Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Andson José Malaquias Tôrres

Instrumentalização para o Ensino de Probabilidade Discreta e Geométrica - com aplicação à Estereologia

Orientador:
Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva

Natal - RN
Fevereiro de 2026

Sumário

1 Problema da Agulha de Buffon e Métodos Estereológicos

1.1 Problema da Agulha de Buffon

Nesta seção iremos enunciar e resolver o Problema da Agulha de Buffon baseado em Ramaley, 1969 [16], tal abordagem utiliza o seno na sua argumentação, mas existem soluções utilizando o cosseno, como pode ser visto em Gomes, Diniz e Teodoro, 2021 [5] ou usando cosseno e integral dupla como apresentada por Solomon, 1978 [19].

Problema

Suponha que, em um salão cujo assoalho é dividido apenas por fissuras paralelas e igualmente espaçadas, alguém joga para o alto uma vareta com medida menor que o espaço entre as fissuras, e um dos jogadores aposta que ela não cruzará nenhuma das paralelas do assoalho, enquanto o outro, ao contrário, aposte que a vareta cruzará algumas dessas paralelas; qual a vantagem [probabilidade] de um jogador sobre o outro?

Solução

Considere que a agulha tem comprimento l. Tome um Sistema de Coordenadas Cartesianas XY sendo a origem $O = (0, 0)$ colocada no início da agulha. Seja y a distância do eixo das abcissas à fissura e h a distância do final da agulha à fissura. Admita que x é o ângulo formado pela agulha com o eixo das abcissas no sentido anti-horário. Tome ainda d como sendo o espaçamento entre cada fissura. Observe a ilustração.

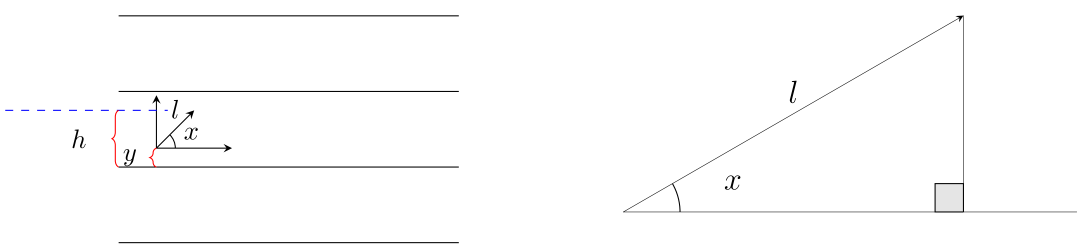


Figura 1.1: Experimento de Buffon.

Haverá cruzamento quando: $h \leq 0$ ou $d \leq h$. Perceba que $h = y + l \cdot \text{ sen}(x)$, logo:

$$h \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq -l \cdot \text{ sen}(x)$$

O segundo caso é

$$d \leq h \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq d - l \cdot \text{ sen}(x)$$

Seja Ω o espaço amostral, perceba que o ângulo x varia de 0 a 2π o valor de h é no máximo d, então a medida do espaço amostral é $\mu(\Omega) = 2\pi \cdot d$, observe a ilustração:

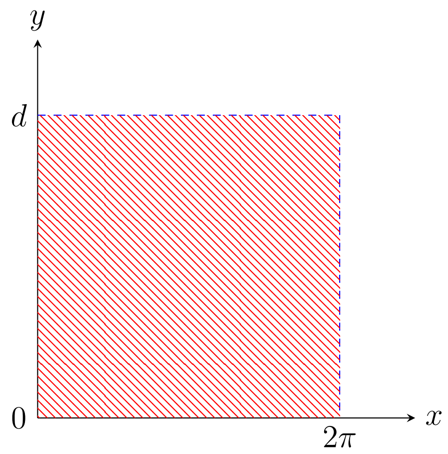


Figura 1.2: Gráfico do Espaço Amostral.

Já aqui montamos o gráfico das funções que caracterizam o cruzamento e marcamos a parte desejada, observe:[1]

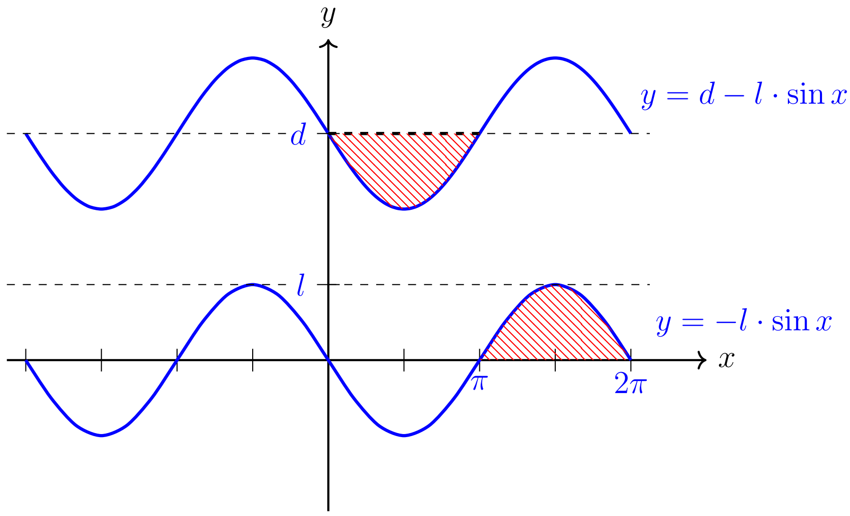


Figura 1.3: Gráfico do evento desejado.

$$2 \cdot \int_{\pi}^{2\pi} -l \cdot \ \mathrm{sen}(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot l \cdot \cos(x)\Big|_{\pi}^{2.\pi} = 4 \cdot l$$

Considere A o evento desejado, ou seja, cruzar a fissura. Temos o seguinte cálculo de Probabilidade:

$$P(A) = \frac{4 \cdot l}{2\pi \cdot d} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(A) = 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d}$$

Portanto, a probabilidade de tocar a fissura é:

$$P(A) = 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d}$$

Ao passo que a de não tocar é

$$P(\bar{A}) = 1 - 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d} = \frac{\pi \cdot d - 2 \cdot l}{\pi \cdot d}$$

Observações

- Aqui realizamos o cálculo para fissuras paralelas. É chamado Problema de Laplace o estudo para uma malha retangular.
- No problema agora estudado consideramos $l < d$. O caso $l > d$ é conhecido comoo Problema da Longa Agulha de Buffon, uma outra abordagem para tal pode ser vista em Solomon, 1978 [19].

[1] Para os alunos do Ensino Básico, recomendamos o uso do GeoGebra para o cálculo dessa área. (veja a subseção 3.7).

1.2 Emprego da Agulha de Buffon em Métodos Estereológicos.

A estereologia, campo científico interdisciplinar (Matemática e Biologia) que combina princípios da geometria, estatística e amostragem para estudar a estrutura tridimensional de objetos a partir de análises feitas em cortes ou projeções bidimensionais (Moutoun 2011)[13] permite obter *estimativas imparciais*[2] de comprimento e superfície em estruturas biológicas por meio da *análise sistemática*[3] e aleatória de imagens microscópicas. Essa abordagem utiliza *sondas geométricas*[4] (superfícies ou segmentos de linha) que interagem com as estruturas de interesse, como vasos sanguíneos ou membranas celulares, sob a condição fundamental de *isotropia*[5] — ou seja, sem favorecer orientação específica. Para melhor compreensão do texto observe a ilustração abaixo.

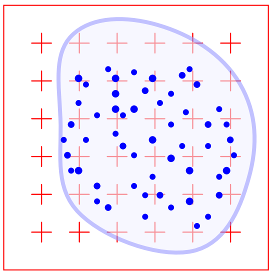


Figura 1.4: Ilustração de estrutura linear em sonda

Quando um cientista está estudando determinado órgão, seja um coração, um rim ou outro qualquer, ele retira a amostra do tecido (representada em azul na figura 1.4) e na sequência coloca-a na sonda geométrica, representada pela malha vermelha. Caso seja uma estrutura linear, como um nervo ou um vaso sanguíneo temos a ilustração 1.5, a sonda é a malha vermelha e o tecido a linha azul.

[2] Referem-se a métodos quantitativos que fornecem resultados estatisticamente não desviados do valor real da característica medida (volume, número, superfície, etc.).

[3] Em estereologia, a análise sistemática é uma estratégia de seleção de amostras (cortes, campos microscópicos ou seções) que combina regularidade no intervalo de amostragem com aleatorização do ponto de partida.

[4] São ferramentas ou formas geométricas usadas para amostrar estruturas tridimensionais a partir de imagens bidimensionais (como cortes histológicos ou imagens microscópicas).

[5] Uma estrutura biológica é isotrópica se a distribuição espacial de suas partes é igual em todas as direções. Isso é importante para evitar viés nas estimativas feitas com sondas geométricas.

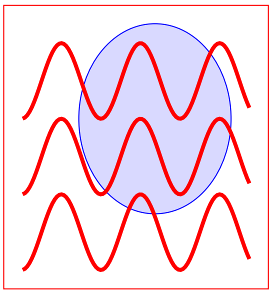


Figura 1.5: Ilustração de superfície de tecido em sonda.

Para estimar o comprimento por volume[6] (L_V), veja a figura 1.4, de estruturas lineares (nervos, por exemplo), emprega-se a relação:

$$L_V = 2 \cdot \frac{Q}{A}$$

Em que:

- Q: número de interseções entre os filamentos (pontos azuis) e a sonda;
- A: área da superfície da amostra.

Para calcular a área de superfície por volume[7] (S_V), veja a figura 1.5, de estruturas superficiais (membranas, por exemplo), emprega-se a relação:

$$S_V = 2 \cdot \frac{I}{L}$$

- I: interseções entre a sonda de linha e a fronteira da superfície;
- L: comprimento total das sondas de linha.

Exemplos numéricos podem ser vistos na Seção 3.8

A relação fundamental das fórmulas estereológicas reside na interpretação intuitiva de seus componentes: o numerador (Q ou I), que representa o número de interseções, reflete diretamente a quantidade de estruturas presentes, onde um maior número de interseções indica uma maior densidade de elementos no volume analisado; enquanto o denominador (A ou L), que corresponde ao tamanho da sonda utilizada, atua como fator de normalização, pois uma sonda de maiores dimensões que intercepta o mesmo número de estruturas necessariamente implica em uma menor densidade relativa. Essa correlação inversamente proporcional entre o tamanho da sonda e a densidade estimada é tão fundamental que se manifesta até mesmo em sistemas biológicos complexos, como no comportamento de navegação de formigas (Mallon e Franks, 2000)[11], onde princípios análogos de amostragem espacial são empregados para otimizar a exploração do ambiente.

[6]Expressa a quantidade de comprimento de uma estrutura linear existente por unidade de volume, permitindo estimar o quão densamente essa estrutura está distribuída no espaço analisado.

[7]expressa a quantidade de superfície exposta por unidade de volume, indicando o quão "superficialmente densa"é uma estrutura dentro do espaço analisado.

Os princípios de isotropia e aleatoriedade são essenciais para garantir estimativas precisas, pois eliminam vieses causados por orientações preferenciais durante a amostragem. A proporcionalidade direta entre o número de interseções e a quantidade real de estruturas no volume analisado estabelece uma relação quantitativa confiável. Em síntese, essas fórmulas estereológicas oferecem um método para quantificação de características microscópicas, desde que as sondas sejam aplicadas de forma isotrópica e sistemática, mantendo assim o equilíbrio adequado entre as interseções observadas e o tamanho da sonda utilizada - relação fundamental que assegura a acurácia das medições em estudos tridimensionais baseados em cortes bidimensionais.

No contexto do problema da agulha de Buffon, a probabilidade de uma agulha interceptar uma linha depende tanto do comprimento da agulha quanto da distância entre as linhas paralelas. Analogamente, nas fórmulas estereológicas, a densidade de estruturas (L_V ou S_V) é estimada com base na razão entre o número de interseções e o tamanho da sonda, refletindo a mesma lógica de normalização. O fator 2 presente em ambas as fórmulas surge da consideração de que as interseções podem ocorrer em ambos os "lados" da sonda, assim como no problema de Buffon, onde a agulha pode interceptar uma linha em qualquer orientação.

A interpretação unificada dessas fórmulas destaca a importância da normalização pelo tamanho da sonda e a relação direta entre interseções e densidade, conceitos fundamentais tanto na estereologia quanto em problemas clássicos de Probabilidade Geométrica, a partir desses estudos é possível detectar doenças mediante a análise de dados.

Tabela Com Valores de Referência Reais Valor Saudável (VS) é uma abre-

Parâmetro	**Tipo de Tecido**	**VS (Saudável)**	**VP (Patológico)**	**Referência**
Densidade de capilares (L_V)	Ventrículo esquerdo (rato)	$2.800 \pm 250\, mm/mm^3$	$< 2.100\, mm/mm^3$ (Hipertrofia Cardíaca)	[12]
Densidade de miócitos (L_V)	Ventrículo esquerdo (humano)	$220 \pm 35\, mm/mm^3$	$< 160\, mm/mm^3$ (Cardiomiopatia Dilatada)	[15]
Densidade de superfície (S_V)	Miocárdio (mamífero médio)	$65 \pm 10\, mm^2/mm^3$	$< 45\, mm^2/mm^3$ (Insuficiência Cardíaca)	[1]

Tabela 1.1: Parâmetros Estereológicos Cardíacos Reais

viação que representa a média de um parâmetro biológico ou fisiológico dentro de uma faixa considerada normal, geralmente expressa como a média mais ou menos o desvio padrão. Essa variação indica os valores esperados em indivíduos saudáveis, refletindo a dispersão estatística dos dados em uma população sem alterações relevantes. Por outro lado, Valor Patológico (VP) refere-se a resultados que estão fora dessa faixa de normalidade, indicando a possível presença de doenças, disfunções ou alterações no organismo. Enquanto o VS serve como referência para avaliar o estado de saúde, o VP sinaliza a necessidade de investigação clínica mais aprofundada, pois pode estar associado a condições adversas que requerem intervenção médica. Ambos os conceitos são essenciais para a interpretação de exames e parâmetros clínicos.

Essa conexão evidencia como princípios probabilísticos simples, como os explorados no problema da agulha de Buffon, podem ser estendidos para métodos quantitativos sofisticados em estereologia, permitindo a inferência de propriedades tridimensionais a partir de medidas bidimensionais ou unidimensionais.

2 Procedimentos Didáticos: Planejamentos

Neste capítulo iremos descrever o caminho utilizado para unir toda a parte teórica, explanada no capítulo **??**, à prática em sala de aula, os códigos citados ao longo dos dessa proposta de ensino são retirados da BNCC [2].

2.1 Probabilidade Discreta

A definição de Probabilidade Discreta está no início do trabalho **??**. Abaixo trazemos uma abordagem didática de tal componente.

Competência Específica 03:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades:

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Objeto de Conhecimento:

Probabilidade Discreta

Objetivos Específicos:

Promover a experiência em resolver problemas que envolvem probabilidade.

Estratégias de Interação:

Resolução de exercícios do livro didático;
Aulas no laboratório de Matemática abordando jogos e experimentos descritos no Apêndice 3.1;

Proposta de Atividade Avaliativa:

Atividade escrita e em dupla, veja 3.4 - 3,0 pontos
Atividade abordando materiais do laboratório, veja 3.3 – 2,0 pontos
Prova escrita, veja 3.2 - 5,0 pontos

Referências:

MODERNA (ed.) 2020 [10] BNCC 2018 [2]

2.2 Probabilidade Geométrica

Nesta seção iremos abordar os planos de aula sobre Probabilidade Geométrica, a definição desse conceito pode ser vista em **??**

Competência Específica 05:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades

Objeto de Conhecimento:

Probabilidade Geométrica

Objetivos Específicos:

Promover a experiência em resolver problemas que envolvem probabilidade.

Estratégias de Interação:

Resolução de exercícios da lista da Seção 3.5;

Aulas no Laboratório de Ensino de Matemática e no Laboratório de Informática de acordo com a lista de exercícios da Seção 3.5.

Proposta de Atividade Avaliativa:

Prova - 5,0 pontos

Referências:

BNCC 2018 [2], SILVA 2017 [17], SILVA 2013 [18],
KAYSER 2023 [9], NEVES 2011 [14].

2.3 Problema da Agulha de Buffon

Competência Específica 05:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades

Objeto de Conhecimento:

Probabilidade Geométrica

Objetivos Específicos:

Compreender o problema da Agulha de Buffon

Estratégias de Interação:

Análise gráfica da situação[1] no Geogebra - veja Apêndice 3.7

Proposta de Atividade Avaliativa:

Atividade escrita - 2,5 pontos.

Referências:

RAMALEYY 1969,[16] HOHENWAR 2009,[6] DEWEY 1979 [4]

2.4 Aula Conjunta: Matemática e Biologia

Competências Específicas:

Matemática - n°05
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Biologia - n°03 Analisar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Habilidades:

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades

(EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

(EM13CNT302) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos – interpretando gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, elaborando textos e utilizando diferentes

[1]A situação a qual nos referimos é a já realizada acima na subseção 1.1

mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) –, de modo a promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural.

Objeto de Conhecimento:

Probabilidade Geométrica, Sistema Cardíaco.

Objetivos Específicos:

Compreender uma aplicação do problema da Agulha de Buffon;
Compreender o funcionamento do Sistema Cardíaco.

Estratégias de Interação:

Aula prática e interdisciplinar de Matemática e Biologia - dissecação de um coração

Materiais:

- Coração bovino;
- Uma bandeja;
- Luvas;
- Avental;
- Bisturi;
- Tesoura;
- Pinças

Descrição da Confecção da Sonda Estereológica Artesanal

Diante da inexistência de sondas comerciais para a aplicação prática dos métodos estereológicos na escola, optamos pela confecção de um protótipo artesanal. O equipamento consiste em uma estrutura de suporte e uma interface de medição, descritas a seguir:

Estrutura (Caixa de Inspeção): Utilizou-se uma caixa de MDF (madeira prensada) para servir de base e suporte para a amostra biológica.

Interface de Medição (Tampa de Sondagem): A tampa da caixa foi confeccionada em acrílico transparente, material que permite a visualização direta da estrutura a ser analisada.

Gravação da Sonda: Sobre a superfície do acrílico, realizamos a plotagem manual ou gravação dos desenhos das sondas geométricas discutidas na fundamentação teórica. Dependendo do parâmetro a ser estimado, utilizamos:

- Sondas de Cruz: Compostas por interseções de linhas para a estimativa do comprimento por volume (L_V).
- Sondas Curvas: Desenhos sinuosos utilizados para o cálculo da área superficial por volume (S_V).

Este recurso didático permite que os estudantes simulem o procedimento realizado em laboratórios de biologia celular, posicionando o tecido biológico (ou um modelo representativo) no interior da caixa e sobrepondo a tampa de acrílico. Através da contagem das interseções entre a estrutura biológica e o desenho na tampa, os alunos aplicam as fórmulas baseadas no Problema da Agulha de Buffon, concretizando a conexão entre a geometria e as ciências da vida

Procedimento

Observar as estruturas externas do coração, incisão longitudinal, isto é um corte na vertical, na parede da artéria aorta e incisão na parede do ventrículo esquerdo. Após aberto observar as estruturas internas.

Proposta de Atividade Avaliativa:

Atividade escrita - 2,5 pontos.

2.5 Cálculo da Nota Final

O cálculo da nota final do aluno será feito da seguinte forma

$$N = \frac{N_{\mathrm{PD}} + N_{\mathrm{PG}} + N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{AB}}}{2}$$

Em que

- N = Nota Final
- N_{PD} = Nota de Probabilidade Discreta;
- N_{PG} = Nota de Probabilidade Geométrica;
- N_{A} = Nota da Agulha de Buffon;
- N_{AB} = Nota da Aplicação à Biologia.

O fato da divisão por dois se dá pois N_{PD} varia de 0 a 10, e também a soma $N_{\mathrm{PG}}+N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{AB}}$ varia de 0 a 10

2.6 Conclusão e Perspectivas

Os planos de aula apresentados neste capítulo demonstram como a probabilidade geométrica, em especial o problema da Agulha de Buffon, pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com a Biologia, proporcionando uma abordagem prática e contextualizada. Ao relacionar conceitos matemáticos com a análise do sistema circulatório — seja por meio da dissecação de um coração real ou da simulação de padrões vasculares —, busca-se não apenas consolidar o aprendizado teórico, mas também estimular nos alunos uma visão integrada da ciência

3 Atividades

A confecção das atividades desse Produto Educacional foram baseadas em Silva 2017 [17], Silva 2013 [18], Moderna 2020, [10] Kayser [9] e Enem (2011-2012)[7, 8], Unicamp 2024 [3]

3.1 Jogos e Experimentos - Probabilidade Discreta

Abaixo a descrição de alguns jogos/experimentos que serão utilizados em sala de aula, a aula será conduzida da seguinte forma, os alunos irão jogando e o professor irá propondo os questionamentos da seção "Perguntas a serem feitas". Cada jogo desse será trabalhado em sala de aula.

Jogo de dois dados iguais

Material:

Dois dados quaisquer de um único formato, por exemplo, dois dados D6, dois dados D12, dois dados D20.

Modo de jogar:

Joga-se dois dados e soma-se o valor que der em cada um. Quem obtiver o maior resultado ganha.

Perguntas a serem feitas:

1. No lançamento de um único dado D6, qual a probabilidade de:
   (a) Sair o número 4?
   (b) Sair um número par?
   (c) Sair um número primo?
2. Alice e Ana estão jogando esse jogo com dados D6s. A soma dos dados de Alice deu 8 e o de Ana deu 5.

(a) Quem ganhou a partida?

(b) Qual a probabilidade da soma do resultado de dois dados ser 8?

3. Ao lançar três dados D6 não viciados, qual a probabilidade de a soma dos números ser igual a 8?

4. (Para casa) Manoel e Ângelo estão jogando esse jogo. A soma dos dados de Manoel deu 9 e a de Ângelo deu 10.

   (a) Quem perdeu a partida?

   (b) Qual a probabilidade da soma dos resultados de dois dados dar 9 ?

5. Lançando apenas um dado D6 oito vezes, qual a probabilidade de pelo menos uma vez o número seis cair voltado para cima ?

Jogo de dois dados diferentes

Material: Dados em formatos variados (D4, D12, D20, D6, D8)

Modo de jogar: cada jogador toma dois dados com formatos diferentes, porém se um jogador toma um dado D20 e um D6 o oponente deve tomar dados do mesmo formato. Jogam-se os dados, quem tiver a maior soma dos valores obtidos ganha.

Perguntas a serem feitas:

1 Ao jogarmos um dado D6 e um dado D12, qual a probabilidade da soma dos resultados ser 15?

2 (Para casa) Ao jogarmos um dado D20 e um dado D6, qual a probabilidade de a soma ser 18?

3 (Para casa) João e Maria estão jogando o jogo de dados diferentes, eles estão usando o dado D20 e o dado D12, o dado de João deu 13 e 4 e o de Maria deu 15 e 6, primeiro se joga o dado D20, depois o D12, nessa ordem. Responda:

   (a) Quem ganhou a partida?

   (b) Qual a probabilidade desses dados acontecerem?

4 João jogou um dado D6 e um D20, os números deram 3 e 4 respectivamente, qual a probabilidade de isso acontecer?

5 Lançamos dois dados com vinte faces e outro com 12 faces. Qual a probabilidade de lançar cada dado e o produto ser 45?

6 (Para casa) Lançamos dois dados com vinte faces e outro com 12 faces. Qual a probabilidade de lançar cada dado e o produto ser 26?

7 Lançamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de a soma ser menor que 5?

Experimento de um dado e uma moeda

Material: Moedas, preferencialmente sem valor monetário, e dados.

Processo: Lança-se uma quantidade pré-estabelecida de moedas e uma quantidade pré-estabelecida de dados.

Perguntas a serem feitas:

1 Uma moeda e dois dados são lançados aleatoriamente.

  (a) Qual a probabilidade de sair cara e a soma dos números ser 8?

  (b) (Para casa) Qual a probabilidade de sair cara ou o produto dos números ser 12?

Experimento dados e roleta coloridos

Material: Uma roleta divida em setores de igual área com quatro cores diferentes, os dados devem ser de tipos diferentes com cores correspondentes às da roleta.

Processo: Gira-se a roleta e joga-se o dado da cor respectiva em que a roleta parar.

Perguntas a serem feitas:

1 Uma roleta circular é dividida igualmente em 4 partes iguais, uma de cada cor: azul, amarelo, verde e vermelho. Existem 4 dados: um D6 azul, um D20 amarelo, um D8 verde e um D12 vermelho. Pedro irá girar a roleta e a cor sorteada será a cor do dado que ele irá lançar. Responda:

  (a) Qual a probabilidade de cair o número 8 voltado para cima?

  (b) Qual a probabilidade de cair o número 3 voltado para cima?

  (c) Qual a probabilidade do dado D6 ser lançado? E do dado D20?

  (d) (Para casa) Qual a probabilidade do dado D8 ser lançado? E do D12?

  (e) (Para casa) Qual a probabilidade de cair o número 10 voltado para cima?

  (f) (Para casa) Qual a probabilidade de cair o número 15 voltado para cima?

Experimento com Baralho

Material: Baralho comum

Processo: Aprender os naipes e como eles são organizados.

Perguntas a serem feitas:

1 Em um baralho retira-se todas as cartas com números ímpares. Qual a probabilidade de sair um rei de qualquer naipe?

2 (Para casa) De um baralho puxa-se uma carta, qual a probabilidade dessa carta possuir uma letra?

3 (Para casa) Retira-se todas as cartas com números do baralho, responda

(a) Qual a probabilidade de sair uma carta vermelha?

(b) Caso não houvesse sido retirada nenhuma carta inicialmente, qual seria a probabilidade de se retirar uma carta vermelha?

(c) Os resultados são iguais ou diferentes?

(d) No caso de igualdade explique o porquê.

4 De um baralho são retirados exatamente três cartas sem reposição, qual a probabilidade de sair um número ímpar, um valete e um rei nessa ordem?

Experimento com Bolinhas coloridas

Material: Uma caixa fechada com bolinhas coloridas. É importante que hajam mais de uma bolinha da mesma cor.

Processo: O aluno vai colocar a mão na caixa e retirar uma bola, esse processo pode ser repetido com ou sem reposição

Perguntas a serem feitas:

1 Em uma urna há 4 bolas brancas, 3 verdes, duas azuis e uma preta. Responda:

(a) Se Pedro faz uma retirada, qual a probabilidade de sair uma bolinha branca ou preta?

(b) (Para casa) Se Alice faz uma retirada, qual a probabilidade de sair uma bolinha de cor azul?

(c) (Para casa) Maria vai fazer duas retiradas com reposição, qual a probabilidade de ela tirar uma bola preta e uma azul nessa ordem?

(d) Carlos vai fazer duas retiradas com reposição, qual a probabilidade de ela tirar uma bola verde e uma branca em qualquer ordem?

(e) Márcia vai fazer duas retiradas sem reposição, qual a probabilidade de ela retirar uma bola verde e uma branca em qualquer ordem?

(f) (Para casa) Brena vai fazer duas retiradas sem reposição, qual a probabilidade de ela retirar uma bola azul e uma preta em qualquer ordem?

(g) João vai fazer duas retiradas sem reposição, qual a probabilidade de ela retirar uma bola verde ou uma branca?

Experimento com Bolinhas Numeradas

Material: Uma caixa fechada com bolinhas numeradas de forma única. **Processo:** O aluno vai colocar a mão na caixa e retirar uma bola, esse processo pode ser repetido com ou sem reposição.

Perguntas a serem feitas:

1 Uma urna possui 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Responda:

(a) João tem menos de 20 anos de idade, qual a probabilidade de ele fazer uma retirada e sair o número da sua idade?

(b) Bruno tem 13 anos de idade, qual a probabilidade de ele fazer duas retiradas sem reposição e os números que sair ser a soma da sua idade?

(c) (Para casa) Jonatan tem 10 anos de idade, qual a probabilidade de ele fazer duas retiradas sem reposição e os números que sair ser a soma da sua idade?

(d) Quais são os números primos de 1 a 20?

(e) (Para casa) Qual a probabilidade de, em duas retiradas sem reposição, Tássio obter dois números primos?

(f) Qual a probabilidade de, em duas retiradas sem reposição, Maria obter um número par maior que dois e um número primo?

(g) Rodrigo faz uma retirada, qual a probabilidade de sair um número primo ou um número par?

(h) (Para casa) Qual a probabilidade de, em duas retiradas sem reposição, sair dois números pares?

3.1.1 Soluções

Jogo de dois dados iguais

1.

a.

$$P = \frac{1}{6}$$

b.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2.

a.

Alice

b.

As possibilidades totais são $6{\cdot}6 = 36$, ao passo que as possibilidades desejadas são as seguintes:

Dado 1	Dado 2
2	6
6	2
5	3
3	5
5	3
4	4

Tabela 3.1: Combinações com dois dados para a soma ser 8

Donde

$$P = \frac{5}{36}$$

3.

A questão não informa o tipo de dado, quando isso ocorre é natural deduzir que será o D6. O total de possibilidades é dado por $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, as possibilidades desejadas são:

Dado 1	Dado 2	Dado 3
1	1	6
1	2	5
1	3	4
2	2	4
2	3	3

Tabela 3.2: Combinações com três dados para a soma ser 8

Agora calculamos as permutações para cada caso, pois não foi definida nenhuma ordem de números pela questão.

$$3 \cdot P_3^2 + 2 \cdot P_3 = 21$$

Portanto,

$$P = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$$

4.

a.

Manoel

b.

As possibilidades totais são $6{\cdot}6 = 36$, ao passo que as possibilidades desejadas são as seguintes:

Dado 1	Dado 2
5	4
5	4
3	6
6	3

Tabela 3.3: Combinações válidas para a soma ser 9

Donde

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

5.

A probabilidade de não sair nenhum número seis em oito jogadas é

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

O resultado procurado, utilizando a probabilidade complementar, é:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,767$$

Jogo de dois dados diferentes

1.

O cálculo das possibilidades totais é $6 \cdot 12 = 72$, já as possibilidades desejadas são

Dado 1 (D6)	Dado 2 (D12)
3	12
4	11
5	10
6	9

Tabela 3.4: Combinações válidas para a soma ser 15

Donde:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2.

O cálculo das possibilidades totais é $20 \cdot 6 = 120$, já as possibilidades desejadas são

Dado 1 (D6)	Dado 2 (D20)
1	17
2	11
3	15
4	14
5	13
6	12

Tabela 3.5: Combinações válidas para a soma ser 18

Donde:

$$P = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

3.

a.

Maria

b.

A probabilidade da jogada de João resultar em 13 e 4 é

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{240}$$

Para Maria temos

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{240}$$

A probabilidade resultante será:

$$P = \frac{1}{240^2}$$

4.

O "respectivamente" se refere à ordem dos resultados para com os dados, isto é, o D6 resultou 3 e o D20 resultou 4, todavia, não fala na ordem de lançamento dos dados, por isso ele pode primeiro lançar o D6 e em seguida o D20, ou ao contrário, logo

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{1}{60}$$

5.

A quantidade total é $20 \cdot 12 = 240$, as possibilidades desejadas são

Dado 1 (D20)	Dado 2 (D12)
9	5
5	9
15	3

Tabela 3.6: Combinações válidas para produto igual a 45

Donde

$$P = \frac{3}{240} = \frac{1}{80}$$

6.

Calculo da quantidade total de possibilidades

$$20 \cdot 20 \cdot 12 = 4800$$

Possibilidades desejadas

D20	**D20**	**D12**
1	13	2
13	1	2
13	2	1
2	13	1

Tabela 3.7: Combinações válidas para produto igual a 26

Donde a probabilidade será:

$$P = \frac{4}{4800} = \frac{1}{1200}$$

7.

A questão menciona dados comuns, ou seja, dados D6. A quantidade total de possibilidades é $6 \cdot 6 = 36$.

A quantidade de possibilidades desejadas é:

Dado 01	Dado 02	Soma
1	1	2
1	2	3
2	1	3
1	3	4
2	2	4
3	1	4

Tabela 3.8: Combinações válidas para soma menor que 5

Portanto

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Comentário: Optamos por essa solução, pois são menos casos para analisar, caso o problema fosse com um número maior, por exemplo, a probabilidade da soma ser menor que dez, valeria mais a pena utilizar a probabilidade complementar $P(A) = 1 - P(A)$.

Experimento de um dado e uma moeda

Soluções

1.

a.

Já vimos que a probabilidade referente aos dados é $\frac{5}{36}$ logo a probabilidade procurada é

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{72}$$

b.

O produto é doze no lançamento de dois dados se os resultados são $3 \cdot 4$ ou $4 \cdot 3$, em um total de 36 possibilidades, já para obtermos uma cara temos uma chance em duas, logo

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{36} = \frac{1}{36}$$

Experimento dados e roleta coloridos

1.

a.

A probabilidade de cada dado ser lançado é $\frac{1}{4}$ possuem o número 8 o D20, o D8 e o D12, logo, a probabilidade é

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right) = \frac{31}{480}$$

b.

O raciocínio é análogo, temos

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) = \frac{17}{160}$$

c.

A probabilidade de qualquer dado ser lançado é $\frac{1}{4}$

d.

$\frac{1}{4}$

e.

Raciocínio análogo aos itens a e b, porém só há face 10 no D20 e D12, então

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{30}$$

f.

Só há face 15 no D20

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{80}$$

Experimento com Baralho

1.

Um naipe tem 13 cartas, das quais 4 são ímpares, então restam 9 cartas por naipe, como são 4 naipes, tempos um total de 36 cartas, em cada naipe há um rei, logo:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2.

Em um naipe há 4 cartas com letras, como são 4 naipes, há um total de 16 cartas com letras no baralho, donde

$$P = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

3.

a.

Nesse caso restam apenas as cartas com letras, ou seja 16, sendo 8 vermelhas e 8 pretas

$$P = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

b.

$$P = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

c.

Iguais.

d.

As frações são equivalentes.

4.

$$P = \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{32}{16575}$$

Experimento com bolinhas coloridas

1.

a.

Há um total de $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ bolinhas na urna. Cores neutras presentes na urna são branco e preto, donde

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b.

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

c.

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{50}$$

d.

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot 2 = \frac{6}{25}$$

e.

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{4}{15}$$

f.

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{45}$$

g.

Vamos usar a probabilidade complementar

Probabilidade de não ser retirado uma bola verde ou branca

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

Experimento com bolinhas coloridas

1.

a.

$$P = \frac{1}{20}$$

b.

O total de possibilidades é $20 \cdot 19 = 380$, as possibilidades desejadas são

Primeira bolinha	Segunda bolinha
1	12
12	1
2	11
11	2
3	10
10	3
4	9
9	4
5	8
8	5
6	7
7	6

Tabela 3.9: Combinações válidas para soma ser 13

Logo,

$$P = \frac{12}{380} = \frac{3}{95}$$

c.

O total de possibilidades é $20 \cdot 19 = 380$, as possibilidades desejadas são

Primeira bolinha	Segunda bolinha
1	9
9	1
2	8
8	2
3	7
7	3
4	6
6	4
5	5

Tabela 3.10: Combinações válidas para soma ser 10

Logo,

$$P = \frac{9}{380}$$

d.

Os números primos entre 1 e 20 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.

e.

$$P = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$$

f.

$$P = \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} \cdot 2 = \frac{36}{95}$$

g.

Existem

- 8 números primos;
- 10 números pares;
- 1 número primo e par.

Logo, podemos montar o seguinte diagrama

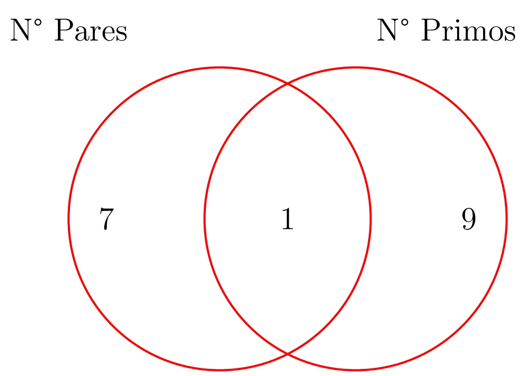


Figura 3.1: Diagrama de Venn

Donde,

$$P = \frac{7+1+9}{20 \cdot 19} = \frac{17}{380}$$

h.

$$P = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$$

i.

$$P = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{10}{38}$$

3.2 Prova

Abaixo a prova para ser aplicada aos , individual e sem consulta.

1. Em uma caixa há 10 bolas: 4 vermelhas, 3 azuis e 3 verdes. Duas bolas são retiradas sucessivamente sem reposição.
a) Qual a probabilidade de ambas serem vermelhas?
b) Qual a probabilidade de sair uma verde e uma azul nessa ordem?

2. Um dado D6 é lançado duas vezes.
a) Qual a probabilidade de obter um número par no primeiro lançamento e um número maior que 4 no segundo?
b) Qual a probabilidade de a soma dos resultados ser 7?

3. Haverá um sorteio em uma sala de aula para saber quem irá ganhar uma caixa de chocolates, as idades e o gênero dos alunos estão descritos na tabela abaixo Qual a

	15 anos	**16 anos**	**17 anos**	**Total**
Masculino	2	3	7	12
Feminino	4	6	3	13
Total	6	9	10	25

Tabela 3.11: Distribuição por idade e gênero

probabilidade de uma menina de pelo menos 16 anos ganhar?

3.2.1 Pauta de Correção

Questão 01

a

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

- Escrever corretamente a expressão com as duas probabilidades [0,5]
- Realizar a multiplicação corretamente [0,5]

Dado 1	**Dado 2**
1	6
6	1
3	4
4	3
2	5
5	2

Tabela 3.12: Combinações válidas para a soma ser 07

b

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

- Escrever corretamente a expressão com as duas probabilidades [0,5]
- Realizar a multiplicação corretamente [0,5]

Questão 02

a

$$P = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

- Escrever corretamente a expressão com as duas probabilidades [0,5]
- Realizar a multiplicação corretamente [0,5]

b

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- Escrever corretamente a tabela das combinações válidas para a soma ser 07 [0,5]
- Efetuar o cálculo da probabilidade corretamente [0,5]

Questão 03

Há $6 + 3 = 9$ meninas com pelo menos 16 anos em um total de 25 alunos.

$$P = \frac{9}{25}$$

- Encontrar o número do evento desejado [0,5]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,5]

3.3 Atividade abordando materiais do laboratório

Previamente o professor recorta as questões abaixo apresentadas e as coloca em envelopes de modo que cada envelope contemple apenas questões de um tipo de material, divide-se a sala em grupos com dois ou três componentes, preferencialmente, mas essa quantidade de participantes pode variar de acordo com a necessidade. O professor em uma urna coloca papéis com os nomes dos objetos do laboratório usado nas aulas (dados, baralho, urna com bolas numeradas, urna com bolas coloridas), um componente da dupla retira um papel e isso dirá qual objeto ele irá utilizar, na sequência recebe a atividade, a qual valerá dois pontos.

Baralho

QUESTÃO 1

Cada naipe possui 13 cartas ao todo, sendo elas: ás (A), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete (J), dama (Q) e rei (K). Sabendo que todas juntas formam um baralho com 52 cartas, imagine que você queira tirar ao acaso uma carta de ás (A). Qual a probabilidade de que essa carta retirada ao acaso fosse a de ás?

QUESTÃO 2

Retire cinco cartas de cada naipe e embaralhe tudo, sendo que no final as cartas não estarão com a frente viradas para você. Imagine que você queira tirar ao acaso uma carta de ouros do baralho que resta. Qual a probabilidade de retirar uma carta de ouros ao acaso?

QUESTÃO 3

Retire de cada naipe as cartas ás, valete, dama e rei e embaralhe tudo. Sem as cartas estarem voltadas a você, pense que você queira tirar, ao acaso, uma carta de número ímpar. Qual a probabilidade de retirar uma carta ímpar ao acaso?

Dados

QUESTÃO 1

Um dado comum não viciado é lançado duas vezes sucessivamente e é anotada a sequência de faces obtidas. Qual a probabilidade do primeiro número obtido nesses lançamentos ser 3 e o segundo ser par?

QUESTÃO 2

Um dado D6 é lançado duas vezes. Qual a probabilidade da soma dos pontos obtidos ser menor que 7?

QUESTÃO 3

Um dado D6 e um D12 são lançados cada um uma vez, qual a probabilidade do produto dos pontos obtidos igual a 14 ?

Urna com bolas numeradas

QUESTÃO 1

Você e um de seus colegas irão retirar algumas bolinhas da caixa, sabendo que são quarenta bolas numeradas de 1 a 40. Agora imagine, você e seu colega vão retirando as bolinhas ao acaso, qual a probabilidade de, caso os dois tirassem uma bola cada sem reposição, o produto desses números ser igual a dez?

QUESTÃO 2

Qual a probabilidade de retirar uma bolinha que tenha um número maior que 18?

QUESTÃO 3

Considerando uma caixa com bolas numeradas de 1 a 40, Viviane já retirou 15 bolas e Beatriz sua colega de classe também tirou 2, sendo todas essas bolinhas com números pares e essas retiradas sem reposição. Qual a probabilidade de sair uma bola de número ímpar?

Urna com bolas coloridas.

QUESTÃO 1

De uma urna com 10 bolas vermelhas, 5 verdes e 3 azuis, retire, sem reposição, duas bolas seguidas. Qual a probabilidade de as duas serem verdes?

QUESTÃO 2 Você tem uma urna com 60 bolas: 25 rosas, 20 cinzas, 15 marrons, retirando dez bolas rosas, qual a probabilidade de sortear uma bola rosa?

QUESTÃO 3 De uma urna com 10 bolas vermelhas, 5 verdes e 3 azuis, retire, sem reposição, três bolas seguidas. Qual a probabilidade de as duas serem retiradas duas vermelhas e uma azul em qualuqer ordem ?

3.3.1 Soluções e pauta de correção

Baralho

1.

Das 52 cartas, 4 são de às

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

- Identificar o número de elementos do Evento [0,2];
- Identificar o número de elementos do Espaço Amostral [0,20];
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20]

2.

Ao todo serão retiradas $5 \cdot 4 = 20$ cartas, restando $52 - 20 = 30$ cartas, portanto

$$P = \frac{30}{52} = \frac{15}{26}$$

- Identificar o número de elementos do Evento [0,2];
- Identificar o número de elementos do Espaço Amostral [0,20];

- Calcular corretamente a probabilidade [0,20]

3.

Retirando as cartas citadas temos as seguintes 9 cartas para um naipe $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, das quais 4 são ímpares, donde:

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- Identificar o número de elementos do Evento [0,25];

- Identificar o número de elementos do Espaço Amostral [0,25];

- Calcular corretamente a probabilidade [0,3]

Dados

1.

O segundo laçamento pode ser qualquer número do dado, já o primeiro só pode ser 3.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento e a quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20];

- Calcular corretamente cada probabilidade [0,20];

- Efetuar o produto [0,20]

2.

Primeiro	**Segundo**	**Soma**
1	1	2
1	2	3
2	1	3
2	2	4
3	2	5
2	3	5
2	4	6
4	2	6
3	3	6

Tabela 3.13: Soma menor que 7

O total de possibilidade é $6 \cdot 6 = 36$, portanto

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,5];

- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,15]

- Calcular corretamente a probabilidade [0,15].

3.

Sabemos que $14 = 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$, portanto há duas combinações possíveis, de um total de $12 \cdot 6 = 72$, logo

$$P = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];

- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]

- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

Urna com bolinhas numeradas

1.

Ora, $10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$, portanto há duas combinações possíveis, de um total de $40 \cdot 39 = 1560$, logo

$$P = \frac{2}{1560} = \frac{1}{780}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

2.

Há $40 - 18 = 26$ números maiores que 18, portanto

$$P = \frac{26}{40} = \frac{13}{20}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

3.

Inicialmente, haviam vinte números pares e vinte números ímpar, todavia foram subtraídos dezessete números pares, resultando em apenas vinte e três bolinhas na caixa, das quais vinte são ímpares, portanto

$$P = \frac{20}{23}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,25];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,3].

Urna com bolinhas coloridas

1.

$$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

2.

Retirando-se dez bolas rosas sobram quinze bolas rosas, de um total de cinquenta, nessas condições

$$P = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];

- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

3.

Há um total de $10+5+3=18$ bolas, como a ordem pode ser diversa é necessário multiplicar pela permutação de três elementos com dois repetidos, daí

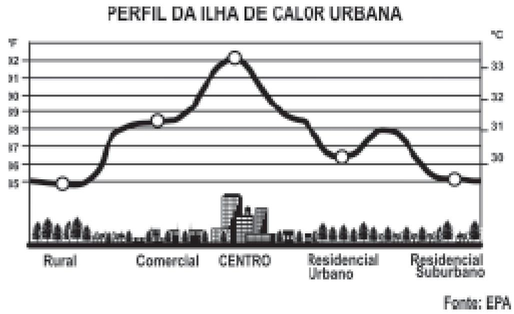
$$P=\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot P_3^2=\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{3!}{2!}=\frac{5}{136}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Identificar a necessidade da permutação [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

3.4 Atividade escrita em dupla

Nesta subseção desejamos descrever como se dará essa atividade em dupla, embora haja esse nome, pode ser feita em trio, pode haver mais de um trio, porém nunca um grupo com quatro pessoas, pois um grupo com quatro pessoa é visto como duas duplas, cada aluno recebe uma folha de atividade e faz em conjunto com os demais componentes da sua dupla ou trio, ambos entregam a atividade que não deverá ter consulta e embora hajam questões objetivas, os cálculos deveram estar presentes para a correção.

1. (Enem [7]) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

A.1/5

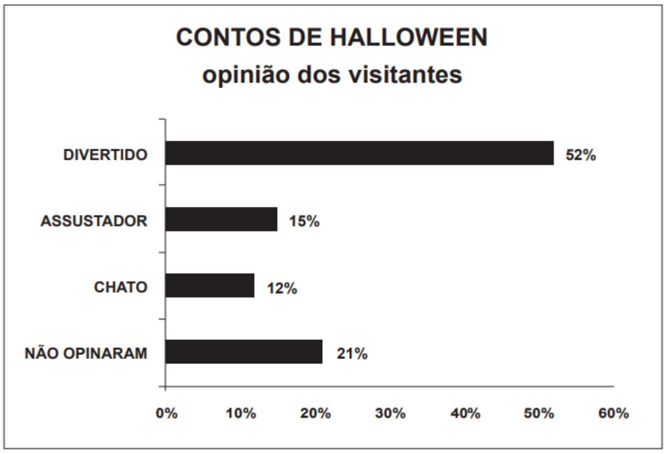
B.1/4

C.2/5

D.3/5

E.3/4

2. (Enem [8]) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

A. 0,09.

B. 0,12.

C. 0,14.

D. 0,15.

E. 0,18.

3. (UNICAMP [3]) João e Maria estão passeando pela floresta. Para não se perderem no caminho, levaram consigo uma sacola com 100 pedrinhas, sendo 60 pedrinhas brancas e 40 pedrinhas pretas. A cada 5 passos eles retiram aleatoriamente uma pedrinha da sacola e jogam-na no chão para marcar o caminho. Quando eles pararam para fazer um lanche, notaram que já tinham sido jogadas 35 pedrinhas brancas e 25 pedrinhas pretas. Qual a probabilidade de as próximas duas pedrinhas jogadas serem brancas?

a) 7/13.

b) 5/13.

c) 11/52.

d) 7/52.

3.4.1 Pauta de Correção

1. Enem

Das quatro opções que ele tem para se mudar ele pode escolher 3, logo

$$P = \frac{3}{4}$$

- Identificar corretamente número de elementos do espaço amostral e do evento desejado [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,25]

2. Enem

Os que não opinaram não concorrem ao sorteio., portanto, $n(\Omega) = 0,52 + 0,15 + 0,12 = 0,79$, ao passo que chato são $0,12$, donde

$$P = \frac{0,12}{0,79} \approx 0,15$$

- Identificar corretamente número de elementos do espaço amostral e do evento desejado [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,25]

3. Unicamp

O total de pedrinhas brancas é $60-35 = 25$, já o de pedrinhas pretas é $40-25 = 15$, portanto $n(\Omega) = 15 + 25 = 40$ logo:

$$P = \frac{25}{40} \cdot \frac{24}{39} = \frac{5}{13}$$

- Identificar corretamente número de elementos do espaço amostral e do evento desejado [0,15]
- Escrever a multiplicação das duas probabilidades [0,2]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,15]

3.5 Lista de Exercícios - Probabilidade Geométrica

Segmentos

1. Um segmento possui comprimento medindo 30 cm, qual a probabilidade de um ponto P estar nos 5 cm iniciais?

2. (Para casa) Qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 2 m, um ponto pertencer exatamente aos 10 cm iniciais?

DICA: transforme metros em centímetros.

Figuras Planas

3. Suponha que o triângulo ABC seja um triângulo retângulo com hipotenusa AB, que CD seja uma altura do triângulo ABC e que AB é igual a 25. Se AD é um número inteiro, qual a probabilidade de CD seja um número inteiro?

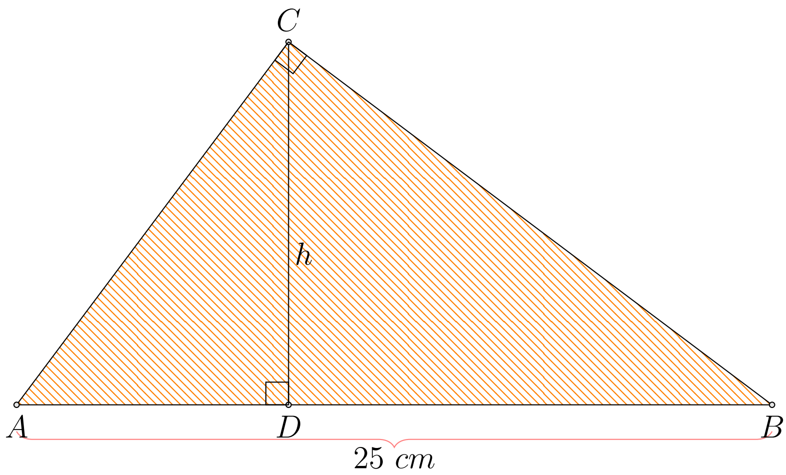


Figura 3.2: Ilustração - questão 03.

4. (Para casa) Em um lançamento de dardos o alvo é quadrado de lado 9cm como na figura, Q1 e Q2 são áreas, sabendo que Q1 é igual a 27 cm2 calcule:

a. O valor de Q2

b. A probabilidade de lançar um dado ele acertar um ponto do quadrado de área Q1

c. A probabilidade de lançar um dado ele acertar um ponto da figura de área Q2

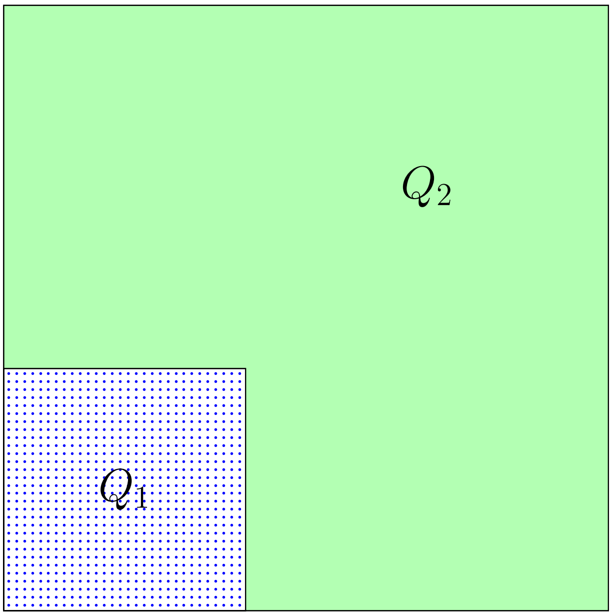


Figura 3.3: Ilustração - questão 04.

5. Um ultraleve sobrevoa uma determinada área do vale de Ceará-Mirim, cuja vista superior é aproximadamente semelhante à figura ao lado. Sabendo que ABCD é um quadrado de lado 8 km e que $S_1 + S_2 + S_3 = 36km^2$, qual a probabilidade do avião pousar na região S_4?

Teorema dos Carpetes

Teorema dos Carpetes, citado na RPM 86 por Nunes (2014)

Teorema 3.5.1. *Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual a área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual a área da região não coberta por carpetes.*

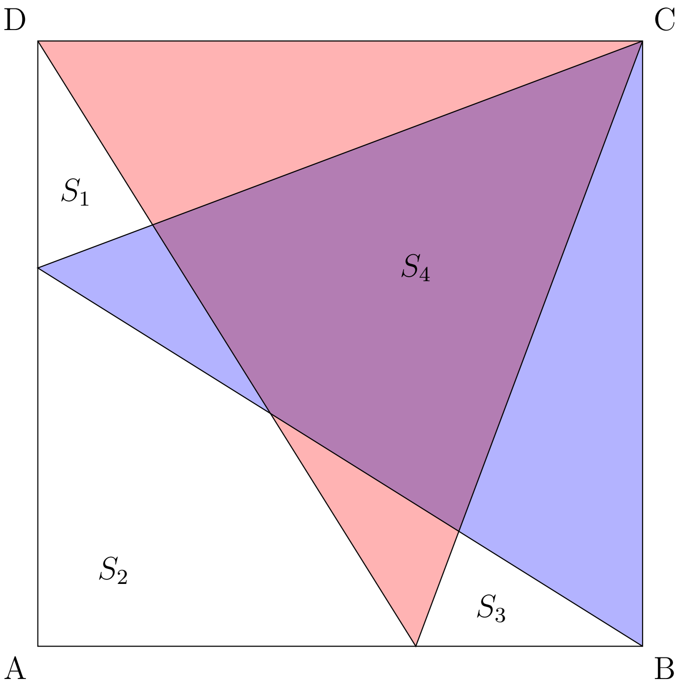


Figura 3.4: Ilustração - questão 05.

6. (Para casa) Considere o círculo desenhado no plano cartesiano abaixo e responda.

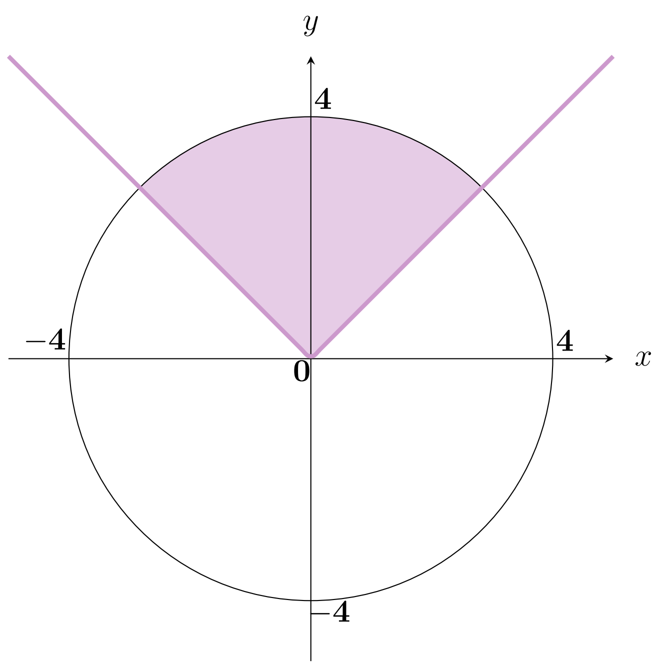


Figura 3.5: Ilustração - questão 06.

a. Qual o valor do raio?

b. Qual o valor da área do círculo inteiro?

c. A região lilás é um setor circular cujo arco mede 90°, qual a sua área?

d. Qual a probabilidade de um ponto estar na área lilás?

7. (Para casa) Na figura abaixo cada círculo tem o raio maior uma unidade que o anterior, por exemplo, o círculo menor de todos tem raio um, o segundo tem raio dois, o terceiro tem raio três e assim sucessivamente. Responda

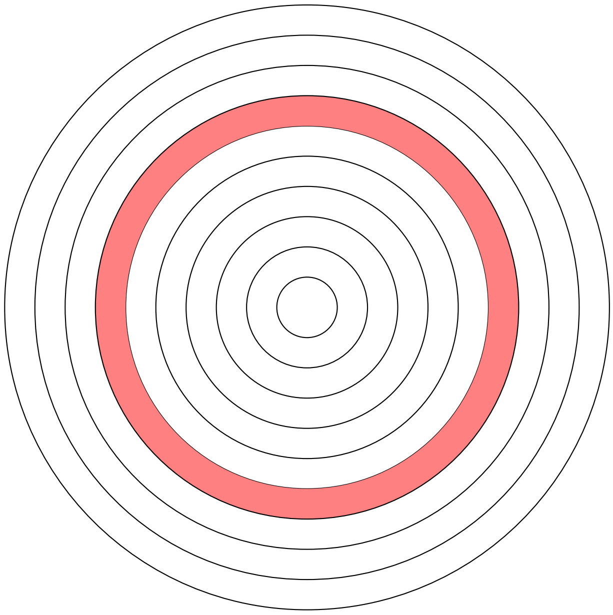


Figura 3.6: Ilustração - questão 07.

a. Qual a área do círculo maior de todos?

b. Qual a área da coroa circular destacada?

c. Qual a probabilidade de ao lançar um dardo ele cair justamente na coroa circular destacada?

8. Durante o recesso de dezembro, pai e filho resolveram descansar da rotina da cidade grande em uma fazenda da família. Chegando lá, buscaram entretenimento em jogos que potencializam a concentração e criatividade, dentre eles, o xadrez e o lançamento de dardos. Em se tratando desse último, havia um alvo representado por um disco vermelho de raio 9 cm, e no seu interior um disco preto de raio igual 6 cm ao do anterior. Admitindo que o dardo lançado pelo filho atinja o alvo, qual a probabilidade do lançamento acertar o disco preto?

9. (Resolver no GeoGebra, em sala) João e Miguel, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 19 horas. Se cada uma delas chegar ao encontro em um instante qualquer entre 19 horas e 20 horas e se um se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pelo outro, qual é a probabilidade deles se encontrarem?

Sólidos Geométricos

10. (Para Casa) Um cubo de aresta 4 cm possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

11. Um cubo de lado $2 \cdot a$ possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

12. Tome todos os vértices de um prisma de base pentagonal e os combine dois a dois. Sorteando uma dessas combinações, qual é a probabilidade de ela ser diagonal do prisma?

13. (Para Casa) Tome todos os vértices de um prisma de base hexagonal e os combine dois a dois. Sorteando uma dessas combinações, qual é a probabilidade de ela ser diagonal do prisma?

14. A figura abaixo mostra uma pirâmide de base quadrada inscrita num cilindro cuja altura e o diâmetro medem 20cm, use $\sqrt{2} = 1,4$. Responda.

a. Sabendo que o lado da base dessa pirâmide é de aproximadamente 14 cm, calcule seu volume arredondando para cima.

b. Calcule o volume do cilindro, use $\pi = 3,14$.

c. Calcule a probabilidade de um ponto ser interior ao cilindro e externo à pirâmide.

3.5.1 Soluções

1

$$P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

2

$$P = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$$

3

Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$$

Todavia, $\overline{AD} + \overline{DB} = 25$ Desejamos que $\overline{CD}$ seja um número inteiro, para tanto, devemos ter que o produto $\overline{AD} \cdot \overline{DB}$ seja um número quadrado perfeito, podemos montar a seguinte tabela para melhor visualização

$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	**Produto**	Favorável?
1	24	$2^3 \cdot 3$	Não
24	1	$2^3 \cdot 3$	Não
2	23	$2 \cdot 23$	Não
23	2	$2 \cdot 23$	Não
3	22	$3 \cdot 2 \cdot 11$	Não
22	3	$3 \cdot 2 \cdot 11$	Não
4	21	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	Não
21	4	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	Não
5	20	10^2	Sim
20	5	10^2	Sim
6	19	$2 \cdot 3 \cdot 19$	Não
19	6	$2 \cdot 3 \cdot 19$	Não
7	18	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$	Não
18	7	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$	Não
8	17	$2^3 \cdot 17$	Não
17	8	$2^3 \cdot 17$	Não
9	16	$2^4 \cdot 3^2$	Sim
16	9	$2^4 \cdot 3^2$	Sim
10	15	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	Não
15	10	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	Não
11	14	$2 \cdot 7 \cdot 11$	Não
14	11	$2 \cdot 7 \cdot 11$	Não
12	13	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	Não
13	12	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	Não

Tabela 3.14: Soma 25 e produto quadrado perfeito

Portanto,

$$P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

4

a

$$A = 9^2 - 27 = 54cm^2$$

b

$$P = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

c

$$P = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

5

$$P = \frac{36}{8^2} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

6

a

O raio mede 4cm

b

$$A = 4^2\pi = 16\pi$$

c

$$A = \frac{1}{4} \cdot 4^2\pi = 4\pi$$

d

$$P = \frac{4\pi}{14\pi} = \frac{1}{4}$$

7

a

$$A = 10^2\pi = 100\pi$$

b

$$A = (7-6)^2\pi = \pi$$

c

$$P = \frac{\pi}{100\pi} = \frac{1}{100}$$

8

$$P = \frac{(9^2-6^2)\pi}{9^2\pi} = \frac{1}{9}$$

9

Digamos que João chegou em um instante x e Miguel em um instante y, para que haja encontro devemos ter $|x-y| \leq 10min$, daí:

$$-10 \leq \ x-y \leq 10 \implies$$

$$y \leq x+10$$

ou

$$y \geq x-10$$

Ora, eles chegaram entre 19 e 20 horas, então $0 \leq x \leq 60min$ e $0 \leq y \leq 60min$, dessa maneira podemos considerar o seguinte gráfico.

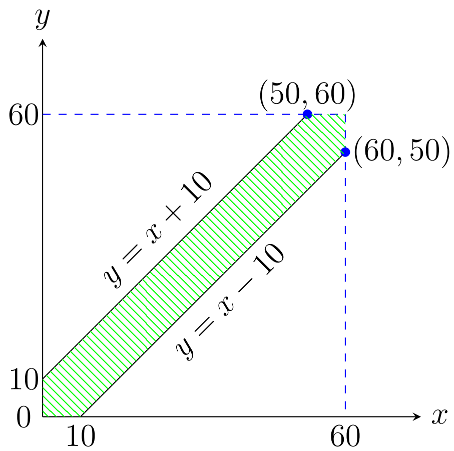


Figura 3.7: Questão 09 - gráfico para resolução.

Portanto o cálculo da área em destaque é

$$60^2 - \frac{(60-10)^2}{2} \cdot 2 = 3600 - 2500 = 1100$$

Cálculo da probabilidade

$$P = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$$

Construção no GeoGebra da Figura 3.7

Digite $\mathbf{y = x + 10}$) e clique enter;

Digite $\mathbf{y = x - 10}$ e clique enter;

Digite $x = 60$ e clique enter;

Digite $y = 60$ e clique enter;

Clique em **ferramentas**, na seção de **ponto** clique em **interseção de dois objetos**;

No gráfico clique na reta $y = x + 10$ e no eixo y;

Clique na reta $y = x + 10$ e na reta $y = 60$;

Clique na reta $y = 60$ e na reta $x = 60$;

Clique na reta $y = x - 10$ e na reta $x = 60$;

Clique na reta $y = x - 10$ e no eixo x;

Clique no eixo y e no eixo x;

Em **ferramentas**, na seção de **polígonos** clique em **polígono**;

Trace um polígono clicando nos pontos obtidos a partir das interseções;

Em **ferramentas**, na seção **medições**, clique é **áreas**;

Clique no polígono;

Em **ferramentas**, na seção **mídia**, clique em **texto**;

Clique na opção **fómula LaTeX**;

Digite

```
$P=\frac{1100}{3600}=\frac{11}{36}$
```

e clique em **ok**.

Disponibilizamos o *link* para conferência.

10

O raio da esfera é metade da diagonal do cubo, logo

$$R = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Portanto o volume da esfera é

$$V = \frac{4(2\sqrt{3})^3\pi}{3} = \frac{4\cdot 8\cdot 3\sqrt{3}}{3} = 32\sqrt{3}$$

Logo a probabilidade vale

$$P = \frac{4^3}{32\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

11

O raio (R) da esfera será igual a metade da diagonal do cubo, donde

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

e seu volume será igual a

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi(\frac{a\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^3}{\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Comentário: A ideia é que o aluno perceba que independente da aresta do cubo a probabilidade será sempre a mesma.

12

São dez vértices, sendo cinco em cada face, o número de elementos do Espaço Amostral é

$$\frac{10\cdot 9}{2!} = 45$$

O número de elementos do Evento é

$$\frac{5\cdot 4}{2!} = 10$$

Portanto a probabilidade é

$$P = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

13

São doze vértices, sendo seis em cada face, o número de elementos do Espaço Amostral é

$$\frac{12\cdot 11}{2!} = 66$$

O número de elementos do Evento é

$$\frac{6\cdot 5}{2!} = 15$$

Portanto a probabilidade é

$$P = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}$$

14

a

O diâmetro do círculo é igual a diagonal do quadrado, donde

$$l\cdot\sqrt{2} = 20 \implies l \approx 14cm$$

A altura do cilindro é igual à altura da pirâmide, portanto denotando V_p para volume da pirâmide, temos:

$$V_p = \frac{20 \cdot 14^2}{3} \approx 1306,7cm^3$$

b

Denotando V_c para volume do cilindro, temos:

$$V_c = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 20 = 6280cm^3$$

c

$$P = \frac{6280 - 1306,7}{6280} = \frac{49733}{6280}$$

3.6 Prova- Probabilidade Geométrica

1) Um segmento de reta de 12 cm de comprimento é dividido aleatoriamente em dois outros segmentos, com o maior medindo 9cm. Qual a probabilidade de um ponto estar no segmento menor?

2) Em um alvo circular de raio 7 cm, há um quadrado inscrito, cujo lado mede 10 cm, pintado de vermelho. Se um dardo atingir o alvo aleatoriamente, qual a probabilidade de acertar fora do quadrado vermelho? (Use $\pi = 3$)

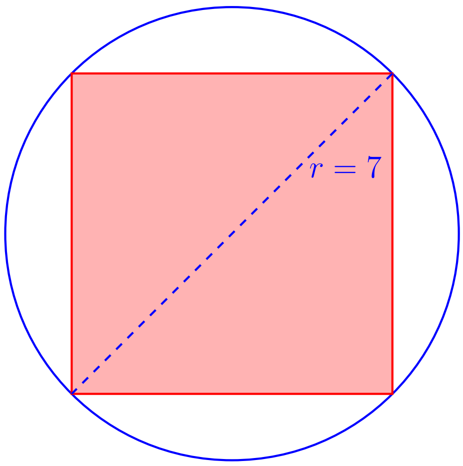


Figura 3.8: Figura da questão 02.

3) Duas placas retangulares, cada uma com área de 24 m^2, são colocadas sobre um piso de 48 m^2 formando uma região não coberta pelas placar de 12 m^2. Acidentalmente, derramou-se tinta no chão, qual a probabilidade de essa tinta ficar somente na região de sobreposição das placas? Dica: Aplique o Teorema dos Carpetes mencionado no exercício 5 da lista.

4) Um cubo de aresta 6 cm está inscrito em uma esfera de raio $3\sqrt{3}$ cm está inscrita em um cubo de aresta 6 cm. Se um ponto interno da esfera for escolhido aleatoriamente,

qual a probabilidade de que ele esteja fora do cubo? (Use $\pi = 3$)

5) Um reservatório cilíndrico de raio 4 m e altura 10 m contém uma esfera maciça de raio 3 m colocada aleatoriamente em seu interior. Se um ponto dentro do reservatório for escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que esse ponto esteja na esfera? (Use $\pi = 3$)

3.6.1 Soluções e Pauta de Resolução

1) Ora, o menor lado mede $12 - 9 = 3$cm, portanto

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

- Calcular a medida do menor lado [0,5]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,5]

2) Cálculo da área do quadrado $A_q = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$.

Cálculo da área do círculo $A_c = \pi \cdot 7^2 = 49 \cdot 3 = 147 \text{ cm}^2$.

Cálculo da área da região desejada $A = 147 - 100 = 47 \text{ cm}^2$.

Donde

$$P = \frac{47}{147}$$

- Calcular corretamente a área do quadrado [0,25]
- Calcular corretamente a área do círculo [0,25]
- Calcular corretamente a área desejada [0,25]
- Calcular corretamente probabilidade [0,25]

3) Pelo Teorema, temos que a área de sobreposição é igual a área não coberta, logo

$$P = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

- Aplicar corretamente o Teorema [0,5];
- Calcular corretamente a probabilidade [0,5].

4) Cálculo do Volume da esfera

$$V_E = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (3\sqrt{3})^3 = 324$$

Cálculo do Volume do cubo

$$V_C = 6^3 = 216$$

Cálculo do Volume da região desejada

$$V = 324 - 216 = 108$$

Portanto

- Calcular corretamente o volume da esfera [0,25]
- Calcular corretamente o volume da do cubo [0,25]
- Calcular corretamente o volume desejado [0,25]
- Calcular corretamente probabilidade [0,25]

5) Cálculo do volume da Esfera

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (3)^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 27 = 4 \cdot 27 = 108$$

Cálculo do volume do Cilindro

$$V_C = \pi r^2 h = 3 \cdot (4)^2 \cdot 10 = 3 \cdot 16 \cdot 10 = 480$$

Portanto

$$P = \frac{108}{480} = \frac{9}{40}$$

- Calcular corretamente o volume da esfera [0,35]
- Calcular corretamente o volume da do cilindro [0,35]
- Calcular corretamente probabilidade [0,3]

3.7 Execução sequencial no GeoGebra

Nessa subseção iremos mostrar como usar o GeoGebra, versão on-line, para plotar o gráfico da figura 1.3. Como o *software* trabalha com número reais iremos fixar valores para l e d, respectivamente, 1 e 5. Observe o algoritmo:

Digite $\mathbf{y} = -\mathbf{sen}(\mathbf{x})$ e clique enter;

Digite $\mathbf{y} = \mathbf{5} - \mathbf{sen}(\mathbf{x})$ e clique enter;

Digite **IntegralEntre(y = −sen(x),y = 0,pi,2pi)** e clique enter;

Digite **IntegralEntre(y = 5,y = 5 − sen(x),0,pi)** e clique enter;.

Disponibilizamos o *link* para conferência.

Como falado na seção **??** o GeoGebra torna o processo mais participativo e acessível no que se refere à área de regiões entre curvas.

3.8 Atividade da Agulha de Buffon e Aplicações à Biologia

1) Utilizando a teoria desenvolvida em sala de aula acerca da Agulha de Buffon resolva o seguinte problema: Em um salão cujo assoalho é dividido apenas por fissuras paralelas e igualmente espaçadas em 40 cm alguém joga para o alto uma agulha de 5 cm, qual a probabilidade de ela tocar a fissura ?

2) Em uma análise estereológica de tecido biológico, foram utilizadas duas sondas diferentes para estimar parâmetros geométricos.

   a Em um primeiro experimento, aplicou-se uma malha de sondagem sobre uma área de 100 $\quad mm^2$ A estrutura analisada consistia em fibras lineares, que interceptaram os fios da sonda em 25 pontos. Determine o valor do L_v

   b Na segunda situação, ao colocar o tecido na sonda viu-se algo como na figura abaixo

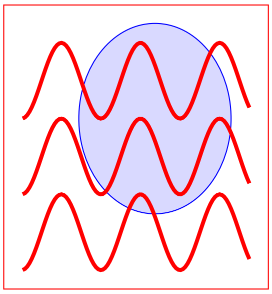


Figura 3.9: Ilustração de superfície de tecido em sonda

Calcule o valor do S_v, sabendo que cada curva vermelha mede 7mm.

3.8.1 Resolução e Pauta de Correção

1 Vimos em sala que a probabilidade de tocar a fissura é dado por

$$P = 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d}$$

Portanto

$$P = 2 \cdot \frac{5}{\pi \cdot 40} = \frac{1}{4 \cdot \pi}$$

- Evocar o caso geral da Agulha de Buffon [0,35];
- Substituir corretamente os valores [0,35];
- Calcular corretamente a probabilidade [0,3].

2 a

$$L_v = 2 \cdot \frac{Q}{A} = 2 \cdot \frac{25}{100} = \frac{1}{2}$$

- Substituir corretamente os valores [0,65];
- Efetuar o cálculo corretamente [0,6].

b

$$S_v = 2 \cdot \frac{I}{L} = 2 \cdot \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$$

- Substituir corretamente os valores [0,65];
- Efetuar o cálculo corretamente [0,6].

Bibliografia

[1] Piero Anversa, Giorgio Olivetti e Alden V. Loud. “Morphometric study of early postnatal development in the left and right ventricular myocardium of the rat”. Em: *Circulation Research* 46.4 (1980), pp. 503–512. DOI: 10.1161/01.RES.46.4.503.

[2] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 11 jun. 2025. Brasília, DF, 2018.

[3] Comissão Permanente para os Vestibulares da Unicamp (Comvest). *Prova da 1ª Fase do Vestibular Unicamp 2024*. PDF disponível no site da Comvest. Aplicada em 29 de outubro de 2023. 2023.

[4] John Dewey. *Experiência e Educação*. Trad. por Renata de Almeida Prada. Vol. 45. Biblioteca universitária. Série 2ª. Original publicado em 1938. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.

[5] Carlos Gomes, Iesus C. Diniz e Roberto Teodoro. *Matemática discreta: conjuntos, recorrência, combinatória e probabilidade: volume 1*. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

[6] Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter e Zsolt Lavicza. “Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra”. Em: *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 28.2 (2009), pp. 135–146.

[7] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Prova do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), edição 2011*. Disponível online via portal do INEP ou Diário Oficial da União. 2011.

[8] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Prova do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), edição 2012*. Disponível online via portal do INEP ou Diário Oficial da União. 2012.

[9] Tatiane Aline Rodrigues Kayser. “Probabilidade Geométrica: Contribuições para o Ensino de Matemática na Educação Básica”. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal do Rio Grande, 2023. Orientador: Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior. Diss. de mestr. Santo Antônio da Patrulha, RS: Universidade Federal do Rio Grande, 2023.

[10] Fábio Martins de Leonardo, ed. *Conexões: Matemática e suas Tecnologias: Manual do Professor*. 1ª ed. 6 vol. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. São Paulo: Editora Moderna, 2020.

[11] E. B. Mallon e N. R. Franks. "Ants estimate area using Buffon's needle". Em: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 267.1445 (2000), pp. 765–770. DOI: `10.1098/rspb.2000.1069`. URL: `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspb.2000.1069`.

[12] Carlos Alberto Mandarim-de-Lacerda. "Stereological tools in biomedical research". Em: *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 75 (2003), pp. 469–486.

[13] Peter R. Mouton. *Unbiased Stereology: A Concise Guide*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2011. URL: `https://www.press.jhu.edu/books/title/11944/unbiased-stereology`.

[14] Eder Pereira Neves, Florindo Contini Neto e Washington de Mendonça. "Uma Sequência de Ensino Probabilidade Geométrica com o uso do Geoplano". Em: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil, 2011.

[15] G. Olivetti et al. "Cardiomyopathy of the aging human heart. Myocyte loss and reactive cellular hypertrophy". Em: *Circulation Research* 68 (1991), pp. 1560–1568.

[16] J. F. Ramaley. "Buffon's Noodle Problem". Em: *The American Mathematical Monthly* 76.8 (1969), pp. 916–918. URL: `https://www.jstor.org/stable/2317945`.

[17] Antônio Roberto da Silva. "Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica". Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), orientada pelo Dr. Jaques Silveira Lopes. Diss. de mestr. Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), 2017, p. 62.

[18] Francisco Heber da Silva. "Discutindo probabilidade geométrica no ensino básico". Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2013. Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues. Coorientador: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia. Diss. de mestr. Mossoró: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2013.

[19] Herbert Solomon. *Geometric Probability*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 28. Supported by the National Science Foundation. Philadelphia, PA: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1978.