



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL**

LEONARDO BRENO DA SILVA MEDEIROS

**PRODUTO EDUCACIONAL: GUIA PRÁTICO DE COMO CALCULAR
AS RAÍZES DE POLINÔMIOS ATRAVÉS DAS INTRIGANTES
MATRIZES CIRCULANTES**

CAMPINA GRANDE

2026

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M488r Medeiros, Leonardo Breno da Silva.

Guia prático de como calcular as raízes de polinômios através das intrigantes matrizes circulantes [manuscrito] / Leonardo Breno da Silva Medeiros. - 2026.

19 f.

Digitado.

Produto Educacional apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UEPB

"Orientação : Prof. Dr. Francisco Siberio Bezerra Albuquerque, Departamento de Matemática - CCT".

1. Autovalores. 2. Polinômios. 3. Matrizes Circulantes. I. Título

21. ed. CDD 512

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional apresenta um guia prático destinado a apoiar estudantes e professores no entendimento do uso das matrizes circulantes como método para a resolução de equações polinomiais. Tradicionalmente, fórmulas e técnicas algébricas para encontrar raízes de polinômios são vistas como procedimentos complexos, repletos de manipulações simbólicas pouco intuitivas. O material busca reverter essa percepção, mostrando que as matrizes circulantes oferecem uma abordagem clara, estruturada e alinhada ao pensamento da álgebra. Por meio de explicações acessíveis, exemplos resolvidos e atividades para serem desenvolvidas, o guia demonstra como associar um polinômio a uma matriz circulante e como seus autovalores revelam, de forma natural, as soluções da equação original. O produto promove uma aprendizagem mais significativa, aproximando o estudo dos polinômios de aplicações contemporâneas e contribuindo para o desenvolvimento de competências Matemáticas essenciais no contexto educacional atual.

Palavras-chave: autovalores; polinômios; matrizes circulantes.

Matrizes Circulantes e sua Importância na Resolução de Equações Polinomiais

As matrizes circulantes são um tipo de matriz, que não é muito usual, porém ela se destaca pela sua organização simétrica e da forma que seus elementos são dispostos. A principal ideia já está vinculada a seu nome: cada linha de uma matriz circulante é formada a partir da linha anterior, pois os elementos tem essa movimento circular. Para ficar melhor explicado, os elementos “giram” dentro da matriz, seguindo um mesmo padrão. Por exemplo, se pegarmos uma matriz com a primeira linha (a, b, c) , a próxima linha será (c, a, b) e a terceira linha (b, c, a) . Essa estrutura simples resulta em várias possibilidades matemáticas que serão muito ricas.

A beleza das matrizes circulantes está no fato de que elas carregam consigo uma simetria cíclica, que pode ser vista tanto num contexto da álgebra quanto da geometria. Essa simetria permite que elas sejam utilizadas como métodos auxiliares para a álgebra, como a análise de autovalores e autovetores. Em particular, quando aplicamos a Transformada Discreta de Fourier, notamos que as matrizes circulantes conseguimos deixá-las em uma versão mais simples onde seus movimentos essenciais ficam completamente visíveis.

É justamente esse aspecto que torna as matrizes circulantes tão interessantes na resolução de equações polinomiais. Solucionar um polinômio significa encontrar os valores numéricos que fazem com que ele se anule, podendo ser conhecido também como processo de encontrar as raízes do polinômio. Nos métodos tradicionais, isso normalmente costuma ter cálculos demorados ou fórmulas de difícil compreensão que podem parecer “vindos do nada” para quem está tentando aprender. Já com as matrizes circulantes, oferecemos uma nova perspectiva: em vez de ir de cara ao polinômio, geramos uma matriz circulante com vetores que são seus coeficientes. Essa matriz representa, de forma implícita, a estrutura do próprio polinômio. Quando buscamos os autovalores dessa matriz, identificamos naturalmente as soluções da equação polinomial original.

Essa mudança de ponto de vista traz várias vantagens. De fato, o processo se torna mais transparente e com fundamentação, pois as relações entre os coeficientes não possuem mais a aparência de truques algébricos e se tornam explícitas pela simetria da matriz. Ainda é importante citarmos a ideia de unificação, as equações polinomiais de grau 2, 3 e 4, que historicamente receberam métodos diversificados em sala de aula, passam a ser solucionados pelo mesmo método.

Desse modo, as matrizes circulantes não se restringem a, simplesmente, um conceito abstrato e ligado apenas à pesquisa teórica. Elas funcionam como uma ponte pedagógica

entre a álgebra polinomial clássica e a álgebra moderna. Trazem beleza ao tema, revelam relações antes ocultas e tornam a aprendizagem mais significativa. Isso nos traz que a Matemática pode ser também intuitiva e elegante, guiando o aluno a compreender o porquê dos métodos.

Por fim, a proposta desse produto educacional, um guia prático que ensina como aplicar as matrizes circulantes na resolução de equações polinomiais, de forma objetiva, simples e didática. O material busca aproximar o estudante dessa nova óptica, incentivando o despertar matemático, a clareza de raciocínio e a autonomia no saber/aprender. Assim, o estudo das equações polinomiais passa a revelar melhor a sua estrutura interna, abrindo caminho para um pensamento mais lógico e autônomo em matemática.

Resolvendo Polinômios com o Auxílio das Matrizes Circulantes

Mostraremos que determinar as raízes de polinômios de grau $n < 5$ pode ser reduzido à resolução de um sistema de equações. Isso ocorre porque, dado um polinômio qualquer, podemos considerá-lo como sendo o polinômio característico de uma matriz circulante de ordem n . Essa abordagem é válida pois conhecemos todas as raízes do polinômio característico de qualquer matriz circulante, e, a partir da igualdade entre os polinômios, obtemos o sistema desejado.

De forma mais específica, o procedimento pode ser organizado em etapas: considere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

um polinômio de grau $n < 5$ no qual queremos determinar as raízes. Assim:

Primeiro passo: Remoção do coeficiente do termo de grau $n - 1$ e simplificação.

Realizaremos uma substituição de variável adotando $x = y + \alpha$, escolhendo um valor adequado para α de forma que, no polinômio $p(y)$, o coeficiente do termo y^{n-1} se anule.

Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{p}(y) &= a_n(y + \alpha)^n + a_{n-1}(y + \alpha)^{n-1} + \dots + a_1(y + \alpha) + a_0 \\ &= a_n \left(y^n + ny^{n-1}\alpha + \dots + ny\alpha^{n-1} + \alpha^n \right) \\ &\quad + a_{n-1} \left(y^{n-1} + (n-1)y^{n-2}\alpha + \dots + (n-1)y\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} \right) \\ &\quad + \dots + a_1(y + \alpha) + a_0 \\ &= a_n y^n + (a_n n\alpha + a_{n-1})y^{n-1} + \dots + (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0). \end{aligned}$$

Como desejamos que o coeficiente do termo y^{n-1} seja zero, impomos a seguinte condição:

$$a_n n \alpha + a_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{a_{n-1}}{a_n n}.$$

Assim, posicionando

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}, \quad (1)$$

teremos

$$\tilde{p}(y) = a_n y^n + b_n y^{n-2} + \dots + b_1 y + b_0.$$

Perceba que o polinômio $p(x)$ não possui as mesmas raízes que $p(y)$, porém há uma correspondência biunívoca entre as raízes desses dois polinômios, a saber $x \mapsto x + \frac{a_{n-1}}{na_n}$.

Como nosso objetivo é resolver a equação $p(y)$, podemos reescrever o polinômio p de modo que o coeficiente do termo de maior grau seja igual a 1. Para isso, basta dividir toda a expressão por a_n (que, por hipótese, é diferente de zero). Assim, passamos a trabalhar com o polinômio na forma

$$p(y) = y^n + c_{n-2} y^{n-2} + \dots + c_1 y + c_0,$$

onde, $c_i = \frac{b_i}{a_n}$, $i = 0, \dots, n-2$.

Segundo Passo: Representação matricial e determinação do polinômio característico.

Consideramos um vetor desconhecido v , cuja primeira coordenada é zero. A partir desse vetor, construímos uma matriz circulante $C(v)$ e, em seguida, determinamos o polinômio característico $p_C(y) = \det(yI - C)$.

Terceiro passo: Igualdade de polinômios.

Estabelecemos a condição de que $p_C(y) = p(y)$, o que gera um sistema de equações em que as incógnitas são os coeficientes da matriz circulante C (ou seja, os elementos do vetor v). Ao final deste passo, determinamos os coeficientes do polinômio q que está associado à matriz circulante C em questão. A ideia central dos três primeiros passos é que, utilizando a igualdade $p_C(y) = p(y)$, possamos encontrar as raízes de $p(y)$ a partir dos resultados obtidos para as matrizes circulantes $p_C(y)$.

Observação: Na resolução dos sistemas, serão determinados múltiplos valores para os coeficientes da matriz circulante, cuja função característica coincide com o polinômio associado a y . Para a resolução dos exemplos apresentados, adotaremos uma seleção particular des-

ses coeficientes, sem prejuízo da generalidade do resultado, uma vez que escolhas alternativas apenas promoverão uma permutação nas soluções obtidas.

Quarto passo: Determinando as raízes de $p(y)$

Tomemos que todos os autovalores da matriz circulante C (que correspondem às raízes do polinômio característico $p_C(y)$) são dados pelos valores de $q(\lambda)$, onde λ representa os autovalores da matriz circulante C_n , sendo n o grau de p , e q é o polinômio relacionado a $C(v)$. A partir dessa relação, é possível determinar as raízes de $p(y)$.

Quinto passo: Determinando as raízes de $p(x)$.

Primeiro determinamos as raízes do polinômio $p(y)$. Em seguida, inserimos esses valores na fórmula (1) correspondente à mudança de variável e, assim, obtemos as raízes de $p(x)$.

Aplicação do Método para Polinômios de Grau 2

Empregando o método apresentado no início da seção, buscaremos soluções para polinômios do grau 2.

Primeiro passo: Dado o polinômio quadrático $p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, como $a_2 \neq 0$ por definição, é possível expressá-lo da seguinte forma:

$$\tilde{p}(x) = a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} \right) = a_2 p(x),$$

Logo, as raízes de $\tilde{p}$ são as mesmas raízes de p . Assim sendo, com $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$, $\beta = \frac{a_0}{a_2}$ dessa forma escrevemos

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta,$$

ademais, efetuando a substituição de variáveis $x = y - \frac{\alpha}{2}$, temos

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(y - \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \alpha \left(y - \frac{\alpha}{2} \right) + \beta \\ &= y^2 - \alpha y + \frac{\alpha^2}{4} + \alpha y - \frac{\alpha^2}{2} + \beta \\ &= y^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4}. \end{aligned}$$

Segundo passo: Tomemos agora a matriz circulante $C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ e consideremos seu polinômio característico.

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b \\ -b & y \end{pmatrix} = y^2 - b^2.$$

Terceiro passo: Igualamos $p_C(y)$ a $p(y)$, temos:

$$y^2 - b^2 = y^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \Rightarrow -b^2 = \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}}.$$

Para simplificar, vamos assumir

$$b = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$$

Definido b , a matriz circulante

$$C = C(0, b) = C \left(0, \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \right),$$

fica inteiramente especificada, e seu polinômio característico $p_C(y)$ será exatamente $p(y)$.

Quarto passo: Relacionado à matriz C , temos o polinômio $q(y) = by = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}y$.

Sabemos então que, os autovalores de C (determinados pelas raízes de $p_C(y)$) são dados por $q(\lambda)$, sendo λ os autovalores da matriz circulante

$$C_2 = C(0, 1).$$

Note que

$$\det(\lambda I - C(0, 1)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Dessa forma, os autovalores da matriz C são representados por

$$q(-1) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = y_1 \quad \text{e} \quad q(1) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = y_2.$$

Quinto passo: Considerando a substituição da variável $x = y - \frac{\alpha}{2}$, logo

$$x_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$$

Trabalharemos agora um exemplo pra ilustrar melhor a teoria

Exemplo .1. *Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 10$.*

Solução: A aplicação do método das matrizes circulantes a polinômios de grau 2 tem caráter essencialmente ilustrativo. Isso porque as equações quadráticas já possuem uma fórmula resolutive simples e amplamente conhecida, tornando desnecessário recorrer a técnicas mais estruturadas para encontrar suas raízes.

No entanto, utilizar o método nesse contexto serve para evidenciar sua organização, clareza e eficiência, permitindo compreender sua mecânica sem a complexidade envolvida em polinômios de grau superior.

Realizando a substituição de variável $x = y - \frac{(-6)}{2} = y + 3$, vamos ter

$$p(y) = (y + 3)^2 - 6(y + 3) + 10 = y^2 + 1.$$

Seja $C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ a matriz circulante correspondente a $p(y)$, e definamos

$$q(y) = by,$$

como polinômio vinculado a C .

Calculando o polinômio característico da matriz C , encontramos

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b \\ -b & y \end{pmatrix} = y^2 - b^2.$$

Fazendo $p(y) = p_C(y)$, obtemos

$$b^2 = -1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Por conveniência, adotaremos $b = i$.

Assim a matriz circulante $C = C(0, i)$ é tal que seu polinômio característico é igual ao polinômio dado. Consideremos $q(y) = by = iy$.

Como sabemos, as raízes quadradas da unidade, tem a forma $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, segue que $q(1)$ e $q(-1)$ são as raízes de $p_C(y) = p(y)$. Portanto as raízes de $p(y) = y^2 + 1$ são $y = i$ e $y = -i$.

Considerando a substituição da variável $x = y + 3$, as soluções de $p(x) = x^2 - 6x + 10$, são:

$$x_1 = y_1 + 3 = 3 + i$$

e

$$x_2 = y_2 + 3 = 3 - i.$$

Aplicação do Método para Polinômios de Grau 3

A seguir, adotaremos uma metodologia semelhante à utilizada para o caso dos polinômios de grau 3.

Primeiro passo: Considere $\tilde{p}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, um polinômio qualquer de grau 3. Como o coeficiente $a_3 \neq 0$, pela definição de polinômio cúbico, podemos expressá-lo $\tilde{p}(x) = a_3p(x)$, em que $p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, com

$$\alpha = \frac{a_2}{a_3}, \quad \beta = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{a_0}{a_3},$$

assim, as raízes de $\tilde{p}(x)$ coincidem com as de $p(x)$. Ademais, ao realizar a substituição de variável $x = y - \frac{\alpha}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(y - \frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha \left(y - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \beta \left(y - \frac{\alpha}{3}\right) + \gamma \\ &= y^3 - 3y^2 \left(\frac{\alpha}{3}\right) + 3y \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left[y^2 - \frac{2y\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{9}\right] \alpha + \beta y - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma \\ &= y^3 + \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{2\alpha^2}{3} + \beta\right) y + \left(-\frac{\alpha^3}{27} + \frac{\alpha^3}{9} - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma\right) \\ &= y^3 + \frac{3\beta - \alpha^2}{3} y + \frac{27\gamma - 9\alpha\beta + 2\alpha^3}{27} \\ &= y^3 + \tilde{\beta}y + \tilde{\gamma}, \end{aligned}$$

$$\text{com } \tilde{\beta} = \frac{3\beta - \alpha^2}{3} \text{ e } \tilde{\gamma} = \frac{27\gamma - 9\alpha\beta + 2\alpha^3}{27}.$$

Segundo passo: Considere $p(y)$ associado a uma matriz circulante $C = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$,

sendo $q(y) = by + cy^2$ o polinômio correspondente a C . Ao determinar o polinômio característico de C em termos de y , encontramos:

$$P_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{pmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

Terceiro passo: Da relação $P_C(y) = p(y)$, concluímos

$$\begin{cases} -3bc = \tilde{\beta} \\ -b^3 - c^3 = \tilde{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = -\frac{\tilde{\beta}}{3} \\ b^3 + c^3 = -\tilde{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = -\frac{\tilde{\beta}^3}{3} \\ b^3 + c^3 = -\tilde{\gamma} \end{cases}.$$

Pelas relações de Girard, que estabelecem vínculos entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, nota-se que b^3 e c^3 satisfazem uma equação do segundo grau em t .

$$t^2 + \tilde{\gamma}t - \frac{\tilde{\beta}^3}{27} = 0,$$

dessa forma, consegue-se resolver a equação mencionada e determinar as soluções.

$$t_1 = b^3 = \frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}$$

e, sem restringir a generalidade, assumiremos

$$b = \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}.$$

Tomando $bc = -\frac{\tilde{\beta}}{3}$, temos que

$$c = \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}.$$

Uma vez obtidos os valores de b e c , é possível estabelecer o polinômio q correspondente à matriz C .

$$q(y) = \left(\sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \right) y + \left(\sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \right) y^2.$$

Quarto passo: Conforme o Teorema (3.1), os autovalores da matriz C (que são as soluções da equação característica $P_C(y)$) correspondem aos valores da função $q(\lambda)$, onde λ representa os autovalores da matriz circulante $C_3 = C(0, 0, 1)$, ou seja, as raízes cúbicas da unidade, daí $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} y_1 &= q(1) = \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}}, \\ y_2 &= q\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \\ y_3 &= q\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{\frac{-\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{4\tilde{\beta}^3}{27}}}{2}} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Quinto passo: A fim de determinar as soluções para a variável x , realizamos a troca de variáveis

$$x = y - \frac{\alpha}{3} \quad \text{donde} \quad x_i = y_i - \frac{\alpha}{3} \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Aplicaremos o método ao seguinte exemplo:

Exemplo .2. Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 - 6x - 2$.

Solução: A impossibilidade de resolver o polinômio $p(x)$, pelos métodos tradicionais

decorre do fato de que ele não apresenta características que permitam a aplicação direta das técnicas mais tradicionais. A primeira tentativa natural seria o Teorema das Raízes Racionais, porém, ao testar todos os divisores possíveis do termo constante, percebe-se que nenhuma dessas opções satisfaz a equação, descartando a existência de raízes racionais.

Em seguida, poderíamos recorrer às Relações de Girard para tentar identificar algum padrão nos coeficientes que facilite uma fatoração algébrica. Entretanto, embora essas relações descrevam soma e produto das raízes, elas não oferecem um caminho claro para decompor o polinômio em fatores de menor grau. Assim, o polinômio permanece irreduzível por inspeção algébrica simples.

Outro caminho clássico é o método de Briot–Ruffini, útil quando já se conhece uma raiz exata para iniciar o processo. Como o polinômio não possui raízes racionais identificáveis, não há como iniciar a divisão sintética, e o procedimento torna-se inviável. O método de Cardano, embora geral para cúbicos, envolve expressões complexas que, neste caso, conduzem à chamada "caso irreduzível", onde surgem números complexos intermediários, mesmo quando as raízes finais são reais.

Diante disso, seguiremos o procedimento indicado pelo algoritmo mencionado anteriormente.

Realizando a substituição de variável $x = y - \frac{(-6)}{3} = y + 2$, vamos ter

$$p(y) = (y + 2)^3 - 6(y + 2)^2 - 6(y + 2) - 2 = y^3 - 18y - 30.$$

Seja $C = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ a matriz circulante correspondente a $p(y)$, e definamos

$$q(y) = by + cy^2,$$

como o polinômio vinculado a C .

Calculando o polinômio característico da matriz C , encontramos

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{pmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

Impondo que $p(y) = p_C(y)$, chegamos ao sistema.

$$\begin{cases} -3bc = -18 \\ -b^3 - c^3 = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = 6 \\ b^3 + c^3 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 c^3 = 216 \\ b^3 + c^3 = 30 \end{cases}$$

Dado que b^3 e c^3 satisfazem a equação polinomial $t^2 - 30t + 216 = 0$, temos as raízes $t_1 = 12$ e $t_2 = 18$. Logo, ao definir $t_1 = b^3$, obtemos $b = \sqrt[3]{12}$, dessa forma $bc = 6$, e $c = \sqrt[3]{18}$. Assim, temos $q(y) = by + cy^2 = \sqrt[3]{12}y + \sqrt[3]{18}y^2$.

Sabe-se que as raízes cúbicas da unidade são representadas por

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

logo, resulta que $q(\lambda_1), q(\lambda_2), q(\lambda_3)$ correspondem às raízes de $p_C(y) = p(y)$, o que implica que

$$\begin{aligned} y_1 &= q(\lambda_1) = \sqrt[3]{12}(1) + \sqrt[3]{18}(1)^2 = \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}, \\ y_2 &= q(\lambda_2) = \sqrt[3]{12} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt[3]{18} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) + i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) \right], \\ y_3 &= q(\lambda_3) = \sqrt[3]{12} \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt[3]{18} \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) - i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) \right]. \end{aligned}$$

Retomando a mudança de variável $x = y + 2$, as soluções de

$$p(x) = x^3 - 6x^2 - 6x - 2$$

são

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 2 = 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}, \\ x_2 &= y_2 + 2 = \frac{1}{2} \left[\left(4 - \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) + i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) \right], \\ x_3 &= y_3 + 2 = \frac{1}{2} \left[\left(4 - \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) - i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicação do Método para Polinômios de Grau 4

Por fim, examinaremos dos polinômios de grau 4. Sabemos que, ao procurar raízes de polinômios, é possível normalizá-los dividindo pelo coeficiente do termo dominante, resultando em um polinômio mônico. Assim, basta considerar

$$p(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Embora a explicação a seguir seja mais detalhada e dividida em mais etapas, ela segue a mesma lógica aplicada nos casos anteriores.

Primeiro passo: Realizando a substituição de variável $x = y - \frac{\alpha}{4}$, chegamos ao polinômio

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(y - \frac{\alpha}{4}\right)^4 + \alpha \left(y - \frac{\alpha}{4}\right)^3 + \beta \left(y - \frac{\alpha}{4}\right)^2 + \gamma \left(y - \frac{\alpha}{4}\right) + \delta \\ &= y^4 - 4y^3 \left(\frac{\alpha}{4}\right) + 6y^2 \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 4y \left(\frac{\alpha}{4}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^4 \\ &\quad + \alpha \left[y^3 - 3y^2 \left(\frac{\alpha}{4}\right) + 3y \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{4}\right)^3 \right] + \beta \left[y^2 - 2y \left(\frac{\alpha}{4}\right) + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \right] \\ &\quad + \gamma \left(y - \frac{\alpha}{4}\right) + \delta \\ &= y^4 + \left[\beta - \frac{3\alpha^2}{8} \right] y^2 + \left[\frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma \right] y + \left[\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta \right] \\ &= y^4 + \left[\frac{8\beta - 3\alpha^2}{8} \right] y^2 + \left[\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{8} \right] y + \left[\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma + 256\delta}{256} \right] \\ &= y^4 + \tilde{\beta}y^2 + \tilde{\gamma}y + \tilde{\delta}, \end{aligned}$$

onde

$$\beta' = \frac{8\beta - 3\alpha^2}{8}, \quad \gamma' = \frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{8}, \quad \delta' = \frac{-3\alpha^4 - 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma + 256\delta}{256}.$$

Vamos considerar que β', γ' e δ' não se anulam simultaneamente, para evitar o caso trivial em que $p(y) = y^4$.

Segundo passo: Segundo o mesmo raciocínio dos casos anteriores, vamos relacionar

$p(y)$ a uma matriz circulante $C = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{pmatrix}$ e a

$$q(y) = by + cy^2 + dy^3,$$

que é o polinômio correspondente a C . O polinômio característico de C é expresso por

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b & -c & -d \\ -d & y & -b & -c \\ -c & -d & y & -b \\ -b & -c & -d & y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$= y^4 + (4bd + 2c^2)y^2 - 2(b^2 + d^2)y + (c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d - 4b^2d^2).$$

Terceiro passo: Quando se igualam as expressões polinomiais $p(y)$ e $p_C(y)$, resulta

$$\begin{cases} 4bd + 2c^2 = -\tilde{\beta} \\ 4c(b^2 + d^2) = -\tilde{\gamma} \\ c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 = \tilde{\delta} \end{cases} \quad (3)$$

Observe que, se $c = 0$, e, portanto, a equação $p(y) = y^4 + \tilde{\beta}y^2 + \tilde{\delta}$, se torna biquadrada. Nesse caso, ela pode ser simplificada a uma equação quadrática através da substituição $z = y^2$, resolvendo-a, assim, com o método para equações de grau 2.

Agora, assumindo que $c \neq 0$, observe que é possível reescrever as duas primeiras equações de (3) expressando bd e $b^2 + d^2$ em termos de c ,

$$bd = \frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4},$$

e

$$b^2 + d^2 = \frac{-\tilde{\gamma}}{4c},$$

em seguida, reformular a terceira linha em termos de c , da forma abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} &= c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 = c^4 - (b^4 + d^4) - 4bc^2d + 2b^2d^2 \\ &= c^4 - [(b^2 + d^2)^2 - 2b^2d^2] - 4(bd)c^2 + 2b^2d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^4 - (b^2 + d^2)^2 + 4(bd)c^2 + 4(bd)^2 \\
&= c^4 - \left(\frac{-\tilde{\gamma}}{4c}\right)^2 + 4\left(\frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4}\right)c^2 + 4\left(\frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4}\right)^2 \\
&= c^4 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{16c^2} + (\tilde{\beta} + 2c^2)c^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\beta}c^2 + 4c^4}{4}\right) \\
&= c^4 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{16c^2} + \tilde{\beta}c^2 + 2c^4 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4} + \tilde{\beta}c^2 + c^4 \\
&= 4c^4 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{16c^2} + 2\tilde{\beta}c^2 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}.
\end{aligned}$$

Ao multiplicar os dois lados da primeira e da última igualdade da expressão acima por $\frac{c^2}{4}$, obtemos

$$\frac{\delta c^2}{4} = c^6 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} + \frac{\tilde{\beta}c^4}{2} + \frac{\tilde{\beta}^2 c^2}{16} \Rightarrow c^6 + \frac{\tilde{\beta}c^4}{2} + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 - 4\delta}{16}\right)c^2 - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} = 0.$$

Mediante a transformação $t = c^2$, deduzimos a seguinte equação de terceiro grau em t ,

$$t^3 + \frac{\tilde{\beta}}{2}t^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 - 4\tilde{\gamma}}{16}\right)t - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} = 0.$$

Assim, o sistema (3) pode ser reescrito como o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
bd = \frac{-\tilde{\beta} - 2c^2}{4} \\
b^2 + d^2 = -\frac{\tilde{\gamma}}{4c} \\
t = c^2 \\
t^3 + \frac{\tilde{\beta}}{2}t^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}^2 - 4\tilde{\gamma}}{16}\right)t - \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} = 0
\end{cases} \quad (4)$$

Ao solucionarmos a última equação desse sistema, encontraremos um valor para t e, como resultado, para c . Substituindo esse valor nas duas primeiras linhas, determinamos os valores de bd (o que nos permite calcular $b^2 d^2 \Rightarrow b^2 + d^2$).

Dessa forma, é possível resolver a equação $s^2 - (b^2 + d^2)s + (b^2 d^2) = 0$, obtendo os valores de b^2 e d^2 , o que nos permite calcular b e d . Com os valores de b, c, d definidos, daí $q(y) = by + cy^2 + dy^3$ fica completamente estabelecida.

Quarto passo: De acordo com o Teorema (3.1), os autovalores de C (soluções da equação $p_C(y)$) são dados por $q(\lambda)$, onde λ percorre os autovalores da matriz circulares $C_4 = C(0, 0, 0, 1)$ que são exatamente as raízes complexas de quarta ordem da unidade.

Dessa forma, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -i$ Portanto, ao inserir esses valores em $q(y)$, determinaremos as soluções de $p(y)$

Desse modo,

$$\begin{cases} q(1) = b + c + d = y_1 \\ q(-1) = -b + c - d = y_2 \\ q(i) = bi - c - di = i(b - d) - c = y_3 \\ q(-i) = -bi - c + di = i(d - b) - c = y_4 \end{cases} \quad (5)$$

Quinto passo: Tomando a substituição $x_i = y_i - \frac{a}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$, determinaremos as raízes de $p(x)$, concluindo, dessa forma, o resultado.

Aplicaremos o método ao seguinte exemplo:

Exemplo .3. Calcule a solução de $p(x) = x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 38x + 26$.

Observe que, de acordo com as relações de Girard, as eventuais raízes inteiras deveriam ser divisores de 26. No entanto, nenhum desses divisores é raiz de $p(x)$, o que significa que a equação não possui raízes inteiras. Como será demonstrado a seguir, todas as soluções de $p(x)$ são números complexos. Efetuando a troca de variável $x = y - \frac{(-8)}{4} = y + 2$, chegamos a

$$p(y) = (y + 2)^4 - 8(y + 2)^3 + 27(y + 2)^2 - 38(y + 2) + 26 = y^4 + 3y^2 + 6y + 10.$$

Agora, vamos estabelecer que esse polinômio seja exatamente igual ao polinômio característico da matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{pmatrix}$. Para isso, determinamos o polinômio característico de C , o que nos leva a:

$$\begin{aligned} p_C(y) &= \det(yI - C) = \det \begin{pmatrix} y & -b & -c & -d \\ -d & y & -b & -c \\ -c & -d & y & -b \\ -b & -c & -d & y \end{pmatrix} \\ &= y^4 - (4bd + 2c^2)y^2 - 4c(b^2 + d^2)y + (c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Dessa forma, da equivalência $p_C(y) = p(y)$, vamos encontrar o sistema

$$\begin{cases} 4bd + 2c^2 = -3 \\ 4c(b^2 + d^2) = -6 \\ c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 = 10 \end{cases} \quad (7)$$

Ao ajustar as duas primeiras expressões, chegamos a $bd = \frac{-3 - 2c^2}{4}$ e $b^2 + d^2 = \frac{-3}{2c}$. Substituindo esses resultados na terceira equação

$$\begin{aligned} 10 &= c^4 - b^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 \\ &= c^4 - (b^2 + d^2)^2 - 4bc^2d + 4b^2d^2 \\ &= c^4 - \left(\frac{-3}{2c}\right)^2 - 4\left(\frac{-3 - 2c^2}{4}\right)c^2 + 4\left(\frac{-3 - 2c^2}{4}\right)^2, \end{aligned}$$

Se multiplicarmos o primeiro membro e o último termo do segundo membro da igualdade por c^2 , chegaremos à seguinte equação na variável c

$$16c^6 + 24c^4 - 31c^2 - 9 = 0.$$

Substituindo $t = c^2$, chegamos à equação de grau 3

$$16t^3 + 24t^2 - 31t - 9 = 0.$$

Nesse estágio, podemos mais uma vez recorrer ao método de resolução de equações cúbicas para determinar as soluções em t . Vale notar que, como a soma dos coeficientes é nula, $t = 1$ é uma solução válida para essa equação. Dessa forma, então

$$16t^3 + 24t^2 - 31t - 9 = (t - 1)(16t^2 + 40t + 9),$$

assim, ao analisar o polinômio de segundo grau em t , as demais raízes são: $t = -\frac{1}{4}$ e $t = -\frac{9}{4}$. Seleccionando, arbitrariamente, $t = 1$, encontraremos duas opções para c : $c = 1$ ou $c = -1$. Optaremos por $c = -1$, ao inserir esse valor, obtemos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 4bd + 2c^2 = -3 \\ -4(b^2 + d^2) = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bd = \frac{-3 - 2c^2}{4} = -\frac{5}{4} \\ b^2 + d^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2d^2 = \frac{25}{16} \\ b^2 + d^2 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Dessa forma temos que b e d são raízes da equação do grau 2

$$s^2 - \frac{3}{2}s + \frac{25}{16} = 0,$$

onde suas soluções são

$$s_1 = \frac{3-4i}{4} \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{3+4i}{4}$$

Assim, temos que $b^2 = s_1$ e $d^2 = s_2$, de modo que $b = \pm\sqrt{s_1} = \pm\left(\frac{2-i}{2}\right)$ e $d = \pm\sqrt{s_2} = \pm\left(\frac{2+i}{2}\right)$. Uma possível solução pode ser encontrada considerando b e d precisam atender ao sistema (7) é $b = \frac{2-i}{2}$ e $d = \frac{-2-i}{2}$.

Depois de determinar os coeficientes b, c e d , definimos por completo o polinômio $q(y)$. Para encontrar as raízes de $p(y)$, basta analisarmos:

$$\begin{cases} y_1 = q(1) = b + c + d = \left(\frac{2-i}{2}\right) + (-1) + \left(\frac{-2-i}{2}\right) = -1 - i \\ y_2 = q(-1) = -b + c - d = -\left(\frac{2-i}{2}\right) + (-1) - \left(\frac{-2-i}{2}\right) = -1 + i \\ y_3 = q(i) = bi - c - di = i(b - d) - c = i\left(\frac{2-i}{2} + \frac{2+i}{2}\right) - (-1) = 1 + 2i \\ y_4 = q(-i) = -bi - c + di = i(d - b) - c = i\left(-\frac{-2-i}{2} - \frac{2-i}{2}\right) - (-1) = 1 - 2i. \end{cases} \quad (8)$$

Para encontrar as raízes em relação à variável x , é suficiente aplicar a substituição de variáveis $x_i = y_j + 3$.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 2 = -1 - i + 2 = 1 - i \\ x_2 &= y_2 + 2 = -1 + i + 2 = 1 + i \\ x_3 &= y_3 + 2 = 1 + 2i + 2 = 3 + 2i \\ x_4 &= y_4 + 2 = 1 - 2i + 2 = 3 - 2i. \end{aligned}$$

Atividades

Utilizando o método que envolve as matrizes circulantes, encontre as raízes dos polinômios listados abaixo:

1. $p(x) = x^2 - 4x + 5$

2. $q(x) = x^2 - 10x + 29$

3. $g(x) = x^3 - 3x^2 - 15x - 18$

4. $h(x) = x^3 - 6x^2 - 33x - 70$

5. $r(x) = x^4 - 3x^2 - 12x + 40$

6. $t(x) = x^4 - 18x^3 + 129x^2 - 422x + 510$