Universidade Estadual de Feira de Santana
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PRODUTO EDUCACIONAL: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Rotações e reflexões de polígonos regulares com o uso do geogebra e de material manipulável

Autor:	Marcos Weslley Vitória Brandão
Orientador:	Kisnney Emiliano de Almeida
Público-alvo:	Alunos do 3° ano do ensino médio
Área de Conhecimento:	Matemática
Local e Data:	Feira de Santana, 2026
Duração:	14 aulas de 50 minutos
Objetivo geral:	Construir de forma subjacente a ideia de grupo diedral, conhecendo propriedades importantes dessa estrutura algébrica. Aprender a fazer rotações, reflexões e composições destas por meio do geogebra e também com uso de material manipulável.
Competências e habilidades:	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
Conteúdos:	Isometrias, polígonos regulares, permutações, funções (composição, inversa), propriedades algébricas de operações.
Metodologia:	A estratégia utilizada para alcançar os objetivos desejados foi utilizar ferramentas novas para os estudandes, superando a rotina de sala de aula. Nesse sentido, foram utilizados o software matemático Geogebra e materiais manipuláveis para resolver uma sequência de atividades articuladas que a cada passo permitiu o alcance do que foi almejado.
Materiais:	Software matemático Geogebra, material manipulável, computador, datashow, lápis, borracha, folha de ofício, caneta, papelão, listas de atividades, caixas de bombons, cronômetro.
Avaliação:	A avaliação será processual considerando as produções realizadas durante a aplicação das atividades.

Atividade 1: oficina de montagem de polígonos regulares

- Objetivos:

  → Conhecer um processo de construção de polígonos regulares usando instrumentos de geometria: régua, compasso e transferidor.

  → Construir polígonos regulares com materiais de fácil acesso usando instrumentos de geometria: régua, compasso e transferidor.

  → Interiorizar propriedades importantes dos polígonos regulares por meio dos processos de construção.

- Metodologia:

  → Organização da turma em fileiras em direção para o quadro onde haverá a projeção de slides.

  → Orientações sobre os procedimentos de construção de cada um dos polígonos com slides projetados para instruir todos simultaneamente.

  → Construção conjunta de polígonos regulares usando os materiais disponibilizados para todos.

- Avaliação:

  A expectativa é de que os alunos mostrem comprometimento nos processos de construção dos polígonos, portanto espera-se que haja grande compatibilidade entre as orientações dadas sobre a estrutura dos polígonos mostradas nos slides e o produto final que os alunos entregarão.

- Materiais:

  Computador, datashow, papelão, régua, compasso, transferidor, lápis, borracha, tesoura, cola e folhas de ofício coloridas e brancas e palitos de dente.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em quatro aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Usando um pedaço de papelão e seguindo as instruções mostradas nos slides, os alunos irão desenhar um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular. Em seguida eles irão recortar as figuras usando as tesouras disponíveis. Depois com papel ofício colorido eles cobrirão as figuras escolhendo uma mesma cor para cada uma delas (por exemplo, azul). Os vértices dos polígonos serão indicados seguindo a ordem alfabética, em ambos os lados, de acordo com o número de vértices que o polígono possuir. Também será necessária a construção de uma base para realizar as isometrias. Isso será feito em uma folha de ofício branca na qual serão feitas marcações dos vértices em uma posição fixa inicial para o polígono, além dos eixos de simetria dele.

  Os métodos de construção dos polígonos estão indicados abaixo.

  → Triângulo equilátero (10 cm de lado)

  1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
  2. Marque um ponto A no início da linha traçada.
  3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
  4. Mantendo a abertura de 10 cm e com o compasso centrado em A, faça um arco no semiplano superior à linha. Mantendo a abertura de 10 cm e com o compasso centrado em A, faça um arco no semiplano superior à linha.
  5. Com a abertura de 10 cm e com o compasso centrado em B, faça um arco no semiplano superior à linha.
  6. Marque o ponto C determinado pelo encontro dos arcos no semiplano superior à linha.

7. Com a régua ligue os pontos A e C formando o segmento AC.
8. Com a régua ligue os pontos B e C formando o segmento BC.

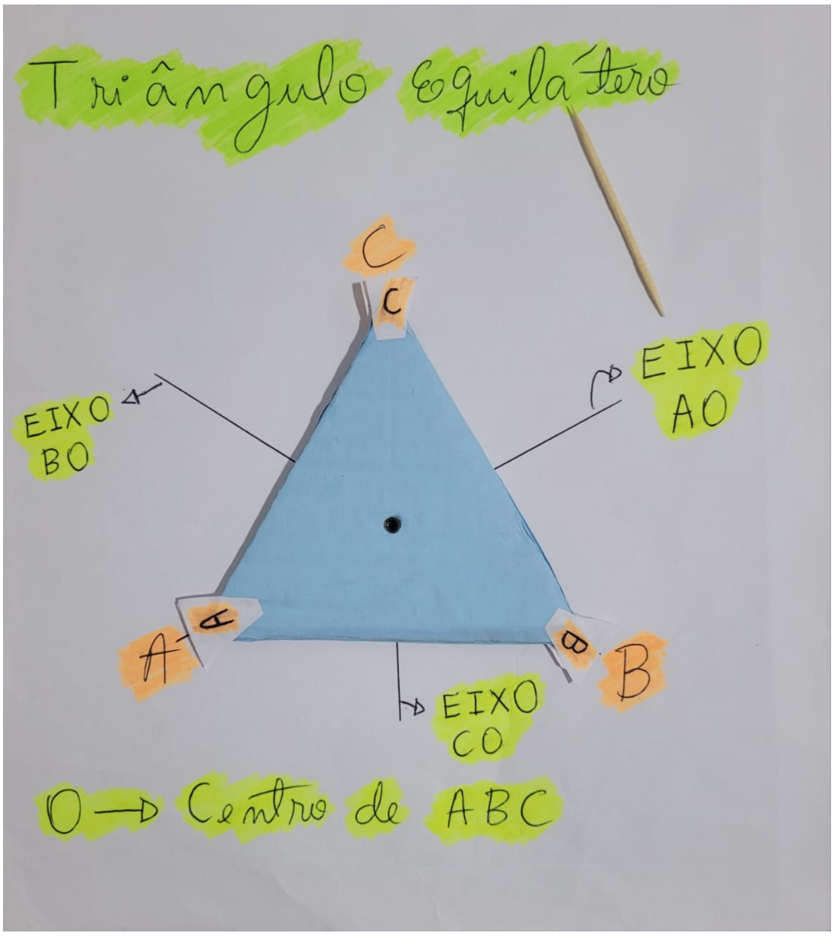


Figura 1: Triângulo equilátero e base para isometrias construídos

→ Quadrado (10 cm de lado)

1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
2. Marque um ponto A na linha traçada.
3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
4. Com o compasso centrado no ponto A e uma abertura de 3 cm, marque os pontos A' e A" sobre a linha que equidistam 3 cm de A.

5. Com o compasso centrado em A' e abertura de 4 cm trace o arco no semiplano superior à linha.
6. Com o compasso centrado em A" e abertura de 4 cm trace o arco no semiplano superior à linha.
7. Marque o ponto C' determinado pela interseção dos arcos centrados em A' e A".
8. Trace a reta AC' e com compasso centrado em A e abertura de 10 cm marque o ponto C sobre AC' no semiplano superior à AB.
9. Proceda de maneira análoga para determinar o ponto D.
10. Ligue os pontos A, B, C e D formando o quadrado.

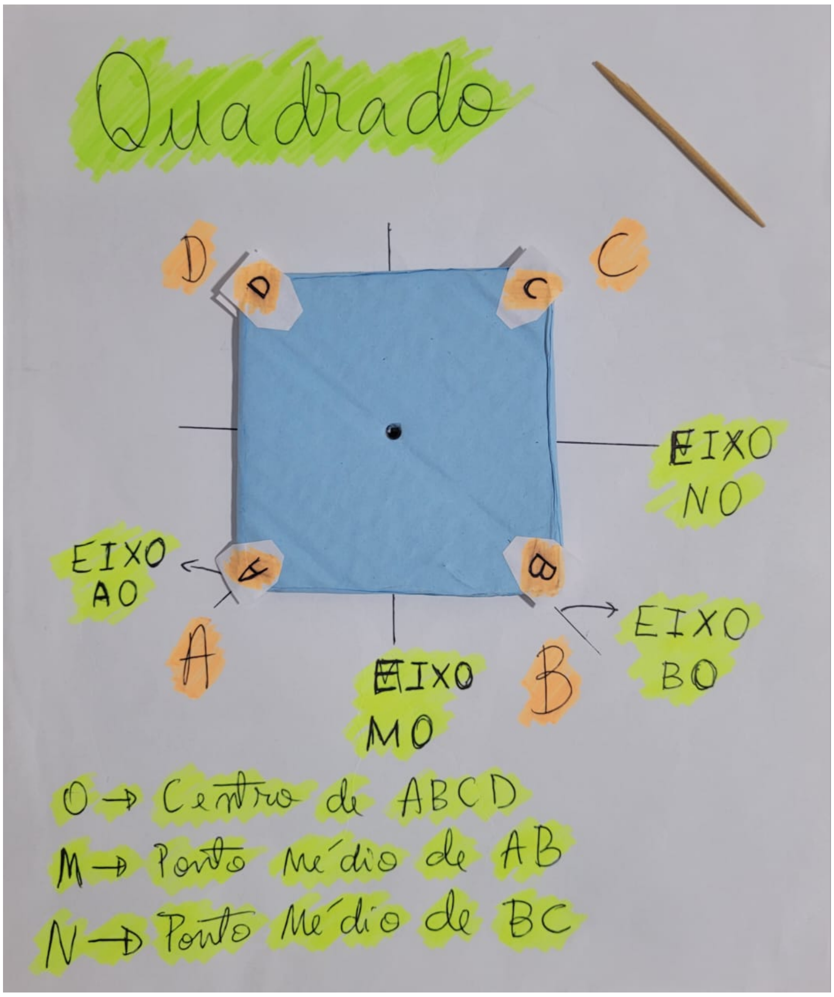


Figura 2: Quadrado e base para isometrias construídos

→ Pentágono regular (10 cm de lado)

1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
2. Marque um ponto A na linha traçada.
3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
4. Mantendo a abertura de 10 cm, centre o compasso em A e trace a circunferência de 10 cm de raio (C_1). Depois centre o compasso em B e trace outra circunferência de raio 10 cm (C_2).
5. Sendo C o ponto superior e D o ponto inferior de interseção entre as circunferências, trace a semirreta de origem D que passa por C. Sendo C o ponto superior e D o ponto inferior de interseção entre as circunferências, trace a semirreta de origem D que passa por C.
6. Trace a circunferência cujo centro é D e o raio mede 10 cm (C_3). Depois destaque os pontos E ($C_1 \cap C_3$) e F ($C_2 \cap C_3$), sendo eles as interseções da atual circunferência com as duas anteriores.
7. Marque o ponto G, sendo ele a interseção da circunferência C_3 com a semirreta de origem D que passa por C. Depois trace as retas EG e FG.
8. Marque o ponto H determinado pela interseção entre C_1 e FG e o ponto I determinado pela interseção entre C_2 e EG de tal forma que $G \in FH$ e $G \in EI$.
9. Trace uma circunferência centrada em H cujo raio é igual a 10 cm (C_4), depois trace uma circunferência centrada em I cujo raio é igual a 10 cm (C_5).
10. Marque o ponto J, interseção de C_4 com a semirreta de origem D que passa por C (sendo $C \in GJ$).
11. Ligue os pontos A, B, I, J e H formando o pentágono regular de lado 10 cm.

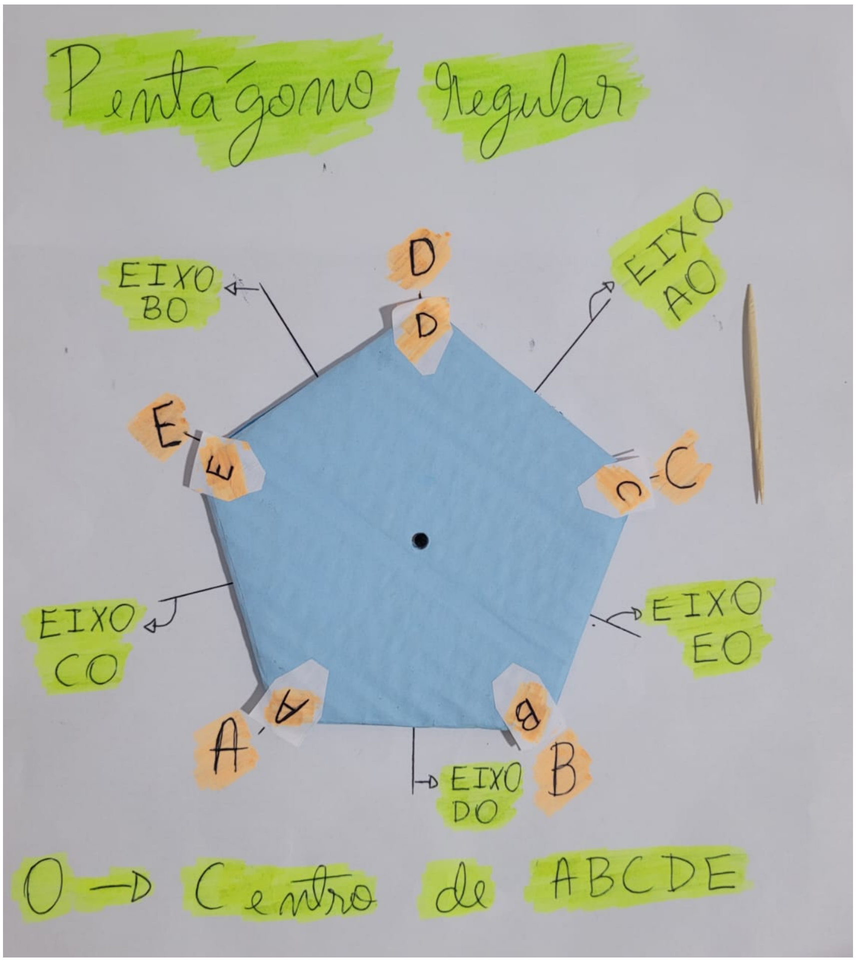


Figura 3: Pentágono regular e base para isometrias construídos

→ Hexágono regular (10 cm de lado)

1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
2. Marque um ponto A na linha traçada.
3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
4. Trace a circunferência centrada em A de raio 10 cm depois trace a circunferência centrada em B de raio 10 cm.
5. Marque o ponto O, sendo ele a interseção das circunferências no semiplano superior à reta AB.
6. Trace a circunferência c centrada em O de raio 10 cm.
7. A partir do ponto B e mantendo a abertura de 10 cm do compasso, trace sobre a circunferência c os pontos C, D,

E e F de moda a dividir c em 6 partes iguais.

8. Ligue os pontos A, B, C, D, E e F formando o hexágono regular de lado 10 cm.

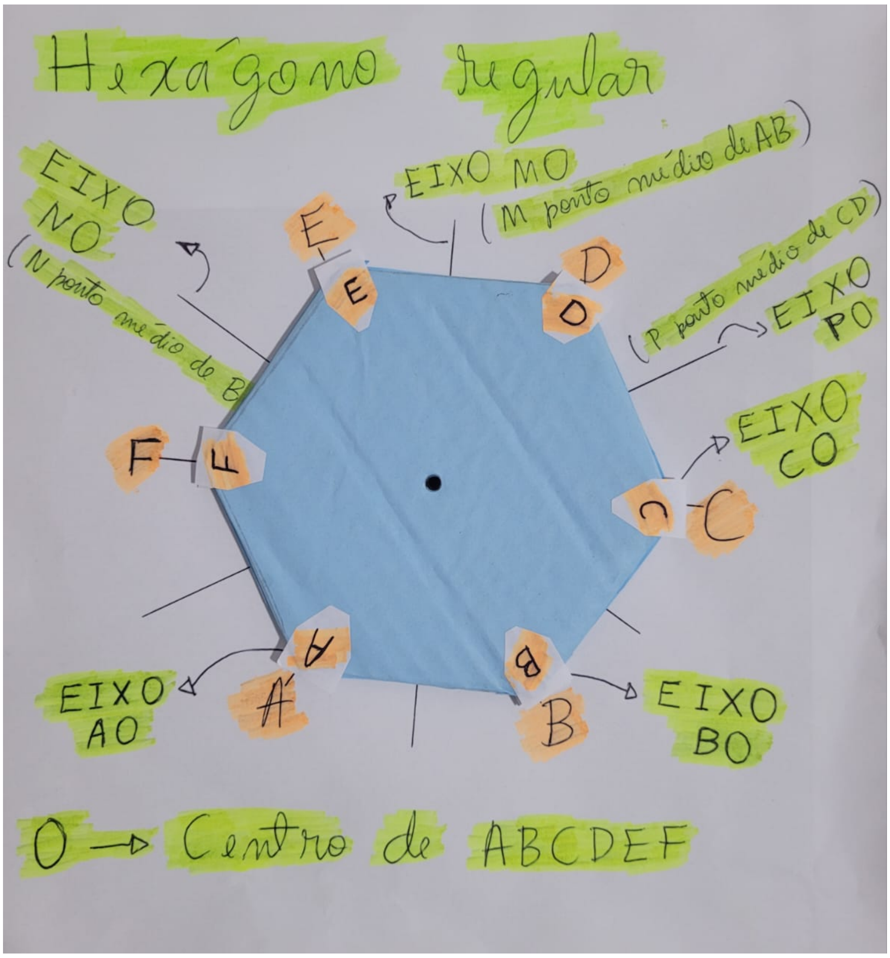


Figura 4: Hexágono regular e base para isometrias construídos

Atividade 2: Revisando conceitos importantes

- Objetivos:

  → Revisar características e propriedades importantes a respeito dos polígonos regulares.

  → Compreender os processos necessários para realizar rotações e reflexões.

  → Realizar rotações, reflexões e composições destas em polígonos regulares.

- Metodologia:

  → Uso do laboratório de informática escolar disponibilizando computadores com internet e acesso individual.

  → Atividade criada e disposta no google forms a qual deve ser compartilhada para o email de cada aluno.

  → Uso livre da internet para pesquisar eventuais dúvidas sobre a atividade.

  → Apresentação final das respostas corretas das questões, mostrando o enunciado e a expectativa de resposta.

- Avaliação:

  Os alunos serão avaliados de acordo com as respostas dadas no formulário, observando qual era a expectativa de resposta e a que foi colocada.

- Materiais:

  Computadores com acesso à internet, datashow, lápis, borracha, folha de ofício.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos serão encaminhados para o laboratório de informática da escola. Todos serão orientados a acessar o e-mail pessoal onde encontrarão um link de acesso ao formulário de atividade. O link será enviado pelo professor ao email pessoal de cada um dos alunos participantes. O professor irá projetar a tela do seu computador com o datashow para apresentar aos alunos a versão final de resposta esperada. Isso ocorrerá após todos os alunos finalizarem a resolução da atividade.

  A seguir será apresentado o formulário de atividade aplicada na aula.

  1 - Considerando os seus conhecimentos sobre polígonos regulares analise as afirmações abaixo.

  I - Os polígonos regulares possuem todos os lados congruentes.

  II - Os ângulos internos de um polígono regular nem sempre são congruentes.

  III - O triângulo equilátero, o quadrado e o trapézio são exemplos de polígonos regulares.

  IV - O centro de um polígono regular coincide com o centro do círculo circunscrito a ele.

  Pode-se afirmar que são verdadeiras as afirmações

  a) I, II e III

  b) I, III e IV

  c) I e IV

  d) II e III

  e) I, II, III e IV

  Resposta: alternativa c)

  2 - A respeito das isometrias de rotação e reflexão, julgue as afirmações a seguir.

I - Um tipo de simetria possível é a reflexão axial em que ocorre o espelhamento de uma figura em relação a uma reta.

II - Para realizar uma rotação é necessário determinar o ponto em torno do qual ocorrerá a rotação, o ângulo de rotação e o sentido de rotação.

III - Os sentidos possíveis de rotação no plano são horário e anti-horário.

IV - Os polígonos regulares possuem eixos de simetria que são retas que passam pelo centro deles e os dividem em partes espelhadas em relação a elas.

Pode-se afirmar que são verdadeiras as afirmações

a) I, II e III

b) I, III e IV

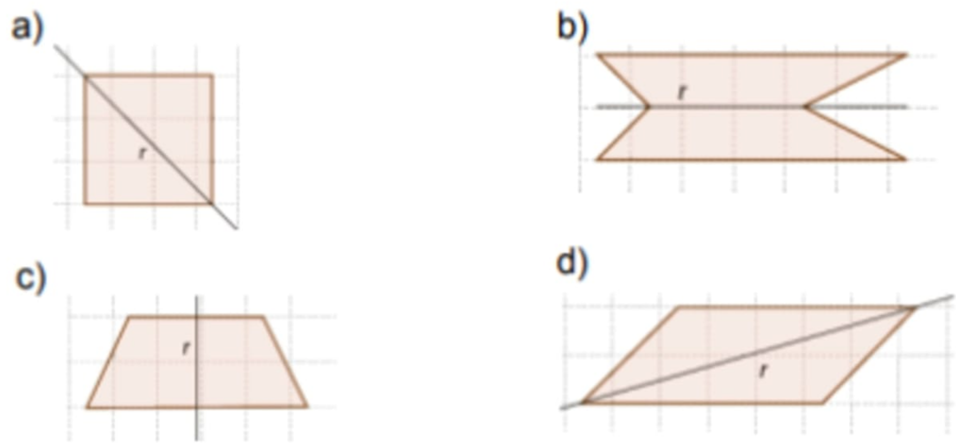
c) I e IV

d) II e III

e) I, II, III e IV

Resposta: alternativa e)

3 - (adapatada de [1]) Qual dentre as figuras abaixo não apresenta simetria em relação à reta r?



[1] https://brainly.com.br/tarefa/36016294

Resposta: alternativa d)

4 - (adapatada de [2]) Marque a alternativa que indica corretamente a isometria que ocorreu da figura F_1 para a figura F_2.

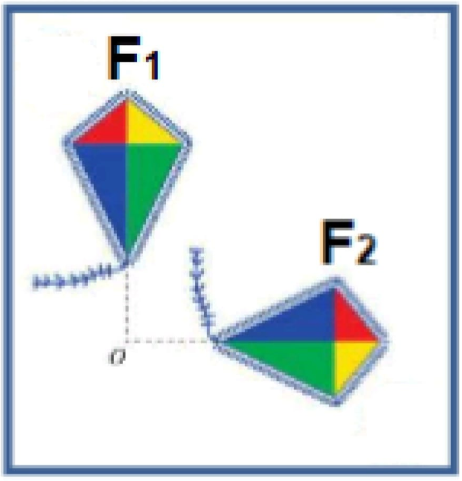


Figura 5: Ilustração da isometria de F_1 para F_2

a) Rotação em relação ao ponto O de 270º no sentido anti-horário.

b) Rotação em relação ao ponto O de 90º no sentido anti-horário.

c) Reflexão em relação ao ponto O de 270º no sentido horário.

d) Rotação em relação ao ponto O de 180º no sentido anti-horário.

e) Translação em relação ao ponto O de 90º no sentido anti-horário.

Resposta: alternativa a)

5 - Nos quadros A, B e C da figura ocorreram transformações geométricas. A sequência correta de isometrias em A, B e C é, respectivamente,

[2] https://pt.scribd.com/presentation/329627366/1-Isometrias

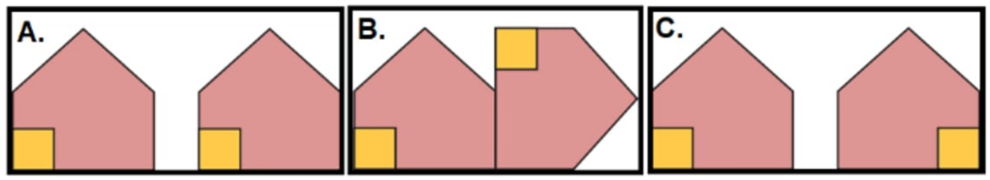


Figura 6: Ilustração da sequência isometrias

a) rotação, translação e reflexão.

b) translação, reflexão e rotação.

c) reflexão, translação e rotação.

d) translação, rotação e reflexão.

e) rotação, reflexão e translação.

Resposta: alternativa d)

6 - (ENEM 2018 - adaptada) A figura de coração destacada abaixo sofreu uma rotação de 45º no sentido anti-horário em relação ao ponto A. Depois sofreu uma reflexão em relação a reta vertical r.

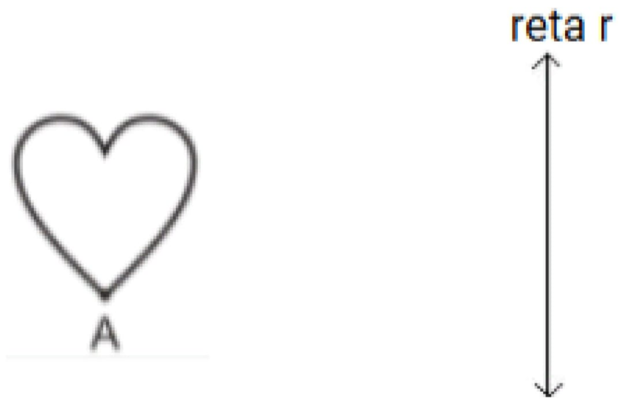


Figura 7: Ilustração do coração, do ponto A e da reta r

A posição final da figura após a aplicação das isometrias é

a) 

b) 

c) 

d) 

Resposta: alternativa a)

Atividade 3: Quiz interativo

- Objetivos:

  → Avaliar veracidade de enunciados a respeito dos polígonos regulares e das isometrias de rotação e reflexão.

  → Desenvolver o aspecto competitivo aliado ao processo de aprendizagem de conteúdo.

  → Interiorizar propriedades importantes dos polígonos regulares e das isometrias de rotação e reflexão.

- Metodologia:

  → Turma organizada em duas equipes com metade da quantidade total de alunos em cada equipe.

  → Condução da atividade pelo professor que orientará todo o processo, inclusive as perguntas que serão feitas para cada equipe.

  → Projeção das perguntas em tela com datashow para que as duas equipes possam visualizar a questão colocada.

  → Apresentação de gabarito na tela projetada para cada pergunta feita e explicação do professor após a resposta dada pela equipe.

- Avaliação:

  Após a conclusão da atividade espera-se que os alunos participantes consigam diferenciar enunciados válidos dos inválidos tanto para polígonos regulares quanto para isometrias de rotação e reflexão. Além disso, os alunos serão avaliados pelo empenho demonstrado durante a realização da atividade.

- Materiais:

  Computador, datashow, cronômetro, lápis, borracha, papel de ofício, quatro caixas de bombons.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  A turma será dividida em duas equipes com a mesma quantidade de participantes ou com uma das equipes com um participante a mais (caso haja uma quantidade ímpar de alunos). O professor responsável pela aplicação da atividade conduzirá as perguntas em dez rodadas sendo que em cada rodada será feita uma pergunta a cada equipe. As cinco primeiras rodadas envolverão perguntas sobre polígonos regulares, as cinco últimas envolverão perguntas sobre isometrias de rotação e reflexão. Cada pergunta valerá 10 pontos para a primeira equipe perguntada e caso esta erre ou não saiba poderá ser repondida pela outra equipe valendo 5 pontos. A equipe que fizer mais pontos no fim das dez rodadas será a vencedorá, mas caso as duas equipes terminem com a mesma pontuação após as dez rodadas, a competição terminará empatada. Caso haja vencedor a premiação será quatro caixas de bombons para a equipe vencedora e caso termine empatado a premiação será dividida para as duas equipes (duas caixas de bombom para cada equipe). O tempo para responder cada pergunta será de no máximo dois minutos e trinta segundos, sendo cronometrado após cada pergunta e as equipes poderão realizar consultas para responder as perguntas.

  Primeira rodada

  a) Qual é o nome do polígono regular de três lados?
     Resposta: triângulo equilátero

  b) Qual é o nome do polígono regular de quatro lados?
     Resposta: quadrado

  Segunda rodada

a) Quanto mede cada ângulo interno de um pentágono regular?

Resposta: 108°

b) Quanto mede cada ângulo interno de um hexágono regular?

Resposta: 120°

Terceira rodada

a) Qual a medida do raio da circunferência inscrita em um polígono regular?

Resposta: medida do apótema do polígono regular

b) Qual a medida do raio da circunferência circunscrita em um hexágono regular?

Resposta: medida do lado do polígono regular

Quarta rodada

a) Qual a medida do diâmetro da circunferência inscrita em um quadrado cuja diagonal mede 6cm?

Resposta: $3\sqrt{2}$ **cm**

b) Qual a medida do raio da circunferência circunscrita em um triângulo equilátero cuja altura mede 6cm?

Resposta: 4 cm

Quinta rodada

a) Qual a medida da área do círculo circunscrito a um quadrado de lado 10cm?

Resposta: $50\pi\ cm^2$

b) Qual a medida da área do círculo inscrito a um quadrado de lado 10cm?

Resposta: $25\pi\ cm^2$

Sexta rodada

a) Quais são os dois sentidos de rotação possíveis?

   Resposta: horário e anti-horário

b) Quantos eixos de simetria o quadrado possui?

   Resposta: 4 eixos de simetria

Sétima rodada

a) Qual rotação do ponto P(1, 0) é equivalente à reflexão de P em torno da reta x = 2 no plano cartesiano?

   Resposta: rotação de 180° em torno do ponto (2, 0) no sentido horário ou anti-horário

b) Se a distância entre P e P', simétricos em relação à r, é 10cm, então qual a distância entre P' e r?

   Resposta: 5cm

Oitava rodada

a) Quais as coordenadas dos pontos simétricos ao ponto P(1, 2) em relação aos eixos x e y do plano cartesiano, repectivamente?

   Resposta: P'(-1, 2) e P"(1, -2)

b) Qual rotação do ponto P(1, 1) equivale à reflexão de P em relação à bissetriz dos quadrantes pares (y = -x) no plano cartesiano?

   Resposta: rotação de 180° em torno da origem no sentido horário ou anti-horário

Nona rodada

a) Quantas rotações sucessivas de 120° em torno da origem e no sentido anti-horário são necessárias para partindo do ponto P(1, 1) retornar para P?

   Resposta: 3 rotações

b) Quantas rotações sucessivas de 90° em torno da origem e no sentido anti-horário são necessárias para partindo do ponto P(1, 1) retornar para P?

   Resposta: 4 rotações

Décima rodada

a) Quais as coordenadas do ponto P' obtido a partir da rotação de 90° em relação à origem no sentido anti-horário do ponto P(1, 1)

   Resposta: P'(-1, 1)

b) Qual rotação do ponto P(1, 1) é equivalente à reflexão de P em relação ao eixo OX do plano cartesiano?

   Resposta: rotação de 90° em relação à origem no sentido horário

Atividade 4: Aprendendo a fazer construções no geogebra

- Objetivos:

  → Representar polígonos regulares usando o software matemático Geogebra.

  → Conhecer um método prático para localizar o centro de um polígono regular usando o software matemático geogebra.

  → Desenvolver a capacidade de realizar rotações e reflexões axiais de polígonos regulares usando o software matemático Geogebra.

- Metodologia:

  → Uso do laboratório de informática da escola com acesso individual dos alunos aos computadores com internet.

  → Atividade impressa distribuída para cada aluno solicitando as construções de acordo com algumas condições.

  → Apresentação dos processos no Geogebra por meio da projeção da tela do computador do professor de modo que todos possam ver cada procedimento necessário para responder a atividade.

  → Acompanhamento individual para confirmar se todos aprenderam os processos e prestar suporte àqueles que não conseguirem compreender.

- Avaliação:

  Durante a apresentação dos procedimentos necessários para a construção das figuras no geogebra, espera-se que os alunos consigam executar os processos de maneira compatível com aquilo que foi apresentado, portanto, cada um deles será avaliado de acordo com essa compatibilidade.

- Materiais:

Computadores com acesso à internet para uso individual dos alunos e do professor, datashow, atividade impressa, folha de ofício, lápis e borracha.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos serão orientados a acessarem o software matemático Geogebra em três guias diferentes do navegador e acompanhando as questões da atividade impressa eles irão aprender a construir polígonos regulares de um modo prático e a realizarem rotações e reflexões com os polígonos construídos. Para fazer as construções, os alunos irão acompanhar as orientações do professor que, projetando sua tela por meio de datashow, mostrará aos alunos como eles devem proceder para executar as construções.

  A seguir será apresentada a atividade aplicada na aula.

  1 - Usando o software matemático Geogebra faça as construções solicitadas em cada item abaixo.

  a) Use o Geogebra da primeira guia para construir um triângulo equilátero ABC sabendo que A(-1, 0), B(1, 0). Depois determine o ponto D, centro do triângulo ABC.

  Resposta:

  (i) usando a entrada marque os pontos A(-1, 0) e B(1, 0).

  (ii) clique no botão "polígono regular", depois clique nos pontos A e B.

  (iii) preencha com 3 na opção "número de vértices"

  (iv) Marque o ponto C determinado na construção do triângulo equilátero.

  (v) clique na opção polígono e forme o triângulo ABC equilátero.

(vi) clique na opção "circunferência (três pontos)", depois clique nos pontos A, B e C.

(vii) clique na opção "ponto médio ou centro", depois clique na circunferência formada no passo anterior.

(viii) marque o ponto D formado no passo anterior.

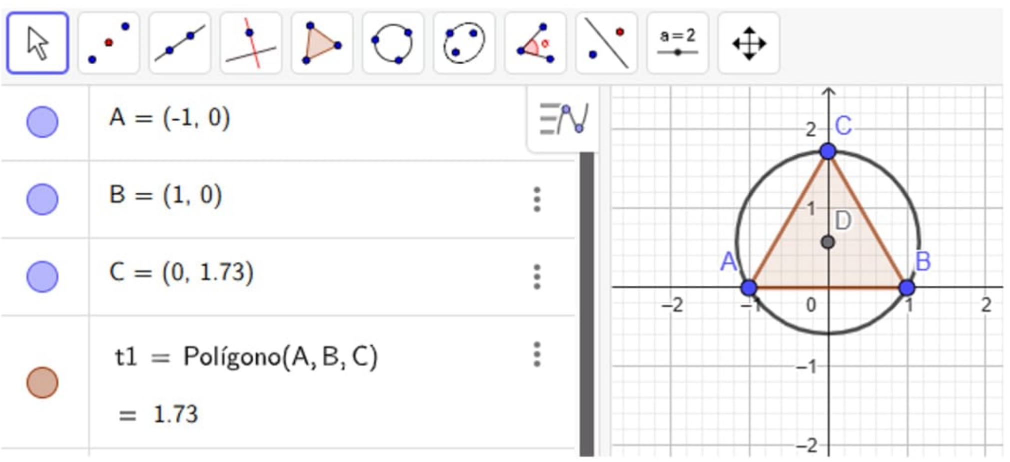


Figura 8: Triângulo equilátero ABC e centro D (ilustração criada pelo autor)

b) Na segunda guia construa um quadrado ABCD sabendo que A(-1, 0), B(1, 0). Depois determine o ponto E, centro do quadrado ABCD.

Resposta:

(i) usando a entrada marque os pontos A(-1, 0) e B(1, 0).

(ii) clique no botão "polígono regular", depois clique nos pontos A e B.

(iii) preencha com 4 na opção "número de vértices"

(iv) Marque os pontos C e D determinados na construção do quadrado.

(v) clique na opção polígono e forme o quadrado ABCD.

(vi) clique na opção "circunferência (três pontos)", depois clique nos pontos A, B e C.

(vii) clique na opção "ponto médio ou centro", depois clique na circunferência formada no passo anterior.

(viii) marque o ponto E formado no passo anterior.

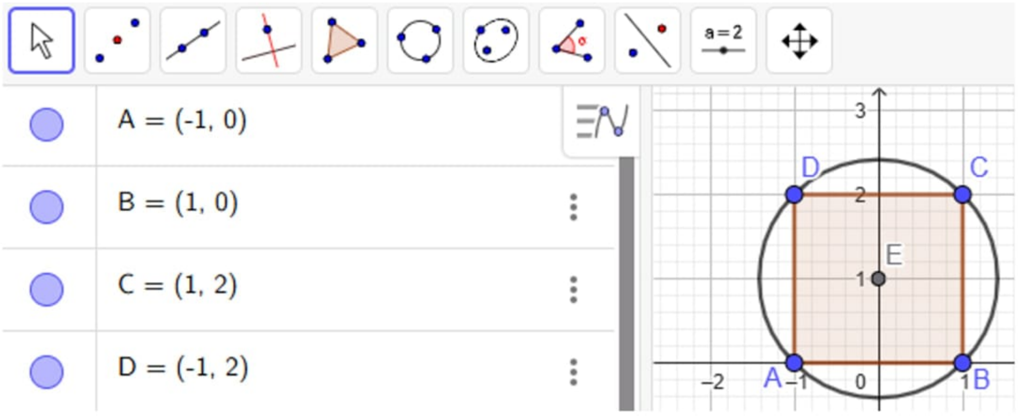


Figura 9: Quadrado ABCD e centro E (ilustração criada pelo autor)

c) Construa um pentágono regular ABCDE na terceira guia sabendo que A(-1, 0), B(1, 0). Depois determine o ponto F, centro do pentágono ABCDE.

Resposta:

(i) usando a entrada marque os pontos A(-1, 0) e B(1, 0).

(ii) clique no botão "polígono regular", depois clique nos pontos A e B.

(iii) preencha com 5 na opção "número de vértices"

(iv) Marque os pontos C, D e E determinados na construção do pentágono regular.

(v) clique na opção polígono e forme o pentágono regular ABCDE.

(vi) clique na opção "circunferência (três pontos)", depois clique nos pontos A, B e C.

(vii) clique na opção "ponto médio ou centro", depois clique na circunferência formada no passo anterior.

(viii) marque o ponto F formado no passo anterior.

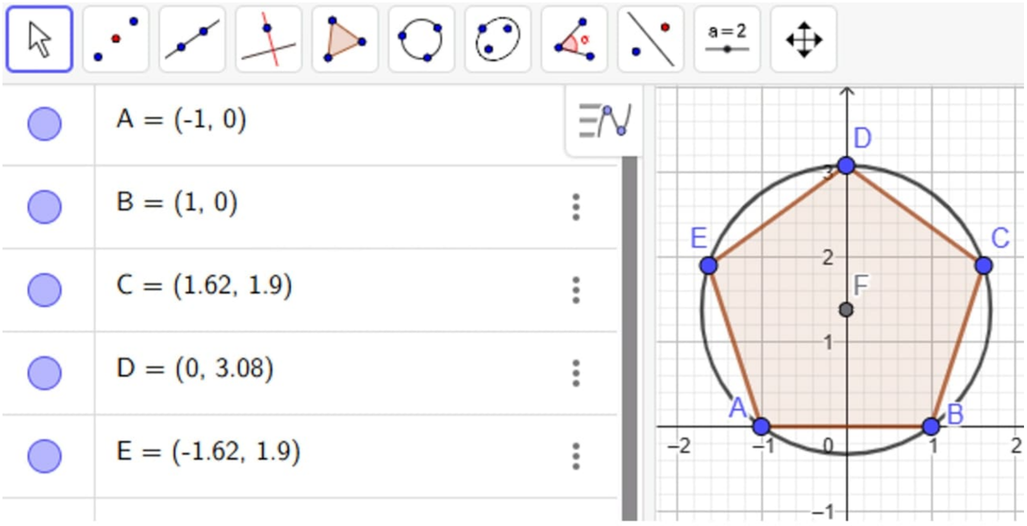


Figura 10: Pentágono regular ABCDE e centro F (ilustração criada pelo autor)

2 - Sabe-se que para fazer uma rotação de uma figura são necessários ângulo, sentido e ponto em torno do qual ocorrerá a rotação. Sendo assim, realize as rotações solicitadas nos itens a seguir.

a) Três rotações no triângulo equilátero, sendo a primeira de 30° no sentido anti-horário em torno do centro, a segunda de 60° no sentido horário em torno do centro e a terceira de 45° no sentido anti-horário em torno do centro.

Resposta:

(i) clique no botão “rotação (ponto, centro, amplitude)”.

(ii) clique na parte interna do triângulo ABC, depois clique no ponto D.

(iii) preencha o espaço “ângulo”com o ângulo de rotação (30°, 45° e 60°).

(iv) escolha o sentido de rotação clicando em “horário”ou “anti-horário”.

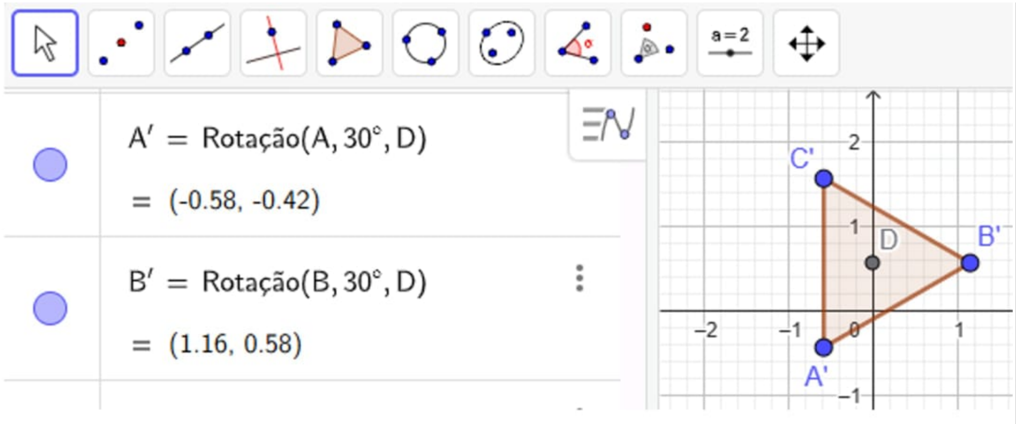


Figura 11: Rotação de ABC de 30° em relação à D no sentido anti-horário.

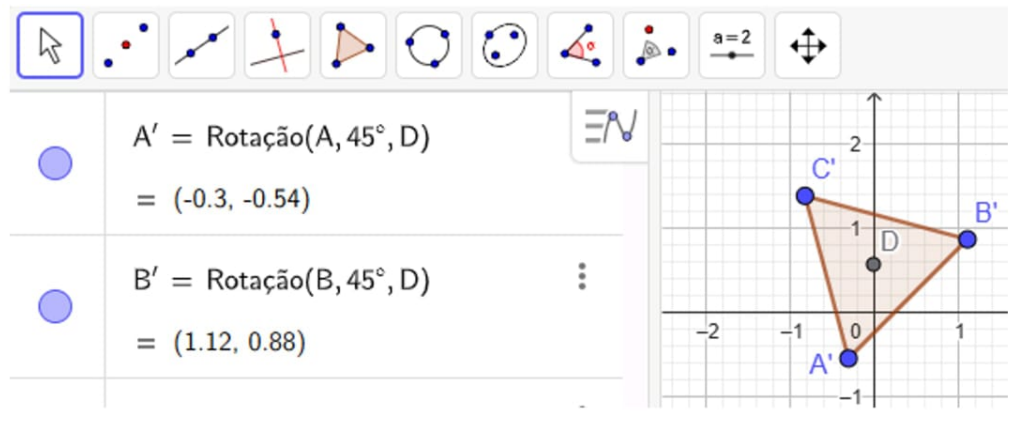


Figura 12: Rotação de ABC de 45° em relação à D no sentido anti-horário.

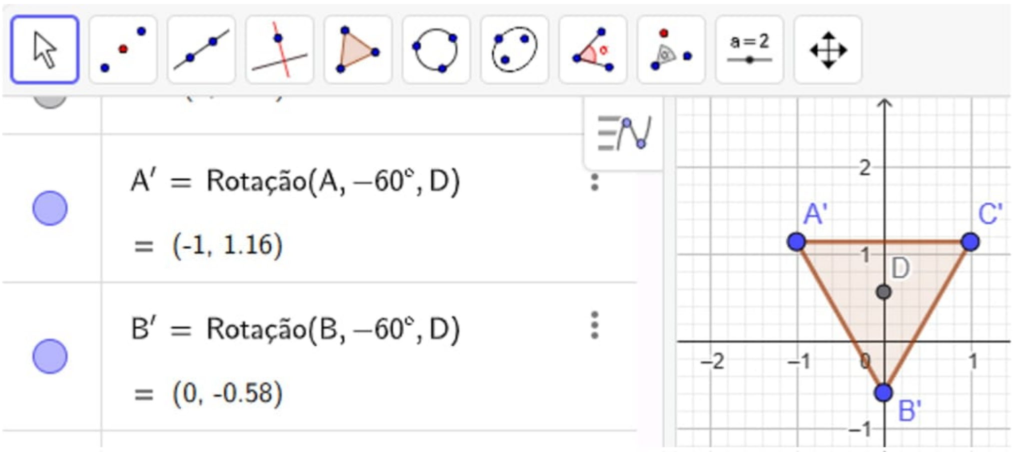


Figura 13: Rotação de ABC de 60° em relação à D no sentido horário.

b) Três rotações no quadrado, sendo a primeira de 50° no sentido anti-horário em torno do centro, a segunda de 35° no sentido anti-horário em torno do centro e a terceira de 40° no sentido horário em torno do centro.

Resposta:

(i) clique no botão "rotação (ponto, centro, amplitude)".

(ii) clique na parte interna do quadrado ABCD, depois clique no ponto E.

(iii) preencha o espaço "ângulo"com o ângulo de rotação (50°, 35° e 40°).

(iv) escolha o sentido de rotação clicando em "horário"ou "anti-horário".

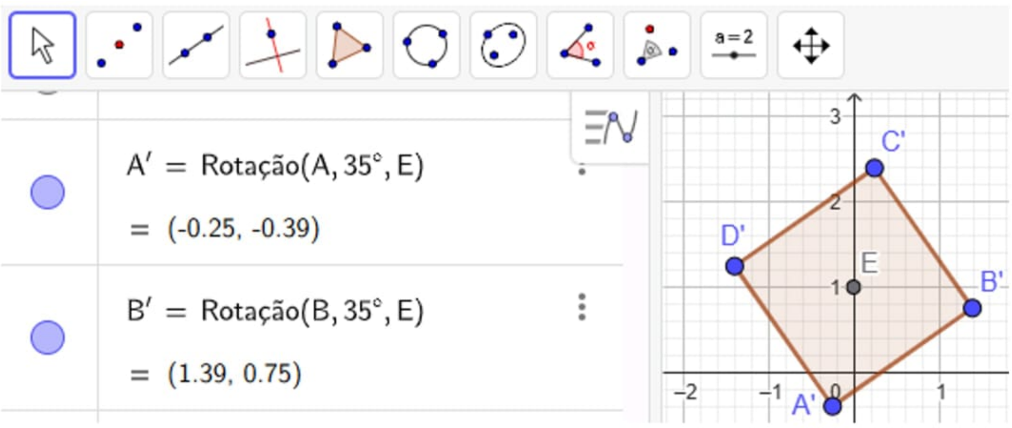


Figura 14: Rotação de ABCD de 35° em relação à E no sentido anti-horário.

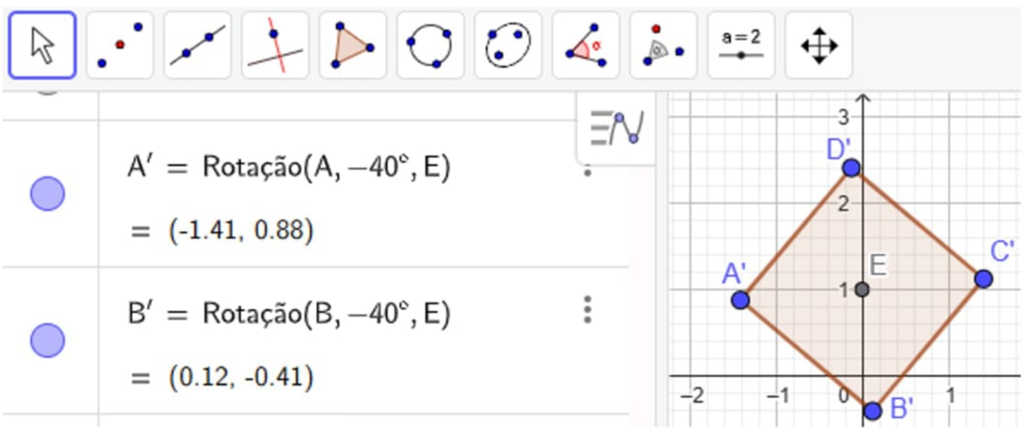


Figura 15: Rotação de ABCD de 40° em relação à E no sentido horário.

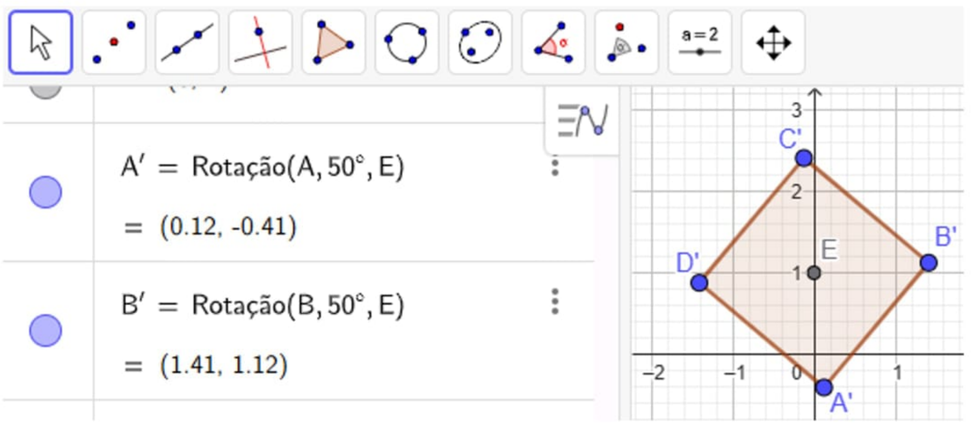


Figura 16: Rotação de ABCD de 50° em relação à E no sentido anti-horário.

c) Três rotações no pentágono regular, sendo a primeira de 70° no sentido horário em torno do centro, a segunda de 20° no sentido anti-horário em torno do centro e a terceira de 85° no sentido anti-horário em torno do centro.

Resposta:

(i) clique no botão "rotação (ponto, centro, amplitude)".

(ii) clique na parte interna do pentágono regular ABCDE, depois clique no ponto F.

(iii) preencha o espaço "ângulo"com o ângulo de rotação.

(iv) escolha o sentido de rotação clicando em "horário"ou "anti-horário".

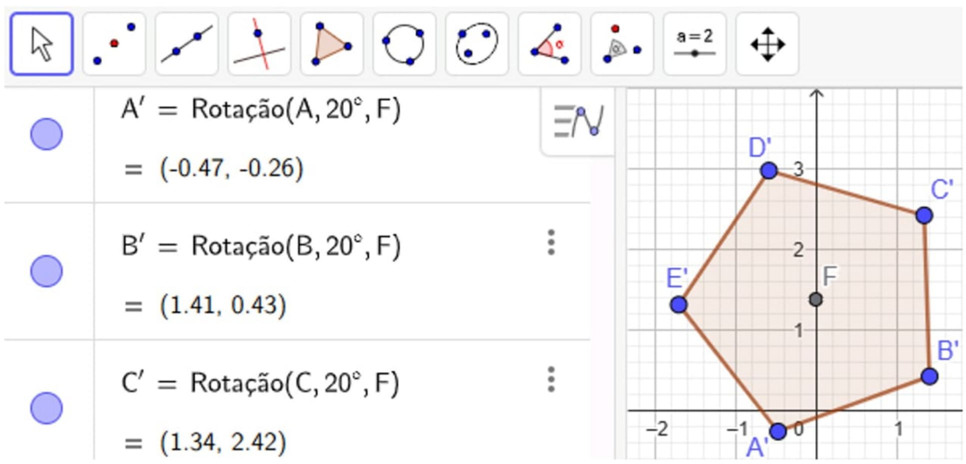


Figura 17: Rotação de ABCDE de 20° em relação à F no sentido anti-horário.

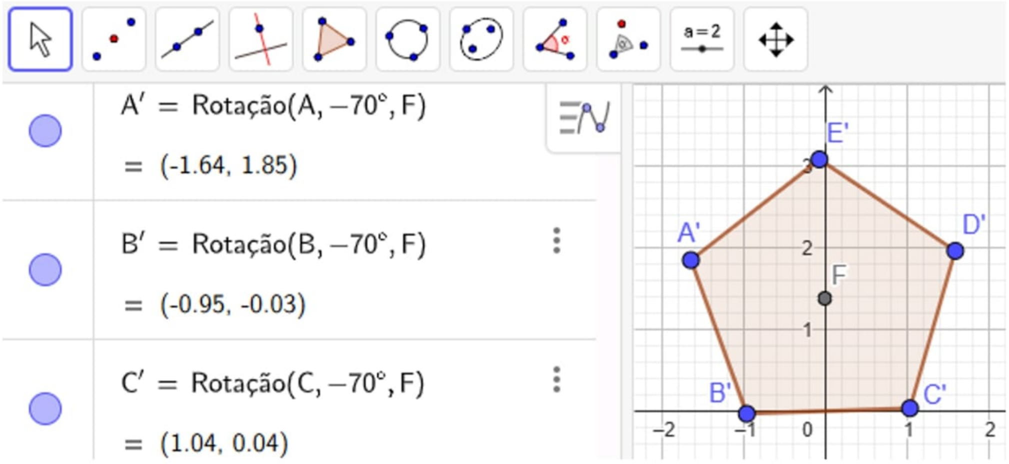


Figura 18: Rotação de ABCDE de 70° em relação à F no sentido horário.

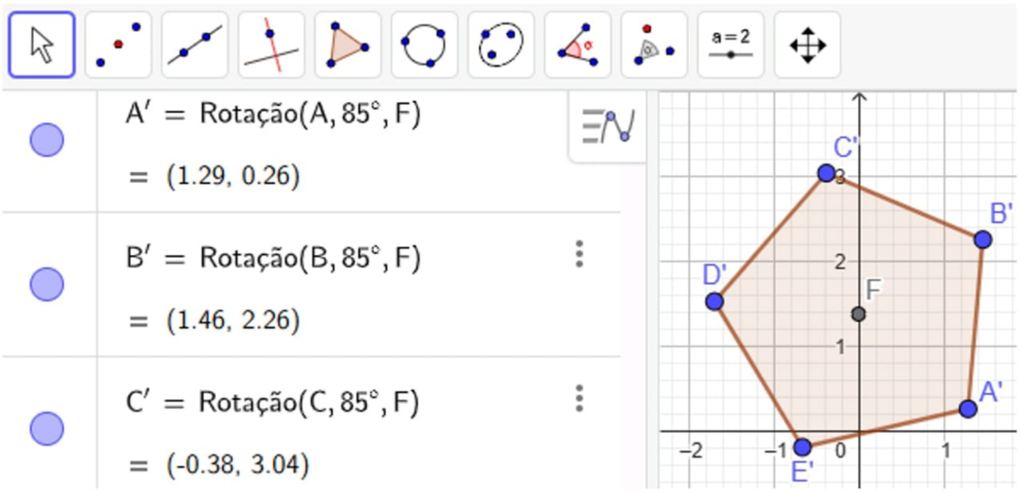


Figura 19: Rotação de ABCDE de 85° em relação à F no sentido anti-horário.

3 - Por meio do geogebra e considerando os seus conhecimentos de reflexão de figuras, realize as construções solicitadas nos itens.

a) Construa o eixo de simetria do triângulo equilátero que passa pelos pontos A (vértice) e D (centro), depois realize uma reflexão do triângulo em relação ao eixo.

Resposta:

(i) clique no botão “reta (dois pontos)”, depois clique nos pontos A e D.

(ii) clique no botão “reflexão em relação a um eixo”.

(iii) clique na parte interna do triângulo, depois clique na reta que passa por A e D.

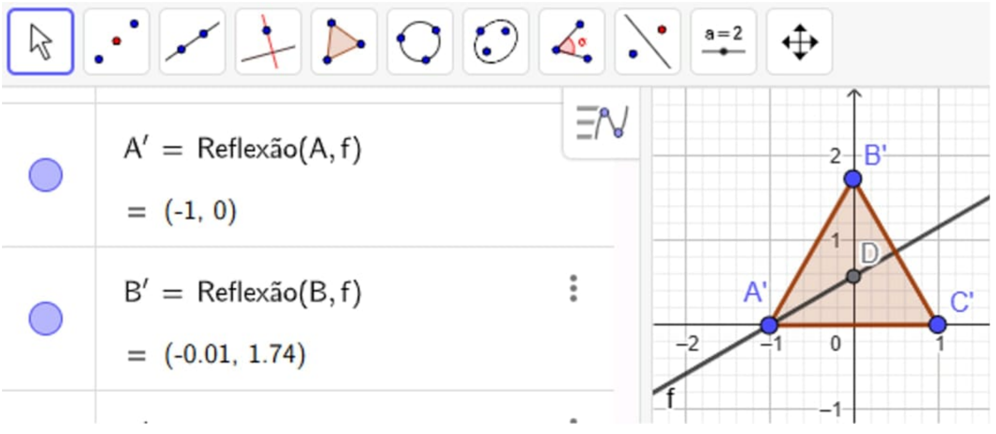


Figura 20: Reflexão de ABC em relação ao eixo AD

b) Construa o eixo de simetria do quadrado que passa pelos pontos A (vértice) e E (centro), depois realize uma reflexão do quadrado em relação ao eixo.

Resposta:

(i) clique no botão "reta (dois pontos)", depois clique nos pontos A e E.

(iii) clique no botão "reflexão em relação a um eixo".

(iv) clique na parte interna do quadrado, depois clique na reta que passa por A e E.

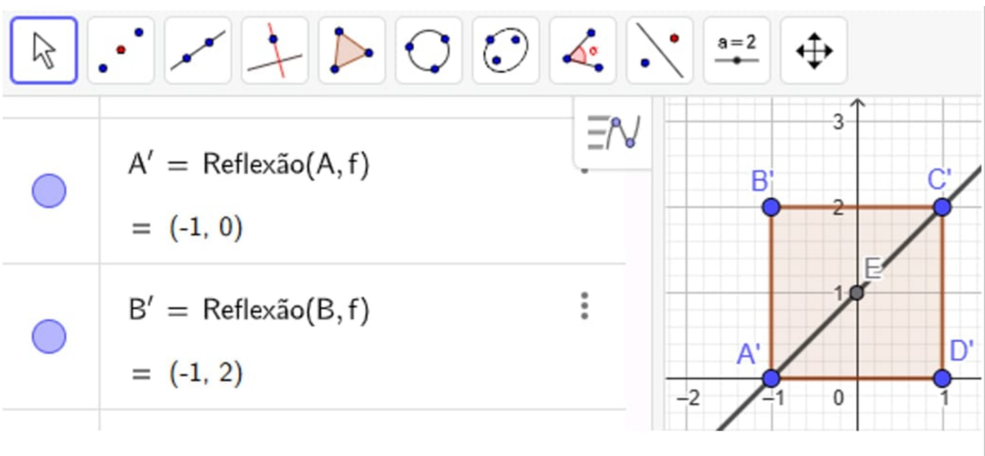


Figura 21: Reflexão de ABCD em relação ao eixo AE

c) Construa o eixo de simetria do quadrado que passa pelos pontos M (ponto médio do lado AB) e E (centro), depois realize uma reflexão do quadrado em relação ao eixo.

Resposta:

(i) construa o quadrado ABCD, conforme o item b) da questão 1.

(ii) determine o centro E do polígono, conforme o item b) da questão 1.

(iii) clique no botão "ponto médio ou centro", depois clique nos pontos A e B.

(iv) marque as coordenadas do ponto determinado no passo anterior, nomeando-o como ponto M.

(v) clique nos botão "reta (dois pontos)", depois clique nos pontos M e E.

(vi) clique no botão "reflexão em relação a um eixo".

(vii) clique na parte interna do quadrado, depois clique na reta determinada no passo anterior.

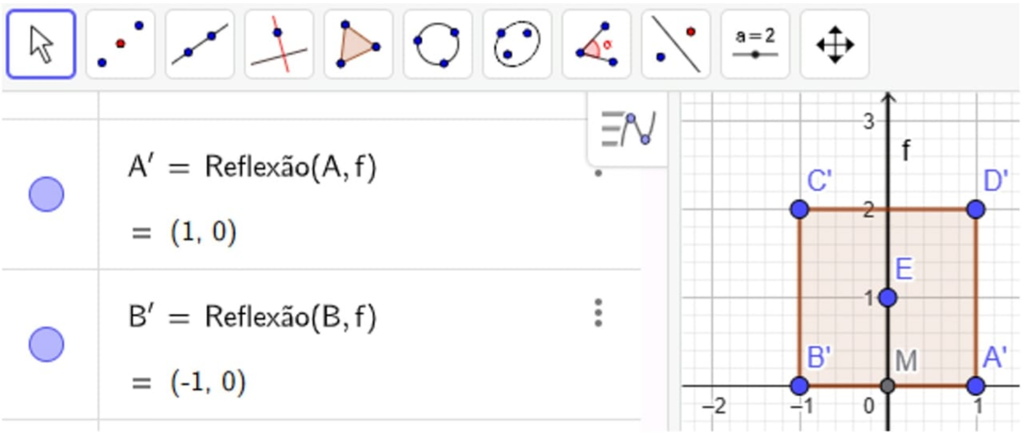


Figura 22: Reflexão de ABCD em relação ao eixo ME

d) Construa o eixo de simetria do pentágono regular que passa pelos pontos A (vértice) e F (centro), depois realize uma reflexão do pentágono em relação ao eixo.

Resposta:

(i) clique no botão "reta (dois pontos)", depois clique nos pontos A e F.

(iii) clique no botão "reflexão em relação a um eixo".

(iv) clique na parte interna do triângulo, depois clique na reta que passa por A e F.

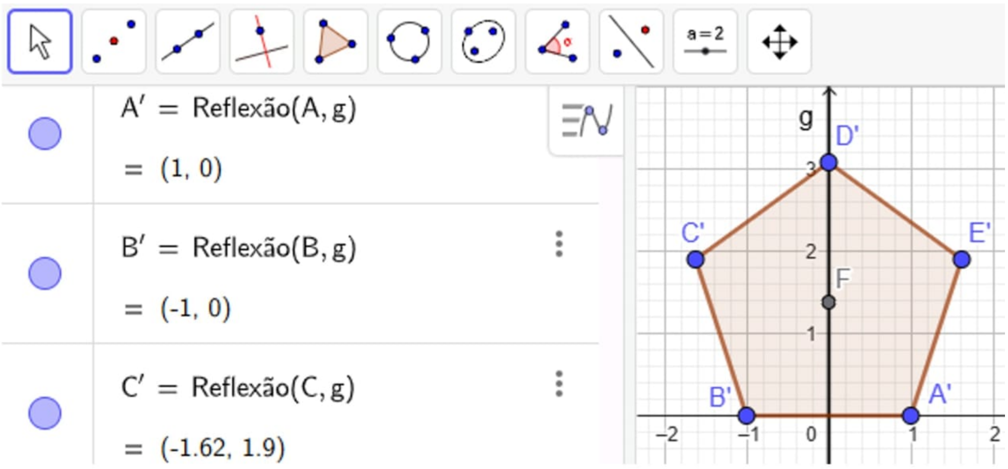


Figura 23: Reflexão de ABCDE em relação ao eixo AF

Atividade 5: Verificando proposições por meio do geogebra

- Objetivos:

  → Verificar a validade de enunciados relacionados a rotações e reflexões de polígonos regulares.

  → Desenvolver a capacidade de utilizar o Geogebra como ferramenta para verificação de propriedades relacionadas a rotações e reflexões de polígonos regulares.

  → Generalizar propriedades verificadas para casos particulares de polígonos regulares como também válidas para polígonos com um número qualquer de lados.

- Metodologia:

  → A aula ocorrerá em um laboratório com computadores suficientes para acesso individual dos alunos e com acesso à internet.

  → O ministrante deve ter um computador disponível com internet e projetar a sua tela de forma ampliada para orientar os processos que os alunos devem realizar.

  → Utilizando o software matemático Geogebra, o ministrante orientará os alunos nos processos de verificação de propriedades elencadas em uma atividade.

- Avaliação:

  Os alunos serão avaliados a partir do comprometimento na participação da atividade, bem como da correspondência entre o resultado encontrado por cada um deles e a resposta considerada correta.

- Materiais:

Computadores com acesso à internet, datashow atividade impressa, folhas de ofício (3 unidades para cada um), lápis, borracha e caneta.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos serão encaminhados para o laboratório escolar com acesso individual a computadores com internet. Cada um deve receber uma atividade impressa que será aplicada na aula. Inicialmente, os alunos irão responder a atividade por conta própria com o auxílio do Geogebra e sugestões do ministrante mostrando como construir os processos. Após a conclusão da resolução dos alunos, o professor apresentará as respostas corretas e utilizará o Geogebra para mostrar os procedimentos necessários para responder cada uma das questões.

  A seguir será apresentada a atividade aplicada na aula.

  1 - Considere os seus conhecimentos a respeito de rotações de um polígono regular e responda as perguntas a seguir.

  a) Realizando três rotações de 120° no sentido anti-horário de triângulo equilátero em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

  Resposta: Não. Após três rotações de 120° no sentido anti-horário em torno do centro, o triângulo equilátero retornará para a posição inicial.

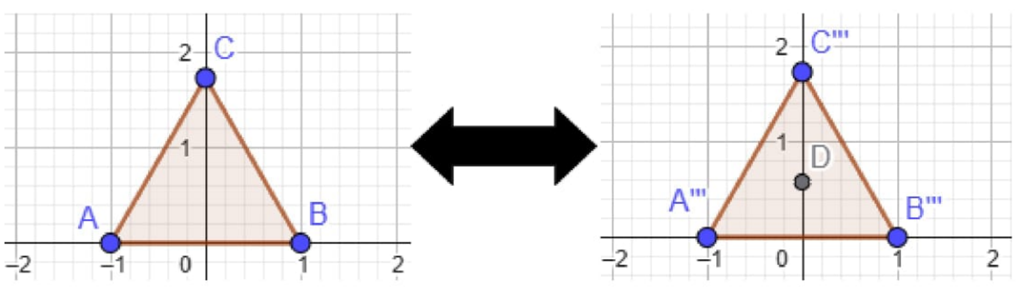


Figura 24: Ilustração do resultado da aplicação tripla de rotações

b) Após a aplicação de quatro rotações de 90° no sentido anti-horário de um quadrado em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

Resposta: Não. Após quatro rotações de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, o quadrado retornará para a posição inicial.

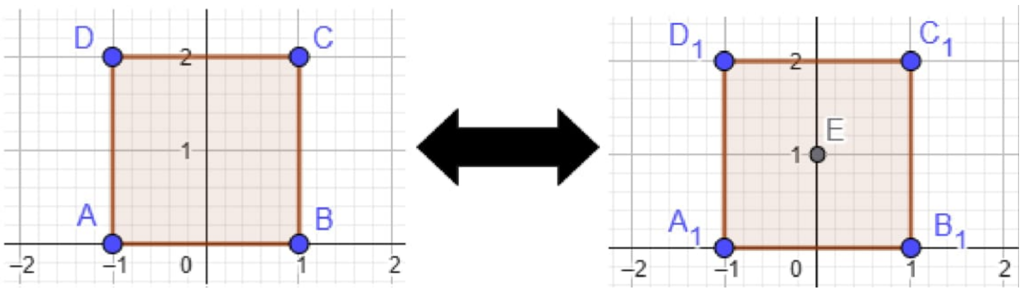


Figura 25: Ilustração do resultado da aplicação quádrupla de rotações

c) Com qual ângulo, com cinco rotações em torno de seu centro, um pentágono regular retornaria para a posição inicial?

Resposta: Como o pentágono regular tem 5 lados, o ângulo procurado é $360°/5 = 72°$, conforme o padrão observado nos casos anteriores.

d) A partir dos casos anteriores, como você faria para encontrar o ângulo de rotação e o número mínimo de rotações para um polígono regular de n lados?

Resposta: Observando os padrões dos casos anteriores, para um polígono de n lados o ângulo será $360°/n$ com

um mínimo de n rotações para que o polígono retorne para a posição inicial.

2 - A respeito das reflexões e dos eixos de simetria de um polígono regular, responda os itens a seguir.

a) Determine todos os eixos de simetria de um triângulo equilátero e depois indique o número mínimo de reflexões em torno de cada um deles para o triângulo retornar para a posição inicial.

Resposta: O triângulo equilátero tem três eixos de simetria e basta duas reflexões em torno de cada eixo para que ele retorne para a posição inicial.

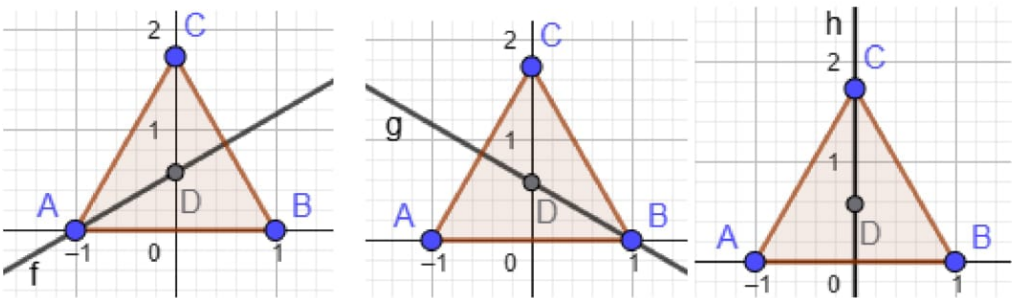


Figura 26: Ilustração dos eixos de simetria do triângulo equilátero

b) Quantos eixos de simetria um quadrado possui? Quantas reflexões em torno de cada um deles são necessárias para que ele retorne para a posição inicial?

Resposta: O quadrado tem quatro eixos de simetria e basta duas reflexões em torno de cada eixo para que ele retorne para a posição inicial.

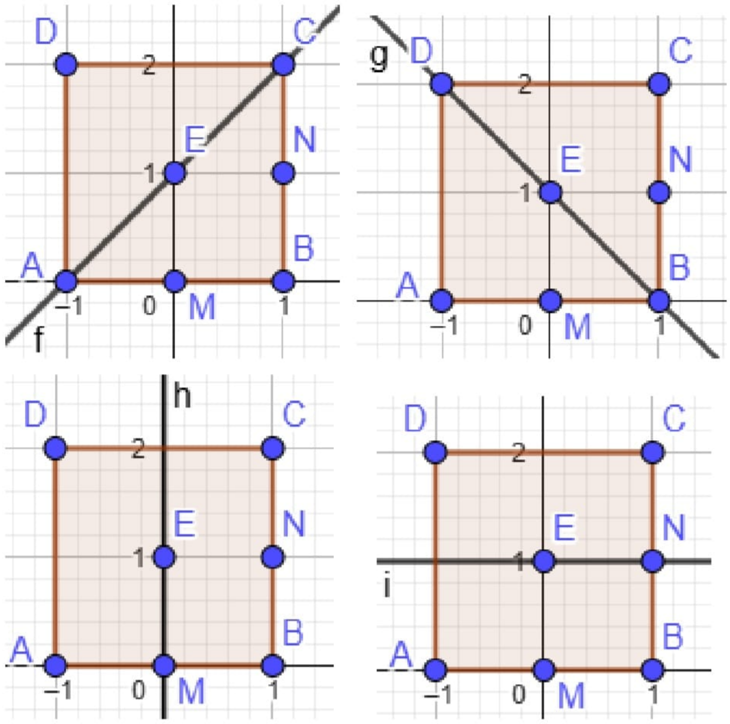


Figura 27: Ilustração dos eixos de simetria do quadrado

c) O que você pensa a respeito do número de eixos de simetria de um pentágono? E sobre as reflexões em torno de cada um deles? (Dica: considere o número de lados do polígono regular e os casos anteriores)

Resposta: Observando os casos anteriores é possível intuir que o número de eixos de simetria de um polígono de n lados é n. Além disso, é fácil imaginar que basta duas reflexões para que o polígono retorne para a posição inicial.

3 - Julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas.

a) Em um triângulo equilátero é possível, com apenas uma reflexão em torno do eixo de simetria g: BD, posicionar o triângulo de maneira idêntica à posição que teria após uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do centro D, seguida de uma reflexão em torno do eixo f: AD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

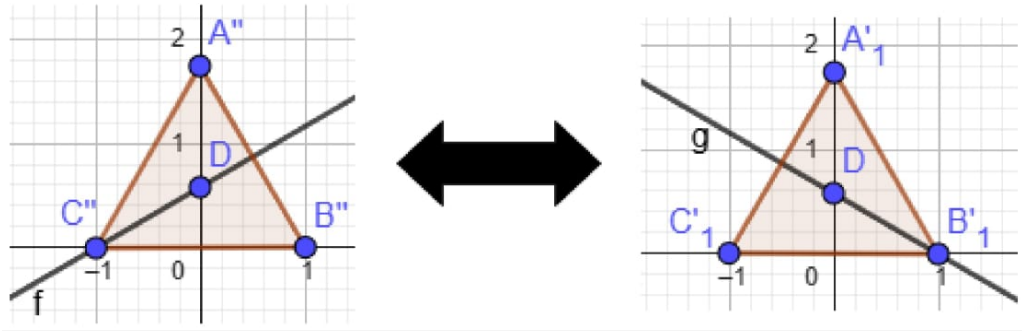


Figura 28: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

b) Fazendo duas rotações sucessivas de 120° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão de em torno do eixo f: AD, não seria possível com apenas uma reflexão em torno do eixo h: CD, posicionar o triângulo equilátero ABC de formas idênticas.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

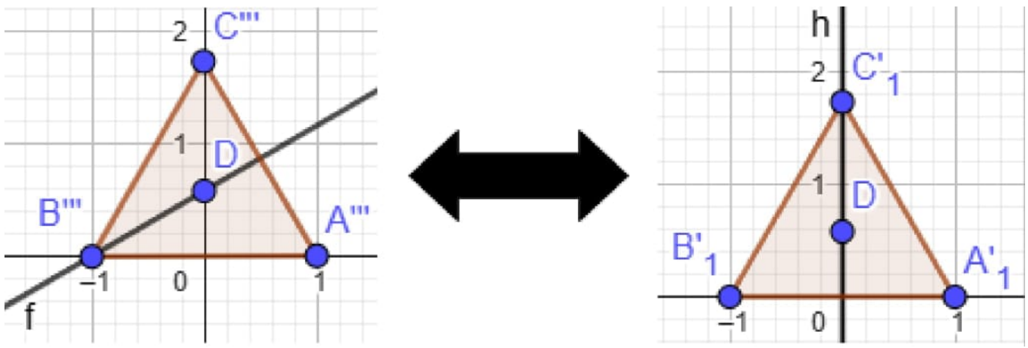


Figura 29: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

c) Para um triângulo equilátero, uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno da origem equivale a alguma reflexão em torno de um eixo de simetria e duas rotações sucessivas (nas mesmas condições da anterior) resulta no mesmo posicionamento gerado por outra reflexão feita em torno de outro eixo.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

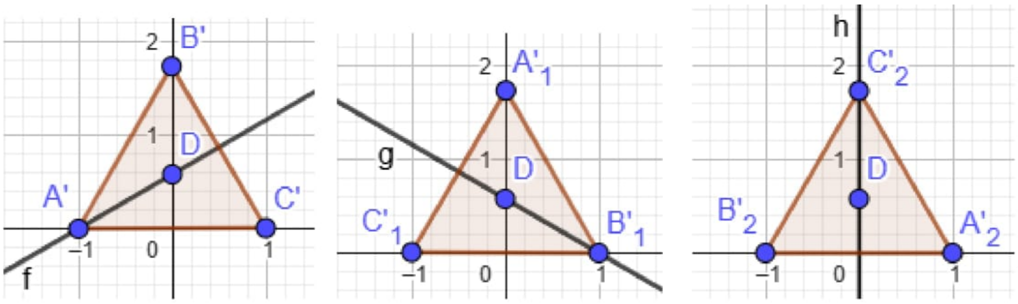


Figura 30: Reflexões do triângulo equilátero

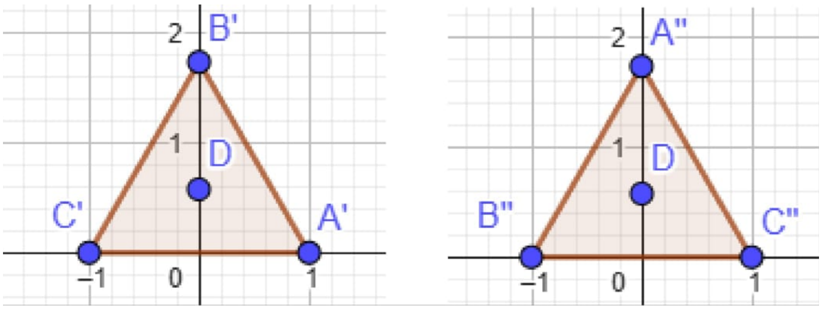


Figura 31: Rotações do triângulo equilátero

d) Para um quadrado após realizar uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguida de uma reflexão em torno do eixo de simetria f: AE, é possível determinar um outro eixo de simetria que resulta na mesma posição após uma única reflexão em torno dele.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

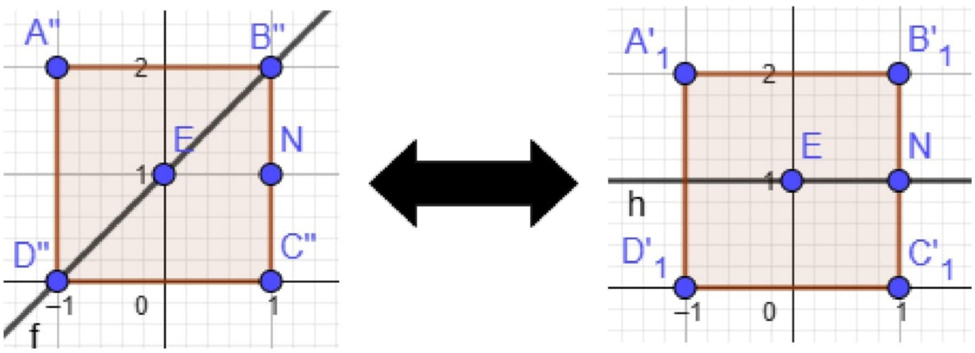


Figura 32: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

e) Duas rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo i: BD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

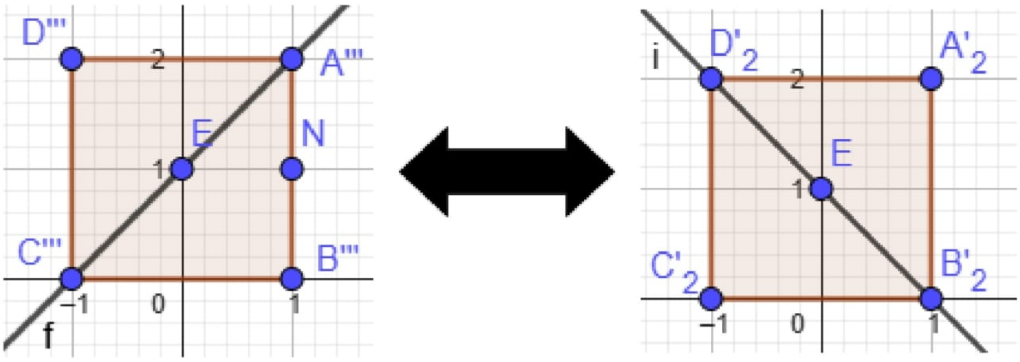


Figura 33: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

f) Três rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo h: ME.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

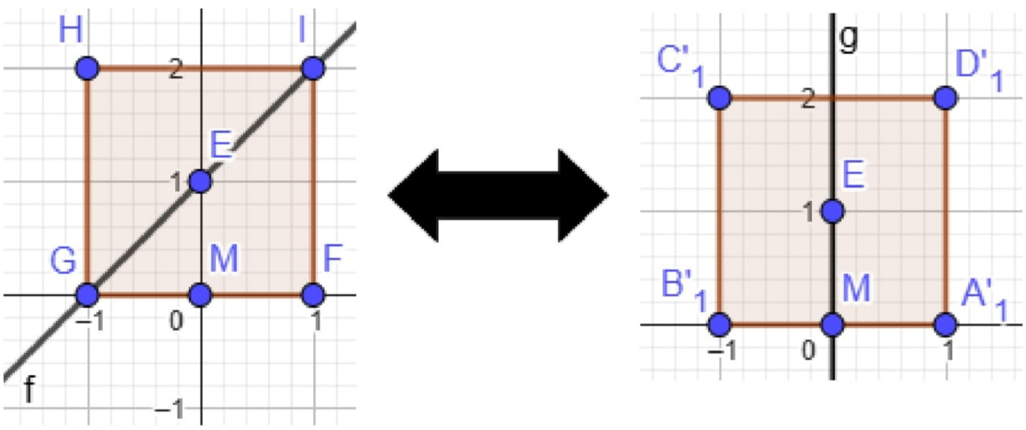


Figura 34: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

Atividade 6: Rotações e reflexões de polígonos regulares com material manipulável

- Objetivos:
  - → Conhecer um método alternativo para verificação de propriedades válidas a respeito de rotações, reflexões e composições destas em polígonos regulares.
  - → Demonstrar propriedades válidas a respeito de rotações, reflexões e composições destas em polígonos regulares com o uso de materiais manipuláveis.
  - → Valorizar o uso de materiais manipuláveis, entendendo-o como um importante instrumento de verificação da veracidade de proposições.
- Metodologia:
  - → Resolução de atividade impressa disponibilizada para cada aluno.
  - → Uso dos polígonos regulares construídos na oficina para responder a atividade.
  - → Orientações do professor sobre a utilização dos polígonos para responder as atividades.
- Avaliação:

  Os alunos serão avaliados de acordo com o uso adequado do material manipulável e o nível de coerência das respostas dadas em cada uma das questões da atividade. Além disso, espera-se que os alunos demonstrem comprometimento com a realização da atividade.
- Materiais:

  Polígonos regulares construídos na oficina, lista de atividades impressa, lápis, borracha, caneta, folhas de ofício (4 para cada aluno).

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos receberão a atividade impressa e folhas de ofício em branco para responder as questões. Uma das folhas em branco deve ser usada como suporte para realizar as simulações de rotações e reflexões dos polígonos. Eles irão escolher uma posição inicial para colocar os polígonos no papel e, usando o lápis ou a caneta, irão marcar os vértices no papel, indicando a letra que corresponde a cada vértice. Além disso, também serão esboçados os eixos de simetria dos polígonos, com o uso de lápis e régua, a fim de facilitar a visualização das reflexões. A partir daí, bastará movimentar a figura dentro do espaço de suporte, esboçado na folha em branco, para responder as questões da lista de atividades.

  A seguir será apresentada a atividade aplicada na aula.

  1 - Considerando as rotações no sentido anti-horário em torno do centro do polígono, as reflexões em torno dos eixos de simetria e usando os polígonos construídos na aula anterior, responda os itens a seguir.

  a) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro determinaria uma rotação equivalente a uma permutação dos vértices A, B e C do triângulo equilátero, fazendo com que o vértice A vire o B, o B vire o C e o C vire o A? E qual seria o ângulo que geraria uma rotação equivalente à permutação dos vértices em que A vira C, B vira A e C vira B?

  Resposta: O ângulo procurado, no primeiro caso, é 120°, conforme observado com o uso do material manipulável. Já no segundo caso, o ângulo de rotação seria 240° ou, ainda, duas rotações sucessivas de 120°.

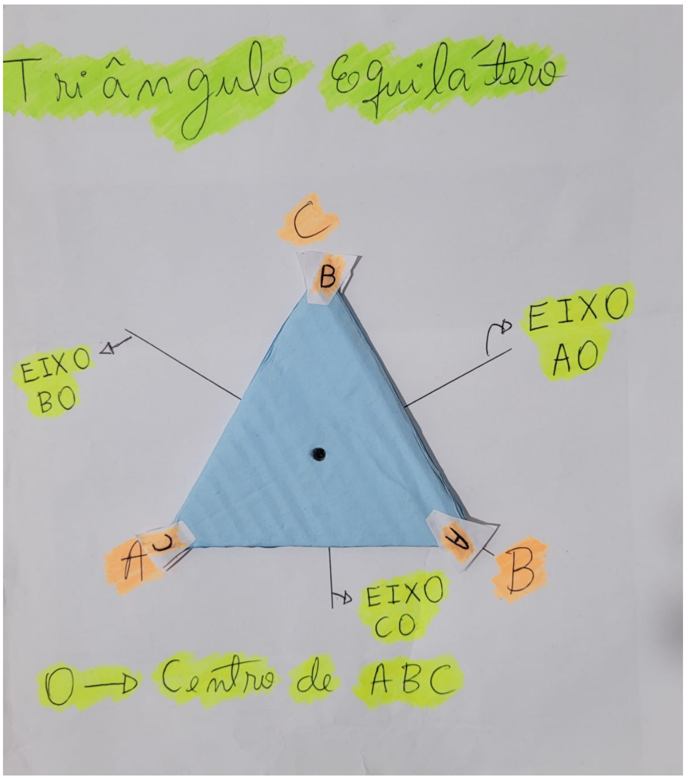


Figura 35: Posicionamento do triângulo após a primeira permutação.

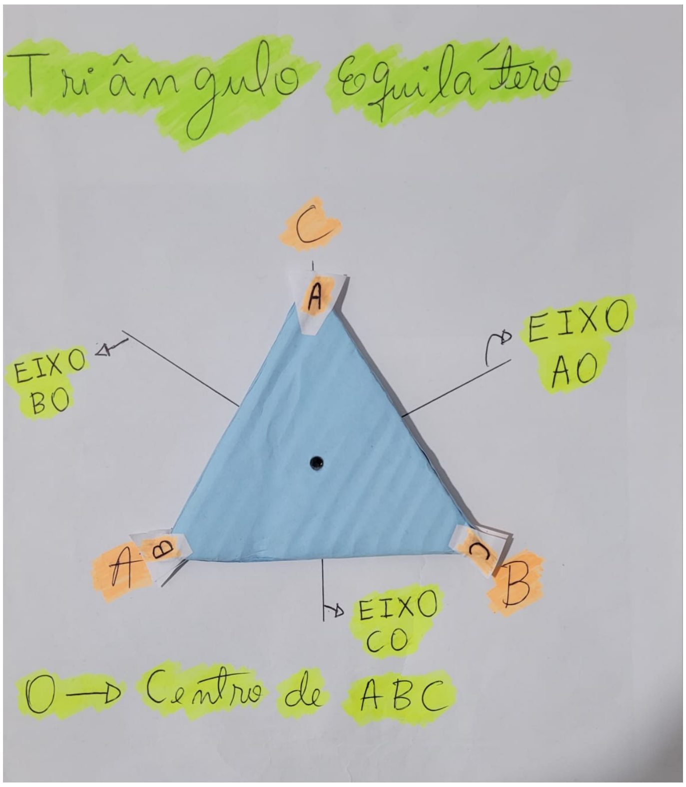


Figura 36: Posicionamento do triângulo após a segunda permutação.

b) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro desenvolveria uma rotação idêntica a uma permutação dos vértices A, B, C e D do quadrado, em que o vértice A vira o B, o B vira o C, o C vira o D e o D vira o A? E o ângulo da rotação idêntica à permutação em que A vira C, B vira D, C vira A e D vira B? Qual seria o ângulo de rotação que geraria uma rotação idêntica à permutação em que A vira D, B vira A, C vira B e D vira C?

Resposta: Note que na primeira permutação o ângulo será 90°, conforme observado com o uso do material manipulável. No segundo caso, o ângulo de rotação seria 180° ou, então, duas rotações sucessivas de 90°. Já no terceiro caso, a rotação seria de 270° ou, então, três rotações sucessivas de 90°.

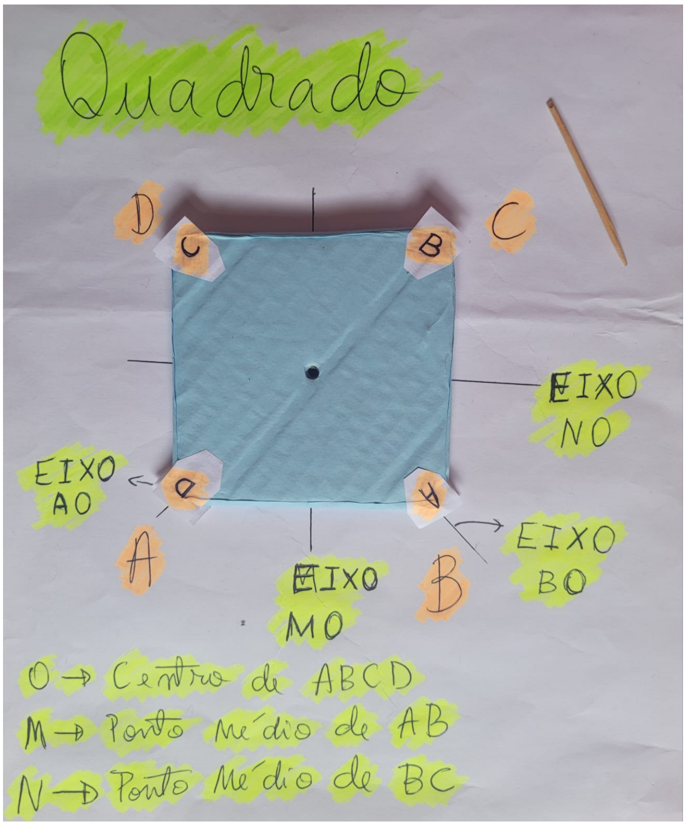


Figura 37: Posicionamento do quadrado após a primeira permutação.

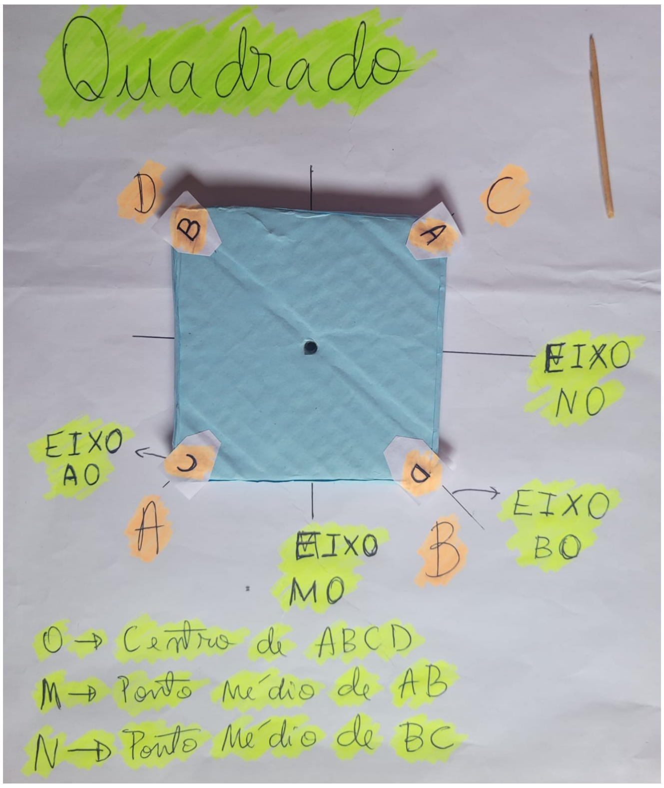


Figura 38: Posicionamento do quadrado após a segunda permutação.

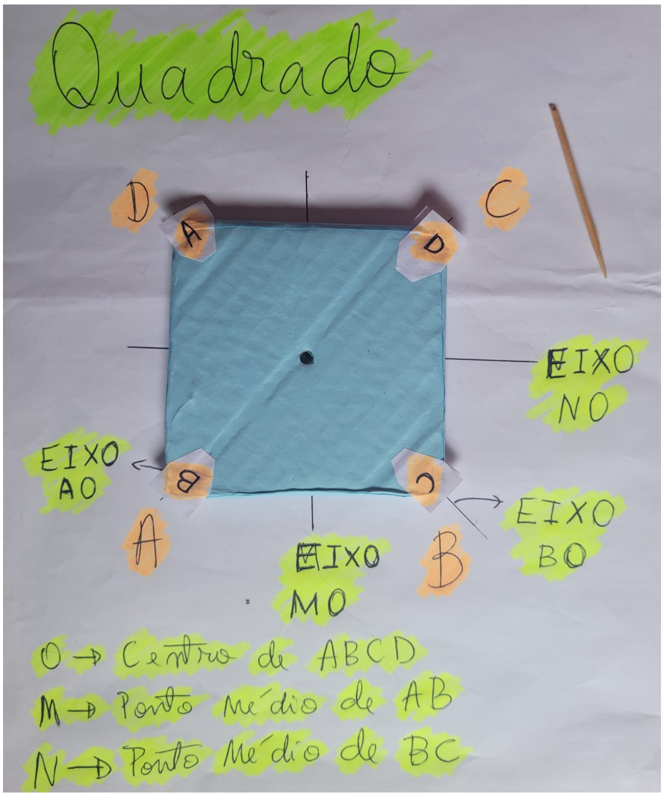


Figura 39: Posicionamento do quadrado após a terceira permutação.

c) No caso do pentágono regular, qual ângulo de rotação geraria uma rotação correspondente à permutação dos vértices A, B, C, D e E fazendo A virar B, B virar C, C virar, D virar E e E virar A? Qual seria o ângulo para a rotação que corresponderia à permutação em que A vira C, B vira D, C vira E, D vira A e E vira B? E o ângulo para a rotação corresponder à permutação em que A vira D, B vira E, C vira A, D vira B e E vira C? Determine também o ângulo em que a rotação corresponde à permutação em que A vira E, B vira A, C vira B, D vira C e E vira D.

Resposta: Note que na primeira permutação o ângulo será 72°, conforme observado com o uso do material manipulável. No segundo caso, o ângulo de rotação seria 144° ou, então, duas rotações sucessivas de 72°. No terceiro caso, a rotação seria de 216° ou, então, três rotações sucessivas de 72°. Já no quarto caso, o ângulo seria de 288° ou, então, quatro rotações sucessivas de 72°.

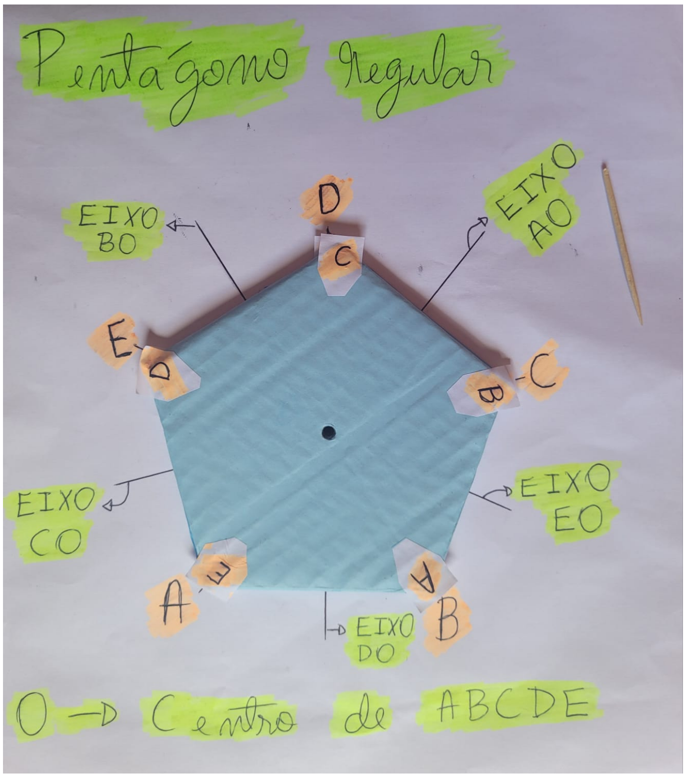


Figura 40: Posicionamento do pentágono após a primeira permutação.

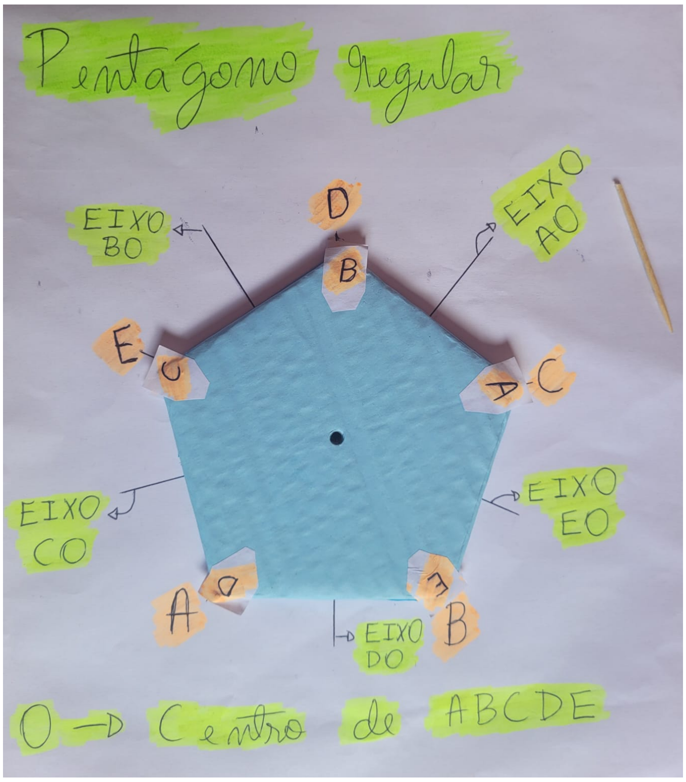


Figura 41: Posicionamento do pentágono após a segunda permutação.

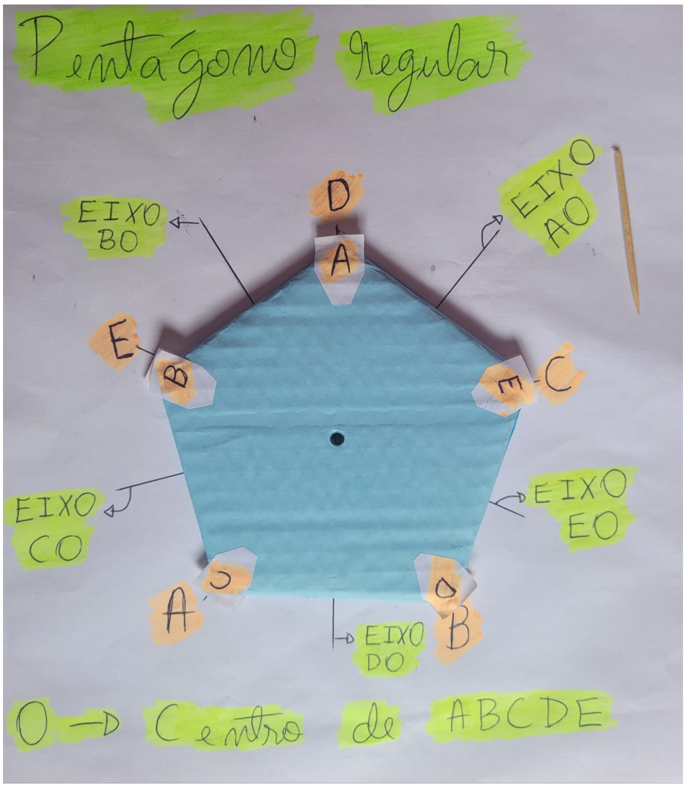


Figura 42: Posicionamento do pentágono após a terceira permutação.

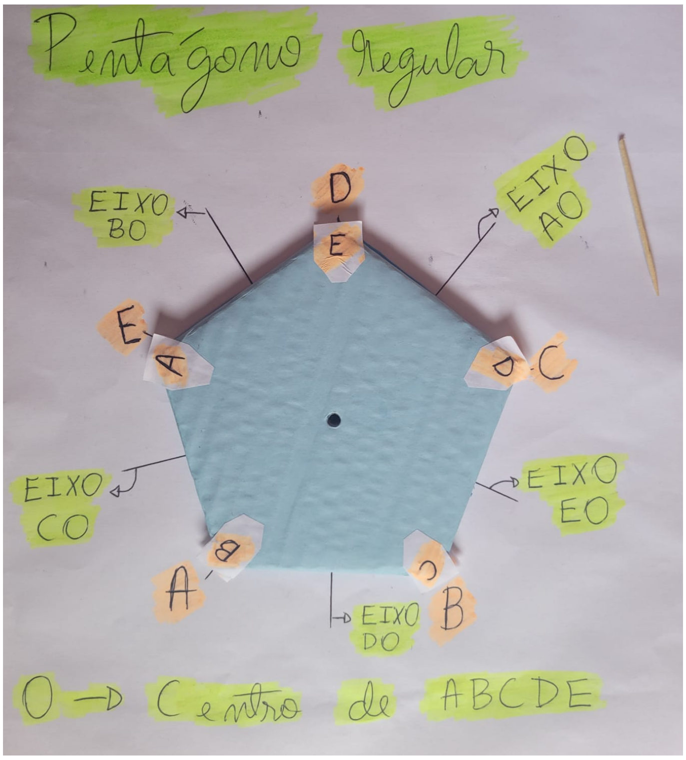


Figura 43: Posicionamento do pentágono após a quarta permutação.

d) O que ocorre com o posicionamento de cada um dos vértices dos polígonos regulares após uma rotação cujo ângulo é igual a 360° dividido pelo número de lados do polígono?

Resposta: Observando os padrões anteriores, pode-se concluir que rotações sucessivas de 360°/n no sentido anti-horário em torno do centro do polígono regular de n lados, correspondem a algumas permutações dos vértices.

e) Considerando os itens anteriores verifique quais permutações dos vértices correspodem às rotações de 60°, 120°, 180°, 240° e 300° no hexágono regular.

Resposta:

(i) A permutação correspondente à rotação de 60° é aquela em que A vira B, B vira C, C vira D, D vira E, E vira F e F vira A.

(ii) A permutação correspondente à rotação de 120° é

aquela em que A vira C, B vira D, C vira E, D vira F, E vira A e F vira B.

(iii) A permutação correspondente à rotação de 180° é aquela em que A vira D, B vira E, C vira F, D vira A, E vira B e F vira C.

(iv) A permutação correspondente à rotação de 240° é aquela em que A vira E, B vira F, C vira A, D vira B, E vira C e F vira D.

(v) A permutação correspondente à rotação de 240° é aquela em que A vira F, B vira A, C vira B, D vira C, E vira D e F vira E.

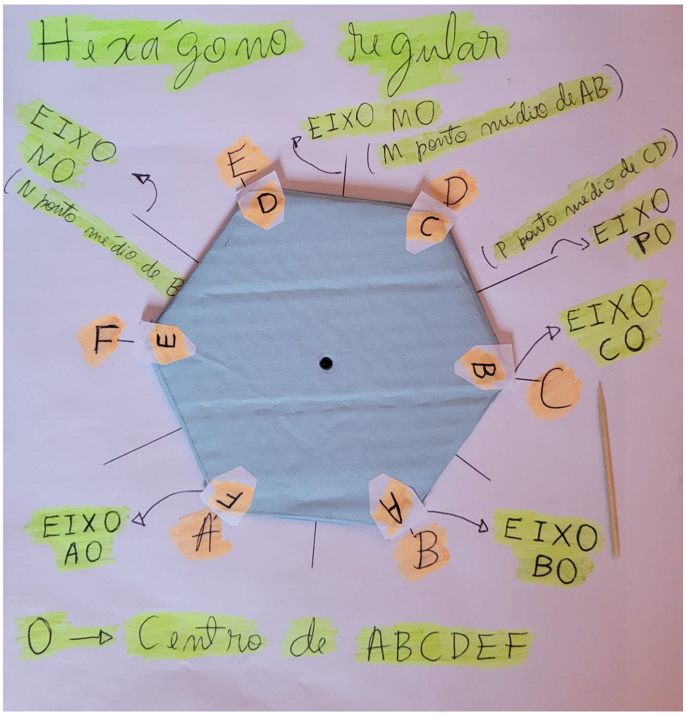


Figura 44: Posição dos vértices após a primeira rotação

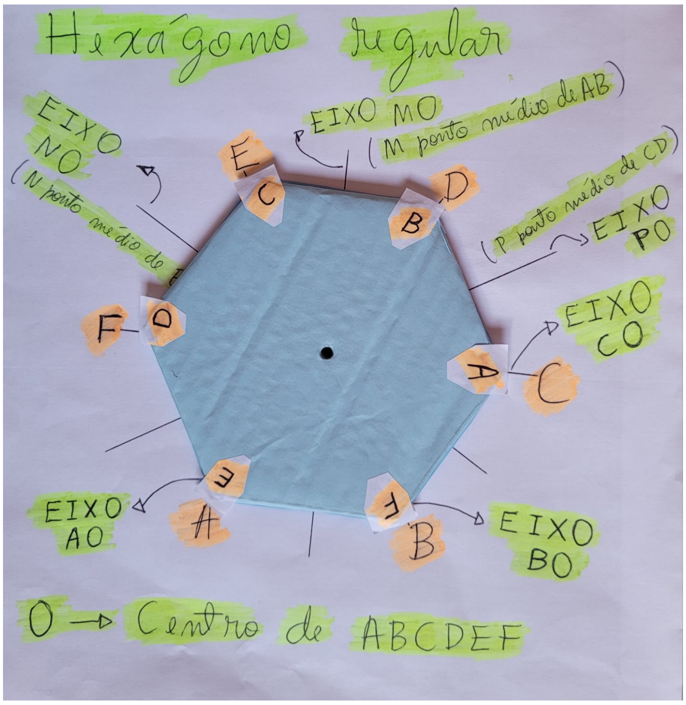


Figura 45: Posição dos vértices após a segunda rotação

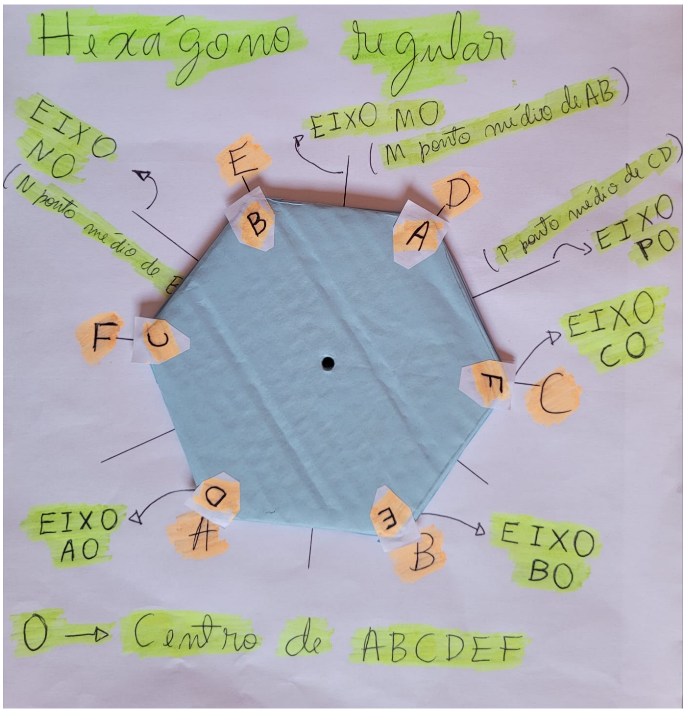


Figura 46: Posição dos vértices após a terceira rotação

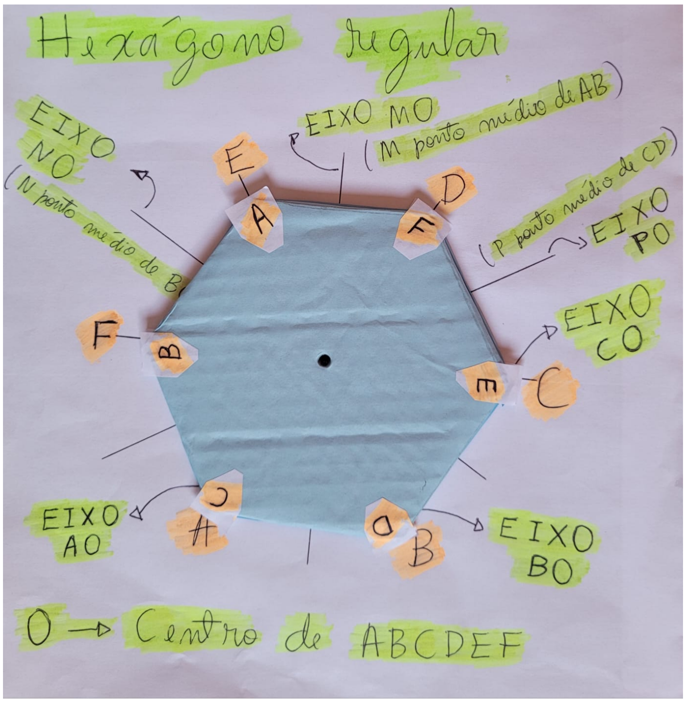


Figura 47: Posição dos vértices após a quarta rotação

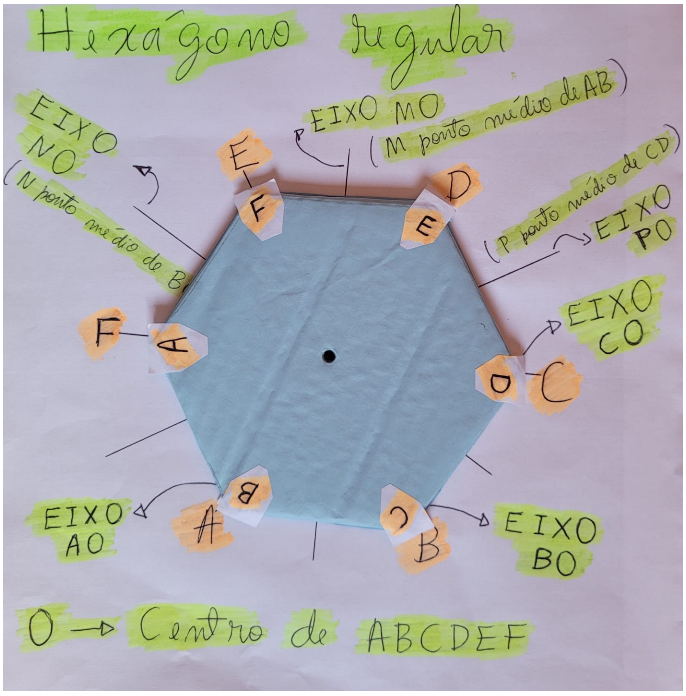


Figura 48: Posição dos vértices após a quinta rotação

2 - Usando os materiais construídos na atividade inicial e aplicando os seus conhecimentos sobre rotações e reflexões de polígonos regulares, faça o que for pedido em cada item a seguir.

a) No triângulo equilátero, indique o eixo de simetria em torno do qual deve ser realizada uma reflexão para que a posição final seja equivalente a uma permutação dos vértices em que A fica fixo, B vira C e C vira B. Indique também a rotação em que B fica fixo, A vira C e C vira e a outra em que C fica fixo, A vira B e B vira A.

Resposta: Note que a primeira permutação de vértices é equivalente à reflexão do triângulo em torno do eixo AO (sendo O o centro do triângulo). Além disso, os eixos BO e CO são, respectivamente, os eixos de simetria das reflexões em que B fica fixo na que C fica fixo.

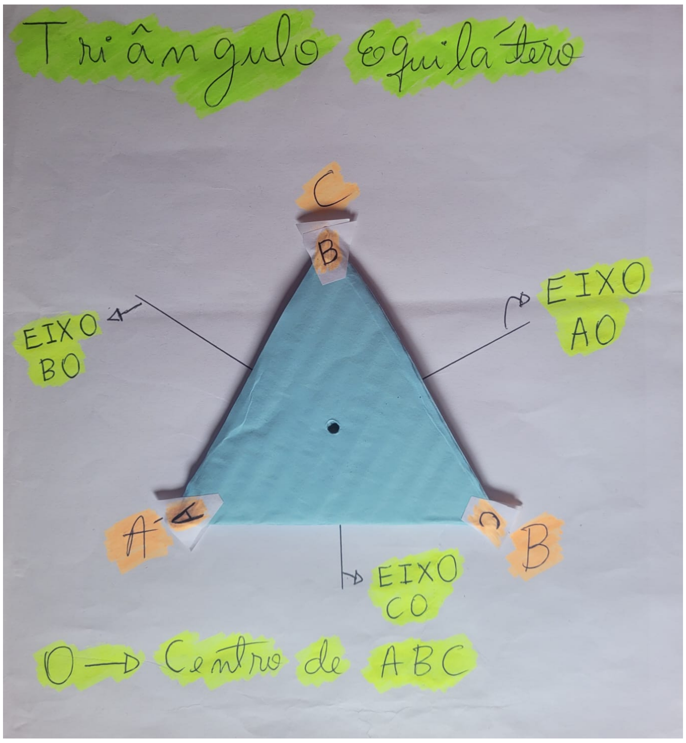


Figura 49: Posicionamento do triângulo após a primeira permutação

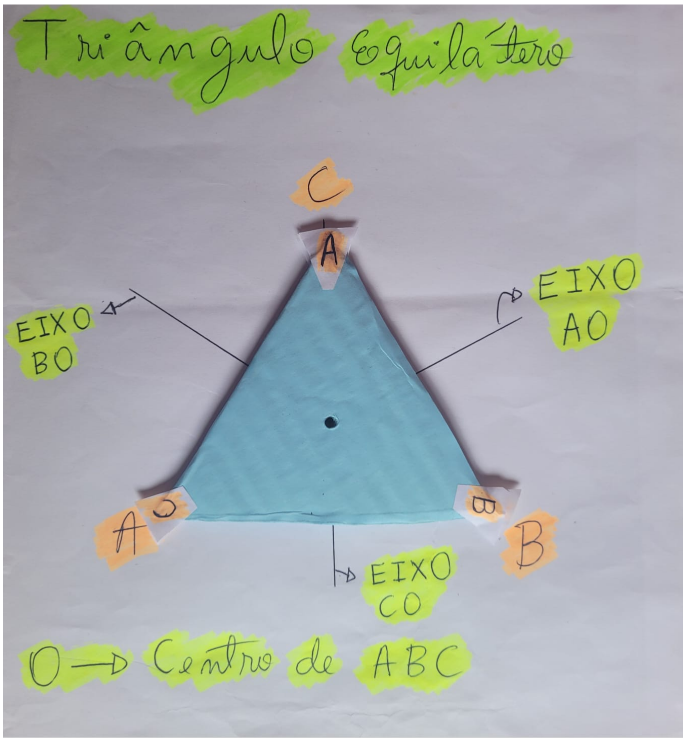


Figura 50: Posicionamento do triângulo após a segunda permutação

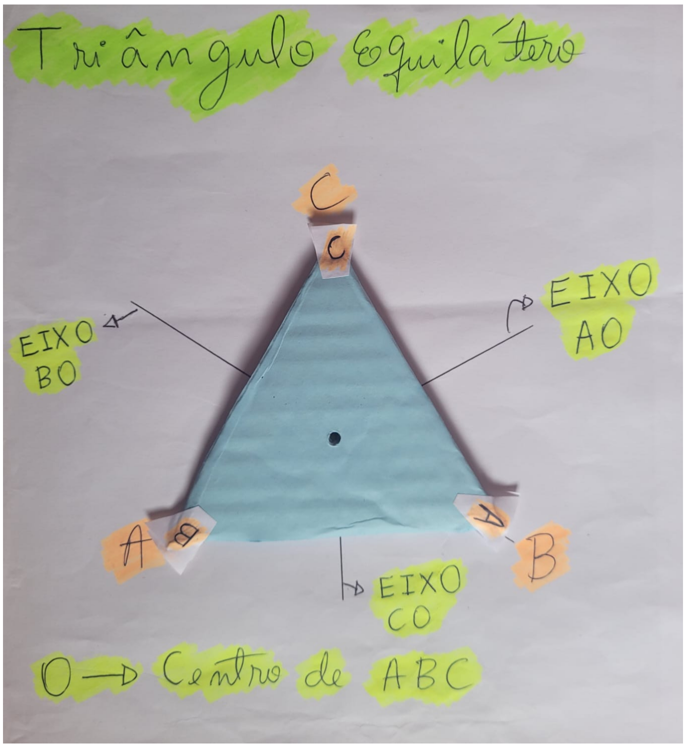


Figura 51: Posicionamento do triângulo após a terceira permutação

b) Associe no quadrado as reflexões em torno dos eixos de simetria com as permutações dos vértices A, B, C e D. Realize cada reflexão e observe como cada vértice muda de posição.

Resposta: Sejam E o centro do quadrado, M o ponto médio do lado AB e N o ponto médio do lado BC. Então, temos as seguintes associações:

(i) a reflexão em torno do eixo AE equivale à permutação em que A e C ficam fixos, B vira D e D vira B;

(ii) a reflexão em torno do eixo BE equivale à permutação em que B e D ficam fixos, A vira C e C vira A;

(iii) a reflexão em torno do eixo de simetria ME equivale à permutação A vira B, B vira A, C vira D e D vira C;

(iv) a reflexão em torno do eixo de simetria NE equivale à permutação em que A vira D, B vira C, C vira B e D vira A.

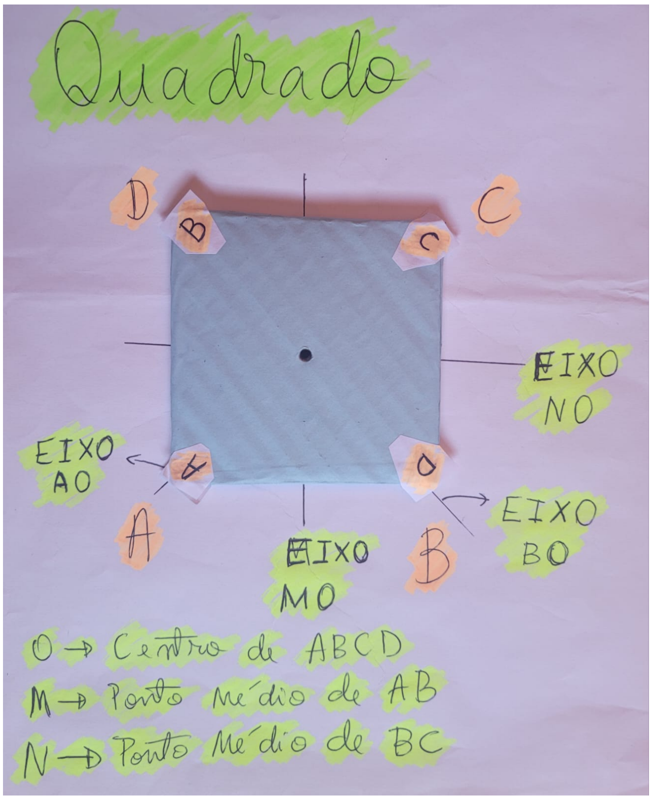


Figura 52: Posicionamento do quadrado após a primeira permutação

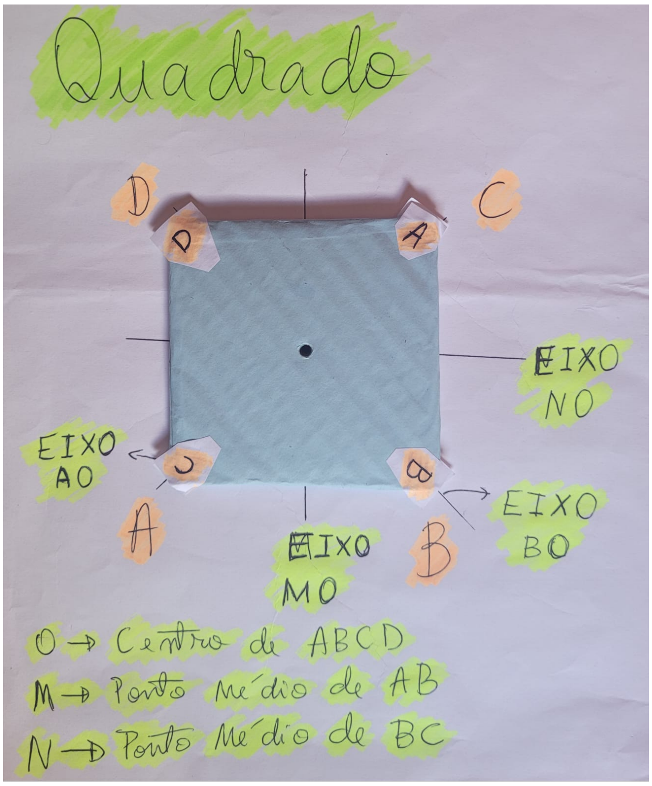


Figura 53: Posicionamento do quadrado após a segunda permutação

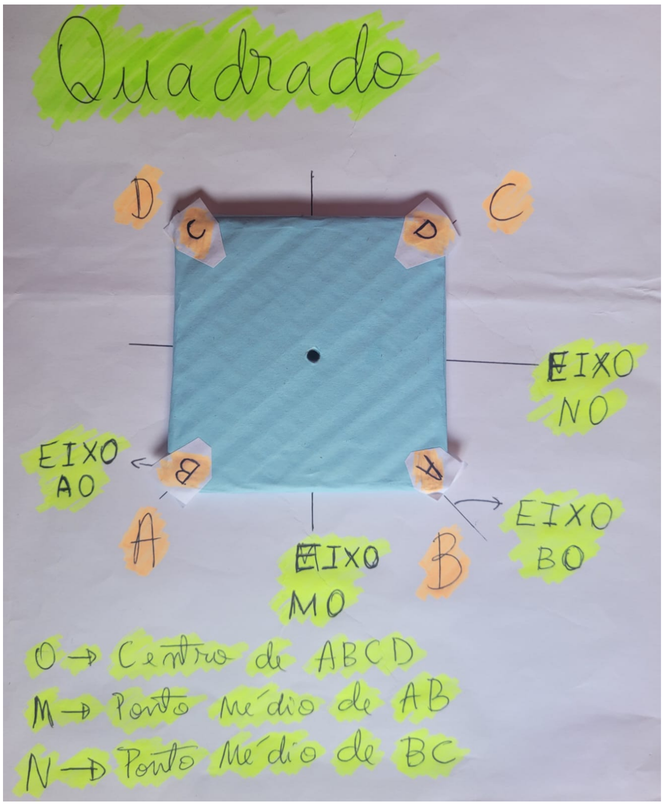


Figura 54: Posicionamento do quadrado após a terceira permutação

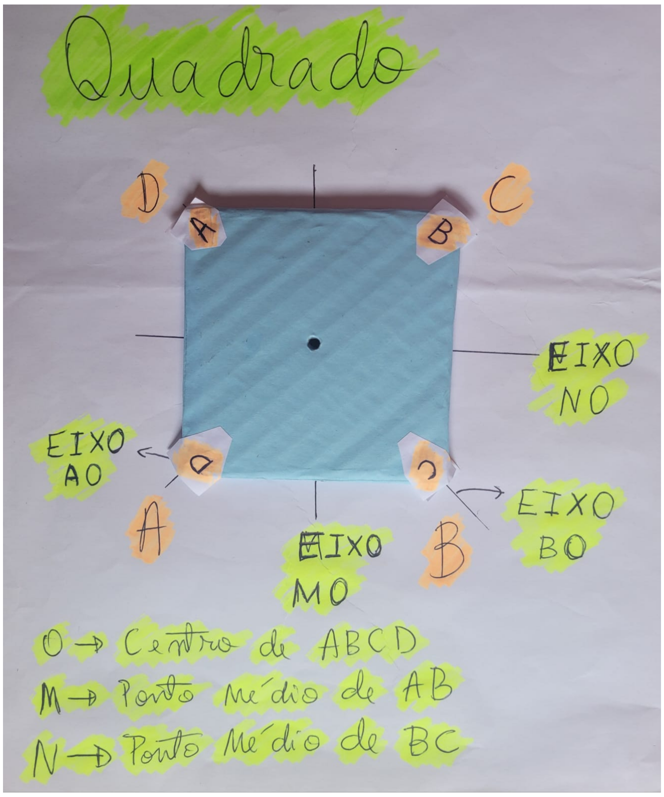


Figura 55: Posicionamento do quadrado após a quarta permutação

c) Considerando um pentágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D e E.

Resposta: Seja o ponto O o centro do pentágono. Temos que:

(i) a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A fica fixo, B vira E, C vira D, D vira C e E vira B;

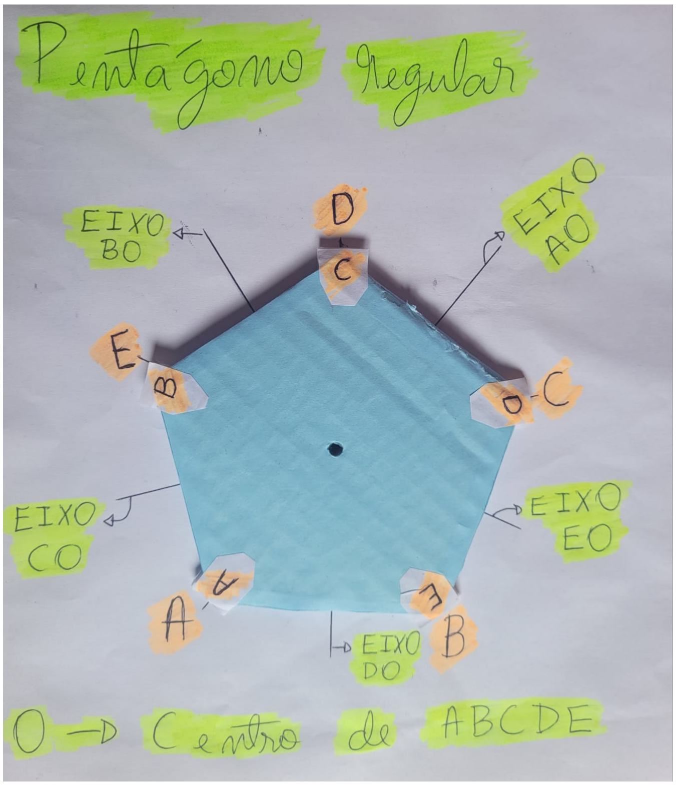


Figura 56: Posicionamento do pentágono após a primeira permutação

(ii) a reflexão em torno do eixo BO está associada à permutação em que B fica fixo, A vira C, C vira A, D vira E e E vira D;

(iii) a reflexão em torno do eixo CO está associada à permutação em que C fica fixo, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

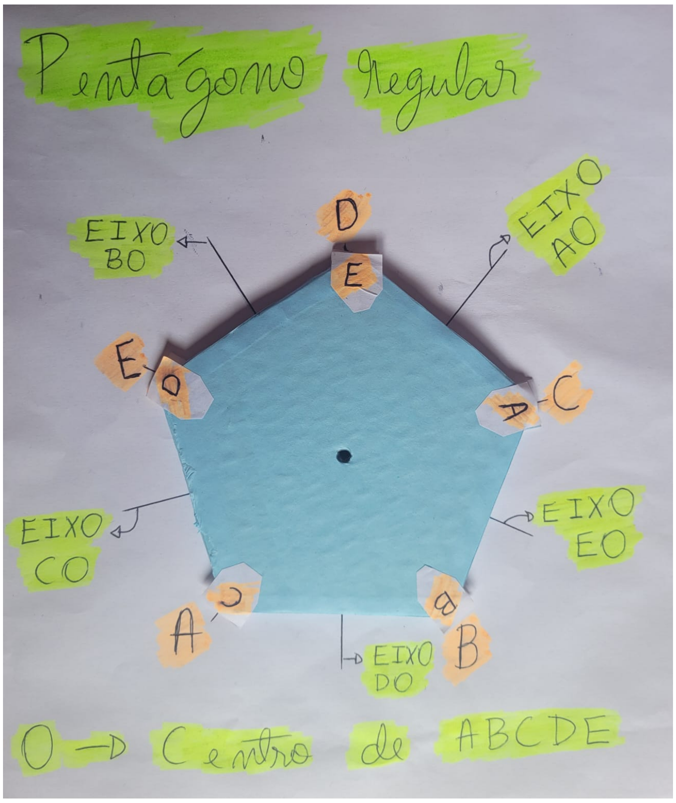


Figura 57: Posicionamento do pentágono após a segunda permutação

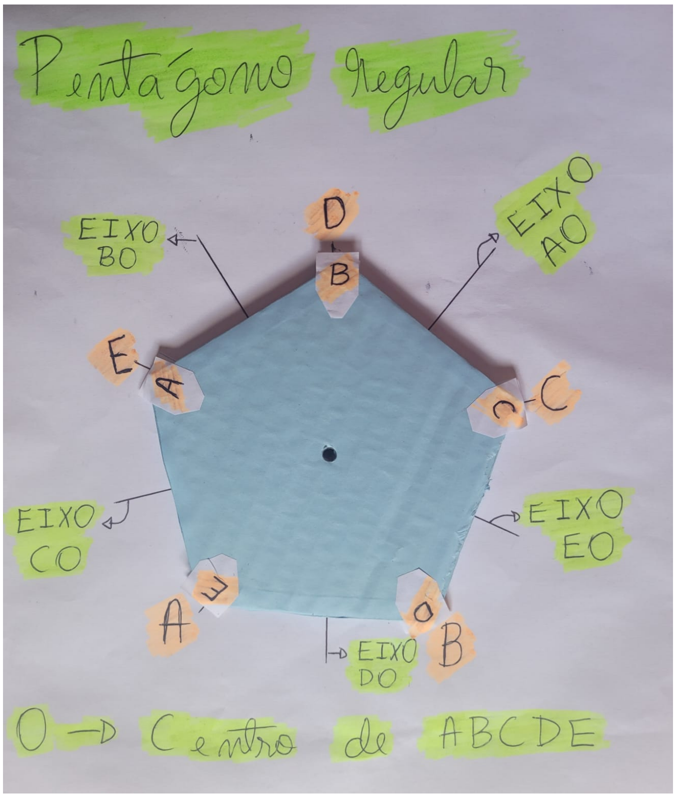


Figura 58: Posicionamento do pentágono após a terceira permutação

(iv) a reflexão em torno do eixo DO está associada à permutação em que D fica fixo, A vira B, B vira A, C vira E e E vira C;

(v) a reflexão em torno do eixo EO está associada com a permutação em que E fica fixo, A vira D, B vira C, C vira B e D vira A.

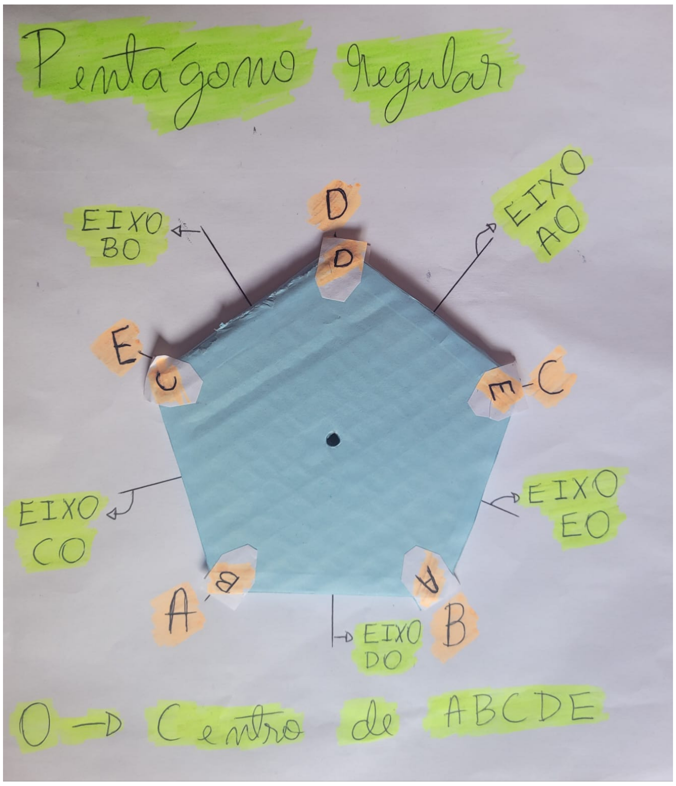


Figura 59: Posicionamento do pentágono após a quarta permutação

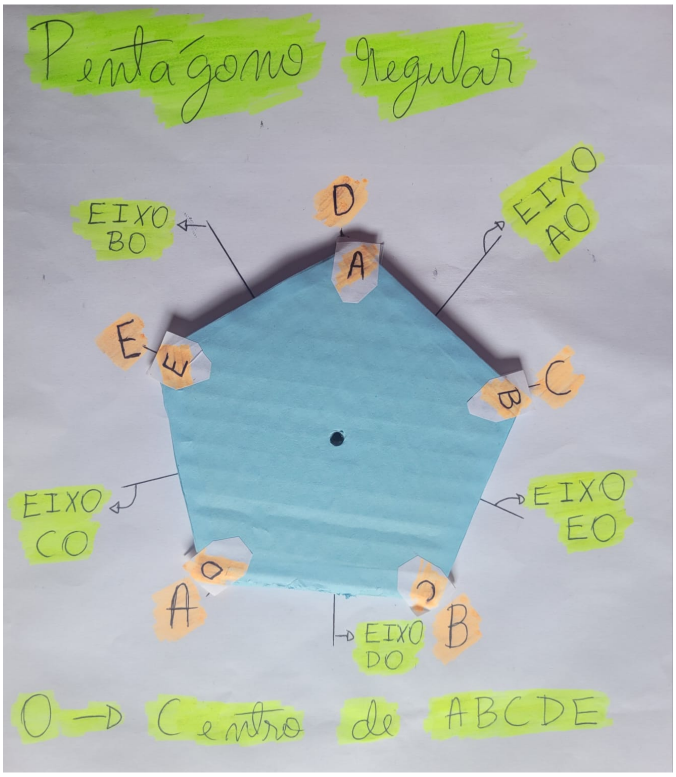


Figura 60: Posicionamento do pentágono após a quinta permutação

d) Considerando um hexágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D, E e F.

Resposta: Sejam o ponto O o centro do hexágono, M o ponto médio de AB, N o ponto médio de BC e P o ponto médio de CD. Temos que:

(i) a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A e D ficam fixos, B vira F, C vira E, E vira C e F vira B;

(ii) a reflexão em torno do eixo BO está associada à permutação em que B e E ficam fixos, A vira C, C vira A, D vira F e F vira D;

(iii) a reflexão em torno do eixo CO está associada à permutação em que C e F ficam fixos, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

(iv) a reflexão em torno do eixo MO está associada à permutação em que A vira B, B vira A, C vira F, D vira E, E vira D e F vira C;

(v) a reflexão em torno do eixo NO está associada com a permutação em que A vira D, B vira C, C vira B, D vira A, E vira F e F vira E.

(vi) a reflexão em torno do eixo PO está associada com a permutação em que A vira F, B vira E, C vira D, D vira C, E vira B e F vira A.

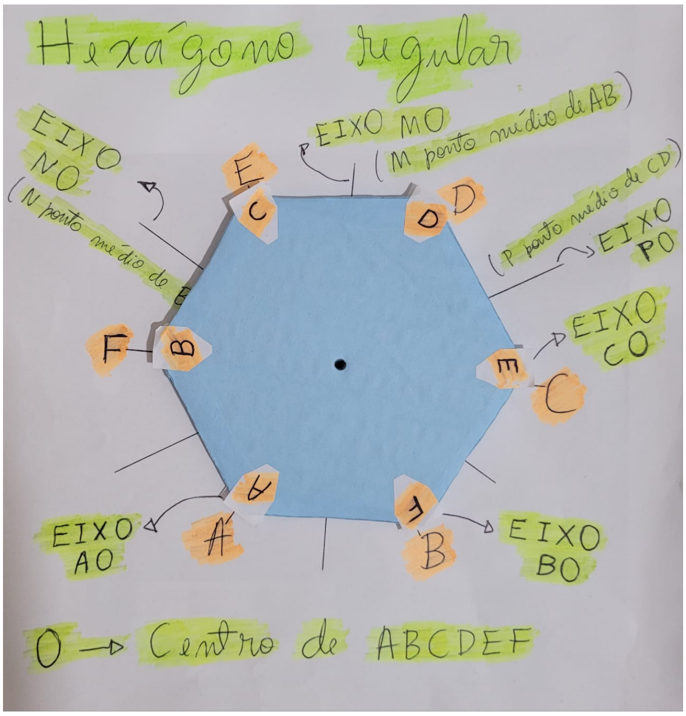


Figura 61: Posição dos vértices após a primeira reflexão

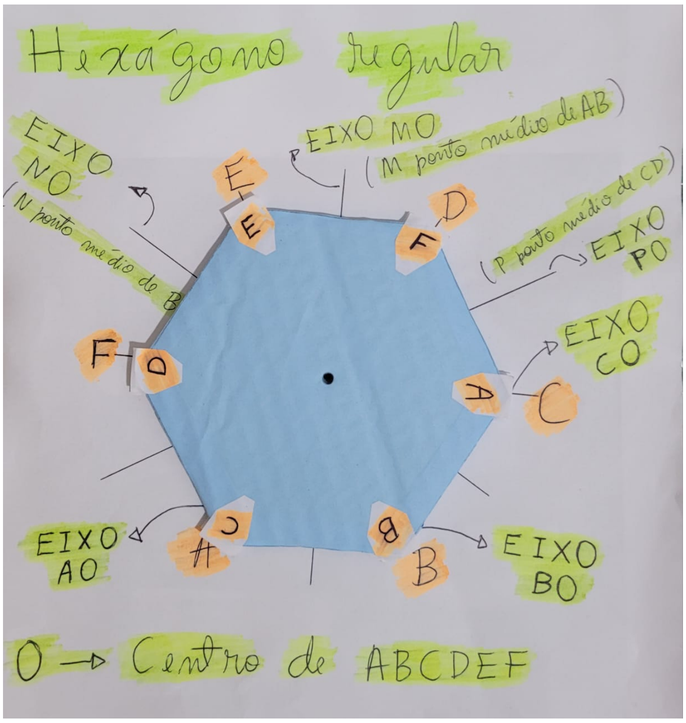


Figura 62: Posição dos vértices após a segunda reflexão

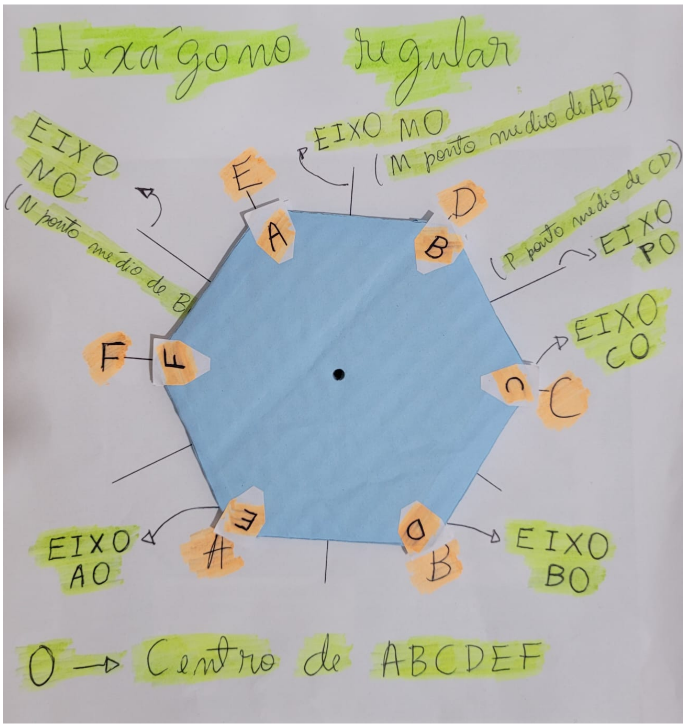


Figura 63: Posição dos vértices após a terceira reflexão

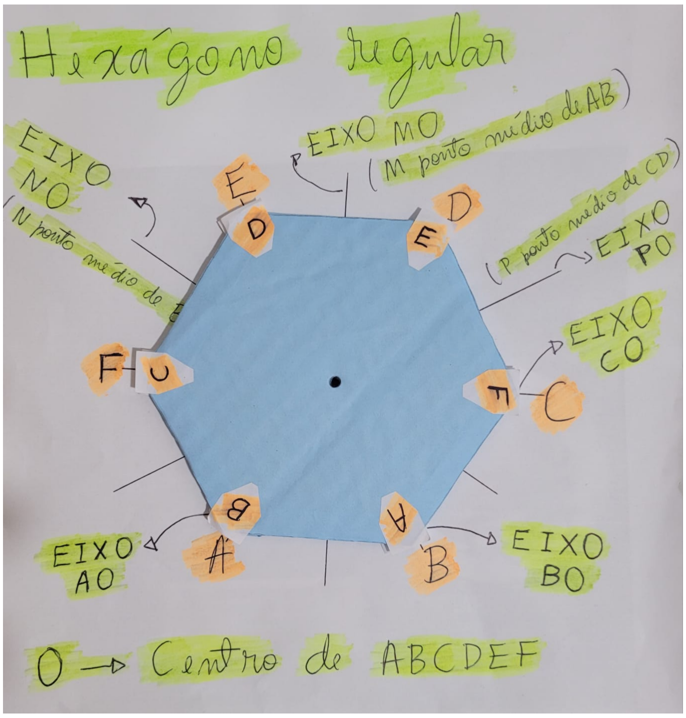


Figura 64: Posição dos vértices após a quarta reflexão

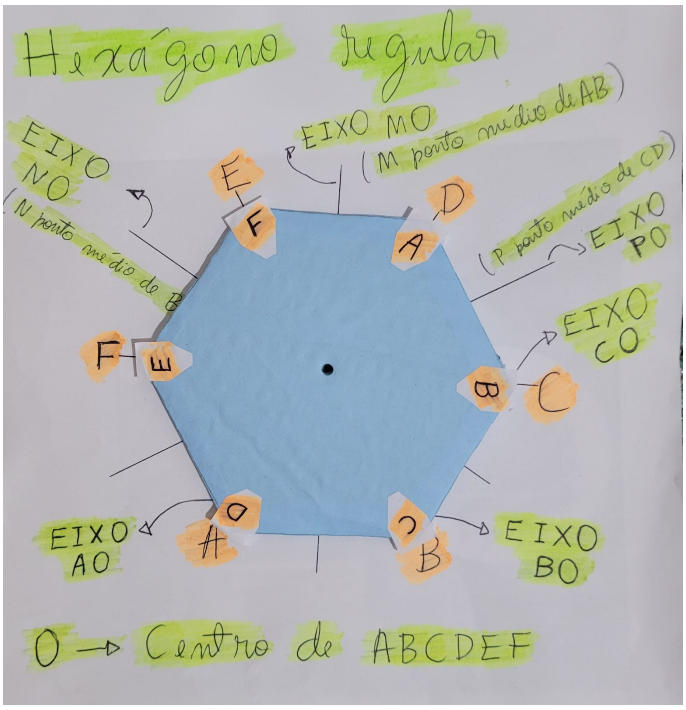


Figura 65: Posição dos vértices após a quinta reflexão

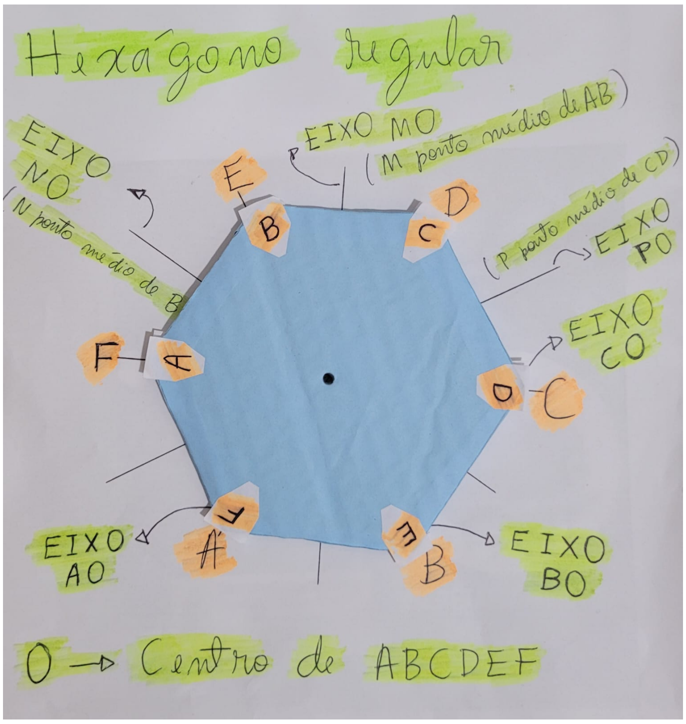


Figura 66: Posição dos vértices após a sexta reflexão

e) Verifique que são necessárias três rotações de 120° para o triângulo equilátero, quatro rotações de 90° para o quadrado e cinco de 72° para o pentágono retornarem para a posição inicial.

Resposta: De fato, após cada movimentação descrita no enunciado partido da posição inicial, observa-se que os polígonos retornam para a posição inicial.

f) Quantas rotações de 60° do hexágono regular seriam necessárias para que ele partindo da posição inicial na folha em branco retornasse para ela?

Resposta: Observando os padrões do item anterior fica fácil estimar que são necessários n movimentos de rotação com um ângulo de 360°/n para o polígono regular de n lados retornar à posição inicial. Particularmente, para o hexágono regular seriam necessárias 6 rotações de 60° para que ele retorne à posição inicial.

g) Verifique que realizando duas reflexões em torno de qualquer eixo de simetria dos polígonos regulares construídos o resultado é a posição inicial do polígono na folha.

Resposta: De fato, após realizar duas reflexões consecutivas em torno de qualquer eixo de simetria observa-se que o polígono retorna para a posição inicial.

3 - Considerando as composições entre as rotações em torno da origem no sentido anti-horário e as reflexões em torno de um eixo de simetria de um polígono regular, responda cada item a seguir.

a) Indique as permutações dos vértices do triângulo equilátero associadas às composições entre as rotações 120° e 240° e a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 120° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B fica fixo, A vira C e C vira A;

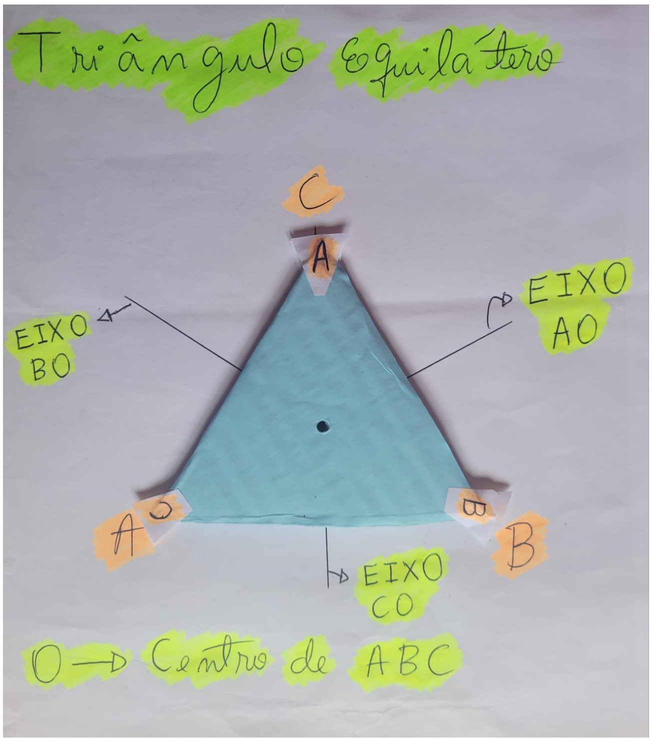


Figura 67: Triângulo após a composição da rotação com a reflexão

(ii) a composição entre a rotação de 240° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que C fica fixo, A vira B e B vira A.

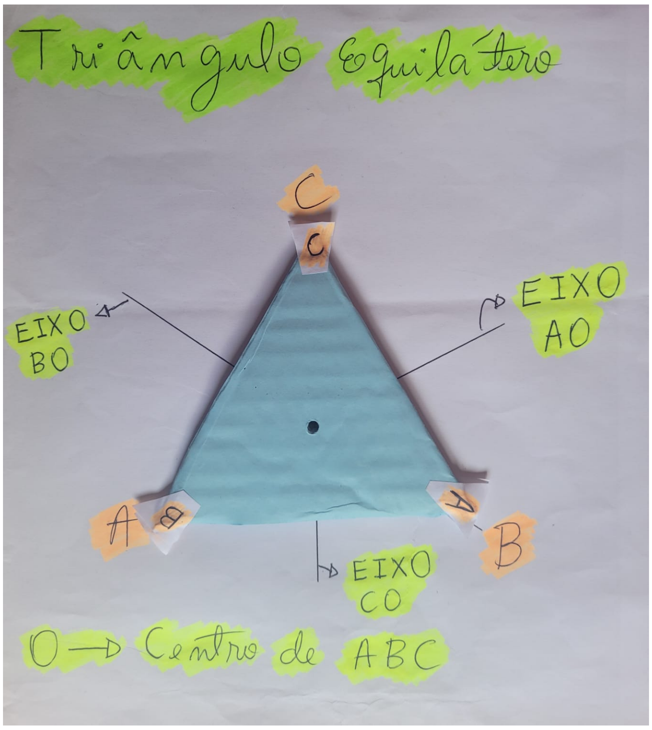


Figura 68: Triângulo após a composição da rotação com a reflexão

b) Faça uma associação entre as permutações dos vértices e a composição de rotações de 90°, 180° e 270° com a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 90° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira D, B vira C, C vira B e D vira A;

(ii) a composição entre a rotação de 180° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B e D ficam fixos, A vira C e C vira A;

(iii) a composição entre a rotação de 180° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira B, B vira A, C vira D e D vira C;

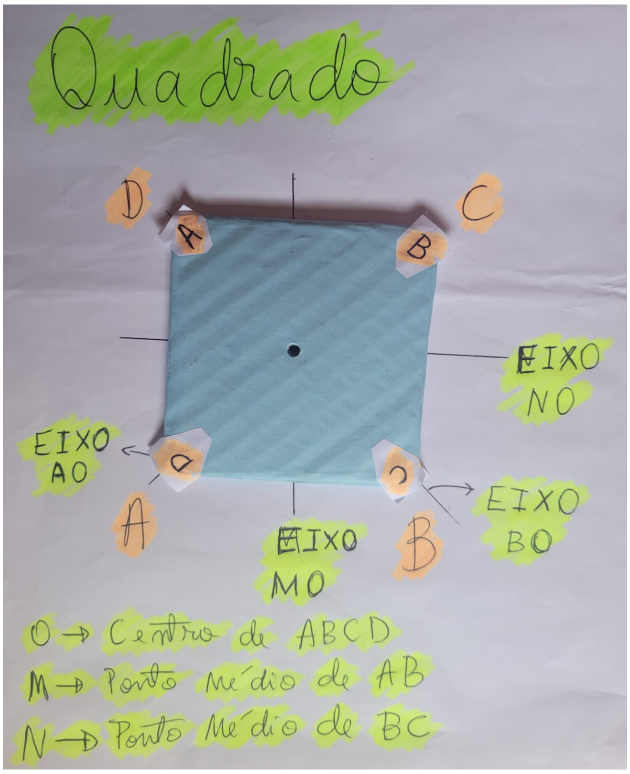


Figura 69: Posicionamento após a primeira composição no quadrado

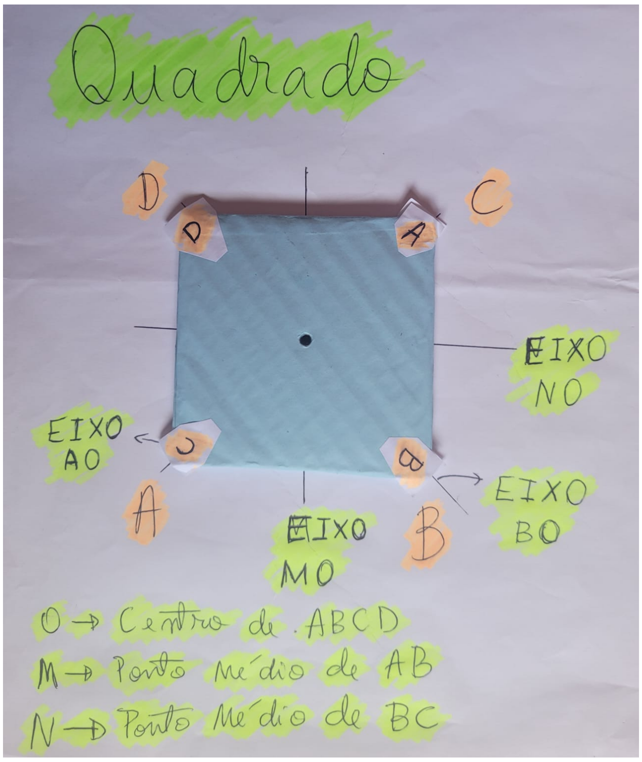


Figura 70: Posicionamento após a segunda composição no quadrado

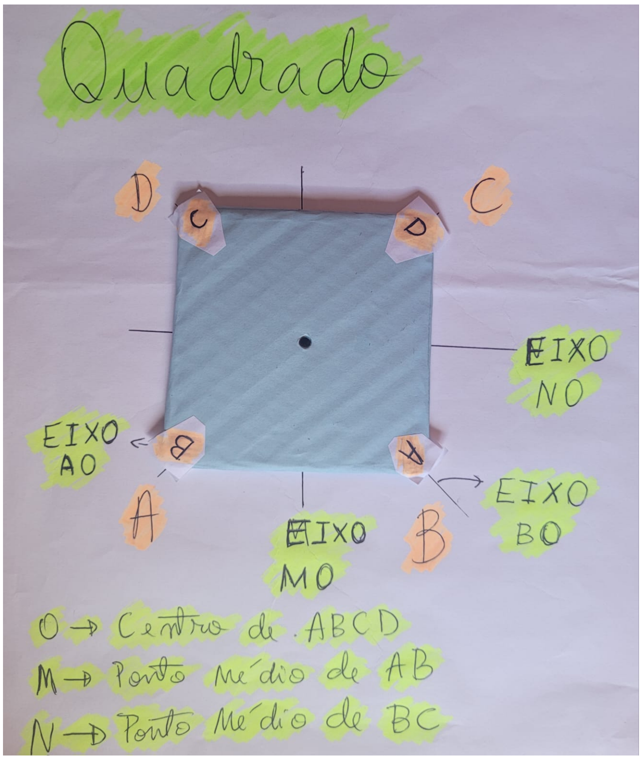


Figura 71: Posicionamento após a terceira composição do quadrado

c) Para um pentágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 72°, 144°, 216° e 288° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 72° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que C fica fixo, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

(ii) a composição entre a rotação de 144° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que E fica fixo, A vira D, B vira C, C vira B, D vira A;

(iii) a composição entre a rotação de 216° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B fica fixo, A vira C, C vira A, D vira E e E vira D;

(iv) a composição entre a rotação de 288° e a reflexão em

torno do eixo AO está associada à permutação em que D fica fixo, A vira B, B vira A, C vira E e E vira C;

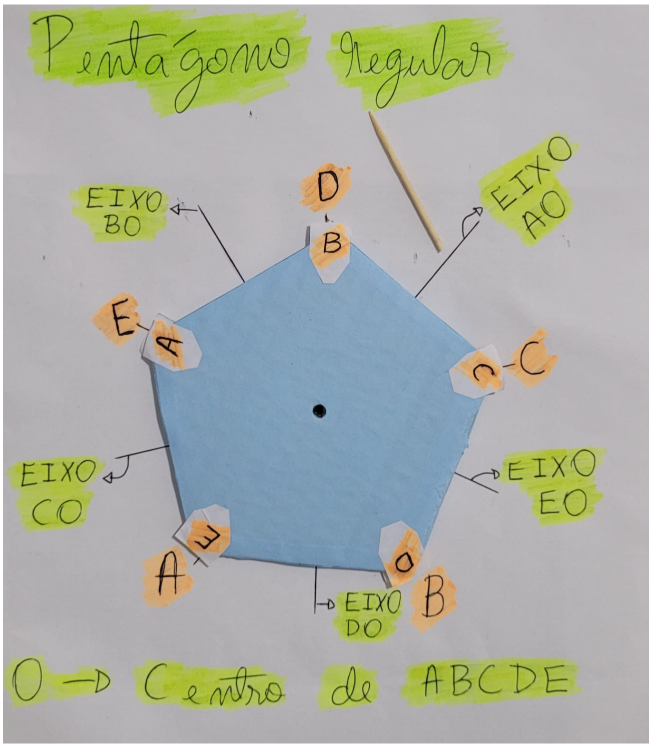


Figura 72: Posição dos vértices após a primeira composição

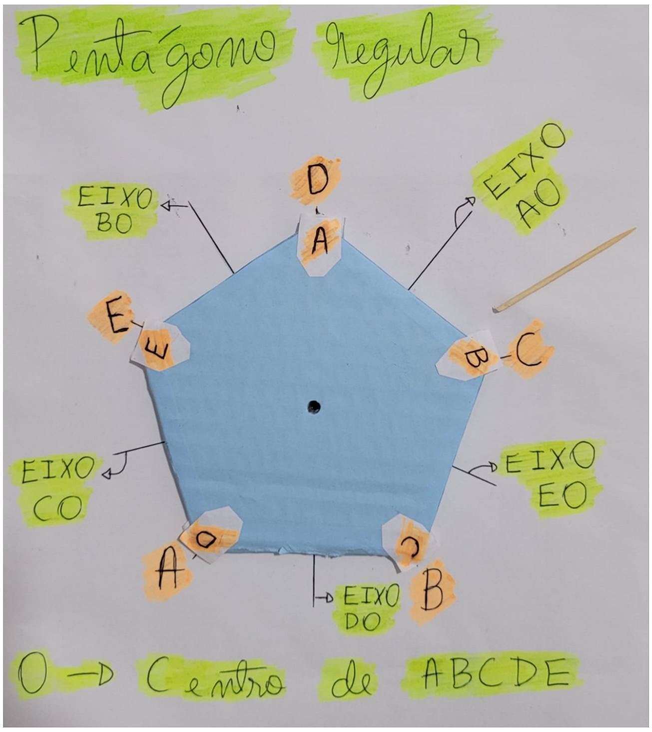


Figura 73: Posição dos vértices após a segunda composição

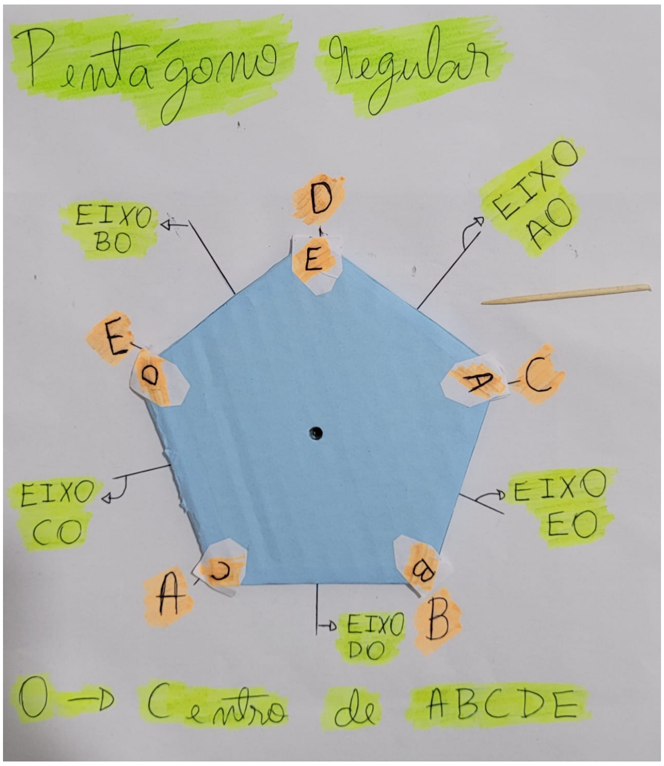


Figura 74: Posição dos vértices após a terceira composição

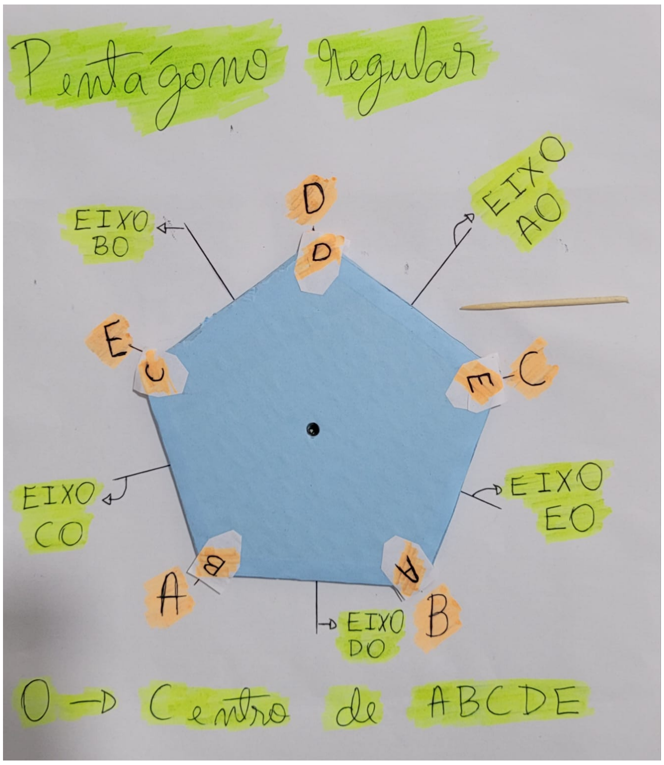


Figura 75: Posição dos vértices após a quarta composição

d) Para um hexágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 60°, 120°, 180°, 240° 300° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 60° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira F, B vira E, C vira D, D vira C e E vira B e F vira A;

(ii) a composição entre a rotação de 120° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que C e F ficam fixos, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

(iii) a composição entre a rotação de 180° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira D, B vira C, C vira B, D vira A, E vira F e F vira E;

(iv) a composição entre a rotação de 240° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B e E ficam fixos, A vira C, C vira A, D vira F e F vira D;

(v) a composição entre a rotação de 300° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira B, B vira A, C vira F, D vira E, E vira D e F vira C;

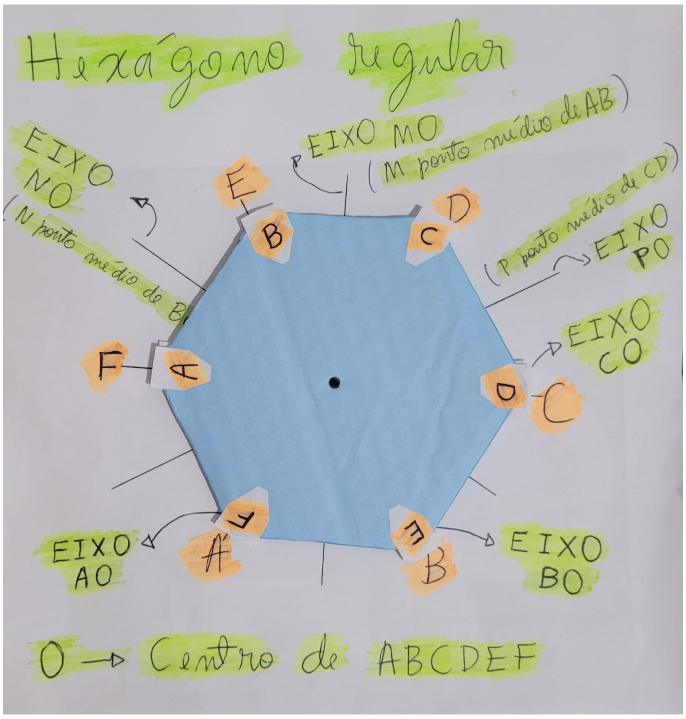


Figura 76: Posição dos vértices após a primeira composição

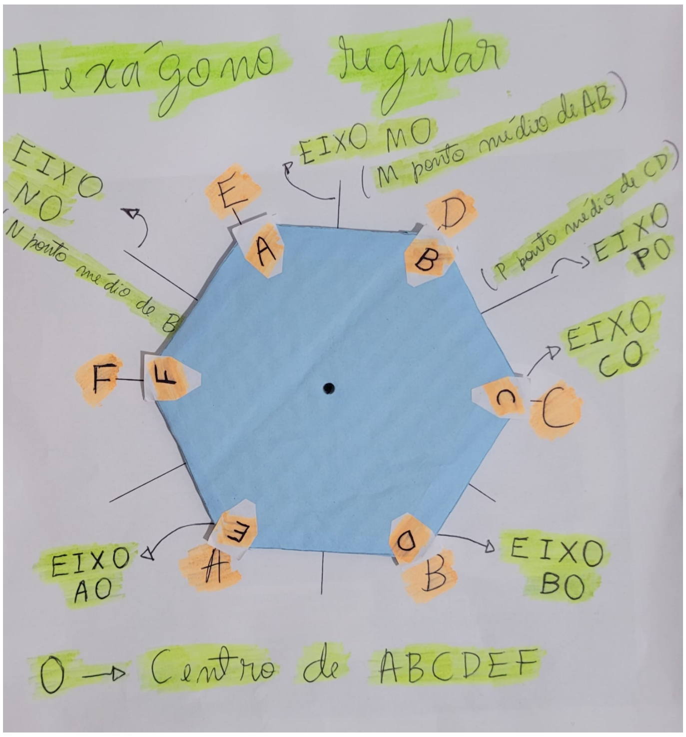


Figura 77: Posição dos vértices após a segunda composição

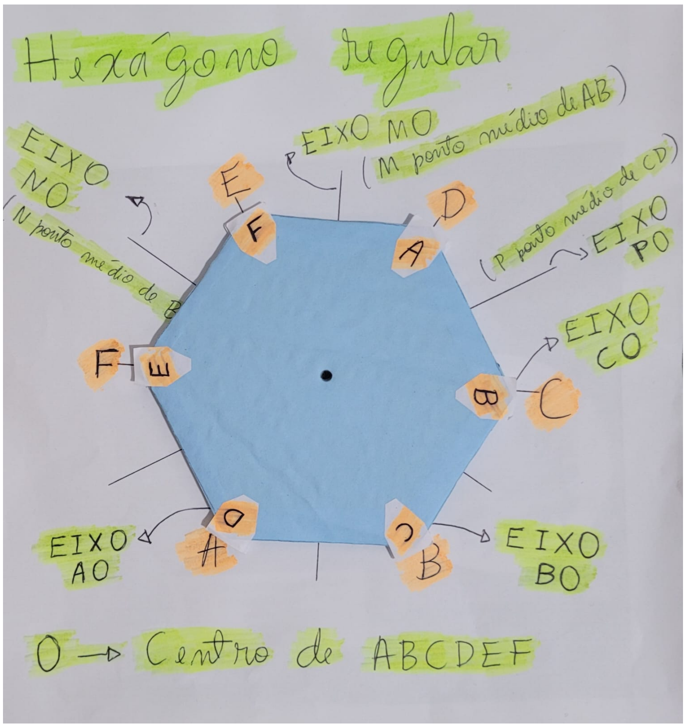


Figura 78: Posição dos vértices após a terceira composição

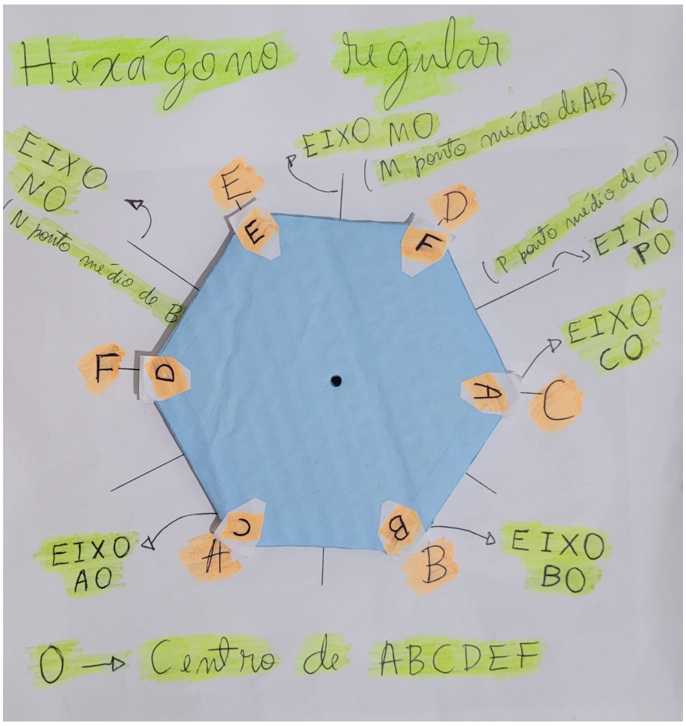


Figura 79: Posição dos vértices após a quarta composição

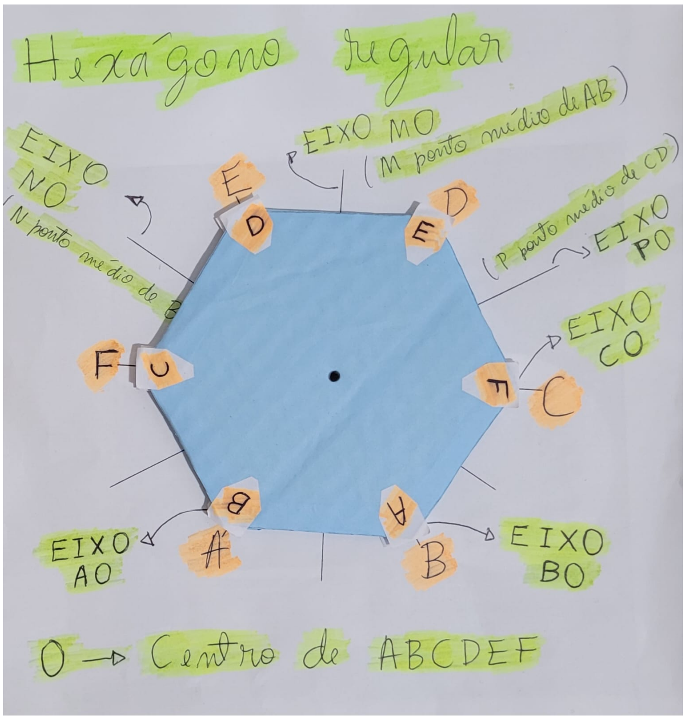


Figura 80: Posição dos vértices após a quinta composição

e) Considerando um triângulo equilátero, quantas permutações dos vértices são possíveis? É sempre possível associar uma permutação nesse caso com uma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique.

Resposta: Como há três vértices (A, B e C), pode-se pensar em seis permutações de vértices possíveis. Nesse caso, todas as permutações estão associadas a alguma rotação, reflexão ou composição destas, conforme foi mostrado nas questões anteriores.

f) Quantas permutações há dos vértices de um quadrado? Todas elas podem ser identificadas com alguma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique se a permutação em que C e D ficam fixos, A vira B e B vira A corresponde a alguma rotação, reflexão ou composição.

Resposta: Sabendo há quatro vértices (A, B, C e D), teremos 24 permutações possíveis. Usando o material ma-

nipulável é possível verificar que nenhuma isometria corresponde a essa permutação e isso mostra que nem toda permutação pode ser identificada com alguma rotação, reflexão ou composição.

g) Considerando agora um pentágono regular, determine o número de permutações dos vértices e verifique se a permutação em que B, D e E ficam fixos, A vira C e C vira A pode ser associada a alguma rotação, reflexão ou composição destas. Depois responda se é sempre possível associar uma permutação a alguma isometria.

Resposta: Como são cinco vértices (A, B, C, D e E), temos que há 120 permutações possíveis. Com o apoio do material manipulável é possível verificar que a permutação indicada no enunciado não corresponde a nenhuma isometria, logo nem toda permutação poderá ser identificada com uma rotação, reflexão ou composição.

4 - Julgue as afirmações a seguir como verdadeira ou falsa, considerando os seus conhecimentos sobre rotações (em relação ao centro no sentido anti-horário) e reflexões (em torno de um eixo de simetria) de polígonos regulares. Caso a afirmativa seja falsa, escreva o enunciado correspondente que está correto.

a) Se forem realizadas duas rotações de 120° em um triângulo equilátero e depois for realizada uma reflexão em torno do eixo de simetria AO, a posição do triângulo será idêntica caso a ordem seja invertida, ou seja, reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é falsa.

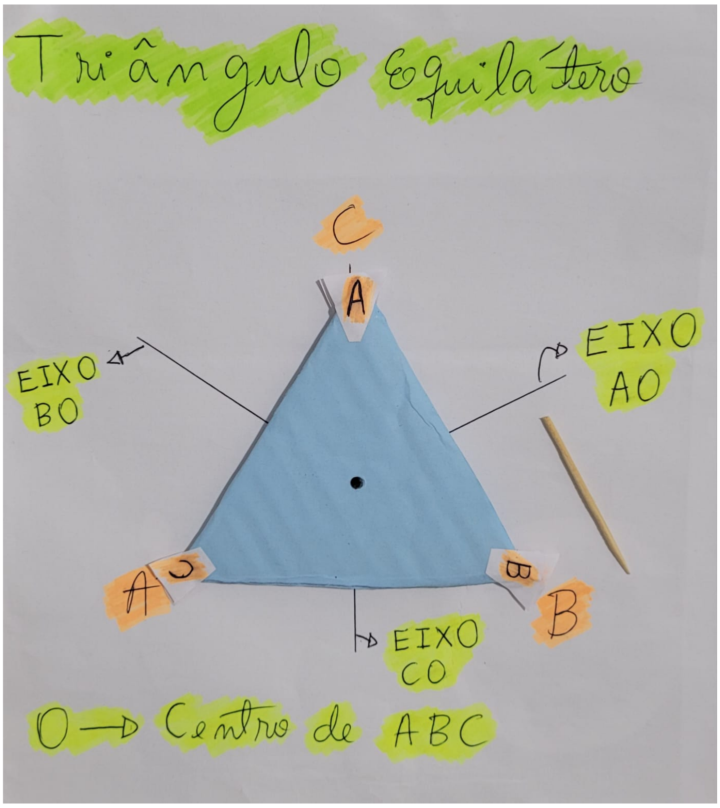


Figura 81: Posição do triângulo após reflexão seguida de dupla rotação

b) Para um quadrado, vale que duas rotações de 90° seguido de uma reflexão (em torno de AO) resulta na mesma posição que uma reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

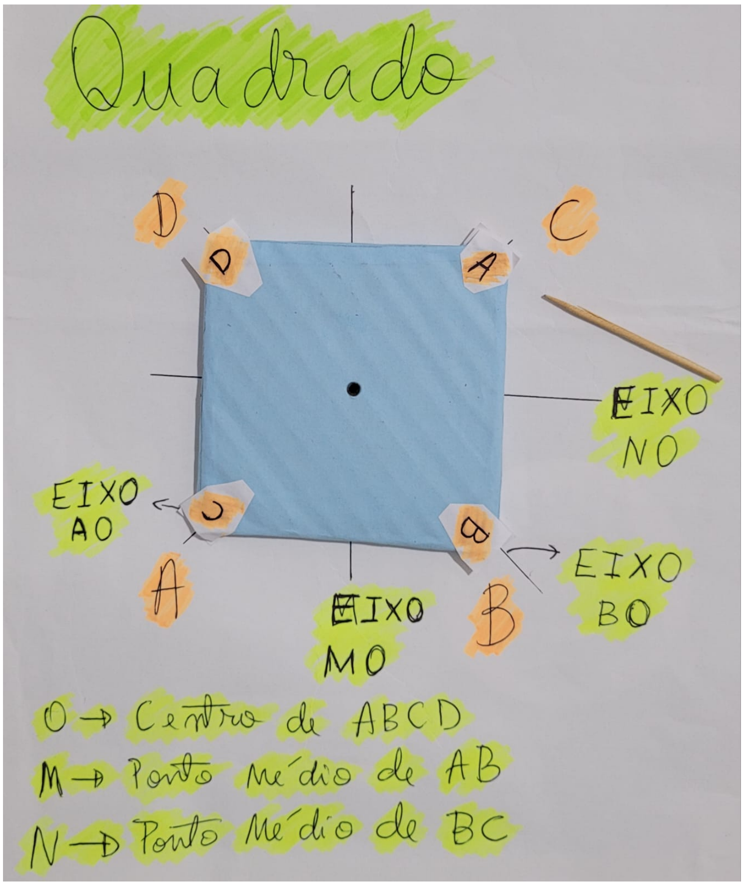


Figura 82: Posição do quadrado após qualquer das duas composições citadas

c) Fazendo duas rotações de 72° e depois uma reflexão (em torno de AO) em um pentágono regular, obtém-se a mesma posição de uma reflexão seguida de duas rotações de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é falsa.

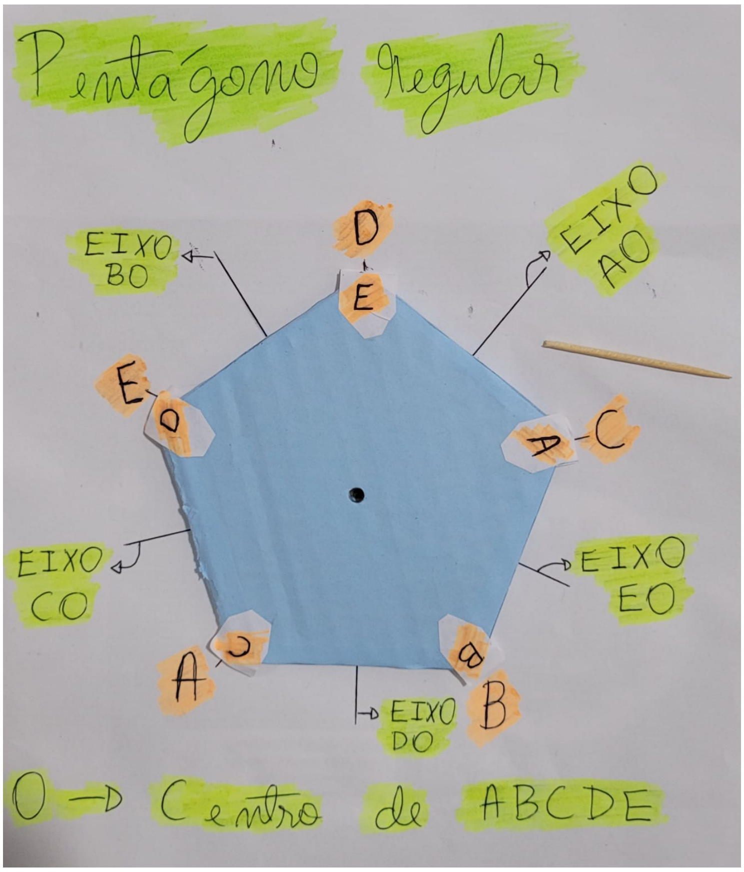


Figura 83: Posição do pentágono após reflexão seguida de dupla rotação

d) Fazendo duas rotações de 120° e depois uma reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo equilátero, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

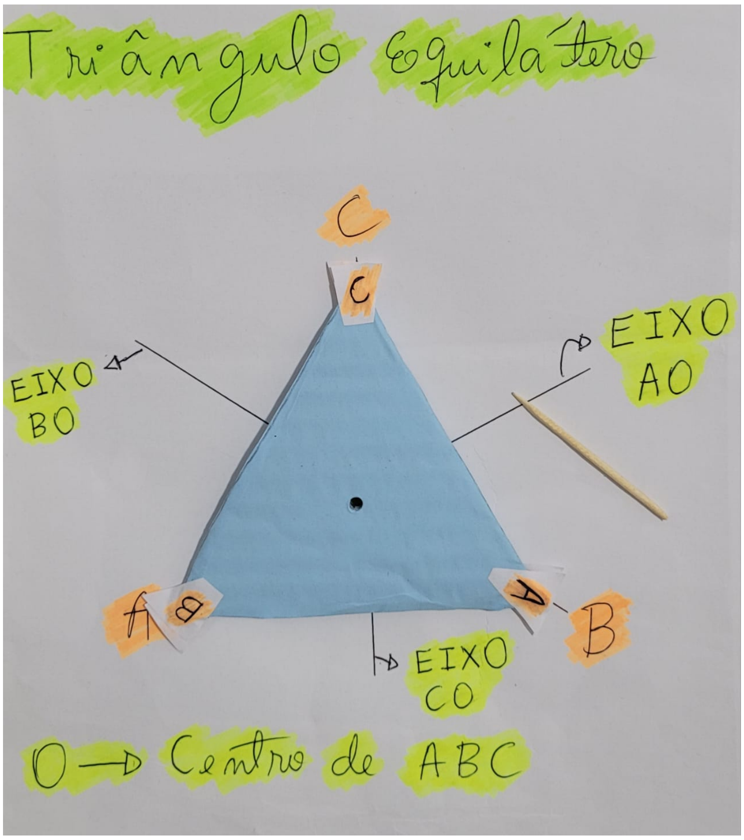


Figura 84: Posição do triângulo após qualquer das duas composições

e) Fazendo três rotações de 90° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo quadrado, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

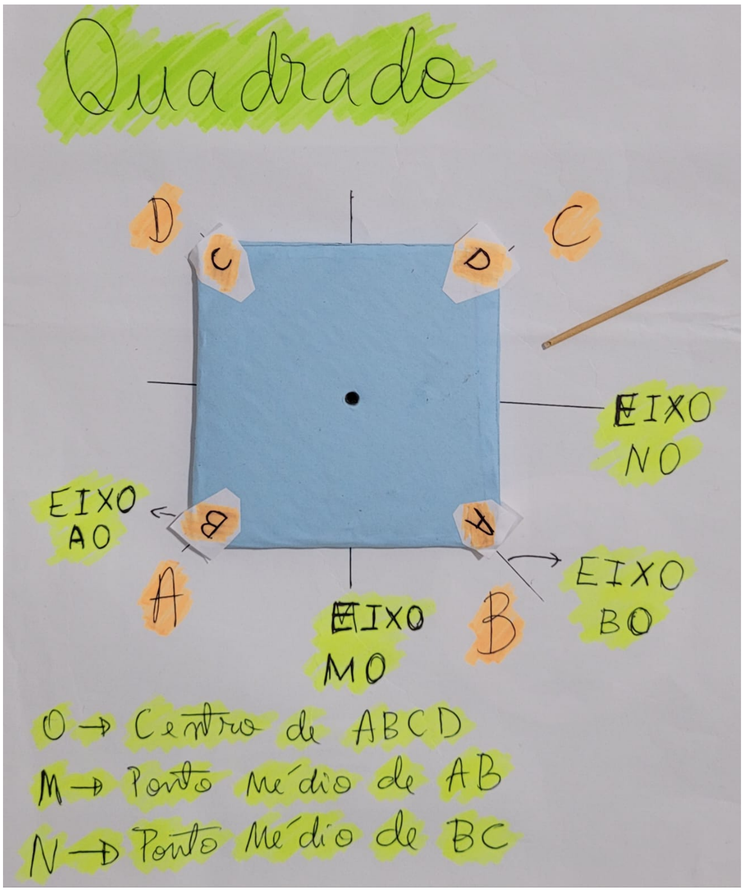


Figura 85: Posição do quadrado após qualquer das duas composições

f) Fazendo quatro rotações de 72° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um pentágono regular, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

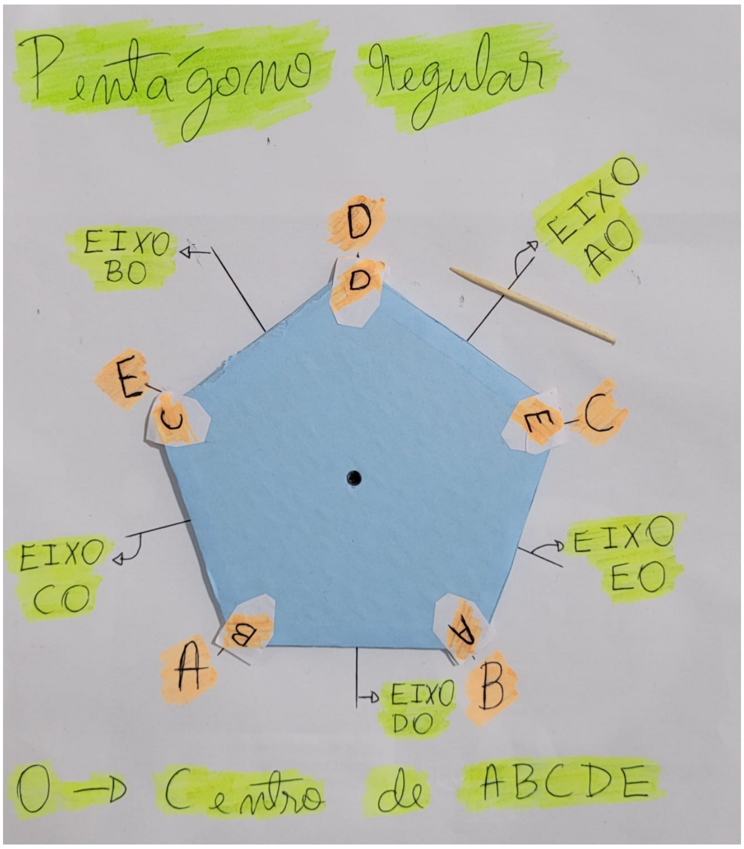


Figura 86: Posição do pentágono após qualquer das duas composições

g) Fazendo cinco rotações de 60° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um hexágono regular, a posição final será diferente caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

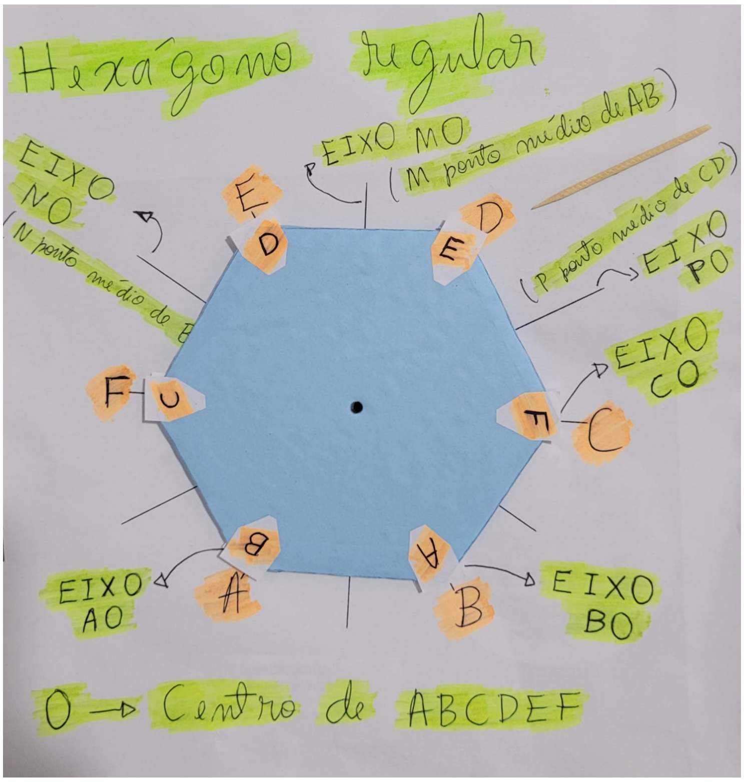


Figura 87: Posição do hexágono após qualquer das duas composições

5 - Considerando as rotações dos polígonos regulares em torno do centro no sentido anti-horário e a reflexão em torno dos eixos de simetria, responda os itens a seguir.

a) Fixando um eixo de reflexão e realizando rotações de 120° no triângulo equilátero, indique quantas configurações posicionais distintas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas. Esboce as configurações distintas representando as variações de posição dos vértices nos desenhos.

Resposta: Usando os polígonos construídos (material manipulável), pode-se verificar que há três rotações (0°, 120° e 240°), uma reflexão (em torno de AD) e duas composições (rotações de 120° e 240° com a reflexão), gerando no total seis configurações distintas. Qualquer outra reflexão ou composição invertendo a ordem gera uma configuração igual a alguma delas.

b) Esboce todas as configurações posicionais distintas e indique quantas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas em quadrados, sendo as rotações de 90° e o eixo de reflexão fixo.

Resposta: Com o uso do material manipulável, pode-se verificar que há quatro rotações (0°, 90°, 180° e 270°), uma reflexão (em torno do eixo AE) e três composições (rotações de 90°, 180° e 270° com a reflexão), totalizando oito configurações possíveis. É verificável, ainda, que qualquer outra reflexão ou composição com ordem invertida gera uma das oito configurações já listadas.

c) Aplicando rotações de 72° e mantendo um eixo de reflexão fixo em um pentágono regular, represente por meio de desenhos todas as configurações de rotações, reflexões e composição destas e indique quantas representações distintas existem.

Resposta: Por meio do material manipulável, pode-se verificar que há cinco rotações (0°, 72°, 144°, 216° e 288°), uma reflexão (em torno do eixo AF) e quatro composições (rotações de 72°, 144°, 216° e 288° com a reflexão), gerando m, total de dez configurações. Além disso, é fácil verificar que qualquer outra reflexão ou composição com ordem invertida gera uma das oito configurações já listadas.

d) Observe o total de configurações distintas que existem ao realizarmos rotações de 60°, reflexões (eixo fixo) e composições destas em um hexágono regular. Represente por meio de desenhos e indique quantas configurações distintas existem neste caso.

Resposta: Novamente com o uso do material manipulável, é possível verificar que há seis rotações (0°, 60°, 120°, 180°, 240° e 300°), uma reflexão (em torno de AH, sendo H o

centro) e cinco composições (rotações de 60°, 120°, 180°, 240° e 300° com a reflexão), gerando um total de doze configurações. Aplicando-se outras reflexões e alterando a ordem das composições os resultados obtidos são iguais aos já listados

e) Quantas configurações distintas você acredita que existem após a aplicação de rotações de (360°/n), reflexões (eixo fixo) e composições destas para um polígono regular de n lados?

Resposta: Observando os padrões nos itens anteriores, é possível estimar que haverá n rotações ((360°/n)i, para todo i = 0, 1, ..., n - 1), uma reflexão em torno de um eixo de simetria e n - 1 composições (as rotações (360°/n)i, para todo i = 1, 2, ..., n - 1 com a reflexão), totalizando 2n configurações possíveis.

APÊNDICE A

Questionário da atividade 5 da sequência didática

1 - Considere os seus conhecimentos a respeito de rotações de um polígono regular e responda as perguntas a seguir.

a) Realizando três rotações de 120° no sentido anti-horário de triângulo equilátero em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

b) Após a aplicação de quatro rotações de 90° no sentido anti-horário de um quadrado em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

c) Com qual ângulo, com cinco rotações em torno de seu centro, um pentágono regular retornaria para a posição inicial?

d) A partir dos casos anteriores, como você faria para encontrar o ângulo de rotação e o número mínimo de rotações para um polígono regular de n lados?

2 - A respeito das reflexões e dos eixos de simetria de um polígono regular, responda os itens a seguir.

a) Determine todos os eixos de simetria de um triângulo equilátero e depois indique o número mínimo de reflexões em torno de cada um deles para o triângulo retornar para a posição inicial.

b) Quantos eixos de simetria um quadrado possui? Quantas reflexões em torno de cada um deles são necessárias para que ele retorne para a posição inicial?

c) O que você pensa a respeito do número de eixos de simetria de um pentágono? E sobre as reflexões em torno de cada um deles? (Dica: considere o número de lados do polígono regular e os casos anteriores)

3 - Julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas.

a) Em um triângulo equilátero é possível, com apenas uma reflexão em torno do eixo de simetria g: BD, posicionar o triângulo de maneira idêntica à posição que teria após uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do centro D, seguida de uma reflexão em torno do eixo f: AD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

b) Fazendo duas rotações sucessivas de 120° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão de em torno do eixo f: AD, não seria possível com apenas uma reflexão em torno do eixo h: CD, posicionar o triângulo equilátero ABC de formas idênticas.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

c) Para um triângulo equilátero, uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno da origem equivale a alguma reflexão em torno de um eixo de simetria e duas rotações sucessivas (nas mesmas condições da anterior) resulta no mesmo posicionamento gerado por outra reflexão feita em torno de outro eixo.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

d) Para um quadrado após realizar uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguida de uma reflexão em torno do eixo de simetria f: AE, é possível determinar um outro eixo de simetria que resulta na mesma posição após uma única reflexão em torno dele.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

e) Duas rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo i: BD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

f) Três rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo h: ME.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

APÊNDICE B

Questionário da atividade 6 da sequência didática

1 - Considerando as rotações no sentido anti-horário em torno do centro do polígono, as reflexões em torno dos eixos de simetria e usando os polígonos construídos na aula anterior, responda os itens a seguir.

a) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro determinaria uma rotação equivalente a uma permutação dos vértices A, B e C do triângulo equilátero, fazendo com que o vértice A vire o B, o B vire o C e o C vire o A? E qual seria o ângulo que geraria uma rotação equivalente à permutação dos vértices em que A vira C, B vira A e C vira B?

b) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro desenvolveria uma rotação idêntica a uma permutação dos vértices A, B, C e D do quadrado, em que o vértice A vira o B, o B vira o C, o C vira o D e o D vira o A? E o ângulo da rotação idêntica à permutação em que A vira C, B vira D, C vira A e D vira B? Qual seria o ângulo de rotação que geraria uma rotação idêntica à permutação em que A vira D, B vira A, C vira B e D vira C?

c) No caso do pentágono regular, qual ângulo de rotação geraria uma rotação correspondente à permutação dos vértices A, B, C, D e E fazendo A virar B, B virar C, C virar, D virar E e E virar A? Qual seria o ângulo para a rotação que corresponderia à permutação em que A vira C, B vira D, C vira E, D vira A e E vira B? E o ângulo para a rotação corresponder à permutação em que A vira D, B vira E, C vira A, D vira B e E vira C? Determine também o ângulo em que a rotação corresponde à permutação em que A vira E, B vira A, C vira B, D vira C e E vira D.

d) O que ocorre com o posicionamento de cada um dos vértices dos polígonos regulares após uma rotação cujo ângulo é igual a 360° dividido pelo número de lados do polígono?

e) Considerando os itens anteriores verifique quais permutações dos vértices correspodem às rotações de 60°, 120°, 180°, 240° e 300° no hexágono regular.

2 - Usando os materiais construídos na atividade inicial e aplicando os seus conhecimentos sobre rotações e reflexões de polígonos regulares, faça o que for pedido em cada item a seguir.

a) No triângulo equilátero, indique o eixo de simetria em torno do qual deve ser realizada uma reflexão para que a posição final seja equivalente a uma permutação dos vértices em que A fica fixo, B vira C e C vira B. Indique também a rotação em que B fica fixo, A vira C e C vira e a outra em que C fica fixo, A vira B e B vira A.

b) Associe no quadrado as reflexões em torno dos eixos de simetria com as permutações dos vértices A, B, C e D. Realize cada reflexão e observe como cada vértice muda de posição.

c) Considerando um pentágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D e E.

d) Considerando um hexágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D, E e F.

e) Verifique que são necessárias três rotações de 120° para o triângulo equilátero, quatro rotações de 90° para o quadrado e cinco de 72° para o pentágono retornarem para a posição inicial.

f) Quantas rotações de 60° do hexágono regular seriam necessárias para que ele partindo da posição inicial na folha em branco retornasse para ela?

g) Verifique que realizando duas reflexões em torno de qualquer eixo de simetria dos polígonos regulares construídos o resultado é a posição inicial do polígono na folha.

3 - Considerando as composições entre as rotações em torno da origem no sentido anti-horário e as reflexões em torno de um eixo de simetria de um polígono regular, responda cada item a seguir.

a) Indique as permutações dos vértices do triângulo equilátero associadas às composições entre as rotações 120° e 240° e a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

b) Faça uma associação entre as permutações dos vértices e a composição de rotações de 90°, 180° e 270° com a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

c) Para um pentágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 72°, 144°, 216° e 288° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

d) Para um hexágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 60°, 120°, 180°, 240° 300° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

e) Considerando um triângulo equilátero, quantas permutações dos vértices são possíveis? É sempre possível associar uma permutação nesse caso com uma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique.

f) Quantas permutações há dos vértices de um quadrado? Todas elas podem ser identificadas com alguma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique se a permutação em que C e D ficam fixos, A vira B e B vira A corresponde a alguma rotação, reflexão ou composição.

g) Considerando agora um pentágono regular, determine o número de permutações dos vértices e verifique se a permutação em que B, D e E ficam fixos, A vira C e C vira A pode ser associada a alguma rotação, reflexão ou composição destas. Depois responda se é sempre possível associar uma permutação a alguma isometria.

4 - Julgue as afirmações a seguir como verdadeira ou falsa, considerando os seus conhecimentos sobre rotações (em relação ao centro no sentido anti-horário) e reflexões (em torno de um eixo de simetria) de polígonos regulares. Caso a afirmativa seja falsa, escreva o enunciado correspondente que está correto.

a) Se forem realizadas duas rotações de 120° em um triângulo equilátero e depois for realizada uma reflexão em torno do eixo de simetria AO, a posição do triângulo será idêntica caso a ordem seja invertida, ou seja, reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

b) Para um quadrado, vale que duas rotações de 90° seguido de uma reflexão (em torno de AO) resulta na mesma posição que uma reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

c) Fazendo duas rotações de 72° e depois uma reflexão (em torno de AO) em um pentágono regular, obtém-se a mesma posição de uma reflexão seguida de duas rotações de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

d) Fazendo duas rotações de 120° e depois uma reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo equilátero, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

e) Fazendo três rotações de 90° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo quadrado, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

f) Fazendo quatro rotações de 72° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um pentágono regular, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

g) Fazendo cinco rotações de 60° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um hexágono regular, a posição final será diferente caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

5 - Considerando as rotações dos polígonos regulares em torno do centro no sentido anti-horário e a reflexão em torno dos eixos de simetria, responda os itens a seguir.

a) Fixando um eixo de reflexão e realizando rotações de 120° no triângulo equilátero, indique quantas configurações posicionais distintas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas. Esboce as configurações distintas representando as variações de posição dos vértices nos desenhos.

b) Esboce todas as configurações posicionais distintas e indique quantas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas em quadrados, sendo as rotações de 90° e o eixo de reflexão fixo.

c) Aplicando rotações de 72° e mantendo um eixo de reflexão fixo em um pentágono regular, represente por meio de desenhos todas as configurações de rotações, reflexões e composição destas e indique quantas representações distintas existem.

d) Observe o total de configurações distintas que existem ao realizarmos rotações de 60°, reflexões (eixo fixo) e composições destas em um hexágono regular. Represente por meio de desenhos e indique quantas configurações distintas existem neste caso.

e) Quantas configurações distintas você acredita que existem após a aplicação de rotações de $(360°/n)$, reflexões (eixo fixo) e composições destas para um polígono regular de n lados?