pelo qual ele é considerado um Movimento Harmônico Simples (MHS). Com este intuito, será utilizado a obra de Helou *et al.* (2016) como suporte. Observe a figura a seguir com o bloco de massa m e constante elástica K.



Nesse oscilador, a força resultante que atua sobre o bloco não é apenas a força elástica da mola, mas sim a resultante vetorial entre a força elástica e o peso do bloco. Dessa forma, no ponto de equilíbrio, $x = 0$, a força elástica não é nula. Isso significa que a mola se encontra deformada na posição de equilíbrio (como esperado), diferentemente do que ocorre caso o oscilador estivesse na posição horizontal. Consequentemente, no oscilador vertical o valor da deformação x não corresponde diretamente à deformação da mola. Ainda que consideradas estas diferenças, o movimento realizado pelo bloco continua sendo um movimento harmônico simples, como será demonstrado a seguir:

Na posição de equilíbrio da figura abaixo temos que $Kd = mg$.



Dada uma posição qualquer com deformação x, o valor da força resultante F é dada por:

$$F = K\,(d - x) - mg$$
$$\Rightarrow F = Kd - Kx - mg.$$

Como $Kd = mg$, logo:

$$F = mg - Kx - mg$$
$$\Rightarrow F = -Kx.$$

Portanto, concluímos que o valor algébrico da força resultante no bloco é proporcional à deformação e tem sinal oposto ao dela. Este aspecto implica que o movimento é harmônico simples.

Aplicando a segunda lei de Newton para analisar esse sistema, obtemos a seguinte relação:

$$mx''(t) = \ -kx(t),$$

em que m representa a massa do corpo e k a constante elástica da mola.

Definindo a frequência angular ω por

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

podemos reescrever a equação anterior na forma

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Essa é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, pois envolve derivadas da função $x(t)$ em relação ao tempo t, sendo a derivada de maior ordem a segunda.

A solução geral dessa equação é dada por

$$\boxed{x(t) = acos(\ t) + bsen(\omega t),}$$

em que a e b são constantes que dependem das condições iniciais do movimento.

Também é possível escrever essa solução em termos da amplitude A e da fase inicial φ. Para isso, definimos

$$a = Acos(\varphi), \quad b = Asen(\varphi),$$

onde A e φ são constantes. Substituindo essas expressões em $x(t)$, obtemos

$$x(t) = Asen(\varphi)cos(\omega t) + Acos(\varphi)sen(\omega t).$$

Utilizando a identidade trigonométrica do seno da soma

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta),$$

segue que

$$x(t) = Asen(\varphi + \omega t).$$

Portanto, a posição do corpo ao longo do tempo pode ser descrita por uma função trigonométrica,

$$\boxed{x(t) = Asen(\varphi + \omega t).}$$

em que:

- a **amplitude** é A, que representa o deslocamento máximo da massa em relação à posição de equilíbrio;
- o **período** é $T = \frac{2\pi}{\omega}$, que corresponde ao tempo necessário para que o movimento se repita;
- a **frequência angular** é $\omega = \frac{2\pi}{T}$;
- a **fase inicial** (quando $t = 0$) é φ, que determina a posição inicial da massa no início da observação.

Considerando t_0 o instante em que a mola se encontra no seu deslocamento máximo e t_1 o instante associado ao primeiro deslocamento mínimo observado no sistema, o período do movimento pode ser determinado por

$$T = 2(t_1 - t_0),$$

pois o intervalo entre um máximo e o mínimo seguinte corresponde a metade do período da oscilação.

A amplitude do movimento pode ser obtida a partir dos valores máximos e mínimos da posição observados na régua, denotados por x_{max} e x_{min}. Assim,

$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}.$$

Conhecido o período, podemos determinar a frequência angular do movimento por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Por fim, para determinar a fase inicial φ, utilizamos a equação que descreve o movimento $x(t) = Asen(\omega t + \varphi)$. Substituindo $t = 0$, obtemos

$$x(0) = Asen(\varphi).$$

Para a nossa aplicação, consideraremos $x(0) = A$, uma vez que assumiremos o início do movimento exatamente no ponto de deslocamento máximo da oscilação. Nessa situação, segue que $sen(\varphi) = 1$, o que implica $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Tomando com $\varphi = \frac{\pi}{2}$ em $x(t) = Asen(\omega t + \varphi)$ obtemos:

$$\boxed{x(t) = Acos(\omega t).}$$

2

A Construção do Produto

Nesta seção são apresentados os materiais e os procedimentos necessários para a construção do instrumento mostrado na figura abaixo.

Materiais

Os utensílios necessários para a elaboração do sistema são:

- Superfície plana para a montagem.
- Cano de PVC com comprimento de 80 cm (32 mm de diâmetro).
- Cano de PVC com comprimento de 30 cm (32 mm de diâmetro).
- Cano de PVC em formato de "joelho" 90° (32 mm de diâmetro).
- Tampão de PVC (32 mm de diâmetro).
- Mola helicoidal (mola de caderno) com 30 cm de comprimento em compreensão (30 mm de diâmetro externo).
- Régua de madeira com 100 cm de comprimento.
- Grampo sargento de ferro.
- Cinco unidades de abraçadeiras de nylon.
- Massa A: Cadeado de 41 gramas.
- Massa B: Chumbo de arremesso de 12 gramas.
- Massa C: Chumbo de arremesso de 33 gramas.
- Massa D: Chumbo de arremesso de 38 gramas.

Mão na massa

Com estes materiais foi possível construir o artefato a partir desta sequência:

1º Fixe o grampo sargento de ferro na superfície plana.

2º Fixe o cano de PVC de 80 cm no grampo sargento de ferro.

3º Encaixe o cano de PVC em formato de “joelho” no cano de PVC de 80 cm.

4º Encaixe o cano de PVC de 30 cm no cano de PVC em formato de “joelho”.

5º Coloque o tampão de PVC no cano de PVC de 30 cm.

6º Utilize duas abraçadeiras de nylon para pendurar a régua de madeira no cano de PVC de 30 cm. Vale observar que nesta etapa é preciso fazer dois furos na extremidade da régua para possibilitar a passagem das abraçadeiras.

7º Utilize uma abraçadeira de nylon para pendurar a mola helicoidal no cano de PVC de 30 cm (próximo a régua).

8º Utilize as duas abraçadeiras de nylon restantes para criar a argola que fixa as diferentes massas do sistema.

9º Coloque uma das massas disponíveis na argola criada na etapa anterior.

3

O uso do instrumento no vídeo

Conforme exposto anteriormente, neste produto também são disponibilizados vídeos que ilustram o uso do instrumento. Para cada uma das massas utilizadas, apresenta-se a seguir um vídeo correspondente à sua aplicação.

- Massa A: https://vimeo.com/1164099837?share=copy&fl=sv&fe=ci
- Massa B: https://vimeo.com/1164103356?share=copy
- Massa C: https://vimeo.com/1164103383?share=copy&fl=sv&fe=ci
- Massa D: https://vimeo.com/1164103411?share=copy&fl=sv&fe=ci

4

As atividades sugeridas

Nesta seção há uma lista de atividades divididas em etapas. Evidentemente, o docente possui liberdade criativa para alterar essa lista conforme necessidade da turma as respostas apresentadas pelos estudantes.

Na seção seguinte, intitulada “Dos cálculos envolvidos”, apresentaremos os cálculos necessários para responder a algumas das questões propostas, tanto no que diz respeito à coleta de dados quanto à realização dos cálculos.

Nos anexos são apresentadas também sugestões de respostas para as atividades propostas, com o objetivo de oferecer maior segurança ao docente na condução da atividade. Ressalta-se, que algumas questões possuem caráter mais aberto e interpretativo, podendo admitir diferentes abordagens ou formas de argumentação por parte dos estudantes. No caso das questões que envolvem cálculos, as respostas foram elaboradas com base nos dados obtidos no experimento apresentado no vídeo referente à massa A.

A avaliação

Ao utilizar este produto educacional e o modelo de atividades proposto, o docente possui liberdade para avaliar os resultados obtidos de maneira que considerar mais adequada. Cabe ao docente decidir como interpretar e utilizar essas informações no processo avaliativo.

Recomenda-se, no entanto, que o conteúdo de funções trigonométricas já tenha sido previamente trabalhado em sala de aula antes da aplicação das atividades. Além disso, é de grande valia realizar uma avaliação diagnóstica inicial, elaborada pelo próprio professor, com o objetivo de identificar o nível de compreensão dos estudantes acerca do tema. Este processo tende a contribuir com o docente no sentido de comparar os conhecimentos apresentados pelos alunos antes e depois da aplicação do produto como um todo. Consequentemente, observando eventuais avanços na compreensão dos conceitos.

Ainda sobre o modelo de avaliação, é relevante mencionar que o principal objetivo das atividades não é a atribuição de uma nota quantificativa, mas sim favorecer que os estudantes consigam interpretar as funções trigonométricas em situações práticas. Ou seja, o objetivo principal não é medir o desempenho por meio de valores numéricos, mas buscar uma compreensão conceitual contextualizada.

Materiais necessários: Lápis; Borracha; Régua milimetrada; Caderno; Calculadora; Cronômetro.

Etapa 1: Identificação

Procedimentos:

1. Pendure a massa na mola e aguarde até ela atingir o equilíbrio

2. Puxe a massa para baixo e solte.

3. Observe o movimento.

Questões:

a) Após soltar a mola, descreva seu movimento.

b) O movimento da massa ocorre sempre no mesmo intervalo de posições? Justifique sua resposta.

c) Esse modelo de movimento pode ser considerado periódico? Explique.

Etapa 2: Coleta

Procedimentos:

1. Puxe a massa para baixo e marque a medição associada na régua.

2. Solte a massa, neste mesmo instante inicie a cronometragem no cronômetro.

3. No instante em que a mola estiver mais comprimida possível, pause o cronômetro e anote o tempo obtido. Também marque a medição na régua neste momento.

Questões:

a) Calcule o período deste movimento inicial da mola.

____

____

b) Calcule a amplitude do movimento.

____

____

c) Determine o ponto de equilíbrio da mola, a partir da amplitude obtida.

____

____

Etapa 3: Cálculo de constantes

Questões:

a) Encontre o valor da frequência angular ω. Utilize $\pi=3,14$.

b) Determine o valor da fase inicial φ.

Etapa 4: Determinando a função trigonométrica

Questões:

a) Escreva a expressão $x(t)$ substituindo os valores encontrados.

b) Simplifique a expressão x(t) o máximo possível.

Etapa 5: Investigação da precisão da expressão $x(t)$

Procedimentos:

1. Puxe a massa para baixo de maneira que tenha a mesma amplitude vista anteriormente. Inicie a cronometragem.

2. Solte a massa e pause o cronômetro antes da mola estar totalmente comprimida. Anote a medição na régua e o tempo obtido t_1.

3. Repita os passos 1 e 2 desta etapa, porém desta vez pause o cronômetro após a mola ser totalmente comprimida uma vez. Também anote a medição e o tempo t_2.

Questões:

a) Calcule $x(t_1)$. Compare-o com o resultado obtido com a medição encontrada no procedimento 2.

____

____

b) Calcule $x(t_2)$. Compare-o com o resultado obtido com a medição encontrada no procedimento 3.

____

____

c) Conforme se aumenta o valor do tempo t, o resultado da expressão $x(t)$ torna-se mais ou menos preciso? Justifique.

____

____

Etapa 6: Construção do gráfico

Procedimentos:

1. Analise a resposta do item “a” da etapa 5. Se a margem de erro entre os valores obtidos for inferior a 5%, responda à questão a seguir. Caso contrário, repita todas as etapas desde a etapa 2.

Questão:

a) Construa o gráfico da função $x(t)$.

Etapa 7: Reflexões

Questões:

a) A função $x(t)$ encontrada foi uma combinação da função seno e cosseno? Ou apenas uma delas?

b) Por que a função cosseno é adequada para representar este sistema?

c) Se o objetivo da atividade fosse descrever todo o movimento da mola durante a oscilação, haveria mudança na amplitude?

d) O que acontece com o período quando se utiliza uma massa maior na mola?

e) Cite algum exemplo do cotidiano que pode ser modelado como este experimento.

5

Dos cálculos envolvidos

No decorrer das etapas expostas na seção anterior, é possível observar que, em determinados momentos, é necessário realizar cálculos para responder os questionamentos. Para auxiliar o docente nessas questões, apresenta-se a seguir a linha de raciocínio necessária para efetuar tanto a coleta quanto os cálculos envolvidos.

A coleta de dados

As informações apresentadas neste tópico estão associadas com o primeiro vídeo disponibilizado na plataforma Vimeo, no qual é utilizado a massa A na execução do sistema. Link para o vídeo: https://vimeo.com/1164099837?share=copy&fl=sv&fe=ci

Analisando a barra de reprodução do vídeo podemos extrair o $t_0 = 3{,}4s$, em que a mola está mais deslocada representando o seu valor máximo, e também o $t_1 = 4{,}0s$, que se associa com o valor mínimo inicial do sistema. Será utilizado este recorte

$$t_1 - t_0 = 4{,}0s - 3{,}4s = 0{,}6s,$$

para determinar não apenas o período do sistema, mas também todos as outras informações aqui descritas. O motivo desta escolha está vinculado ao fato de que a intensidade das oscilações diminui com o passar do tempo em virtude da aceleração negativa existente. Sendo assim, para fazer com que não exista mudança de amplitude aparente será necessário utilizar o trecho do vídeo em que o sistema possuí velocidade máxima, ou muito próxima.

Então, temos o período da função:

$$T = 2(t_1 - t_0) = 1{,}2s.$$

A amplitude pode ser determinada visualizando os valores marcados na régua para os tempos t_0 e t_1. Obtendo assim, $x_{max} = 82{,}5\ cm$ e $x_{min} = 75{,}5\ cm$. Do ponto de vista matemático, podemos escrever $x_{max} = 3{,}5\ cm$, assim como $x_{min} = -3{,}5\ cm$, pois a posição de equilíbrio da massa é $79cm$. Desta maneira, a amplitude:

$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = 3{,}5\ cm.$$

Os cálculos que sucedem a coleta

Podemos escrever o movimento periódico do sistema por meio da equação:

$$x(t) = acos(\omega t) + bsen(\omega t)$$

Sabendo o valor do período T, torna-se possível encontrar a frequência angular ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \cong 5{,}24 \frac{rad}{s}.$$

Além disso, vale observar que a e b são constantes, as quais podem ser encontradas pelas expressões $a = Asen(\varphi)$ e $b = Acos(\varphi)$, nas quais φ também é constante. Aplicando a substituição em $x(t)$:

$$x(t) = Asen(\varphi)cos(\omega t) + Acos(\varphi)sen(\omega t).$$

Considerando que já foi determinado os valores da amplitude $A = 3{,}5\ cm$ e da frequência angular $\omega \cong 5{,}24\ rad/s$, basta encontrar o valor de φ aplicando o tempo $t = 0$, na equação:

$$x(0) = 3{,}5sen(\varphi)cos(0) + 3{,}5cos(\varphi)sen(0).$$

Note que $sen(0) = 0$, $cos(0) = 1$ e $x(0) = 3{,}5\ cm$. Portanto,

$$3{,}5 = x(0) = 3{,}5sen(\varphi)$$

$$\Rightarrow\ sen(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Encontradas todas as constantes, podemos escrever a equação $x(t)$.

$$x(t) = 3{,}5sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos(5{,}24t) + 3{,}5cos\left(\frac{\pi}{2}\right)sen(5{,}24t).$$

Ainda é necessário observar que $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, simplificando a expressão de modo que a função trigonométrica que representa este movimento é:

$$x(t) = 3{,}5cos(5{,}24t).$$

Das discussões posteriores

Após descoberta a expressão $x(t)$, é plausível discutir com os alunos sobre a sua funcionalidade. Com base no intervalo de 0,6 segundos estabelecido na coleta de dados, torna-se conveniente verificar quão precisa é a equação, efetuando os devidos cálculos para valores de t tanto menores, quanto maiores que o intervalo utilizado. O intuito desta ação é verificar a margem de erro de cada um dos casos. Para fazer isso, iremos comparar dois valores distintos:

Para $t = 0{,}5s$ (este valor está associado ao segundo 3,9 do vídeo),

$$x(0{,}5) = 3{,}5cos(2{,}62) = -3{,}03\ cm.$$

Neste mesmo instante, a medição apresentada na régua é de 75,9 cm, o que equivale a $x(0{,}5) = -3{,}1\ cm$, $(3{,}1 = 79 - 75{,}9)$. Notoriamente, esta aproximação é muito coerente e a margem de erro está atrelada tanto a aproximação da frequência angular, como na dificuldade de medir os milímetros da régua com maior precisão.

Agora vamos analisar para $t = 1s$ (este valor corresponde ao segundo 4,4 do vídeo),

$$x(1) = 3{,}5cos(5{,}24) = 1{,}76\ cm.$$

A partir deste momento, já podemos ver uma diferença mais significativa entre o resultado da equação com a medição apresentada no vídeo, pois neste momento marca-se 80,9 cm na régua, o que seria equivalente à: $x(1) = 1{,}9\ cm$. Esta margem de erro próxima aos 8% é fruto especialmente da perda de velocidade do sistema.

Vale realçar ainda que o professor pode utilizar o instrumento visando uma interdisciplinaridade mais profunda com a área da física explorando pontos como: constante elástica da mola e aceleração do sistema, por meio das seguintes expressões:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad a = -\omega^2 x.$$

Considerações finais

Para finalizar, o uso do instrumento físico desenvolvido para a representação do sistema massa-mola é um recurso pedagógico potencialmente relevante para o processo de aprendizagem, na medida que permite os alunos investigaram de maneira mais concreta os elementos ali presentes, como as constantes presentes na equação e compreender seus significados. A socialização que o artefato oportuniza tende a criar discussões entre os estudantes que favoreçam o aprendizado na prática. Além disso, o instrumento apresenta um potencial interdisciplinar, em especial com o campo da física, sendo possível abordar conceitos como constante elástica e aceleração. Entretanto, este aspecto não foi completamente explorado indicando que ainda é possível aprimorar a lista de atividades apresentada no documento.

É importante ressaltar, contudo, que este produto educacional não foi aplicado em sala de aula ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, em razão do prazo inerente à produção da dissertação do mestrado. Dessa forma, as propostas e orientações aqui apresentadas constituem uma projeção fundamentada teoricamente, permanecendo abertas a ajustes decorrentes da prática docente.

Cabe lembrar ainda que o professor possui liberdade para adaptar este produto suas necessidades pedagógicas e o contexto em que atua. As atividades e abordagens são sugestões apresentadas e devem ser entendidas como um conjunto de possibilidades que estimulam a modificação conforme o perfil dos estudantes e recursos disponíveis. Resumindo: espera-se que o docente utilize a sua criatividade para aprimorar a proposta ainda mais.

Referências

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2002. v.2.

HELOU, R. D.; GUALTER, J. B.; NEWTON, V. B. **Tópicos de Física. v. 2: Termologia, Ondulatória e Óptica**. São Paulo: Saraiva, 2016.

Anexos

Etapa 1: Identificação

Procedimentos:

1. Pendure a massa na mola e aguarde até ela atingir o equilíbrio

2. Puxe a massa para baixo e solte.

3. Observe o movimento.

Questões:

a) Após soltar a mola, descreva seu movimento.

A mola oscila de baixo para cima até que encontre o seu ponto de equilíbrio.

b) O movimento da massa ocorre sempre no mesmo intervalo de posições? Justifique sua resposta.

Os intervalos variam conforme a amplitude inicial do sistema diminui, porém mesmo com essa queda, os novos intervalos ainda estão dentro do intervalo de posições descrito pela primeira oscilação da mola.

c) Esse modelo de movimento pode ser considerado periódico? Explique.

Sim, já que o movimento tende a se repetir dentre de intervalos de tempos iguais.

Etapa 2: Coleta

Procedimentos:

1. Puxe a massa para baixo e marque a medição associada na régua.

2. Solte a massa, neste mesmo instante inicie a cronometragem no cronômetro.

3. No instante em que a mola estiver mais comprimida possível, pause o cronômetro e anote o tempo obtido. Também marque a medição na régua neste momento.

Questões:

a) Calcule o período deste movimento inicial da mola.

$$T = 2(t_1 - t_0) = 1{,}2s$$

b) Calcule a amplitude do movimento.

$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = 3{,}5\ cm$$

c) Determine o ponto de equilíbrio da mola, a partir da amplitude obtida.

$$x_{max} - A = 79\ cm$$

Etapa 3: Cálculo de constantes

Questões:

a) Encontre o valor da frequência angular ω. Utilize π=3,14.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \cong 5{,}24\ rad/s$$

b) Determine o valor da fase inicial φ.

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Etapa 4: Determinando a função trigonométrica

Questões:

a) Escreva a expressão $x(t)$ substituindo os valores encontrados.

$$x(t) = 3{,}5sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos(5{,}24t) + 3{,}5cos\left(\frac{\pi}{2}\right)sen(5{,}24t)$$

b) Simplifique a expressão x(t) o máximo possível.

$$x(t) = 3{,}5cos(5{,}24t)$$

Etapa 5: Investigação da precisão da expressão $x(t)$

Procedimentos:

1. Puxe a massa para baixo de maneira que tenha a mesma amplitude vista anteriormente. Inicie a cronometragem.

2. Solte a massa e pause o cronômetro antes da mola estar totalmente comprimida. Anote a medição na régua e o tempo obtido t_1.

3. Repita os passos 1 e 2 desta etapa, porém desta vez pause o cronômetro após a mola ser totalmente comprimida uma vez. Também anote a medição e o tempo t_2.

Questões:

a) Calcule $x(t_1)$. Compare-o com o resultado obtido com a medição encontrada no procedimento 2.

Presente no tópico "Das discussões posteriores".

b) Calcule $x(t_2)$. Compare-o com o resultado obtido com a medição encontrada no procedimento 3.

Presente no tópico "Das discussões posteriores".

c) Conforme se aumenta o valor do tempo t, o resultado da expressão $x(t)$ torna-se mais ou menos preciso? Justifique.

Menos preciso, pois a velocidade do sistema diminui, o que provoca perda da amplitude.

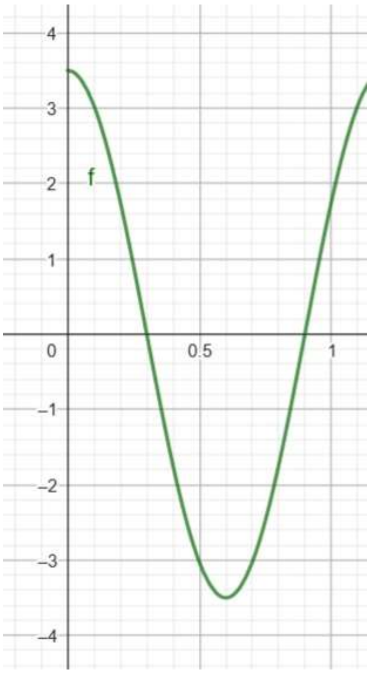
Etapa 6: Construção do gráfico

Procedimentos:

1. Analise a resposta do item “a” da etapa 5. Se a margem de erro entre os valores obtidos for inferior a 5%, responda à questão a seguir. Caso contrário, repita todas as etapas desde a etapa 2.

Questão:

a) Construa o gráfico da função $x(t)$.



Etapa 7: Reflexões

Questões:

a) A função $x(t)$ encontrada foi uma combinação da função seno e cosseno? Ou apenas uma delas?

Tende-se a encontrar apenas a função cosseno.

b) Por que a função cosseno é adequada para representar este sistema?

Porque a massa conectada é solta a partir da amplitude máxima, o que gera similaridade com a função cosseno, pois $\cos(0) = 1$.

c) Se o objetivo da atividade fosse descrever todo o movimento da mola durante a oscilação, haveria mudança na amplitude?

Sim. A amplitude iria diminuir progressivamente.

d) O que acontece com o período quando se utiliza uma massa maior na mola?

O período aumenta.

e) Cite algum exemplo do cotidiano que pode ser modelado como este experimento.

Pessoal.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Viviane Maria Beuter, professora do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora do Produto Educacional intitulado: **“O sistema massa-mola como mediador do ensino das funções trigonométricas”** de autoria do acadêmico Arthur Karnopp Brüske.

Joinville, 23 de abril de 2026.

gov.br Documento assinado digitalmente
VIVIANE MARIA BEUTER
Data: 23/04/2026 19:31:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Viviane Maria Beuter