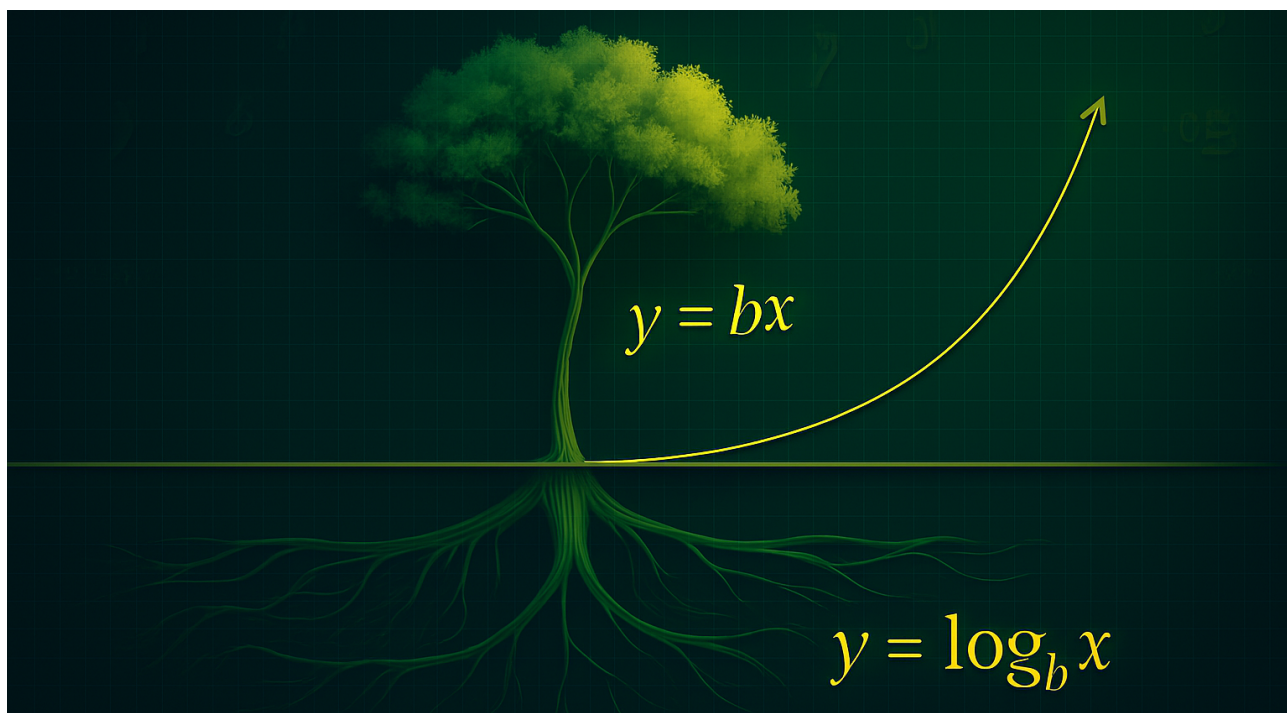




Banco de questões com solução de Funções Exponencial e Logarítmica do Enem e da Uece

Carlos Higor Sousa de Freitas
Rafael Jorge Pontes Diógenes



Fevereiro de 2026

Produto educacional do tipo Produto técnico-tecnológico, Produção de material didático, elaborado por Carlos Higor Sousa de Freitas, sob orientação do Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, durante o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB.

Sumário

1	Carta ao Leitor	3
2	Questões ENEM	5
3	Questões UECE	42
	Referências	84

1 Carta ao Leitor

Querido e gentil leitor, seja muito bem-vindo!

Como professor que vivencia o cotidiano da educação básica, conheço as dificuldades que permeiam as salas de aula do Brasil quando o assunto é Função Exponencial e, principalmente, Função Logarítmica. Conheço bem como é difícil para o aluno se familiarizar com as notações de logaritmo e ainda mais como eles sentem dificuldade na hora de aplicar as propriedades.

E pensando nessas dificuldades, juntamente com a minha pesquisa durante o mestrado PROF-MAT, fiz a elaboração deste material, o qual estás agora debruçado.

Este recurso não é apenas mais um banco de questões ou um gabarito tradicional. Ele foi desenhado para ser um material de apoio estruturado e conversado, útil tanto para o colega professor que busca enriquecer suas aulas, quanto para o estudante que deseja aprofundar seus estudos.

Este material foi dividido em duas seções. Uma para falar sobre as questões do ENEM, que são problemas mais focados em interpretação textual, gráficos, e em aplicações matemáticas em contextos reais e interdisciplinares.

Enquanto que a outra seção é sobre as questões da UECE, que desafiam o leitor a ter mais domínio da álgebra, das propriedades do assunto estudado e que possuem um grau de rigor matemático bem acima do nível do ENEM.

Entretanto, caro e gentil leitor, este material possui ainda mais diferenciais em relação a tantos outros que existem neste mundo. Fiz questão de que cada solução possuísse um alto grau de detalhamento, e ainda que após cada solução das questões ímpares tivesse um comentário pedagógico sobre o problema como um todo, deixando até uma segunda solução em alguns casos, a fim de que este material torne-se extremamente rico e quem sabe, único.

Também, caro e gentil leitor, trouxe para vocês em cada questão a competência e habilidade da BNCC à qual se refere o problema e também a habilidade da Matriz de Referência do Enem, com o objetivo de ajudar àqueles docentes que gostam de buscar as questões através das competências e habilidades.

Espero que este material seja uma excelente ferramenta na sua caminhada e que os logaritmos e exponenciais passem a ser vistos não como obstáculos, mas como belas ferramentas de interpretação do mundo.

Ah, caro e gentil leitor, a seguir irei trazer para vocês o texto original de cada competência e habilidade tanto da BNCC (BRASIL, 2018) como da Matriz de Referência do Enem (Brasil, 2009), que estarão presentes nos problemas deste material a fim de que você não precise se dar ao trabalho de buscar essas informações nos documentos oficiais.

Atenciosamente,
Carlos Higor Sousa de Freitas

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

O material foca nas Competências Específicas 3, 4 e 5 da Matemática e suas Tecnologias, mobilizando as habilidades:

- **EM13MAT303:** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou algébricas.
- **EM13MAT304:** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas.
- **EM13MAT305:** Resolver e elaborar problemas com logaritmos, inclusive em contextos de outras áreas do conhecimento.
- **EM13MAT403:** Analisar e estabelecer relações entre as representações de funções (exponencial, logarítmica) para identificar características fundamentais (domínio, imagem, crescimento).
- **EM13MAT501:** Investigar relações entre números reais e funções, utilizando diferentes registros de representação.
- **EM13MAT508:** Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos.

Matriz de Referência do ENEM

No âmbito da avaliação nacional, as situações-problema aqui propostas contemplam as Competências de Área 5 (Modelagem Algébrica) e 6 (Interpretação de Gráficos e Tabelas), vindas da (Brasil, 2009)

- **H19:** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- **H20:** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- **H21:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- **H24:** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para realizar inferências.
- **H25:** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- **H26:** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Este mapeamento permite ao docente utilizar este material de forma estratégica, selecionando problemas não apenas pelo conteúdo, mas pela habilidade cognitiva que se deseja desenvolver no estudante. É válido salientar que por mais que a UECE não utilize de maneira direta em suas diretrizes a Matriz de Referência do Enem, foi feita uma análise das habilidades dessa matriz que mais se encaixavam nos problemas propostos pela UECE.

2 Questões ENEM

Nesta seção serão expostos os itens (questões) do Exame Nacional do Ensino Médio sobre o assunto Função Exponencial e Função Logarítmica dos últimos anos. Todos os problemas podem ser acessadas na íntegra em (Brasil. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2025).

Problema 2.1: Habilidade EM13MAT403 - H21 - Enem 2025

Um empresário utiliza máquinas cuja pressão interna P , em atmosfera, depende do tempo contínuo de utilização t , em hora, e de um parâmetro positivo K , que define o modelo da máquina, segundo a expressão:

$$P = 4 \cdot \log[-K \cdot (t + 1) \cdot (t - 19)].$$

O fabricante dessas máquinas recomenda ao usuário que a pressão interna desse tipo de máquina não ultrapasse 10 atmosferas durante seu funcionamento.

O empresário pretende comprar novas máquinas desse tipo que deverão funcionar, diariamente, por um período contínuo de 10 horas. Para isso, precisa definir o modelo de máquina a ser adquirida escolhendo o maior valor possível do parâmetro K , atendendo à recomendação do fabricante.

O maior valor a ser escolhido para K é

- a) $10^{0,5}$
- b) 10^8
- c) $\frac{10^{2,5}}{84}$
- d) $\frac{10^{2,5}}{99}$
- e) 25×10^{-2}

Solução: O objetivo é encontrar o maior valor possível para o parâmetro K , garantindo que a pressão interna P nunca ultrapasse 10 atmosferas ($P \leq 10$) durante o período de funcionamento.

i) Análise da Função Pressão:

A função dada é $P(t) = 4 \cdot \log[-K \cdot (t + 1) \cdot (t - 19)]$. Como a base do logaritmo é 10 (maior que 1), a função logarítmica é estritamente crescente. Isso significa que a pressão máxima ($P_{\text{máx}}$) ocorrerá quando o logaritmando (o termo dentro do logaritmo) for máximo.

Seja $f(t)$ o logaritmando:

$$f(t) = -K \cdot (t + 1) \cdot (t - 19).$$

Essa é uma função quadrática (parábola). Como K é positivo, o coeficiente do termo quadrático ($-K$) é negativo, indicando que a parábola tem concavidade voltada para baixo e possui um valor máximo no seu vértice.

ii) Determinação do Tempo de Pressão Máxima:

As raízes da função quadrática são $t_1 = -1$ e $t_2 = 19$, e fica fácil determiná-las pois o problema nos forneceu sua equação na forma fatorada, ou seja, basta observarmos que $t + 1 = 0$ implica em $t_1 = -1$ como primeira raiz e $t - 19 = 0$ implica em $t_2 = 19$ como segunda raiz.

A coordenada t do vértice (t_v) encontra-se exatamente no ponto médio entre as raízes:

$$t_v = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{-1 + 19}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

O enunciado informa que a máquina funciona por um período contínuo de 10 horas, ou seja, t varia no intervalo $[0, 10]$. Como o vértice $t = 9$ horas está dentro desse intervalo de funcionamento, a pressão máxima será atingida exatamente neste instante.

iii) Cálculo do Parâmetro K :

Calculamos o valor máximo do logaritmando para $t = 9$:

$$f(9) = -K \cdot (9 + 1) \cdot (9 - 19)$$

$$f(9) = -K \cdot (10) \cdot (-10)$$

$$f(9) = 100K.$$

A pressão máxima corresponde a este valor:

$$P_{\max} = 4 \cdot \log(100K).$$

A recomendação do fabricante é $P \leq 10$. Portanto:

$$4 \cdot \log(100K) \leq 10.$$

Dividindo ambos os lados por 4:

$$\log(100K) \leq 2,5.$$

Aplicando a definição de logaritmo (base 10):

$$100K \leq 10^{2,5}.$$

Isolando K :

$$K \leq \frac{10^{2,5}}{100}.$$

Sabendo que $100 = 10^2$:

$$K \leq \frac{10^{2,5}}{10^2}$$

$$K \leq 10^{2,5-2}$$

$$K \leq 10^{0,5}.$$

O maior valor possível para K é $10^{0,5}$.

Alternativa correta: a).



Comentário Pedagógico

Neste problema, a habilidade EM13MAT403 da BNCC e a competência H21 da Matriz do ENEM são mobilizadas de forma muito sofisticada. O grande obstáculo para o aluno aqui não é apenas aplicar uma fórmula, mas realizar a sobreposição de dois conceitos distintos: ele precisa reconhecer que, como a base do logaritmo é maior que 1, a função logarítmica é crescente. Consequentemente, a pressão máxima ocorrerá exatamente no vértice da função quadrática que compõe o logaritmando.

Em sala de aula, é um momento excelente para mostrar aos alunos a utilidade da forma fatorada da equação do segundo grau. Muitos tendem a expandir a expressão para usar a fórmula de Bhaskara, mas a forma fatorada já entrega as raízes (-1 e 19) “de bandeja”, tornando o cálculo do vértice ($t = 9$) muito mais intuitivo e rápido. Por fim, a manipulação final da inequação logarítmica exige que o discente tenha maturidade nas propriedades de potência, que costuma ser o ponto em que ocorrem os maiores travamentos na resolução.

Problema 2.2: Habilidade EM13MAT304 - H19 - Enem PPL 2024

Visando obter créditos de carbono, uma empresa, emissora de gases de efeito estufa, elabora um projeto de reflorestamento em uma área desmatada. De acordo com o projeto, no primeiro ano serão reflorestados 500 hectares. A partir daí, a cada ano, a área total reflorestada será aumentada em 50% em relação ao ano anterior.

A expressão algébrica que representa a área total reflorestada (A_n), em hectare, ao final de n anos é:

- a) $A_n = 500 \cdot 0,5^{n-1}$
- b) $A_n = 500 \cdot 1,5^{n-1}$
- c) $A_n = 500 + n \cdot 250$
- d) $A_n = 500 \cdot (1 + 0,5^{n-1})$
- e) $A_n = 500 + (n - 1) \cdot 250$

Solução: A empresa irá reflorestar 500 hectares no primeiro ano, e a cada ano aumentará essa área em 50% em relação ao ano anterior. Isso caracteriza uma progressão geométrica, cuja razão é:

$$r = 1 + \frac{50}{100} = 1,5.$$

A fórmula geral de uma progressão geométrica para o n -ésimo termo, considerando o primeiro termo $a_1 = 500$, é:

$$A_n = 500 \cdot (1,5)^{n-1}.$$

Portanto, a expressão que representa a área total reflorestada ao final de n anos é:

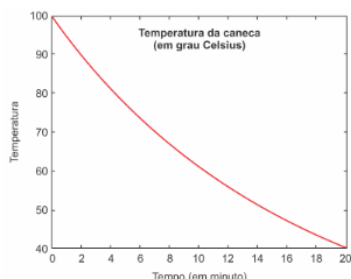
$$A_n = 500 \cdot 1,5^{n-1}.$$

Alternativa correta: b).



Problema 2.3: Habilidade EM13MAT403 - H20 - Enem 2024

Uma caneca com água fervendo é retirada de um forno de micro-ondas. A temperatura T , em grau Celsius, da caneca, em função do tempo t , em minuto, pode ser modelada pela função $T(t) = a + 80 \cdot b^t$ representada no gráfico a seguir.



Os valores das constantes a e b são

- a) $a = 20$; $b = \log(0,5)$
- b) $a = 100$; $b = 0,5$
- c) $a = 20$; $b = (0,5)^{\frac{1}{10}}$
- d) $a = 20$; $b = \frac{(40)^{\frac{1}{10}}}{80}$
- e) $a = 20$; $b = 40$

Solução: A função que modela a temperatura da caneca é:

$$T(t) = a + 80b^t.$$

Sabemos que a caneca está a 100°C no instante $t = 0$ e atinge 40°C no instante $t = 20$. Vamos usar esses dados para montar um sistema e encontrar os valores de a e b .

- Para $t = 0$:

$$T(0) = a + 80b^0 = a + 80 \cdot 1 = a + 80 = 100$$

$$a = 20.$$

- Para $t = 20$:

$$T(20) = 20 + 80b^{20} = 40 \Rightarrow 80b^{20} = 20 \Rightarrow b^{20} = \frac{1}{4}.$$

Como $b^{20} = \frac{1}{4}$, podemos reescrever:

$$b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{2}{20}} = 2^{-\frac{1}{10}} = (2^{-1})^{\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

Logo, temos: $b = (0,5)^{\frac{1}{10}}$. Assim, a função fica: $T(t) = 20 + 80 \cdot (0,5)^{\frac{t}{10}}$. Portanto, os valores de a e b são: $a = 20$ e $b = (0,5)^{\frac{1}{10}}$.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

Esta questão é um clássico exemplo de modelagem a partir de um gráfico, aplicando uma função exponencial translatada (empurrada), que ecoa a Lei de Resfriamento de Newton. A principal dificuldade conceitual para os alunos é interpretar o significado do coeficiente ‘ a ’. É crucial que o professor explore a ideia de assíntota horizontal, questionando os alunos: “O que acontecerá com a temperatura da caneca depois de muito tempo?”. Isso os levará a concluir que a temperatura se aproxima da temperatura ambiente, que é o valor de ‘ a ’. No campo algébrico, a manipulação para encontrar ‘ b ’ a partir de ‘ $b^{20} = \frac{1}{4}$ ’ pode ser um obstáculo, exigindo domínio das propriedades de potenciação. Uma estratégia didática eficaz é, antes da resolução, pedir que os alunos descrevam o fenômeno verbalmente, conectando a física do resfriamento à matemática da função.

Problema 2.4: Habilidade EM13MAT304 - H21 - ENEM PPL 2023

Um tipo de célula se reproduz constantemente por divisão celular, triplicando sua quantidade a cada duas horas, sob condições ideais de proliferação. Suponha uma quantidade inicial Q_0 dessas células sob as condições ideais de proliferação durante um certo período.

Qual a representação algébrica da quantidade Q dessas células em função do tempo t , em hora, nesse período?

- a) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^t$
- b) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{2t}$
- c) $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$
- d) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$
- e) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}-1}$

Solução: O problema informa que a quantidade de células **triplica a cada 2 horas**, e que no instante inicial $t = 0$ existe uma quantidade Q_0 de células. Deseja-se encontrar uma expressão para $Q(t)$, a quantidade de células após t horas.

Como a cada 2 horas a quantidade triplica, temos uma função exponencial com base 3 e expoente fracionário, pois o crescimento acontece a cada 2 horas.

A forma geral da função exponencial que modela esse tipo de crescimento é:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}.$$

Justificativa:

- Para $t = 0$:

$$Q(0) = Q_0 \cdot 3^0 = Q_0 \quad (\text{correto}).$$

- Para $t = 2$:

$$Q(2) = Q_0 \cdot 3^{\frac{2}{2}} = Q_0 \cdot 3 = 3Q_0 \quad (\text{correto}).$$

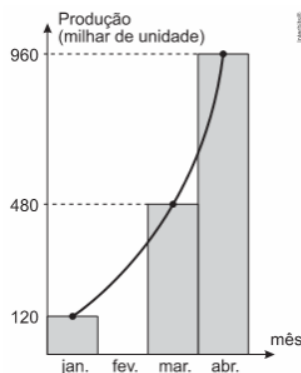
Portanto, a função correta que representa a quantidade de células em função do tempo t , em horas, é:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}.$$

Alternativa correta: d). ■

Problema 2.5: Habilidade EM13MAT508 - H20 e H21 - ENEM PPL 2021

O gráfico informa a produção registrada por uma indústria nos meses de janeiro, março e abril.



Por problemas logísticos, não foi feito o levantamento sobre a produção no mês de fevereiro. Entretanto, as informações dos outros três meses sugerem que a produção nesse quadrimestre cresceu exponencialmente, conforme aponta a curva de tendência traçada no gráfico.

Assumindo a premissa de que o crescimento nesse período foi exponencial, pode-se inferir que a produção dessa indústria no mês de fevereiro, em milhar de unidade, foi

- a) 0
- b) 120
- c) 240
- d) 300
- e) 400

Solução: Para resolver o problema, assumimos que o crescimento da produção pode ser modelado por uma função exponencial da forma $f(x) = a \cdot b^x$, onde x é o número do mês (janeiro=1, fevereiro=2, março=3) e $f(x)$ é a produção em milhares de unidades. **Coletar os dados do gráfico:**

Do gráfico, extraímos os dados de produção para os meses de janeiro e março:

- Para janeiro $x = 1$, a produção foi de $f(1) = 120$.
- Para março $x = 3$, a produção foi de $f(3) = 480$.

i) Montar o sistema de equações:

Substituindo os pontos na função $f(x) = a \cdot b^x$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$a \cdot b^1 = 120. \quad (1)$$

$$a \cdot b^3 = 480. \quad (2)$$

ii) Resolver o sistema para encontrar ‘b’:

A forma mais simples de resolver é dividir a equação (2) pela equação (1):

$$\frac{a \cdot b^3}{a \cdot b} = \frac{480}{120}.$$

Simplificando a expressão, os termos ‘a’ se cancelam:

$$b^{3-1} = 4$$

$$b^2 = 4.$$

Como o problema descreve um crescimento, consideramos a raiz positiva:

$$b = 2.$$

iii) Encontrar o valor de ‘a’:

Agora, substituímos o valor de $b = 2$ na equação (1):

$$a \cdot (2) = 120.$$

$$a = \frac{120}{2}.$$

$$a = 60.$$

iv) Escrever a função exponencial:

Com os valores de $a = 60$ e $b = 2$, a função que modela a produção é:

$$f(x) = 60 \cdot 2^x.$$

v) Calcular a produção para fevereiro:

A questão pede a produção no mês de fevereiro, que corresponde a $x = 2$. Substituímos $x = 2$ na função:

$$f(2) = 60 \cdot 2^2$$

$$f(2) = 60 \cdot 4$$

$$f(2) = 240.$$

Portanto, pode-se inferir que a produção no mês de fevereiro foi de **240** mil unidades.

Alternativa correta: c).



Comentário Pedagógico

Este problema conecta a função exponencial com a Progressão Geométrica (PG), uma associação explícita na habilidade EM13MAT508 da BNCC. A resolução via sistema de equações é robusta, mas o professor pode enriquecer a aula apresentando uma solução alternativa mais elegante: a interpolação geométrica. Como o crescimento é exponencial e os intervalos de tempo são iguais (um mês), a produção de fevereiro deve ser a média geométrica entre as produções de janeiro e março. Assim,

$$P_{\text{fev}} = \sqrt{P_{\text{jan}} \cdot P_{\text{mar}}} = \sqrt{120 \cdot 480} = \sqrt{57600} = 240.$$

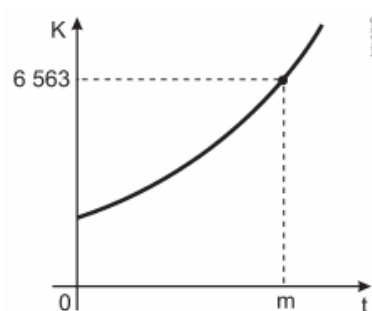
Apresentar essa alternativa não só oferece um atalho, mas aprofunda a compreensão da natureza da PG e do crescimento exponencial, mostrando que os termos em um gráfico exponencial, para intervalos de tempo iguais, formam uma PG.

Problema 2.6: Habilidade EM13MAT304 - H20 - Enem PPL 2021

O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão

$$K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{t}{3}} + 2$$

em que $K(t)$ indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t . O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t .



Com base nos dados, o valor de m é

- a) $\frac{4}{3}$
- b) $\frac{7}{5}$
- c) $\frac{24}{5}$
- d) 12
- e) 81

Solução:

A resolução da questão se baseia em encontrar o valor de m a partir da função de crescimento populacional $K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t} + 2$. De acordo com o gráfico, no tempo $t = m$, a população de microrganismos é $K(m) = 6563$.

Substituindo o valor de $K(m)$ na função, temos:

$$\begin{aligned} 6563 &= 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}m} + 2 \\ 6563 - 2 &= 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}m} \\ 6561 &= 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}m}. \end{aligned}$$

O passo seguinte é reescrever os números 81 e 6561 como potências de base 3, a mesma base do termo exponencial. Sabemos que $81 = 3^4$ e $6561 = 3^8$. Com isso, a equação se torna:

$$3^8 = 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{3}m}.$$

Utilizando a propriedade de multiplicação de potências de mesma base, onde os expoentes são somados ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$), obtemos:

$$3^8 = 3^{4+\frac{1}{3}m}.$$

Agora que ambos os lados da equação são potências de mesma base, podemos igualar seus expoentes:

$$8 = 4 + \frac{1}{3}m.$$

Resolvendo a equação linear para m :

$$8 - 4 = \frac{1}{3}m$$

$$4 = \frac{1}{3}m$$

$$m = 12.$$

O valor de m é, portanto, 12.

Alternativa correta: d).



Problema 2.7: Habilidade EM13MAT304 - H21 - Enem PPL 2020

Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade x dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189.440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora.

A quantidade inicial de bactérias era de

- a) 370
- b) 740
- c) 1480
- d) 11840
- e) 23680

Solução: O problema descreve um crescimento exponencial onde a população de bactérias dobra em um intervalo de tempo fixo. O modelo matemático para este tipo de crescimento é dado pela função $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, onde:

- $Q(t)$ é a quantidade de bactérias no tempo t .
- Q_0 é a quantidade inicial de bactérias, que queremos descobrir.
- t é o tempo total decorrido.
- T é o tempo de duplicação (o período necessário para a população dobrar).

i) Identificação dos Dados

A partir do enunciado, temos os seguintes dados:

- A população final após 2 horas é de 189.440 bactérias. Portanto, $Q(2) = 189.440$.
- O tempo total do experimento foi de $t = 2$ horas.
- A população dobrava a cada $T = 0,25$ hora.

ii) Montagem e Resolução da Equação

Substituímos os valores conhecidos na fórmula do crescimento exponencial:

$$189.440 = Q_0 \cdot 2^{(2/0,25)}.$$

Primeiro, vamos simplificar o expoente para saber quantas vezes a população dobrou.

$$\frac{t}{T} = \frac{2 \text{ horas}}{0,25 \text{ hora}} = 8.$$

Isso significa que a população dobrou 8 vezes durante o período de 2 horas. A equação torna-se:

$$189.440 = Q_0 \cdot 2^8.$$

Agora, calculamos o valor de 2^8 :

$$2^8 = 256.$$

Substituindo este valor de volta na equação:

$$189.440 = Q_0 \cdot 256.$$

Para encontrar a quantidade inicial Q_0 , isolamos a variável, dividindo a população final pelo fator de crescimento:

$$Q_0 = \frac{189.440}{256}$$
$$Q_0 = 740.$$

Portanto, a quantidade inicial de bactérias no experimento era de **740**.

Alternativa correta: b). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, a habilidade EM13MAT304 da BNCC e a competência H21 da Matriz do ENEM são exigidas por meio da modelagem de um crescimento populacional contínuo. O principal desafio didático aqui não é a álgebra em si, mas a interpretação do expoente na função exponencial. É muito comum em sala de aula que os alunos “travem” ao lidar com períodos de duplicação que ocorrem em frações de hora (como dobrar a cada 0,25 hora) e um tempo total dado em horas inteiras (2 horas).

O professor pode utilizar esta questão para trabalhar fortemente o conceito do expoente como um “contador de ciclos”. Quando o estudante é estimulado a compreender que em 2 horas ocorrem 8 ciclos independentes de 0,25 hora ($2 \div 0,25 = 8$), a modelagem da equação $189.440 = Q_0 \cdot 2^8$ torna-se extremamente intuitiva. Essa abordagem quebra a dependência exclusiva da memorização de fórmulas prontas e faz com que a resolução flua de maneira muito mais lógica e natural para o discente.

Problema 2.8: Habilidade EM13MAT508 e Habilidade EM13MAT305 - H24 e H25 - Enem 2020

Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5.730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5.730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$, em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1024	512
5	2048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Solução: O objetivo do problema é identificar o fóssil mais antigo entre os cinco encontrados. A idade de um fóssil está diretamente relacionada à proporção de carbono 14 que decaiu ao longo do tempo.

i) Análise da Fórmula:

Para determinar qual fóssil é o mais antigo, precisamos manipular a fórmula de decaimento fornecida no enunciado, $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$, para isolar a variável tempo, 't'.

Primeiramente, dividimos ambos os lados por Q_0 para obter a proporção de carbono-14 restante:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Utilizando a propriedade de expoentes negativos ($a^{-n} = 1/a^n$), podemos reescrever a equação:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = \frac{1}{2^{\frac{t}{5730}}}.$$

Invertendo ambos os lados da equação, chegamos a:

$$\frac{Q_0}{Q(t)} = 2^{\frac{t}{5730}}.$$

Para isolar 't', aplicamos a definição de logaritmo (ou aplicamos o logaritmo de base 2 em ambos os lados):

$$\begin{aligned}\frac{t}{5730} &= \log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)} \right) \\ t &= 5730 \cdot \log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)} \right).\end{aligned}$$

A partir desta equação, observa-se que a idade 't' é diretamente proporcional ao valor de $\log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)} \right)$. Como a função logarítmica de base maior que 1 é estritamente crescente, o fóssil mais antigo (maior valor de 't') será aquele que apresentar a **maior razão** $\frac{Q_0}{Q(t)}$.

ii) Cálculo das Razões:

Vamos agora calcular a razão $\frac{Q_0}{Q(t)}$ para cada um dos cinco fósseis, utilizando os dados da tabela fornecida:

- **Fóssil 1:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{128}{32} = 4.$
- **Fóssil 2:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{256}{8} = 32.$
- **Fóssil 3:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{512}{64} = 8.$
- **Fóssil 4:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{1024}{512} = 2.$
- **Fóssil 5:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{2048}{128} = 16.$

iii) **Conclusão:** Comparando os valores das razões calculadas:

$$2 < 4 < 8 < 16 < 32.$$

A maior razão encontrada foi 32, que corresponde ao Fóssil 2. Portanto, o fóssil mais antigo encontrado na expedição foi o Fóssil 2.

Alternativa correta: b). ■

Problema 2.9: Habilidade EM13MAT304 - H21 - Enem PPL 2019

Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênio. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva.

Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado.

Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

- a) $3N_0$
- b) $15N_0$
- c) $243N_0$
- d) $360N_0$
- e) $729N_0$

Solução: O problema descreve o crescimento de uma população de bactérias modelado pela função exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$. O objetivo é determinar o número de bactérias após 5 horas em relação à quantidade inicial.

i) Determinar o fator de crescimento e^k :

A primeira informação crucial é que, após uma hora ($t = 1$), o número de bactérias triplicou. Matematicamente, isso significa que $N(1) = 3N_0$.

Substituímos $t = 1$ na função de crescimento dada:

$$N(1) = N_0 e^{k \cdot 1} = N_0 e^k.$$

Agora, igualamos essa expressão ao valor conhecido de $N(1)$:

$$3N_0 = N_0 e^k.$$

Para encontrar o valor do fator de crescimento e^k , dividimos ambos os lados da equação por N_0 (considerando $N_0 \neq 0$):

$$e^k = 3.$$

Este resultado é fundamental para a resolução do problema.

ii) Calcular o número de bactérias após 5 horas:

A pergunta final é sobre o número de bactérias após cinco horas ($t = 5$). Para isso, calculamos $N(5)$ usando a função original:

$$N(5) = N_0 e^{k \cdot 5}.$$

Utilizando a propriedade das potências $(a^b)^c = a^{bc}$, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$N(5) = N_0(e^k)^5.$$

Agora, podemos substituir o valor de $e^k = 3$ que encontramos no passo anterior:

$$N(5) = N_0 \cdot (3)^5$$

$$N(5) = 243N_0.$$

Portanto, cinco horas após o início da observação, o número de bactérias será 243 vezes o número inicial da cultura.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

A presença da base ‘ e ’ (número de Euler) pode intimidar os alunos, que podem associá-la a uma matemática mais avançada. O papel do professor aqui é desmistificar essa constante, tratando-a, no contexto do problema, como “uma base como qualquer outra”. A dificuldade mais comum é o aluno tentar isolar a constante ‘ k ’ utilizando o logaritmo natural, um caminho mais complexo e totalmente desnecessário para a resolução. A estratégia didática central deve ser orientar os alunos a enxergarem o termo ‘ e^k ’ como um único “bloco de crescimento”. O professor pode perguntar: “Se a população triplica em uma hora, qual é o fator que multiplica a população a cada hora?”. A resposta é 3. Assim, os alunos concluem que o bloco ‘ e^k ’ vale 3. Uma vez que esse fator é visto como uma única entidade, a resolução para ‘ $t = 5$ ’, ou seja, ‘ $(e^k)^5$ ’, torna-se uma simples potenciação (3^5), reforçando o domínio das propriedades de potências.

Problema 2.10: Habilidade EM13MAT305 - H21 - Enem PPL 2019

Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é

$$h = 5 \cdot \log_2(t + 1)$$

em que t é o tempo contado em dias e h , a altura da planta em centímetros.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dias, ela alcançará sua altura máxima?

- a) 63
- b) 96
- c) 128
- d) 192
- e) 255

Solução:

O problema pede para calcular o tempo, em dias, que uma planta leva para crescer de 30 cm (altura de venda) até sua altura máxima de 40 cm. O crescimento da planta é modelado pela função logarítmica $h = 5 \cdot \log_2(t + 1)$, onde h é a altura em cm e t o tempo em dias.

A solução consiste em dois cálculos principais: primeiro, encontrar o tempo (t_1) em que a planta atinge 30 cm; segundo, encontrar o tempo (t_2) em que ela atinge 40 cm. A resposta será a diferença entre esses dois tempos ($t_2 - t_1$).

i) Tempo para atingir 30 cm:

Substituímos $h = 30$ na fórmula para encontrar o tempo t_1 :

$$30 = 5 \cdot \log_2(t_1 + 1).$$

Dividindo por 5 ambos os membros, temos:

$$\frac{30}{5} = \log_2(t_1 + 1)$$

$$6 = \log_2(t_1 + 1).$$

Para resolver o logaritmo, usamos sua definição ($\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x$):

$$t_1 + 1 = 2^6$$

$$t_1 + 1 = 64$$

$$t_1 = 64 - 1 = 63.$$

Portanto, a planta é colocada à venda após 63 dias.

ii) Tempo para atingir 40 cm:

Agora, substituímos $h = 40$ na fórmula para encontrar o tempo t_2 :

$$40 = 5 \cdot \log_2(t_2 + 1.)$$

Dividindo por 5 ambos os membros, temos:

$$\frac{40}{5} = \log_2(t_2 + 1)$$

$$8 = \log_2(t_2 + 1).$$

Novamente, usando a definição de logaritmo:

$$t_2 + 1 = 2^8$$

$$t_2 + 1 = 256$$

$$t_2 = 256 - 1 = 255.$$

A planta atinge sua altura máxima em 255 dias.

iii) Cálculo do intervalo de tempo:

O tempo necessário para a planta crescer de 30 cm para 40 cm é a diferença entre t_2 e t_1 :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 255 - 63 = 192.$$

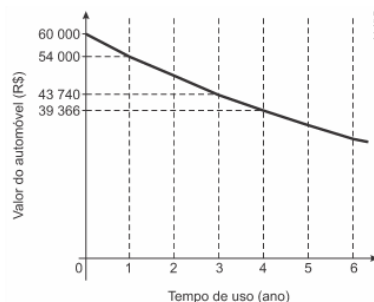
A resposta é 192 dias.

Alternativa correta: d).



Problema 2.11: Habilidade EM13MAT304 - H20, H21 - Enem Libras 2017

Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$ com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

- a) R\$ 48.000,00
- b) R\$ 48.114,00
- c) R\$ 48.600,00
- d) R\$ 48.870,00
- e) R\$ 49.683,00

Solução: O valor de um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso (t) segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$. O objetivo é encontrar o valor do automóvel ao completar dois anos de uso, o que corresponde a calcular $f(2)$. Para isso, primeiro determinamos os valores das constantes b e a usando os dados do gráfico.

i) Determinar o valor inicial b :

O valor inicial do carro, b , corresponde ao valor no tempo $t = 0$. Observando o gráfico, vemos que para $t = 0$, o valor do automóvel é de R\$ 60.000,00.

$$f(0) = 60.000.$$

Substituindo $t = 0$ na função:

$$b \cdot a^0 = 60.000.$$

Sabendo que qualquer número (diferente de zero) elevado a zero é 1 ($a^0 = 1$), temos:

$$b \cdot 1 = 60.000 \implies b = 60.000.$$

Assim, o valor inicial do carro é R\$ 60.000,00.

ii) Determinar o fator de depreciação a :

Para encontrar o fator de depreciação a , utilizamos outro ponto do gráfico. Em $t = 1$ ano, o valor do automóvel é de R\$ 54.000,00.

$$f(1) = 54.000.$$

Substituímos $t = 1$ e o valor de $b = 60.000$ na função:

$$60.000 \cdot a^1 = 54.000.$$

Agora, isolamos a :

$$a = \frac{54.000}{60.000} = \frac{54}{60} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

O fator de depreciação anual é de $0,9$, o que significa que o carro perde 10% de seu valor a cada ano.

iii) Calcular o valor do automóvel após 2 anos:

Com os valores de $b = 60.000$ e $a = 0,9$, a função completa que descreve a depreciação é:

$$f(t) = 60.000 \cdot (0,9)^t$$

A questão pede o valor do automóvel ao completar dois anos de uso ($t = 2$):

$$f(2) = 60.000 \cdot (0,9)^2$$

$$f(2) = 60.000 \cdot 0,81$$

$$f(2) = 48.600.$$

Portanto, o valor do automóvel após dois anos de uso será de **R\$ 48.600,00**.

É válido acrescentar que o valor de a poderia ser encontrado usando outros pontos conhecidos do gráfico.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, mobilizamos a habilidade EM13MAT304 da BNCC em conjunto com as competências H20 e H21 da Matriz de Referência do ENEM. O grande desafio didático desta questão está na transição da representação gráfica para a modelagem algébrica da função de depreciação $f(t) = b \cdot a^t$.

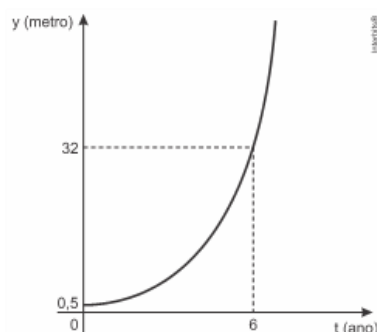
Em sala de aula, é comum observar que os estudantes sentem dificuldade em associar o corte no eixo vertical R\$ 60.000 diretamente ao parâmetro b da função, que representa o valor inicial no instante $t = 0$. Além disso, a determinação da base a que é o fator de decaimento, exige a compreensão de que cada ponto do gráfico é um par ordenado $(t, f(t))$, como o ponto $(1, 54.000)$. O docente pode aproveitar esta situação-problema para reforçar a diferença visual e algébrica entre o decrescimento linear e o exponencial. É fundamental mostrar ao aluno que o automóvel não perde um valor fixo em reais a cada ano, mas sim uma taxa percentual constante e, neste caso, uma desvalorização de 10% ao ano, evidenciada pela base $a = 0,9$.

Problema 2.12: Habilidade EM13MAT304 - H20, H21 - Enem 2º Aplicação 2016

Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função

$$y(t) = a^{t-1},$$

na qual y representa a altura da planta em metros, t é considerado em anos, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y .



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em anos, é igual a:

- a) 3
- b) 4
- c) 6
- d) $\log_2 7$
- e) $\log_2 15$

Solução:

O problema pede para determinar o tempo, em anos, entre o plantio de uma muda de eucalipto e o momento do seu corte. O crescimento da planta é modelado pela função exponencial $y(t) = a^{t-1}$, onde y é a altura em metros e t o tempo em anos.

i) Determinar o valor da base a :

O primeiro passo é encontrar o valor da constante a . O problema informa que $y(0)$ representa a altura da muda no momento do plantio. Pelo gráfico, vemos que em $t = 0$, a altura é $y(0) = 0,5$ metros. Substituímos esses valores na função:

$$y(0) = a^{0-1} = 0,5$$

$$a^{-1} = 0,5.$$

Lembrando que $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e $0,5 = \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \implies a = 2.$$

Com isso, a função de crescimento completa é $y(t) = 2^{t-1}$.

ii) Determinar a altura do corte:

Deseja-se cortar os eucaliptos quando eles tiverem crescido 7,5 metros após o plantio. A altura inicial da muda era de 0,5 metros. Portanto, a altura final no momento do corte será:

$$\text{Altura do corte} = \text{Altura inicial} + \text{Crescimento desejado}.$$

$$\text{Altura do corte} = 0,5 + 7,5 = 8,0 \text{ metros}.$$

iii) Calcular o tempo para o corte:

Agora, precisamos encontrar o tempo t em que a altura da planta $y(t)$ será igual a 8 metros. Usamos a função de crescimento com $a = 2$:

$$y(t) = 8$$

$$2^{t-1} = 8.$$

Para resolver a equação, expressamos o número 8 como uma potência de base 2:

$$2^{t-1} = 2^3.$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes:

$$t - 1 = 3$$

$$t = 3 + 1 = 4.$$

iv) Conclusão:

O tempo entre a plantação e o corte é de **4 anos**.

Alternativa correta: b).



Problema 2.13: Habilidade EM13MAT304 - H21 - Enem 2º Aplicação 2016

O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infecto-contagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 minutos, a população será

- a) reduzida a um terço.
- b) reduzida à metade.
- c) reduzida a dois terços.
- d) duplicada.
- e) triplicada.

Solução: O problema pede para analisar o crescimento de uma população de bactérias após 20 minutos, comparando-o com a quantidade inicial. A fórmula que descreve a população $p(t)$, em milhares, é $p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$, com t medido em horas.

i) Identificar a Quantidade Inicial:

A quantidade inicial de bactérias corresponde ao valor da população no instante $t = 0$.

$$p(0) = 40 \cdot 2^{3 \cdot 0} = 40 \cdot 2^0 = 40 \cdot 1 = 40.$$

A população inicial, conforme o enunciado, é de **40 mil** unidades.

ii) Converter a Unidade de Tempo:

A fórmula utiliza o tempo t em horas, mas a questão pede a análise para 20 minutos. É necessário converter 20 minutos para horas.

$$20 \text{ minutos} = \frac{20}{60} \text{ horas} = \frac{1}{3} \text{ hora}.$$

iii) Calcular a População após 20 minutos:

Substituímos o valor de $t = \frac{1}{3}$ na função para encontrar a população nesse instante:

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}.$$

O expoente se simplifica:

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^1$$

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 80.$$

Isso significa que a população após 20 minutos será de **80 mil** bactérias.

iv) Conclusão:

Para determinar a relação entre a população após 20 minutos e a população inicial, comparamos os dois valores:

$$\frac{\text{População em 20 min}}{\text{População inicial}} = \frac{80.000}{40.000} = 2.$$

O resultado mostra que a população dobrou de tamanho.

Portanto, após 20 minutos, a população de bactérias será **duplicada** em relação à quantidade inicial.

Alternativa correta: d). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT304 da BNCC e a competência H21 do ENEM, o principal obstáculo para o aluno não é a manipulação da função exponencial em si, mas sim a atenção às grandezas e unidades de medida envolvidas. Em sala de aula, o erro mais previsível e comum cometido pelos discentes é a substituição direta de $t = 20$ na equação, ignorando que a lei de formação da função foi definida explicitamente para o tempo em horas.

O professor pode utilizar esta questão para enfatizar a importância da leitura atenta e da coerência dimensional na modelagem algébrica. A conversão de 20 minutos para $1/3$ de hora é o passo crucial que reduz o expoente $3t$ a 1, simplificando o cálculo de forma elegante e evitando resultados completamente absurdos como a tentativa de calcular 2^{60} . Além disso, é um momento muito oportuno para debater a estrutura da potência: mostrar à turma que 2^{3t} é algebricamente equivalente a 8^t ajuda o aluno a visualizar que a população de bactérias se multiplica por oito a cada hora, enriquecendo a interpretação analítica do comportamento exponencial.

Problema 2.14: Habilidade EM13MAT304 - H21 - Enem PPL 2015

O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1.800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é

$$s(t) = 1800 \cdot (1,03)^t.$$

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais:

- a) R\$ 7.416,00
- b) R\$ 3.819,24
- c) R\$ 3.709,62
- d) R\$ 3.708,00
- e) R\$ 1.909,62

Solução: O problema pede para calcular o salário de um profissional com 2 anos de serviço, de acordo com a proposta de um sindicato. A expressão que modela o salário (s), em função do tempo de serviço (t) em anos, é dada por:

$$s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t.$$

Onde o valor de 1.800 representa o piso salarial em reais e o fator 1,03 representa um aumento anual de 3%.

i) Identificar o valor de t :

A questão especifica que o profissional possui 2 anos de tempo de serviço. Portanto, o valor a ser utilizado na função é:

$$t = 2.$$

ii) Calcular o salário para $t = 2$:

Substituímos $t = 2$ na função salarial para encontrar o valor correspondente:

$$s(2) = 1.800 \cdot (1,03)^2.$$

Primeiro, calculamos a potência:

$$(1,03)^2 = 1,03 \times 1,03 = 1,0609.$$

Em seguida, multiplicamos esse fator pelo salário base:

$$s(2) = 1.800 \cdot 1,0609$$

$$s(2) = 1909,62.$$

iii) Conclusão:

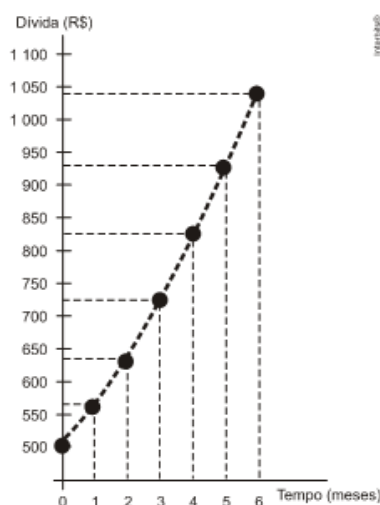
*O salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será de **R\$ 1.909,62**.*

Alternativa correta: e).



Problema 2.15: Habilidade EM13MAT303 - H26 - Enem PPL 2013

Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são:

- a) R\$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.
- b) R\$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.
- c) R\$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.
- d) R\$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.
- e) R\$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

Solução: A questão pede para analisarmos as características de uma dívida de cartão de crédito (saldo inicial, parcela de juros e taxa de juros) com base em seu gráfico de evolução ao longo de 6 meses.

i) Saldo Devedor Inicial:

O saldo devedor inicial corresponde ao valor da dívida no tempo $t = 0$. Observando o gráfico, o ponto que cruza o eixo vertical (Dívida (R\$)) está em 500.

- **Saldo inicial:** R\$ 500,00.

ii) Parcela Mensal de Juros:

O gráfico é uma curva com inclinação crescente, e não uma linha reta. Em uma linha reta, os acréscimos mensais seriam constantes (juros simples). A forma da curva indica que os juros são calculados sobre o montante acumulado (dívida + juros do mês anterior), o que é característico de juros compostos. Neste regime, o valor absoluto dos juros pagos a cada mês aumenta.

- **Parcela mensal de juros:** Variável.

iii) Análise da Taxa de Juros:

Para avaliar se a taxa de juros é superior ou inferior a 10% ao mês, podemos simular o crescimento da dívida com uma taxa fixa de 10% a.m. e comparar com o valor do gráfico. Usamos a fórmula de juros compostos: $M = C(1 + i)^t$.

- Capital inicial (C): R\$ 500,00
- Taxa de teste (i): 10% ou 0,10
- Tempo (t): 6 meses

O montante final (M) seria:

$$M = 500 \cdot (1 + 0,10)^6 = 500 \cdot (1,1)^6.$$

Calculando a potência, temos $(1,1)^6 \approx 1,771561$.

$$M \approx 500 \cdot 1,771561 \approx 885,78.$$

O saldo devedor com uma taxa de 10% ao mês seria de aproximadamente R\$ 885,78. O gráfico, no entanto, mostra que o saldo real após 6 meses foi de R\$ 1.050,00. Como o valor real da dívida (R\$ 1.050,00) é maior que o valor que seria obtido com uma taxa de 10% (R\$ 885,78), podemos concluir que a taxa de juros efetiva é superior a 10% ao mês.

- **Taxa de juros:** Superior a 10% ao mês.

iv) Conclusão:

Reunindo as informações:

- Saldo devedor inicial: R\$ 500,00.
- Parcela mensal de juros: Variável.
- Taxa de juros: Superior a 10% ao mês.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

Uma questão rica em análise gráfica, conceitual e até de educação financeira, que vai além da simples aplicação de fórmulas. A principal distinção pedagógica a ser explorada é a diferença visual entre juros simples cujo gráfico seria uma reta e juros compostos representado pela curva exponencial. O professor deve incitar os alunos a observarem a “velocidade” com que a dívida cresce, notando que os acréscimos mensais não são constantes, o que valida a ideia de uma parcela de juros variável. A análise sobre a taxa ser superior ou inferior a 10% introduz uma importante estratégia de resolução, que é uma espécie de “testagem”. O aluno não precisa encontrar a taxa exata; ele deve apenas usar o valor de referência de 10% para criar um cenário e compará-lo com a realidade do gráfico. Essa habilidade de estimar e comparar é frequentemente mais valorizada no ENEM do que o cálculo exato, que neste caso exigiria logaritmos.

Problema 2.16: Habilidade EM13MAT303 - H19 - Enem 2013

Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo:

- a) afim.
- b) seno.
- c) cosseno.
- d) logarítmica crescente.
- e) exponencial.

Solução: A questão descreve um processo onde a população de uma cultura de bactérias é reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Precisamos identificar o tipo de função matemática que melhor modela esse fenômeno.

i) Análise do Processo:

Vamos analisar o comportamento da população em intervalos de tempo:

- Seja N_0 a população inicial de bactérias (no tempo $t = 0$).
- Após 1 hora ($t = 1$), a população será metade da inicial: $N(1) = N_0 \cdot \frac{1}{2}$.
- Após 2 horas ($t = 2$), a população será metade da população no instante anterior: $N(2) = N(1) \cdot \frac{1}{2} = (N_0 \cdot \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^2$.
- Após 3 horas ($t = 3$), o processo se repete: $N(3) = N(2) \cdot \frac{1}{2} = (N_0 \cdot (\frac{1}{2})^2) \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^3$.

ii) Generalização do Modelo:

Observando o padrão, podemos generalizar a função que descreve a população $N(t)$ em qualquer instante de tempo t (em horas):

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Esta função também pode ser escrita na forma $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t}$.

iii) Classificação da Função:

Uma função do tipo $f(x) = c \cdot a^x$, onde a variável x aparece no expoente e a e c são constantes (com $a > 0$ e $a \neq 1$), é, por definição, uma **função exponencial**.

Neste caso, temos a variável t no expoente e as constantes N_0 e $\frac{1}{2}$. Como a base $\frac{1}{2}$ está entre 0 e 1, a função descreve um decaimento exponencial, mas ainda pertence à família das funções exponenciais. As demais opções não se aplicam:

- **Função afim** ($f(x) = ax + b$): Descreve um decréscimo constante, não proporcional à quantidade existente.
- **Seno e Cosseno**: São funções periódicas, que oscilam, o que não descreve uma redução contínua.
- **Logarítmica crescente**: Descreveria um aumento, não uma redução.

iv) Conclusão:

Portanto, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo **exponencial**.

Alternativa correta: e). ■

Problema 2.17: Habilidade EM13MAT508 - H21 - Enem PPL 2011

Os medicamentos, imediatamente após a ingestão, começam a ser metabolizados pelo organismo, o que faz com que sua concentração no sangue diminua gradualmente, num processo denominado decaimento. Denomina-se meia-vida de uma substância o tempo necessário para que o teor dessa substância no sangue se reduza à metade do valor inicial.

Considere a situação em que um médico prescreveu a um paciente uma dosagem de 800 mg de um medicamento cuja meia-vida é 6 horas, com recomendação de tomar um comprimido a cada 12 horas, durante 3 dias. Para esse medicamento, considera-se superdosagem um teor superior a 1.520 mg, o que causa riscos de intoxicação.

Apressado em recuperar-se a tempo de ir a uma festa, o paciente sugeriu ao médico que mudasse a prescrição para 6 em 6 horas, imaginando que, assim, reduziria o tempo de tratamento. O médico contra-argumentou, informando ao paciente que, caso antecipasse as doses, correria o risco de estar intoxicado em

- a) 12 horas.
- b) 24 horas.
- c) 36 horas.
- d) 48 horas.
- e) 72 horas.

Solução: O problema nos pede para determinar em quanto tempo um paciente estaria intoxicado se seguisse uma posologia alterada de um medicamento. Para isso, vamos calcular passo a passo a quantidade do fármaco no organismo.

i) Dados Fundamentais:

- **Dosagem por comprimido:** 800 mg.
- **Meia-vida do medicamento:** 6 horas. A cada 6 horas, a quantidade presente no organismo se reduz à metade.
- **Posologia alterada:** 1 comprimido a cada 6 horas.
- **Limite de superdosagem (intoxicação):** Quantidade superior a 1.520 mg.

ii) Evolução da Quantidade do Fármaco:

Calculamos a quantidade do medicamento no corpo a cada 6 horas, no momento em que uma nova dose é administrada.

- **$t = 0h$ (Dose 1):** O paciente toma o primeiro comprimido.
Quantidade no organismo: 800 mg.
- **$t = 6h$ (Dose 2):** A quantidade da primeira dose cai pela metade $800 \div 2 = 400mg$. O paciente toma o segundo comprimido.

Quantidade total: $400 \text{ mg} + 800 \text{ mg} = 1.200 \text{ mg}$.

(Abaixo do limite de 1.520 mg)

- **$t = 12\text{h}$ (Dose 3):** *A quantidade anterior 1.200 mg cai pela metade $1.200 \div 2 = 600 \text{ mg}$. O paciente toma o terceiro comprimido.*

Quantidade total: $600 \text{ mg} + 800 \text{ mg} = 1.400 \text{ mg}$.

(Abaixo do limite de 1.520 mg)

- **$t = 18\text{h}$ (Dose 4):** *A quantidade anterior 1.400 mg cai pela metade $1.400 \div 2 = 700 \text{ mg}$. O paciente toma o quarto comprimido.*

Quantidade total: $700 \text{ mg} + 800 \text{ mg} = 1.500 \text{ mg}$.

(Abaixo do limite de 1.520 mg)

- **$t = 24\text{h}$ (Dose 5):** *A quantidade anterior 1.500 mg cai pela metade $1.500 \div 2 = 750 \text{ mg}$. O paciente toma o quinto comprimido.*

Quantidade total: $750 \text{ mg} + 800 \text{ mg} = 1.550 \text{ mg}$.

(Acima do limite de 1.520 mg)

iii) Conclusão:

*No instante em que completa 24 horas, a quantidade do fármaco no organismo (1.550 mg) ultrapassa o limiar de intoxicação de 1.520 mg . Portanto, ao antecipar as doses para cada 6 horas, o paciente correria o risco de estar intoxicado em **24 horas**.*

Alternativa correta: b). ■

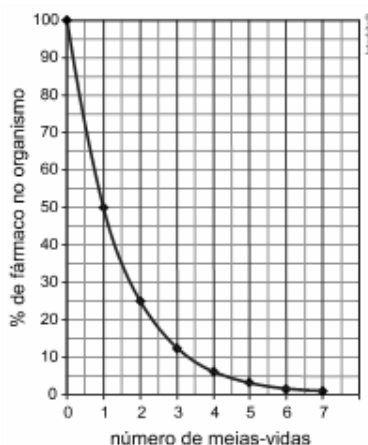
Comentário Pedagógico

Neste problema, que articula a habilidade EM13MAT508 da BNCC com a competência H21 do ENEM, o principal obstáculo cognitivo para o aluno reside na ideia de acumulação contínua. Em sala de aula, o erro mais frequente é o estudante analisar apenas o decaimento de uma dose isolada, esquecendo-se de somar o resíduo do fármaco que ainda permanece no organismo no momento da nova ingestão.

O professor pode utilizar esta questão como um excelente laboratório prático para conectar o decaimento exponencial com a Progressão Geométrica (PG). Do ponto de vista didático, a construção do passo a passo iterativo, como mostrado na resolução, é a estratégia mais eficaz para evitar bloqueios. Essa abordagem retira a abstração matemática e mostra visualmente como o limite de toxicidade de 1.520 mg vai sendo perigosamente alcançado. Além disso, é uma oportunidade fantástica para debater o letramento científico e a utilidade real da matemática na compreensão de bulas e prescrições médicas no cotidiano do estudante.

Problema 2.18: Habilidade EM13MAT508 - H20, H25 - Enem 2007

A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30min será aproximadamente de:

- a) 10%
- b) 15%
- c) 25%
- d) 35%
- e) 50%

Solução: A questão pede para encontrarmos o percentual aproximado de uma dose do antibiótico amoxicilina que permanece no organismo de um paciente em um determinado horário. Para isso, devemos usar o gráfico fornecido, que relaciona o percentual de um fármaco com o número de meias-vidas decorridas.

i) Calcular o Número de Meias-Vidas:

O primeiro passo é determinar quantas meias-vidas se passaram entre o momento da injeção e o momento da verificação.

- **Horário da injeção da dose:** 12h 00min.
- **Horário da verificação:** 13h 30min.
- **Tempo total decorrido:** de 12h 00min até 13h 30min, temos 1 hora e 30 minutos, o

que equivale a **1,5 horas**.

- **Meia-vida da amoxicilina:** Conforme o enunciado, é de 1 hora.

Para encontrar o número de meias-vidas, dividimos o tempo total decorrido pelo tempo de uma meia-vida:

$$\text{Número de meias-vidas} = \frac{\text{Tempo decorrido}}{\text{Duração da meia-vida}} = \frac{1,5 \text{ horas}}{1 \text{ hora}} = 1,5.$$

Portanto, no horário de 13h 30min, terão se passado **1,5 meias-vidas**.

ii) Interpretação do Gráfico:

Agora, usamos o gráfico para encontrar o percentual do fármaco correspondente a 1,5 meias-vidas.

- Localizamos o valor **1,5** no eixo horizontal (“número de meias-vidas”). Este valor está posicionado exatamente entre os marcadores 1 e 2.
- A partir desse ponto (1,5), traçamos uma linha vertical até encontrar a curva de decaimento.
- Do ponto de interseção na curva, traçamos uma linha horizontal para a esquerda, em direção ao eixo vertical (“% de fármaco no organismo”).
- O valor que essa linha atinge no eixo vertical é a resposta. Observando o gráfico, esse valor está entre 30% e 40%. Uma leitura visual cuidadosa indica um valor aproximado de 35%.

iii) Conclusão:

De acordo com o gráfico, após 1,5 meias-vidas, o percentual da dose que restará no organismo do paciente será de aproximadamente **35%**.

Alternativa correta: d). ■

3 Questões UECE

Nesta seção serão expostas as questões do vestibular da Universidade Estadual do Ceará (UECE) sobre o assunto Função Exponencial e Função Logarítmica (Logaritmos em geral), e após cada questão sua resolução bem detalhada para ajudar tanto ao discente leitor, quanto ao docente leitor deste produto educacional. Todos problemas podem ser acessadas na íntegra em (Universidade Estadual do Ceará, 2025).

Problema 3.1: Habilidade EM13MAT403 - H20 - UECE 2025

Considerando as funções reais de variável real f , g , h , k e q assim definidas: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \sin(x)$, $k(x) = \cos(x)$ e $q(x) = \log_2(x^2 + 1)$, onde $\log_2 m$ denota o logaritmo de m na base 2, analise as seguintes afirmações:

- I . Ao representarmos graficamente as funções f e g , em um plano munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, verificamos que seus gráficos possuem exatamente 3 (três) pontos de interseção.
- II . As funções h e k são periódicas com períodos π e 2π respectivamente.
- III . A função q é uma função par.
- IV . O menor número do conjunto imagem da função composta $g \circ f$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, é igual a 1.

O número de afirmações verdadeiras é

- a) dois.
- b) um.
- c) quatro.
- d) três.

Solução: *Vamos analisar cada uma das afirmações propostas.*

i) Análise da Afirmação I: Interseção de f e g .

A afirmação diz que os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ se intersectam em exatamente três pontos. Os pontos de interseção são as soluções da equação $x^2 = 2^x$.

- **Para $x = 2$:** $2^2 = 4$ e $2^2 = 4$. Correto.
- **Para $x = 4$:** $4^2 = 16$ e $2^4 = 16$. Correto.
- **Para $x < 0$:** Por inspeção gráfica ou métodos numéricos, observa-se que existe uma terceira raiz para um valor negativo de x (aproximadamente $x \approx -0.76$).

Portanto, a afirmação I é **verdadeira**.

ii) Análise da Afirmação II: Período de h e k .

A afirmação diz que os períodos de $h(x) = \sin(x)$ e $k(x) = \cos(x)$ são π e 2π , respectivamente.

- O período fundamental da função seno, $h(x) = \sin(x)$, é 2π .
- O período fundamental da função cosseno, $k(x) = \cos(x)$, também é 2π .

A afirmação está incorreta ao dizer que o período da função seno é π . Portanto, a afirmação II é **falsa**.

iii) Análise da Afirmação III: Paridade da função q .

A afirmação diz que $q(x) = \log_2(x^2 + 1)$ é uma função par. Uma função é par se, para todo x em seu domínio, $q(-x) = q(x)$. Vamos verificar:

$$q(-x) = \log_2((-x)^2 + 1) = \log_2(x^2 + 1) = q(x).$$

A condição é satisfeita. Portanto, a afirmação III é **verdadeira**.

iv) Análise da Afirmação IV: Imagem da função composta.

A afirmação diz que o menor valor da imagem da função composta $(g \circ f)(x)$ é 1. A função composta é:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2}.$$

Para encontrar o menor valor da imagem, precisamos encontrar o menor valor que a função pode assumir. O expoente x^2 tem como valor mínimo 0, que ocorre quando $x = 0$. Assim, o menor valor de 2^{x^2} é $2^0 = 1$. Portanto, a afirmação IV é **verdadeira**.

v) Conclusão:

Temos três afirmações verdadeiras (I, III e IV) e uma falsa (II). O número de afirmações verdadeiras é 3.

Alternativa correta: d).

Comentário Pedagógico

Neste problema inaugural da seção da UECE, que mobiliza a habilidade EM13MAT403 da BNCC, nos deparamos com o rigor matemático e a multiplicidade de conceitos característicos dos vestibulares tradicionais. O grande desafio didático aqui é a exigência de que o aluno transite fluidamente entre diversas classes de funções (quadrática, exponencial, trigonométrica e logarítmica) e analise suas propriedades formais, como paridade, periodicidade e composição, em um único item.

Em sala de aula, a afirmação I é, sem dúvida, o principal ponto de atenção e onde ocorrem os maiores “escorregões”. É extremamente comum que os estudantes, ao tentarem resolver a equação $x^2 = 2^x$, testem mentalmente apenas valores positivos e encontrem as raízes óbvias $x = 2$ e $x = 4$, concluindo erroneamente que existem apenas dois pontos de interseção. O professor pode aproveitar este momento para incentivar o esboço gráfico intuitivo (ou o uso de ferramentas digitais como o GeoGebra) para mostrar que a parábola com concavidade para cima e a curva exponencial crescente obrigatoriamente se cruzam uma terceira vez no semieixo negativo. Além disso, a análise do valor mínimo da função composta no item IV é um excelente exercício teórico para consolidar a ideia de que a imagem da função “de dentro” ($f(x)$) atua como o domínio da função “de fora” ($g(x)$).



Problema 3.2: Habilidade EM13MAT305 - H21 - UECE 2025

Se o valor de x maior que 1 satisfaz a equação $\log_x(2x+3) = 2$ e é o total de pessoas que estão aguardando para entrar no cinema, então, a quantidade de maneiras diferentes de organizar estas pessoas em fila é:

Nota: Veja que o $\log_x k$ é o logaritmo de k na base x .

- a) 2.
- b) 4.
- c) 6.
- d) 8.

Solução: Este problema tem duas etapas: primeiro, devemos resolver a equação logarítmica para determinar o número de pessoas e, em seguida, usar esse número para calcular a quantidade de filas possíveis.

i) Resolução da Equação Logarítmica:

A equação dada é:

$$\log_x(2x+3) = 2.$$

Para que o logaritmo seja bem definido, devemos satisfazer as seguintes condições de existência:

- A base x deve ser positiva e diferente de 1: $x > 0$ e $x \neq 1$.
- O logaritmando $(2x+3)$ deve ser positivo: $2x+3 > 0 \implies x > -1.5$.

O enunciado também nos informa que $x > 1$. A interseção de todas essas condições é simplesmente $x > 1$.

Agora, aplicamos a definição de logaritmo ($\log_b a = c \iff b^c = a$) à equação:

$$x^2 = 2x + 3.$$

Reorganizamos os termos para formar uma equação quadrática padrão:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Resolvendo esta equação (por soma e produto ou Bhaskara), encontramos as raízes:

$$(x-3)(x+1) = 0.$$

As soluções são $x = 3$ e $x = -1$.

Avaliando as soluções com base na nossa condição de existência ($x > 1$), descartamos $x = -1$. Portanto, a única solução válida é $x = 3$. Isso significa que há 3 pessoas aguardando para entrar no cinema.

ii) Cálculo das Maneiras de Organizar a Fila:

A quantidade de maneiras diferentes de organizar 3 pessoas distintas em uma fila é dada pela permutação de 3 elementos, ou seja, $3!$ (3 fatorial).

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Existem 6 maneiras distintas de organizar as três pessoas na fila.

Alternativa correta: c).



Problema 3.3: Habilidade EM13MAT304 - H21 - UECE 2025

Uma instituição financeira realiza aplicação monetária a médio e longo prazos, ficando a aplicação modelada (descrita com excelente aproximação) pela função exponencial $f(t) = p \cdot 2^{0,0625t}$ em que o parâmetro p representa o capital inicial a ser aplicado e t a variável tempo, medida em anos. Sendo assim, é correto afirmar que o tempo necessário a partir do momento inicial da aplicação de um certo capital para a sua duplicação é

- a) 10 anos.
- b) 16 anos.
- c) 12 anos.
- d) 14 anos.

Solução: A função que modela a aplicação financeira é dada por:

$$f(t) = p \cdot 2^{0,0625t}.$$

Nesta função, p é o capital inicial e t é o tempo em anos.

O objetivo é encontrar o tempo t necessário para que o capital inicial dobre. A condição para a duplicação do capital é que o montante final, $f(t)$, seja igual a duas vezes o capital inicial, ou seja, $f(t) = 2p$.

Substituindo esta condição na função, obtemos a seguinte equação:

$$2p = p \cdot 2^{0,0625t}.$$

Podemos simplificar a equação dividindo ambos os lados por p (considerando que o capital inicial p é diferente de zero):

$$2 = 2^{0,0625t}.$$

Como as bases da exponencial são iguais em ambos os lados da equação, podemos igualar seus expoentes. Lembrando que 2 é o mesmo que 2^1 :

$$1 = 0,0625t.$$

Agora, isolamos a variável t para encontrar o tempo:

$$t = \frac{1}{0,0625}.$$

Para facilitar o cálculo, podemos converter o decimal em fração: $0,0625 = \frac{625}{10000} = \frac{1}{16}$.

$$t = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16.$$

Portanto, o tempo necessário para que o capital aplicado dobre é de **16 anos**.

Alternativa correta: b).



Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT304 da BNCC e dialoga com a competência H21, exploramos a Matemática Financeira sob a ótica das funções exponenciais. Do ponto de vista didático, o primeiro obstáculo surge logo na interpretação do enunciado: é comum que muitos estudantes paralitem por não conhecerem o valor numérico do capital inicial p . Este é o momento ideal para o professor reforçar que, na busca pelo tempo de duplicação, o montante inicial é irrelevante, o que fica algebricamente provado pelo cancelamento da variável p em ambos os lados da equação $2p = p \cdot 2^{0,0625t}$.

O segundo grande gargalo na sala de aula é a manipulação aritmética. Resolver a equação $1 = 0,0625t$ dividindo o número 1 por um número decimal com quatro casas costuma gerar muitos erros de cálculo e frustração. A estratégia pedagógica aqui é incentivar o aluno a trabalhar com frações, mostrando que 0,0625 é equivalente a $\frac{1}{16}$. Essa simples conversão transforma uma divisão incômoda em uma percepção direta, desenvolvendo a fluência numérica do discente e dando-lhe muito mais agilidade para enfrentar as provas tradicionais da UECE.

Problema 3.4: Habilidade EM13MAT508 - H19, H21 - UECE 2024

Sejam $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $f : N^* \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = p \cdot q^x$, onde p e q são números reais. Se a imagem de f é a progressão geométrica $a_n = f(n)$ com $a_1 = 1$ e razão igual a -2 , então, a soma $p + q$ é igual a

- a) $-3/2$.
- b) $-7/2$.
- c) $-5/2$.
- d) $-9/2$.

Solução: O problema afirma que a imagem da função $f(n) = p \cdot q^n$ é uma progressão geométrica (PG) com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = -2$.

i) Expressão do Termo Geral da PG:

A fórmula para o termo geral de uma progressão geométrica é $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Com os dados fornecidos, temos:

$$a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}.$$

ii) Relação entre a Função e a PG:

A condição de que a imagem de f é a PG significa que $f(n) = a_n$. Portanto, podemos igualar as duas expressões:

$$p \cdot q^n = (-2)^{n-1}.$$

Para encontrar os valores de p e q , precisamos reescrever o lado direito da equação para que ele tenha a mesma forma do lado esquerdo, ou seja, uma constante multiplicada por uma potência de expoente n . Utilizando as propriedades de potências:

$$(-2)^{n-1} = (-2)^n \cdot (-2)^{-1} = (-2)^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^n.$$

Agora, a equação fica na forma:

$$p \cdot q^n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^n.$$

iii) Identificação de p , q e Cálculo da Soma:

Comparando os dois lados da equação, identificamos diretamente os valores de p e q :

- $p = -\frac{1}{2}$;
- $q = -2$.

A questão pede o valor da soma $p + q$:

$$p + q = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{5}{2}.$$

O valor da soma é $-\frac{5}{2}$.

Alternativa correta: c).



Problema 3.5: Habilidades EM13MAT303 e EM13MAT305 - H21 e H19 - UECE 2024

Um investidor aplicou, no sistema de juros compostos, certa quantia em uma instituição financeira que remunera as aplicações à taxa de 1% mensal. Assim, é correto afirmar que o número de meses, a partir da aplicação, em que o capital inicial será dobrado é igual a

Use os valores aproximados: $\log(1,01) = 0,0043$ e $\log(2) = 0,30103$.

- a) 74.
- b) 68.
- c) 72.
- d) 70.

Solução: Para resolver um problema de juros compostos, utilizamos a fórmula do montante:

$$M = C(1 + i)^t.$$

Onde:

- M é o montante final;
- C é o capital inicial;
- i é a taxa de juros por período;
- t é o número de períodos (meses, neste caso).

A taxa de juros mensal fornecida é de $i = 1\% = 0,01$. O objetivo é encontrar o tempo t em que o capital inicial será dobrado, o que nos dá a condição $M = 2C$.

i) Montagem da Equação:

Substituindo a condição $M = 2C$ e a taxa $i = 0,01$ na fórmula, temos:

$$2C = C(1 + 0,01)^t.$$

Simplificamos a equação dividindo ambos os lados pelo capital inicial C :

$$2 = (1,01)^t.$$

ii) Solução com Logaritmos:

Como a incógnita t está no expoente, a ferramenta adequada para resolver a equação é o logaritmo. Aplicamos o logaritmo decimal (base 10) em ambos os lados:

$$\log(2) = \log(1,01^t).$$

Utilizando a propriedade do logaritmo de uma potência, que nos permite “descer” o expoente, temos:

$$\log(2) = t \cdot \log(1,01).$$

Agora, substituimos os valores aproximados que foram fornecidos no enunciado:

$$0,30103 = t \cdot 0,0043.$$

Finalmente, isolamos t :

$$t = \frac{0,30103}{0,0043}.$$

$$t \approx 70,0069...$$

O número de meses necessários é, portanto, aproximadamente 70.

Alternativa correta: d). ■

Comentário Pedagógico

Embora o tema de juros compostos seja recorrente no ENEM, esta questão da UECE se diferencia pela exigência explícita do cálculo com logaritmos, uma habilidade que o ENEM geralmente busca contornar. A questão é um exemplo canônico para o professor ilustrar o propósito fundamental dos logaritmos: resolver equações exponenciais onde não é possível igualar as bases. O enunciado, ao fornecer os valores aproximados de ‘ $\log(1,01)$ ’ e ‘ $\log(2)$ ’, funciona como um sinal claro para o aluno sobre o método que deverá ser utilizado. O professor deve treinar os estudantes a reconhecerem essas “dicas” como parte do roteiro de resolução. A questão serve, portanto, como uma avaliação direta da capacidade do aluno em aplicar a propriedade do logaritmo da potência para isolar uma variável no expoente, uma competência de fluidez algébrica.

Problema 3.6: Habilidade EM13MAT305 - H21 - UECE 2024

Sobre a equação logarítmica $3 - 2 \cdot \log_2(2 + x) - 2 \cdot \log_2(2 - x) = 0$, é correto afirmar que

Dados: $\log_2 z \equiv$ logaritmo de z na base 2

- a) a equação não possui solução real.
- b) a equação possui uma única solução real.
- c) a equação possui duas soluções reais positivas.
- d) a equação possui duas soluções reais: uma positiva e a outra negativa.

Solução: Para analisar as soluções da equação, seguiremos três passos: determinar a condição de existência (domínio), resolver a equação e, por fim, verificar se as soluções encontradas pertencem a esse domínio.

i) Condição de Existência:

Para que os logaritmos na equação sejam definidos no conjunto dos números reais, seus logaritmandos devem ser estritamente positivos.

- $2 + x > 0 \implies x > -2$.
- $2 - x > 0 \implies x < 2$.

A interseção das duas condições nos dá o domínio de validade para as soluções: $-2 < x < 2$.

ii) Resolvendo a Equação:

A equação original é:

$$3 - 2\log_2(2 + x) - 2\log_2(2 - x) = 0.$$

Primeiro, vamos isolar os termos logarítmicos:

$$3 = 2\log_2(2 + x) + 2\log_2(2 - x).$$

$$3 = 2[\log_2(2 + x) + \log_2(2 - x)].$$

Usando a propriedade da soma de logaritmos ($\log a + \log b = \log(ab)$):

$$3 = 2 \cdot \log_2[(2 + x)(2 - x)].$$

O produto no argumento é um produto notável (diferença de quadrados): $(2 + x)(2 - x) = 4 - x^2$. Logo,

$$3 = 2 \cdot \log_2(4 - x^2).$$

Isolando o logaritmo, obtemos:

$$\frac{3}{2} = \log_2(4 - x^2).$$

Aplicando a definição de logaritmo ($\log_b a = c \iff b^c = a$):

$$4 - x^2 = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Isolando x^2 , temos:

$$x^2 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

As possíveis soluções para x são, portanto:

$$x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

iii) Verificação das Soluções:

Agora, devemos verificar se as soluções encontradas satisfazem a condição de existência, que é $-2 < x < 2$. Esta condição é equivalente a $x^2 < 4$.

- Como $\sqrt{2} \approx 1,414$, o valor de $2\sqrt{2} \approx 2,828$.
- O valor de x^2 é $4 - 2\sqrt{2} \approx 4 - 2,828 = 1,172$.
- Como $0 < 1,172 < 4$, o valor de x^2 é válido.

Isso nos leva a duas soluções reais e distintas: $x_1 = +\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ (que é uma solução positiva) e $x_2 = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ (que é uma solução negativa). Ambas pertencem ao domínio.

iv) Conclusão:

A equação possui duas soluções reais, uma positiva e outra negativa.

Alternativa correta: d).



Problema 3.7: Habilidade EM13MAT304 - H21 - UECE 2023

A taxa de evaporação de água de um reservatório (lugar reservado para represar ou acumular grande quantidade de água; açude) é proporcional à quantidade de água nele existente. Em um determinado reservatório, a quantidade de água após t meses de evaporação é dada por $q(t) = k \cdot e^{-0,1t}$, onde k é a quantidade inicial de água e t é o tempo dado em meses. Aproximadamente, o tempo, em meses, até que a água deste reservatório, em contínua evaporação, se reduza a um quarto do que era inicialmente é igual a

Você pode considerar que o logaritmo natural de quatro é aproximadamente igual a 1,3863.

- a) 11.
- b) 13.
- c) 12.
- d) 14.

Solução: A função que descreve a quantidade de água no reservatório ao longo do tempo é uma função de decaimento exponencial:

$$q(t) = k \cdot e^{-0,1t}.$$

onde k é a quantidade inicial e t é o tempo em meses.

i) Estabelecendo a Condição do Problema:

O problema pede para encontrar o tempo t em que a quantidade de água será um quarto ($1/4$) da quantidade inicial. Matematicamente, esta condição é:

$$q(t) = \frac{1}{4}k.$$

Substituindo esta condição na função de decaimento, temos:

$$\frac{k}{4} = k \cdot e^{-0,1t}.$$

Podemos simplificar a equação dividindo ambos os lados por k , que é diferente de zero (a quantidade inicial):

$$\frac{1}{4} = e^{-0,1t}.$$

ii) Resolvendo a Equação Exponencial:

Como a incógnita t está no expoente de uma potência de base e , a maneira mais direta de resolver é aplicando o logaritmo natural ($\ln$) em ambos os lados da equação:

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(e^{-0,1t}).$$

Usando as propriedades dos logaritmos, sabemos que $\ln(1/a) = -\ln(a)$ e $\ln(e^x) = x$. Aplicando-as, a equação se torna:

$$-\ln(4) = -0,1t.$$

Multiplicando ambos os lados por -1 , obtemos:

$$\ln(4) = 0,1t.$$

O enunciado fornece o valor aproximado $\ln(4) \approx 1,3863$. Substituindo na equação:

$$1,3863 = 0,1t.$$

Finalmente, isolamos t :

$$t = \frac{1,3863}{0,1} = 13,863.$$

iii) Conclusão:

O tempo necessário é de 13,863 meses. O valor aproximado solicitado é, portanto, 14 meses.

Alternativa correta: d). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT304 da BNCC, retornamos à modelagem de fenômenos de decaimento, mas agora com o rigor algébrico exigido pela UECE por meio da base e e do logaritmo natural ($\ln$).

No cotidiano da sala de aula, o surgimento do $\ln$ costuma causar grande estranheza e bloqueio imediato nos estudantes, que muitas vezes o encaram como um “bicho de sete cabeças” desconectado do que já aprenderam. O professor deve aproveitar esta questão para desmistificar o logaritmo natural, provando que ele opera exatamente com as mesmas propriedades dos logaritmos convencionais. A manipulação da fração na passagem de $\ln(\frac{1}{4})$ para $-\ln(4)$ e a aplicação de propriedade para “resgatar” a variável t em $\ln(e^{-0,1t})$ são momentos cirúrgicos para o docente consolidar a maturidade algébrica da turma. Além disso, reforça-se o letramento matemático ao evidenciar que o tempo de evaporação para uma determinada proporção (um quarto) independe do volume inicial k do reservatório.

Problema 3.8: Habilidade EM13MAT304 - H21 - UECE 2023

Uma cultura de bactérias cresce obedecendo à função $f(t) = c \cdot 3^{2t}$ onde c é uma constante positiva e t é o tempo medido em horas. O valor de t para que a quantidade inicial de bactérias fique multiplicada por nove é

- a) 1/2 hora.
- b) 1 hora.
- c) 1 hora e meia.
- d) 2 horas.

Solução: A função que modela o crescimento da cultura de bactérias é dada por:

$$f(t) = c \cdot 3^{2t}.$$

A constante positiva c representa a quantidade inicial de bactérias, pois no tempo $t = 0$, temos $f(0) = c \cdot 3^{2 \cdot 0} = c \cdot 3^0 = c \cdot 1 = c$.

i) Estabelecendo a Condição do Problema:

O problema pede para encontrar o tempo t em que a quantidade de bactérias será nove vezes a quantidade inicial (c). A condição matemática é:

$$f(t) = 9c.$$

Substituindo a expressão da função nesta condição, montamos a seguinte equação:

$$c \cdot 3^{2t} = 9c.$$

ii) Resolvendo a Equação Exponencial: Podemos simplificar a equação dividindo ambos os lados pela constante c :

$$3^{2t} = 9.$$

Para resolver esta equação, precisamos expressar ambos os lados com a mesma base. Como $9 = 3^2$, podemos reescrever a equação como:

$$3^{2t} = 3^2.$$

Com as bases iguais, podemos igualar os expoentes:

$$2t = 2.$$

Isolando t , obtemos:

$$t = \frac{2}{2} = 1.$$

O tempo necessário para que a quantidade de bactérias seja multiplicada por nove é de 1 hora.

iii) Conclusão:

Alternativa correta: b). ■

Problema 3.9: Habilidade EM13MAT305 - H21 - UECE 2023

Considere as funções reais $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais positivos, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_3 x$. Se x_1 e x_2 são os possíveis valores de x que satisfazem à condição $f(x) \cdot g(x) = \log 2 \cdot \log 3$, então, o produto $x_1 \cdot x_2$ é igual a

Nota: $\log x$ indica o logaritmo de x na base 10.

- a) 1.
- b) 6.
- c) 3.
- d) 2.

Solução: A condição a ser satisfeita é dada pela equação:

$$f(x) \cdot g(x) = \log 2 \cdot \log 3.$$

Substituindo as definições das funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:

$$(\log_2 x) \cdot (\log_3 x) = \log 2 \cdot \log 3.$$

i) Mudança de Base dos Logaritmos:

Para resolver a equação, é conveniente que todos os logaritmos estejam na mesma base. Utilizaremos a base 10, conforme indicado na nota do enunciado. A fórmula da mudança de base é $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$. Aplicando-a, obtemos:

$$\left(\frac{\log x}{\log 2} \right) \cdot \left(\frac{\log x}{\log 3} \right) = \log 2 \cdot \log 3.$$

ii) Resolvendo a Equação:

Agora, podemos simplificar a expressão algebricamente:

$$\frac{(\log x)^2}{\log 2 \cdot \log 3} = \log 2 \cdot \log 3.$$

Multiplicamos ambos os lados por $(\log 2 \cdot \log 3)$ para isolar $(\log x)^2$:

$$(\log x)^2 = (\log 2 \cdot \log 3) \cdot (\log 2 \cdot \log 3)$$

$$(\log x)^2 = (\log 2 \cdot \log 3)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, encontramos duas possibilidades para $\log x$:

$$\log x = \pm(\log 2 \cdot \log 3).$$

Isso nos leva a duas soluções distintas para x , que chamaremos de x_1 e x_2 .

- $\log x_1 = \log 2 \cdot \log 3 \implies x_1 = 10^{(\log 2 \cdot \log 3)}$.
- $\log x_2 = -(\log 2 \cdot \log 3) \implies x_2 = 10^{-(\log 2 \cdot \log 3)}$.

iii) Cálculo do Produto:

A questão pede o valor do produto $x_1 \cdot x_2$.

$$x_1 \cdot x_2 = 10^{(\log 2 \cdot \log 3)} \cdot 10^{-(\log 2 \cdot \log 3)}.$$

Utilizando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$), somamos os expoentes:

$$x_1 \cdot x_2 = 10^{(\log 2 \cdot \log 3) - (\log 2 \cdot \log 3)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 10^0$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Alternativa correta: a). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que exige a habilidade EM13MAT305, entramos na manipulação algébrica de logaritmos, uma exigência muito característica das provas da UECE. O principal desafio didático aqui é a aplicação da temida “Mudança de Base”, que inclusive muitos professores pulam por cair pouco em vestibulares menos tradicionais, o que não é o caso da UECE. Na sala de aula, os estudantes costumam memorizar essa fórmula de forma mecânica, o que gera insegurança e bloqueios quando se deparam com a multiplicação de funções logarítmicas com bases distintas ($f(x) \cdot g(x)$).

O professor pode utilizar esta resolução para mostrar a elegância da mudança para a base 10, que permite transformar a equação inicial numa relação muito mais familiar e visualmente mais simples. Outro ponto forte no qual os alunos frequentemente “escorregam” é no momento de extrair a raiz quadrada de $(\log x)^2$. É extremamente comum que considerem apenas a raiz positiva, encontrando apenas x_1 e ignorando por completo a solução x_2 . Isso ocorre porque os alunos misturam muito a geometria com a álgebra, pois quando eles aprendem Teorema de Pitágoras, é comum os professores não comentarem da existência do $\pm$ quando se extraem as raízes. Alertar para este detalhe algébrico (o uso do $\pm$) é fundamental. Por fim, a manipulação das potências de base 10 para calcular o produto $x_1 \cdot x_2$ coroa a questão, exigindo que o aluno articule em simultâneo as propriedades dos logaritmos e das exponenciais.

Problema 3.10: Habilidade EM13MAT304 - H21 - UECE 2022

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função definida por $f(x) = b \cdot a^x$ onde a e b são números reais positivos, $a \neq 1$. Se $f(1) = 8$ e $f(2) = 16$, então, o valor de $f(4)$ é

- a) 48.
- b) 24.
- c) 32.
- d) 64.

Solução: Para encontrar o valor de $f(4)$, primeiro precisamos determinar os valores das constantes a e b da função exponencial $f(x) = b \cdot a^x$, utilizando as informações fornecidas.

i) Montagem do Sistema de Equações: As condições dadas, $f(1) = 8$ e $f(2) = 16$, nos permitem criar um sistema de duas equações com duas incógnitas (a e b):

1. A partir de $f(1) = 8$: $b \cdot a^1 = 8 \implies ab = 8$.

2. A partir de $f(2) = 16$: $b \cdot a^2 = 16$.

O sistema é:

$$\begin{cases} ab = 8 & (I), \\ a^2b = 16 & (II). \end{cases}$$

ii) Resolvendo o Sistema:

Uma maneira eficiente de resolver este sistema é dividir a equação (II) pela equação (I):

$$\frac{a^2b}{ab} = \frac{16}{8}.$$

Simplificando a fração, cancelamos os termos b e a , obtendo o valor de a :

$$a = 2.$$

Com o valor de a em mãos, substituímos na equação (I) para encontrar b :

$$b = 8 \implies b = \frac{8}{2} = 4.$$

Assim, as constantes da função são $a = 2$ e $b = 4$.

iii) Calculando o Valor de $f(4)$:

A função específica é $f(x) = 4 \cdot 2^x$. Agora, podemos calcular o valor de $f(4)$ substituindo $x = 4$:

$$f(4) = 4 \cdot 2^4.$$

Primeiro, calculamos a potência: $2^4 = 16$. Logo,

$$f(4) = 4 \cdot 16 = 64.$$

iv) Conclusão:

O valor de $f(4)$ é 64.

Alternativa correta: d).



Problema 3.11: Habilidade EM13MAT403 - H20 - UECE 2022

Considere o plano $\mathbb{R}^2$ munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, onde são representadas as funções $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O gráfico de g é simétrico ao gráfico de f em relação à reta r , dada por $y = a$, se para cada $x \in A$ a reta r é a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$. Se $f(x) = 2 \cdot 3^x$ e g é a função cujo gráfico é simétrico ao gráfico de f em relação à reta $y = 2$, então, a expressão de $h(x) = g(x)/f(x)$ é igual a

- a) $-2 + 3^x$.
- b) $2 - 3^{-x}$.
- c) $-1 + 2 \cdot 3^{-x}$.
- d) $1 - 2 \cdot 3^x$.

Solução: Para encontrar a expressão de $h(x)$, primeiro precisamos determinar a expressão da função $g(x)$ a partir da condição de simetria fornecida.

i) Interpretando a Condição de Simetria:

A definição de simetria dada no enunciado diz que a reta $y = a$ é a mediatriz do segmento vertical que une os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$. Isso significa que a altura $y = a$ é o ponto médio das alturas $f(x)$ e $g(x)$. Matematicamente, a média das coordenadas verticais é igual a 'a':

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} = a.$$

No problema, a reta de simetria é $y = 2$, então $a = 2$. A relação se torna:

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} = 2.$$

ii) Encontrando a Expressão de $g(x)$:

Podemos isolar $g(x)$ na equação da simetria:

$$f(x) + g(x) = 4$$

$$g(x) = 4 - f(x).$$

Como sabemos que $f(x) = 2 \cdot 3^x$, podemos substituir para encontrar a expressão explícita de $g(x)$:

$$g(x) = 4 - 2 \cdot 3^x.$$

iii) Calculando $h(x)$:

A questão pede a expressão da função $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. Substituindo as expressões de $g(x)$ e $f(x)$ que já conhecemos:

$$h(x) = \frac{4 - 2 \cdot 3^x}{2 \cdot 3^x}.$$

Para simplificar esta fração, podemos dividi-la em duas partes:

$$h(x) = \frac{4}{2 \cdot 3^x} - \frac{2 \cdot 3^x}{2 \cdot 3^x}.$$

Agora, simplificamos cada termo separadamente:

- $\frac{4}{2 \cdot 3^x} = \frac{2}{3^x} = 2 \cdot 3^{-x}.$
- $\frac{2 \cdot 3^x}{2 \cdot 3^x} = 1.$

Juntando os termos simplificados, temos:

$$h(x) = 2 \cdot 3^{-x} - 1.$$

Que é equivalente a $h(x) = -1 + 2 \cdot 3^{-x}.$

iv) Conclusão:

A expressão de $h(x)$ é $-1 + 2 \cdot 3^{-x}.$

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT403 da BNCC, a UECE apresenta um excelente desafio que cruza a geometria analítica com a álgebra das funções exponenciais. O principal obstáculo didático na sala de aula é a interpretação analítica da simetria. Os estudantes estão habituados a visualizar a simetria apenas como um “reflexo” no plano cartesiano, mas revelam enorme dificuldade em traduzir essa ideia geométrica para a equação do ponto médio $\frac{f(x)+g(x)}{2} = 2$. O professor pode utilizar esta questão para trabalhar ativamente essa importante conversão de linguagens.

Além disso, o cálculo final de $h(x)$ esbarra num erro clássico de manipulação algébrica. Ao depararem-se com a fração $\frac{4-2 \cdot 3^x}{2 \cdot 3^x}$, muitos alunos sentem a forte tentação de “cortar” diretamente o termo $2 \cdot 3^x$ do numerador com o do denominador, ignorando por completo a subtração. Este é o momento ideal para reforçar a propriedade de separação de frações com denominadores comuns e o uso do expoente negativo (3^{-x}), consolidando a fluência algébrica e o letramento matemático necessários para enfrentar provas com este elevado nível de rigor. No entanto, é preciso admitir que nesta questão a UECE pegou um pouco pesado no nível de abstração da interpretação.

Problema 3.12: Habilidades EM13MAT304 e EM13MAT508 - H21 - UECE 2022

O rádio é uma substância radioativa que se desintegra espontaneamente ao longo do tempo. Sua desintegração pode ser descrita matematicamente pela expressão $Q(t) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.001t}$ onde K é a quantidade inicial de rádio e $Q(t)$ é a quantidade ainda presente após t anos. Observa-se que, após transcorridos 1000 anos, ocorre uma redução percentual, relativa à quantidade inicial, de aproximadamente 33,33%. Quando decorridos 2000 anos, a redução percentual (relativa à quantidade inicial) aproximada será de

- a) 55,55%.
- b) 88,88%.
- c) 66,66%.
- d) 77,77%.

Solução: O problema pede para calcular a redução percentual da quantidade de rádio após um período de 2000 anos.

i) Cálculo da Quantidade Remanescente após 2000 anos:

A função que descreve a quantidade de rádio (Q) em função do tempo (t) é:

$$Q(t) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.001t}.$$

Vamos calcular a quantidade que resta para $t = 2000$ anos:

$$Q(2000) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.001 \cdot 2000}.$$

Primeiro, simplificamos o expoente:

$$-0.001 \times 2000 = -2.$$

A expressão para $Q(2000)$ se torna:

$$Q(2000) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}.$$

Usando a propriedade do expoente negativo, que inverte a base ($(a/b)^{-n} = (b/a)^n$):

$$Q(2000) = K \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = K \cdot \frac{4}{9}.$$

Isso nos diz que, após 2000 anos, $\frac{4}{9}$ da quantidade inicial K ainda está presente.

ii) Cálculo da Redução Percentual:

A quantidade que se desintegrou (a redução) é a diferença entre a quantidade inicial (K) e a quantidade remanescente ($Q(2000)$):

$$\text{Redução} = K - Q(2000) = K - \frac{4}{9}K = \frac{9K - 4K}{9} = \frac{5}{9}K.$$

A redução percentual é a razão entre a quantidade reduzida e a quantidade inicial, multiplicada por 100%:

$$\text{Redução Percentual} = \frac{\text{Redução}}{K} \times 100\% = \frac{\frac{5}{9}K}{K} \times 100\% = \frac{5}{9} \times 100\%.$$

Calculando o valor:

$$\frac{5}{9} \approx 0,5555\dots$$

$$\text{Redução Percentual} \approx 55,55\%.$$

(Nota: a informação sobre a redução em 1000 anos serve para validar a fórmula, mas não é estritamente necessária para resolver o problema.)

iii) Conclusão:

A redução percentual da substância após 2000 anos será de aproximadamente 55,55%.

Alternativa correta: a).



Problema 3.13: Habilidade EM13MAT304 - H21 - UECE 2021

Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 8a^x$, onde a é um número real positivo diferente de um. Se $f(3) = 125$ então, pode-se afirmar corretamente que $f(4) \div f(5)$ é igual a

- a) $\frac{4}{5}$.
- b) $\frac{3}{5}$.
- c) $\frac{2}{5}$.
- d) $\frac{1}{5}$.

Solução: A resolução do problema envolve dois passos: primeiro, usar a condição $f(3) = 125$ para determinar o valor da base a , e segundo, usar esse valor para calcular a razão pedida.

i) Determinando o valor da base ‘a’:

A função é dada por $f(x) = 8a^x$. Foi-nos dado que $f(3) = 125$. Substituindo $x = 3$ na função, temos:

$$f(3) = 8a^3.$$

Igualando este valor à condição fornecida:

$$8a^3 = 125.$$

Isolamos a potência a^3 :

$$a^3 = \frac{125}{8}.$$

Extraindo a raiz cúbica de ambos os lados para encontrar a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}.$$

ii) Calculando a razão $f(4) \div f(5)$:

Agora, vamos montar a expressão para a razão solicitada:

$$\frac{f(4)}{f(5)} = \frac{8a^4}{8a^5}.$$

Podemos simplificar a fração cancelando o fator 8. Em seguida, usamos a propriedade da divisão de potências de mesma base ($\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$):

$$\frac{a^4}{a^5} = a^{4-5} = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

O valor da razão é, portanto, o inverso da base a .

iii) Resultado Final:

Como já calculamos que $a = \frac{5}{2}$, o valor da razão é:

$$\frac{f(4)}{f(5)} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

iv) Conclusão:

O valor de $f(4) \div f(5)$ é $\frac{2}{5}$.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT304 da BNCC e a habilidade 21 da Matriz do Enem a UECE avalia o poder do aluno na manipulação de potências e na compreensão da estrutura de uma função exponencial. Na prática da sala de aula, o professor depara-se frequentemente com alunos que, por insegurança, escolhem o caminho algébrico mais longo e suscetível a erros. Após descobrirem que a base é $a = \frac{5}{2}$, muitos estudantes tentam calcular o valor exato de $f(4)$ e de $f(5)$ (elevando a fração à quarta e à quinta potências) para só depois efetuarem a divisão entre dois números enormes.

O trunfo didático desta questão é mostrar a elegância da simplificação algébrica prévia. O docente deve incentivar a turma a olhar para a razão algébrica $\frac{f(4)}{f(5)}$ antes de substituir o valor numérico de a . Ao mostrar que $\frac{8a^4}{8a^5}$ se reduz instantaneamente a a^{-1} (ou $\frac{1}{a}$), o professor trabalha a economia de cálculo e o domínio das propriedades das potências. Mais do que isso, é uma excelente oportunidade para debater o próprio comportamento multiplicativo da função exponencial, evidenciando que a razão entre um termo e o seu sucessor imediato num intervalo unitário será sempre o inverso da base.

Problema 3.14: Habilidade EM13MAT304 - H21 -UECE 2020

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, então, o número de elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } f(x) = 1\}$ é igual a

- a) 0.
- b) 2.
- c) 1.
- d) 3.

Solução: O problema nos pede para encontrar a quantidade de soluções reais para a equação $f(x) = 1$.

i) Montagem da Equação:

Substituímos a expressão da função $f(x)$ na condição dada:

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = 1.$$

ii) Manipulação Algébrica:

Para resolver a equação, começamos multiplicando ambos os lados por 2:

$$2^x + 2^{-x} = 2.$$

Lembrando que $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$, a equação se torna:

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 2.$$

Para eliminar o denominador, multiplicamos todos os termos por 2^x . Isso é válido pois 2^x é sempre positivo.

$$(2^x) \cdot (2^x) + (2^x) \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right) = 2 \cdot (2^x)$$
$$(2^x)^2 + 1 = 2 \cdot 2^x.$$

Reorganizando os termos para formar uma equação do segundo grau na variável 2^x , temos:

$$(2^x)^2 - 2(2^x) + 1 = 0.$$

iii) Resolução da Equação:

A expressão obtida é um trinômio quadrado perfeito da forma $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, onde $a = 2^x$ e $b = 1$. Portanto, podemos fatorá-la como:

$$(2^x - 1)^2 = 0.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, a equação se simplifica para:

$$2^x - 1 = 0$$

$$2^x = 1.$$

A única forma de uma potência de base 2 ser igual a 1 é se o expoente for zero.

$$x = 0.$$

iv) Conclusão:

A equação possui uma única solução real, $x = 0$. O conjunto de soluções é $\{0\}$, que contém apenas 1 elemento.

Alternativa correta: c).



Problema 3.15: Habilidade EM13MAT403 - H21 - UECE 2020

O domínio de uma função real de variável real f é o mais amplo subconjunto X de $\mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$, $f(x)$ é um número real bem definido. Portanto, se X é o domínio da função real de variável real f , definida pela expressão $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 6x + 6)}$, então, tem-se que

$\log k \equiv$ logaritmo decimal de k

- a) $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$
- b) $X = \mathbb{R}$
- c) $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
- d) $X = \mathbb{R} - \{0\}$

Solução: Para encontrar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 6x + 6)}$, precisamos satisfazer duas condições de existência simultaneamente para que $f(x)$ seja um número real.

i) Condição da Raiz Quadrada (Radicando):

O argumento de uma raiz quadrada deve ser um número não-negativo. Portanto:

$$\log(x^2 - 6x + 6) \geq 0.$$

Como a base do logaritmo é 10 (que é maior que 1), a desigualdade se mantém para o logaritmando em relação a $10^0 = 1$.

$$x^2 - 6x + 6 \geq 1.$$

$$x^2 - 6x + 5 \geq 0.$$

Resolvida esta inequação, encontramos as raízes de $x^2 - 6x + 5 = 0$, que são $x = 1$ e $x = 5$. Como a parábola tem concavidade para cima, a inequação é satisfeita para os valores de x fora do intervalo das raízes:

$$x \leq 1 \quad \text{ou} \quad x \geq 5.$$

ii) Condição do Logaritmo (Logaritmando):

O argumento de um logaritmo deve ser estritamente positivo.

$$x^2 - 6x + 6 > 0.$$

Encontramos as raízes de $x^2 - 6x + 6 = 0$ usando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Novamente, a parábola tem concavidade para cima, então a inequação é satisfeita para valores de x fora do intervalo das raízes:

$$x < 3 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x > 3 + \sqrt{3}$$

iii) Interseção das Condições:

O domínio da função $f(x)$ é a interseção dos conjuntos de soluções das duas condições. Para facilitar, vamos aproximar os valores:

- $\sqrt{3} \approx 1,732$;
- $3 - \sqrt{3} \approx 1,268$;
- $3 + \sqrt{3} \approx 4,732$.

Agora, fazemos a interseção dos conjuntos:

- **Conjunto da Condição 1:** $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$;
- **Conjunto da Condição 2:** $(-\infty, 1,268) \cup (4,732, \infty)$.

A interseção desses dois conjuntos é $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$, pois todo $x \leq 1$ também é menor que 1,268, e todo $x \geq 5$ também é maior que 4,732.

iv) Conclusão:

O domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5\}$.

Alternativa correta: a). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que aprofunda a habilidade EM13MAT403 da BNCC, a UECE eleva significativamente o nível de exigência ao cobrar a análise de domínio de uma função composta com múltiplas restrições. Na sala de aula, o maior obstáculo para o aluno não é resolver as inequações do segundo grau, mas sim as várias condições de existência. É muito comum que o estudante foque apenas na restrição da raiz quadrada e se esqueça completamente da restrição interna do logaritmando o qual deve ser estritamente positivo. Outro erro clássico ocorre na resolução da inequação $\log(x^2 - 6x + 6) \geq 0$. Muitos alunos associam o zero diretamente ao polinômio, esquecendo-se de aplicar a definição do logaritmo, onde a base 10 elevada a zero resulta em 1 ($x^2 - 6x + 6 \geq 1$). O professor pode utilizar este problema para treinar a organização estrutural do pensamento matemático: ensinar o aluno a separar o problema em “filtros” independentes e, em seguida, utilizar o recurso visual das retas reais sobrepostas para encontrar a interseção dos intervalos de forma segura.

Problema 3.16: Habilidade EM13MAT304 - H21 - UECE 2020

No país das comunicações, cuja população é x (em milhões de habitantes), uma notícia de interesse nacional foi divulgada e, t horas após a divulgação, o número de pessoas que tomaram conhecimento da notícia é dado por $f(t) = \frac{x}{1+5 \cdot 2^{-\frac{x}{2}t}}$. Sabendo que, uma hora após a divulgação, a metade da população já tinha conhecimento da notícia, é correto afirmar que a população desse país, em milhões de habitantes, é, aproximadamente,

Considere o logaritmo de cinco na base dois, aproximadamente, igual a 2,32.

- a) 4,64.
- b) 8,32.
- c) 6,62.
- d) 3,68.

Solução:

A função que modela o número de pessoas que conhecem a notícia é:

$$f(t) = \frac{x}{1 + 5 \cdot 2^{-\frac{x}{2}t}}.$$

Onde x é a população total (em milhões) e t é o tempo (em horas).

i) Aplicando a Condição do Problema:

Foi informado que em $t = 1$ hora, o número de pessoas que sabiam da notícia era a metade da população, ou seja, $f(1) = \frac{x}{2}$. Substituindo esses valores na função, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{1 + 5 \cdot 2^{-\frac{x}{2}(1)}}.$$

Como a população x é um valor positivo, podemos simplificar a equação igualando os denominadores:

$$2 = 1 + 5 \cdot 2^{-\frac{x}{2}}.$$

ii) Resolvendo a Equação Exponencial:

Vamos isolar o termo com o expoente:

$$2 - 1 = 5 \cdot 2^{-\frac{x}{2}}$$

$$1 = 5 \cdot 2^{-\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{5} = 2^{-\frac{x}{2}}.$$

Podemos reescrever $\frac{1}{5}$ como 5^{-1} para facilitar a manipulação:

$$5^{-1} = 2^{-\frac{x}{2}}.$$

Para resolver a equação e encontrar x , aplicamos o logaritmo na base 2 em ambos os lados:

$$\log_2(5^{-1}) = \log_2(2^{-\frac{x}{2}}).$$

Usando as propriedades do logaritmo ($\log_b(a^c) = c \cdot \log_b(a)$ e $\log_b(b^c) = c$), a equação se torna:

$$-1 \cdot \log_2(5) = -\frac{x}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados por -1:

$$\log_2(5) = \frac{x}{2}.$$

iii) Cálculo Final:

O problema nos dá o valor aproximado $\log_2(5) \approx 2,32$. Substituindo este valor na equação:

$$2,32 \approx \frac{x}{2}$$

$$x \approx 2 \cdot 2,32 = 4,64.$$

iv) Conclusão:

A população aproximada do país é de 4,64 milhões de habitantes.

Alternativa correta: a).



Problema 3.17: Habilidade EM13MAT305 - H21 - UECE 2019

Se x e a são números reais positivos e ambos diferentes de um, então, o valor de x^u , onde $u = \frac{\ln \sqrt{a}}{\ln x^2}$, é igual a: Observação:

- $e \equiv$ base do logaritmo natural
- $\ln z \equiv$ logaritmo natural de z

a) $\sqrt{a}$.

b) a .

c) $\sqrt[4]{a}$.

d) e .

Solução: O objetivo é encontrar o valor de x^u . O primeiro passo é simplificar a expressão do expoente u usando as propriedades dos logaritmos.

i) Simplificação do Expoente u :

A expressão para u é dada por:

$$u = \frac{\ln \sqrt{a}}{\ln x^2}.$$

Vamos aplicar a propriedade do logaritmo de uma potência, $\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$, tanto no numerador quanto no denominador.

- No numerador: $\ln \sqrt{a} = \ln(a^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.
- No denominador: $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$.

Substituindo as expressões simplificadas de volta em u :

$$u = \frac{\frac{1}{2} \ln(a)}{2 \ln(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\ln(a)}{\ln(x)}.$$

Agora, usamos a fórmula da mudança de base de logaritmos na sua forma inversa: $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$. Para os logaritmos naturais (base e), temos:

$$u = \frac{1}{4} \cdot \log_x(a).$$

Usando a propriedade da potência novamente, mas no sentido inverso ($c \cdot \log_b a = \log_b(a^c)$):

$$u = \log_x(a^{1/4}) = \log_x(\sqrt[4]{a}).$$

ii) Cálculo de x^u :

Com a expressão de u simplificada, podemos calcular x^u :

$$x^u = x^{\log_x(\sqrt[4]{a})}.$$

Pela identidade fundamental dos logaritmos, que diz que $(b^{\log_b y} = y)$, o resultado é:

$$x^u = \sqrt[4]{a}.$$

iii) Conclusão:

O valor de x^u é $\sqrt[4]{a}$.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT305 da BNCC, a UECE apresenta um exercício de manipulação puramente algébrica. Novamente trazendo para o aluno a dificuldade de trabalhar com o número de Euler e o logaritmo natural. No cotidiano da sala de aula, uma expressão que mistura logaritmos naturais ($\ln$), raízes e variáveis no expoente causa intimidação imediata na maioria dos estudantes. O grande desafio didático aqui é a aplicação da fórmula de mudança de base no sentido “inverso”.

Geralmente, os alunos memorizam a mudança de base apenas para “quebrar” um logaritmo em uma divisão. O professor pode utilizar esta questão para treinar o olhar reverso do discente: perceber que o quociente $\frac{\ln(a)}{\ln(x)}$ é, na verdade, a expansão de $\log_x(a)$. Além disso, a finalização da questão exige o reconhecimento da identidade fundamental dos logaritmos ($b^{\log_b y} = y$), uma propriedade simples, mas que costuma ser negligenciada nos resumos teóricos. Explorar esse passo a passo com a turma fortalece o letramento matemático e mostra que, por trás de uma notação aparentemente assustadora, existem apenas aplicações sequenciais de propriedades básicas.

Problema 3.18: Habilidade EM13MAT403 - H20 - UECE 2018

No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos P e Q estão no primeiro quadrante, pertencem aos gráficos das funções $g(x) = e^x$ e $f(x) = \ln(x)$ respectivamente e satisfazem a condição: se $P = (u, v)$, então, $Q = (v, u)$. Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento PQ tem a forma:

- a) $(a + e^a)\sqrt{2}$.
- b) $(a + e^a)\sqrt{3}$.
- c) $(e^a - a)\sqrt{2}$.
- d) $(e^a - a)\sqrt{3}$.

Solução: O problema pede para encontrarmos a medida do comprimento do segmento de reta $\overline{PQ}$. Para isso, primeiro determinamos as coordenadas dos pontos P e Q .

i) Determinando as Coordenadas dos Pontos:

O ponto P pertence ao gráfico da função $g(x) = e^x$. Se sua primeira coordenada (abscissa) é u , então sua segunda coordenada (ordenada), v , é dada por $g(u) = e^u$. Assim, as coordenadas de P são:

$$P = (u, e^u).$$

O enunciado nos dá a condição de que, se $P = (u, v)$, então $Q = (v, u)$. Substituindo os valores que encontramos para v , temos as coordenadas de Q :

$$Q = (e^u, u).$$

(Nota: as funções $g(x) = e^x$ e $f(x) = \ln(x)$ são inversas uma da outra, e seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$. A condição dada para os pontos P e Q reflete essa simetria).

ii) Calculando a Distância entre P e Q :

Utilizamos a fórmula da distância entre dois pontos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, para os pontos $P = (u, e^u)$ e $Q = (e^u, u)$:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(e^u - u)^2 + (u - e^u)^2}.$$

Sabendo que $(u - e^u)^2 = -(e^u - u)^2 = (e^u - u)^2$, podemos reescrever a expressão:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(e^u - u)^2 + (e^u - u)^2} = \sqrt{2 \cdot (e^u - u)^2}.$$

Simplificando a raiz quadrada:

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(e^u - u)^2} = \sqrt{2} \cdot |e^u - u|.$$

iii) Análise do Módulo:

Para qualquer número real u , a função exponencial e^u é sempre maior que a função identidade u . Ou seja, $e^u > u$. Isso garante que a diferença $e^u - u$ é sempre um número positivo. Portanto, o módulo pode ser removido sem alterar o valor:

$$|e^u - u| = e^u - u.$$

A expressão final para a distância é:

$$\overline{PQ} = (e^u - u)\sqrt{2}.$$

iv) Conclusão:

As alternativas utilizam a variável a no lugar de u . Realizando essa troca, a medida do comprimento do segmento PQ é $(e^a - a)\sqrt{2}$.

Alternativa correta: c). ■

Problema 3.19: Habilidade EM13MAT305 - H21 - UECE 2018

Se n é um número inteiro maior do que dois, o valor de $\log_n \left[\log_n \left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}} \right) \right]$ é:

$\log_n \equiv$ logaritmo na base n

- a) 3.
- b) -4.
- c) 4.
- d) -3.

Solução: Para calcular o valor da expressão, devemos resolvê-la de dentro para fora, começando pela simplificação da cadeia de raízes que está no argumento do logaritmo mais interno.

i) Simplificação da Cadeia de Raízes:

O argumento é $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}}$. Usando a propriedade de potências e radicais, podemos converter as raízes para expoentes fracionários.

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}} = \left(\left((n^{1/n})^{1/n} \right)^{1/n} \right)^{1/n}.$$

Pela propriedade da potência de uma potência,

$$(a^b)^c = a^{bc},$$

multiplicamos os expoentes:

$$n^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n^4}}.$$

Uma forma alternativa é usar a propriedade de raiz de uma raiz, $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[ab]{x}$, que resulta em $\sqrt[n \cdot n \cdot n \cdot n]{n} = \sqrt[n^4]{n}$, que é equivalente a n^{1/n^4} .

ii) Cálculo do Logaritmo Interno:

Agora, substituímos o resultado da simplificação na expressão do logaritmo interno:

$$\log_n \left(n^{\frac{1}{n^4}} \right).$$

Pela propriedade fundamental do logaritmo, $\log_b(b^y) = y$, o resultado desta parte é:

$$\frac{1}{n^4}.$$

iii) Cálculo do Logaritmo Externo:

O resultado do passo anterior se torna o argumento do logaritmo mais externo:

$$\log_n \left(\frac{1}{n^4} \right).$$

Para resolver, reescrevemos o argumento como uma potência de base n , usando a propriedade do expoente negativo: $\frac{1}{a^k} = a^{-k}$.

$$\log_n(n^{-4}).$$

Aplicando novamente a propriedade $\log_b(b^y) = y$, encontramos o resultado final:

$$-4.$$

iv) Conclusão:

Alternativa correta: b). ■

Comentário Pedagógico

Neste problema, que mobiliza a habilidade EM13MAT305 da BNCC, a UECE apresenta uma questão que testa a resiliência e a organização algébrica do estudante, inclusive não é a primeira vez que coloca uma questão com esse mesmo padrão de logaritmos. No cotidiano da sala de aula, o impacto visual de raízes “coladinhas” dentro de logaritmos compostos gera um bloqueio psicológico imediato, o famoso “bicho de sete cabeças”. O maior desafio didático aqui é ensinar o aluno a ter paciência e a resolver o problema “de dentro para fora”.

O professor pode utilizar esta questão como o exemplo definitivo da importância de converter radicais em expoentes fracionários. Quando o aluno compreende que a sobreposição de raízes é apenas a multiplicação sucessiva de frações no expoente $(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n})$, a expressão, aparentemente monstruosa, converte-se de forma rápida em $n^{\frac{1}{n^4}}$. A partir desse ponto, o problema torna-se uma aplicação direta e repetida de propriedade e da definição básica de logaritmo.

Problema 3.20: Habilidade EM13MAT403 - H21 - UECE 2016

O domínio da função real de variável real definida por $f(x) = \log_7(x^2 - 4x) \cdot \log_3(5x - x^2)$ é o intervalo aberto cujos extremos são os números

- a) 3 e 4.
- b) 4 e 5.
- c) 5 e 6.
- d) 6 e 7.

Solução: Para encontrar o domínio da função $f(x)$, que é um produto de dois logaritmos, precisamos determinar o conjunto de valores de x para os quais ambos os logaritmos estão bem definidos. A condição de existência para qualquer logaritmo é que seu argumento (logaritmando) seja estritamente positivo.

i) Condições de Existência:

Devemos satisfazer o seguinte sistema de inequações simultaneamente:

1. O argumento do primeiro logaritmo: $x^2 - 4x > 0$.

2. O argumento do segundo logaritmo: $5x - x^2 > 0$.

ii) Resolvendo a Primeira Inequação:

Analisamos a inequação $x^2 - 4x > 0$. Fatorando, temos:

$$x(x - 4) > 0.$$

As raízes da equação quadrática correspondente, $x(x - 4) = 0$, são $x = 0$ e $x = 4$. Como a parábola $y = x^2 - 4x$ tem concavidade para cima, a expressão é positiva para valores de x “fora” do intervalo das raízes.

Solução 1: $x < 0$ ou $x > 4$.

Em notação de intervalo: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

iii) Resolvendo a Segunda Inequação:

Analisamos a inequação $5x - x^2 > 0$. Fatorando, temos:

$$x(5 - x) > 0.$$

As raízes da equação $x(5 - x) = 0$ são $x = 0$ e $x = 5$. Como a parábola $y = -x^2 + 5x$ tem concavidade para baixo, a expressão é positiva para valores de x “entre” as raízes.

Solução 2: $0 < x < 5$.

Em notação de intervalo: $(0, 5)$.

iv) Interseção dos Domínios:

O domínio da função $f(x)$ é a interseção dos conjuntos de soluções das duas inequações. Precisamos de um valor de x que satisfaça a Solução 1 e a Solução 2.

- *Solução 1:* $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 4\}$.
- *Solução 2:* $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$.

A única região que satisfaz ambas as condições é o intervalo onde x é maior que 4 e menor que 5.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 5\}.$$

v) Conclusão:

O domínio da função é o intervalo aberto $(4, 5)$. Os extremos desse intervalo são os números 4 e 5.

Alternativa correta: b).



Problema 3.21: Habilidade EM13MAT403 - H21 - UECE 2015

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = 3^{\sin(x)}$ e $g(x) = \sin(3^x)$. Se m e n são os valores máximos atingidos por f e g respectivamente, então o produto $m \cdot n$ é igual a

- a) 6
- b) 3
- c) 1
- d) 0

Solução: Para encontrar o produto $m \cdot n$, precisamos primeiro determinar os valores máximos de cada uma das funções, $f(x)$ e $g(x)$.

i) Análise do Valor Máximo de $f(x)$:

A função é dada por $f(x) = 3^{\sin(x)}$. Trata-se de uma função exponencial com base 3 (maior que 1). Uma função exponencial com base maior que 1 é crescente, o que significa que ela atinge seu valor máximo quando seu expoente atinge o valor máximo.

O expoente da função é $\sin(x)$. O valor máximo que a função $\sin(x)$ pode assumir é 1. Portanto, o valor máximo da função $f(x)$, que chamamos de m , será:

$$m = f_{\max}(x) = 3^{\max(\sin(x))} = 3^1 = 3.$$

ii) Análise do Valor Máximo de $g(x)$:

A função é dada por $g(x) = \sin(3^x)$. Esta é uma função seno, e o valor máximo que a função seno pode atingir é sempre 1, independentemente do valor de seu argumento. O argumento 3^x assume todos os valores no intervalo $(0, \infty)$, o que inclui os valores necessários (como $\pi/2, 5\pi/2, \dots$) para que o seno seja igual a 1. Portanto, o valor máximo da função $g(x)$, que chamamos de n , é:

$$n = g_{\max}(x) = 1.$$

iii) Cálculo do Produto $m \cdot n$:

Agora, calculamos o produto dos valores máximos encontrados:

$$m \cdot n = 3 \cdot 1 = 3.$$

iv) Conclusão:

O produto $m \cdot n$ é igual a 3.

Alternativa correta: b).

Comentário Pedagógico

Neste último problema do material, uma questão clássica sobre máximos e mínimos de funções que têm seno ou cosseno como parte principal, e que explora a habilidade EM13MAT403 da BNCC, deparamo-nos com uma excelente oportunidade para discutir o comportamento de funções compostas que mesclam a natureza exponencial com a trigonometria. No cotidiano da sala de aula, o principal obstáculo é a confusão visual e conceitual que a inversão dos papéis (base e expoente em contraste com arco e função) provoca na cabeça do aluno.

O professor pode utilizar este exercício para consolidar o conceito de “imagem” de uma função atuando como “domínio” para outra. No caso de $f(x) = 3^{\sin(x)}$, a estratégia didática é fazer o aluno focar primeiro no expoente: como o seno é limitado ao intervalo $[-1, 1]$, o valor máximo da potência ocorrerá obrigatoriamente quando o expoente for máximo (pois a base 3 é maior que 1). Já em $g(x) = \sin(3^x)$, o erro comum é o estudante achar que o crescimento exponencial vertiginoso do arco fará a função “explodir” para o infinito. É o momento perfeito para reforçar o letramento matemático sobre a natureza limitada e periódica da função seno, cujo “teto” será sempre 1, independentemente do tamanho do argumento.



Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf.

BRASIL. **Matrizes de Referência, Tópicos e Itens: Exame Nacional do Ensino Médio - Enem 2009**. Brasília, DF: [s. n.], 2009. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/download/enem/2009/matriz_referencia.pdf.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Enem: Provas e Gabaritos**. [S. l.: s. n.], 2025. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ. **Comissão Executiva do Vestibular (CEV)**.

Fortaleza: [s. n.], 2025. Disponível em: <https://www.cev.uece.br/home/home/concursos-servicos/encerrados/vestibulares/vestibular-uece/>.