



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL



Planos de aula do conteúdo dos números irracionais

Edivaldo Ramos Batista

CASCADEL, abril de 2026

1 Fundamentação Pedagógica da Proposta

A proposta didática apresentada neste trabalho fundamenta-se em concepções contemporâneas do ensino de Matemática que valorizam a construção ativa do conhecimento, a contextualização dos conteúdos e a articulação entre teoria e prática. Parte-se do pressuposto de que o ensino dos números irracionais, tradicionalmente tratado de forma excessivamente algébrica e abstrata, pode ganhar significado quando associado a abordagens geométricas, experimentais e investigativas.

Sob a perspectiva da aprendizagem significativa, conforme proposto por Ausubel, considera-se que novos conceitos matemáticos são melhor assimilados quando relacionados a conhecimentos prévios dos estudantes. Nesse sentido, o estudo dos números irracionais é introduzido a partir de situações concretas, como medições geométricas, relações entre grandezas e aproximações numéricas, favorecendo a compreensão gradual de sua natureza não racional.

A proposta dialoga diretamente com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, geométrico e numérico no Ensino Fundamental. Destaca-se, em particular, a valorização da resolução de problemas, da investigação matemática e do uso de diferentes representações — geométrica, algébrica, numérica e gráfica — como meios para ampliar a compreensão conceitual dos estudantes.

Além disso, a abordagem adotada reconhece o papel do professor como mediador do processo de aprendizagem, responsável por criar situações didáticas que incentivem a argumentação, a formulação de conjecturas e a validação de resultados. Dessa forma, o ensino dos números irracionais deixa de ser um conteúdo meramente técnico e passa a constituir uma oportunidade para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia intelectual e da criticidade dos alunos.

2 Organização Geral da Sequência Didática

A sequência didática foi planejada para turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, com aulas de duração média de 50 minutos, podendo ser adaptada conforme a realidade da escola e o ritmo de aprendizagem dos estudantes. Sua organização segue uma progressão conceitual que parte de abordagens intuitivas e geométricas, avançando gradualmente para representações algébricas e análises numéricas mais formais.

Inicialmente, são explorados conceitos relacionados à distinção entre números racionais e irracionais, utilizando exemplos concretos e situações-problema que evidenciam a limitação das representações fracionárias. Em seguida, a sequência aprofunda o estudo de números irracionais notáveis, como π e e , por meio de atividades experimentais, aproximações numéricas e interpretações geométricas, pro-

movendo a compreensão de suas propriedades fundamentais. Posteriormente, são desenvolvidas atividades voltadas à irracionalidade em contextos trigonométricos, com a análise de valores associados a ângulos notáveis, evidenciando a presença de números irracionais em razões trigonométricas. Por fim, a sequência contempla a representação e a aproximação desses valores, explorando diferentes formas de expressá-los, como a forma exata, a aproximação decimal e sua localização na reta numérica, de modo a consolidar a compreensão da natureza dos números irracionais em contextos geométricos e aplicados.

Os planos de aula que compõem a sequência foram estruturados de modo a contemplar objetivos claros, conteúdos bem definidos, encaminhamentos metodológicos detalhados e critérios de avaliação compatíveis com os objetivos propostos. As atividades priorizam o trabalho colaborativo, a discussão coletiva dos resultados e o uso de recursos didáticos variados, como materiais manipuláveis, calculadora e tecnologias digitais, quando disponíveis.

A avaliação é concebida como um processo contínuo e formativo, ocorrendo ao longo das atividades por meio da observação da participação dos estudantes, da análise de registros escritos e da resolução de problemas. Essa perspectiva permite ao professor acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem e realizar intervenções pedagógicas sempre que necessário, garantindo maior efetividade no ensino dos números irracionais.

3 Planos de Aula

3.1 O número irracional π .

Conteúdo: O número irracional π .

Recursos didáticos: PowerPoint, objetos circulares (tampas, copos, pratos), barbante ou fita, régua, calculadora.

Duração: 50 minutos.

Objetivo Geral: Compreender o significado do número irracional π como razão constante entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, explorando sua representação, seu caráter irracional e suas aplicações em problemas geométricos.

Objetivos específicos

- Introduzir a definição geométrica de π .
- Realizar uma atividade experimental para estimar o valor de π .
- Calcular aproximações de π usando medidas reais.
- Reconhecer o caráter irracional de π (não termina e não se repete).
- Aplicar π em cálculos simples envolvendo circunferência.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula apresentando a figura de uma circunferência e levantando a pergunta: *existe alguma relação entre o tamanho da borda de um círculo e sua largura (diâmetro)?*

Atividade experimental

1. Em grupos, os alunos escolhem 3 objetos circulares (tampa, copo, prato etc.).
2. Com barbante, medem o comprimento da borda de cada objeto (circunferência).
3. Com uma régua, medem o diâmetro do mesmo objeto.
4. Calculam a razão

$$\pi = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}}.$$

5. Comparam os valores obtidos — todos devem se aproximar de 3,14.
6. Explicar como essa informação pode contribuir no dia a dia.
7. Apresentação dos resultados pelos grupos.

Conclusão do experimento

π é representado pelo símbolo grego. É definido como a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. É um número muito útil, usado para calcular a área de círculos, o volume de esferas e medir ângulos em radianos.

Arquimedes foi um cientista que viveu há mais de 2000 anos. Entre suas contribuições, está o método para aproximar π entre 3,1408 e 3,1429.



Figura 1: Estátua de Arquimedes.

Fonte: CC BY-SA 3.0 — <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1606321>

Após a atividade, discutiremos que:

- A razão $\frac{C}{d}$ é sempre a mesma para qualquer círculo.
- π é irracional: infinito, não periódico.
- Aproximações comuns: 3,14 e $\frac{22}{7}$.
- Exemplos podem ser mostrados no GeoGebra.

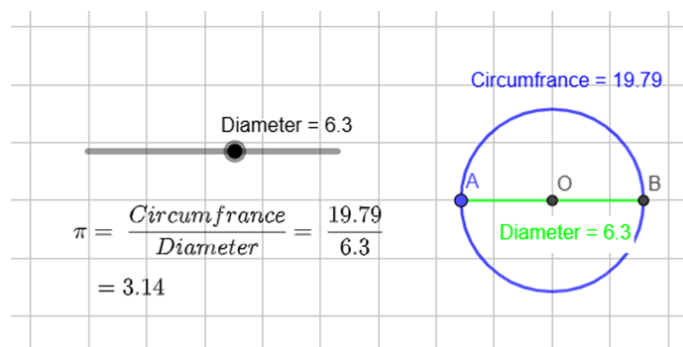


Figura 2: Representação da relação entre circunferência e diâmetro.

Exemplo resolvido

O diâmetro de uma roda é 10 cm. Qual é a medida aproximada de sua circunferência?

$$C = \pi \cdot d = 3,14 \cdot 10 = 31,4 \text{ cm.}$$

Exercício

Uma tampa tem diâmetro de 12 cm. Calcule o comprimento aproximado da circunferência usando $\pi \approx 3,14$.

Problemas extras

Problema 1

Um pneu de bicicleta tem raio de 35 cm.

- Determine seu diâmetro.
- Calcule o comprimento aproximado da circunferência usando $\pi \approx 3,14$.

Problema 2

Um atleta corre ao redor de uma pista circular de raio 20 m.

- Qual a distância percorrida em 1 volta?
- Se ele correr 5 voltas, qual será a distância total percorrida?

Avaliação

Será observado se os alunos compreendem π como razão entre circunferência e diâmetro, se realizam medições adequadas e se resolvem corretamente os cálculos.

3.2 Aproximações analíticas do número irracional π

Conteúdo: Aproximações analíticas do número irracional π .

Recursos didáticos: Quadro, calculadora, projetor multimídia, fichas de atividade, GeoGebra (opcional).

Duração: 50 minutos.

Objetivo Geral: Compreender que o número irracional π não pode ser expresso exatamente por números racionais, mas pode ser aproximado por meio de fórmulas matemáticas, avaliando a precisão dessas aproximações em contextos práticos.

Objetivos específicos

- Analisar o significado de aproximação numérica no contexto dos números irracionais.
- Utilizar fórmulas conhecidas para obter aproximações de π .
- Comparar aproximações com diferentes níveis de precisão.
- Desenvolver a noção de erro aproximado em cálculos geométricos.
- Relacionar o uso de aproximações com situações reais e tecnológicas.

Encaminhamento metodológico

A aula inicia-se com a seguinte situação-problema:

Em projetos de engenharia, arquitetura ou tecnologia, é possível utilizar o valor exato de π ? Por quê?

A partir das respostas dos alunos, o professor conduz a discussão para a ideia de que, na prática, utilizam-se aproximações controladas, cuja precisão depende do contexto.

Atividade orientada

1. O professor apresenta a seguinte expressão para aproximação de π ,

$$\pi \approx \left(\frac{4}{2} + \frac{4}{3} \right) - \left(\frac{4}{2^3 \cdot 3} + \frac{4}{3^3 \cdot 3} \right).$$

2. Os alunos calculam cada termo separadamente,

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{4}{3} \approx 1,333.$$

$$\frac{4}{2^3 \cdot 3} = \frac{4}{24} \approx 0,1667 \quad \text{e} \quad \frac{4}{3^3 \cdot 3} = \frac{4}{81} \approx 0,0494.$$

3. Em seguida, somam os termos, para obter

$$\pi \approx (2 + 1,333) - (0,1667 + 0,0494).$$

$$\pi \approx 3,333 - 0,2161 \approx 3,117.$$

4. O professor acrescenta o próximo termo da sequência,

$$+ \left(\frac{4}{2^5 \cdot 5} + \frac{4}{3^5 \cdot 5} \right).$$

5. Os alunos calculam a nova aproximação e comparam com o valor anterior.

6. Por fim, discute-se com a turma:

- Como a aproximação de π melhora com o acréscimo de termos;
- Por que π não pode ser escrito exatamente como fração;
- A relação entre processos infinitos e números irracionais.

Atividade de comparação

Apresenta-se a fórmula

$$\pi \approx \sqrt{12},$$

e os alunos calculam

$$\sqrt{12} \approx 3,464,$$

e comparam com aproximações usuais como 3,14 e 3,1416, discutindo o conceito de erro aproximado.

A aproximação $\pi \approx \sqrt{12}$ tem origem em construções geométricas clássicas baseadas na inscrição de polígonos regulares em uma circunferência, abordagem que remonta aos trabalhos de Arquimedes. Ao considerar polígonos com número crescente de lados, obtêm-se estimativas para o comprimento da circunferência e, consequentemente, para o valor de π .

No caso específico, a expressão $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ surge de relações métricas envolvendo triângulos equiláteros associados a essas construções. Embora tal aproximação resulte em $\sqrt{12} \approx 3,464$, apresentando erro relativamente elevado quando comparada a valores usuais como 3,14, ela possui relevância didática ao evidenciar a origem geométrica das primeiras estimativas de π e ao permitir a discussão do conceito de erro em aproximações numéricas.

Conclusão das atividades

As atividades evidenciam que diferentes fórmulas produzem aproximações distintas para π , algumas mais precisas e outras menos eficientes. A escolha da aproximação depende do contexto e do nível de precisão exigido.

Exemplo resolvido

Um círculo possui raio de 12 cm. Calcule o comprimento da circunferência usando:

$$\pi \approx 3,14 \quad \text{e} \quad \pi \approx 3,1416.$$

$$C_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 12 = 75,36 \text{ cm}$$

$$C_2 = 2 \cdot 3,1416 \cdot 12 = 75,3984 \text{ cm.}$$

Discute-se a diferença entre os resultados e sua relevância prática.

Exercício

Uma engrenagem circular possui diâmetro de 18 cm. Determine o comprimento aproximado da circunferência utilizando duas aproximações distintas de π e compare os resultados.

Problema 1

Uma placa circular de sinalização possui raio de 25 cm. Calcule o comprimento da borda considerando duas aproximações diferentes de π e estime o erro absoluto entre elas.

Problema 2

Um reservatório circular será construído com diâmetro de 4 m. Discuta qual aproximação de π seria adequada para esse projeto e justifique sua escolha.

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma processual, considerando a participação dos alunos nas discussões, a correta utilização das fórmulas de aproximação e a capacidade de analisar a adequação dos resultados obtidos em diferentes contextos.

3.3 O número irracional e

Conteúdo: O número irracional e .

Duração: 50 minutos.

Recursos didáticos: projeção em slides, computador, calculadora, GeoGebra.

Objetivo Geral : Compreender o significado do número irracional e como limite fundamental em processos de crescimento, analisando sua origem, aproximações numéricas e aplicações.

Objetivos Específicos:

- Introduzir o número e por meio de experimentação numérica.

- Calcular aproximações usando $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Reconhecer que e é irracional e aparece em diversos contextos reais.
- Explorar a função exponencial e^x no GeoGebra.
- Resolver problemas envolvendo crescimento contínuo.

Encaminhamento Metodológico

O professor inicia perguntando:

“Existe algum número que surge naturalmente quando estudamos crescimento rápido, juros compostos e processos acumulativos?”

Apresenta-se então a expressão fundamental:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Explique que, assim como π surge na geometria, e surge espontaneamente em processos de crescimento contínuo.

Atividade Experimental: Aproximação Numérica de e

1. Cada grupo calcula

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5, \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}.$$

2. Resultados esperados (tabela)

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
5	2,488
10	2,593
100	2,7048
1000	2,7169

3. O professor reforça que

$$e \approx 2,7182818\dots$$

Contextualização Histórica

O número e aparece naturalmente no estudo de juros compostos e crescimento populacional. Euler foi o matemático que consolidou suas propriedades — por isso chamamos de *número de Euler*. É irracional e está presente em diversas áreas: estatística, probabilidade, física, computação e modelagem.

Representações para Mostrar aos Alunos

1. Tabela da função $f(x) = (1 + 1/x)^x$

Aproximações Numéricas

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	2.0000000000
2	2.2500000000
4	2.4414062500
8	2.5657845140
16	2.6379284974
32	2.6769901294
64	2.6973449526
128	2.7077390197
256	2.7129916243
512	2.7156320002
1024	2.7169557295
2048	2.7176184823
4096	2.7179500812

Figura 3: Aproximação numérica de e por meio de $(1 + 1/x)^x$.

2. Curva exponencial $y = e^x$

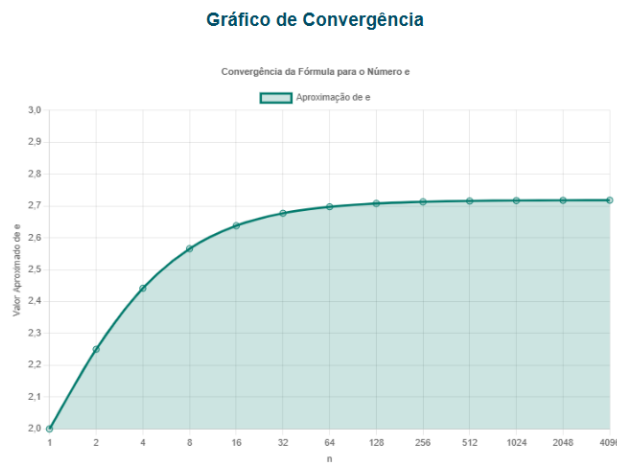


Figura 4: Gráfico do crescimento para e .

Fonte: Acervo do autor, encontrado em:

<https://edivaldo10000.github.io/Explorando-n-meros-irracionais/introducao.html>

Exemplo Resolvido

Aproxime e usando $n = 50$:

$$\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50} = (1,02)^{50} \approx 2,6916.$$

Exercícios

Calcule aproximações de e para:

- $n = 5$
- $n = 20$
- $n = 100$

Problemas Aplicados

1. Juros Compostos

Um investimento de R\$1000 cresce de acordo com a expressão

$$A(n) = 1000 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Calcule o valor final para $n = 1, 4$ e 365 .
- O que ocorre quando $n \rightarrow \infty$?

2. Crescimento Populacional Contínuo

A população de certa cidade cresce de acordo com a fórmula,

$$P(t) = P_0 e^{0,3t}.$$

- Com $P_0 = 500$, calcule $P(2)$.
- Calcule $P(5)$.

Avaliação

Serão avaliados se os alunos são capazes de compreender a origem numérica do número e , identificar e como um número irracional, realizar cálculos numéricos com precisão e interpretar situações reais que envolvam crescimento exponencial.

Referências

- Batista, Edivaldo Ramos. *Explorando Números Irracionais*. Disponível em: <https://edivaldo10000.github.io/Explorando-n-meros-irracionais/introducao.html>. Acervo do autor.

3.4 Exploração digital e análise gráfica.

Conteúdo: Número irracional e — exploração digital e análise gráfica.

Duração: 50 minutos.

Ambiente: Laboratório de informática ou tablets.

Recursos: Acesso à internet, site do professor, GeoGebra, calculadora e fones (opcional).

Objetivo Geral: Investigar o número irracional e por meio de exploração digital, interpretando gráficos interativos e relacionando o conceito ao seu contexto histórico e aplicações reais.

Objetivos Específicos

- Acessar e explorar o conteúdo de apoio no site do professor.
- Analisar interações gráficas envolvendo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Interpretar como o valor obtido se comporta ao aumentar n .
- Resumir a origem histórica e o surgimento do número e .
- Criar gráficos próprios no GeoGebra relacionando crescimento exponencial e o número e .

Encaminhamento Metodológico

1. Abertura da Aula

O professor apresenta brevemente o objetivo da aula:

“Hoje vamos explorar o número irracional e usando tecnologia. Vamos entrar no meu site, ler textos sobre o tema, interagir com gráficos e interpretar o comportamento dessa constante tão importante na matemática.”

2. Acesso ao Site do Professor

Cada aluno acessa o link:

<https://edivaldo10000.github.io/Explorando-n-meros-irracionais/introducao.html>

O professor orienta a leitura da seção:

“Explorando o Número e : Da demonstração à aplicação no cotidiano”

Os estudantes deverão ler especialmente:

- a contextualização histórica dos logaritmos e de John Napier;
- o papel de Henry Briggs;
- a ideia do logaritmo natural;
- o surgimento do número e a partir dos juros compostos.

3. Interação com o Gráfico do Site

Os alunos acessam as simulações e aproximações do número e presentes no site e respondem às perguntas:

1. O que você observa no gráfico gerado pela expressão

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

2. À medida que n aumenta, o valor de $f(n)$ aumenta ou diminui?
3. O valor de $f(n)$ se aproxima de algum número específico? Qual?
4. Existe algum **máximo** para esse valor?
5. Quando n é pequeno (1, 2, 3, 4), o que acontece com o gráfico?
6. Quando n é grande (50, 100, 1000), o comportamento muda? Como?

Essas perguntas devem ser respondidas em duplas para estimular o diálogo matemático.

4. Atividade com o GeoGebra

Os alunos acessam:

<https://www.geogebra.org/graphing>

Atividade orientada:

1. Construir o gráfico de $y = e^x$.
2. Observar o crescimento da curva.
3. Comparar com o comportamento da expressão do site.
4. Registrar: “*Por que o número e aparece tanto em situações de crescimento contínuo?*”

5. Questão de Síntese

Com base na leitura do site, o aluno responde:

Explique em poucas linhas como surgiu o número e , relacionando sua origem com o estudo dos logaritmos e dos juros compostos.

Exercícios Propostos

1. A partir da leitura do site, resuma com suas palavras quem foi John Napier e qual foi sua contribuição para o surgimento do número e .

2. Com base nas interações do site, complete:

- Quando n cresce muito, a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima de: _____
- Esse número é aproximadamente: _____

3. No GeoGebra, gere o gráfico de $y = e^x$ e descreva o comportamento da curva:

Ela cresce de forma lenta ou rápida? Há algum ponto em que ela para de crescer?

4. Pesquise e explique por que o número e aparece nos modelos de crescimento contínuo, como bactérias, juros ou populações.

Avaliação

A avaliação será realizada de forma contínua, considerando: participar da leitura e explorar o site, interpretar o gráfico interativo apresentado, construir corretamente os gráficos no GeoGebra, responder às perguntas reflexivas com qualidade e compreender a origem histórica do número e .

3.5 Números irracionais – raízes de números

Conteúdo: Números irracionais – raízes de números primos.

Recursos didáticos: Projetor, GeoGebra, régua, quadrados de papel, calculadora.

Duração: 50 minutos.

Objetivo Geral : Compreender o conceito de número irracional por meio das raízes de números primos e sua interpretação geométrica, relacionando a diagonal do quadrado com a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e outras raízes não exatas.

Objetivos específicos:

- Identificar que raízes de números primos (não quadrados perfeitos) são irracionais.
- Construir geometricamente a diagonal de um quadrado para compreender a origem de $\sqrt{2}$.
- Reconhecer que raízes como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ são irracionais.
- Aplicar aproximações de números irracionais em cálculos simples.
- Resolver problemas contextualizados envolvendo raízes irracionais.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos retomando brevemente o conceito de raiz quadrada. Em seguida, será feita uma atividade prática com quadrados de papel.

Os alunos receberão quadrados de lado n cm (por exemplo, $n = 1$ cm, $n = 3$ cm, $n = 5$ cm, etc.). Em seguida, será proposto que:

1. Meçam os lados com a régua;
2. Tentem medir as diagonais;
3. Comparem os valores obtidos e discutam por que a medida da diagonal não aparece como um valor exato.

Sugestão didática: A atividade pode ser realizada em grupos, favorecendo a troca de ideias entre os alunos, a comparação de resultados e a construção coletiva do conceito de número irracional.

Explicaremos que a diagonal tem medida $\sqrt{2}$, um número irracional que não pode ser escrito como decimal finito ou periódico. Os números reais apresentam-se como um tipo de número que mensura o espaço em nossa volta, assim como a concepção de número em seu conceito geral possibilitou, desde muito tempo, que o ser humano medisse a matéria, a energia, e outros componentes mensuráveis de nosso universo. Os números irracionais são números reais que não podem ser escritos em formato de fração, ou seja, não é racional. Seu conceito envolve alguns detalhes muito interessantes que não podem ser interpretados meramente por uma perspectiva voltada à números racionais. O entendimento de que as frações não são suficientes para as atribuições de medidas foi descoberto há 2500 anos pelos gregos. Eles perceberam que a diagonal de um quadrado de lado um, não pode ser expresso por nenhum número racional. Atualmente é dito que a medida dessa diagonal é a raiz quadrada de 2, sendo este fato garantido pelo Teorema de Pitágoras.

Após isso, mostraremos no quadro ou no GeoGebra que o mesmo ocorre com $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e outras raízes de números primos.

- A raiz quadrada aparece como o comprimento de um segmento.
- Quando o quadrado não é perfeito, essa raiz é irracional.

Exemplo resolvido

Calcular o valor aproximado de $\sqrt{5}$.

$$2^2 = 4 \quad \text{e} \quad 3^2 = 9$$

Logo,

$$\sqrt{5} \in (2, 3).$$

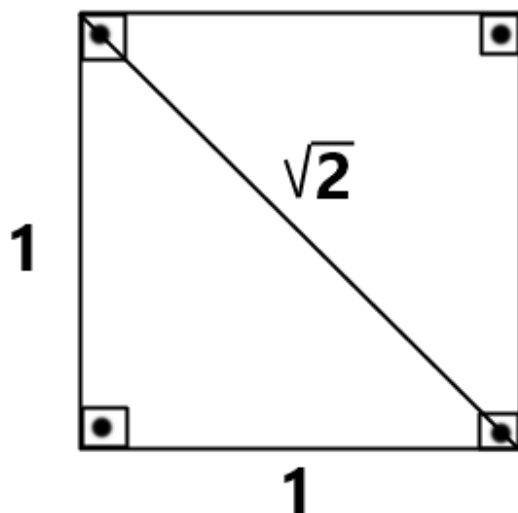


Figura 5: Diagonal de um quadrado de lado 1.

Aproximação simples:

$$\sqrt{5} \approx 2,23.$$

Atividade experimental:

Para estimar o valor de $\sqrt{5}$, os alunos podem construir um retângulo de lados 2 cm e 1 cm.

1. Desenhar um retângulo com medidas 2 cm e 1 cm;
2. Traçar a diagonal do retângulo;
3. Medir o comprimento da diagonal com a régua;
4. Comparar o valor obtido com a aproximação $\sqrt{5} \approx 2,23$.

Discussão: A diagonal do retângulo corresponde a $\sqrt{5}$, pois, pelo Teorema de Pitágoras,

$$d = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

A atividade permite aos alunos visualizar geometricamente um número irracional e compreender sua natureza aproximada.

Exercício

Estime o valor aproximado de $\sqrt{3}$ usando o mesmo método do exemplo. Classifique como racional ou irracional,

$$\sqrt{7}, 3,5, \sqrt{9}, \sqrt{11}, \sqrt{16}.$$

Problemas extras

Problema 1

Uma praça quadrada tem 10 m de lado.

- Determine a medida de sua diagonal.
- Use $d = 10\sqrt{2}$ para obter o valor aproximado.

Problema 2

Um carpinteiro colocará uma barra diagonal em uma moldura formando um triângulo retângulo com lados 1 m e 1 m.

- Determine o comprimento dessa barra.
- Explique por que esse valor é irracional.

Avaliação

Será observado durante a aula: compreender que certas raízes são irracionais, identificar a irracionalidade em situações geométricas e aplicar corretamente aproximações em exercícios e problemas.

Referências

- Batista, Edivaldo Ramos. *Explorando Números Irracionais — O Número e*. Disponível em:
<https://edivaldo10000.github.io/Explorando-n-meros-irracionais/introducao.html>. Acesso em: **21 de abril de 2026**. Acervo do autor.
- Plataforma GeoGebra. <https://www.geogebra.org/graphing>

3.6 Aproximações de raízes

Conteúdo: Aproximações geométricas de raízes quadradas e introdução aos números .

Recursos didáticos: Régua, papel quadriculado, lápis, esquadro, calculadora.

Duração: 50 minutos.

Objetivo Geral: Compreender a origem geométrica de algumas raízes quadradas e reconhecer a necessidade de números irracionais para representar medidas que não são números racionais.

Objetivos específicos:

- Estimar o valor de $\sqrt{2}$ a partir da diagonal de um quadrado.
- Estimar o valor de $\sqrt{5}$ e $\sqrt{13}$ usando retângulos.
- Construir novas raízes a partir de outras já conhecidas.

- Reconhecer que algumas medidas não podem ser expressas como frações.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula perguntando: *qual é o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1?* Os alunos serão convidados a estimar essa medida usando régua.

Atividade 1: A diagonal do quadrado

1. Desenhar um quadrado de lado 1 no papel quadriculado.
2. Traçar sua diagonal.
3. Medir o comprimento da diagonal.
4. Comparar com números conhecidos: 1,4; 1,41; 1,42.

Concluir que a diagonal mede aproximadamente

$$\sqrt{2} \approx 1,41.$$

Atividade 2: Outros retângulos

1. Desenhar um retângulo de lados 2 e 1.
2. Medir sua diagonal.

Pelo Teorema de Pitágoras

$$d = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Fazer o mesmo para o retângulo de lados 3 e 2.

$$d = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Atividade 3: Construindo $\sqrt{3}$

1. Usar o valor aproximado de $\sqrt{2}$.
2. Construir um retângulo de lados $\sqrt{2}$ e 1.
3. Medir a diagonal para obter $\sqrt{3}$.

Conclusão

Discutir com os alunos:

- Algumas medidas não são números racionais.

- Esses números são chamados de irracionais.
- Exemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Exercício

Desenhe um retângulo de lados 4 e 1 e estime o valor de sua diagonal.

Problema

Um estudante quer construir uma moldura quadrada para colocar uma fotografia. Cada lado da moldura mede exatamente 1 metro.

Para reforçar a moldura, ele decide colocar uma haste metálica ligando dois cantos opostos do quadrado.

1. Qual é o comprimento exato dessa haste?
2. Determine uma aproximação com duas casas decimais.

Solução

Processo 1 – Teorema de Pitágoras

A haste corresponde à diagonal do quadrado de lado 1.

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}.$$

Valor exato

$$d = \sqrt{2}.$$

Aproximação,

$$\sqrt{2} \approx 1,41.$$

Processo 2 – Aproximação decimal por tentativa

Sabemos que,

$$1^2 = 1$$

$$1,4^2 = 1,96$$

$$1,5^2 = 2,25.$$

Logo,

$$\sqrt{2} \approx 1,41.$$

Resposta:

Comprimento exato: $\sqrt{2}$ metros.

Aproximação: 1,41 metros.

Avaliação

Será observado se os alunos conseguem realizar as medições, interpretar os resultados e compreender a necessidade dos números irracionais.

3.7 Aproximações algébricas de raízes

Conteúdo: Aproximações algébricas de raízes quadradas usando o método de Newton.

Recursos didáticos: Quadro, calculadora, caderno.

Duração: 50 minutos.

Objetivo Geral: Desenvolver aproximações numéricas para raízes quadradas por meio de um método iterativo simples.

Objetivos específicos:

- Aplicar o método de Newton para aproximar raízes quadradas.
- Calcular aproximações de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$.
- Explorar propriedades das raízes.

Encaminhamento metodológico

Desenvolvimento da Aula

Iniciar a aula retomando as aproximações geométricas trabalhadas anteriormente, destacando como foi possível obter valores cada vez mais próximos de $\sqrt{2}$, mesmo sem conhecê-lo exatamente.

Em seguida, apresentar aos alunos o problema central,

$$x^2 = 2.$$

Explicar que resolver essa equação significa encontrar um número que, ao ser multiplicado por ele mesmo, resulte em 2. Destacar que esse número é $\sqrt{2}$, e que ele não é um número racional, ou seja, não pode ser escrito como uma fração exata.

Levantar a seguinte questão com a turma:

Como podemos encontrar boas aproximações para $\sqrt{2}$ de forma sistemática?

A partir dessa motivação, introduzir o método de Newton, explicando que se trata de um procedimento iterativo, isto é, um método que gera uma sequência de valores cada vez mais próximos da solução desejada.

Apresentar a fórmula específica para calcular raízes quadradas,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

Explicar cada elemento da fórmula de forma clara:

- x_n : é a aproximação atual (um valor inicial escolhido ou já calculado anteriormente);
- x_{n+1} : é a nova aproximação, geralmente mais precisa que a anterior;
- a : é o número do qual queremos calcular a raiz (neste caso, $a = 2$);
- $\frac{a}{x_n}$: representa um ajuste baseado no valor atual;
- A média entre x_n e $\frac{a}{x_n}$: serve para corrigir o erro da aproximação anterior.

Destacar a ideia central para os alunos:

A cada passo, usamos o valor atual para gerar um valor melhor, aproximando-nos cada vez mais da raiz de 2.

Por fim, informar que será feito um exemplo prático aplicando a fórmula, mostrando como as aproximações evoluem rapidamente até se estabilizarem próximas de $\sqrt{2}$.

Exemplo: Aproximação de $\sqrt{2}$

Escolhendo $x_0 = 1$,

$$x_1 = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1,5 + \frac{2}{1,5}}{2} \approx 1,4167$$

$$x_3 \approx 1,4142.$$

Concluir,

$$\sqrt{2} \approx 1,414.$$

Atividade em grupo

Cada grupo calcula:

- $\sqrt{3}$;
- $\sqrt{5}$;
- $\sqrt{6}$.

Explorando propriedades

Usando valores aproximados,

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Comparar os resultados obtidos.

Exercício

Aproxime $\sqrt{10}$ usando duas iterações do método de Newton.

Problema

Uma empresa de jardinagem quer construir um canteiro quadrado com área de 3 metros quadrados.

O jardineiro precisa saber o comprimento do lado desse canteiro.

1. Qual é o valor exato do lado?
2. Use o método de Newton com aproximação inicial $x_0 = 2$ para obter uma aproximação com duas casas decimais.
3. Use uma segunda estratégia para obter uma aproximação.

Solução

A área do quadrado é,

$$A = l^2.$$

Logo,

$$l^2 = 3$$

$$l = \sqrt{3}.$$

Processo 1 – Método de Newton

Queremos resolver,

$$x^2 - 3 = 0$$

Fórmula de Newton,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right).$$

Aproximação inicial,

$$x_0 = 2.$$

Primeira iteração,

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right).$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(2 + 1,5)$$

$$x_1 = 1,75.$$

Segunda iteração,

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1,75 + \frac{3}{1,75} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(1,75 + 1,71)$$

$$x_2 \approx 1,73.$$

Processo 2 – Comparação de quadrados

$$1,7^2 = 2,89$$

$$1,8^2 = 3,24$$

Logo,

$$\sqrt{3} \approx 1,73.$$

Resposta:

Valor exato: $\sqrt{3}$ metros.

Aproximação: 1,73 metros.

Avaliação

Será observado se os alunos conseguem aplicar corretamente a fórmula e interpretar as aproximações obtidas.

3.8 Irracionalidade em valores trigonométricos

Conteúdo: Razões trigonométricas e ocorrência de números irracionais.

Recursos didáticos: Quadro, régua, calculadora, caderno.

Objetivo Geral: Compreender a presença de números irracionais em valores trigonométricos a partir de construções geométricas.

Objetivos específicos:

- Identificar valores trigonométricos associados a números irracionais;
- Relacionar triângulos notáveis com expressões envolvendo raízes;
- Interpretar seno e cosseno geometricamente;

- Compreender a origem da irracionalidade na trigonometria.

Encaminhamento metodológico

Iniciar a aula lembrando o conceito de triângulo retângulo e as razões trigonométricas seno e cosseno, destacando suas definições como razões entre lados do triângulo.

Para os alunos que apresentarem dificuldades, pode-se utilizar a tabela do ciclo trigonométrico como apoio visual, permitindo identificar os valores de seno e cosseno em ângulos notáveis e facilitando a compreensão das relações envolvidas.

Apresentar o triângulo retângulo isósceles ($45^\circ-45^\circ-90^\circ$), com catetos de medida 1.

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$

Explicar aos alunos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, não pode ser escrito como fração e possui infinitas casas decimais não periódicas.

Calcular:

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Destacar:

O valor de $\text{sen}(45^\circ)$ é irracional, pois envolve $\sqrt{2}$.

Repetir o raciocínio para o triângulo de $30^\circ-60^\circ-90^\circ$,

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Explicar que $\sqrt{3}$ também é irracional.

Concluir com os alunos:

Muitos valores trigonométricos são irracionais porque surgem de construções geométricas envolvendo raízes quadradas.

Exemplo resolvido

Mostrar que $\text{sen}(45^\circ)$ é irracional.

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $\sqrt{2}$ é irracional, então $\frac{\sqrt{2}}{2}$ também é irracional.

Atividade em grupo

Determine os valores trigonométricos e classifique como racionais ou irracionais:

- $\text{sen}(30^\circ)$
- $\text{cos}(60^\circ)$
- $\text{sen}(45^\circ)$
- $\text{cos}(45^\circ)$

Resolução esperada

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad (\text{racional})$$

$$\text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2} \quad (\text{racional})$$

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{irracional})$$

$$\text{cos}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{irracional}).$$

Exercícios

1. Determinar se $\text{sen}(60^\circ)$ é racional ou irracional.
2. Explicar por que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é irracional.
3. Calcular $\text{cos}(30^\circ)$ e classificar.

Solução dos exercícios

$$1. \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Como $\sqrt{3}$ é irracional, o resultado é irracional.

Um número irracional dividido por um número racional não nulo continua sendo irracional. Logo, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é irracional.

$$3. \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, é irracional.

Problema

Uma escada está apoiada em uma parede, formando um ângulo de 45° com o chão. Sabendo que o comprimento da escada é de 2 metros, determine a altura alcançada na parede.

1. Determinar a altura alcançada pela escada, considerando o valor exato.;
2. Escrever o valor exato;
3. Classificar o resultado.

Solução

Utilizando o seno,

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\text{altura}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados por 2,

$$h = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h = \sqrt{2}.$$

Logo, a altura alcançada é,

$$h = \sqrt{2}.$$

Como $\sqrt{2}$ é um número irracional, o resultado também é irracional.

Avaliação

Será analisado se os alunos são capazes de identificar valores trigonométricos, calcular razões trigonométricas, classificar números como racionais ou irracionais e justificar os resultados.

3.9 Representação e aproximação de valores trigonométricos irracionais

Conteúdo: Aproximações decimais e representação geométrica de valores trigonométricos irracionais.

Recursos didáticos: Quadro, régua, calculadora, folha milimetrada.

Objetivo Geral: Desenvolver a capacidade de aproximar e representar valores trigonométricos irracionais em diferentes formas.

Objetivos específicos:

- Aproximar valores trigonométricos irracionais com precisão;
- Representar valores em reta numérica;
- Relacionar valores exatos e aproximados;
- Interpretar resultados em contextos geométricos.

Encaminhamento metodológico

Retomar os valores estudados anteriormente, destacando que muitos deles são irracionais e não podem ser representados de forma decimal exata.

Para auxiliar os alunos com dificuldades, pode-se novamente recorrer à tabela do ciclo trigonométrico, permitindo visualizar os valores de seno e cosseno associados aos ângulos notáveis.

Apresentar os valores,

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Discutir com os alunos que esses números são irracionais e, por isso, possuem infinitas casas decimais.

Apresentar aproximações,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866.$$

Destacar que essas aproximações permitem utilizar esses valores em situações práticas, mesmo não sendo exatos.

Números irracionais podem ser aproximados com grande precisão, mas nunca representados exatamente em forma decimal.

Exemplo resolvido

Determinar uma aproximação de $\text{sen}(45^\circ)$ com três casas decimais.

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sabendo que,

$$\sqrt{2} \approx 1,414.$$

Então,

$$\text{sen}(45^\circ) \approx \frac{1,414}{2}$$

$$\text{sen}(45^\circ) \approx 0,707.$$

Atividade em grupo

Calcular:

- $\text{sen}(45^\circ)$.

- $\cos(30^\circ)$.
- $\sin(60^\circ)$.

Após os cálculos:

- Determinar aproximações com três casas decimais;
- Representar os valores em uma reta numérica de 0 a 1 cm;
- Dividir a reta em milímetros (10 partes);
- Localizar aproximadamente cada valor na reta.

Resolução esperada

$$\sin(45^\circ) \approx 0,707$$

$$\cos(30^\circ) \approx 0,866$$

$$\sin(60^\circ) \approx 0,866.$$

Os valores devem ser posicionados próximos de 0,7 e 0,87 na reta numérica.

Exercícios

1. Aproximar $\cos(45^\circ)$ com três casas decimais;
2. Determinar uma aproximação de $\sin(30^\circ)$;
3. Comparar quais valores são racionais e quais são irracionais.

Solução dos exercícios

1.

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

2.

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

3.

$\sin(30^\circ)$ é racional

$\text{sen}(45^\circ)$, $\text{sen}(60^\circ)$, $\text{cos}(30^\circ)$ são irracionais.

Problema

Uma rampa forma um ângulo de 30° com o chão e possui comprimento de 4 metros.

1. Determinar a altura atingida;
2. Escrever o valor exato;
3. Obter uma aproximação decimal;
4. Classificar o resultado.

Solução

Utilizando o seno,

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{\text{altura}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{4}$$

$$h = 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$h = 2.$$

Nesse caso, o resultado é racional.

Discutir com os alunos que, dependendo do ângulo, o resultado pode ser racional ou irracional.

Avaliação

Será observado se os alunos são capazes de aproximar valores trigonométricos com precisão, representar números na reta numérica, interpretar resultados obtidos e distinguir entre valores racionais e irracionais.