



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

# PRODUTO EDUCACIONAL DISCIPLINAS ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM XADREZ E POKER

ORIENTADOR:  
PROF. DR. JAQUES SILVEIRA LOPES

**Natal - RN**  
Fevereiro de 2026

KÁCIO JOSÉ CARDOSO SANTOS

# **PRODUTO EDUCACIONAL DISCIPLINAS ELETIVAS DE MATEMÁTICA COM XADREZ E POKER**

Produto Educacional vinculado a  
Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFRN como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

**Natal - RN**  
Fevereiro de 2026

## Resumo

Este produto educacional apresenta duas propostas de disciplinas eletivas voltadas ao ensino de Matemática por meio de jogos de estratégia: *Xadrez para Iniciantes* e *Probabilidade na Mesa (Poker)*. A partir da perspectiva do PROFMAT/UFRN e da linha de pesquisa Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias, as duas eletivas foram concebidas como instrumentos metodológicos capazes de integrar conceitos matemáticos a situações lúdicas, contextualizadas e estimulantes. A eletiva de xadrez utiliza a estrutura do tabuleiro, os movimentos das peças e desafios clássicos para desenvolver conteúdos como geometria, lógica, análise combinatória e estatística. Já a eletiva de poker explora o Texas Hold'em como ambiente pedagógico para o estudo de espaço amostral, probabilidade, combinatória, valor esperado, equidade e tomada de decisão baseada em dados. Ambas as propostas foram organizadas em planos de aula completos, com duração de 100 minutos cada, contendo objetivos, materiais e desenvolvimento detalhado. O produto busca oferecer aos professores uma alternativa metodológica ativa que favoreça a autonomia intelectual dos estudantes e a aprendizagem significativa de Matemática por meio da resolução de problemas, argumentação e análise crítica.

**Palavras-chave:** Plano de aula; Jogos de estratégia; Probabilidade; Poker; Xadrez.

# Abstract

This educational product presents two elective course proposals designed to support Mathematics teaching through strategic games: *Chess for Beginners* and *Probability at the Table (Poker)*. Developed within the PROFMAT/UFRN framework and aligned with the research line Mathematics in Basic Education and its Technologies, the electives were conceived as methodological tools that integrate mathematical concepts into engaging, contextualized, and problem-based learning environments. The chess elective uses the board structure, piece movements, and classical challenges to explore geometry, logic, combinatorics, and statistics. The poker elective employs Texas Hold'em as a pedagogical setting for studying sample spaces, probability, combinatorial analysis, expected value, equity, and data-driven decision making. Both proposals are organized into complete 100-minute lesson plans, each including objectives, required materials, and structured development. This educational product aims to provide teachers with an active methodological alternative that promotes student autonomy and meaningful learning through investigation, argumentation, and critical analysis.

**Keywords:** Lesson plan; Strategy games; Probability; Poker; Chess.

# Sumário

|          |                                                                                |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>APRESENTAÇÃO</b>                                                            | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>XADREZ PARA INICIANTE</b>                                                   | <b>7</b>  |
| 2.1      | Aula 1: A história do xadrez e a matemática do tabuleiro . . . . .             | 9         |
| 2.2      | Aula 2: Movimentos das peças e geometria . . . . .                             | 10        |
| 2.3      | Aula 3: Coordenadas no tabuleiro . . . . .                                     | 11        |
| 2.4      | Aula 4: Combinatória no xadrez . . . . .                                       | 13        |
| 2.5      | Aula 5: Raciocínio lógico e estratégia . . . . .                               | 15        |
| 2.6      | Aula 6: Simetrias e espelhamentos . . . . .                                    | 16        |
| 2.7      | Aula 7: Desafios matemáticos relacionados ao xadrez . . . . .                  | 17        |
| 2.8      | Aula 08: Estatísticas no xadrez . . . . .                                      | 18        |
| 2.9      | Aula 09: Organização de torneios e combinatória aplicada . . . . .             | 19        |
| 2.10     | Aula 10: Mini torneio matemático . . . . .                                     | 20        |
| 2.11     | Aula 11: Revisão geral e consolidação de conteúdos . . . . .                   | 20        |
| 2.12     | Aula 12: Projeto final . . . . .                                               | 21        |
| <b>3</b> | <b>PROBABILIDADE NA MESA (POKER)</b>                                           | <b>22</b> |
| 3.1      | Aula 1: Introdução ao poker . . . . .                                          | 24        |
| 3.2      | Aula 2: Métodos de contagem . . . . .                                          | 28        |
| 3.3      | Aula 3: Combinatória aplicada . . . . .                                        | 29        |
| 3.4      | Aula 4: Espaço amostral . . . . .                                              | 32        |
| 3.5      | Aula 5: Probabilidades no poker . . . . .                                      | 33        |
| 3.6      | Aula 6: Probabilidade condicional . . . . .                                    | 35        |
| 3.7      | Aula 7: Odds e Pot Odds . . . . .                                              | 37        |
| 3.8      | Aula 8: Valor esperado (EV) . . . . .                                          | 39        |
| 3.9      | Aula 9: Probabilidade e bluff . . . . .                                        | 41        |
| 3.10     | Aula 10: Probabilidade de vitória entre mãos . . . . .                         | 43        |
| 3.11     | Aula 11: Estatística no poker: performance e longo prazo . . . . .             | 46        |
| 3.12     | Aula 12: Probabilidade em Torneios e Gestão de Banca . . . . .                 | 49        |
| 3.13     | Aula 13: Classificação de jogadores: perfil, probabilidade e decisão . . . . . | 51        |
| 3.14     | Aula 14: Problemas clássicos e desafios matemáticos no poker . . . . .         | 54        |
| 3.15     | Aula 15: Projeto final: Análise matemática de uma mão real . . . . .           | 55        |

# 1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho resulta da pesquisa desenvolvida no âmbito do **Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/UFRN**, pertencente à linha de pesquisa *Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias*. O projeto apresenta duas propostas de disciplinas eletivas que utilizam jogos de estratégia como ferramentas didáticas para potencializar a aprendizagem em Matemática.

A primeira proposta utiliza o jogo de xadrez como eixo estruturador para promover discussões e atividades relacionadas a diversos tópicos matemáticos, abrangendo *geometria, álgebra, análise combinatória, estatística*, entre outros. A metodologia parte da dinâmica do jogo para estimular o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a argumentação matemática e a autonomia dos estudantes.

A segunda proposta tem como base o *poker* no estilo *Texas Hold'em*, explorado não como jogo de azar, mas como um ambiente matemático rico e contextualizado, que favorece a compreensão aplicada de conteúdos como *análise combinatória, probabilidade, estatística e tomada de decisão baseada em dados*. Ao modelar cenários reais do jogo, o aluno é levado a interpretar informações, calcular riscos, avaliar estratégias e fundamentar decisões de forma crítica.(SANTOS, 2026)

Ao apresentarmos este material, nosso propósito é oferecer aos professores uma alternativa metodológica ativa, que contribua para o ensino de Matemática de forma mais envolvente e significativa. Buscamos apoiar docentes que, muitas vezes, enfrentam dificuldades para trabalhar determinados conteúdos de maneira motivadora, promovendo assim o estudante como protagonista e agente transformador do próprio processo de aprendizagem.

Neste material, o professor encontrará os planos de aula organizados de forma sequenciada, os quais, em conjunto com a dissertação à qual estão vinculados, podem subsidiar a construção de uma disciplina completa que integra o estudo desses dois jogos tão significativos aos conteúdos fundamentais da Matemática. A proposta evidencia como ambos os jogos se articulam com conceitos essenciais da área, oferecendo um caminho pedagógico coerente, motivador e alinhado às práticas contemporâneas de ensino.

## 2 XADREZ PARA INICIANTES

O componente eletivo *Xadrez para Iniciantes* foi concebido com o objetivo de integrar o potencial pedagógico do jogo de xadrez ao estudo de conteúdos matemáticos da Educação Básica. Por sua estrutura altamente organizada e por exigir planejamento, análise e antecipação de consequências, o xadrez constitui um ambiente privilegiado para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, como raciocínio lógico, visualização espacial, análise combinatória, interpretação de padrões e argumentação. Ao explorar o tabuleiro, as peças e as regras do jogo, os estudantes vivenciam conceitos de geometria, álgebra, estatística e lógica de forma concreta e contextualizada, favorecendo aprendizagens significativas.

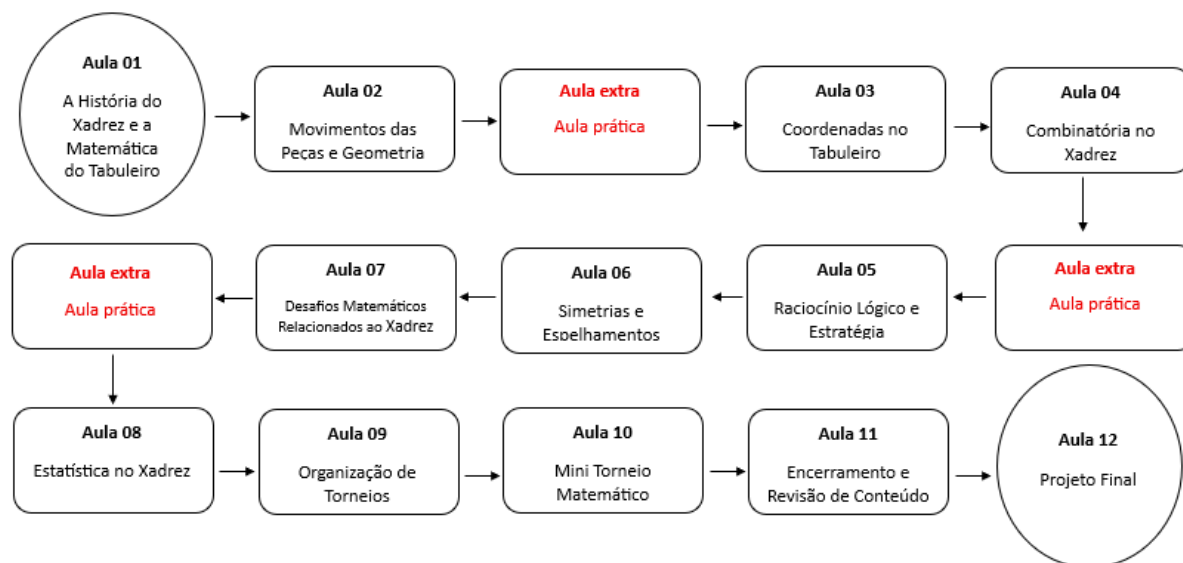
A proposta desta eletiva valoriza metodologias ativas, nas quais o estudante assume papel protagonista na resolução de problemas, na formulação de hipóteses e na justificativa das estratégias adotadas durante as atividades e partidas. Cada aula foi elaborada para articular a ludicidade do jogo com o rigor matemático, permitindo que o xadrez se torne mais do que uma prática recreativa: transforma-se em um instrumento formativo capaz de ampliar a compreensão dos estudantes sobre a matemática e sobre suas aplicações em situações reais. Espera-se que a disciplina contribua para o desenvolvimento de competências cognitivas essenciais não só para matemática como para outras áreas do conhecimento e para o fortalecimento da autonomia intelectual dos alunos.

A identificação das habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desenvolvidas na eletiva de Xadrez é essencial para evidenciar a intencionalidade pedagógica da proposta e seu alinhamento ao currículo do Ensino Médio. O xadrez, por integrar raciocínio lógico, análise espacial e resolução de problemas, constitui um contexto privilegiado para mobilizar competências de Geometria, Probabilidade, Estatística e Processos Matemáticos. Ao relacionar cada aula às habilidades específicas, demonstra-se como o jogo favorece aprendizagens significativas, articulando teoria e prática e potencializando o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. As habilidades da BNCC desenvolvidas durante as disciplinas eletiva estão no quadro 1 (BRASIL, 2018).

**Quadro 1:** Habilidades da BNCC desenvolvidas na Eletiva de Xadrez

| <b>Aula</b>                                                   | <b>Códigos</b>            | <b>Descrição</b>                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Aula 01:</b> História do xadrez e matemática do tabuleiro  | EM13MAT102,<br>EM13MAT104 | Resolução de problemas em diferentes contextos, análise de estratégias e construção de argumentos matemáticos ao relacionar a estrutura do tabuleiro com ideias de organização, padrão e regularidade. |
| <b>Aula 02:</b> Movimentos das peças e geometria              | EM13MAT401,<br>EM13MAT404 | Uso de propriedades geométricas e transformações (deslocamentos, alinhamentos, diagonais) para descrever e analisar os movimentos das peças no tabuleiro.                                              |
| <b>Aula 03:</b> Coordenadas no tabuleiro                      | EM13MAT301,<br>EM13MAT401 | Utilização de representações algébricas e geométricas para localizar casas como pontos de um plano cartesiano e descrever trajetórias de peças com base em relações geométricas.                       |
| <b>Aula 04:</b> Combinatória no xadrez                        | EM13MAT302,<br>EM13MAT501 | Identificação de padrões e uso de técnicas de contagem para determinar disposições possíveis de peças, analisando espaços amostrais finitos e probabilidades simples em situações do jogo.             |
| <b>Aula 05:</b> Raciocínio lógico e estratégias               | EM13MAT104,<br>EM13MAT302 | Construção de argumentos lógicos para justificar jogadas e estratégias, reconhecendo padrões em posições e sequências de movimentos.                                                                   |
| <b>Aula 06:</b> Simetrias e espelhamentos                     | EM13MAT404,<br>EM13MAT405 | Aplicação de reflexões e outras transformações geométricas na análise de posições equivalentes no tabuleiro, investigando simetrias e suas propriedades.                                               |
| <b>Aula 07:</b> Desafios matemáticos no xadrez                | EM13MAT104,<br>EM13MAT302 | Resolução de desafios envolvendo o tabuleiro (como percursos e contagens), explorando padrões, regularidades e justificando procedimentos adotados.                                                    |
| <b>Aula 08:</b> Estatísticas no xadrez                        | EM13MAT502,<br>EM13MAT503 | Coleta, organização e interpretação de dados de partidas ou torneios, cálculo de frequências e medidas estatísticas simples e análise de desempenho.                                                   |
| <b>Aula 09:</b> Organização de torneios de xadrez             | EM13MAT501,<br>EM13MAT502 | Construção e interpretação de espaços amostrais e contagens de confrontos, análise de tabelas e frequências em diferentes formatos de torneio.                                                         |
| <b>Aula 10:</b> Mini torneio matemático                       | EM13MAT503,<br>EM13MAT104 | Análise de resultados do torneio com base em dados registrados e argumentação sobre estratégias e decisões à luz das informações estatísticas obtidas.                                                 |
| <b>Aula 11:</b> Encerramento do conteúdo e revisão de tópicos | EM13MAT102,<br>EM13MAT302 | Revisão articulada de conceitos (geometria, combinatória, estatística e lógica), identificação de conexões entre os tópicos e reflexão sobre estratégias de resolução de problemas.                    |
| <b>Aula 12:</b> Projeto final da disciplina                   | EM13MAT104,<br>EM13MAT506 | Elaboração e comunicação de análises matemáticas estruturadas envolvendo o xadrez, avaliando dados e apresentando conclusões fundamentadas em argumentos e cálculos.                                   |

Figura 2.1: Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas



Fonte: Autoria própria.

## 2.1 Aula 1: A história do xadrez e a matemática do tabuleiro

Esta aula tem como finalidade introduzir o xadrez como ferramenta pedagógica e estabelecer as primeiras conexões entre o jogo e a Matemática. O foco não é explorar a história completa do xadrez, mas utilizá-la como ponto de partida para mostrar que o desenvolvimento do jogo, desde suas formas antigas até o modelo moderno, fortaleceu sua relação com o raciocínio lógico, estratégico e combinatório.

Ao apresentar o tabuleiro, recomenda-se enfatizar que sua estrutura não é aleatória: trata-se de uma matriz  $8 \times 8$ , organizada segundo padrões bem definidos, cuja alternância de cores segue um ritmo periódico. Desde o início do curso, é importante que os estudantes compreendam que essa padronização possibilita análises matemáticas, favorecendo a investigação de simetrias, contagens, coordenadas e sequências de movimentos. Durante o diálogo com os alunos, o professor pode conduzir questionamentos que estimulem a formulação de hipóteses sobre como o xadrez pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas, registrando no quadro ideias espontâneas como “contagem de casas”, “sequência de movimentos”, “estratégias”, “padrões” e “raciocínio lógico”.

Para consolidar o conteúdo, sugere-se uma atividade de fixação em que cada estudante escreva, individualmente ou em dupla, uma resposta breve à pergunta: “Quais aspectos do xadrez podem estar relacionados com a Matemática e por quê?” Essa produção não deve ser utilizada como instrumento avaliativo de acerto ou erro, mas como diagnóstico inicial do pensamento lógico dos alunos e da forma como cada um percebe a relação

entre o jogo e os conceitos matemáticos que serão aprofundados ao longo do curso.

Caso se deseje utilizar esta aula para fins avaliativos, é possível aplicar uma rubrica simples contemplando critérios como participação, capacidade de argumentação e clareza na articulação entre o xadrez e a Matemática. No entanto, essa avaliação é opcional; o objetivo principal da aula é despertar o interesse e construir a base conceitual que permitirá o avanço para os conteúdos posteriores, nos quais cada elemento do tabuleiro e das regras do jogo será associado explicitamente a um conceito matemático específico.

## 2.2 Aula 2: Movimentos das peças e geometria

Esta aula tem por finalidade apresentar os movimentos das peças do xadrez, estabelecendo paralelos com conceitos geométricos que auxiliam no desenvolvimento do raciocínio espacial e no reconhecimento de padrões matemáticos. O propósito central não é apenas memorizar como cada peça se desloca, mas compreender que tais movimentos seguem regras estruturadas que podem ser descritas, analisadas e comparadas por meio da linguagem da Geometria.

Recomenda-se iniciar com a representação do tabuleiro como um plano quadriculado composto por 64 casas, o que favorece a identificação de deslocamentos em linhas, colunas e diagonais. Em seguida, cada peça deve ser apresentada de forma sistemática, destacando a relação entre seu movimento e conceitos geométricos associados. Por exemplo, a torre desloca-se em trajetórias retilíneas paralelas aos eixos do tabuleiro; o bispo movimenta-se ao longo de diagonais, evidenciando direções oblíquas; e a dama combina deslocamentos retos e diagonais, permitindo uma interpretação alternativa como composição de movimentos da torre e do bispo. O cavalo deve receber atenção especial, pois se trata de uma peça cujo deslocamento alterna direção e distância, formando um padrão geométrico em “L”, permitindo introduzir o raciocínio sobre saltos e deslocamentos não lineares.

A abordagem matemática nesta aula deve acontecer de forma progressiva e contextualizada. Ao descrever os movimentos, recomenda-se registrar no quadro os termos geométricos correspondentes — paralelismo, perpendicularidade, diagonal, mudança de direção, distância, simetria e trajetória — para que o estudante compreenda que a movimentação das peças não é arbitrária, mas estruturada por relações que podem ser analisadas segundo propriedades da Geometria. Se desejado, pode-se também introduzir comparações entre peças, como distinguir movimentos ilimitados e movimentos de alcance restrito, ou diferenciar peças que dependem de casas livres para se deslocarem daquelas capazes de saltar outras peças.

Para reforçar o aprendizado, é recomendável a aplicação de uma atividade prática simples na qual os estudantes recebam diferentes posições iniciais no tabuleiro e precisem indicar todas as casas alcançáveis por uma determinada peça em um único

lance. Essa prática pode ser realizada com peças físicas, tabuleiro projetado em tela ou representações impressas, desde que os alunos sejam incentivados a justificar verbalmente os movimentos com base nos conceitos geométricos estudados. Caso se deseje incorporar avaliação nesta aula, pode ser aplicada uma tarefa de identificação escrita, em que os estudantes descrevam em linguagem matemática os tipos de deslocamentos de pelo menos três peças distintas, demonstrando a relação entre o movimento e suas propriedades geométricas.

Ao final da aula, é importante ressaltar que o domínio dos movimentos não constitui apenas uma habilidade operacional necessária para jogar xadrez, mas também uma porta de entrada para o estudo formal da Geometria, uma vez que o tabuleiro se comporta como plano discreto onde trajetórias, direções e restrições de movimento podem ser modeladas matematicamente. Esse entendimento fornecerá base para as aulas seguintes, que aprofundarão coordenadas no tabuleiro, combinatória aplicada e estratégias lógicas.

## 2.3 Aula 3: Coordenadas no tabuleiro

Esta aula tem como finalidade relacionar o tabuleiro de xadrez ao Plano Cartesiano, promovendo o desenvolvimento da visualização geométrica e da interpretação de coordenadas no contexto do jogo. O ponto de partida consiste em revisar os conceitos essenciais do plano cartesiano, tais como eixo horizontal, eixo vertical, pares ordenados e noção de quadrantes, enfatizando que o tabuleiro pode ser interpretado como uma grade estruturada de pontos, semelhante a um sistema de coordenadas bidimensional. Essa revisão deve ser objetiva e funcional, reforçando apenas os elementos necessários para ampliar a leitura espacial dos alunos durante o estudo do xadrez.

Após essa retomada, propõe-se analisar a notação algébrica do xadrez (a1–h8) como um sistema equivalente à linguagem matemática de coordenadas. Cada casa do tabuleiro deve ser identificada simultaneamente pelas duas formas de representação: colunas marcadas por letras e linhas numeradas, que podem ser associadas a pares ordenados  $(x, y)$ . É importante enfatizar que não existe conflito entre as duas linguagens, mas sim uma tradução entre elas, permitindo que o estudante compreenda uma mesma posição como, por exemplo, “e4” e  $(5, 4)$ , desde que uma convenção de correspondência seja estabelecida previamente, como nas figuras 2.2 e 2.3.

Figura 2.2: Tabuleiro representado como plano cartesiano.

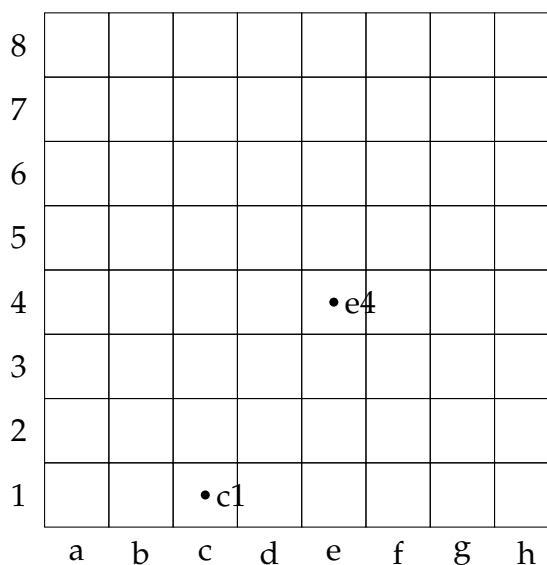
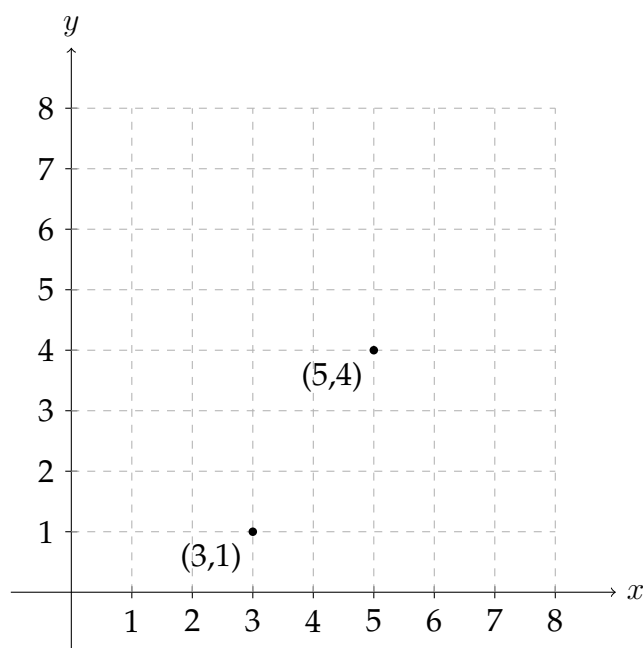


Figura 2.3: Plano cartesiano com pontos representando posições equivalentes ao tabuleiro.



A partir da equivalência entre notação algébrica e coordenadas cartesianas, recomenda-se avançar para a aplicação prática representando graficamente as trajetórias das peças. A trajetória da torre pode ser usada como exemplo de deslocamento paralelo aos eixos; a da dama, como composição de movimentos retos e diagonais; e a do cavalo, como deslocamento descontínuo. Em particular, o movimento do bispo possibilita uma exploração mais aprofundada da geometria analítica, já que suas trajetórias correspondem a retas com coeficiente angular definido, permitindo a modelagem por equações. Assim, sugere-se trabalhar com o problema orientador: “Qual é a equação da reta percorrida pelo bispo no deslocamento de c1 até g5?”, incentivando os estudantes a

localizar os pontos correspondentes, converter a notação algébrica para coordenadas cartesianas, identificar o coeficiente angular e construir a equação da reta.

A discussão pode prosseguir incorporando conceitos complementares da geometria analítica, como cálculo da distância entre duas casas no tabuleiro interpretadas como pontos do plano e determinação do ponto médio entre posições iniciais e finais de uma peça em um deslocamento. Esses procedimentos favorecem o fortalecimento do raciocínio matemático e expandem a compreensão dos estudantes acerca do tabuleiro como plano discreto governado por relações geométricas precisas.

Para finalizar, recomenda-se a construção de um mapa coletivo de coordenadas no quadro. O professor pode marcar algumas casas iniciais e solicitar que os estudantes completem gradualmente as posições restantes utilizando a dupla representação (algébrica e cartesiana). O fechamento visual desse mapa contribui para consolidar a compreensão da correspondência entre as notações e oferece um recurso de apoio para aulas posteriores, quando novos conteúdos lógicos e combinatórios serão introduzidos com base nas posições do tabuleiro.

## 2.4 Aula 4: Combinatória no xadrez

O início da aula deve apresentar o problema motivador: “*Quantas maneiras existem de colocar duas torres no tabuleiro de xadrez de modo que elas não se ataquem?*”. A questão, além de introduzir um desafio acessível, aproxima os estudantes do raciocínio combinatório ao exigir que identifiquem posições possíveis e descartem aquelas que violam a condição de segurança entre as peças. A situação pode ser abordada como metáfora para a noção de aberturas no xadrez, uma vez que diferentes posicionamentos iniciais produzem dinâmicas distintas na partida, favorecendo a discussão sobre variedade de possibilidades dentro de um sistema governado por regras.

No desenvolvimento, recomenda-se aplicar explicitamente os princípios de contagem, arranjos e combinações, tomando o tabuleiro como universo finito de possibilidades. A resolução do problema inicial pode ser progressivamente guiada, partindo do caso irrefletido — número total de posições possíveis para duas torres — e avançando para a exclusão dos casos inválidos, quando ambas compartilham a mesma linha ou coluna. Assim, a solução pode ser obtida observando que o tabuleiro possui 64 casas, de modo que o número total de pares de casas possíveis é

$$\binom{64}{2} = 2016.$$

As torres se atacam quando ocupam a mesma linha ou a mesma coluna. Em cada linha há

$$\binom{8}{2} = 28 \text{ pares possíveis,}$$

e como existem 8 linhas, obtém-se  $8 \cdot 28 = 224$  pares. O mesmo ocorre com as colunas, resultando em outros 224 pares em que as torres se atacam. Assim, o número total de pares inválidos é

$$224 + 224 = 448.$$

Logo, o número de posicionamentos possíveis em que as duas torres não se atacam é

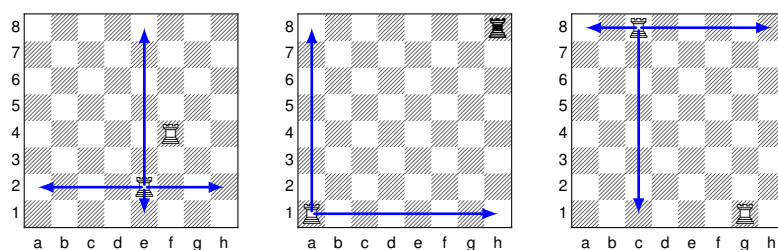
$$2016 - 448 = \boxed{1568}.$$

Se as torres forem distinguíveis (torre preta e torre branca), cada par é contado duas vezes. Portanto,

$$1568 \cdot 2! = \boxed{3136}$$

Na figura 2.4 estão três exemplos de possibilidades.

Figura 2.4: Torres não se atacando



Fonte: Própria autoria

Outro problema no mesmo sentido: *De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não possam se atacar mutuamente?* Uma maneira natural de resolver é contar todas as posições possíveis e subtrair aquelas em que os reis se atacam. Escolhendo uma casa para o rei branco e outra distinta para o rei preto, o número total de colocações possíveis é

$$64 \cdot 63 = 4032.$$

Os reis se atacam quando estão em casas vizinhas (horizontal, vertical ou diagonal). O total de pares ordenados de casas vizinhas pode ser calculado pela soma dos vizinhos de cada tipo de casa:

- 36 casas internas têm 8 vizinhos:  $36 \cdot 8$ ;
- 24 casas na lateral (não nos cantos) têm 5 vizinhos:  $24 \cdot 5$ ;
- 4 cantos têm 3 vizinhos:  $4 \cdot 3$ .

Logo, o total de "pares de casas vizinhas" contados com ordem é

$$36 \cdot 8 + 24 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 288 + 120 + 12 = 420,$$

Esses 420 correspondem justamente às colocações em que os reis se atacam mutuamente. Assim, o número de colocações em que não se atacam é

$$4032 - 420 = \boxed{3612}.$$

Assim, existem 3612 maneiras de posicionar um rei branco e um rei preto no tabuleiro de modo que não possam se atacar mutuamente.

O fechamento da aula deve enfatizar a compreensão do xadrez como um ambiente rico em problemas combinatórios. O tabuleiro, por ser um espaço discreto e finito, permite a construção de modelos matemáticos mediante contagem estruturada de possibilidades sob restrições. Assim, busca-se que os estudantes reconheçam que as ideias trabalhadas não se limitam a desafios lúdicos, mas constituem princípios fundamentais da matemática combinatória, relevantes para a resolução de problemas em diferentes contextos. Essa síntese contribui para preparar os alunos para os conteúdos posteriores, nos quais as estratégias combinatórias serão associadas à lógica do jogo.

## 2.5 Aula 5: Raciocínio lógico e estratégia

O início da aula deve promover uma conversa orientada sobre a importância de “pensar antes de jogar”, estimulando os estudantes a perceberem que cada jogada no xadrez envolve antecipação de cenários e análise de possibilidades. Essa reflexão pode ser associada ao funcionamento das proposições lógicas, já que, tal como em um argumento matemático, uma jogada é tomada com base nas condições do tabuleiro e nas consequências que ela produz. O objetivo dessa etapa inicial é aproximar os estudantes da ideia de que o raciocínio estratégico no xadrez pode ser compreendido como uma forma de encadeamento lógico, em que conclusões dependem de premissas claramente avaliadas.

No desenvolvimento, recomenda-se trabalhar os conectivos lógicos — “e”, “ou”, “não” e “se—então” — aplicando-os diretamente a situações de jogo. O uso de exemplos concretos facilita a transposição entre linguagem do xadrez e linguagem lógica, como na proposição: “*Se mover o cavalo, então deixará o rei em xeque*”. Essa afirmação pode ser analisada como uma implicação lógica, permitindo a construção da tabela-verdade correspondente e o estudo de sua validade, independentemente de se tratar de uma jogada vantajosa ou não. De modo semelhante, podem ser exploradas conjunções, disjunções e negações em expressões como “*A dama ataca a torre e o bispo*”, “*O rei pode fugir ou bloquear o ataque*” e “*Não existe defesa possível para esta posição*”. O estudo dessas proposições possibilita interpretar o raciocínio estratégico como um processo argumentativo, em que cada afirmação deve ser avaliada quanto à sua veracidade e às consequências lógicas que desencadeia.

O fechamento da aula deve retomar a integração entre lógica e estratégia, desta-

cando que a habilidade de planejar jogadas com base em condições e consequências é semelhante à estrutura de uma demonstração matemática, na qual conclusões só são válidas quando derivam coerentemente de premissas. Assim, busca-se consolidar a compreensão de que a tomada de decisão no xadrez não depende de intuição isolada, mas de um processo de encadeamento racional que pode ser analisado, justificado e aprimorado por meio de ferramentas lógicas formais.

## 2.6 Aula 6: Simetrias e espelhamentos

A aula tem como objetivo desenvolver a compreensão de simetrias e espelhamentos a partir da observação do tabuleiro de xadrez, estimulando o reconhecimento das regularidades geométricas presentes em sua estrutura. A proposta inicia-se com a apresentação do tabuleiro para que os estudantes identifiquem espontaneamente possíveis simetrias, permitindo que construam referências visuais antes da formalização conceitual. Na sequência, são introduzidas as definições de simetria axial e simetria central, estabelecendo relações entre os conceitos matemáticos e a organização geométrica do tabuleiro.

Como aprofundamento conceitual, recomenda-se explorar a representação algébrica das simetrias no plano cartesiano, relacionando o tabuleiro a transformações geométricas formais. Pode-se, por exemplo, propor que os estudantes determinem as coordenadas da imagem de uma peça localizada em  $(x, y)$  quando refletida em relação ao eixo vertical central do tabuleiro. Considerando o tabuleiro indexado de 1 a 8, a reflexão em relação à reta  $x = 4,5$  pode ser modelada pela transformação

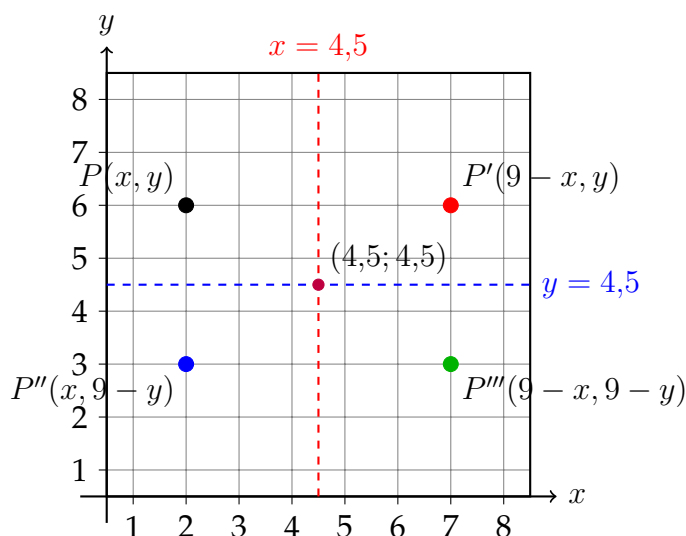
$$(x, y) \mapsto (9 - x, y).$$

De modo semelhante, a reflexão em relação à reta horizontal  $y = 4,5$  pode ser descrita por

$$(x, y) \mapsto (x, 9 - y).$$

Essas expressões permitem formalizar o conceito de espelhamento, articulando linguagem geométrica e linguagem algébrica.

Figura 2.5: Representação do tabuleiro como plano cartesiano discreto, com reflexões axial vertical ( $x = 4,5$ ), horizontal ( $y = 4,5$ ) e simetria central.



Como atividade investigativa, sugere-se propor o seguinte problema: “Quantas casas do tabuleiro permanecem invariantes sob reflexão central?” Ao considerar a simetria central em torno do ponto  $(4,5; 4,5)$ , observa-se que nenhuma casa coincide exatamente consigo mesma, pois o centro da simetria não corresponde a uma casa, mas ao ponto médio entre quatro casas centrais. Essa discussão favorece a compreensão da diferença entre simetria axial e simetria central, além de estimular a análise das propriedades estruturais do tabuleiro. Outra possibilidade consiste em investigar quais posições de duas peças distintas produzem configurações simétricas e como essa simetria pode ser utilizada estrategicamente em finais de partida.

Outro momento prático, recomenda-se a utilização de dobraduras e espelhos para representar reflexões de posições sobre o tabuleiro, de modo a reforçar a aprendizagem por meio de manipulação concreta. A atividade orientada consiste em refletir a posição de uma peça em relação aos eixos  $x = 4,5$  e  $y = 4,5$ , favorecendo a aplicação direta dos conceitos trabalhados. Ao final, orienta-se que os estudantes associem a simetria ao aspecto estético e estratégico do xadrez, destacando que padrões geométricos presentes no tabuleiro contribuem para a lógica do jogo e podem auxiliar na tomada de decisões durante a partida.

## 2.7 Aula 7: Desafios matemáticos relacionados ao xadrez

A aula tem como finalidade explorar problemas matemáticos clássicos associados ao xadrez, utilizando situações desafiadoras para promover o raciocínio lógico, a análise de padrões e a elaboração de estratégias. A proposta inicia-se com a apresentação do desafio do “passeio do cavalo”, no qual os estudantes devem mover a peça cavalo de  $a1$  até  $h8$ , visitando cada casa do tabuleiro exatamente uma vez, sem repetições. Esse desa-

fio incentiva a compreensão da dinâmica do movimento em “L” e exige planejamento sequencial, antecipação de consequências e uso de tentativa e erro orientada. A abordagem recomendada consiste em estimular os alunos a registrarem cada movimento, analisando alternativas e identificando caminhos inviáveis, construindo progressivamente uma solução válida. Esse problema pode ser ampliado com a discussão do *Algoritmo de Warnsdorff*, que fornece uma regra heurística para otimizar o percurso do cavalo.

Na sequência, propõe-se o problema do número de quadrados existentes no tabuleiro, o qual aparenta possuir 64 unidades, mas revela um resultado maior quando analisado de forma combinatória. Recomenda-se conduzir os estudantes ao reconhecimento de que o tabuleiro contém quadrados de diferentes tamanhos ( $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , ...,  $8 \times 8$ ) e que o total pode ser obtido pela soma  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2 = 204$ . Essa atividade favorece a construção de generalizações relacionadas à soma de quadrados e à contagem de elementos em progressão. Outro desafio indicado é o problema do “dominó mutilado”, que consiste em determinar se é possível cobrir completamente o tabuleiro com peças de dominó após a remoção de duas casas opostas. A resolução evidencia que o tabuleiro original possui igual número de casas claras e escuras, enquanto a remoção das duas casas altera a paridade, tornando impossível o revestimento completo — solução que reforça o papel da lógica dedutiva e de argumentos baseados em invariantes matemáticos.

Durante o desenvolvimento das tarefas, recomenda-se que seja enfatizado o registro de tentativas, a comunicação das estratégias e o uso de algoritmos ou heurísticas quando pertinentes. As soluções devem ser discutidas coletivamente no fechamento, com foco não apenas nos resultados finais, mas na comparação de métodos, na análise da eficiência de cada abordagem e na valorização dos processos de pensamento matemático. Dessa forma, promove-se um ambiente de aprendizagem baseado em investigação, reflexão e argumentação, no qual os estudantes compreendem que a matemática presente no xadrez não se limita ao jogo em si, mas constitui um campo fértil para o desenvolvimento cognitivo e para a resolução de problemas complexos.

## 2.8 Aula 08: Estatísticas no xadrez

A aula tem como objetivo introduzir conceitos estatísticos utilizando dados reais de torneios de xadrez como contexto pedagógico. A proposta inicia-se com a apresentação de tabelas de resultados ou bases de dados contendo informações como número de vitórias, empates, derrotas, tempo médio das partidas e desempenho com peças brancas e pretas. Esse material serve como ponto de partida para o estudo de frequência absoluta e relativa, média, porcentagem e probabilidade, permitindo que os estudantes analisem informações reais provenientes do universo do xadrez. Recomenda-se que os alunos sejam orientados a organizar os dados em tabelas, identificando

padrões numéricos e tendências de desempenho dos jogadores.

No desenvolvimento da atividade, sugere-se que os estudantes sejam conduzidos à construção de gráficos — barras, setores ou histogramas — para representação visual dos resultados obtidos, favorecendo a interpretação e comparação entre desempenhos. Em seguida, propõe-se o estudo de probabilidade condicional com base em situações estratégicas do jogo, como na questão: “Dado que o jogador tem as brancas, qual a chance de vitória?”. Esse tipo de investigação permite discutir a influência de variáveis externas no resultado das partidas e reforçar a importância da análise contextualizada dos dados na tomada de decisões estratégicas. No encerramento da aula, orienta-se promover reflexão sobre como os recursos estatísticos podem ser aplicados na antecipação de tendências de jogo, auxiliando na elaboração de previsões e estratégias mais embasadas.

## 2.9 Aula 09: Organização de torneios e combinatória aplicada

A aula tem como objetivo abordar a organização de torneios de xadrez como contexto para o estudo de princípios de análise combinatória e de modelos de competição. Inicialmente, recomenda-se apresentar diferentes formatos de torneio, tais como eliminatória simples, sistema suíço e todos contra todos, destacando as características de cada um em termos de tempo de duração, número de partidas e critérios de classificação. Essa discussão introdutória permite que os estudantes compreendam que a escolha do formato não é apenas uma decisão organizacional, mas envolve também questões de equidade, viabilidade e estratégia.

No desenvolvimento da aula, propõe-se trabalhar, de maneira mais formal, o cálculo do número de partidas possíveis em torneios do tipo todos contra todos, utilizando a combinação  $C(n, 2)$  para representar o número de confrontos distintos entre  $n$  jogadores. Sugere-se que os alunos resolvam situações em que se variam a quantidade de participantes, comparando, por exemplo, torneios com 4, 8, 10 ou 16 jogadores, de modo a perceber o crescimento rápido do número de partidas. Em seguida, recomenda-se a criação de simulações de torneios e o uso de planilhas para organizar tabelas de confrontos, resultados e classificação, permitindo que os estudantes observem, na prática, como a combinatória auxilia na construção de calendários equilibrados e na verificação de consistência dos dados.

No fechamento, orienta-se promover uma discussão sobre como os conceitos de combinatória e de organização de dados podem otimizar sistemas de competição, seja em torneios escolares de xadrez ou em outros contextos esportivos e acadêmicos. Deve-se enfatizar que a matemática está presente tanto na estrutura formal dos torneios quanto nas decisões estratégicas relacionadas ao seu planejamento, evidenciando a relevância do raciocínio combinatório para resolver problemas reais de logística e de gestão de eventos.

## 2.10 Aula 10: Mini torneio matemático

A aula tem como objetivo integrar conteúdos matemáticos previamente estudados às dinâmicas de uma competição lúdica, articulando raciocínio lógico e tomada de decisão em tempo reduzido. A atividade inicia-se com a explicação das regras do torneio, dos critérios de pontuação e dos procedimentos de registro de resultados, garantindo clareza e organização para todos os participantes.

No desenvolvimento, os estudantes disputam partidas curtas enquanto resolvem desafios matemáticos rápidos, como contagem de movimentos, cálculo de médias e identificação de simetrias. Os desempenhos obtidos devem ser anotados em planilhas, de modo a permitir a análise final dos resultados. No encerramento, recomenda-se realizar premiação simbólica e breve debate sobre raciocínio estratégico e ética, reforçando que a competição funciona como meio para aplicação prática da matemática e não como objetivo exclusivo.

## 2.11 Aula 11: Revisão geral e consolidação de conteúdos

A aula de encerramento tem como propósito retomar, de forma articulada, os principais conteúdos matemáticos explorados ao longo da eletiva, evidenciando como cada um deles se integrou à dinâmica do jogo de xadrez. O professor conduz uma revisão estruturada dos temas centrais — como movimentos das peças e sua relação com a geometria, coordenadas do tabuleiro e a interpretação do plano cartesiano, desafios combinatórios envolvendo posicionamento de peças, raciocínio lógico em situações de ataque e defesa, e análises estatísticas derivadas de partidas e torneios simulados. Essa retomada não tem caráter meramente repetitivo, mas busca promover uma compreensão global da disciplina, permitindo que os estudantes identifiquem conexões entre os conceitos estudados, reconheçam avanços individuais e compreendam como cada tópico contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Após esse momento coletivo de sistematização, os alunos são convidados a resolver atividades que integram diferentes conteúdos, estimulando a mobilização dos conhecimentos construídos ao longo da eletiva. A proposta valoriza o diálogo, o trabalho colaborativo e a argumentação, com espaço para que os estudantes discutam estratégias, justifiquem procedimentos e comparem resoluções distintas. O professor atua como mediador, incentivando reflexões sobre como o xadrez funcionou como um ambiente rico para a aplicação de conceitos matemáticos e como essa experiência pode ser transposta para outras situações de estudo ou resolução de problemas. A aula se encerra com um breve convite para a aula final da eletiva, na qual os estudantes apresentarão um projeto, uma partida comentada ou uma análise matemática relacionada ao jogo, consolidando de modo significativo e autoral a aprendizagem construída ao longo da disciplina.

## 2.12 Aula 12: Projeto final

A aula tem como objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos ao longo do componente eletivo por meio da elaboração de um projeto final coletivo. A atividade inicia-se com a apresentação das orientações gerais e com a escolha, em consenso pela turma, do formato do projeto. Entre as possibilidades, sugerem-se um Xadrez Humano, utilizando alunos caracterizados como peças, ou a realização de um torneio aberto em que os estudantes matriculados no componente desafiam alunos de outras turmas.

No desenvolvimento, os grupos elaboram e apresentam projetos que integrem xadrez e conteúdos matemáticos, tais como resolução de problemas, construção de jogos, painéis estatísticos ou outros produtos conceituais. Recomenda-se avaliar os projetos considerando criatividade, clareza da proposta e aplicação correta dos conceitos estudados. Para o encerramento, orienta-se promover a exposição dos trabalhos e a entrega simbólica de certificados, valorizando o engajamento dos participantes e reforçando o sentido de conclusão do percurso formativo.

A eletiva Xadrez para Iniciantes evidencia o potencial do jogo como recurso didático estruturante para o ensino de Matemática, articulando, de forma integrada, conteúdos de Geometria, Geometria Analítica, Análise Combinatória, Lógica Matemática e Estatística. Ao longo das aulas, os estudantes desenvolvem habilidades relacionadas à visualização espacial, uso de coordenadas no plano cartesiano, contagem de possibilidades sob restrições, reconhecimento de simetrias, análise de padrões e interpretação de dados provenientes de partidas e torneios simulados.

As atividades práticas com o tabuleiro favorecem a construção de significados para conceitos abstratos, permitindo que o aluno transite constantemente entre a linguagem matemática formal e situações concretas do jogo. Estratégias como desafios matemáticos, organização de torneios, análise estatística de resultados e elaboração de projetos finais promovem o protagonismo discente e estimulam a autonomia intelectual.

Observa-se ainda que o xadrez atua como um ambiente privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, da capacidade de antecipação de consequências e da tomada de decisões fundamentadas. Sua estrutura organizada possibilita a modelagem de situações matemáticas variadas, tornando-se um instrumento potente para a aprendizagem significativa e interdisciplinar. Assim, a eletiva não apenas contribui para o domínio de conteúdos curriculares, mas também fortalece competências cognitivas essenciais, como planejamento, perseverança, pensamento estratégico e reflexão crítica, ampliando o alcance formativo da Matemática na Educação Básica.

### 3 PROBABILIDADE NA MESA (POKER)

A eletiva *Probabilidade na Mesa* utiliza o poker no estilo Texas Hold'em como instrumento didático para a abordagem de conteúdos de probabilidade, combinatória, estatística e tomada de decisão fundamentada em dados. Longe de qualquer associação com práticas de jogo de azar, o poker é aqui apresentado como um ambiente estruturado e matematicamente rico, no qual cada decisão envolve análise de cenários, estimativa de riscos, cálculo de probabilidades e avaliação de resultados a longo prazo. A dinâmica do jogo — marcada por informações incompletas, incertezas e múltiplas estratégias possíveis — proporciona um contexto autêntico para a compreensão profunda de conceitos matemáticos frequentemente trabalhados de forma abstrata no currículo tradicional.

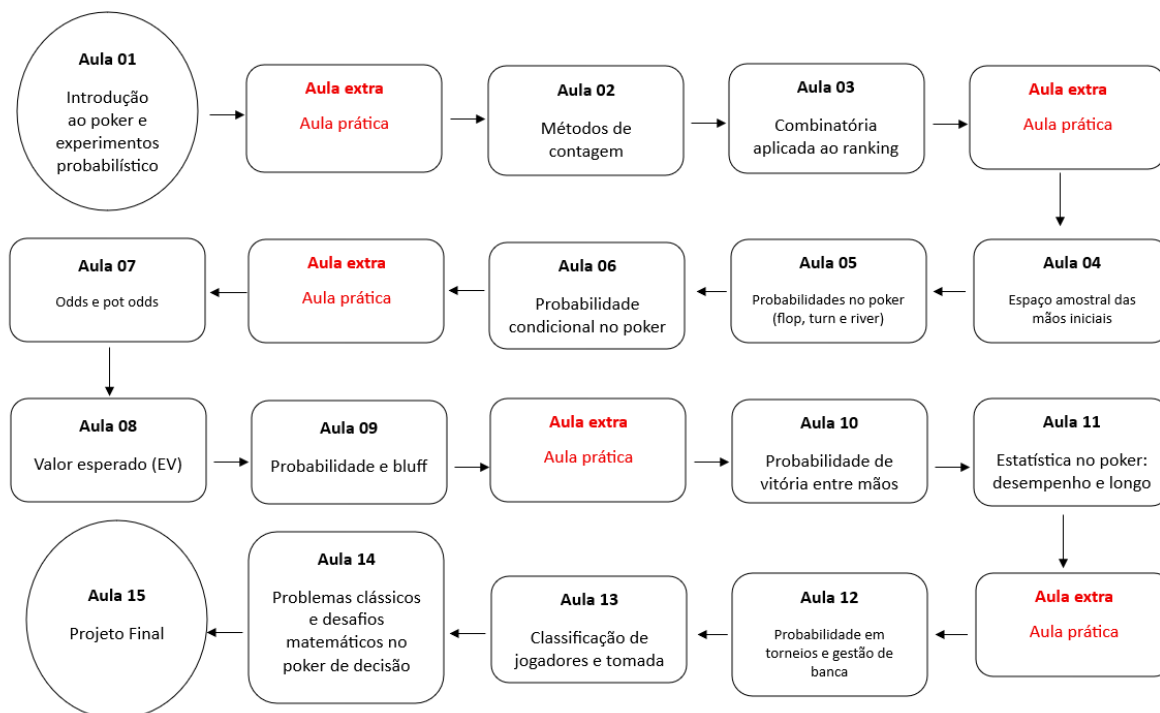
As aulas foram planejadas para conduzir o estudante em um percurso investigativo que parte de experimentos simples de probabilidade até análises avançadas envolvendo equidade, valor esperado e estatística aplicada. Em cada etapa, busca-se promover a reflexão crítica, o uso consciente de evidências numéricas e o desenvolvimento de competências que permitem ao aluno justificar decisões com base em critérios matemáticos. Assim, a eletiva transforma o jogo em uma ferramenta educativa poderosa, capaz de fortalecer o pensamento probabilístico e de aproximar a matemática do cotidiano dos estudantes.

As habilidades da BNCC desenvolvidas na eletiva de Poker evidencia o caráter profundamente matemático dessa disciplina, cuja estrutura se apoia especialmente nos campos da análise combinatória, da probabilidade e da estatística, como é possível observar no quadro 2 (BRASIL, 2018). O estudo das mãos possíveis, das chances de ocorrência de eventos, da variabilidade dos resultados e das tomadas de decisão fundamentadas em dados permite que os estudantes mobilizem técnicas de contagem, construam e analisem espaços amostrais, calculem probabilidades simples e condicionais, interpretem medidas estatísticas e avaliem riscos e expectativas. Dessa forma, a eletiva não apenas amplia a compreensão conceitual desses temas, mas também demonstra sua aplicabilidade em situações reais, fortalecendo a capacidade dos alunos de modelar problemas, justificar estratégias e tomar decisões embasadas em raciocínio matemático.

**Quadro 2:** Habilidades da BNCC desenvolvidas na disciplina Eletiva de Poker

| <b>Aula</b>                                                         | <b>Código</b>          | <b>Descrição</b>                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Aula 01:</b> Introdução ao poker e experimentos probabilísticos  | EM13MAT501, EM13MAT104 | Construção de espaços amostrais simples e análise de decisões em situações aleatórias, justificando escolhas com base em raciocínios matemáticos.                   |
| <b>Aula 02:</b> Métodos de contagem                                 | EM13MAT302, EM13MAT501 | Identificação de padrões e uso de técnicas de contagem (princípio multiplicativo, arranjos, combinações) para modelar situações com cartas e possíveis mãos.        |
| <b>Aula 03:</b> Combinatória aplicada ao ranking das mãos           | EM13MAT302, EM13MAT501 | Aplicação de análise combinatória para quantificar mãos possíveis e relacionar tais contagens à raridade e à hierarquia de força das mãos de poker.                 |
| <b>Aula 04:</b> Espaço amostral das mãos iniciais                   | EM13MAT501, EM13MAT502 | Determinação de espaços amostrais de mãos iniciais e comparação de probabilidades de ocorrência de diferentes tipos de combinações de cartas.                       |
| <b>Aula 05:</b> Probabilidades no poker (flop, turn e river)        | EM13MAT502, EM13MAT503 | Cálculo e interpretação de probabilidades em etapas sucessivas do jogo, relacionando-as à tomada de decisão em situações reais de aposta.                           |
| <b>Aula 06:</b> Probabilidade condicional no poker                  | EM13MAT503, EM13MAT504 | Uso de probabilidade condicional para atualizar estimativas de chance a partir de novas cartas reveladas, interpretando eventos dependentes.                        |
| <b>Aula 07:</b> Odds e <i>pot odds</i>                              | EM13MAT503, EM13MAT302 | Comparação entre razões ( <i>odds</i> ) e valores do pote, relacionando proporcionalidade e probabilidade para decidir entre pagar, aumentar ou desistir.           |
| <b>Aula 08:</b> Valor esperado (EV)                                 | EM13MAT504, EM13MAT506 | Cálculo e interpretação do valor esperado em diferentes decisões de aposta, avaliando risco, ganho médio a longo prazo e impactos quantitativos das escolhas.       |
| <b>Aula 09:</b> Probabilidade e <i>bluff</i>                        | EM13MAT503, EM13MAT104 | Análise de decisões de blefe com base em probabilidades de sucesso, frequências de ação dos oponentes e argumentação sobre a racionalidade das estratégias.         |
| <b>Aula 10:</b> Probabilidade de vitória entre mãos                 | EM13MAT502, EM13MAT503 | Comparação de probabilidades de vitória ( <i>equity</i> ) entre mãos em confronto, considerando diferentes cenários de cartas comunitárias e combinações possíveis. |
| <b>Aula 11:</b> Estatística no poker: desempenho e longo prazo      | EM13MAT505, EM13MAT506 | Análise de resultados ao longo de várias sessões, utilizando médias, variância e gráficos para distinguir variabilidade de curto prazo e tendências de longo prazo. |
| <b>Aula 12:</b> Probabilidade em torneios e gestão de banca         | EM13MAT503, EM13MAT506 | Avaliação de risco e expectativa em contextos de torneios e gerenciamento de banca, analisando quantitativamente cenários de ganho, perda e sobrevivência.          |
| <b>Aula 13:</b> Classificação de jogadores e tomada de decisão      | EM13MAT506, EM13MAT104 | Interpretação de dados e padrões de comportamento de perfis de jogadores e justificativa de decisões com base em informações estatísticas e probabilísticas.        |
| <b>Aula 14:</b> Problemas clássicos e desafios matemáticos no poker | EM13MAT302, EM13MAT503 | Resolução de problemas avançados envolvendo contagem, probabilidade e eventos condicionais em situações de poker, integrando múltiplos conceitos.                   |
| <b>Aula 15:</b> Projeto final: análise matemática de uma mão        | EM13MAT104, EM13MAT506 | Produção e comunicação de análise matemática detalhada de uma mão de poker, utilizando dados, cálculos probabilísticos e estatísticos para fundamentar conclusões.  |

Figura 3.1: Sugestão de sequência de aulas intercalando aulas teóricas e práticas



Fonte: Autoria própria.

### 3.1 Aula 1: Introdução ao poker

Nessa primeira aula, é interessante despertar o interesse dos alunos para as próximas aulas, e faremos isso por meio de dinâmicas que tragam elementos presentes em uma partida de poker, isso porque provavelmente uma parte da turma não conhece as regras do poker, destacando as situações matemáticas que abordaremos ao longo do curso. Apresentaremos três dinâmicas, que serão enumeradas e explicadas a seguir.

#### Dinâmica 1: Jogada segura ou arriscada?

Essa dinâmica tem o intuito de mostrar aos estudantes que trabalharemos com situações que dependem da frequência com que fazemos determinadas escolhas e da compensação envolvida em cada decisão. A atividade consiste em colocar dez bolas numeradas de 1 a 10 e pedir que o estudante escolha entre duas opções.

- **Opção A** : Ganha um bombom se tirar uma bola numerada de 1 a 7.
- **Opção B** : Ganha três bombons se tirar uma bola numerada de 8 a 10.

Em seguida ele retira a bola.

Essa proposta de atividade é excelente para iniciar uma discussão sobre escolhas baseadas em incertezas e comportamento diante do risco, utilizando um modelo simples e lúdico. O estudante deve escolher entre duas opções para tentar ganhar bombons,

a partir do sorteio de uma bola numerada de 1 a 10. Note que a escolha envolve um dilema probabilístico entre ganhar menos com mais chance ou ganhar mais com menos chance.

Do ponto de vista matemático, podemos calcular as probabilidades associadas a cada escolha:

- Probabilidade de ganhar na Opção A:

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0,7 \quad (70\%).$$

- Probabilidade de ganhar na Opção B:

$$P(B) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad (30\%).$$

No entanto, os prêmios também são diferentes. Para uma análise mais completa, podemos calcular o **valor esperado** de bombons para cada opção:

- Valor esperado da Opção A:

$$E(A) = 1 \times 0,7 = 0,7 \text{ bombom.}$$

- Valor esperado da Opção B:

$$E(B) = 3 \times 0,3 = 0,9 \text{ bombom.}$$

Portanto, embora a Opção B pareça mais arriscada, ela possui um valor esperado maior. Isso mostra que, do ponto de vista puramente matemático, vale mais a pena escolher a opção arriscada, pois ela entrega, em média, mais bombons a longo prazo.

## Dinâmica 2: Caixa do azar ou da sorte.

Prepare três caixas e coloque uma premiação em apenas uma delas. Peça para que um aluno escolha uma das três caixas. Em seguida, entre as duas caixas restantes, revele uma que esteja vazia. Então, pergunte ao aluno se ele deseja manter sua escolha inicial ou trocar pela outra caixa ainda fechada.

Essa dinâmica possibilita uma reflexão sobre qual é a melhor estratégia: manter a escolha inicial ou trocar de caixa. Além disso, essa dinâmica das três caixas é uma adaptação prática e acessível do famoso problema conhecido como *Paradoxo de Monty Hall*, que surgiu em um programa de auditório nos Estados Unidos. Nele, um participante escolhia uma entre três portas, uma delas escondendo um carro, e as outras duas, cabras. Após a escolha inicial, o apresentador revelava uma das portas restantes com uma cabra e oferecia ao participante a chance de trocar sua escolha (PINHEIRO, 2021).

Aparentemente, após uma caixa ser aberta, pode parecer que restam duas opções igualmente prováveis, 50% para cada. No entanto, a matemática nos mostra que essa intuição está incorreta. Quando o aluno faz a primeira escolha, a chance de acerto é de apenas  $\frac{1}{3}$ , enquanto a chance de a premiação estar em uma das caixas não escolhidas é de  $\frac{2}{3}$ . Como o professor sempre abre uma caixa vazia entre as duas restantes, a probabilidade de  $\frac{2}{3}$  se transfere integralmente para a caixa ainda não aberta. Assim, ao trocar de caixa, o aluno dobra suas chances de sucesso, passando de  $\frac{1}{3}$  para  $\frac{2}{3}$ .

Após realizar a atividade, recomenda-se repetir o experimento várias vezes com diferentes estudantes, registrando os resultados em um quadro. A repetição tende a confirmar a teoria, demonstrando na prática que quem troca ganha cerca de 2 em cada 3 vezes. Também é possível ampliar a atividade com mais caixas, desafiando os alunos a preverem o comportamento das probabilidades em situações semelhantes.

### Dinâmica 3: Trinca, par ou nada?

Temos três caixas com 4 fichas de cores diferentes (vermelha, verde, azul, amarela) em cada uma das caixas. Pedimos para um aluno escolher entre as três opções:

- **Trinca** : Ganha 4 bombons.
- **Par** : Ganha 1 bombom.
- **Nada**: Ganha 2 bombons.

Em seguida pedimos que ele tire uma ficha de cada caixa e observe se tem três, duas ou nenhuma cor igual. Aqui temos que refletir qual é a melhor opção a longo prazo.

Como as fichas são sorteadas uma a uma, e todas têm igual chance (uniforme), podemos aplicar **princípios de contagem**. Cada retirada pode resultar em uma das 4 cores possíveis, então o total de combinações possíveis é:

$$\text{Total de combinações} = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

É possível analisar os casos favoráveis a cada tipo de combinação.

- **Trinca (três fichas da mesma cor)**: só existem 4 possibilidades (uma para cada cor), como por exemplo: vermelha-vermelha-vermelha. Assim,

$$T = 4 \text{ possibilidades.}$$

- **Nada (todas as fichas com cores diferentes)**: devemos escolher 3 cores diferentes entre 4 possíveis, basta usar PFC.

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ possibilidades.}$$

- **Par (duas cores iguais e uma diferente):** Como sabemos as possibilidades dos casos anteriores podemos apenas fazer uma subtração

$$P = 64 - T - N = 64 - 4 - 24 = 36 \text{ possibilidades.}$$

#### Resumo das probabilidades:

| Resultado | Casos favoráveis | Probabilidade            | Prêmio (bombons) |
|-----------|------------------|--------------------------|------------------|
| Trinca    | 4                | $\frac{4}{64} = 0,0625$  | 4                |
| Par       | 36               | $\frac{36}{64} = 0,5625$ | 1                |
| Nada      | 24               | $\frac{24}{64} = 0,375$  | 2                |

#### Cálculo do valor esperado para cada aposta:

- Trinca:

$$E(\text{Trinca}) = 0,0625 \times 4 = 0,25.$$

- Par:

$$E(\text{Par}) = 0,5625 \times 1 = 0,5625.$$

- Nada:

$$E(\text{Nada}) = 0,375 \times 2 = 0,75.$$

Concluimos que a opção **Nada**, apesar de parecer intermediária, apresenta o maior valor esperado. Ou seja, a longo prazo, é a escolha que maximiza a quantidade de bombons ganhos. Já a opção **Trinca**, mesmo oferecendo o maior prêmio individual, é estatisticamente a menos vantajosa, pois ocorre raramente. Essa dinâmica é excelente para mostrar como o raciocínio probabilístico e os métodos de contagem ajudam a tomar decisões mais vantajosas.

Observa-se que, nesta dinâmica, são utilizados conceitos fundamentais de métodos de contagem, probabilidade e valor esperado para embasar a análise e a tomada de decisão. No entanto, vale destacar que esses conteúdos serão aprofundados progressivamente ao longo do itinerário formativo, permitindo que os estudantes compreendam, com mais rigor e domínio, as ferramentas matemáticas envolvidas.

Passadas as dinâmicas entraremos de fato no assunto, contando um pouco da história do poker e introduzindo as regras sobre o jogo que será usado como ferramenta para estudar análise combinatória e probabilidade. Talvez essa aula se estenda e seja necessário organizar na aula seguinte um pequeno torneio para que os alunos se apropriem das regras do jogo e compreendam, na prática, quais combinações de cartas vencem umas às outras. Com a dinâmica do torneio, os estudantes terão a oportunidade de vivenciar situações reais de tomada de decisão, comparar mãos, aplicar conceitos aprendidos e consolidar o entendimento sobre a hierarquia das combinações do poker.

## 3.2 Aula 2: Métodos de contagem

Iniciaremos a aula com um problema que permitirá aplicar o conceito de Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Para isso, consideraremos todas as cartas que possuem figuras no baralho: reis, damas e valetes. Como há quatro naipes, temos um total de  $3 \times 4 = 12$  cartas com figuras. Colocaremos essas cartas em ordem sobre a mesa e, em seguida, questionaremos os alunos: **quantas formas diferentes é possível organizar 3 cartas escolhidas dentre as 12 figuras (reis, rainhas e valetes dos quatro naipes)?**

A resolução pode ser conduzida pelo PFC. Ao escolher a primeira carta, o aluno tem 12 possibilidades; para a segunda carta, restam 11 possibilidades; e para a terceira carta, 10 possibilidades. Assim, obtém-se o total:

$$12 \times 11 \times 10 = 1320.$$

formas distintas de organizar três cartas de figuras. Esse resultado cria uma ponte natural para a compreensão da contagem sistemática e da importância de considerar se a ordem importa, o que nos leva ao conceito formal de permutação.

Esse exemplo funciona como uma introdução acessível aos **métodos de contagem**, permitindo aos alunos visualizar concretamente como as combinações e arranjos surgem na prática. Após essa atividade inicial, podemos propor novas questões como:

- De quantas formas podemos escolher 2 cartas de figuras dentre as 12?
- De quantas maneiras é possível formar pares, trincas ou sequências utilizando as cartas do baralho?
- Quantas mãos iniciais diferentes podem ser distribuídas no poker Texas Hold'em?

Essas perguntas conectam a teoria combinatória ao contexto do poker, mostrando que, por trás de cada jogada, há cálculos envolvendo contagem, possibilidades e tomada de decisão estratégica.

Ao longo da aula, os conceitos podem ser organizados em progressão e podemos usar o texto do Capítulo 2 da dissertação :

1. **Princípio Fundamental da Contagem** — Lógica multiplicativa da contagem.
2. **Permutação** — Quando a ordem das cartas importa.
3. **Arranjo** — Escolher um subconjunto de cartas com ordem relevante.
4. **Combinação** — Selecionar cartas independentemente da ordem, como ocorre na formação de uma mão de poker.

Dessa forma, o poker deixa de ser apenas um jogo e passa a ser um recurso didático para tornar os métodos de contagem mais concretos, intuitivos e envolventes. Ao final da aula, espera-se que os alunos compreendam não apenas as regras do jogo, mas também como os conceitos matemáticos explicam as possibilidades que surgem na mesa, desenvolvendo uma visão crítica e estratégica, que será aprofundada nas próximas aulas com o tema combinatória no poker.

### 3.3 Aula 3: Combinatória aplicada

Esta aula acontece logo após a introdução aos métodos de contagem e tem como objetivo mostrar, de forma prática e contextualizada, como os conceitos de permutação, arranjo e combinação aparecem naturalmente no jogo de poker. A intenção é que os alunos percebam que, por trás de cada jogada, existe raciocínio matemático, modelos de contagem e cálculos que apoiam decisões estratégicas.

O professor inicia a aula relembrando brevemente a diferença entre permutação, arranjo e combinação e enfatizando a pergunta orientadora que ajudará em toda a aula: “A ordem importa?”. Essa retomada deve ser rápida, pois o foco principal do encontro é a aplicação dos conceitos, não a repetição teórica. Uma vez recuperado o conteúdo, o professor apresenta a proposta dizendo aos alunos que, naquele momento, eles utilizarão combinatória para calcular quantas possibilidades existem em cada categoria do ranking de mãos do poker, indo do resultado mais comum ao mais raro.

Com a tabela do ranking projetada ou em papel, o professor explica que cada tipo de mão pode ser traduzido para uma situação de contagem. A turma passa então a calcular, com mediação do professor, o número de possibilidades de cada mão. O cálculo começa pelo *Royal Flush*, a mão mais forte e gradualmente avança para mãos mais fracas, cujos cálculos são mais complexos. Os resultados obtidos serão:

- **Royal Flush** é a mão mais forte do poker e consiste nas cinco cartas mais altas de um mesmo naipe: Ás (A), Rei (K), Dama (Q), Valete (J) e Dez (10). Como os valores dessas cartas são fixos, a única variação possível ocorre nos naipes, então só há quatro possibilidades
- **Straight Flush** é uma sequência de cinco cartas consecutivas do mesmo naipe, excetuando o Royal Flush. Existem 10 sequências possíveis (de A-5 até 10-A) e 4 naipes possíveis. Contudo, uma dessas sequências corresponde ao Royal Flush, já contabilizado anteriormente.

Desse modo, a quantidade de possibilidades é dado por:

$$(10 \times 4) - 4 = 36.$$

- **Quadra (Four of Kind)** ocorre quando há quatro cartas de mesmo valor e uma carta adicional diferente (*kicker*).
  - Existem 13 valores possíveis (de Ás a 2) para formar as quadras.
  - Para cada valor, há 1 única forma de escolher as quatro cartas (pois são os quatro naipes).
  - A carta extra pode ser qualquer uma das 48 restantes.

Assim para calcular a quantidades de combinações de quadras fazemos:

$$13 \times 48 = 624$$

- **Full House** é composto por uma trinca (três cartas de mesmo valor) e um par (duas cartas de outro valor).
  - Escolher o valor da trinca:  $C_{13,1}$ .
  - Escolher 3 naipes entre 4:  $C_{4,3}$ .
  - Escolher o valor do par entre os 12 restantes:  $C_{12,1}$ .
  - Escolher 2 naipes entre 4:  $C_{4,2}$ .

Logo, como todas essas escolhas são independentes, a quantidade de possibilidades são:

$$C_{13,1} \times C_{4,3} \times C_{12,1} \times C_{4,2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744.$$

- **Flush** ocorre quando temos cinco cartas do mesmo naipe, sem formar sequência.
  - Para cada naipe, podemos escolher  $C_{13,5}$  combinações.
  - Há 4 naipes possíveis.
  - Subtrair os casos em que há Straight Flush ou Royal Flush.

Desse modo, temos:

$$C_{13,5} \times 4 - 4 - 36 = 1287 \times 4 - 40 = 5108.$$

- **Sequência** é formada por cinco cartas consecutivas, de diferentes naipes.
  - Existem 10 possíveis sequências (de A-5 até 10-A).
  - Cada carta pode ter 4 naipes.
  - Assim, há  $4^5 = 1024$  combinações para cada sequência.
  - Excluir as 40 combinações que correspondem aos *Straight Flushes* e *Royal Flushes*.

Portanto,

$$(10 \times 1024) - 40 = 10240 - 40 = 10200.$$

- **Trinca** é composta de três cartas de mesmo valor e duas com valores diferentes.
  - Escolher valor da trinca: 13.
  - Escolher 3 naipes dentre 4:  $C_{4,3}$ .
  - Escolher 2 valores diferentes entre os 12 restantes:  $C_{12,2}$ .
  - Para cada valor escolhido. 1 de 4 naipes:  $4^2$ .

Logo,

$$13 \times C_{4,3} \times C_{12,2} \times 4^2 = 13 \times 4 \times 66 \times 16 = 54912.$$

- **Dois Pares** acontece quando o jogador possui duas cartas de mesmo valor e outras duas cartas de mesmo valor, mais uma carta avulsa (*kicker*).
  - Escolher 2 valores para os pares:  $C_{13,2}$ .
  - Para cada valor, escolher 2 naipes:  $C_{4,2}$ .
  - Escolher o valor da carta restante:  $C_{11,1}$ .
  - Escolher 1 de 4 naipes para ela:  $C_{4,1}$ .

Assim,

$$C_{13,2} \times (C_{4,2})^2 \times C_{11,1} \times C_{4,1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123552.$$

- **Um Par** ocorre quando o jogador possui duas cartas de mesmo valor, e as outras três cartas têm valores diferentes entre si e diferentes do valor do par.
  - Escolher o valor do par:  $C_{13,1}$ .
  - Escolher 2 naipes para o par:  $C_{4,2}$ .
  - Escolher 3 valores distintos entre os 12 restantes:  $C_{12,3}$ .
  - Para cada um, escolher 1 dos 4 naipes:  $4^3$ .

Logo,

$$C_{13,1} \times C_{4,2} \times C_{12,3} \times 4^3 = 13 \times 6 \times 220 \times 64 = 1098240.$$

- **Carta alta** ocorre quando não há nenhuma formação de par, sequência ou cartas do mesmo naipe, ou seja, todas as cinco cartas são de valores diferentes, sem padrão particular. Para encontrar todas possibilidades encontramos o total de combinações possíveis de 5 cartas e subtraímos os toas possibilidades anteriores, logo,

$$C_{52,5} - 1295420 = 2598960 - 1296420 = 1302540.$$

Após a conclusão dos cálculos de todos os tipos de mão, os resultados são organizados em uma tabela 3.1 que apresenta a quantidade total de combinações possíveis para cada categoria do ranking do poker. A partir dessa sistematização, propõe-se uma reflexão com os estudantes sobre a relação entre a força da mão e a raridade com que ela ocorre. Quanto menor o número de combinações possíveis de um determinado tipo de mão, maior tende a ser seu valor estratégico no jogo. Da mesma forma, mãos que aparecem com maior frequência possuem, proporcionalmente, menor força no ranking.

Tabela 3.1: Quantidade de combinações possíveis de cada tipo de mão no poker

| <b>Tipo de Mão</b>      | <b>Número de Combinações</b> |
|-------------------------|------------------------------|
| Royal Flush             | 4                            |
| Straight Flush          | 36                           |
| Quadra (Four of a Kind) | 624                          |
| Full House              | 3.744                        |
| Flush                   | 5.108                        |
| Sequência (Straight)    | 10.200                       |
| Trinca                  | 54.912                       |
| Dois Pares              | 123.552                      |
| Um Par                  | 1.098.240                    |
| Carta Alta              | 1.302.540                    |
| <b>Total</b>            | <b>2.598.960</b>             |

Esse processo de análise permite que os alunos compreendam que o ranking oficial das mãos não é arbitrário, mas construído com base na dificuldade combinatória de se obter cada uma delas. Dessa forma, a matemática não apenas explica o funcionamento do jogo, mas também oferece suporte racional para a tomada de decisões, contribuindo para o desenvolvimento de uma postura crítica e estratégica nas próximas aulas sobre probabilidade.

### 3.4 Aula 4: Espaço amostral

Esta aula tem como finalidade introduzir formalmente o conceito de espaço amostral e preparar os estudantes para o estudo de probabilidade. A proposta consiste em utilizar o contexto do poker como ambiente motivador e aplicado, permitindo que os alunos percebam que a análise probabilística só se torna possível quando o conjunto de todos os resultados possíveis é previamente identificado e compreendido.

A aula inicia com uma breve retomada da atividade anterior, destacando que já foram calculadas as quantidades de combinações correspondentes a cada tipo de mão do ranking. Em seguida, apresenta-se aos alunos a ideia de que todo cálculo

de probabilidade parte de uma pergunta fundamental: “Qual é o conjunto de todos os resultados possíveis desta situação?” A partir dessa questão, introduz-se o conceito de espaço amostral, de forma conceitual, mas completamente vinculada ao jogo. Explica-se que, no poker, o espaço amostral é formado por todas as combinações de cartas que podem ser distribuídas aos jogadores, e que identificar esse conjunto é o passo inicial antes de se tratar a chance de ocorrência de qualquer evento na mesa.

Para consolidar a ideia, trabalha-se o caso clássico do Texas Hold'em: determinar de quantas maneiras é possível distribuir duas cartas de um baralho de 52. Destaca-se que a ordem não importa, pois receber  $A\spadesuit$  e  $K\heartsuit$  é equivalente a receber  $K\heartsuit$  e  $A\spadesuit$ . Dessa forma, calcula-se o tamanho do espaço amostral por meio da combinação:

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = 1326.$$

Esse resultado estabelece que existem 1326 possíveis mãos iniciais para um jogador. Assim, compreende-se que o espaço amostral não precisa ser enumerado carta por carta, mas pode ser representado matematicamente por uma combinação.

A partir deste ponto, ampliam-se as discussões para outros exemplos de espaço amostral no jogo. Ao revelar o *flop*, composto por três cartas comunitárias, o espaço amostral correspondente pode ser representado por:

$$\binom{50}{3} = \frac{50!}{3!47!} = 19600.$$

Caso se deseje determinar o número de possibilidades para o *turn*, restando 47 cartas. De maneira semelhante, para o *river*, o espaço amostral 46 cartas.

Esses exemplos permitem mostrar que, à medida que as cartas são reveladas, o espaço amostral se reduz continuamente, o que significa que a probabilidade de determinados eventos pode mudar ao longo do jogo. Assim, os alunos percebem que o conjunto de todos os resultados possíveis deixa de ser estático quando novas informações são incorporadas, introduzindo naturalmente a noção de probabilidade condicional, que será abordada em aulas posteriores.

### 3.5 Aula 5: Probabilidades no poker

Esta aula tem como objetivo introduzir o conceito de probabilidade a partir da relação entre o espaço amostral e os subconjuntos de interesse, utilizando o poker como contexto aplicado. Após compreender o espaço amostral da distribuição de cartas e a dinâmica combinatória que determina cada tipo de mão, os estudantes estão preparados para interpretar a probabilidade como medida de chance associada ao número de resultados favoráveis dividido pelo total de resultados possíveis.

A aula tem início com a definição formal de probabilidade clássica, destacando

que, quando todos os elementos do espaço amostral são equiprováveis, a probabilidade de um evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Retoma-se o cálculo anterior: há

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

possíveis mãos distintas de cinco cartas em um baralho padrão. Cada tipo de mão corresponde, portanto, a um subconjunto desse espaço amostral, e é a dimensão relativa desse subconjunto que determina sua probabilidade de ocorrência.

Nesse momento, constrói-se a tabela de probabilidades, relacionando cada tipo de mão do ranking ao número de combinações possíveis e à probabilidade correspondente. A organização tabular permite visualizar com clareza que os resultados mais raros são também os mais fortes, enquanto os mais frequentes ocupam as posições mais baixas no ranking. A seguir apresenta-se a tabela completa e tradicionalmente utilizada no estudo matemático do poker:

Tabela 3.2: Rank de mão e suas probabilidades

| Tipo de mão             | Nº de combinações | Prob. exata                       | Prob. aproximada |
|-------------------------|-------------------|-----------------------------------|------------------|
| Carta Alta              | 1 302 540         | $\frac{1\,302\,540}{2\,598\,960}$ | 50,1177%         |
| Um Par                  | 1 098 240         | $\frac{1\,098\,240}{2\,598\,960}$ | 42,2569%         |
| Dois Pares              | 123 552           | $\frac{123\,552}{2\,598\,960}$    | 4,7539%          |
| Trinca                  | 54 912            | $\frac{54\,912}{2\,598\,960}$     | 2,1128%          |
| Sequência               | 10 200            | $\frac{10\,200}{2\,598\,960}$     | 0,3925%          |
| Flush                   | 5 108             | $\frac{5\,108}{2\,598\,960}$      | 0,1965%          |
| Full House              | 3 744             | $\frac{3\,744}{2\,598\,960}$      | 0,1441%          |
| Quadra (Four of a Kind) | 624               | $\frac{624}{2\,598\,960}$         | 0,0240%          |
| Straight Flush          | 36                | $\frac{36}{2\,598\,960}$          | 0,00139%         |
| Royal Straight Flush    | 4                 | $\frac{4}{2\,598\,960}$           | 0,000154%        |

Ao analisar os valores apresentados na tabela, os estudantes percebem que o ranking oficial das mãos não é arbitrário: as mãos mais fortes são justamente aquelas mais improváveis de ocorrer. A relação direta entre raridade e valor estratégico evidencia que decisões racionais no jogo se fundamentam em quantificação e comparação de probabilidades, e não em intuição ou sorte.

A aula se encerra destacando que a probabilidade apresentada na tabela refere-se ao conjunto inicial de cinco cartas. Ao longo de uma partida de poker, novas cartas são reveladas e, portanto, o espaço amostral se modifica. Consequentemente, a probabilidade de eventos também muda conforme o jogo avança. Essa observação

prepara os estudantes para conteúdos futuros, especialmente probabilidade condicional e análise de chances no *flop*, *turn* e *river*.

### 3.6 Aula 6: Probabilidade condicional

O objetivo desta aula é formalizar o conceito de probabilidade condicional utilizando o contexto do poker como modelo aplicado. Ao longo de uma rodada de Texas Hold'em, novas cartas são reveladas progressivamente, modificando o espaço amostral e, conseqüentemente, as probabilidades associadas aos eventos de interesse. Assim, busca-se evidenciar que o cálculo probabilístico em situações reais é dinâmico e depende da informação disponível em cada etapa da partida.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade, no qual  $\Omega$  representa o conjunto de todos os resultados possíveis em uma rodada do jogo,  $\mathcal{F}$  o conjunto dos eventos, e  $P$  uma medida de probabilidade. Para dois eventos  $A, B \in \mathcal{F}$  com  $P(B) > 0$ , define-se probabilidade condicional como

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Considera-se agora um exemplo aplicado ao poker. Suponha que um jogador comece com duas cartas de mesmo naipe. Seja  $F$  o evento “completar um *flush* (cinco cartas do mesmo naipe) até o final da rodada”. Antes do *flop*, há 13 cartas do mesmo naipe no baralho, das quais o jogador detém duas. Assim, existem 11 cartas favoráveis entre as 50 disponíveis.

#### Probabilidade de $F$ após o flop

Seja  $E_{\text{flop}}$  o evento “o flop exibe exatamente  $k$  cartas do mesmo naipe do jogador”, com  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . A probabilidade de obter ao menos duas cartas favoráveis no flop é dada por

$$P(E_{\text{flop}}(k \geq 2)) = 1 - P(E_{\text{flop}}(0)) - P(E_{\text{flop}}(1)),$$

onde

$$P(E_{\text{flop}}(0)) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{50}{3}}, \quad P(E_{\text{flop}}(1)) = \frac{\binom{11}{1} \binom{39}{2}}{\binom{50}{3}}.$$

#### Probabilidade de $F$ após o turn

Suponha que o flop tenha revelado duas cartas do mesmo naipe. Nesse caso, o jogador possui quatro cartas favoráveis e restam ainda 9 cartas do mesmo naipe no baralho, dentre 47 cartas possíveis. Seja  $C_{\text{turn}}$  o evento “completar o *flush* no turn”. Então

$$P(C_{\text{turn}}) = \frac{9}{47}.$$

### Probabilidade de $F$ no river

Se o evento  $C_{\text{turn}}$  não ocorrer, resta apenas uma carta a ser revelada. Seja  $C_{\text{river}}$  o evento “completar o flush no river”. Nesse caso,

$$P(C_{\text{river}}) = \frac{9}{46}.$$

### Probabilidade conjunta até o river

Seja  $N_{\text{turn}}$  o evento “não completar o flush no turn” e  $N_{\text{river}}$  o evento “não completar o flush no river”. A probabilidade de não completar o flush após turn e river é

$$P(N_{\text{turn}} \cap N_{\text{river}}) = \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46}.$$

Assim, utilizando probabilidade complementar, obtém-se

$$P(F) = 1 - \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \approx 0,350 \quad (35\%).$$

Exemplo análogo pode ser construído para o evento  $T$  “formar uma trinca no flop” quando o jogador inicia com um par. Há duas cartas remanescentes do mesmo valor entre as 50 disponíveis, de modo que

$$P(T) = \frac{\binom{2}{1} \binom{47}{2}}{\binom{50}{3}} \approx 0,118 \quad (11,8\%).$$

Outro evento relevante é  $S$  “completar uma sequência até o final da rodada” quando o jogador possui quatro cartas conectadas após o flop. Existem 8 cartas favoráveis (quatro extremidades possíveis com dois naipes cada). Assim,

$$P(S_{\text{turn}}) = \frac{8}{47}, \quad P(S_{\text{river}}) = \frac{8}{46},$$

e, utilizando probabilidade complementar,

$$P(S) = 1 - \frac{39}{47} \cdot \frac{38}{46} \approx 0,315 \quad (31,5\%).$$

Esses exemplos demonstram que o espaço amostral evolui ao longo da partida, pois novas informações restringem o conjunto de resultados possíveis. Consequentemente, a probabilidade dos eventos é atualizada conforme  $B$  varia no cálculo da probabilidade condicional  $P(A | B)$ . Ao final da aula, conclui-se que decisões racionais no poker devem ser fundamentadas em estimativas probabilísticas dinâmicas, e não em valores fixos. Esse entendimento prepara o estudante para conteúdos posteriores relacionados a *pot odds* e *expected value*, nos quais a probabilidade condicional é integrada à análise econômica da tomada de decisão sob incerteza.

### 3.7 Aula 7: Odds e Pot Odds

O objetivo desta aula é relacionar probabilidade condicional e tomada de decisão racional no poker, por meio da formalização do conceito de *pot odds*. A proposta consiste em demonstrar que não basta conhecer a probabilidade de um evento ocorrer; é necessário avaliar matematicamente se o custo de permanecer na rodada é compensado pelo retorno potencial.

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade, no qual  $\Omega$  representa o conjunto de todos os resultados possíveis,  $\mathcal{F}$  o conjunto dos eventos e  $P$  uma medida de probabilidade. Durante uma rodada de Texas Hold'em, cartas adicionais são reveladas progressivamente, modificando o espaço amostral e atualizando a probabilidade de eventos. A escolha estratégica deve, portanto, ser fundamentada não apenas em  $P(E)$ , tal que  $E \in \mathcal{F}$ , mas também no custo-benefício esperado da ação.

Considere um pote atual de valor  $P$  fichas e uma aposta adversária de valor  $A$  fichas. Para continuar na mão, o jogador deve pagar  $A$  fichas para disputar um pote total de  $P + A$  fichas. Define-se *pot odds* como

$$\text{Pot Odds} = \frac{A}{P + A}.$$

Seja  $E$  um evento desejado (por exemplo, completar uma mão vencedora) e  $P(E)$  sua probabilidade condicional dado o estado atual do baralho. A decisão racional é descrita pelos critérios:

$$\text{Pagar é matematicamente vantajoso se } P(E) > \frac{A}{P + A},$$

$$\text{Abandonar é matematicamente vantajoso se } P(E) < \frac{A}{P + A}.$$

#### Exemplo 1 — Flush

Suponha que o jogador esteja no *turn* com quatro cartas do mesmo naipe e deseja completar um flush. Restam 9 cartas favoráveis entre 46 disponíveis, de modo que

$$P(E_{\text{flush}}) = \frac{9}{46} \approx 19,6\%.$$

Se o pote contém 100 fichas e o adversário aposta 25 fichas, então

$$\text{Pot Odds} = \frac{25}{100 + 25} = 20\%.$$

Como  $P(E_{\text{flush}}) < \text{Pot Odds}$ , a decisão matematicamente correta é abandonar a mão.

### Exemplo 2 — Sequência (*Straight*)

Considere agora o caso em que o jogador possui quatro cartas conectadas após o flop, com 8 cartas que completam a sequência. A probabilidade de completá-la até o river é

$$P(E_{\text{straight}}) = 1 - \frac{39}{47} \cdot \frac{38}{46} \approx 31,5\%.$$

Se o pote contém 150 fichas e o adversário aposta 50 fichas, então

$$\text{Pot Odds} = \frac{50}{150 + 50} = 25\%.$$

Como  $P(E_{\text{straight}}) > \text{Pot Odds}$ , pagar a aposta é matematicamente vantajoso.

### Exemplo 3 — Trinca (*Three of a Kind*)

Suponha que o jogador comece com um par e deseje formar uma trinca no flop. A probabilidade de  $E_{\text{trinca}}$  é

$$P(E_{\text{trinca}}) = \frac{\binom{2}{1} \binom{47}{2}}{\binom{50}{3}} \approx 11,8\%.$$

Se o pote contém 80 fichas e o adversário aposta 10 fichas, então

$$\text{Pot Odds} = \frac{10}{80 + 10} \approx 11,1\%.$$

Como  $P(E_{\text{trinca}}) > \text{Pot Odds}$ , a decisão racional é pagar.

Se, no entanto, o adversário aposta 20 fichas no mesmo pote,

$$\text{Pot Odds} = \frac{20}{80 + 20} = 20\%.$$

Como  $P(E_{\text{trinca}}) < \text{Pot Odds}$ , a decisão correta passa a ser abandonar.

### Exemplo 4 — Full House

Suponha que, após o *turn*, o jogador possui uma trinca e deseja completar um *full house*. Restam duas cartas do mesmo valor para completar a dupla e 3 cartas do valor que forma a dupla oposta, totalizando 6 cartas favoráveis entre 46 disponíveis:

$$P(E_{\text{full}}) = \frac{6}{46} \approx 13,0\%.$$

Se o pote contém 200 fichas e o adversário aposta 20 fichas,

$$\text{Pot Odds} = \frac{20}{200 + 20} \approx 9,1\%.$$

Como  $P(E_{\text{full}}) > \text{Pot Odds}$ , pagar é matematicamente vantajoso.

Os exemplos demonstram que *pot odds* não tratam da probabilidade de vencer uma mão específica, mas da viabilidade estatística da decisão no longo prazo. Mesmo quando o evento desejado não ocorre, se a estratégia é aplicada consistentemente quando  $P(E) > \text{Pot Odds}$ , o resultado acumulado ao longo de muitas mãos tende a ser positivo. A aula encerra destacando que *pot odds* estabelece a ligação entre probabilidade e economia de decisões, servindo como base para o próximo conteúdo: *Expected Value* (EV), no qual se avalia matematicamente o lucro esperado associado a cada ação possível no poker.

### 3.8 Aula 8: Valor esperado (EV)

O objetivo desta aula é introduzir o conceito de *Expected Value* (Valor Esperado, ou EV) como ferramenta matemática para quantificar o ganho financeiro médio associado a uma decisão no poker. A proposta consiste em demonstrar que decisões estratégicas não devem basear-se apenas na probabilidade de realizar uma mão, mas também no retorno econômico esperado dessa ação no longo prazo.

Seja  $X$  uma variável aleatória que representa o ganho monetário associado a uma ação em uma rodada de poker, admitindo valores positivos ou negativos. Define-se o valor esperado de  $X$  por

$$EV(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i),$$

em que  $x_i$  representa um resultado possível e  $P(X = x_i)$  a probabilidade de sua ocorrência. Tal grandeza indica o ganho ou perda médio esperado ao repetir a mesma decisão um grande número de vezes. Assim, a ação é considerada matematicamente vantajosa quando

$$EV > 0,$$

desfavorável quando

$$EV < 0,$$

e indiferente quando

$$EV = 0.$$

Considera-se inicialmente um exemplo ilustrativo. Suponha que um jogador paga uma aposta de 20 fichas com probabilidade de 25% de completar uma mão vencedora que resultará em um ganho de 100 fichas. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o ganho da decisão. Os possíveis resultados são: ganhar 100 fichas com

probabilidade 0,25 ou perder 20 fichas com probabilidade 0,75. Assim,

$$EV = (100 \cdot 0,25) + (-20 \cdot 0,75) = 25 - 15 = 10.$$

Como  $EV = 10 > 0$ , a decisão é lucrativa no longo prazo, ainda que possa resultar em perda em um caso isolado.

Observa-se que o EV integra probabilidade e retorno esperado. Supondo que  $P(E)$  seja a probabilidade de completar a mão desejada e que, ao pagar uma aposta de valor  $A$ , o jogador dispute um pote final de  $P + A$ , tem-se a representação geral:

$$EV = P(E) \cdot (P + A) - (1 - P(E)) \cdot A.$$

A ação racional consiste em pagar a aposta quando  $EV > 0$  e desistir quando  $EV < 0$ .

A seguir, apresentam-se exemplos numéricos no contexto do poker para ilustrar a aplicabilidade do EV na tomada de decisão.

### Exemplo 1 — Sequência (*Straight*) no river

Considere um jogador com quatro cartas conectadas após o *turn*, restando oito cartas favoráveis entre as 46 disponíveis. A probabilidade de completar a sequência é

$$P(E_{\text{straight}}) = \frac{8}{46} \approx 17,4\%.$$

Suponha que o pote contenha 150 fichas e o adversário aposte 20 fichas. Se a sequência for completada, o ganho será de 170 fichas. Assim,

$$EV = 0,174 \cdot 170 - 0,826 \cdot 20 \approx 29,6 - 16,5 = 13,1.$$

Como  $EV > 0$ , pagar a aposta é matematicamente vantajoso.

### Exemplo 2 — Full House

Suponha que o jogador possua uma trinca após o *turn* e deseja completar um *full house*. Restam seis cartas favoráveis entre 46, de modo que

$$P(E_{\text{full}}) = \frac{6}{46} \approx 13,0\%.$$

Se o pote contiver 300 fichas e o adversário apostar 60 fichas, o ganho possível será de 360 fichas. Assim,

$$EV = 0,13 \cdot 360 - 0,87 \cdot 60 = 46,8 - 52,2 = -5,4.$$

Embora o evento desejado produza uma mão forte, o resultado negativo indica que pagar a aposta é economicamente desvantajoso no longo prazo.

Ao final da aula, conclui-se que o valor esperado sintetiza a lógica matemática que orienta a tomada de decisão eficiente no poker: a probabilidade indica a chance de sucesso, as *pot odds* relacionam risco e retorno imediato e o valor esperado determina, de forma quantitativa, se a jogada gera lucro ou prejuízo esperado ao longo do tempo. Assim, o EV conecta o estudo da probabilidade à análise econômica de decisões sob incerteza, constituindo um conceito central para a compreensão estratégica do jogo.

### 3.9 Aula 9: Probabilidade e bluff

O objetivo desta aula é introduzir o conceito de *bluff* como ferramenta estratégica no poker e demonstrar que a decisão de blefar pode ser analisada matematicamente por meio de frequência mínima necessária de desistência e cálculo de valor esperado. Embora o blefe seja frequentemente associado à intuição, sua fundamentação racional decorre da relação entre risco assumido e retorno financeiro esperado.

Entende-se por *bluff* a ação em que o jogador aposta ou aumenta a aposta com uma mão inferior àquela que o adversário provavelmente possui, com o objetivo de fazê-lo desistir. Seja  $F$  o evento “o oponente desiste diante da aposta” e  $P(F)$  a sua probabilidade. Seja  $P$  o valor presente do pote e  $A$  o valor apostado pelo jogador. O ganho em caso de desistência do adversário é  $P$ , enquanto a perda em caso de pagamento é  $A$ . Define-se a variável aleatória  $X$  que modela o ganho do blefe:

$$X = \begin{cases} P, & \text{se } F \text{ ocorrer} \\ -A, & \text{se } F \text{ não ocorrer.} \end{cases}$$

O valor esperado do blefe é dado por:

$$EV_{\text{bluff}} = P(F) \cdot P - (1 - P(F)) \cdot A.$$

O blefe é matematicamente vantajoso quando

$$EV_{\text{bluff}} > 0.$$

Da desigualdade acima, obtém-se a condição equivalente:

$$P(F) > \frac{A}{P + A}.$$

A expressão

$$\frac{A}{P + A}$$

representa a **frequência mínima de desistência do adversário** necessária para que o

blefe seja lucrativo no longo prazo.

### Exemplo 1 — Blefe padrão

Considere  $P = 100$  fichas e uma aposta  $A = 50$  fichas. Então

$$\frac{A}{P + A} = \frac{50}{150} \approx 33,3\%.$$

Se o oponente desistir em mais de 33,3% das situações semelhantes, o blefe produz lucro esperado positivo.

### Exemplo 2 — Blefe econômico

Considere agora um pote de  $P = 100$  fichas e uma aposta  $A = 25$  fichas. Tem-se:

$$\frac{A}{P + A} = \frac{25}{125} = 20\%.$$

Basta que o adversário desista em mais de 20% das vezes para que o blefe seja lucrativo. Esse exemplo mostra que apostas menores requerem menor taxa de sucesso.

### Exemplo 3 — Blefe agressivo

Se o pote contém  $P = 100$  fichas e o jogador aposta  $A = 100$  fichas:

$$\frac{A}{P + A} = \frac{100}{200} = 50\%.$$

A estratégia só é lucrativa se o adversário desistir em mais da metade das ocasiões semelhantes, evidenciando que blefes grandes exigem alta taxa de sucesso.

### Exemplo 4 — Cálculo de EV no blefe

Suponha que em uma determinada situação o jogador avalia que o adversário desiste com probabilidade  $P(F) = 40\%$ , o pote contém  $P = 120$  fichas e o jogador aposta  $A = 50$  fichas. O valor esperado do blefe é então:

$$EV_{\text{bluff}} = 0,40 \cdot 120 - 0,60 \cdot 50 = 48 - 30 = 18.$$

Como  $EV_{\text{bluff}} = 18 > 0$ , o blefe é lucrativo no longo prazo.

### Exemplo 5 — EV negativo em situação de blefe

Suponha agora que o pote contém  $P = 200$  fichas e o jogador aposta  $A = 100$  fichas, estimando que o adversário desiste com probabilidade  $P(F) = 45\%$ . Então:

$$EV_{\text{bluff}} = 0,45 \cdot 200 - 0,55 \cdot 100 = 90 - 55 = 35.$$

Apesar do EV positivo neste cenário específico, se a estimativa de desistência for menor que 50%, tem-se:

$$EV_{\text{bluff}} = P(F) \cdot 200 - (1 - P(F)) \cdot 100.$$

Se  $P(F) = 40\%$ :

$$EV_{\text{bluff}} = 0,40 \cdot 200 - 0,60 \cdot 100 = 80 - 60 = 20,$$

ainda positivo. Entretanto, se  $P(F) = 30\%$ :

$$EV_{\text{bluff}} = 0,30 \cdot 200 - 0,70 \cdot 100 = 60 - 70 = -10.$$

Portanto, a mesma aposta pode ser lucrativa ou prejuízo dependendo da frequência de desistência estimada — destacando a importância de avaliação racional do adversário.

Conclui-se que o blefe é uma ação estratégica fundamentada em quantificação de risco, frequência de desistência e retorno esperado, e não uma decisão aleatória ou intuitiva. A matemática orienta o jogador a blefar apenas quando a probabilidade de desistência supera o limiar dado por  $\frac{A}{P+A}$ , garantindo que o valor esperado seja positivo ao longo de muitas repetições da mesma situação. Esta análise prepara o terreno para conteúdos futuros relacionados a *balanceamento de ranges* e teoria da decisão sob incerteza.

## 3.10 Aula 10: Probabilidade de vitória entre mãos

O objetivo desta aula é analisar comparações diretas entre mãos de poker no pré-flop, utilizando conceitos matemáticos e resultados de simulações para estimar qual mão possui maior probabilidade de vitória ao final da rodada. Busca-se evidenciar que a força relativa entre mãos iniciais não depende de intuição ou preferência subjetiva, mas decorre de cálculos combinatórios e probabilísticos.

Denomina-se *equidade da mão* a probabilidade de que uma determinada mão inicial vença o pote no longo prazo, considerando todas as possíveis combinações de cartas comunitárias (*flop*, *turn* e *river*) e todas as mãos adversárias possíveis, sob hipóteses bem definidas (por exemplo, jogo *heads-up* contra uma mão específica ou contra um adversário com mão aleatória). Em termos formais, se  $\Omega$  denota o conjunto de todas as combinações possíveis de cinco cartas comunitárias, a probabilidade de

vitória de uma mão  $H$  contra uma mão (ou range)  $H'$  pode ser descrita como

$$P(\text{vitória de } H) = \frac{|\{\omega \in \Omega : H \text{ forma a melhor mão contra } H' \text{ em } \omega\}|}{|\Omega|}.$$

Como o número de combinações é muito grande, tais probabilidades são usualmente estimadas por métodos de simulação (por exemplo, simulações de Monte Carlo), ainda que a base conceitual seja estritamente combinatória.

Para introduzir o tema, considera-se o confronto clássico  $AK$  versus  $QQ$  no pré-flop. Em um cenário *heads-up*, sob hipóteses padrão, as estatísticas mostram que o par de damas ( $QQ$ ) apresenta equidade levemente superior à de  $AK$ , ou seja, tem maior probabilidade de vencer no longo prazo. Essa comparação ilustra que:

- mesmo quando uma mão é “favorita”, ela não vence em 100% das partidas;
- a força pré-flop é uma noção probabilística, não absoluta;
- pequenas diferenças de equidade podem ter impacto significativo quando decisões são repetidas muitas vezes.

De forma geral, a probabilidade de vitória de uma mão  $H_1$  contra uma mão  $H_2$  no pré-flop pode ser escrita como

$$P(\text{vitória de } H_1) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \mathbf{1}_{\{H_1 \text{ vence } H_2 \text{ em } \omega\}},$$

onde  $P(\omega)$  é a probabilidade de ocorrência da combinação  $\omega$  de cartas comunitárias (tipicamente assumida uniforme) e  $\mathbf{1}$  é a função indicadora.

### Matriz de 169 mãos iniciais

Em Texas Hold'em, existem 1 326 combinações distintas de duas cartas iniciais, mas muitas delas são equivalentes em valor pré-flop, pois os naipes não possuem hierarquia. Agrupando por classes de valor, obtêm-se 169 classes não equivalentes de mãos iniciais: 13 pares, 78 mãos *suited* e 78 mãos *offsuit*. Essas 169 classes são tradicionalmente organizadas em uma matriz  $13 \times 13$ , em que:

- a diagonal principal contém os pares ( $AA, KK, \dots, 22$ );
- a parte acima da diagonal corresponde às mãos *suited*;
- a parte abaixo da diagonal corresponde às mãos *offsuit*.

A seguir apresenta-se a matriz completa das 169 classes de mãos iniciais. Nela, cada entrada indica a classe da mão; opcionalmente, pode-se associar a cada entrada a equidade numérica correspondente (por exemplo, adicionando entre parênteses a

probabilidade de vitória estimada contra um adversário com mão aleatória ou em um cenário *heads-up* específico).

Tabela 3.3: Matriz das 169 classes de mãos iniciais em Texas Hold'em

|   | A   | K   | Q   | J   | T   | 9   | 8   | 7   | 6   | 5   | 4   | 3   | 2   |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | AA  | AKs | AQs | AJs | ATs | A9s | A8s | A7s | A6s | A5s | A4s | A3s | A2s |
| K | AKo | KK  | KQs | KJs | KTs | K9s | K8s | K7s | K6s | K5s | K4s | K3s | K2s |
| Q | AQo | KQo | QQ  | QJs | QTs | Q9s | Q8s | Q7s | Q6s | Q5s | Q4s | Q3s | Q2s |
| J | AJo | KJo | QJo | JJ  | JTs | J9s | J8s | J7s | J6s | J5s | J4s | J3s | J2s |
| T | ATo | KTo | QTo | JTo | TT  | T9s | T8s | T7s | T6s | T5s | T4s | T3s | T2s |
| 9 | A9o | K9o | Q9o | J9o | T9o | 99  | 98s | 97s | 96s | 95s | 94s | 93s | 92s |
| 8 | A8o | K8o | Q8o | J8o | T8o | 98o | 88  | 87s | 86s | 85s | 84s | 83s | 82s |
| 7 | A7o | K7o | Q7o | J7o | T7o | 97o | 87o | 77  | 76s | 75s | 74s | 73s | 72s |
| 6 | A6o | K6o | Q6o | J6o | T6o | 96o | 86o | 76o | 66  | 65s | 64s | 63s | 62s |
| 5 | A5o | K5o | Q5o | J5o | T5o | 95o | 85o | 75o | 65o | 55  | 54s | 53s | 52s |
| 4 | A4o | K4o | Q4o | J4o | T4o | 94o | 84o | 74o | 64o | 54o | 44  | 43s | 42s |
| 3 | A3o | K3o | Q3o | J3o | T3o | 93o | 83o | 73o | 63o | 53o | 43o | 33  | 32s |
| 2 | A2o | K2o | Q2o | J2o | T2o | 92o | 82o | 72o | 62o | 52o | 42o | 32o | 22  |

Caso se deseje associar a cada classe a sua equidade numérica pré-flop, é possível acrescentar, em cada célula, a porcentagem de vitória estimada (por exemplo, AA (85,2%) ou AKs (67,0%)), com base em tabelas obtidas por simuladores de poker amplamente utilizados na literatura. Dessa forma, a matriz passa a representar não apenas a classificação qualitativa das mãos, mas também sua força quantitativa aproximada.

### Comparação de força entre mãos

Como exemplo de aplicação, pode-se considerar o confronto entre duas mãos específicas  $H_1$  e  $H_2$  (por exemplo, AK e QQ) em um cenário *heads-up*. A equidade de  $H_1$  contra  $H_2$  é dada por

$$\text{Eq}(H_1; H_2) = P(\text{vitória de } H_1) + \frac{1}{2}P(\text{empate}),$$

e, analogamente, a equidade de  $H_2$  satisfaz

$$\text{Eq}(H_2; H_1) = P(\text{vitória de } H_2) + \frac{1}{2}P(\text{empate}),$$

com  $\text{Eq}(H_1; H_2) + \text{Eq}(H_2; H_1) = 1$ .

Na prática, tais probabilidades são estimadas por simulação: fixa-se a mão  $H_1$  para o jogador, a mão  $H_2$  para o adversário, sorteiam-se repetidamente as cinco cartas comunitárias e registra-se a frequência relativa de vitórias, derrotas e empates. O resultado consolida a noção de que pares médios e altos, como  $QQ$ , tendem a apresentar equidade maior do que mãos não pareadas, como  $AK$ , embora ambas possam assumir valores estratégicos distintos dependendo do contexto (posição, número de jogadores, ranges adversários e tamanho efetivo dos stacks).

Para auxiliar nesta aula, é recomendável utilizar simuladores de equidade já disponíveis em sites especializados, como o PokerNews e outras plataformas reconhecidas pela comunidade do poker. Os cálculos de equidade pré-flop são extremamente complexos, pois levam em conta um grande número de fatores, como todas as combinações possíveis de cartas comunitárias, distribuição dos naipes, número de jogadores envolvidos, ranges adversários e possíveis empates. Por esse motivo, embora seja importante apresentar os fundamentos matemáticos da equidade em sala, a aplicação prática pode ser complementada com ferramentas computacionais que realizam milhões de simulações para estimar probabilidades com alto grau de precisão.

Nesses simuladores é possível comparar diretamente diferentes mãos iniciais, ajustando variáveis como quantidade de jogadores na mesa, estilos de jogo, ranges de abertura e cenários específicos de confronto. Assim, os estudantes podem observar em tempo real como a equidade de uma mão varia de acordo com o contexto em que está inserida. Essa experiência prática favorece a compreensão de que nenhuma mão é absolutamente vencedora em todos os cenários, e que a força de uma mão pré-flop depende tanto de sua constituição quanto das condições estratégicas do momento. Observe na figura um exemplo de como é a interface na calculadora do site do Pokernews.

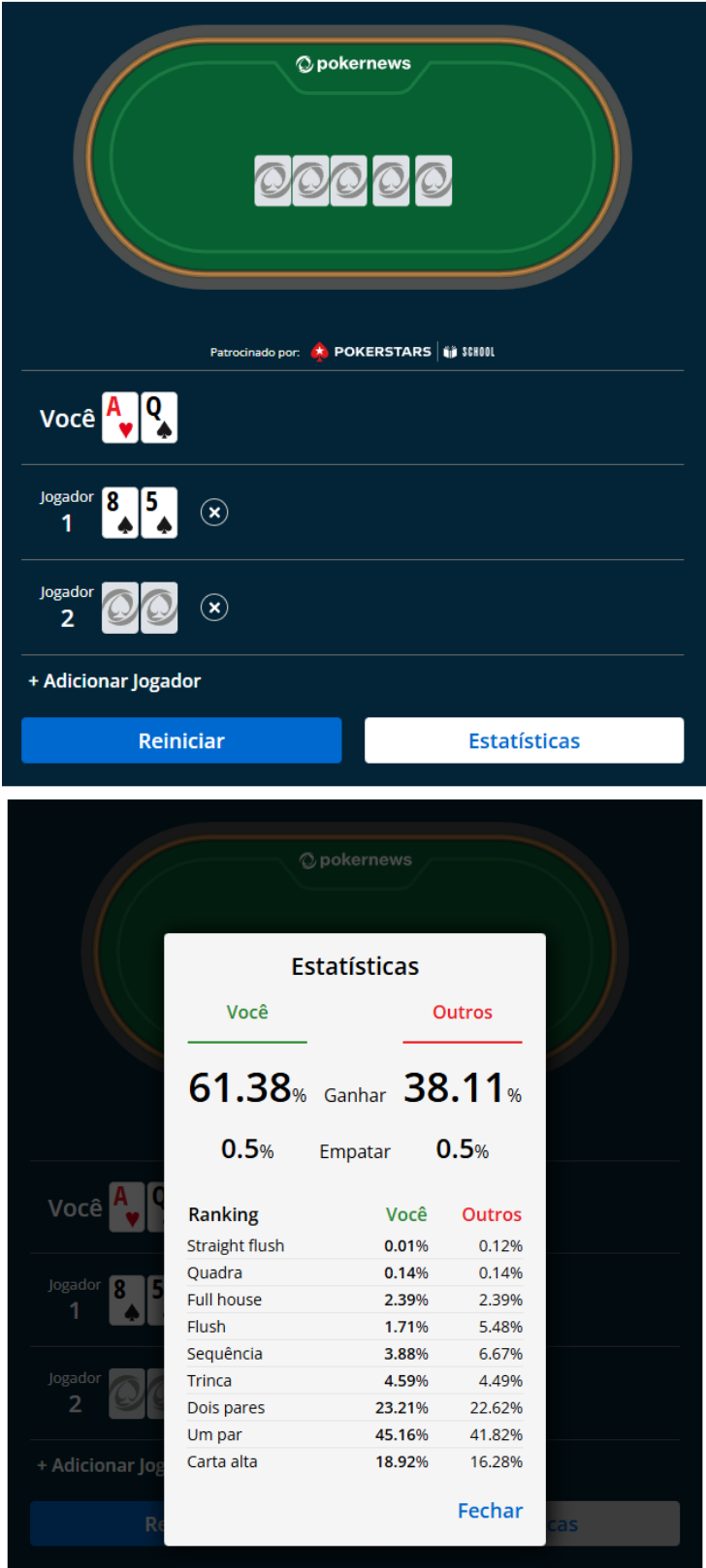
A análise das equidades pré-flop, combinada com os conceitos estudados nas aulas anteriores (espaço amostral, probabilidade, *pot odds* e valor esperado), fornece uma base quantitativa para a tomada de decisão no pré-flop, permitindo que o professor discuta com os estudantes não apenas quais mãos são “fortes” ou “fracas”, mas em que medida e sob quais condições essa classificação é matematicamente justificada.

### 3.11 Aula 11: Estatística no poker: performance e longo prazo

O objetivo desta aula é apresentar o uso da estatística para avaliar o desempenho no poker de forma racional, evitando conclusões baseadas exclusivamente em resultados imediatos. A proposta consiste em mostrar que ganhar uma mão não implica necessariamente ter tomado uma decisão correta, assim como perder não implica que a decisão tenha sido ruim. O foco central é aprender a analisar o desempenho com base em um grande número de decisões, e não em ocorrências isoladas.

Em contextos de jogos com variância elevada, como o poker, o resultado de

Figura 3.2: AQ offsuited contra 85 suited na Calculadora Pokernews



uma única mão é apenas uma amostra de um processo aleatório. Portanto, conclusões confiáveis só podem ser obtidas após um número suficientemente grande de observações. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o ganho associado a uma decisão e seja  $EV(X)$  o seu valor esperado, então o acompanhamento estatístico busca verificar se o desempenho real converge para o desempenho esperado ao longo do tempo. Esse fenômeno pode ser interpretado à luz da Lei dos Grandes Números: à medida que o número de decisões aumenta, a média observada tende a se aproximar do valor esperado.

Dessa forma, vencer repetidamente no curto prazo não garante que o jogador esteja tomando decisões corretas; do mesmo modo, uma sequência de perdas não implica necessariamente decisões erradas. O critério rigoroso para avaliar se um jogador está desempenhando bem é verificar se, ao longo de muitas situações, suas ações apresentam valor esperado positivo.

### Exemplo prático de acompanhamento estatístico

Considere um jogador que registra suas últimas 100 decisões de *call* no *turn* em situações em que precisava estimar se o valor esperado era positivo. Após análise técnica, concluiu-se que:

- em 62 das decisões, a probabilidade de vitória  $P(E)$  era superior à razão das *pot odds* exigidas, de modo que  $EV > 0$ ;
- em 38 das decisões, a probabilidade de vitória era inferior à razão das *pot odds*, de modo que  $EV < 0$ .

Suponha ainda que o jogador tenha obtido lucro financeiro nas 38 decisões incorretas e prejuízo financeiro nas 62 decisões corretas. Uma análise baseada apenas nos resultados imediatos poderia levar ao diagnóstico equivocado de que o desempenho foi negativo. Entretanto, sob interpretação estatística, o jogador apresentou taxa de decisões matematicamente corretas igual a

$$\frac{62}{100} = 62\%.$$

Se as decisões com  $EV > 0$  forem repetidas consistentemente ao longo de um grande número de mãos, a expectativa teórica é que o lucro acumulado seja positivo, independentemente da sequência momentânea de perdas. Este exemplo demonstra que estatística aplicada ao poker avalia a qualidade das decisões, e não o curto prazo financeiro.

### Implicações estratégicas

A análise estatística permite responder objetivamente às seguintes questões:

- As decisões tomadas ao longo do tempo apresentam  $EV > 0$  de forma consistente?
- A taxa de erro diminui com o passar das sessões de jogo?
- A tendência financeira converge para o valor esperado calculado?

O registro sistemático de decisões, aliado ao cálculo do valor esperado, fornece indicadores confiáveis de progresso estratégico. Conclui-se que medir desempenho no poker significa medir a qualidade das decisões. O objetivo estatístico não é vencer todas as mãos, mas tomar decisões lucrativas no longo prazo, consistentes com probabilidade, *pot odds*, valor esperado e análise de ranges.

Essa perspectiva reforça que a matemática constitui o referencial objetivo para o estudo estratégico do poker e prepara os estudantes para tópicos futuros, como análise de variância e gestão de banca.

### 3.12 Aula 12: Probabilidade em Torneios e Gestão de Banca

O objetivo desta aula é apresentar a aplicação da probabilidade no contexto de torneios de poker e relacioná-la à gestão de banca (*bankroll management*). A proposta consiste em demonstrar que o desempenho em torneios depende da tomada de decisão baseada em probabilidade, controle de risco e disciplina financeira, destacando o poker como esporte da mente, em contraste com jogos puramente aleatórios nos quais o resultado depende exclusivamente da sorte.

Em torneios de poker, cada competidor inicia com o mesmo número de fichas e, à medida que os *blinds* aumentam e jogadores são eliminados, decisões progressivamente mais arriscadas se tornam necessárias. Nesse formato, o objetivo não é vencer todas as mãos, mas maximizar a probabilidade de sobrevivência no torneio e alcançar fases remuneradas. Assim, mesmo jogadores altamente habilidosos vencem apenas uma pequena fração dos torneios que disputam, devido à variância inerente ao jogo; em contrapartida, podem ser lucrativos a longo prazo.

A estatística fornece o referencial adequado para avaliar o desempenho. Em vez de medir resultados imediatos, avalia-se o desempenho com base em tendências. Com o passar do tempo, o lucro acumulado tende a refletir a qualidade das decisões tomadas — e não a variância de curto prazo. Portanto, o critério rigoroso de avaliação não é o número de torneios vencidos, mas a consistência de decisões lucrativas ao longo de uma grande amostragem.

#### Gestão de banca (Bankroll management)

A gestão de banca estabelece quanto capital é necessário para suportar financeiramente a variância do jogo até que a expectativa matemática se manifeste. Seja  $B$  o

valor total da banca e  $C$  o custo de inscrição de um torneio (*buy-in*). O jogador está em situação de risco quando  $B$  e  $C$  são comparáveis. O princípio geral recomenda que

$$B > C,$$

devendo a razão  $B/C$  ser suficientemente grande para evitar *risco de ruína*.

### Risco de ruína

Denomina-se risco de ruína a probabilidade de a banca ser completamente perdida antes que a expectativa positiva ( $EV$ ) se realize. Sejam:

- $B$  — valor total da banca destinado a torneios;
- $C$  — custo de inscrição de um torneio;
- $p$  — probabilidade de premiação (probabilidade de terminar ITM — *in the money*);
- $q = 1 - p$  — probabilidade de não premiação.

Sob um modelo simplificado baseado no trabalho de Ferreira (2013), assume-se que o jogador ganha ou perde uma unidade da banca em cada torneio, e o risco de ruína é dado por

$$R = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{B}{C}} \quad \text{para } p > q.$$

### Exemplo prático de gestão de banca

Considere um jogador com banca reservada exclusivamente para torneios no valor de

$$B = 2\,000$$

e que participa de torneios com entrada

$$C = 20.$$

A razão é  $B/C = 100$  inscrições possíveis. Suponha que o jogador tenha taxa de premiação

$$p = 0,20 \quad \text{e} \quad q = 0,80.$$

Assim,

$$R = \left(\frac{0,80}{0,20}\right)^{100} = (4)^{100},$$

um valor extremamente elevado, indicando risco de ruína praticamente certo nesse cenário — mesmo que o jogador seja habilidoso. Isso mostra que, com taxa de premiação

baixa, a variância do formato torna inviável a participação nesses torneios com banca insuficiente.

Se o mesmo jogador compete em torneios cujo estilo reduz a variância e aumenta a taxa de premiação para

$$p = 0,35 \quad \text{e} \quad q = 0,65,$$

tem-se

$$R = \left( \frac{0,65}{0,35} \right)^{100} \approx (1,857)^{100},$$

ainda altíssimo, reforçando que a razão  $B/C = 100$  é insuficiente para o perfil do jogador diante da variância do torneio.

Agora, suponha que o jogador aumente a razão banca/custo para

$$B = 6\,000, \quad C = 20, \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{C} = 300.$$

Mantendo  $p = 0,35$  e  $q = 0,65$ :

$$R = \left( \frac{0,65}{0,35} \right)^{300},$$

valor extremamente menor, aproximando estatisticamente o risco de ruína de zero. Portanto, o jogador garante sustentação financeira até que a expectativa matemática acumulada de decisões positivas se manifeste.

Conclui-se que resultados isolados em torneios não determinam o desempenho. O jogador estatisticamente vencedor é aquele que:

- toma decisões com valor esperado positivo;
- mantém disciplina financeira capaz de suportar a variância;
- monitora o desempenho ao longo de uma amostragem grande.

A probabilidade em torneios e a gestão de banca, portanto, permitem que a habilidade supere a variância com o tempo, reforçando o poker como esporte da mente baseado em tomada de decisões lógicas, e não em sorte imediata.

### 3.13 Aula 13: Classificação de jogadores: perfil, probabilidade e decisão

O objetivo desta aula é apresentar um modelo matemático-estratégico para classificar jogadores de poker a partir de padrões de tomada de decisão observáveis. A proposta consiste em demonstrar que estilos de jogo influenciam diretamente a probabilidade de vitória no longo prazo e que compreender o perfil do oponente é uma ferramenta quantitativa para melhorar decisões, e não uma opinião subjetiva.

A aula inicia com a reflexão: “*Todos os jogadores tomam decisões da mesma forma?*” Com base nessa pergunta, introduz-se a ideia de que o comportamento estatístico de um jogador pode ser analisado por variáveis como frequência de participação em mãos, agressividade e disposição para desistir. Dessa forma, a classificação de jogadores constitui uma caracterização baseada em estatísticas de comportamento e não em resultados financeiros isolados.

O modelo clássico divide os jogadores em quatro estilos fundamentais, construídos pela combinação entre frequência de mãos jogadas (tight/loose) e agressividade (aggressive/passive):

A classificação estratégica tem impacto matemático direto: jogadores que entram em muitas mãos sem vantagem estatística tendem a apresentar valor esperado negativo ( $EV < 0$ ), enquanto jogadores que entram seletivamente e atacam os potes corretamente tendem a mostrar valor esperado positivo ( $EV > 0$ ). Assim, o perfil de um jogador pode ser interpretado como um conjunto de *tendências probabilísticas de decisão*.

A aula introduz, em seguida, dois indicadores quantitativos amplamente adotados na teoria moderna do poker:

VPIP = Voluntarily Put Money in the Pot, PFR = Pre-Flop Raise.

Com base nesses indicadores, formas numéricas de classificação podem ser estabelecidas. Por exemplo:

- VPIP baixo + PFR alto  $\Rightarrow$  Tight–Aggressive (TAG),
- VPIP alto + PFR alto  $\Rightarrow$  Loose–Aggressive (LAG),
- VPIP baixo + PFR baixo  $\Rightarrow$  Tight–Passive (TP),
- VPIP alto + PFR baixo  $\Rightarrow$  Loose–Passive (LP).

| Estilo           | VPIP  | PFR   | Característica                               |
|------------------|-------|-------|----------------------------------------------|
| Tight–Aggressive | Baixo | Alto  | Seleciona boas mãos e pressiona quando joga  |
| Loose–Aggressive | Alto  | Alto  | Joga muitas mãos e pressiona continuamente   |
| Tight–Passive    | Baixo | Baixo | Seleciona poucas mãos e tende a pagar demais |
| Loose–Passive    | Alto  | Baixo | Joga muitas mãos e evita apostar             |

A interpretação dos perfis também é dinâmica: um jogador pode transitar temporariamente entre estilos conforme posição na mesa, fase do torneio, tamanho do stack, nível técnico dos adversários e aspectos psicológicos. Portanto, perfis não são rótulos permanentes, mas distribuições de probabilidade referentes às ações do adversário.

### Exemplo prático: probabilidade de vitória com leitura de perfil

Considere uma situação de *heads-up* no pré-flop em que o jogador possui  $AKs$ . Se não houver leitura sobre o adversário, assume-se um range amplo e genérico  $R$ , de modo que a equidade estimada é aproximadamente

$$Eq(AKs; R) \approx 64\%.$$

Entretanto, suponha que os dados coletados indiquem que o adversário possui perfil *tight-aggressive* (TAG), com VPIP = 18% e PFR = 15%. Nessa situação, assume-se que o range de aumento é mais forte, por exemplo:

$$R_{TAG} = \{99+, ATs+, AJo+, KQs\}.$$

A equidade de  $AKs$  contra esse range mais restrito diminui:

$$Eq(AKs; R_{TAG}) \approx 47\%.$$

Por outro lado, suponha que o adversário apresente perfil *loose-aggressive* (LAG), com VPIP = 38% e PFR = 28%. O range atribuído é naturalmente mais amplo:

$$R_{LAG} = \{22+, Axs, AT+, KJ+, QJ, T9s, 98s, 87s\}.$$

A equidade de  $AKs$  contra esse range cresce novamente:

$$Eq(AKs; R_{LAG}) \approx 63\%.$$

O exemplo mostra que a probabilidade de vitória não depende apenas da força isolada da mão, mas do conjunto de mãos plausíveis que o adversário pode possuir. Assim, compreender o perfil do oponente permite adaptar decisões matematicamente sofisticadas em vez de avaliar a força das cartas de maneira absoluta.

Conclui-se que classificar jogadores auxilia diretamente nos cálculos de ranges, probabilidade condicional, *expected value* e frequência de blefes. A matemática do poker não se limita ao baralho, mas estende-se ao comportamento estratégico das pessoas, reforçando o caráter do poker como esporte da mente baseado em tomada de decisão racional e disciplinada.

### 3.14 Aula 14: Problemas clássicos e desafios matemáticos no poker

O objetivo desta aula é apresentar aos estudantes uma série de problemas clássicos relacionados ao poker cuja resolução exige aplicação integrada dos conhecimentos estudados ao longo do curso, incluindo combinatória, espaço amostral, probabilidade, equidade, valor esperado, análise de *ranges* e estatística. Pretende-se demonstrar que o poker constitui um ambiente rico para desafios conceituais e tomada de decisão fundamentada matematicamente.

Historicamente, problemas envolvendo poker tornaram-se comuns em pesquisas e livros de probabilidade, bem como em cursos de estatística, simulação e teoria da decisão. A popularidade desses problemas ocorre porque o poker combina cálculos exatos e raciocínio estratégico em condições de incerteza, favorecendo a construção de habilidades matemáticas avançadas.

Os desafios apresentados ao longo da aula são divididos em três categorias principais:

1. **Problemas de contagem e probabilidade pura:** envolvem cálculo direto da probabilidade de um evento ocorrer, como formar um *flush*, completar *straight*, ou obter *full house*. Exigem domínio de espaço amostral e métodos de contagem.
2. **Problemas de decisão com base em risco e retorno:** exigem comparar probabilidade de completar uma mão com a razão de risco e retorno (*pot odds*) e determinar se pagar, aumentar ou desistir é matematicamente justificável.
3. **Problemas estratégicos baseados em leitura de oponentes:** incluem situações em que a mão adversária é desconhecida e a decisão envolve análise de *ranges*, perfis de jogadores e probabilidade condicional.

Esses três blocos permitem que o aluno perceba que o objetivo da matemática aplicada ao poker não é prever cartas futuras, mas maximizar o valor esperado das decisões diante da incerteza.

Exemplos comuns utilizados na aula incluem:

- Qual é a probabilidade de completar um *flush* no *river* após ver o *flop* com quatro cartas do mesmo naipe?
- Com 12 *outs* no *turn*, diante de uma aposta que oferece razão de 5:1, pagar é correto?
- Com a mão *AK*, qual é a melhor decisão frente a um adversário identificado como *loose-aggressive* que declara *all-in* pré-flop?

Esses problemas exigem articulação de conhecimentos prévios e a construção de justificativas matemáticas formais. A aula é concluída reforçando que a finalidade do estudo matemático no poker é fornecer ferramentas para tomada de decisão racional e disciplinada, e não avaliar resultados isolados. A grande lição conceitual é que a qualidade da decisão deve ser julgada com base em probabilidade e valor esperado, e não no resultado imediato da mão.

### 3.15 Aula 15: Projeto final: Análise matemática de uma mão real

O objetivo desta aula é avaliar a aprendizagem dos estudantes por meio da análise individual de uma mão de poker, exigindo a aplicação integrada dos conteúdos estudados ao longo do curso: combinatória, probabilidade, equidade, *pot odds*, valor esperado, análise de ranges, estatística e perfil dos jogadores.

Cada estudante deve selecionar uma mão específica — preferencialmente uma mão que tenha jogado, presenciado ou assistido — e desenvolver uma análise matemática completa da tomada de decisão associada a ela. O foco avaliativo não recai sobre o resultado final da mão, mas sim sobre a qualidade da decisão tomada com base nas informações disponíveis no momento da jogada.

A atividade deve conter os seguintes elementos:

- Descrição da mão e das ações em cada rodada;
- Cartas iniciais do jogador e posição na mesa;
- Tamanho do pote e valores apostados ao longo da mão;
- Perfil dos adversários e possíveis ranges atribuídos;
- Identificação do momento decisivo para análise (turno crítico);
- Cálculo da equidade da mão em relação ao(s) range(s) adversário(s);
- Cálculo das *pot odds* e avaliação do valor esperado (*EV*);
- Justificativa da escolha tomada e comparação com alternativas possíveis.

O relatório deve concluir explicitando:

- se a decisão tomada foi matematicamente correta;
- qual seria a decisão com maior valor esperado, caso seja diferente da tomada;
- como o perfil do(s) adversário(s) influenciou a análise matemática;
- se houve impacto de fatores emocionais no processo decisório.

O estudante pode utilizar o formulário anexado no apêndice ??.

## Exemplo de Análise Completa de uma Mão de Poker

A seguir apresenta-se um modelo de análise matemática de uma mão real para auxiliar os estudantes na elaboração de seus relatórios.

**Situação:** Torneio de Texas Hold'em. Blinds 200/400. O jogador está no botão com  $AK_s$ . Stack efetivo: 12.500 fichas.

**Pré-flop:** Jogador em posição intermediária (perfil TAG) aumenta para 1.200 fichas. Jogadores seguintes foldam. O aluno paga no botão. Blinds foldam.

**Flop:**  $K\heartsuit 9\heartsuit 4\clubsuit$  — pote = 3.200 fichas. O adversário aposta 1.600 fichas. O aluno paga.

**Turn:**  $2\spadesuit$  — pote = 6.400 fichas. O adversário aposta 4.800 fichas.

### 1. Análise de ranges

Com base no perfil TAG do adversário, atribui-se o seguinte range ao aumento pré-flop:

$$R = \{88+, ATs+, AJo+, KQs\}.$$

### 2. Equidade aproximada

Usando simulador de equidade ou tabela de referência:

$$\text{Eq}(AK_s; R \mid K94) \approx 58\%.$$

Portanto,  $AK_s$  está à frente da maior parte do range adversário nesse bordo.

### 3. Pot odds

O adversário aposta 4.800 em um pote de 6.400:

$$\text{pot odds} = \frac{4.800}{6.400 + 4.800} \approx 42,8\%.$$

Como a equidade da mão (58%) é superior às *pot odds* exigidas, a decisão de pagar apresenta  $EV > 0$ .

### 4. Valor esperado

Seja  $x = 4.800$  fichas a serem pagas e  $P = 6.400 + 4.800 = 11.200$  o valor total do pote:

$$EV(\text{call}) = 0,58 \cdot 11.200 - 0,42 \cdot 4.800 = 6.496 - 2.016 = 4.480.$$

$$EV(\text{call}) > 0.$$

## 5. Decisão

A decisão correta matematicamente é **pagar**. Folding tem  $EV = 0$ . Aumentar poderia ter  $EV$  maior caso a fold equity fosse conhecida, mas não pode ser afirmado com segurança devido ao perfil TAG do adversário.

## 6. Conclusão

A jogada correta no turn foi **pagar**, pois:

- a equidade da mão (58%) é superior às *pot odds* do pote (42,8%);
- o adversário possui um range forte, mas grande parte das mãos do range perde para  $AK_s$  no bordo analisado;
- não há evidência matemática de que o blefe teria fold equity suficiente para justificar um aumento.

## 7. Reflexão

Ainda que a mão possa ser perdida eventualmente, a decisão tomada é lucrativa no longo prazo. Esse é o elemento essencial da avaliação: medir a qualidade da decisão e não o resultado isolado.

A finalidade desta avaliação é consolidar o entendimento de que a matemática aplicada ao poker não busca prever o resultado final de uma mão isolada, mas orientar decisões racionais diante da incerteza. Dessa forma, a aprendizagem se manifesta na coerência das escolhas e na fundamentação matemática utilizada para justificá-las.

A eletiva Probabilidade na Mesa apresenta o poker Texas Hold'em como um ambiente matemático rico para o estudo de probabilidade, análise Combinatória, estatística e tomada de decisão baseada em dados. Ao longo do percurso formativo, os estudantes exploram conteúdos como espaço amostral, métodos de contagem, probabilidades simples e condicionais, odds, valor esperado, equidade entre mãos e análise estatística de desempenho, sempre contextualizados em situações reais do jogo.

As práticas pedagógicas privilegiam experimentações, simulações, resolução de problemas autênticos, análise de cenários e projetos finais, promovendo um aprendizado investigativo e reflexivo. Dinâmicas iniciais, cálculos de probabilidades em etapas sucessivas do jogo, estudos de valor esperado e interpretação de resultados de longo prazo permitem aos alunos compreenderem a diferença entre variabilidade imediata e expectativa matemática, aspecto fundamental para a consolidação do pensamento probabilístico.

Além dos conteúdos formais, a eletiva favorece o desenvolvimento de competências socioemocionais e cognitivas, como avaliação de riscos, argumentação baseada em evidências, autocontrole diante da incerteza e tomada de decisões racionais. O poker mostra-se especialmente potente para evidenciar a natureza estocástica de muitos fenômenos, aproximando a Matemática do cotidiano dos estudantes e desconstruindo a ideia de que probabilidades se restringem a exercícios abstratos.

Dessa forma, o jogo configura-se como uma ferramenta didática eficaz para promover aprendizagem significativa, ao integrar conceitos matemáticos a contextos concretos, estimular o protagonismo discente e fortalecer a capacidade de modelar situações reais por meio do raciocínio quantitativo. A proposta reafirma que jogos de estratégia, quando mediados pedagogicamente, ampliam as possibilidades do ensino de Matemática, favorecendo uma formação crítica, autônoma e orientada por dados

## Referências Bibliográficas

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 3 jun. 2025.

FERREIRA, A. M. *A Ruína do Jogador: Uma Análise para o Ensino Médio*. Mestrado Profissional, 2013. Trabalho de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

PINHEIRO, C. *O problema de Monty Hall: probabilidade condicional*. 2021. MIT Technology Review Brasil. Disponível em: <https://mittechreview.com.br/o-problema-de-monty-hall/>. Acesso em: 26 ago. 2025.

SANTOS, K. J. C. *Jogos de Estratégia como Ferramenta Didática: Uma Proposta de Disciplinas Eletivas de Matemática com Xadrez e Poker*. 120 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UFRN, Natal, 2026. PROFMAT.