

Estudo das Seções Cônicas com o GeoGebra

NOVEMBRO, 2025

TAINÁ DA COSTA DOS SANTOS

LAURETE ZANOL SAUER

MONICA SCOTTI

APRESENTAÇÃO

Esse guia didático consiste no Produto Educacional vinculado à dissertação intitulada "GEOGEBRA E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE SEÇÕES CÔNICAS: UMA PROPOSTA DE CURSO PARA A GRADUAÇÃO", desenvolvida por Tainá da Costa dos Santos, sob a orientação da Prof^a. Dra. Laurete Zanol Sauer e coorientação da Prof^a. Ma. Mônica Scotti, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECiMa) – Mestrado Profissional, da Universidade de Caxias do Sul (UCS). Ele é resultado de observações e aprimoramentos, após a realização de um curso da extensão na instituição de ensino citada, sobre o estudo das seções cônicas utilizando o GeoGebra.

O objetivo principal deste material é contribuir para a aprendizagem das seções cônicas -- parábola, circunferência, elipse e hipérbole -- por meio da utilização do software GeoGebra, explorando seu potencial para tornar o estudo desses conteúdos mais dinâmico, visual e significativo. O guia está organizado em **sete capítulos**, sendo que aqueles dedicados a cada uma das seções cônicas, contém: introdução teórica, construções passo a passo no GeoGebra, atividades para exploração e fixação, e sugestões de aprofundamento. Ao final de cada capítulo, são apresentadas resoluções comentadas das atividades propostas. Este Produto Educacional complementa a pesquisa desenvolvida na dissertação, sendo fruto das reflexões e observações realizadas durante um curso promovido no contexto do estudo. Não se trata de um roteiro fechado, mas de uma proposta flexível, que pode ser adaptada a diferentes contextos e necessidades de ensino. Para o **professor**, sugerimos a utilização deste guia como apoio na preparação de aulas, na criação de atividades investigativas e no incentivo ao uso de tecnologias digitais na Matemática. Para o **estudante de graduação**, especialmente aqueles que se preparam para a docência, o guia pode servir como fonte de estudo autônomo e de inspiração para a elaboração de práticas inovadoras com o GeoGebra. Esperamos que este material inspire o leitor a explorar, criar e experimentar, tornando o estudo das seções cônicas mais acessível e prazeroso.

SUMÁRIO

COMO UTILIZAR ESTE GUIA.....	5
REFERENCIAL TEÓRICO.....	6
O GEOGEBRA	8
PARÁBOLA	10
PARÁBOLA: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA.....	12
ELEMENTOS DA PARÁBOLA.....	18
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA PARÁBOLA (COM VÉRTICE NA ORIGEM).....	22
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA PARÁBOLA TRANSLADADA.....	27
ATIVIDADES SOBRE PARÁBOLA.....	29
RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE PARÁBOLA.....	32
CIRCUNFERÊNCIA.....	35
CIRCUNFERÊNCIA: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA.....	37
ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA.....	40
EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA (COM CENTRO NA ORIGEM).44	
EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA COM CENTRO (h,k).....	46
ATIVIDADES SOBRE CIRCUNFERÊNCIA.....	48
RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE CIRCUNFERÊNCIA.....	51
ELIPSE.....	54
ELIPSE: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA.....	56
ELEMENTOS DA ELIPSE.....	62
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA ELIPSE (COM CENTRO NA ORIGEM).....	69
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA ELIPSE COM CENTRO (h,k).....	76
ATIVIDADES SOBRE ELIPSE.....	78
RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE ELIPSE.....	82

SUMÁRIO

HIPÉRBOLE.....	86
HIPÉRBOLE: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA.....	88
ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE.....	90
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA HIPÉRBOLE (COM CENTRO NA ORIGEM).....	106
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA HIPÉRBOLE COM CENTRO (h,k)	111
ATIVIDADES SOBRE HIPÉRBOLE.....	113
RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE HIPÉRBOLE.....	117
SUPERFÍCIE CÔNICA E SUAS INTERSEÇÕES COM UM PLANO	122

COMO UTILIZAR ESTE GUIA

Este guia foi elaborado para apoiar **professores** e **estudantes** no estudo das seções cônicas, utilizando o software GeoGebra como recurso para construção, visualização e investigação. Sua proposta é oferecer uma abordagem prática, interativa e significativa, favorecendo tanto o planejamento de aulas quanto o estudo autônomo.

Para Professores

Este material pode ser utilizado como recurso complementar no ensino de Matemática, especialmente em conteúdos relacionados a seções cônicas.

Sugestões de uso:

- **Tempo estimado:** Recomendamos 5 períodos de aula (50 minutos cada) para cada seção cônica, contemplando discussões teóricas, exploração no GeoGebra e resolução das atividades.

- **Recursos necessários:** Computadores ou notebooks com o software GeoGebra instalado (ou acesso à versão online), projetor multimídia e cópias impressas ou digitais das atividades.

- **Estratégias de aplicação:**

1. Inicie com uma breve introdução teórica sobre a cônica a ser estudada.
2. Oriente a turma a seguir o passo a passo do guia para realizar as construções no GeoGebra.
3. Estimule que os alunos modifiquem parâmetros e observem os efeitos.
4. Promova discussões em grupo para análise dos resultados.

- **Avaliação:** Considere avaliar tanto o processo (participação, exploração, colaboração) quanto o produto final (respostas, justificativas e construções realizadas), sempre lembrando de estabelecer os critérios de avaliação previamente.

Para Estudantes

O guia também pode ser usado para estudo individual ou em grupo, como apoio à aprendizagem em sala de aula ou de forma autônoma.

Sugestões de uso:

- Leia a introdução teórica antes de iniciar as construções no GeoGebra para contextualizar o conteúdo.

- Siga o passo a passo para construir cada cônica e explore alterações nos parâmetros para compreender melhor suas propriedades.

- Registre suas observações e conclusões, relacionando-as com a teoria estudada.

- Ao finalizar cada capítulo, resolva as atividades propostas sem consultar o passo a passo, para testar seus conhecimentos.

- Use o material como complemento aos estudos formais, especialmente na preparação para provas e trabalhos acadêmicos.

REFERENCIAL TEÓRICO

O desenvolvimento deste guia didático está ancorado em pressupostos teóricos que orientam sua proposta pedagógica e justificam o uso do *software* GeoGebra como recurso para o ensino e aprendizagem de seções cônicas. A pesquisa baseou-se na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS), no Construtivismo de Seymour Papert, assim como no uso das tecnologias na educação.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a TAS define que aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Não-literal no sentido de que o estudante consiga fazer construções mesmo que o conteúdo se apresente de uma forma diferente daquela que foi ensinada e não-arbitrária porque é necessário que o conteúdo seja relevante e possa ser associado ao que ele já sabe. Essa premissa, de certa forma, destaca a importância da escolha da forma de abordagem dos conteúdos pelos professores.

Ausubel nomeou como subsunçor ou ideia-âncora o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do sujeito e, para que ocorra a aprendizagem significativa, o novo conhecimento deve interagir com o subsunçor. Como resultado dessa interação, o subsunçor se modifica, assim como o novo conhecimento (Moreira, 2012). No contexto do ensino de seções cônicas, esse princípio da TAS pode ser operacionalizado por meio da exploração das representações gráficas e analíticas no GeoGebra, desde que articuladas com os conhecimentos prévios dos estudantes.

Entretanto, para que essa predisposição do estudante se traduza em uma experiência efetiva de construção de sentido, torna-se fundamental oferecer condições que estimulem sua participação ativa e reflexiva nos processos de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, a mediação de recursos tecnológicos, como o GeoGebra, pode potencializar a aprendizagem ao favorecer a manipulação de representações matemáticas e a produção de construções próprias. Essa perspectiva aproxima-se das concepções defendidas por Seymour Papert, no âmbito do Construcionismo, que enfatiza a aprendizagem por meio da construção de artefatos concretos e significativos, proporcionando ao estudante experiências práticas de investigação e descoberta (Papert, 2008).

O Construcionismo de Seymour Papert (2008) pode ser entendido como uma reconstrução do construtivismo e tem como principal característica o fato de examinar mais profundamente a ideia da construção mental (em comparação às outras teorias educacionais, tais como o Construtivismo de Piaget). Papert “atribui especial importância ao papel das construções no mundo como um apoio para o que ocorre na cabeça, tornando-se assim uma concepção menos mentalista” (Papert, 2008, p.137).

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), e em especial os softwares de matemática dinâmica como o GeoGebra, ampliam as possibilidades de ensino e aprendizagem ao permitir a visualização e manipulação de objetos matemáticos de maneira interativa. No caso das seções cônicas, esses recursos favorecem a exploração de propriedades, relações e representações múltiplas,

tornando mais acessível a compreensão de conceitos que, tradicionalmente, apresentam alto grau de abstração. Assim, este guia se fundamenta na integração desses referenciais teóricos para propor atividades que promovam uma aprendizagem significativa, ativa e investigativa, utilizando as TDIC como mediadoras do processo.

Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que a integração do GeoGebra com a internet permite aos alunos não apenas visualizar, mas também experimentar conceitos matemáticos. Um exemplo mencionado por esses autores é a exploração da noção de derivada. Ampliando essa ideia, pode-se considerar que o mesmo potencial se aplica ao estudo das seções cônicas, permitindo ao aluno manipular parâmetros e observar, de forma dinâmica, as alterações nas representações gráficas.

O GEOGEBRA

GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas, podendo ser utilizado também para o Ensino Superior (GeoGebra, 2025).

Conta com aplicativos que podem ser tanto acessados de forma *online*, quanto *offline* (desde que seja feito o *download* destes) no celular, *tablet* ou computador. Alguns são para utilidades específicas como, por exemplo, o aplicativo “Geometria”, cujas ferramentas são mais restritas a este assunto, enquanto outros aplicativos, tais como a “Calculadora”, são um compilado dos demais aplicativos. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>.

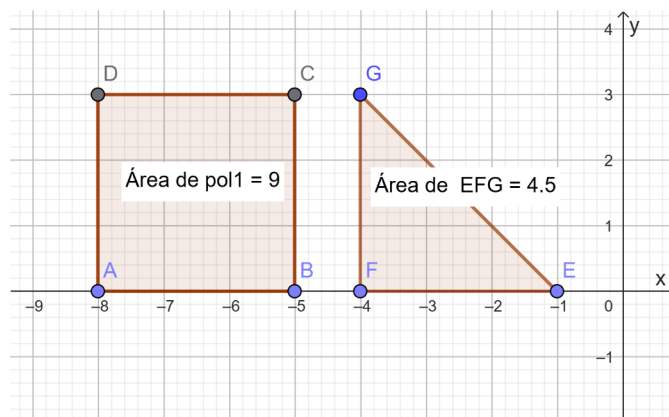
Figura 1 - Página inicial GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2025).

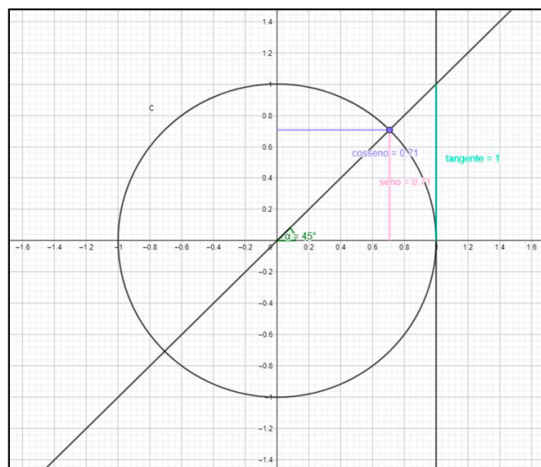
No GeoGebra, as construções consistem em objetos matemáticos de vários tipos que podem ser criados usando ferramentas ou comandos (GeoGebra, 2025). A seguir, nas Figuras 2 e 3, temos alguns exemplos.

Figura 2 - Construção e cálculo da área de polígonos



Fonte: a autora (2025).

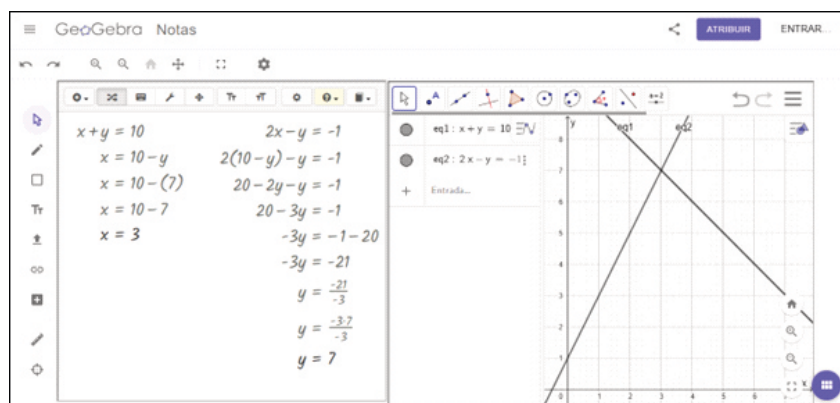
Figura 3 - Círculo trigonométrico com os valores de seno, cosseno e tangente



Fonte: a autora (2025).

Há o aplicativo GeoGebra Notas que permite, por exemplo, a criação de um quadro dinâmico em que são resolvidas equações conforme são movimentados os números e as variáveis. Também é possível criar um quadro com algum site. Na Figura 4, é apresentada a resolução do sistema de equações $x+y=10$ e $2x-y=-7$. Foi criado um quadro com o site do GeoGebra Classic (versão mais antiga do GeoGebra, com interface diferente) inserindo as equações do sistema. Assim, é possível conferir a solução do sistema, observando os gráficos das equações, cuja interseção representa a solução calculada.

Figura 4 - Algumas possibilidades do GeoGebra Notas



Fonte: a autora (2025).

As ferramentas disponíveis na plataforma GeoGebra possibilitam diversificar as abordagens no ensino de alguns conteúdos de matemática e também facilitam a compreensão de determinados conceitos, por meio de uma abordagem visual e interativa.

Parábola

Uma **parábola** é o conjunto de todos os pontos no plano que são equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado que não está na reta.

A reta é chamada de **diretriz** da parábola e o ponto é chamado de **foco** [...]. Uma parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo foco em ângulo reto com a diretriz. Tal reta, chamada de **eixo** ou **eixo de simetria** da parábola, intersecta a parábola em um ponto que é chamado de **vértice**.

(Anton; Bivens; Davis, 2014, p.731)

APRESENTAÇÃO

Neste capítulo, exploramos a **parábola**, uma das seções cônicas mais presentes no cotidiano e na ciência. A parábola aparece em fenômenos físicos (como a trajetória de projéteis), na engenharia (refletores parabólicos), na arquitetura e em diversos outros contextos.

O objetivo é compreender suas **características geométricas e analíticas**, visualizando-as e manipulando-as por meio do **GeoGebra**, o que permitirá estabelecer conexões entre teoria e prática.

A proposta é conduzida em etapas:

- Uma **ilustração geométrica** que evidencia a definição da parábola como o conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz);
- Identificação e representação geométrica **dos elementos da parábola**;
- Análise das **equações reduzidas** e variação de seus parâmetros;
- Exercícios para fixação.

O capítulo foi elaborado para ser utilizado **tanto por professores** - como roteiro para aulas - **quanto por estudantes** - como material de estudo e prática individual. Ao seguir as instruções, será possível modificar valores, observar propriedades e construir entendimento sólido do conceito.

Professores podem utilizar este roteiro como base para aulas, atividades investigativas e tarefas de aprofundamento. Estudantes podem se beneficiar ao repetir e adaptar as construções, explorando variações e documentando suas conclusões.

PARÁBOLA: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA

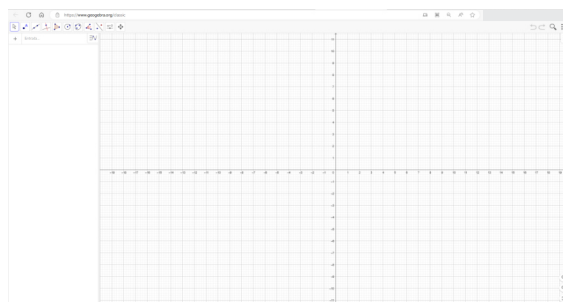
Objetivo da atividade: mostrar, geometricamente, que a parábola é o conjunto dos pontos equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz).

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 45 minutos.

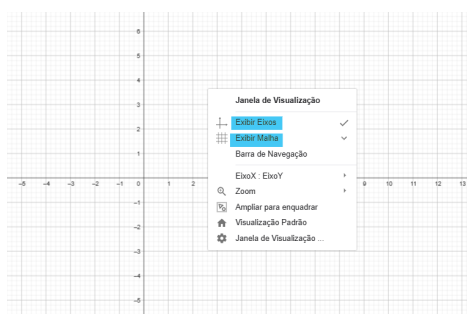
Passo 1 - Acesso ao GeoGebra

- Abra o site <https://www.geogebra.org/classic>, conforme mostra a imagem a seguir:



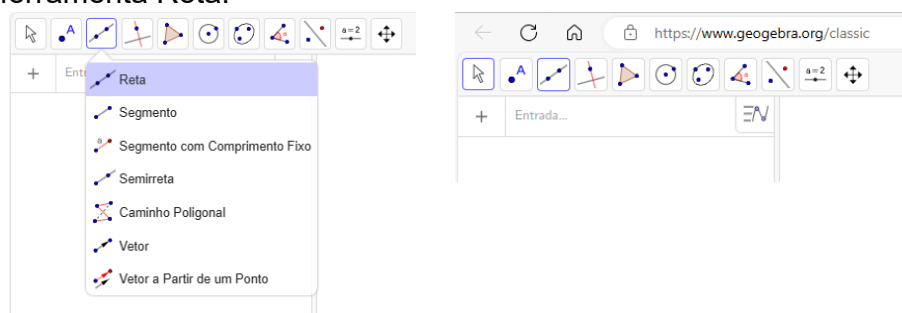
Passo 2 - Ajuste do ambiente de trabalho

- Retire a malha e os eixos: clique com o botão direito na malha do plano cartesiano e desmarque Exibir Eixos e Exibir Malha - Sem malha.

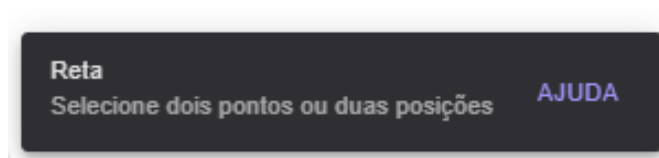


Passo 3 - Criação da diretriz

- Utilize a ferramenta Reta.

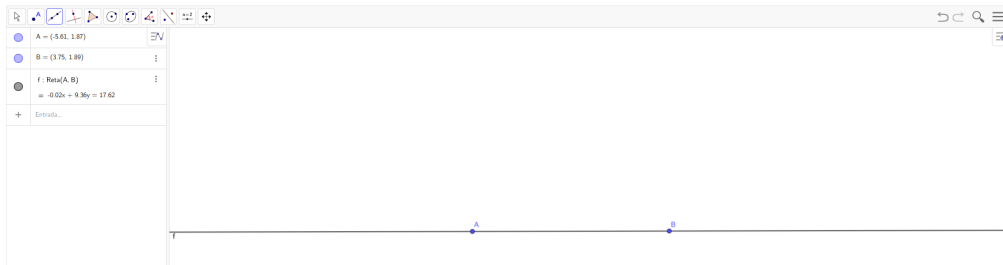


- Dica: ao passar o cursor sobre um ícone, o GeoGebra exibe instruções no canto inferior esquerdo.

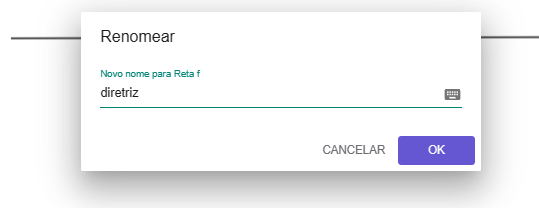


Fonte: GeoGebra (2023).

- Selecione dois pontos quaisquer, na janela de visualização, obtendo:



- Nomeie-a como “diretriz”: para nomear um objeto, logo após criá-lo, digite o nome desejado ou clique com o botão direito sobre ele e selecione Renomear.

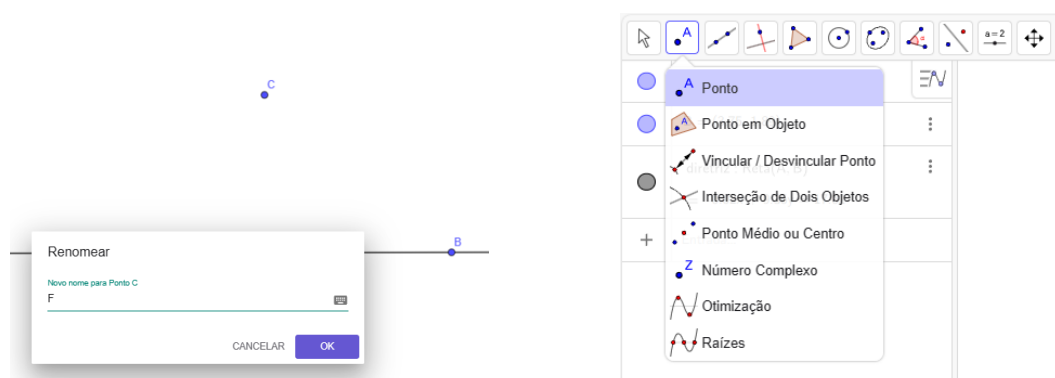


* **Nota pedagógica:** incentive os alunos a sempre nomear objetos de forma significativa, para facilitar o acompanhamento.

IMPORTANTE: sempre que for trocar de ferramenta, apertar a tecla **ESC** ou clicar no ícone **Mover** (🖱️). Senão você irá continuar construindo retas, por exemplo.

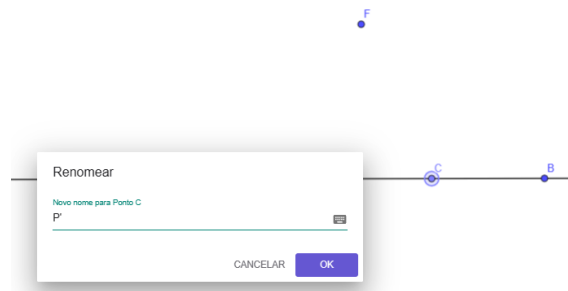
Passo 4 - Criação do foco

- Insira um ponto **F** fora da reta diretriz.



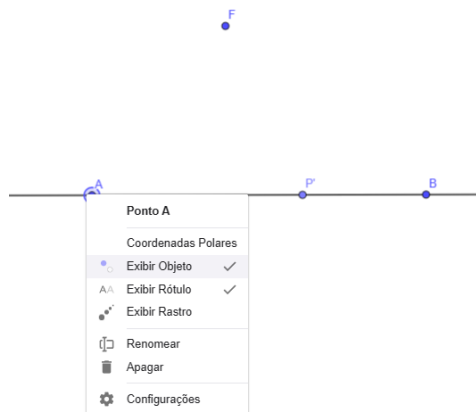
Passo 5 - Criação do ponto P' na diretriz

- Escolha um ponto qualquer na reta e nomeie-o como P'.



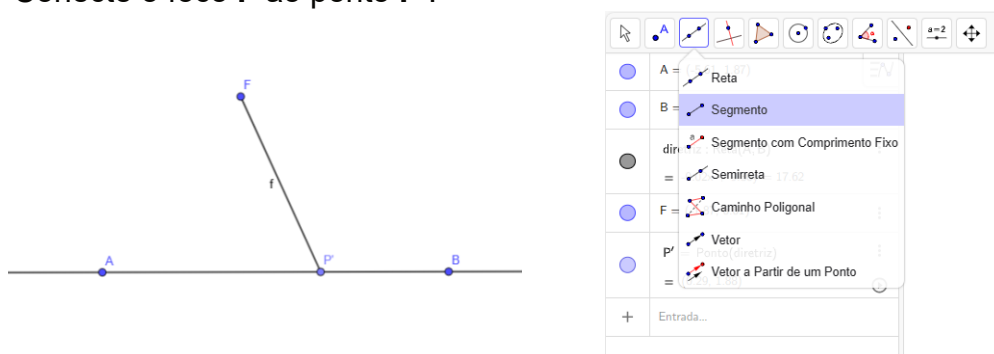
Passo 6 - Ocultar pontos A e B

- Clique com o botão direito sobre cada um dos pontos e depois clique em “Exibir Objeto”.



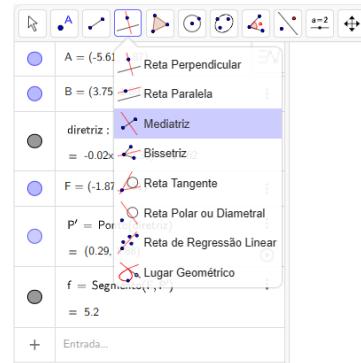
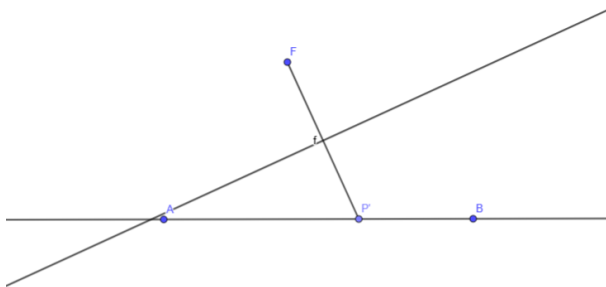
Passo 7 - Criação do segmento FP'

- Conecte o foco F ao ponto P'.



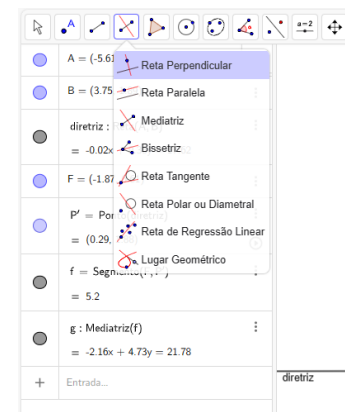
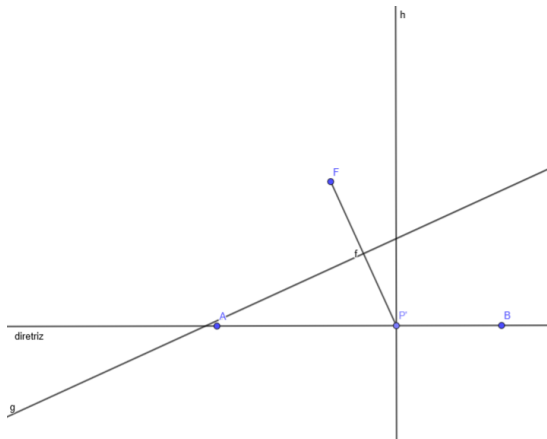
Passo 8 - Criação da mediatriz de FP'

- Com a ferramenta **Mediatriz**, crie a mediatriz do segmento FP' e nomeie-a como "mediatriz".



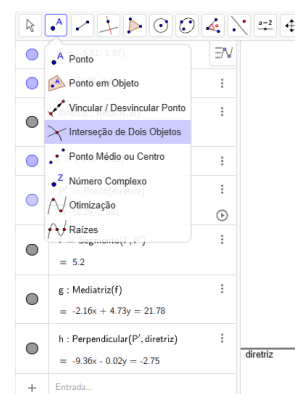
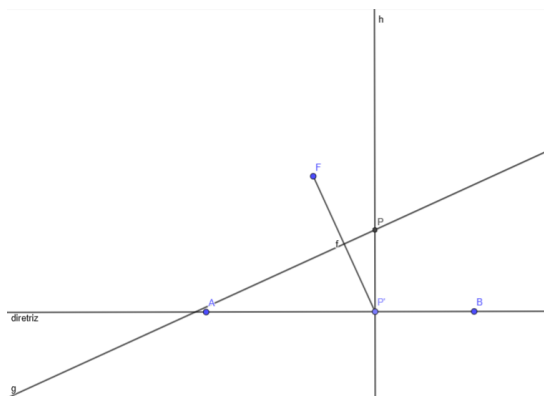
Passo 9 - Criação da reta perpendicular à diretriz por P'

- Use a ferramenta **Reta Perpendicular** para criar essa reta.



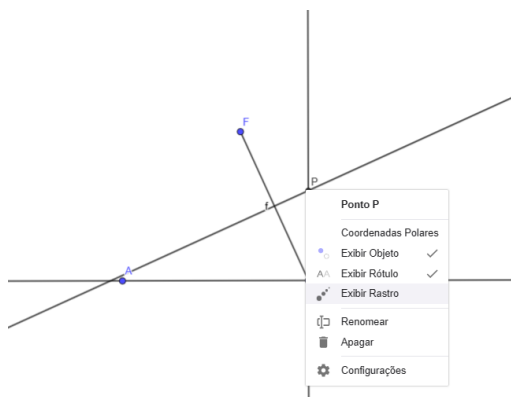
Passo 10 - Localização do ponto P

- Determine o ponto de interseção entre a mediatriz e a reta perpendicular; nomeie-o como P.
- O ponto P será um ponto da parábola.



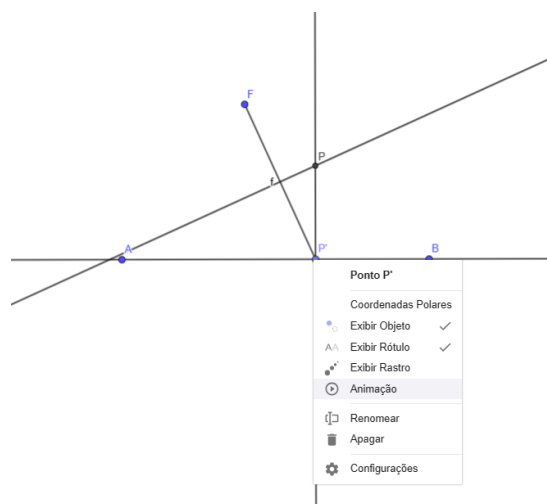
Passo 11 - Exibição do rastro do ponto P

- Clique com o botão direito no ponto P e selecione **Exibir Rastro**.

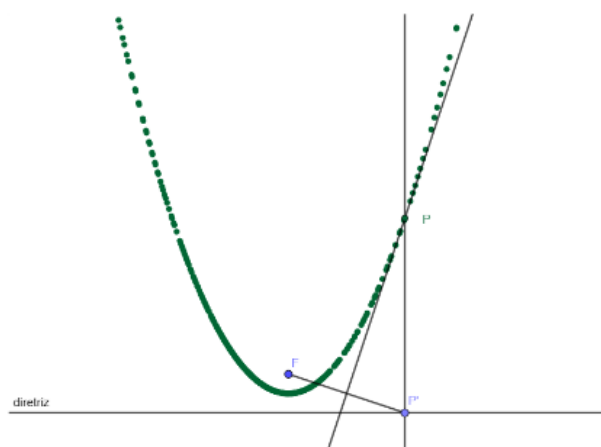


Passo 12 - Animação do ponto P'

- Clique com o botão direito em P' e selecione **Animar**.

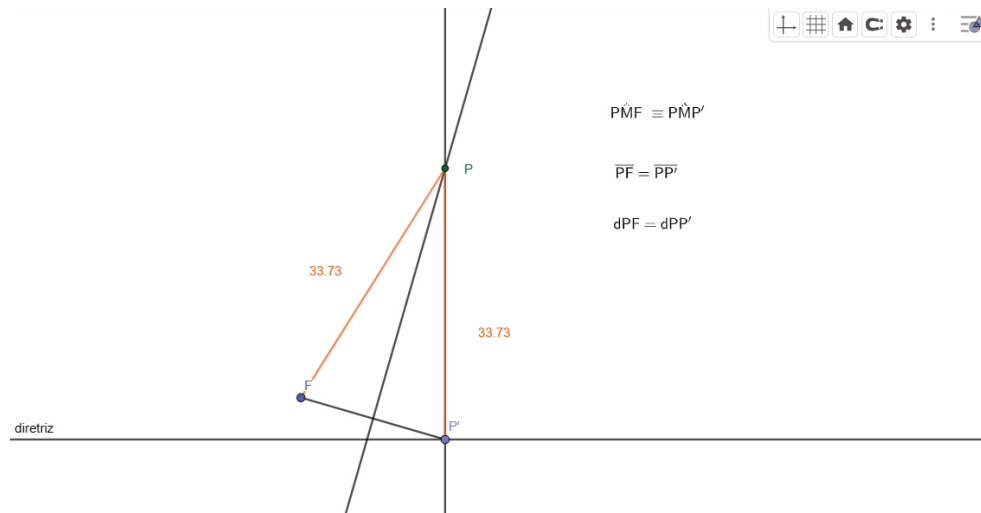


- Observe que o rastro do ponto P descreve a parábola.



Passo 13 - Ilustração geométrica

- Crie os segmentos **PF** e **PP'**.
- Pela congruência dos triângulos PMF e PMP' (caso Lado-Ângulo-Lado), temos $PF = PP'$, o que está de acordo com a definição de parábola: "conjunto de pontos equidistantes do foco e da diretriz".



Com essa construção, é possível verificar que a definição da parábola é válida, mesmo quando se altera a posição do ponto P, pois a igualdade entre os segmentos PF e PP' será mantida.

ELEMENTOS DA PARÁBOLA

Após compreender a definição e a construção geométrica da parábola, é fundamental identificar e compreender seus **elementos característicos**, pois eles são a base para a análise algébrica e a resolução de problemas.

Nesta seção, utilizamos o **GeoGebra** para construir uma parábola de maneira direta, empregando a ferramenta “Parábola”, e assim visualizar:

- **Foco (F)** - ponto fixo que define a curva;
- **Diretriz** - reta fixa associada ao foco;
- **Vértice (V)** - ponto médio entre o foco e a diretriz;
- **Parâmetro (p)** - distância do vértice ao foco e também do vértice à diretriz;
- Outros pontos da parábola e suas respectivas projeções sobre a diretriz.

Essa construção permitirá:

- Relacionar medidas e posições de cada elemento;
- Confirmar propriedades fundamentais;
- Preparar o terreno para o estudo das equações reduzidas.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 30 minutos.

Elementos da Parábola - Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Certifique-se de que a malha e os eixos estejam visíveis (se necessário, ative-os clicando com o botão direito e selecionando **Exibir Eixos** / **Exibir Malha**).

Passo 2 - Definição do foco e da diretriz

- Crie um ponto **F(0,1)** como foco.
- Crie a reta diretriz com equação $y = -1$.
- Sugerimos essa posição, para que a parábola resultante tenha o **vértice na origem**.

Nota: iniciar com vértice na origem simplifica a observação das propriedades e facilita a introdução das equações reduzidas.

Passo 3 - Identificação do ponto D

- Determine o ponto D como a **interseção** da diretriz com o eixo y.

Passo 4 - Determinação do vértice

- O vértice **V(0,0)** é o **ponto médio** entre o foco F e o ponto D.

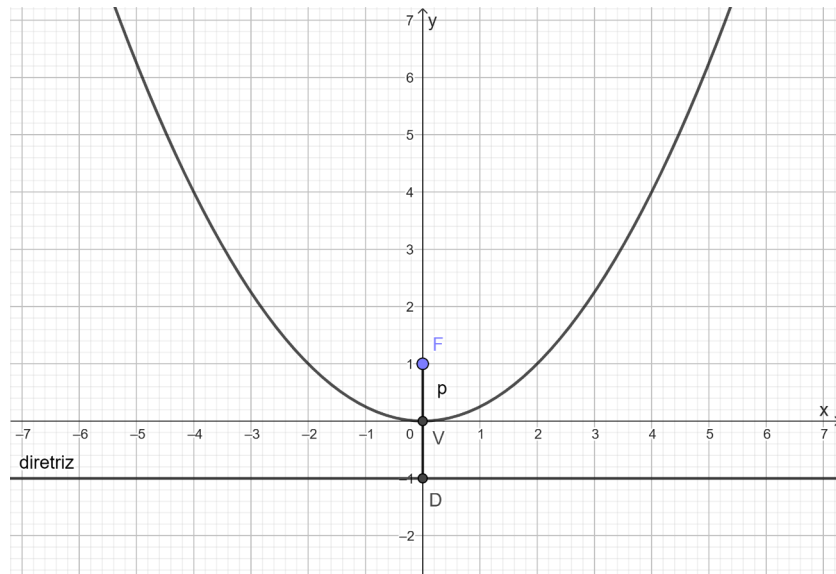
- Neste caso, o vértice coincide com a interseção da parábola com o eixo y.

Passo 5 - Representação do parâmetro p

- Crie o segmento FV e renomeie-o para **p**.
- Esse segmento representa a distância do vértice ao foco (e também do vértice à diretriz).

Passo 6 - Representação da distância ao ponto D

- Crie o segmento VD, que corresponde à distância do vértice até a diretriz.



Passo 7 - Configuração da exibição das medidas

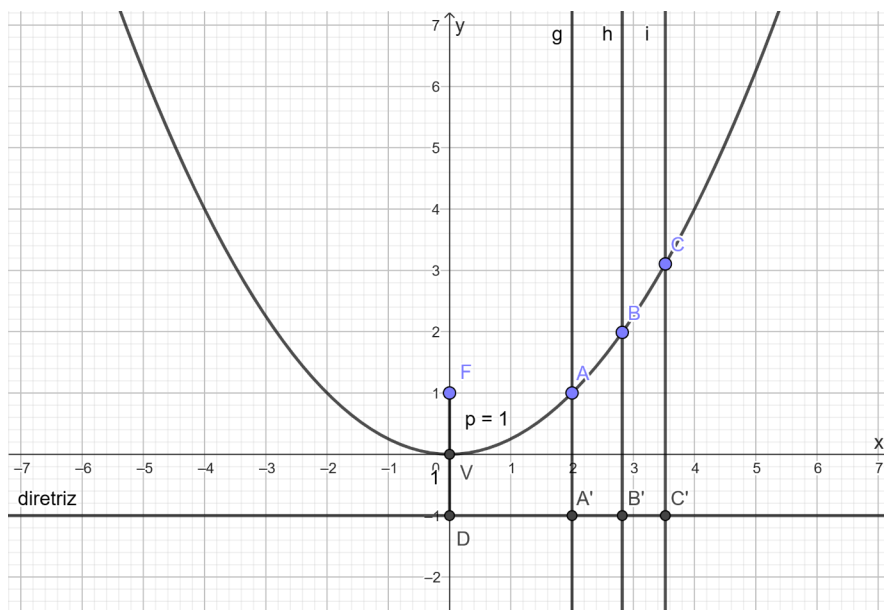
- Clique com o botão direito sobre o segmento FV, acesse **Configurações** e altere **Exibir Rótulo** para “Nome & Valor”.
- No segmento VD, altere para “Valor”.
- Assim, é possível visualizar numericamente que $VF = VD = p$.

Passo 8 - Localização de novos pontos na parábola

- Crie três pontos quaisquer sobre a parábola: A, B e C.

Passo 9 - Projeção dos pontos na diretriz

- Para cada ponto criado, desenhe uma reta perpendicular à diretriz que passe por ele.
- Determine a interseção com a diretriz e nomeie como A', B' e C'.



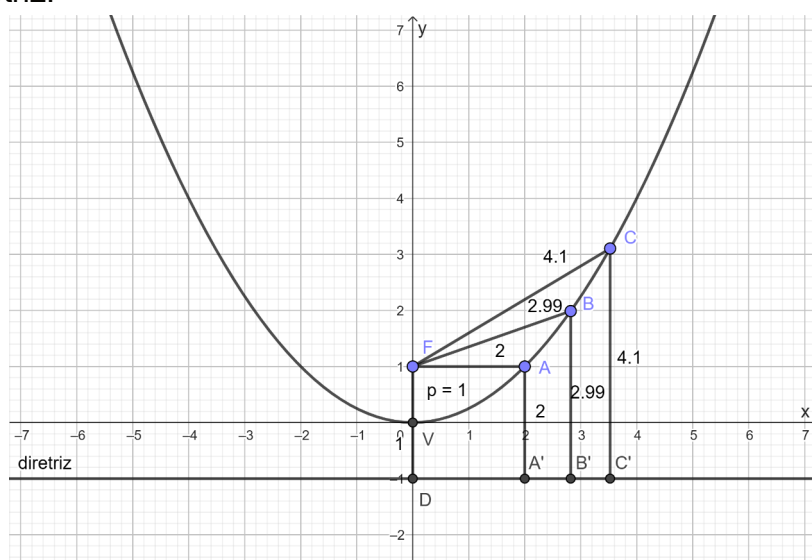
Passo 10 - Ocultação das retas auxiliares

- Clique com o botão direito sobre as retas perpendiculares e desmarque **Exibir Objeto** para deixar apenas os pontos visíveis.

Passo 11 - Criação de segmentos para análise

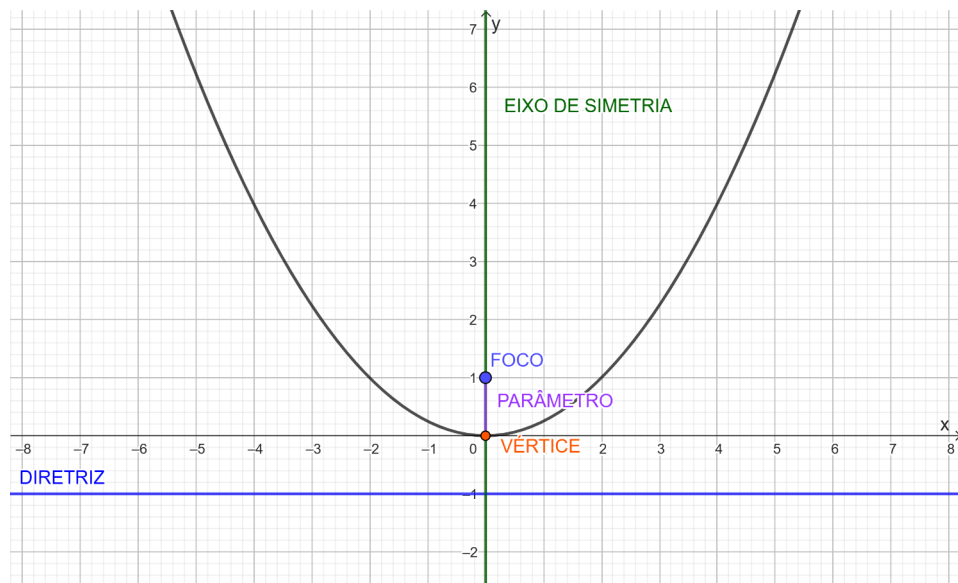
- Construa os segmentos AA' , BB' , CC' (distâncias até a diretriz).
- Construa também FA , FB , FC (distâncias até o foco).
- Configure todos para exibir apenas o valor.

Observação didática: ao comparar os valores de FA e AA' (e assim por diante), verifique a definição da parábola como lugar geométrico dos pontos equidistantes do foco e da diretriz.



Resumo dos elementos da parábola:

- VÉRTICE: ponto cuja distância até o foco é igual à distância até a reta diretriz;
- FOCO: ponto fixado, cuja distância até o vértice é igual à distância do vértice até a reta diretriz;
- PARÂMETRO; tem relação com a abertura da parábola;
- RETA DIRETRIZ: reta perpendicular ao eixo de simetria, cuja distância até o vértice é igual à distância do vértice até o foco;
- EIXO DE SIMETRIA: uma reta perpendicular à reta diretriz que passa pelo foco e pelo vértice da parábola.



EQUAÇÕES REDUZIDAS DA PARÁBOLA (COM VÉRTICE NA ORIGEM)

Nesta etapa, vamos relacionar a construção geométrica da parábola com sua **expressão algébrica**.

Quando a parábola está na posição padrão - isto é, com o **vértice na origem** e eixo de simetria alinhado a um dos eixos cartesianos - sua equação assume uma forma simplificada chamada **equação reduzida**.

Os casos possíveis são:

- **Abertura para cima:** $x^2 = 4py$
- **Abertura para baixo:** $x^2 = -4py$
- **Abertura para a direita:** $y^2 = 4px$
- **Abertura para a esquerda:** $y^2 = -4px$

O parâmetro p mantém o mesmo significado geométrico visto anteriormente: é a distância do vértice ao foco (ou do vértice à diretriz).

Nesta construção, utilizamos o **GeoGebra** para visualizar como a variação de p afeta a parábola e confirmar que as equações se ajustam ao desenho.

Ao final, professores poderão explorar a relação entre o valor de p e a abertura da parábola, e estudantes poderão experimentar diferentes valores para consolidar a compreensão.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 40 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Colocação das equações no ambiente

- No GeoGebra, selecione a ferramenta **Texto** e escreva:

“Equações da parábola na posição padrão
(vértice na origem):

$x^2=4py$ concavidade para cima

$x^2=-4py$ concavidade para baixo

$y^2=4px$ concavidade para direita

$y^2=-4px$ concavidade para esquerda”

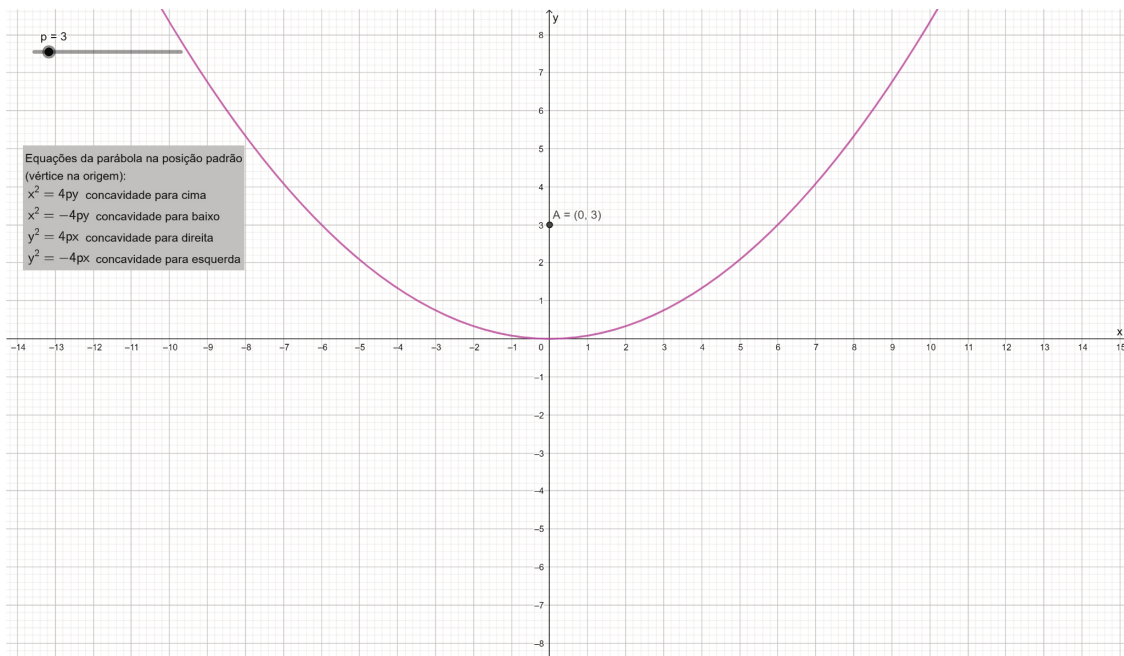
Utilizar o símbolo $\$$ é uma forma de separar as descrições sobre a concavidade das respectivas equações. Caso contrário, estariam agrupadas como se fossem uma equação.

Passo 2 - Criação do controle deslizante para p

- Na barra de ferramentas, selecione **Controle Deslizante** e nomeie como “ p ”.
- Defina valores iniciais que permitam observar mudanças significativas (por exemplo: mínimo = -5, máximo = 5, incremento = 0,5).

Passo 3 - Construção da primeira parábola

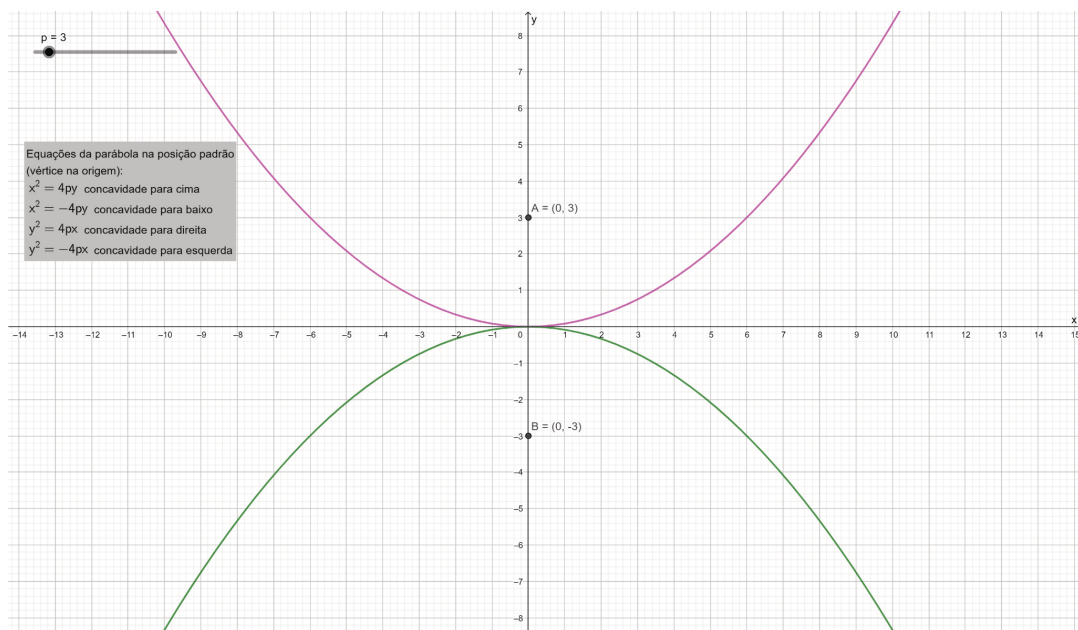
- Digite no campo de entrada: $x^2 = 4 \cdot p \cdot y$.
- Observe como a curva se forma e como a alteração de p modifica a abertura.
- Use o comando Foco(eq1) para localizar o foco.



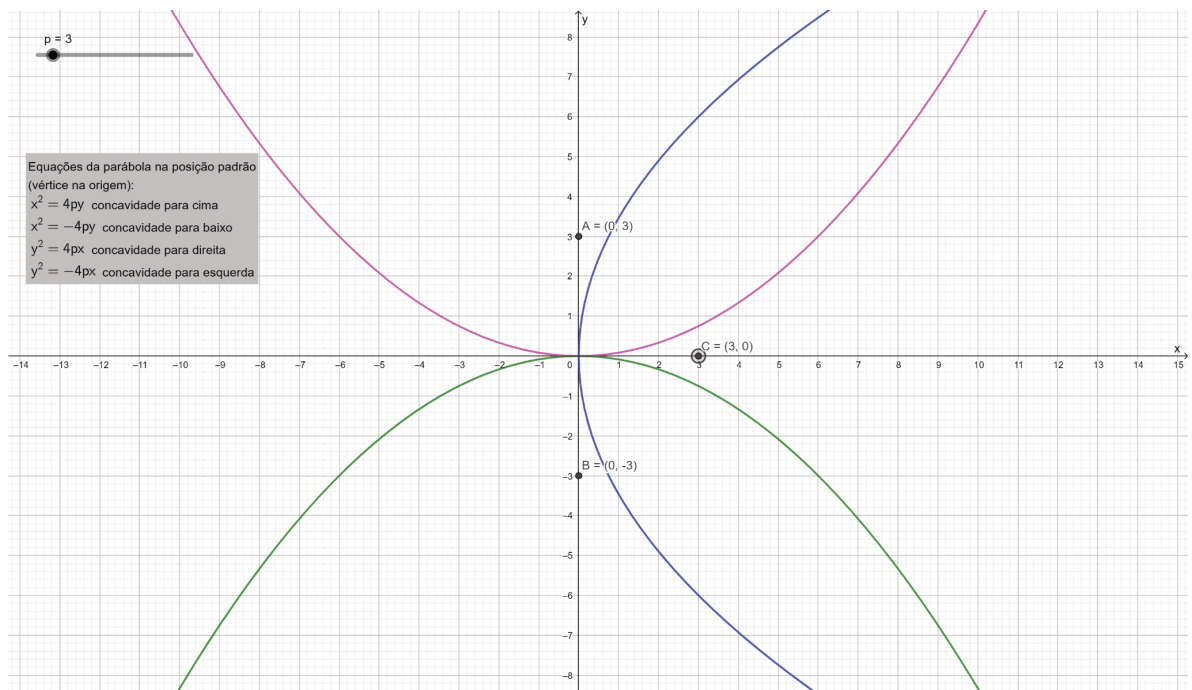
Passo 4 - Construção das demais parábolas

Digite no campo de entrada:

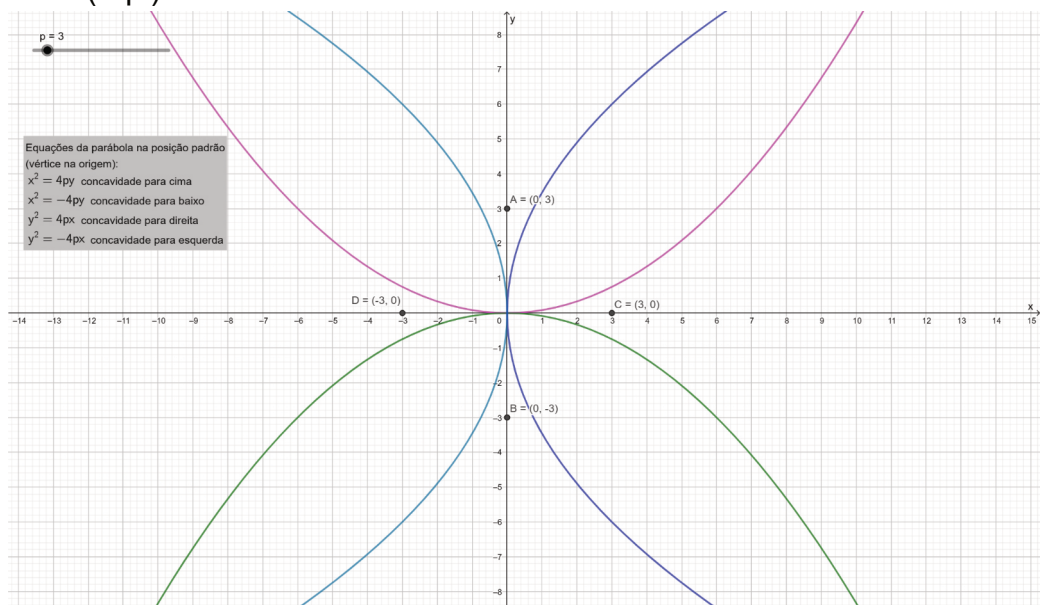
- $x^2 = -4 \cdot p \cdot y$
- Foco(eq2)



- $y^2 = 4 \cdot p \cdot x$
- Foco(eq3)

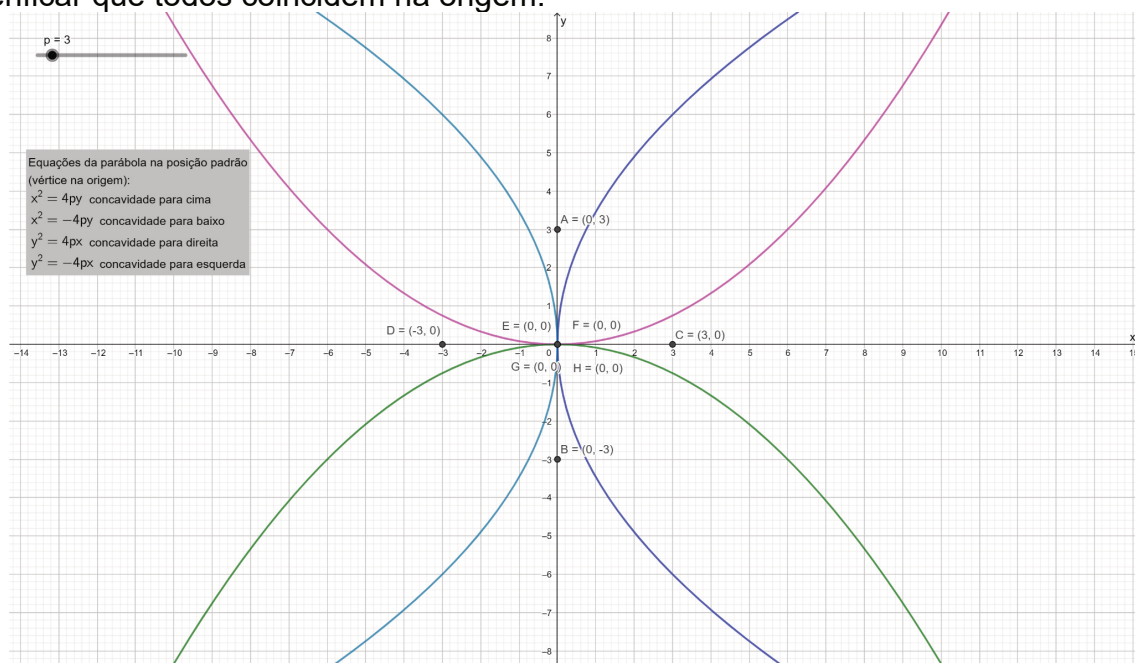


- $y^2 = -4 \cdot p \cdot x$
- Foco(eq4)



Passo 5 - Localização dos vértices

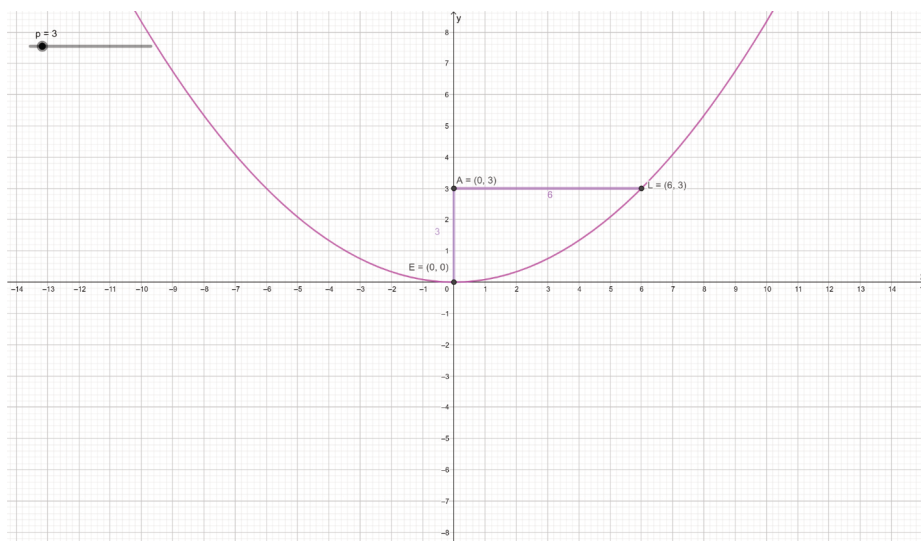
- Use os comandos Vértice(eq1), Vértice(eq2), Vértice(eq3) e Vértice(eq4) para verificar que todos coincidem na origem.



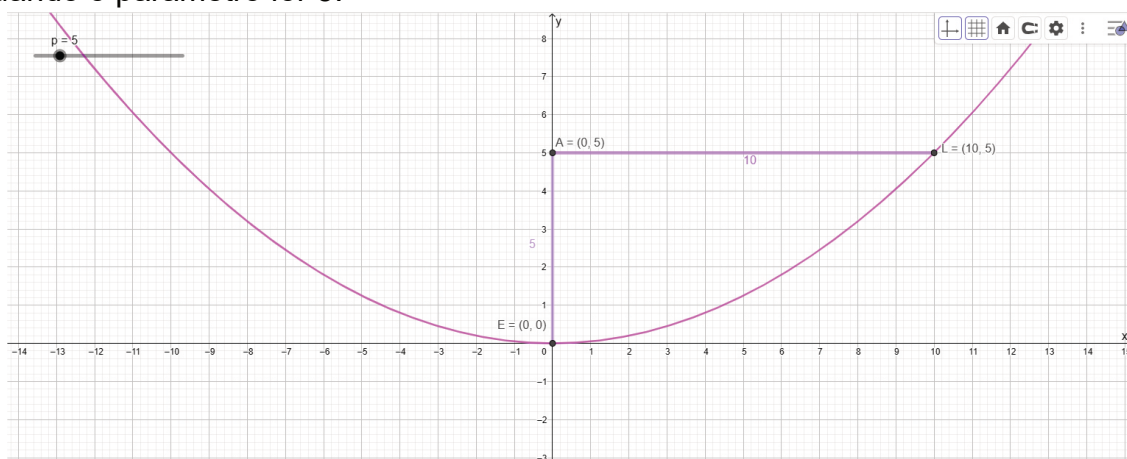
Passo 6 - Exploração do parâmetro p

- Oculte três parábolas, mantendo visível apenas $x^2 = 4py$.
- Mostre o deslocamento de $2p$ a partir do foco.
- Para criar um ponto L que acompanhe o foco, digite: $L = (x(A) + 2p, y(A))$.
- Crie segmentos do foco até o vértice e do foco até L, exibindo suas medidas.

Parâmetro igual a 3:



Quando o parâmetro for 5:



Passo 7 - Exploração das diretrizes

- Construa e nomeie as diretrizes correspondentes para observar a simetria e as distâncias.

Sugestão de uso em sala:

- **Professor:** pode fixar valores de p e propor que os alunos determinem foco, diretriz e equação, invertendo o processo de construção.
- **Estudante:** pode criar variações, como alterar a posição do vértice ou inverter a concavidade, para verificar o efeito direto na equação.

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA PARÁBOLA TRANSLADADA

Até agora, estudamos parábolas com **vértice na origem**, o que facilita a visualização e a compreensão da relação entre equação e gráfico.

Entretanto, na prática, muitas parábolas aparecem **transladadas** no plano cartesiano, isto é, deslocadas em relação à origem.

Os deslocamentos horizontal e vertical são representados por dois parâmetros adicionais:

- h - deslocamento horizontal do vértice;
- k - deslocamento vertical do vértice.

As equações reduzidas da parábola, quando o vértice é (h,k) , ficam:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad (\text{abertura para cima})$$

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \quad (\text{abertura para baixo})$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad (\text{abertura para a direita})$$

$$(y-k)^2 = -4p(x-h) \quad (\text{abertura para a esquerda})$$

Nesta construção, vamos usar **controles deslizantes** para manipular p , h e k e observar como cada valor altera a posição e a forma da parábola.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 20 a 40 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Criação dos controles deslizantes

- Insira três controles deslizantes:
- o p : valor inicial 1, mínimo -5, máximo 5, incremento 0,5.
- o h : valor inicial 0, mínimo -10, máximo 10, incremento 0,5.
- o k : valor inicial 0, mínimo -10, máximo 10, incremento 0,5.

Passo 2 - Colocação das equações no campo de texto

“Equações da parábola transladada:

$(x-h)^2=4p(y-k)$ concavidade para cima

$(x-h)^2=-4p(y-k)$ concavidade para baixo

$(y-k)^2=4p(x-h)$ concavidade para direita

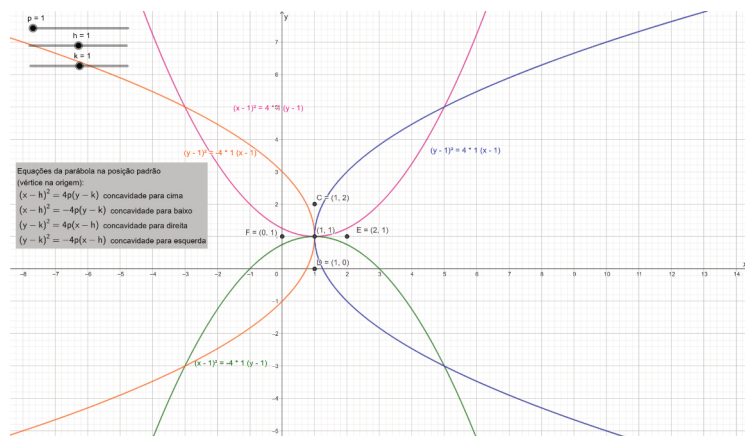
$(y-k)^2=-4p(x-h)$ concavidade para esquerda”

Passo 3 - Digitação das equações no campo de entrada

- $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
- $(x - h)^2 = - 4p(y - k)$
- $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
- $(y - k)^2 = - 4p(x - h)$

Passo 4 - Localização do foco e do vértice

- Para cada equação, utilize:
- o Foco(eq1), Foco(eq2), Foco(eq3), Foco(eq4)
- o Vértice(eq1) (o vértice será o mesmo para todas).

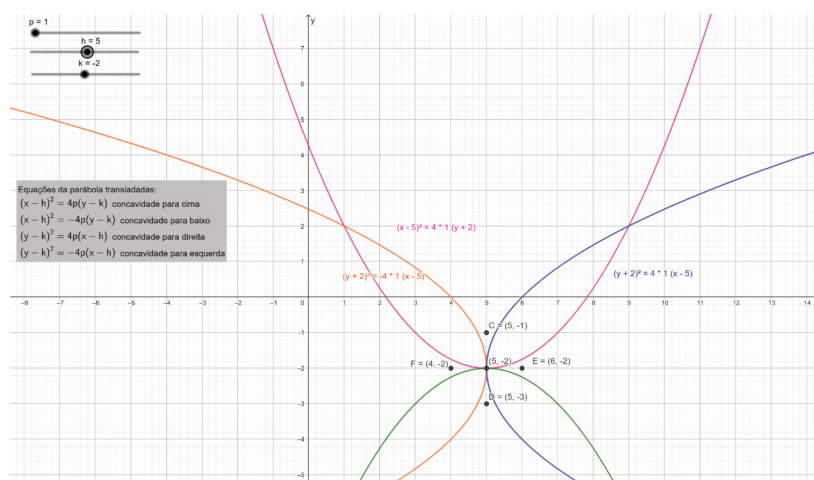


Passo 5 - Exploração dos deslocamentos

- Altere os valores de h e k para verificar o deslocamento do vértice.
- Por exemplo, $p = 1$, $h = 5$, $k = -2$ produz uma parábola deslocada 5 unidades à direita e 2 para baixo.

Passo 6 - Registro de observações

- Compare com os casos de vértice na origem.
- Relacione os sinais e valores de h e k com o deslocamento no gráfico.



Sugestão de uso em sala:

- **Professor:** proponha que os alunos determinem p, h e k a partir de um gráfico já pronto, deduzindo a equação.
- **Estudante:** experimente valores positivos e negativos para p, observando como a abertura e a concavidade mudam.

ATIVIDADES SOBRE PARÁBOLA

Depois de estudar a definição, os elementos e as equações da parábola (tanto na posição padrão quanto transladada), é hora de aplicar o que foi aprendido.

As atividades a seguir foram elaboradas para **consolidar o conhecimento**, permitindo que o estudante pratique:

- Identificação e representação gráfica da parábola;
- Determinação de foco, vértice, diretriz e parâmetro;
- Dedução da equação a partir de informações geométricas;
- Interpretação da equação para extrair elementos da curva.

Justificativa da Realização das Atividades

A prática é um passo essencial para a aprendizagem efetiva. Segundo Ausubel (TAS), o conhecimento se torna significativo quando o novo conteúdo é relacionado com conceitos já presentes na estrutura cognitiva do aluno.

Essas atividades favorecem:

- **A aprendizagem significativa**, ao exigir que o aluno faça conexões entre construções no GeoGebra, conceitos algébricos e interpretação geométrica;
- **O desenvolvimento da autonomia**, pois os exercícios podem ser realizados tanto individualmente quanto em grupo;
- **O raciocínio matemático**, ao aplicar propriedades e fórmulas em diferentes contextos.

Além disso, para professores, estas atividades podem servir como avaliação diagnóstica ou formativa, permitindo verificar se os alunos compreendem e sabem aplicar os conceitos.

Dicas de Aplicação

- **Para Estudantes:** tente resolver sem consultar o passo a passo; depois confira com o conteúdo do guia; após, consulte a resposta dada.
- **Para Professores:** utilize exemplos com e sem apoio do GeoGebra, incentivando a resolução manual e a verificação digital.

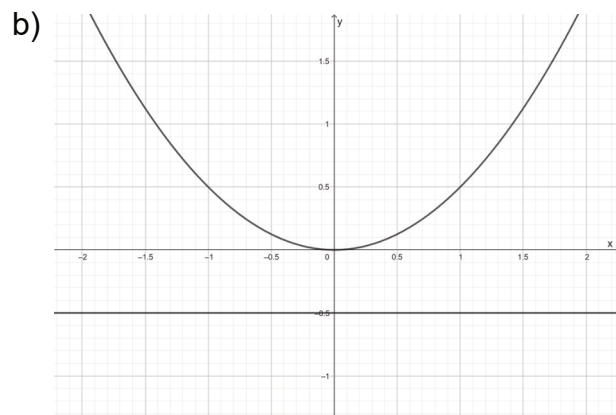
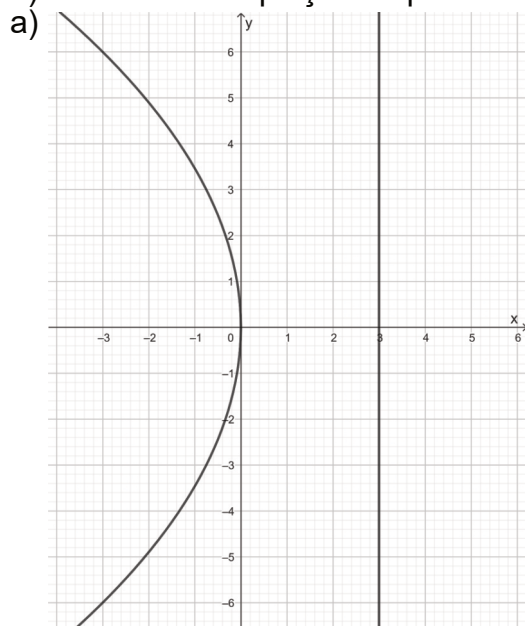
ATIVIDADES SOBRE PARÁBOLA

1) Esboce a parábola, indicando o foco, o vértice e a diretriz:

a) $y^2 = 4x$

b) $x^2 = -8y$

2) Determine a equação da parábola:



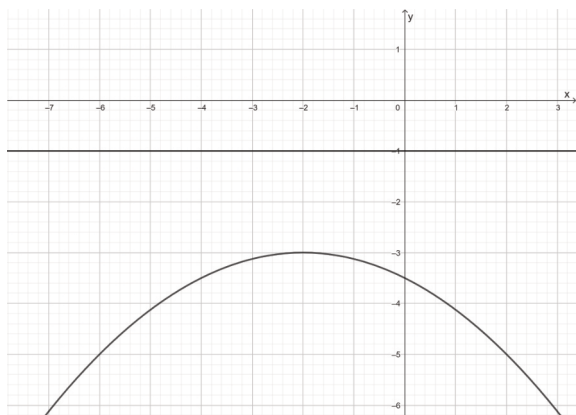
3) Esboce a parábola, indicando o foco, o vértice e a diretriz:

a) $(y - 1)^2 = -12(x + 4)$

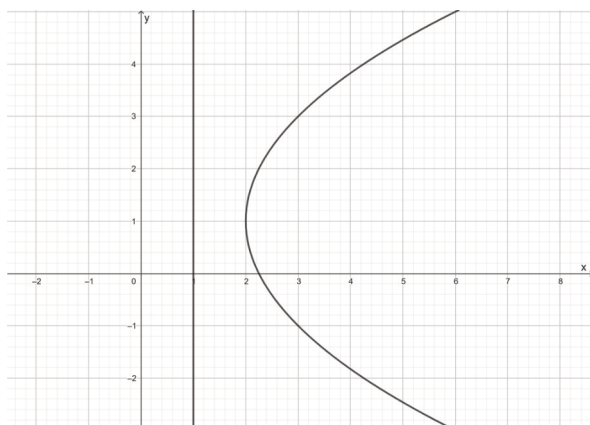
b) $(x - 1)^2 - 2(y - \frac{1}{2}) = 0$

4) Determine a equação da parábola:

a)



b)



RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE PARÁBOLA

As resoluções a seguir mostram, não apenas o resultado final, mas, também, o raciocínio necessário para chegar a cada resposta, permitindo ao estudante entender como e por que cada passo é realizado.

Sugestão para o professor: Solicite que os alunos expliquem cada passo da resolução oralmente, ou por escrito, justificando a escolha da forma da equação e a determinação de p . Isso estimula o raciocínio lógico e a comunicação matemática.

1) Esboce a parábola, indicando o foco, o vértice e a diretriz:

a) $y^2 = 4x$

$$y^2 = 4px$$

Vértice: $V(0,0)$

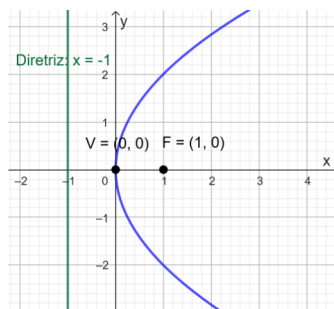
$$4px = 4x$$

Foco: $F(1,0)$

$$4p = 4$$

Diretriz: $x = -1$

$$p = 1$$



b) $x^2 = -8y$

$$x^2 = -4py$$

Vértice: $V(0,0)$

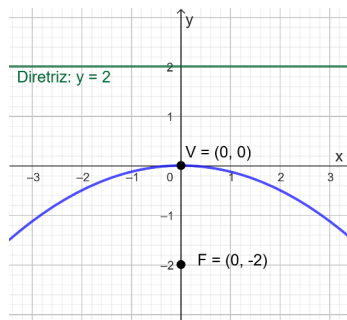
$$-4py = -8y$$

Foco: $F(0,-2)$

$$-4p = -8$$

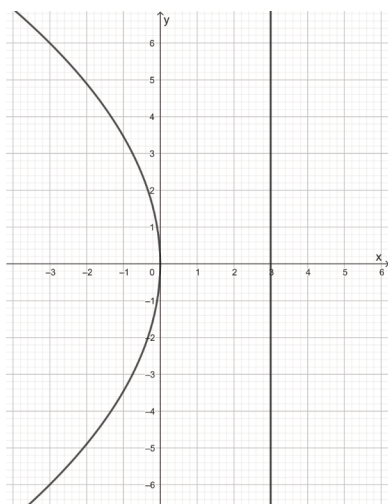
Diretriz: $y = 2$

$$p = 2$$



2) Determine a equação da parábola:

a)



$$p = 3$$

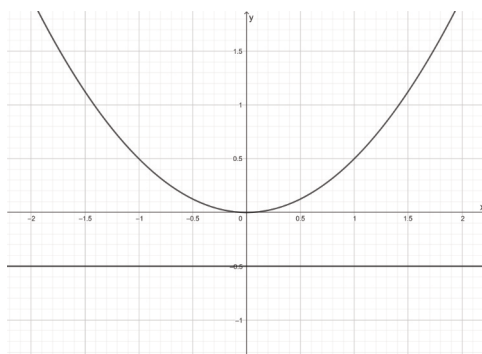
$$y^2 = -4px$$

$$y^2 = -4 \cdot 3x$$

$$y^2 = -12x$$

$$\text{Equação: } y^2 = -12x$$

b)



$$p = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)y$$

$$x^2 = -2y$$

$$\text{Equação: } x^2 = -2y$$

3) Esboce a parábola, indicando o foco, o vértice e a diretriz:

a) $(y - 1)^2 = -12(x + 4)$

Vértice: $V(-4, 1)$

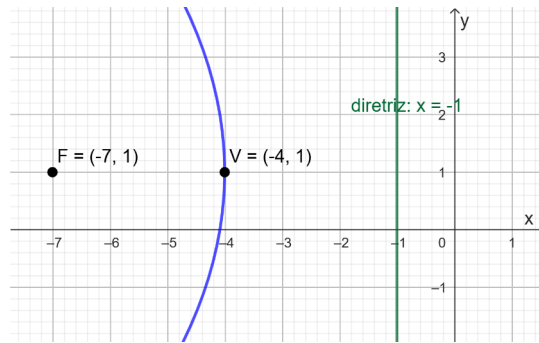
$$(y - 1)^2 = -4p(x + 4)$$

$$-12(x + 4) = -4p(x + 4)$$

$$-12 = -4p$$

$$p = 3$$

Diretriz: $x = -1$



b) $(x - 1)^2 - 2(y - \frac{1}{2}) = 0$

$$(x - 1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Vértice: $V\left(1, \frac{1}{2}\right)$

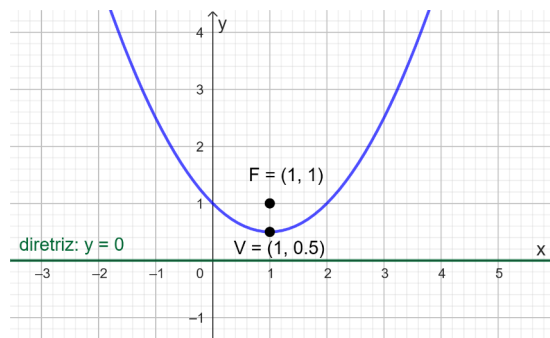
$$(x - 1)^2 = 4p\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 4p\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$2 = 4p$$

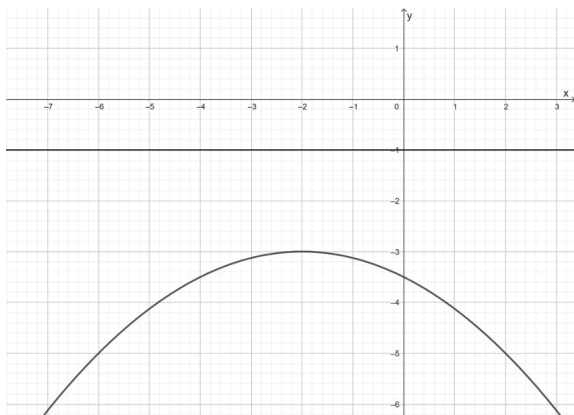
$$p = \frac{1}{2}$$

Diretriz: $y = 0$



4) Determine a equação da parábola:

a)



Vértice: $V(-2, -3)$

Parâmetro: $p = 2$

Diretriz: $y = -1$

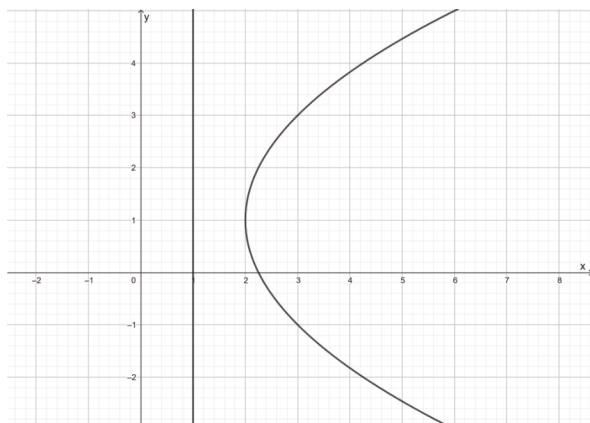
$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

$$(x + 2)^2 = -4 \cdot 2(y + 3)$$

$$(x + 2)^2 = -8(y + 3)$$

$$\text{Equação: } (x + 2)^2 = -8(y + 3)$$

b)



Vértice: $V(2, 1)$

Parâmetro: $p = 1$

Diretriz: $x = 1$

$$(y - 1)^2 = 4p(x - 2)$$

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2)$$

$$\text{Equação: } (y - 1)^2 = 4(x - 2)$$

FECHAMENTO - CAPÍTULO PARÁBOLA

Resumo Conceitual

Neste capítulo, exploramos a parábola a partir de três perspectivas complementares:

- 1. Construção geométrica** - utilizando o GeoGebra para visualizar a definição como lugar geométrico: conjunto de pontos equidistantes de um foco e de uma diretriz.
- 2. Elementos fundamentais** - foco, diretriz, vértice, eixo de simetria e parâmetro, compreendendo suas funções e relações métricas.
- 3. Representação algébrica** - equações reduzidas (padrão e transladada), análise de concavidade e uso de parâmetros para gerar diferentes curvas.

Também realizamos atividades práticas que conectaram teoria e aplicação, promovendo a consolidação da aprendizagem significativa (Ausubel), o engajamento na construção do conhecimento (Construcionismo de Papert) e o uso pedagógico das TDIC (GeoGebra) para visualização e experimentação.

Para o estudante

- Revise as construções feitas no GeoGebra e tente reproduzi-las sem consultar o passo a passo.
- Experimente alterar valores dos parâmetros para perceber como isso afeta a forma da curva.
- Construa exemplos próprios e compare com os exercícios resolvidos.

Para o professor

- Use as construções como demonstrações dinâmicas em sala de aula.
- Adapte as atividades de acordo com o nível da turma (Ensino Médio, curso de graduação ou formação continuada).

Utilize o recurso para avaliação formativa, observando se os alunos conseguem identificar e relacionar elementos e equações da parábola sem apoio visual.

Circunferência

Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o **centro**, e a distância dada é o **raio** da circunferência.

(Dolce; Pompeo, 2013, p.143)

APRESENTAÇÃO

Neste capítulo, exploramos a **circunferência**, uma das seções cônicas que está presente no cotidiano e na ciência. A circunferência aparece na engenharia (rodas, peças), na arquitetura, em objetos domésticos e em diversos outros contextos.

O objetivo é compreender suas **características geométricas e analíticas**, visualizando-as e manipulando-as por meio do **GeoGebra**, o que permitirá estabelecer conexões entre teoria e prática.

A proposta é conduzida em etapas:

- Uma **ilustração geométrica** que evidencia a definição da circunferência como o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada;
- Identificação e representação geométrica **dos elementos da circunferência**;
- Análise das **equações reduzidas** e variação de seus parâmetros;
- Exercícios para fixação.

O capítulo foi elaborado para ser utilizado **tanto por professores** - como roteiro para aulas - **quanto por estudantes** - como material de estudo e prática individual. Ao seguir as instruções, será possível modificar valores, observar propriedades e construir entendimento sólido do conceito.

Professores podem utilizar este roteiro como base para aulas, atividades investigativas e tarefas de aprofundamento. Estudantes podem se beneficiar ao repetir e adaptar as construções, explorando variações e documentando suas conclusões.

CIRCUNFERÊNCIA: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA

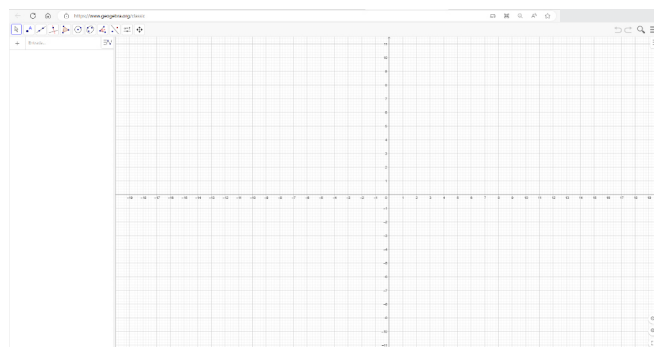
Objetivo da atividade: mostrar, geometricamente, que a circunferência é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 25 minutos.

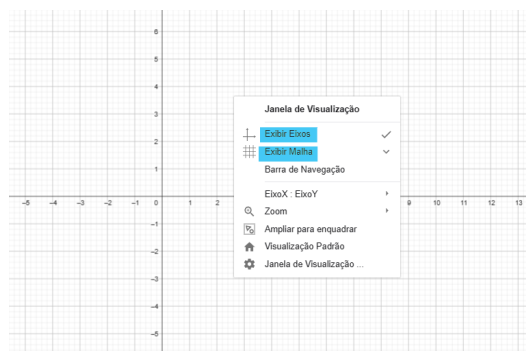
Passo 1 - Acesso ao GeoGebra

- Abra o site: <https://www.geogebra.org/classic>



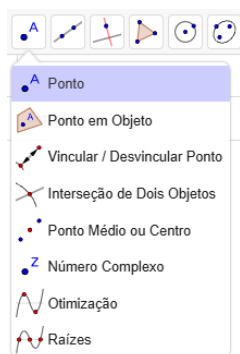
Passo 2 - Ajuste do ambiente de trabalho

- Retire a malha e os eixos: clique com o botão direito na malha do plano cartesiano e desmarque Exibir Eixos e Exibir Malha - Sem malha.



Passo 3 - Criação do ponto C (centro da circunferência)

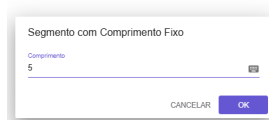
- Com a ferramenta Ponto, crie um ponto no local que preferir e renomeie como C.



C

Passo 4 - Criação do segmento CA

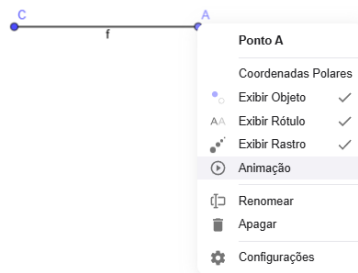
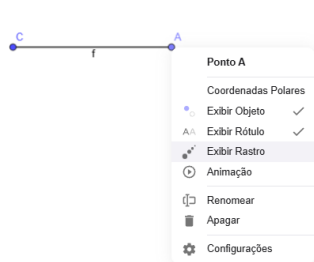
- Crie um segmento de reta com comprimento fixo, clicando no ponto C.
- Escolha o valor que preferir para o comprimento, no exemplo, foi criado um segmento de comprimento igual a 5:



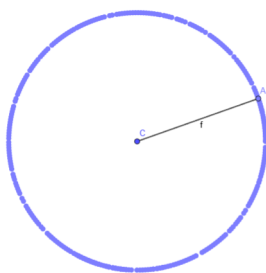
C A

Passo 5 - Exibição do rastro e animação do ponto A

- Clique com o botão direito no ponto A e selecione Exibir Rastro.
- Clique novamente com o botão direito no ponto A e agora selecione a opção Animação.



· Será formada uma imagem semelhante à essa:

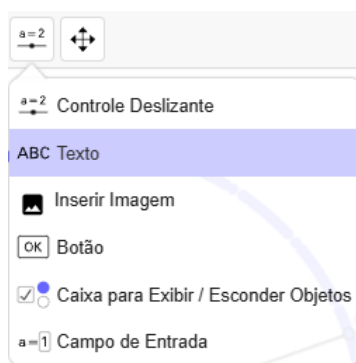


· Pode-se afirmar que no rastro feito pelo ponto A estão diversos pontos que estão à mesma distância do ponto C, pois o segmento f (CA) tem comprimento fixo.

Passo 6 - Escrita da definição

· Utilize a ferramenta Inserir Texto para escrever a definição:

Circunferência é um conjunto de pontos de um plano que estão à mesma distância (não nula) de um ponto dado (centro da circunferência). Essa distância é o raio da circunferência.



Circunferência é um conjunto de pontos de um plano que estão à mesma distância (não-nula) de um ponto dado (centro da circunferência). Essa distância é o raio da circunferência.

Passo 7 - Identificação do raio

· Renomeie o segmento f para “raio”:



Circunferência é um conjunto de pontos de um plano que estão à mesma distância (não-nula) de um ponto dado (centro da circunferência). Essa distância é o raio da circunferência.

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Após compreender a definição e a construção geométrica da circunferência, é fundamental identificar e compreender seus **elementos característicos**, pois eles são a base para a análise algébrica e a resolução de problemas.

Nesta seção, utilizamos o **GeoGebra** para construir uma circunferência de maneira direta, empregando a ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, e assim visualizar:

- **Centro (C)** - ponto central da curva;
- **Raio** - distância do centro da circunferência até um de seus pontos;
- **Diâmetro** - segmento de reta que vai de um extremo a outro da circunferência e que contém o centro da circunferência. É o dobro do raio;
- **Comprimento da circunferência** - $2 \cdot \pi \cdot r$;

Essa construção permitirá:

- Relacionar medidas e posições de cada elemento;
- Confirmar propriedades fundamentais;
- Preparar o terreno para o estudo das equações reduzidas.

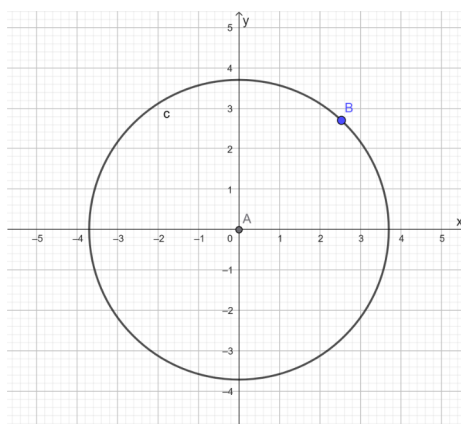
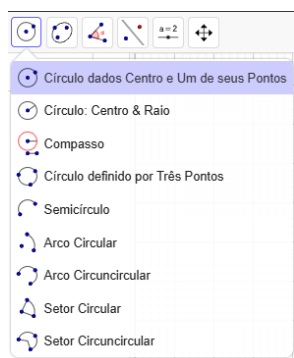
Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 30 minutos.

Elementos da Circunferência - Passo a Passo no GeoGebra

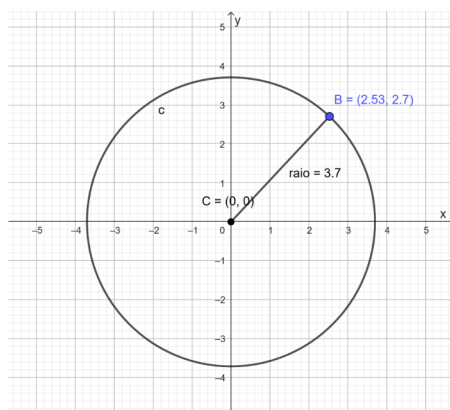
Passo 1 - Criação da circunferência

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Utilize a ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” e escolha como centro o ponto (0,0), para que seja trabalhado, primeiramente, a circunferência com centro na origem. A posição do próximo ponto (ponto B) fica a seu critério.



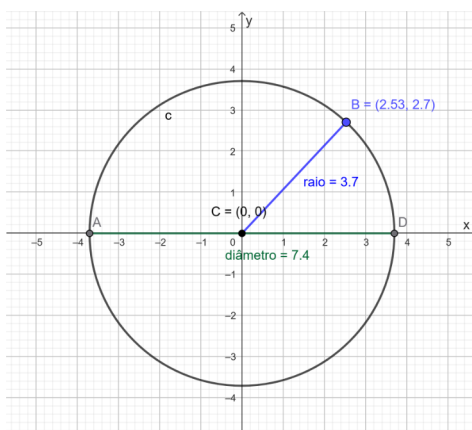
Passo 2 - Criação do segmento CB e identificação do centro e raio

- Renomeie o ponto A (centro) para C.
- Crie um segmento de reta que vá do ponto C até o B e renomeie como raio.
- Selecione o segmento que representa o raio (CB). Em suas configurações, vá na parte de “Exibir Rótulo” altere para “Nome&Valor”. Faça o mesmo processo para os pontos C e A. Dessa forma, será mostrado o valor do raio e as coordenadas dos pontos.



Passo 3 - Identificação do diâmetro

- Crie um segmento de reta que vá de um extremo a outro da circunferência e que passe pelo centro dela. Renomeie como diâmetro.
- Em suas configurações, vá na parte de “Exibir Rótulo” altere para “Nome&Valor”.
- Compare o valor do diâmetro com o valor do raio, você irá perceber que existe uma relação entre eles: o diâmetro é o dobro do valor do raio.



Passo 4 - Escrita dos elementos com texto dinâmico

- Escreva, com a ferramenta Inserir Texto, alguns elementos e relações da circunferência, tais como:

“Raio: distância do centro da circunferência até um de seus pontos.

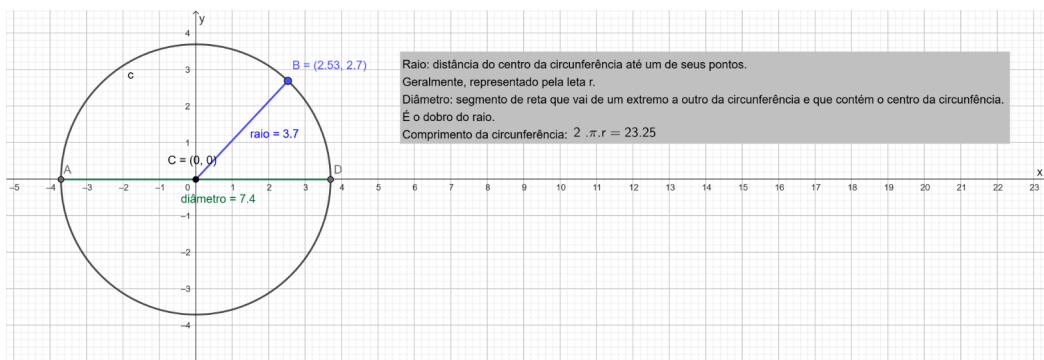
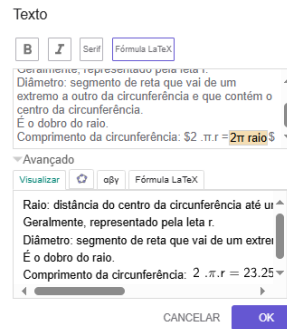
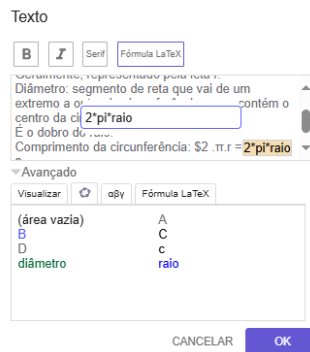
Geralmente, representado pela letra r .

Diâmetro: segmento de reta que vai de um extremo a outro da circunferência e que contém o centro da circunferência.

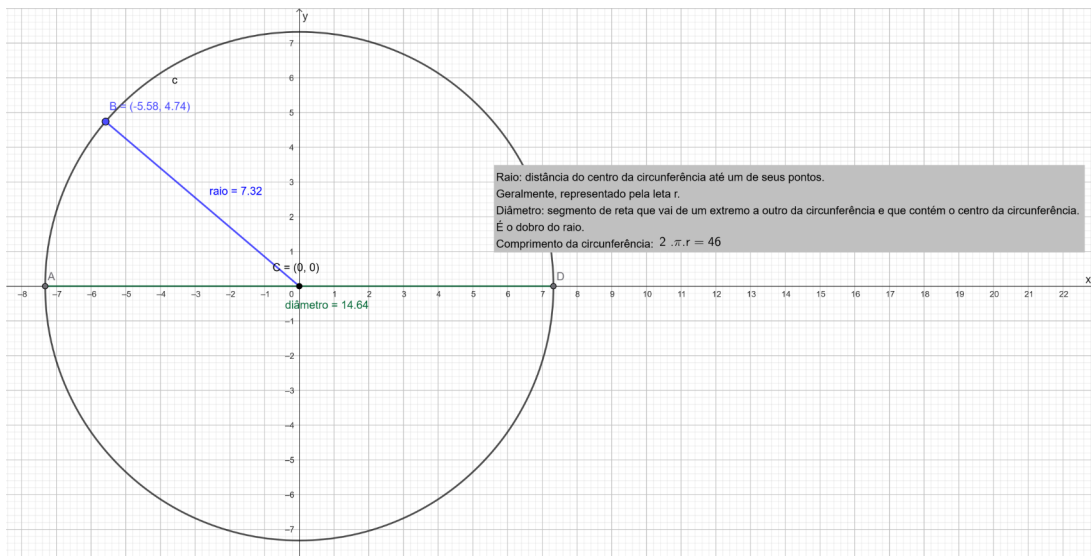
É o dobro do raio.

Comprimento da circunferência $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot \text{raio}$

Para que o texto que mostra o valor do comprimento seja dinâmico, selecione o objeto raio na aba que contém o símbolo do GeoGebra, após multiplique por 2 e por pi:



Mesmo que você altere a posição do ponto B e extensão do raio, a fórmula do comprimento irá mostrar o valor do comprimento da circunferência:



Os principais elementos de uma circunferência são:

CENTRO: ponto fixo;

RAIO: distância do centro da circunferência até um de seus pontos;

DIÂMETRO: segmento de reta que vai de um extremo a outro da circunferência e que contém o centro da circunferência. É o dobro do raio.

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA (COM CENTRO NA ORIGEM)

Nesta etapa, vamos relacionar a construção geométrica da circunferência com sua **expressão algébrica**.

Quando a circunferência está na posição padrão - isto é, com o **centro na origem** - sua equação assume uma forma simplificada chamada **equação reduzida**:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Nesta construção, utilizamos o **GeoGebra** para visualizar como a variação de r (raio) afeta a circunferência e confirmar que as equações se ajustam ao desenho.

Ao final, professores poderão explorar a relação entre o valor do raio e o formato da circunferência, e estudantes poderão experimentar diferentes valores para consolidar a compreensão.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 20 minutos.

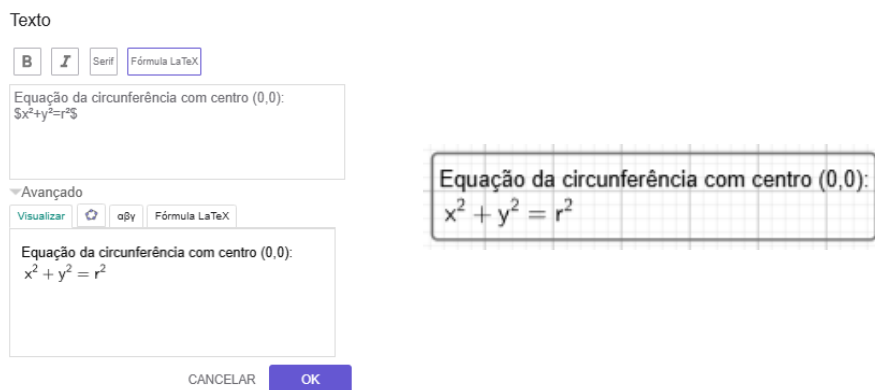
Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Colocação da equação no ambiente

- Escreva a equação, usando a ferramenta Texto, conforme segue:

“Equação da circunferência com centro (0,0):

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ “



Passo 2 - Construção da circunferência

- Digite a equação $x^2 + y^2 = r^2$ no campo de entrada. Automaticamente, será criado o controle deslizante r .
- Ajuste os controle deslizante conforme preferir.
- Perceba que r representa o raio da circunferência.

Passo 3 - Identificação do centro, raio e comprimento da circunferência

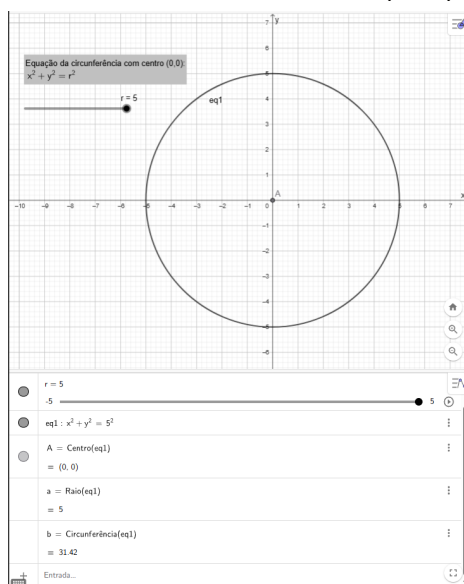
- Digite os comandos:

Centro(eq1)

Raio(eq1)

Perímetro(eq1)

- Segue exemplo de circunferência com centro (0, 0) e raio 5:



Sugestão de uso em sala:

- **Professor:** pode fornecer os valores do diâmetro ou do comprimento e propor que os alunos determinem a equação, invertendo o processo de construção.
- **Estudante:** pode criar variações, como alterar o valor do raio, para verificar o efeito direto na equação.

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA COM CENTRO (h,k)

Até agora, estudamos circunferências com **centro na origem**, o que facilita a visualização e a compreensão da relação entre equação e gráfico.

Entretanto, na prática, muitas circunferências aparecem **transladadas** no plano cartesiano, isto é, deslocadas em relação à origem.

O deslocamento horizontal e vertical é representado por dois parâmetros adicionais:

- h - deslocamento horizontal do vértice;
- k - deslocamento vertical do vértice.

A equação reduzida da circunferência, quando o centro é (h,k), é:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Nesta construção, vamos usar **controles deslizantes** para manipular h, k e r; e observar como cada valor altera a posição e a forma da parábola.

Esta seção tem por objetivo orientar uma forma de utilizar o GeoGebra para estudar as circunferências com centro (h,k), ou transladadas, e suas equações reduzidas.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 20 a 40 minutos.

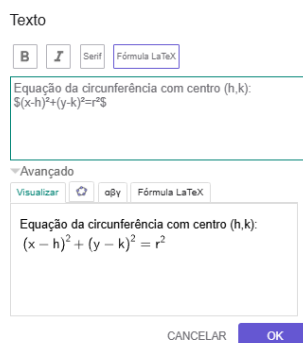
Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Colocação das equações no campo de texto

- Escreva a equação, usando a ferramenta texto, conforme segue:

“Equação da circunferência com centro (h,k):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
”



Passo 2 - Digitação das equações no campo de entrada

- Digite a equação $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
- Automaticamente, serão criados os controles deslizantes de **h**, **k** e **r**.

- Ajuste os controles deslizantes conforme preferir.
- Perceba que **r** representa o raio da circunferência, **h** e **k** representam as coordenadas do centro da circunferência.

Passo 3 - Identificação do centro, raio e comprimento da circunferência

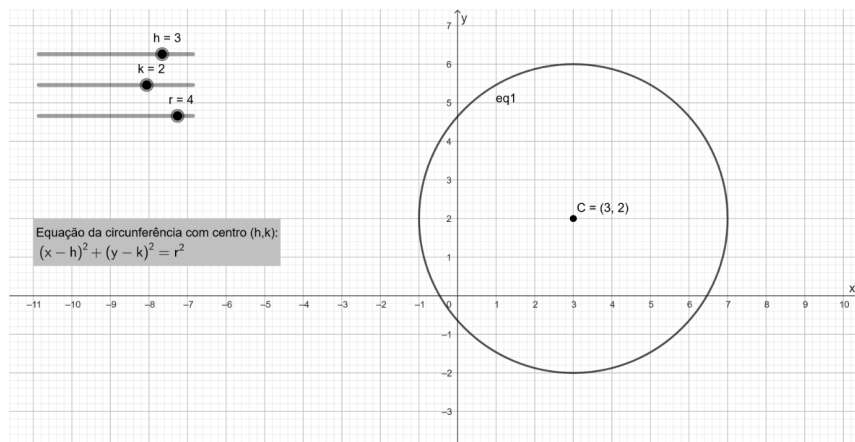
- Digite os comandos:

Centro(eq1)

Raio(eq1)

Perímetro(eq1)

- Segue exemplo de circunferência com centro (3,2) e raio 4:



DICA: você pode tanto digitar a equação com centro **(h,k)** no campo de entrada ou alterar a equação já existente (caso você tenha construído a circunferência com centro na origem). Se optar pela segunda opção, irá verificar que os controles deslizantes **h** e **k** são criados. Os valores de **h** e **k** podem ser alterados, assim como os valores de **r**. Caso os controles deslizantes **h** ou **k** não sejam criados, pode ser que já exista com algum elemento com esse nome, nesse caso, é só renomear.

ATIVIDADES SOBRE CIRCUNFERÊNCIA

Depois de estudar a definição, os elementos e as equações da circunferência (tanto na posição padrão quanto transladada), é hora de aplicar o que foi aprendido.

As atividades a seguir foram elaboradas para **consolidar o conhecimento**, permitindo que o estudante pratique:

- Identificação e representação gráfica da circunferência;
- Determinação de centro, raio, diâmetro e comprimento;
- Dedução da equação a partir de informações geométricas;
- Interpretação da equação para extrair elementos da curva.

Justificativa da Realização das Atividades

A prática é um passo essencial para a aprendizagem efetiva. Segundo Ausubel (TAS), o conhecimento se torna significativo quando o novo conteúdo é relacionado com conceitos já presentes na estrutura cognitiva do aluno.

Essas atividades favorecem:

- **A aprendizagem significativa**, ao exigir que o aluno faça conexões entre construções no GeoGebra, conceitos algébricos e interpretação geométrica;
- **O desenvolvimento da autonomia**, pois os exercícios podem ser realizados tanto individualmente quanto em grupo;
- **O raciocínio matemático**, ao aplicar propriedades e fórmulas em diferentes contextos.

Além disso, para professores, estas atividades podem servir como avaliação diagnóstica ou formativa, permitindo verificar se os alunos compreendem e sabem aplicar os conceitos.

Dicas de Aplicação

- **Para Estudantes:** tente resolver sem consultar o passo a passo; depois confira com o conteúdo do guia; após, consulte a resposta dada.
- **Para Professores:** utilize exemplos com e sem apoio do GeoGebra, incentivando a resolução manual e a verificação digital.

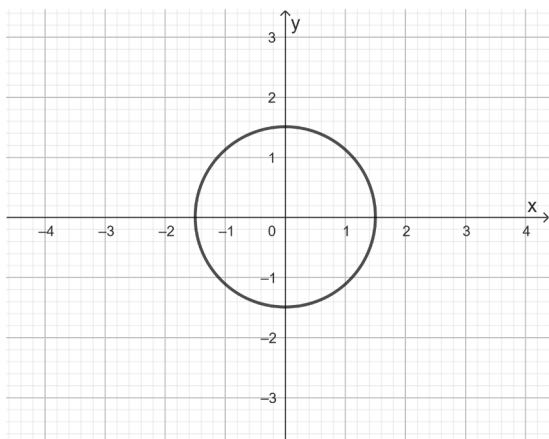
ATIVIDADES SOBRE CIRCUNFERÊNCIA

1) Escreva a equação e esboce o gráfico da circunferência com centro $(0,0)$ e raio igual a 7.

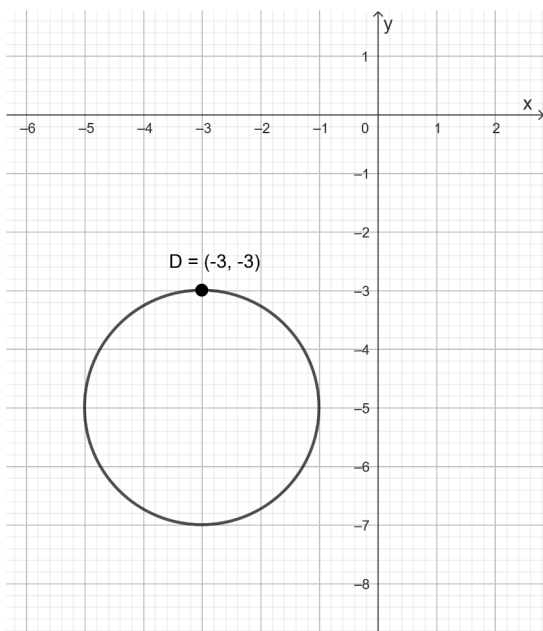
2) Escreva a equação e esboce o gráfico da circunferência com centro na origem, sabendo que o ponto $(-3,0)$ faz parte dela.

3) Escreva a equação e esboce o gráfico da circunferência com centro no ponto $(-4,2)$, sabendo que o seu comprimento é igual 12,56 (considere o valor de π como 3.14).

4) Escreva a equação da circunferência a seguir, sabendo que o valor do diâmetro é 3 e que o centro dela está na origem do plano cartesiano:



5) Escreva a equação da circunferência a seguir, sabendo que o raio é igual a 2:



RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE CIRCUNFERÊNCIA

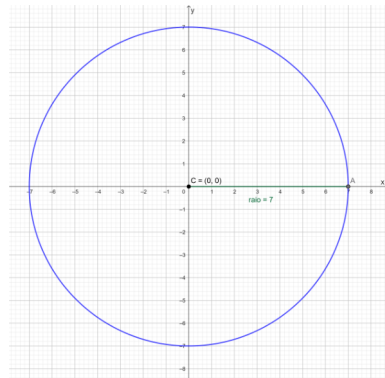
As resoluções a seguir mostram, não apenas o resultado final, mas, também, o raciocínio necessário para chegar a cada resposta, permitindo ao estudante entender como e por que cada passo é realizado.

Sugestão para o professor: Solicite que os alunos expliquem cada passo da resolução oralmente, ou por escrito, justificando a escolha da forma da equação. Isso estimula o raciocínio lógico e a comunicação matemática.

- 1) Escreva a equação e esboce o gráfico da circunferência com centro (0,0) e raio igual a 7.

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 7^2$$

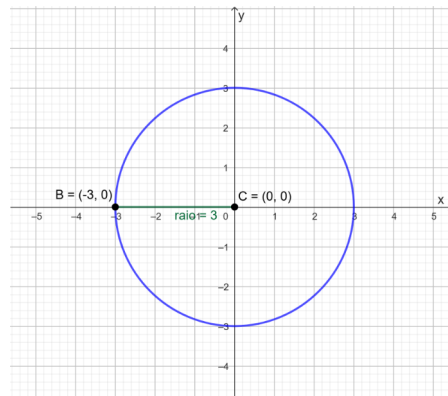
$$x^2 + y^2 = 49$$



- 2) Escreva a equação e esboce o gráfico da circunferência com centro na origem, sabendo que o ponto (-3,0) faz parte dela.

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$



- 3) Escreva a equação e esboce o gráfico da circunferência com centro no ponto (-4,2), sabendo que o seu comprimento é igual 12,56 (considere o valor de π como 3.14).

$$C(-4, 2)$$

$$2\pi r = 12,56$$

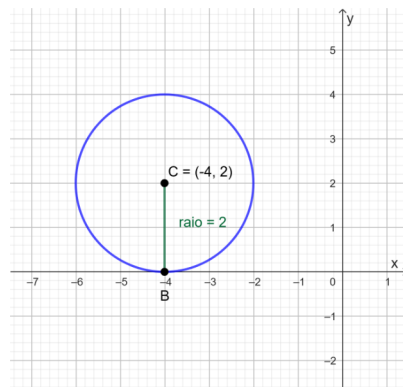
$$2 \cdot 3,14 \cdot r = 12,56$$

$$6,28r = 12,56$$

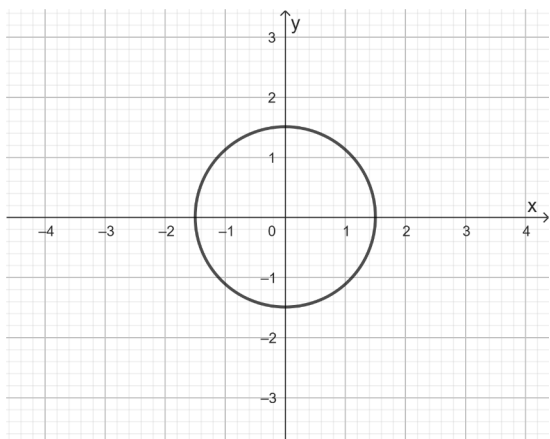
$$r = \frac{12,56}{6,28}$$

$$r = 2$$

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$$



4) Escreva a equação da circunferência a seguir, sabendo que o valor do diâmetro é 3 e que o centro dela está na origem do plano cartesiano:



$$\text{Diâmetro} = 2r$$

$$\text{Diâmetro} = 3$$

$$3 = 2r$$

$$r = \frac{3}{2}$$

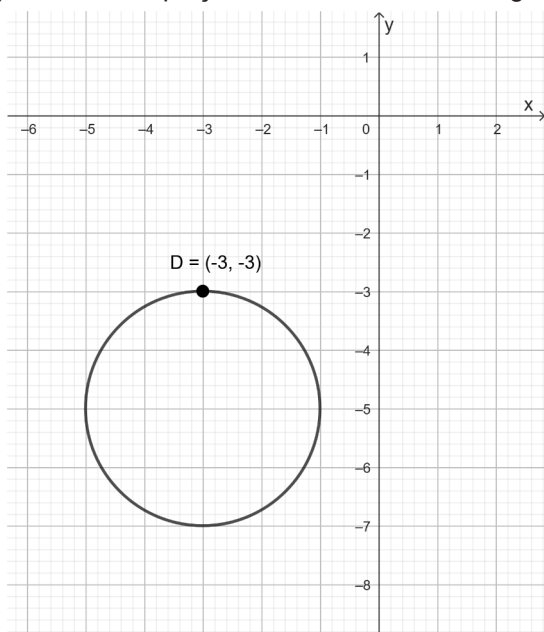
$$r = 1,5$$

$$C(0,0)$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

5) Escreva a equação da circunferência a seguir, sabendo que o raio é igual a 2:



$$r = 2$$

$$C(-3, -5)$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 2^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$$

FECHAMENTO - CAPÍTULO CIRCUNFERÊNCIA

Resumo Conceitual

Neste capítulo, exploramos a circunferência a partir de três perspectivas complementares:

1. **Construção geométrica** - utilizando o GeoGebra para visualizar a definição como lugar geométrico: conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o **centro**, e a distância dada é o **raio** da circunferência.
2. **Elementos fundamentais** - centro, raio e diâmetro da circunferência, compreendendo suas funções e relações métricas.
3. **Representação algébrica** - equações reduzidas (padrão e transladada), uso de controle deslizante para gerar diferentes circunferências.

Também realizamos atividades práticas que conectaram teoria e aplicação, promovendo a consolidação da aprendizagem significativa (Ausubel), o engajamento na construção do conhecimento (Construcionismo de Papert) e o uso pedagógico das TDIC (GeoGebra) para visualização e experimentação.

Para o estudante

- Revise as construções feitas no GeoGebra e tente reproduzi-las sem consultar o passo a passo.
- Experimente alterar valor do controle deslizante para perceber como isso afeta a forma da curva.
- Construa exemplos próprios e compare com os exercícios resolvidos.

Para o professor

- Use as construções como demonstrações dinâmicas em sala de aula.
- Adapte as atividades de acordo com o nível da turma (Ensino Médio, curso de graduação ou formação continuada).

Utilize o recurso para avaliação formativa, observando se os alunos conseguem identificar e relacionar elementos e equações da circunferência sem apoio visual.

Elipse

Uma **elipse** é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixados.

Os dois pontos fixados são chamados de **focos** da elipse, e o ponto médio do segmento que une os focos é chamado de **centro** [...]. Note que, se os focos coincidirem, a elipse se reduz a um círculo. Para elipses outras que não sejam círculos, o segmento de reta através dos focos com extremidades na elipse é chamado de **eixo maior** [...], e o segmento de reta através do centro com extremidades na elipse, e perpendicular ao eixo maior, é chamado de **eixo menor**. As extremidades do eixo maior são chamadas de **vértices**.

(Anton; Bivens; Davis, 2014, p.731)

APRESENTAÇÃO

Neste capítulo, exploramos a **elipse**, uma das seções cônicas mais presentes no cotidiano e na ciência. A elipse aparece na astronomia (órbita dos planetas ao redor do Sol), na engenharia (espelhos elípticos utilizados em telescópios), na arquitetura e em diversos outros contextos.

O objetivo é compreender suas **características geométricas e analíticas**, visualizando-as e manipulando-as por meio do **GeoGebra**, o que permitirá estabelecer conexões entre teoria e prática.

A proposta é conduzida em etapas:

- Uma **ilustração geométrica** que evidencia a definição da elipse como o conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixado;
- Identificação e representação geométrica **dos elementos da elipse**;
- Análise das **equações reduzidas** e variação de seus parâmetros;
- Exercícios para fixação.

O capítulo foi elaborado para ser utilizado **tanto por professores** - como roteiro para aulas - **quanto por estudantes** - como material de estudo e prática individual. Ao seguir as instruções, será possível modificar valores, observar propriedades e construir entendimento sólido do conceito.

Professores podem utilizar este roteiro como base para aulas, atividades investigativas e tarefas de aprofundamento. Estudantes podem se beneficiar ao repetir e adaptar as construções, explorando variações e documentando suas conclusões.

ELIPSE: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA

Objetivo da atividade: mostrar, geometricamente, que a elipse é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixados.

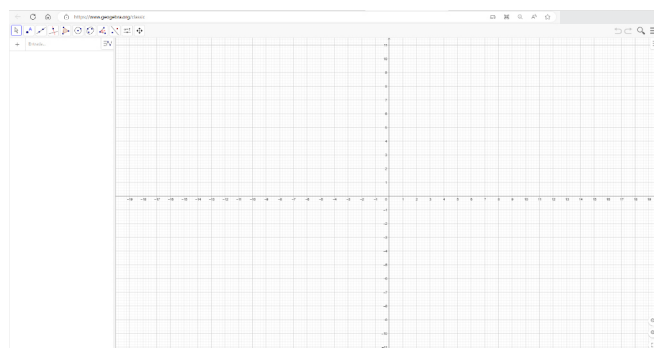
Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 45 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

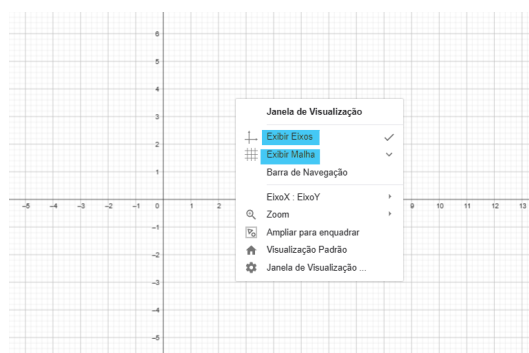
Passo 1 - Acesso ao GeoGebra

- Abra o site: <https://www.geogebra.org/classic>



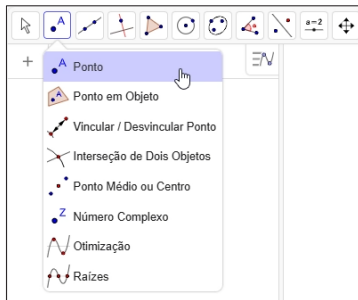
Passo 2 - Ajuste do ambiente de trabalho

- Retire a malha e os eixos: clique com o botão direito na malha do plano cartesiano e desmarque Exibir Eixos e Exibir Malha - Sem malha.



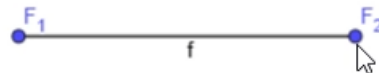
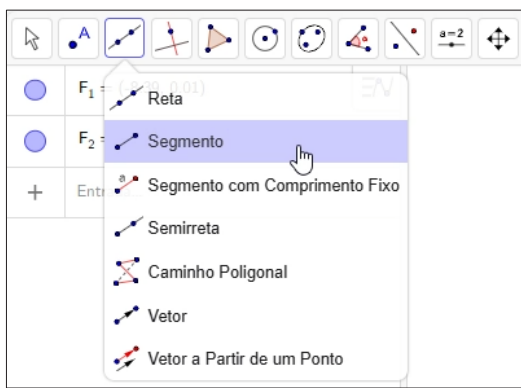
Passo 3 - Criação dos focos F_1 e F_2

- Utilize a ferramenta Ponto para criar dois pontos distintos e renomeie-os como F_1 e F_2 .



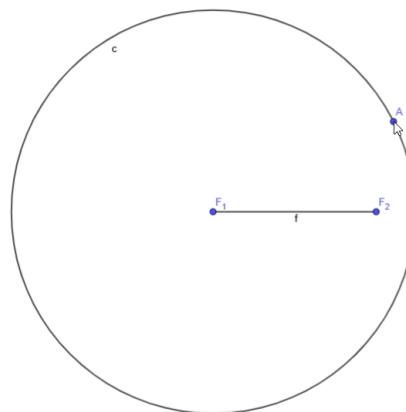
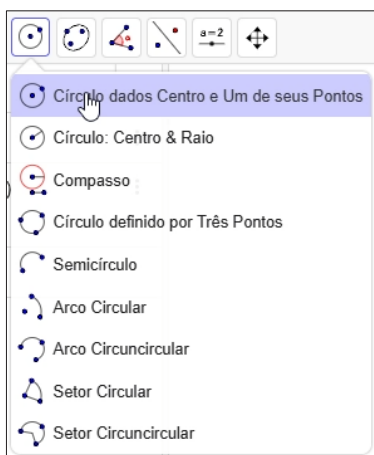
Passo 4 - Criação do segmento F_1F_2

- Trace, com a ferramenta segmento, um segmento que passe pelos pontos F_1 e F_2 .



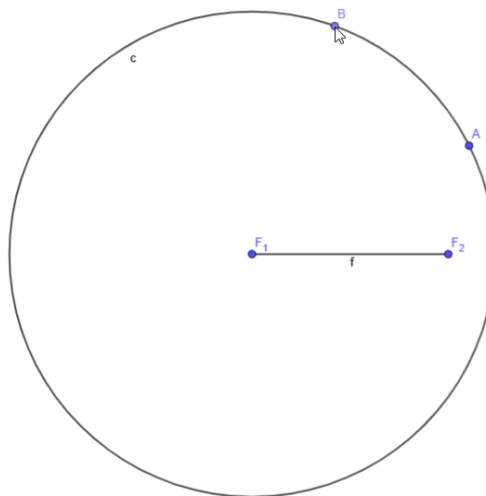
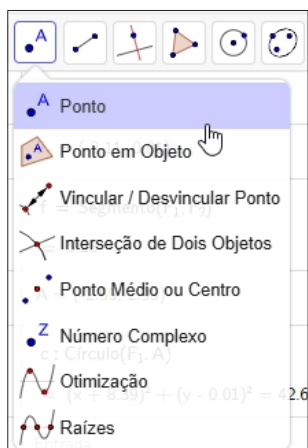
Passo 5 - Criação de uma circunferência

- Crie, com a ferramenta "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos" um círculo com centro no ponto F_1 , de modo que o ponto F_2 fique na parte interna da circunferência;



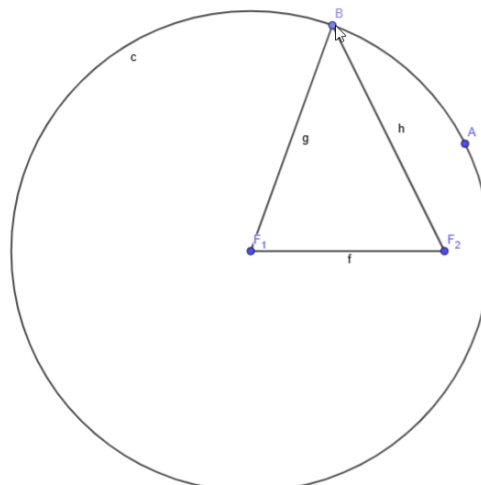
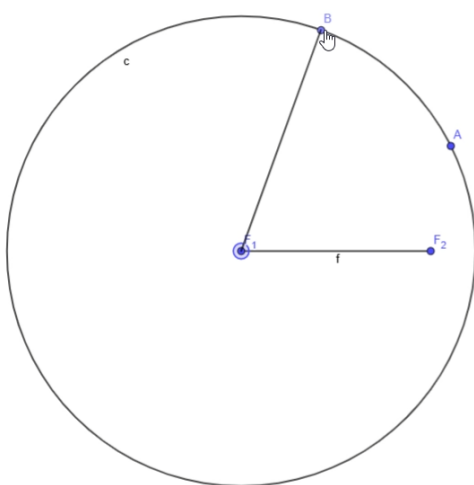
Passo 6 - Criação do ponto B

- Crie novo ponto na circunferência (ponto B), diferente do ponto A.



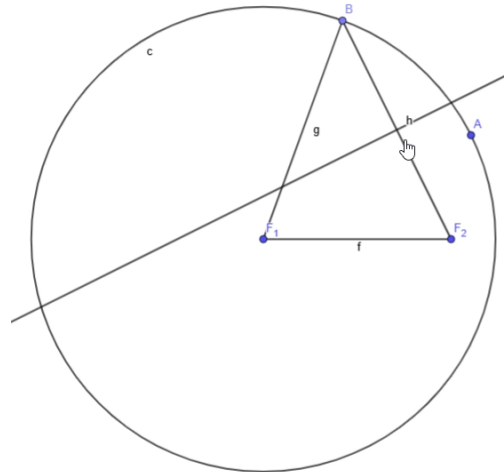
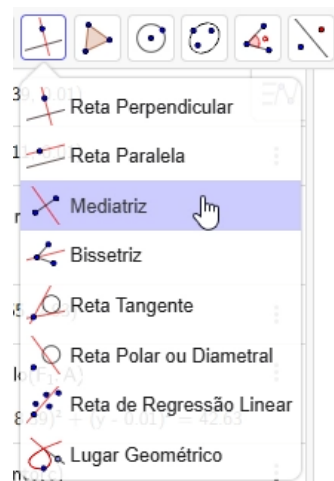
Passo 7 - Criação os segmentos F_1B e F_2B

- Crie, com a ferramenta segmento, os segmentos F_1B e F_2B .



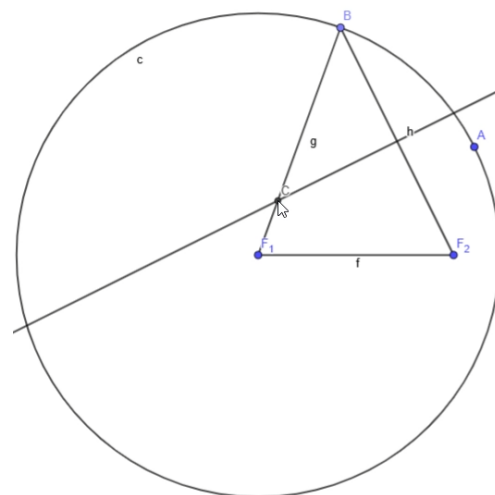
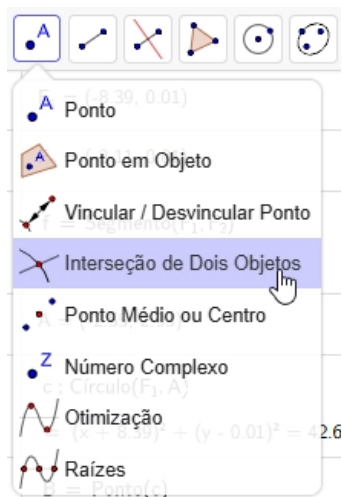
Passo 8 - Criação da mediatriz do segmento F_2B

- Trace, com a ferramenta mediatriz, a mediatriz do segmento F_2B .



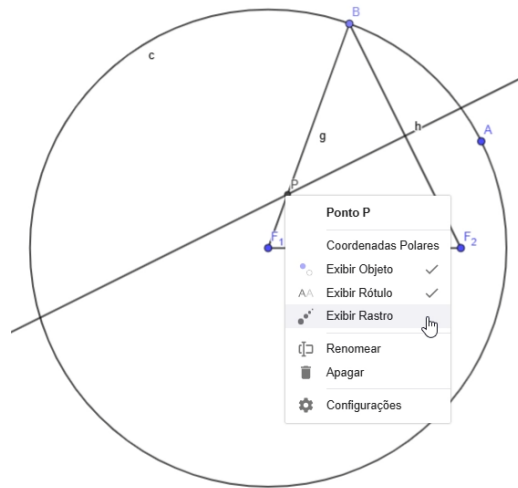
Passo 8 - Determinação da interseção da reta mediatriz i com o segmento F_1B

- Utilize a ferramenta Interseção de Dois Objetos e selecione a interseção da reta mediatriz i com o segmento F_1B .
- Renomeie o ponto C como ponto P .



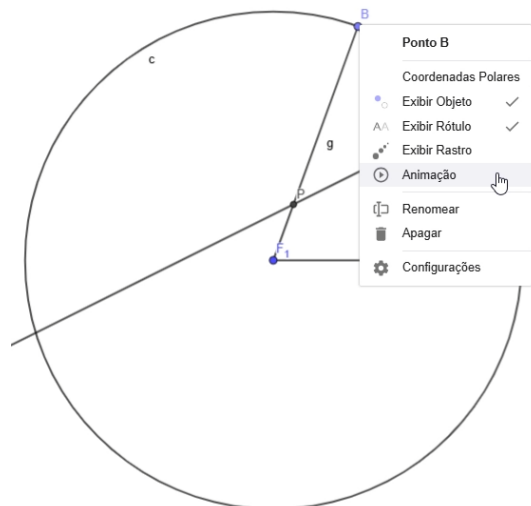
Passo 9 - Exibição do rastro do ponto P

- Clique com o botão direito no ponto P e selecione a opção Exibir Rastro.

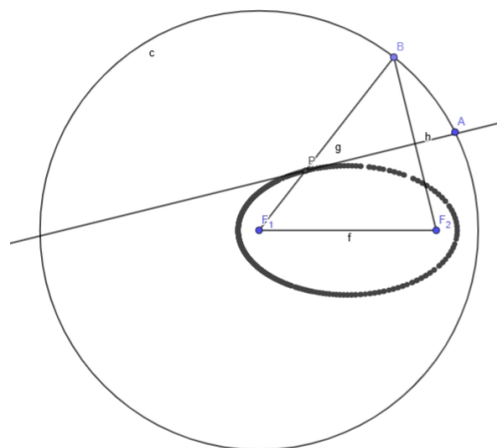


Passo 10 - Animação do ponto B

- Clique com o botão direito no ponto B e selecione a opção Animação;

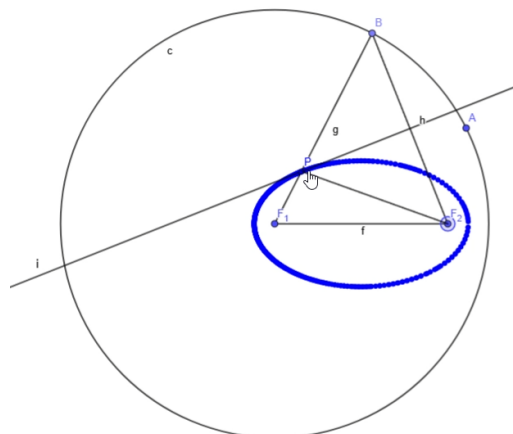


- Será formada a imagem a seguir:



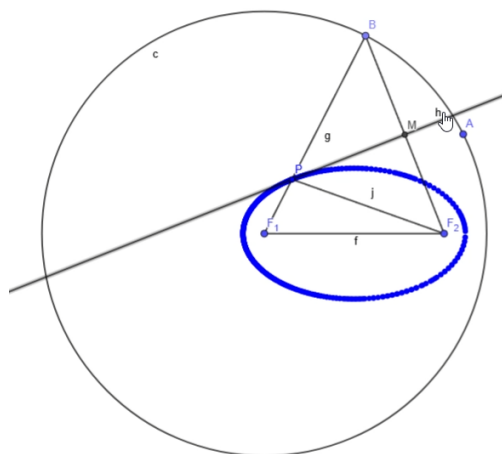
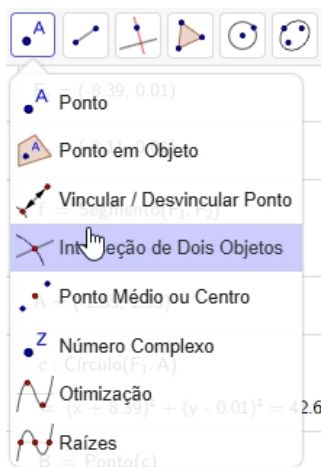
Passo 11 - Criação do segmento F_2P

- Crie o segmento F_2P .



Passo 12 - Determinação da interseção da reta mediatriz i com o segmento F_2B

- Crie, com a ferramenta Interseção de Dois Objetos, a interseção da reta mediatriz (i) com o segmento F_2B .
- Renomeie o ponto criado como M .



Passo 13 - Ilustração da definição da elipse

- Oculte o rótulo dos segmentos f , g , h e j .
- A ilustração da definição da elipse pode ser feita pela congruência de triângulos, ao considerarmos os triângulos PF_2M e PBM .

Pela definição, para ser elipse, $F_1P + F_2P = 2a$.

Pela mediatriz, temos:

$$F_2M = BM$$

MP é um segmento comum dos triângulos PF_2M e PBM

O ângulo F_2MP é igual ao ângulo BMP

Pela correspondência de igualdade entre as medidas de dois lados de cada triângulo e do ângulo formado por estes, tem-se que os triângulos PF_2M e PBM são congruentes pelo caso "lado, ângulo, lado".
Por consequência, $BP = F_2P$

Também podemos considerar que:

$$\text{raio} = F_1B = F_1P + BP$$

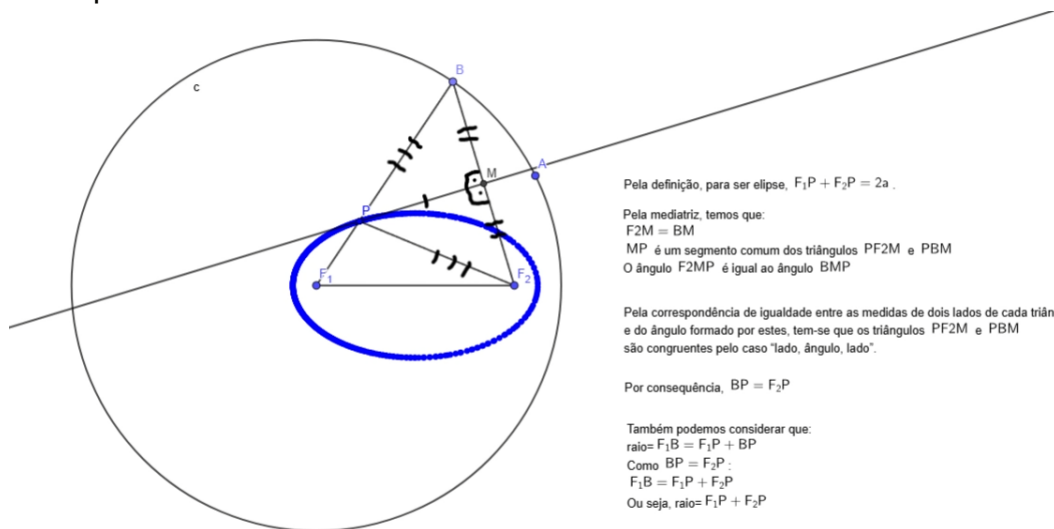
$$\text{Como } BP = F_2P:$$

$$F_1B = F_1P + F_2P$$

Ou seja,

$$\text{raio} = F_1P + F_2P$$

O raio é uma constante, da mesma forma que $2a$, o que mostra que vale a definição inicial $F_1P + F_2P = 2a$ e que o conjunto de pontos mostrado pelo rastro do ponto P ilustra uma elipse.



Pela definição, para ser elipse, $F_1P + F_2P = 2a$.

Pela mediatriz, temos que:

$$F_2M = BM$$

MP é um segmento comum dos triângulos PF_2M e PBM

O ângulo F_2MP é igual ao ângulo BMP

Pela correspondência de igualdade entre as medidas de dois lados de cada triângulo e do ângulo formado por estes, tem-se que os triângulos PF_2M e PBM são congruentes pelo caso "lado, ângulo, lado".

Por consequência, $BP = F_2P$

Também podemos considerar que:

$$\text{raio} = F_1B = F_1P + BP$$

$$\text{Como } BP = F_2P:$$

$$F_1B = F_1P + F_2P$$

$$\text{Ou seja, raio} = F_1P + F_2P$$

O raio é uma constante, da mesma forma que $2a$, o que demonstra que vale a definição inicial $F_1P + F_2P = 2a$ e que o conjunto de pontos mostrado pelo rastro do ponto P ilustra uma elipse.

ELEMENTOS DA ELIPSE

Após compreender a definição e a construção geométrica da elipse, é fundamental identificar e compreender seus **elementos característicos**, pois eles são a base para a análise algébrica e a resolução de problemas.

Nesta seção, utilizamos o **GeoGebra** para construir uma elipse de maneira direta, empregando a ferramenta “Elipse”, e assim visualizar:

- **Focos** - pontos fixos que definem a curva;
- **Distância focal** - distância entre os focos ($2c$);
- **Centro**: ponto médio entre os focos;
- **Vértices** - extremidades do maior eixo;
- **Eixo 2a**: maior eixo da elipse que vai de um vértice a outro e que contém os focos dela;
- **Semieixo a**: distância de um dos vértices que está no EIXO A até o centro da elipse;
- **Eixo 2b**: menor eixo da elipse;
- **Semieixo b**: a distância do centro da elipse até a extremidade do EIXO B.

Essa construção permitirá:

- Relacionar medidas e posições de cada elemento;
- Confirmar propriedades fundamentais;
- Preparar o terreno para o estudo das equações reduzidas.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 40 minutos.

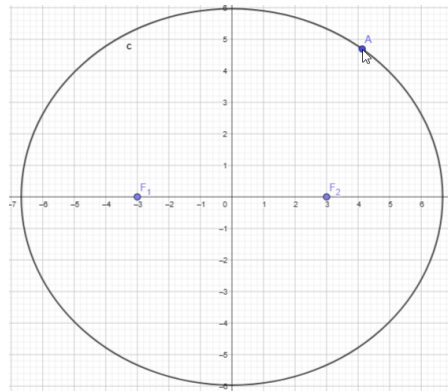
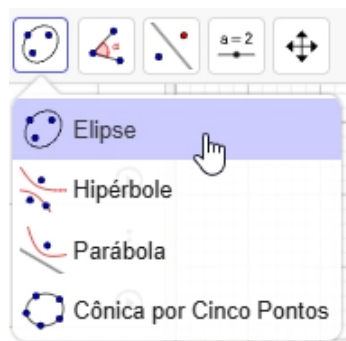
Elementos da Elipse - Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Certifique-se de que a malha e os eixos estejam visíveis (se necessário, ative-os clicando com o botão direito e selecionando **Exibir Eixos - Exibir Malha**).

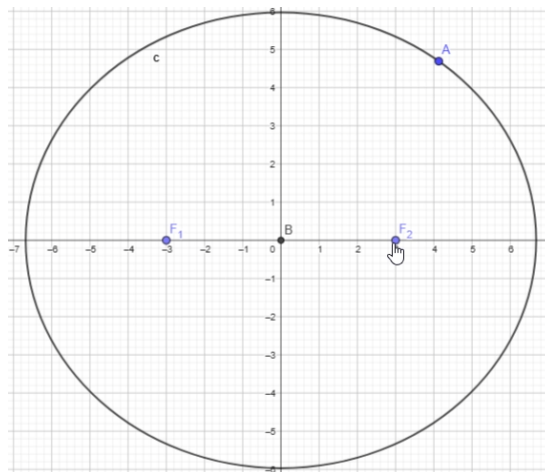
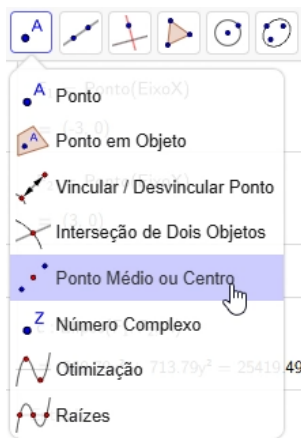
Passo 2 - Criação da elipse e identificação dos focos

- Utilize a ferramenta “Elipse” e escolha os pontos $(-3,0)$ e $(3,0)$ para serem os focos da elipse e um terceiro pelo qual a elipse passe. Os focos foram escolhidos propositalmente nessa posição, para que seja trabalhado, primeiramente, a elipse centrada na origem com focos sobre o eixo x.
- Renomeie os pontos $(-3,0)$ e $(3,0)$ como F_1 e F_2 .



Passo 3 - Determinação do ponto médio dos focos

- Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, selecione os pontos F_1 e F_2 . Será criado o ponto B (0,0).



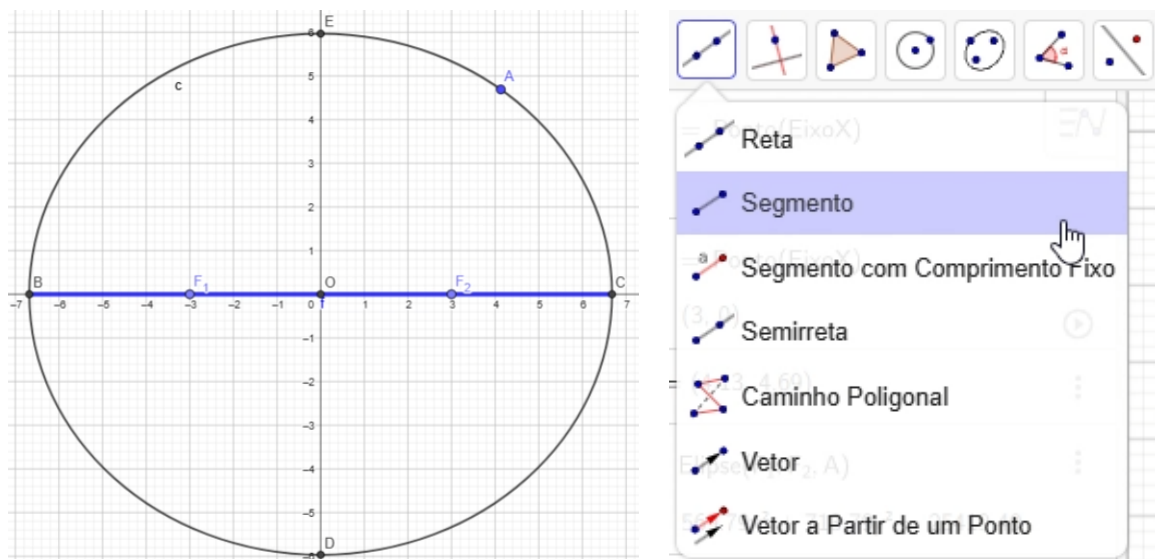
Passo 4 - Determinação dos vértices da elipse

- Insira, no campo de entrada, o comando **Vértice (c)**.
- Serão criados os pontos B, C, D e E.
- Renomeie o ponto B como O.

●	$c : \text{Ellipse}(F_1, F_2, A)$ $= 569.79x^2 + 713.79y^2 = 25419.49$	⋮
●	$O = \text{PontoMédio}(F_1, F_2)$ $= (0, 0)$	⋮
●	$\text{Vértice}(c)$ $= B = (-6.68, 0)$	⋮
●	$C = (6.68, 0)$	⋮
●	$D = (0, -5.97)$	⋮
●	$E = (0, 5.97)$	⋮
+		

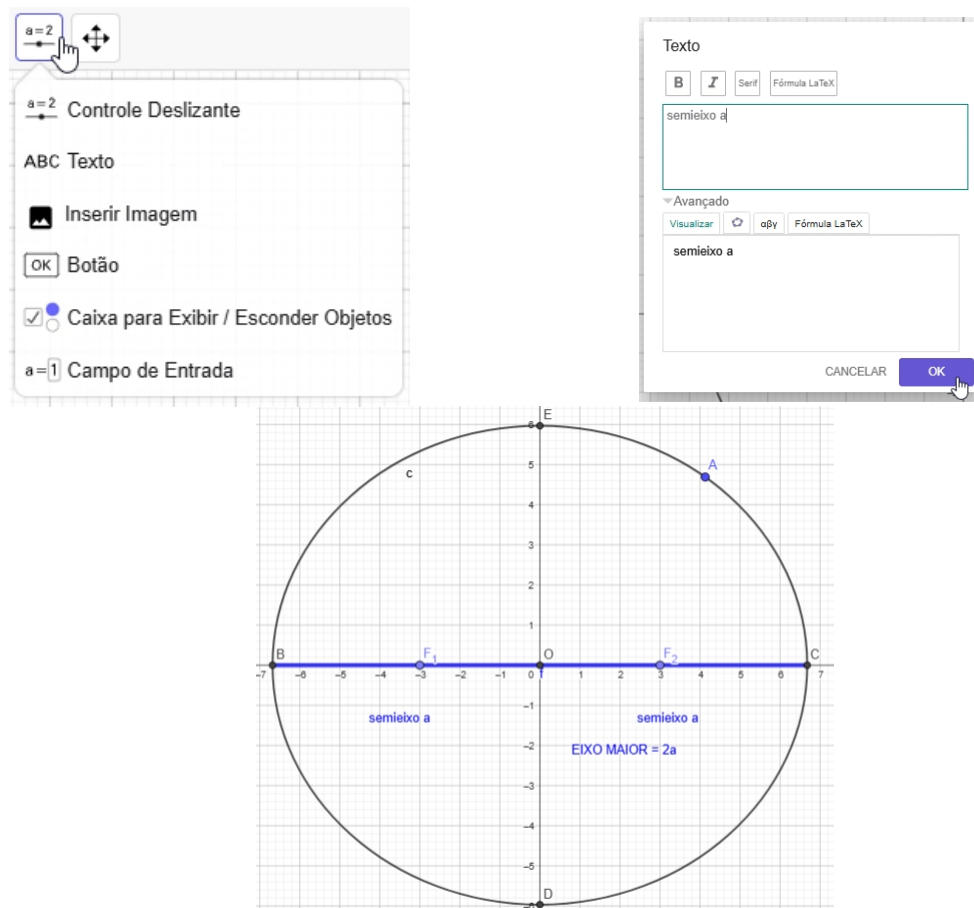
Passo 5 - Criação do segmento BC (eixo 2a)

- Crie um segmento de reta que vai de B até C
- Altere a cor dele nas configurações (na figura a seguir ele está em azul).



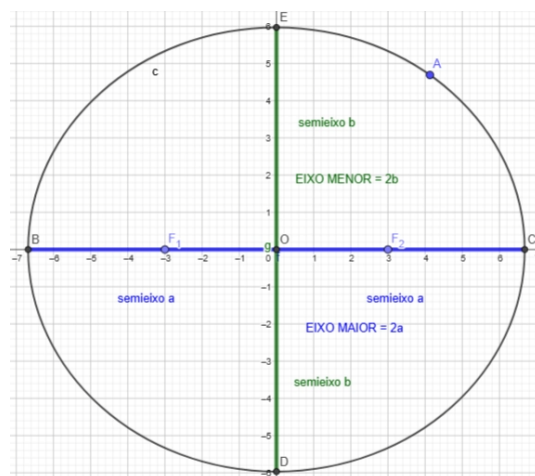
Passo 6 - Identificação do eixo 2a e dos semieixos a

- Esse segmento BC representa o eixo 2a, e os segmentos BO e OC são considerados semieixos a.
- Utilize a ferramenta “Texto” para identificá-los.



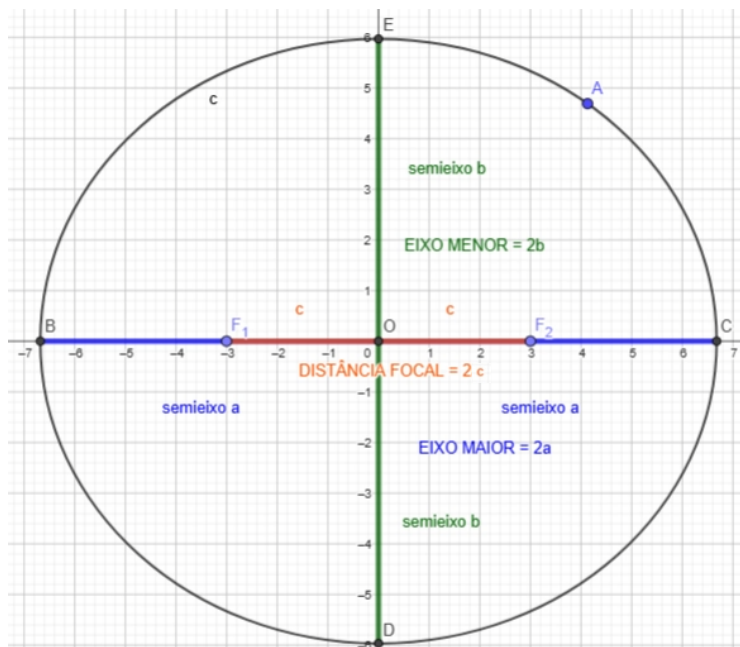
Passo 7 - Criação do segmento DE (eixo 2b), identificação do eixo 2b e semieixos b

- Crie o segmento DE (cor verde), que representa o eixo menor da elipse ($2b$), sendo assim, os segmentos DO e OE representam os semieixos b .
- Utilize a ferramenta “Texto” para identificá-los.
- Altere a cor do segmento e do texto nas configurações.

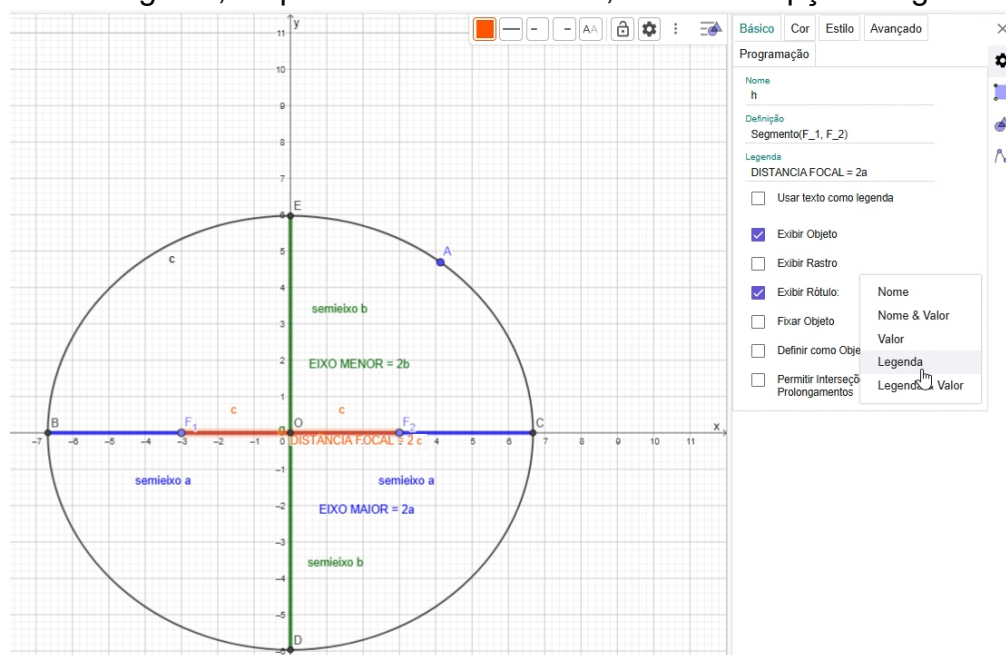


Passo 8 - Criação do segmento F_1F_2

- Crie um segmento F_1F_2 (em laranja) que representa a distância focal ($2c$), sendo assim, F_1O e OF_2 valem c .
- Utilize a ferramenta “Texto” para identificá-los.
- Altere a cor do segmento e do texto nas configurações.



DICA: Uma outra forma de identificar - sem utilizar a ferramenta “Texto” - os segmentos que representam o eixo maior ($2a$), o eixo menor ($2b$) e a distância focal ($2c$), é clicar com o botão direito do mouse sobre os respectivos segmentos e ir em configurações. Após, preencha, na parte da legenda, como você quer nomear o segmento. Em seguida, na parte de ‘Exibir Rótulo’, escolha a opção “Legenda”.



Os principais elementos da elipse são:

FOCOS: pontos fixos;;

CENTRO: ponto médio entre os focos;

VÉRTICES: extremidades do maior eixo;

EIXO 2A: maior eixo da elipse que vai de um vértice a outro e que contém os focos dela;

EIXO 2B: menor eixo da elipse.

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA ELIPSE (COM CENTRO NA ORIGEM)

Nesta etapa, vamos relacionar a construção geométrica da elipse com sua **expressão algébrica**.

Quando a elipse está na posição padrão - isto é, com o **centro na origem** - sua equação assume uma forma simplificada chamada **equação reduzida**.

Os casos possíveis são:

- Maior eixo sobre o eixo x: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Maior eixo sobre o eixo y: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Nesta construção, utilizamos o **GeoGebra** para visualizar como a variação de **a** e **b** afeta a elipse e confirmar que as equações se ajustam ao desenho.

Ao final, professores poderão explorar a relação entre os valores de **a** e **b** e o formato da elipse, bem como a sua equação, e estudantes poderão experimentar diferentes valores para consolidar a compreensão.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 40 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Certifique-se de que a malha e os eixos estejam visíveis (se necessário, ative-os clicando com o botão direito e selecionando **Exibir Eixos - Exibir Malha**).

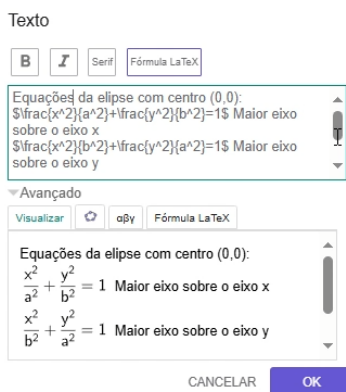
Passo 2 - Escrita das equações

- Escreva as equações, usando a ferramenta “Texto”, conforme segue:

“Equações da elipse com centro (0,0):

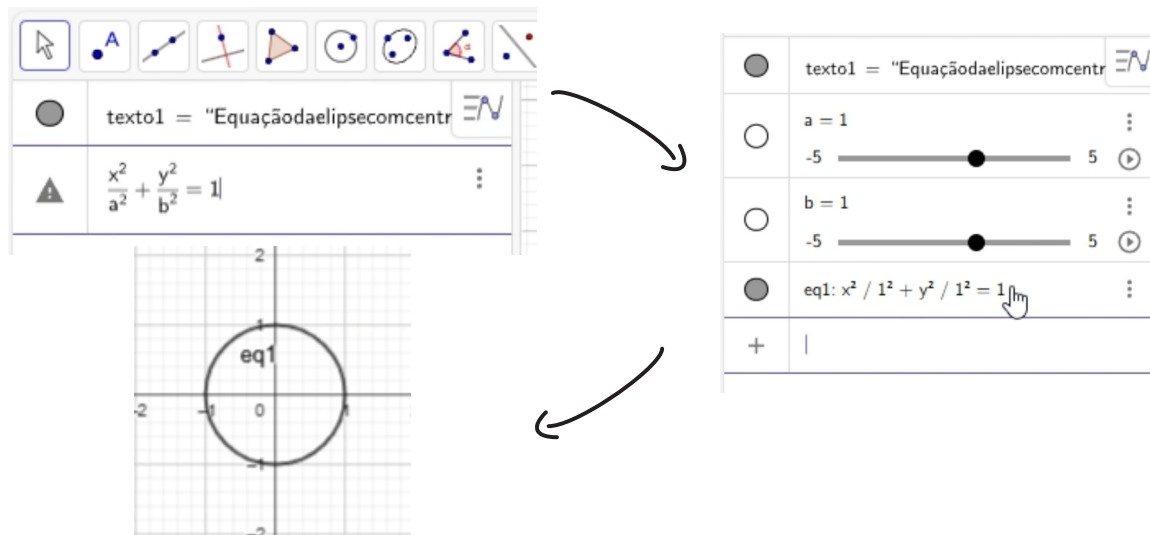
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Maior eixo sobre o eixo x

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Maior eixo sobre o eixo y”

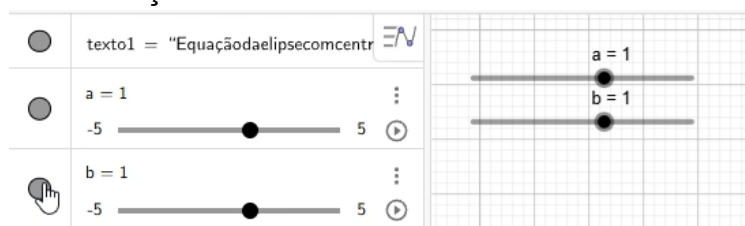


Passo 3 - Construção da primeira elipse

- Digite no campo de entrada: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
- Verifique que os controles deslizantes a e b são criados. Os valores de a e b podem ser alterados, mas é importante que o valor de a seja sempre maior do que o valor de b, em respeito à definição da elipse.

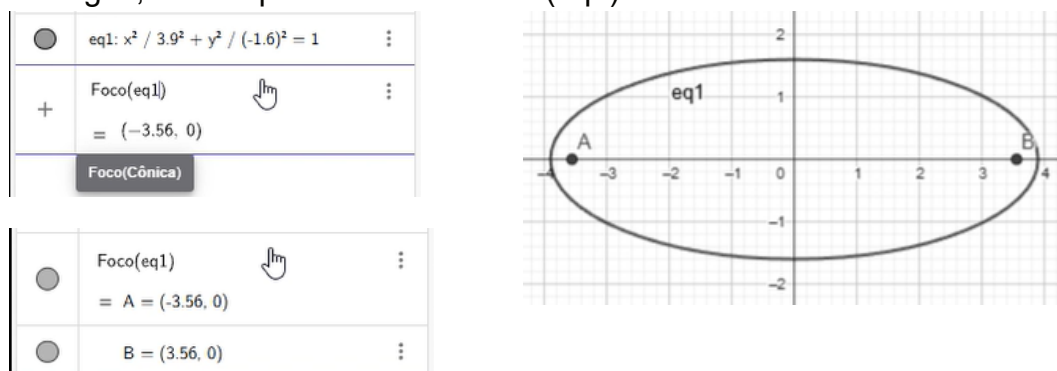


- Clique sobre o círculo dos controles deslizantes a e b, para que eles fiquem visíveis na tela de construção:



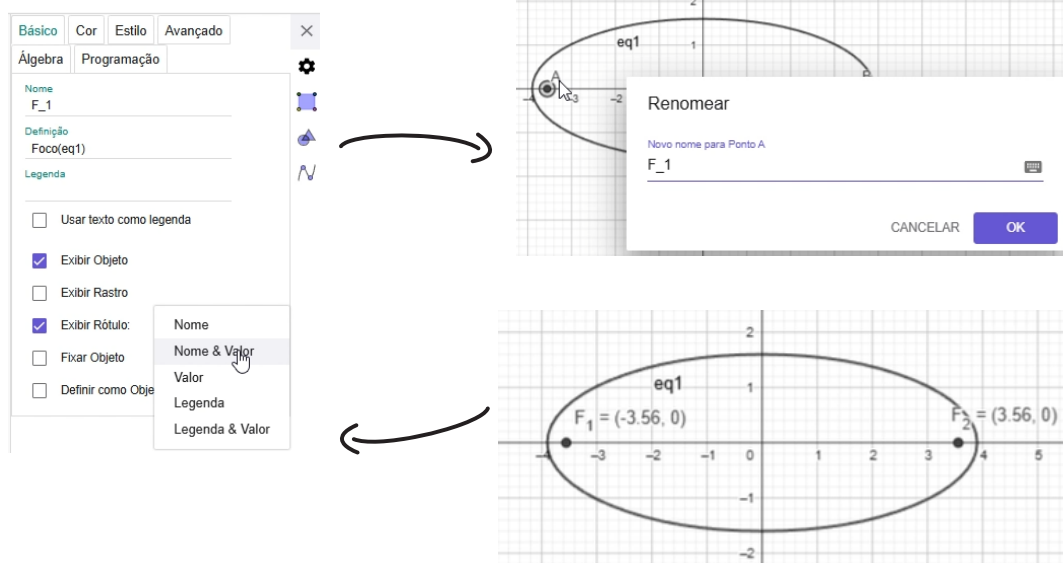
Passo 4 - Localização dos focos

- Digite, no campo de entrada: Foco(eq1).



- Renomeie os pontos A e B como F₁ e F₂.

- Clique com o botão direito sobre esses pontos e vá nas configurações, selecione, na parte de “Exibir Rótulo”, a opção mostrar “Nome & Valor”, assim irão aparecer as coordenadas dos pontos que representam os focos da elipse.

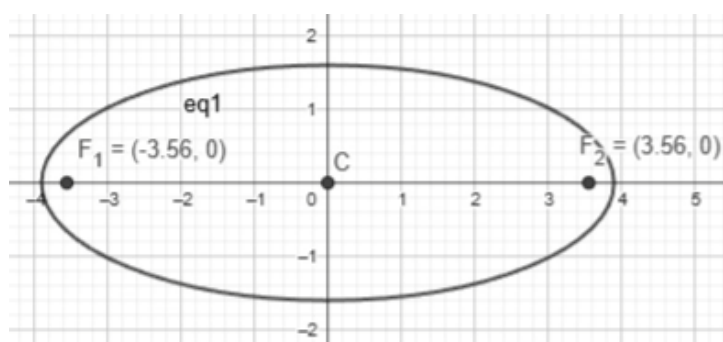


Passo 5 - Localização do centro

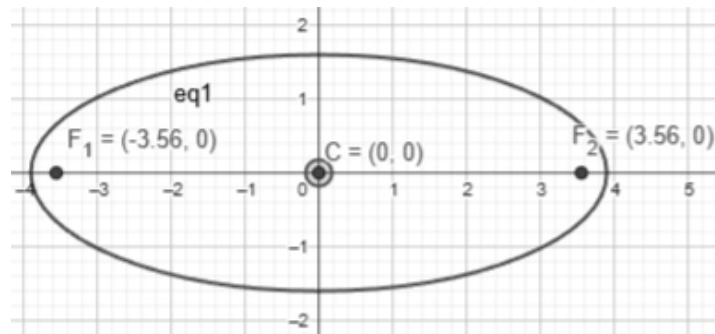
- Digite, no campo de entrada, C: Centro(eq1).



- O ponto C será criado:



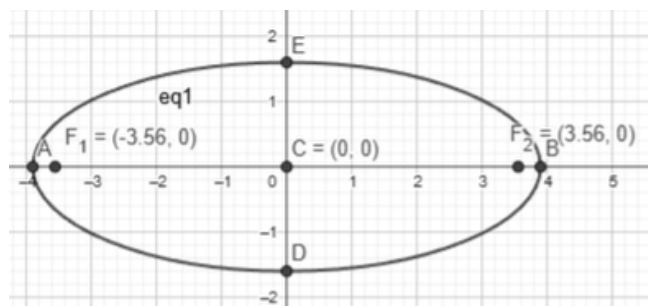
- Vá nas configurações do ponto C e selecione na opção “Exibir Rótulo” para que apareça o “Nome & Valor”.



Passo 6 - Localização dos vértices

· Digite, no campo de entrada, Vértice(eq1). Serão mostrados os pontos que representam os vértices da elipse.

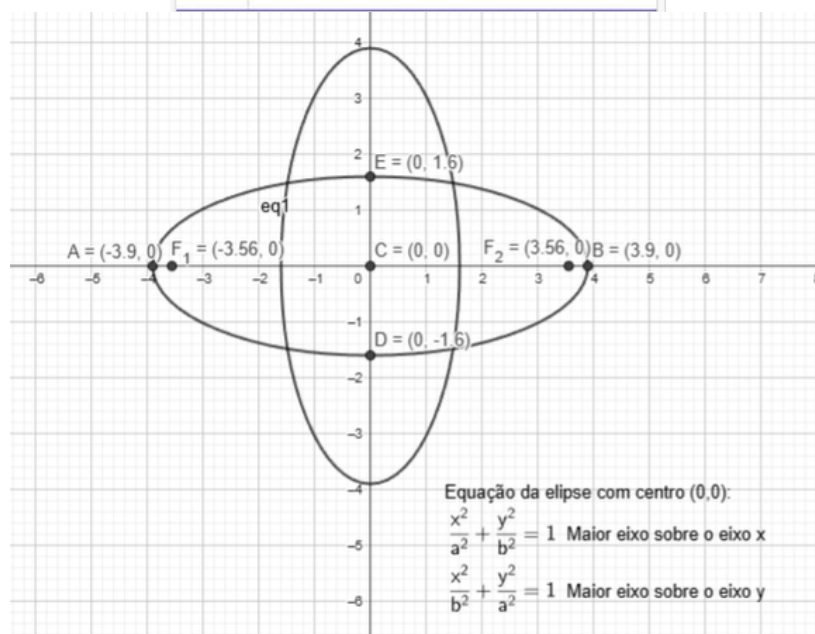
☐	Vértice(eq1)	:
☐	= A = (-3.9, 0)	:
☐	B = (3.9, 0)	:
☐	D = (0, -1.6)	:
☐	E = (0, 1.6)	:



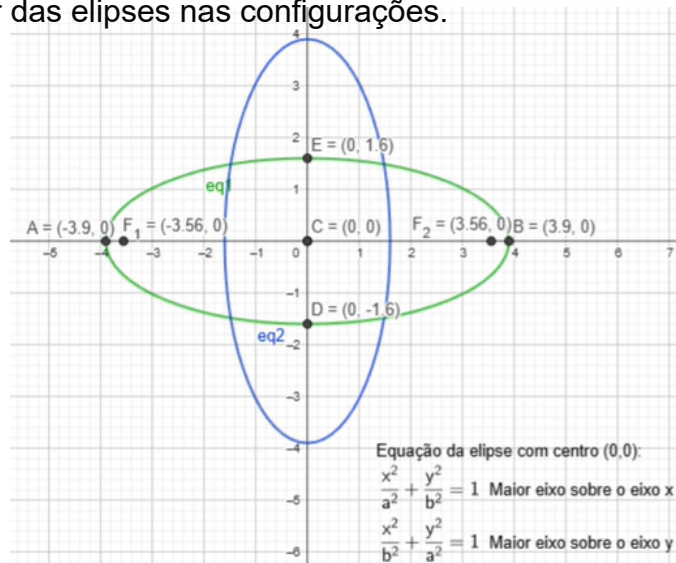
Passo 7 - Construção da segunda elipse

· Digite no campo de entrada: $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$

+	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	:
---	---	---



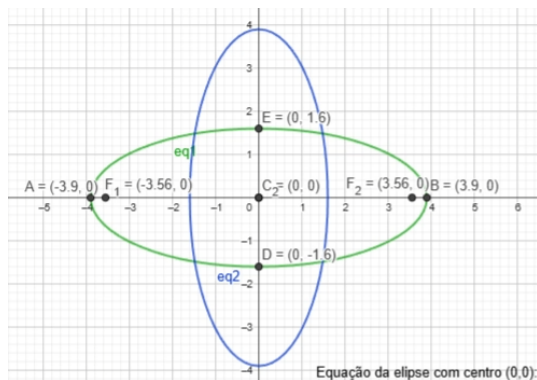
- Altere os valores de **a** e **b**, analise o que acontece com as duas elipses.
- Mantenha o valor de **a** sempre maior do que o valor de **b**, em respeito à definição da elipse.
- Altere a cor das elipses nas configurações.



Passo 8 - Localização do centro

- Digite, no campo de entrada, $C_2 = \text{Centro}(\text{eq2})$ para verificar o centro da segunda elipse.

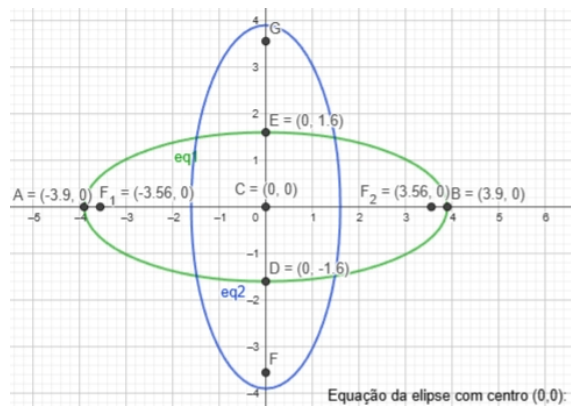
+	$C_2 : \text{Centro}(\text{eq2})$	:
	$= (0, 0)$	
Centro(Cônica)		



Passo 9 - Localização dos focos

- Digite no campo de entrada, $\text{Foco}(\text{eq2})$ para verificar os focos da segunda elipse.

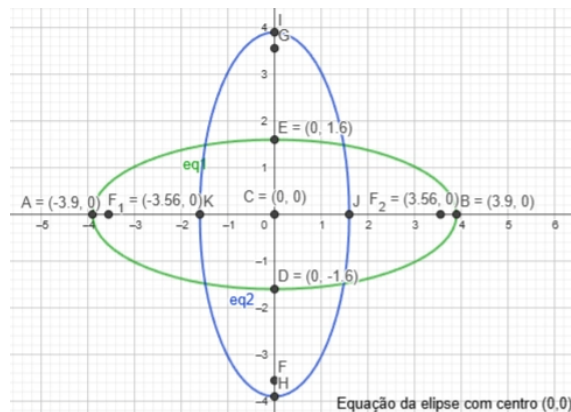
	Foco(eq2) = $F = (0, -3.56)$	⋮
	$G = (0, 3.56)$	⋮
+		



Passo 10 - Localização dos vértices

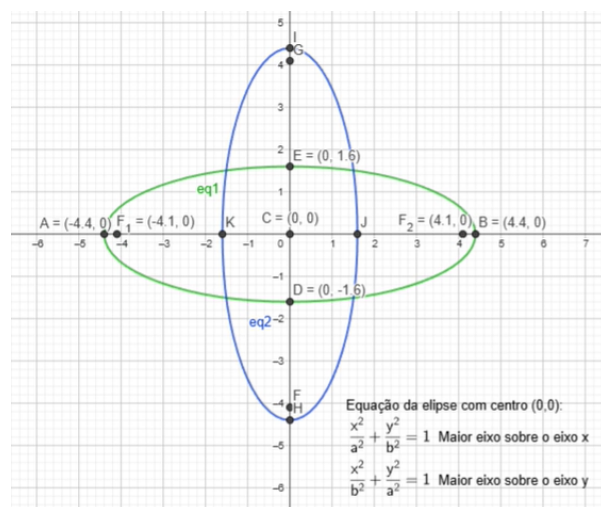
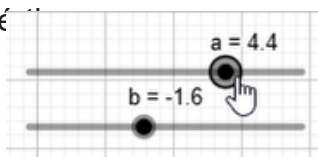
· Digitar, no campo de entrada, Vértice(eq2) para verificar os vértices da segunda elipse.

	Vértice(eq2) = $H = (0, -3.9)$	⋮
	$I = (0, 3.9)$	⋮
	$J = (1.6, 0)$	⋮
	$K = (-1.6, 0)$	⋮



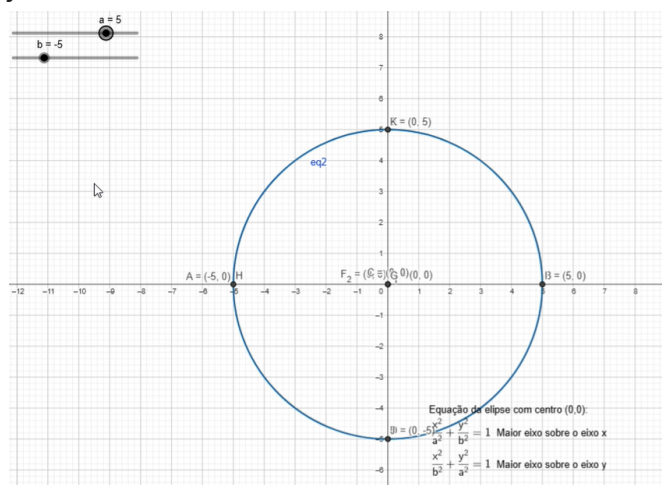
Passo 11 - Exploração dos controles deslizantes a e b

· Movimente os controles deslizantes a e b e perceba que ambas as elipses terão os seus formatos alterados, bem como as coordenadas dos seus focos e vértices.



- Altere o valor de a e b , de forma que sejam iguais. Verifique o que acontece com as elipses.

- Para ocultar uma das elipses, clique com o botão direito sobre ela e, em seguida, “Exibir Objeto”.



EQUAÇÕES REDUZIDAS DA ELIPSE COM CENTRO (h,k)

Até agora, estudamos elipses com **centro na origem**, o que facilita a visualização e a compreensão da relação entre equação e gráfico.

Entretanto, na prática, muitas elipses aparecem **transladadas** no plano cartesiano, isto é, deslocadas em relação à origem.

O deslocamento horizontal e vertical é representado por dois parâmetros adicionais:

- h - deslocamento horizontal do centro;
- k - deslocamento vertical do centro.

As equações reduzidas das elipses, quando o centro é (h,k), ficam:

- Maior eixo sobre o eixo x:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- Maior eixo sobre o eixo y:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Nesta construção, vamos usar **controles deslizantes** para manipular a, b, h e k e observar como cada valor altera a posição e a forma da elipse.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 20 a 40 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

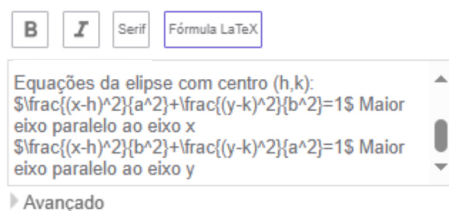
Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Certifique-se de que a malha e os eixos estejam visíveis (se necessário, ative-os clicando com o botão direito e selecionando **Exibir Eixos - Exibir Malha**).

Passo 2 - Escrita das equações

- Escreva as equações, usando a ferramenta “Texto”, conforme segue:

Texto



Equações da elipse com centro (h,k):			
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$			Maior eixo paralelo ao eixo x
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$			Maior eixo paralelo ao eixo y

Passo 3 - Construção das elipses

- Digite no campo de entrada:

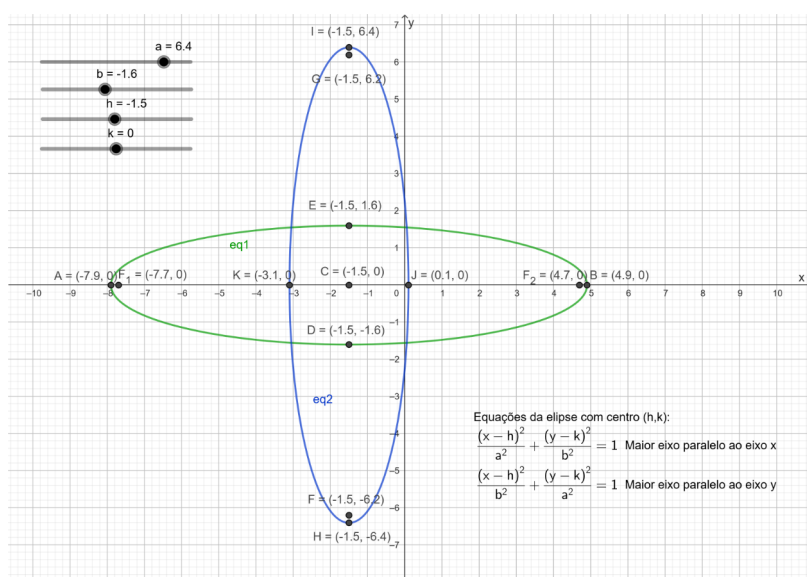
$$(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$$

$$(x-h)^2/b^2 + (y-k)^2/a^2 = 1$$

- Automaticamente, serão criados os controles deslizantes de **a**, **b**, **h** e **k**.
- Ajuste os controles deslizantes conforme preferir, mas lembre-se que, por definição, o valor de **a** deve ser maior do que o valor de **b**.

Passo 4 - Localização do centro, vértices e focos das elipses

- Digite os comandos **Centro(eq1)**, **Centro(eq2)**, **Vértice(eq1)**, **Vértice(eq2)**, **Foco(eq1)** e **Foco(eq2)** para verificar os elementos das elipses.



Passo 5 - Exploração dos controles deslizantes a, b, h e k

- Movimente os controles deslizantes a, b, h e k, e perceba que ambas as elipses terão os seus formatos alterados, bem como as coordenadas dos seus focos, vértices e do centro da cada uma.

DICA: você pode, tanto digitar as equações com centro (**h,k**), no campo de entrada, ou alterar as equações já existentes (caso você tenha construído as elipses com centro na origem). Se optar pela segunda opção, irá verificar que os controles deslizantes **h** e **k** são criados (pois **a** e **b** já existem). Os valores de **h** e **k** podem ser alterados, assim como os valores de **a** e **b**. Lembrando que o valor de **a** deve ser maior do que o valor de **b**, em respeito à definição da elipse.

ATIVIDADES SOBRE ELIPSE

Depois de estudar a definição, os elementos e as equações da elipse (tanto na posição padrão quanto transladada), é hora de aplicar o que foi aprendido.

As atividades a seguir foram elaboradas para **consolidar o conhecimento**, permitindo que o estudante pratique:

- Identificação e representação gráfica da elipse;
- Determinação de centro, focos, vértices, eixos e semieixos;
- Dedução da equação a partir de informações geométricas;
- Interpretação da equação para extrair elementos da curva.

Justificativa da Realização das Atividades

A prática é um passo essencial para a aprendizagem efetiva. Segundo Ausubel (TAS), o conhecimento se torna significativo quando o novo conteúdo é relacionado com conceitos já presentes na estrutura cognitiva do aluno.

Essas atividades favorecem:

- **A aprendizagem significativa**, ao exigir que o aluno faça conexões entre construções no GeoGebra, conceitos algébricos e interpretação geométrica;
- **O desenvolvimento da autonomia**, pois os exercícios podem ser realizados tanto individualmente quanto em grupo;
- **O raciocínio matemático**, ao aplicar propriedades e fórmulas em diferentes contextos.

Além disso, para professores, estas atividades podem servir como avaliação diagnóstica ou formativa, permitindo verificar se os alunos compreendem e sabem aplicar os conceitos.

Dicas de Aplicação

- **Para Estudantes:** tente resolver sem consultar o passo a passo; depois confira com o conteúdo do guia; após, consulte a resposta dada.
- **Para Professores:** utilize exemplos com e sem apoio do GeoGebra, incentivando a resolução manual e a verificação digital.

ATIVIDADES SOBRE ELIPSE

1) Esboce a elipse e indique os focos, os vértices e os extremos do eixo menor:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

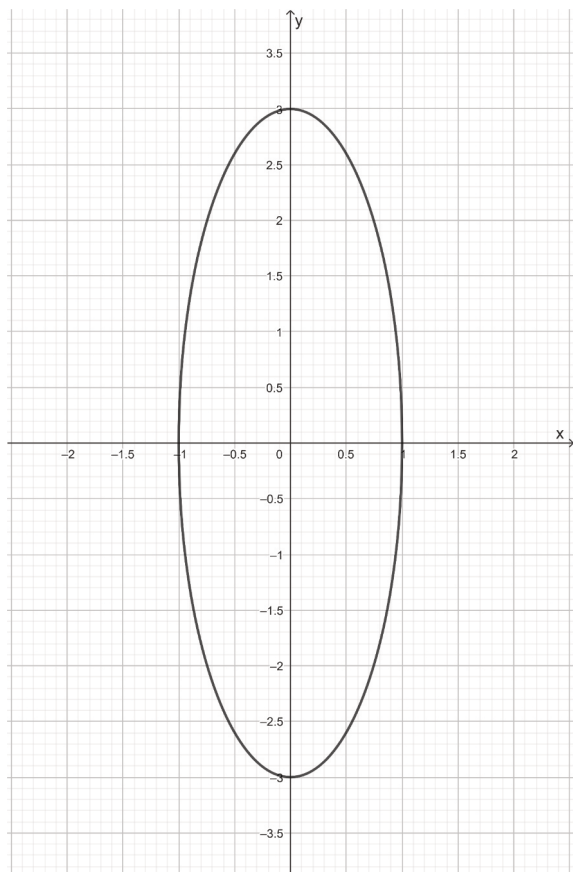
b) $4x^2 + y^2 = 36$

c) $(x + 3)^2 + 4(y - 5)^2 = 16$

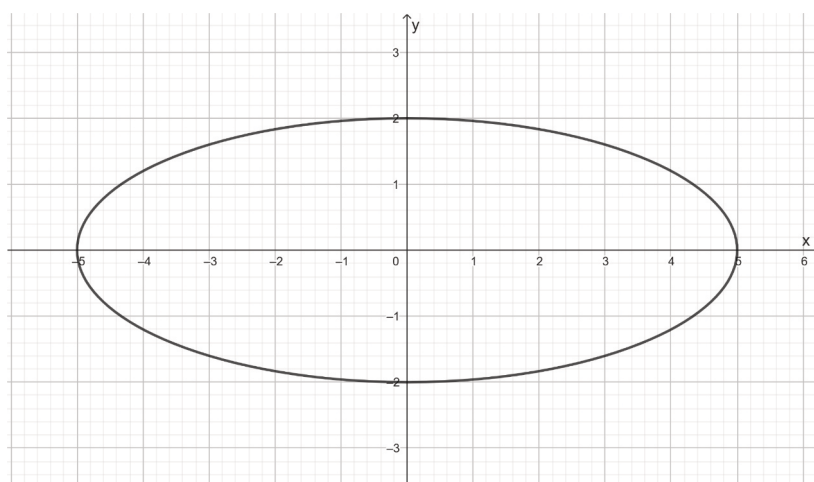
d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}(y + 2)^2 - 1 = 0$

2) Determine a equação da elipse:

a)

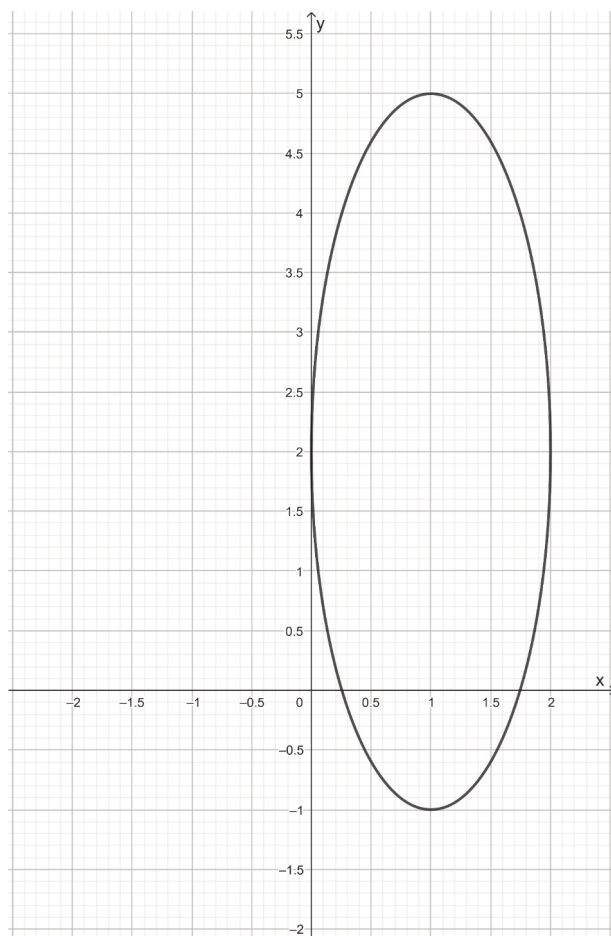


b)

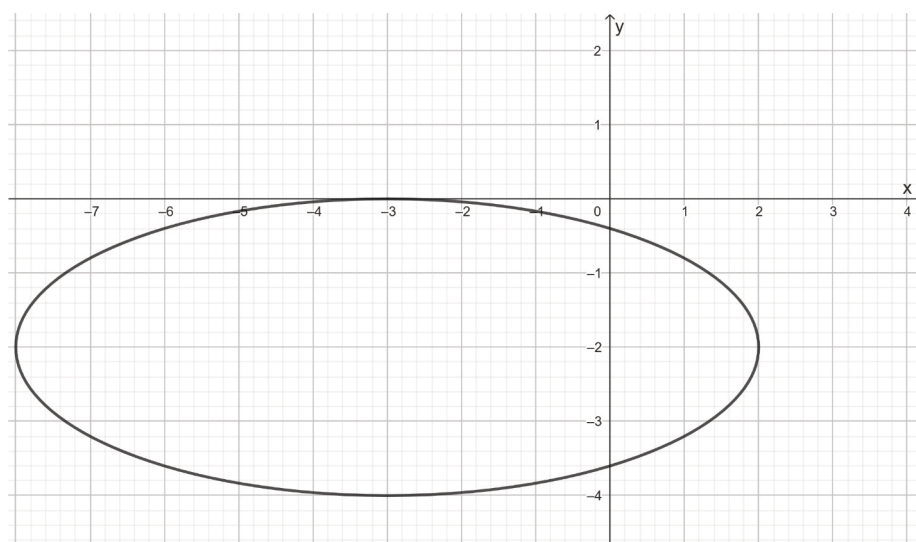


3) Determine a equação da elipse:

a)



b)



RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE ELIPSE

As resoluções a seguir mostram, não apenas o resultado final, mas, também, o raciocínio necessário para chegar a cada resposta, permitindo ao estudante entender como e por que cada passo é realizado.

Sugestão para o professor: Solicite que os alunos expliquem cada passo da resolução oralmente, ou por escrito, justificando a escolha da forma da equação. Isso estimula o raciocínio lógico e a comunicação matemática.

1) Esboce a elipse e indique os focos, os vértices e os extremos do eixo menor:

a)

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 16 \quad a = 4$$

$$b^2 = 9 \quad b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$16 = 9 + c^2$$

$$c^2 = 7$$

$$c = \sqrt{7}$$

Focos:

$$F_1(\sqrt{7}, 0)$$

$$F_2(-\sqrt{7}, 0)$$

Vértices:

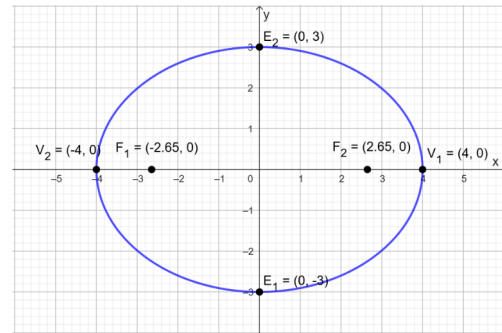
$$V_1(4, 0)$$

$$V_2(-4, 0)$$

Extremos eixo menor:

$$E_1(0, -3)$$

$$E_2(0, 3)$$



b) $4x^2 + y^2 = 36$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = 36 \quad a = 6$$

$$b^2 = 9 \quad b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$36 = 9 + c^2$$

$$c = \sqrt{27}$$

Focos:

$$F_1(0, -\sqrt{27})$$

$$F_2(0, \sqrt{27})$$

Vértices:

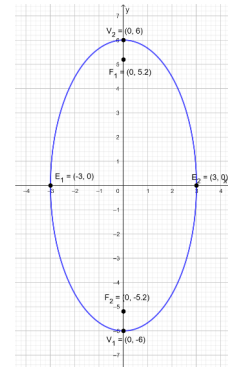
$$V_1(0, -6)$$

$$V_2(0, 6)$$

Extremos eixo menor:

$$E_1(0, -3)$$

$$E_2(0, 3)$$



c) $(x + 3)^2 + 4(y - 5)^2 = 16$

$$\frac{(x + 3)^2}{16} + 4 \frac{(y - 5)^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\frac{(x + 3)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{4} = 1$$

Centro elipse: C(-3,5)

$$a^2 = 16 \quad a = 4$$

$$b^2 = 4 \quad b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$16 = 4 + c^2$$

$$c^2 = 12$$

$$c = \sqrt{12}$$

Focos:

$$F_1(-3 - \sqrt{12}, 5)$$

$$F_2(-3 + \sqrt{12}, 5)$$

Vértices:

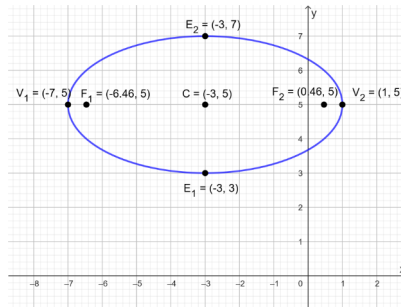
$$V_1(-7, 5)$$

$$V_2(1, 5)$$

Extremos eixo menor:

$$E_1(-3, 3)$$

$$E_2(-3, 7)$$



d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}(y + 2)^2 - 1 = 0$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

Centro elipse: C(0,-2)

$$a^2 = 9 \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$9 = 4 + c^2$$

$$c^2 = 5$$

$$c = \sqrt{5}$$

Focos:

$$F_1(0, -2 - \sqrt{5})$$

$$F_2(0, -2 + \sqrt{5})$$

Vértices:

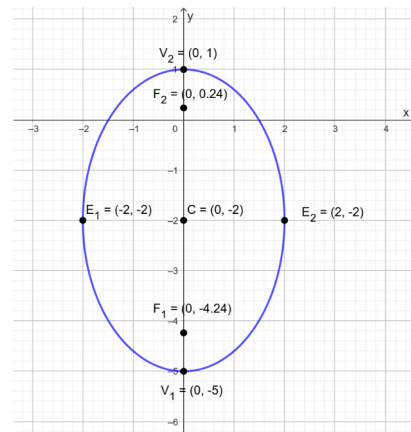
$$V_1(0, -5)$$

$$V_2(0, 1)$$

Extremos eixo menor:

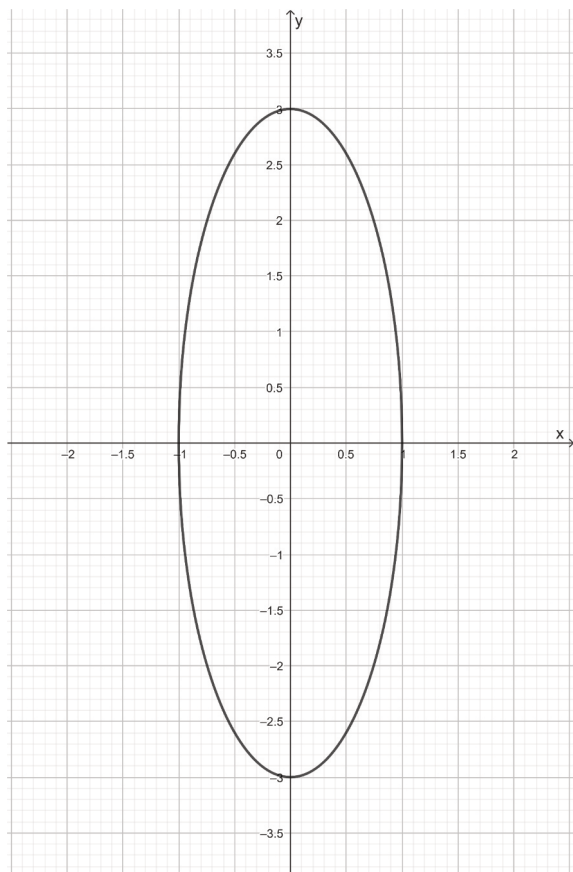
$$E_1(-2, -2)$$

$$E_2(2, -2)$$



2) Determine a equação da elipse:

a)



Centro elipse: C (0,0)

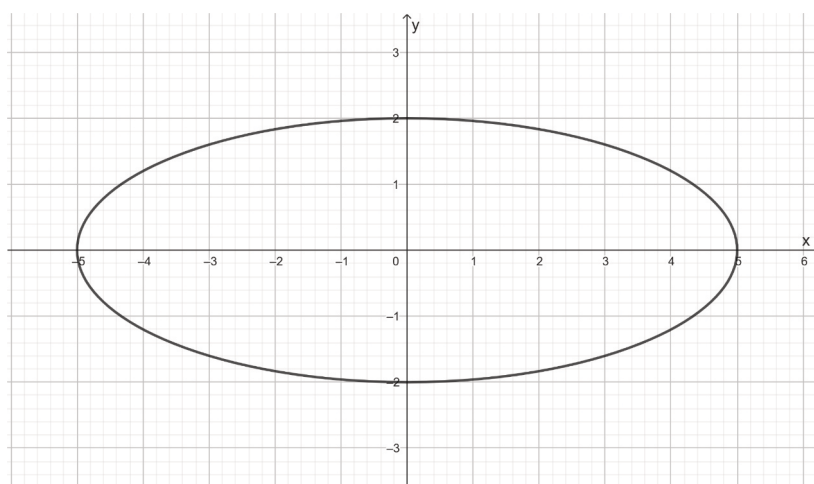
$$a = 3 \quad a^2 = 9$$

$$b = 1 \quad b^2 = 1$$

Equação da elipse:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

b)



Centro elipse: C (0,0)

$$a = 5 \quad a^2 = 25$$

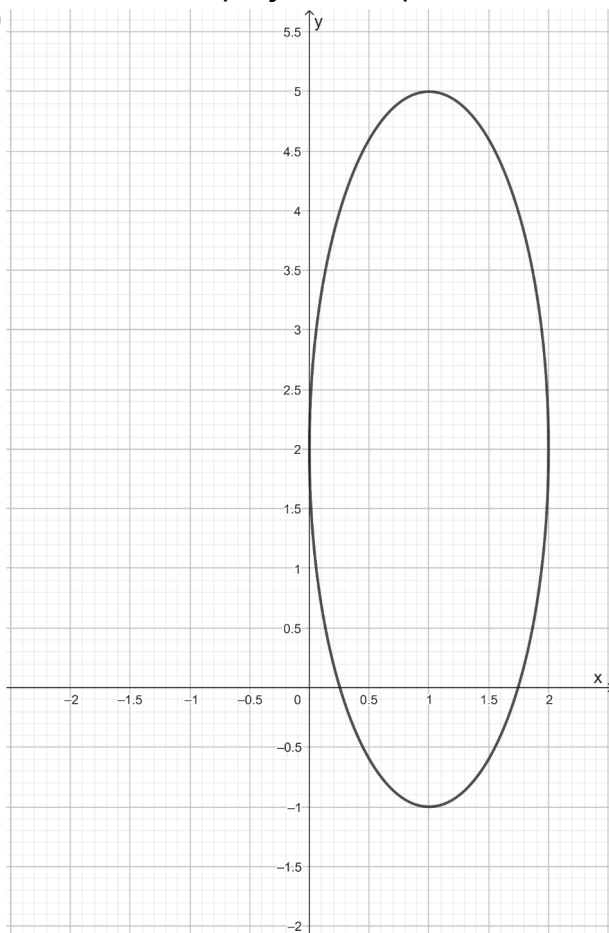
$$b = 2 \quad b^2 = 4$$

Equação da elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

3) Determine a equação da elipse:

a)



Centro elipse: C (1,2)

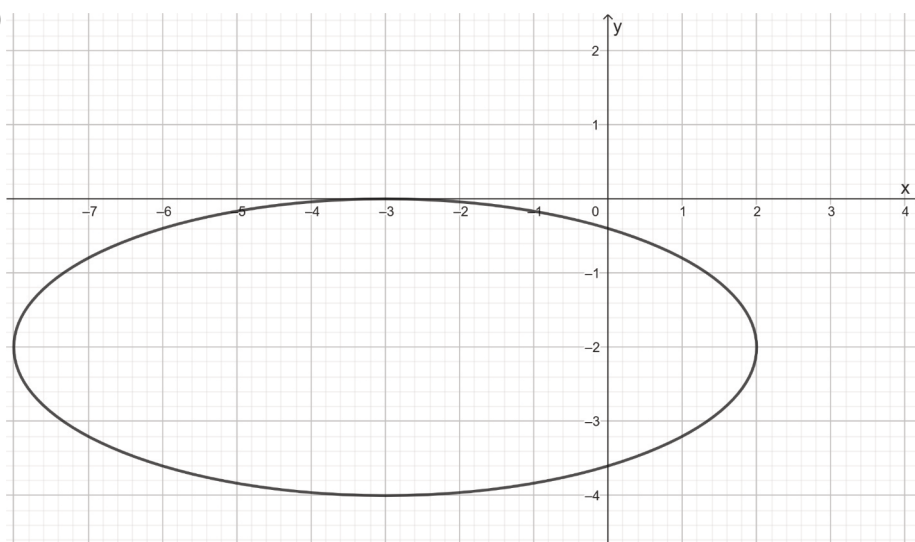
$$a = 3 \quad a^2 = 9$$

$$b = 1 \quad b^2 = 1$$

Equação da elipse:

$$(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

b)



Centro elipse: C (-3,-2)

$$a = 5 \quad a^2 = 25$$

$$b = 2 \quad b^2 = 4$$

Equação da elipse:

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

FECHAMENTO - CAPÍTULO ELIPSE

Resumo Conceitual

Neste capítulo, exploramos a elipse a partir de três perspectivas complementares:

- 1. Construção geométrica** - utilizando o GeoGebra para visualizar a definição como lugar geométrico: conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixados.
- 2. Elementos fundamentais** - focos, distância focal, centro, vértices, eixos e semieixos, compreendendo suas funções e relações métricas.
- 3. Representação algébrica** - equações reduzidas (padrão e transladada), uso de parâmetros para gerar diferentes curvas.

Também realizamos atividades práticas que conectaram teoria e aplicação, promovendo a consolidação da aprendizagem significativa (Ausubel), o engajamento na construção do conhecimento (Construcionismo de Papert) e o uso pedagógico das TDIC (GeoGebra) para visualização e experimentação.

Para o estudante

- Revise as construções feitas no GeoGebra e tente reproduzi-las sem consultar o passo a passo.
- Experimente alterar valores dos controles deslizantes para perceber como isso afeta a forma da curva.
- Construa exemplos próprios e compare com os exercícios resolvidos.

Para o professor

- Use as construções como demonstrações dinâmicas em sala de aula.
- Adapte as atividades de acordo com o nível da turma (Ensino Médio, curso de graduação ou formação continuada).

Utilize o recurso para avaliação formativa, observando se os alunos conseguem identificar e relacionar elementos e equações da elipse sem apoio visual.

Hipérbole

Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor do que a distância entre os pontos fixados.

Os dois pontos fixados são chamados de **focos** da hipérbole, e o termo “diferença” usado na definição deve ser entendido como a distância ao foco mais distante menos a distância ao foco mais próximo. Como resultado, os pontos da hipérbole formam dois ramos, cada um dos quais “rodeando” o foco mais próximo [...]. O ponto médio do segmento de reta que une os focos é chamado de **centro** da hipérbole, a reta que passa pelos focos é chamada de **eixo focal**, e reta que passa pelo centro e é perpendicular ao eixo focal é chamada de **eixo conjugado**. A hipérbole intersecta o eixo focal em dois pontos, chamados de **vértices**.

Associado com toda hipérbole existe um par de retas, chamadas de **assíntotas** da hipérbole. Essas retas cortam o centro da hipérbole e têm a propriedade que à medida que um ponto P move-se ao longo da hipérbole afastando-se do centro, a distância vertical entre P e uma das assíntotas tende a zero.

(Anton; Bivens; Davis, 2014, p.732)

APRESENTAÇÃO

Neste capítulo, exploramos a **hipérbole**, uma das seções cônicas mais presentes no cotidiano e na ciência. A hipérbole aparece nos sistemas de navegação, nos telescópios refletores, na engenharia, na arquitetura e em diversos outros contextos.

O objetivo é compreender suas **características geométricas e analíticas**, visualizando-as e manipulando-as por meio do **GeoGebra**, o que permitirá estabelecer conexões entre teoria e prática.

A proposta é conduzida em etapas:

- Uma **ilustração geométrica** que evidencia a definição da hipérbole como o conjunto de todos os pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor do que a distância entre os pontos fixados.;
- Identificação e representação geométrica **dos elementos da hipérbole**;
- Análise das **equações reduzidas** e variação de seus parâmetros;
- Exercícios para fixação.

O capítulo foi elaborado para ser utilizado **tanto por professores** - como roteiro para aulas - **quanto por estudantes** - como material de estudo e prática individual. Ao seguir as instruções, será possível modificar valores, observar propriedades e construir entendimento sólido do conceito.

Professores podem utilizar este roteiro como base para aulas, atividades investigativas e tarefas de aprofundamento. Estudantes podem se beneficiar ao repetir e adaptar as construções, explorando variações e documentando suas conclusões.

HIPÉRBOLE: UMA ILUSTRAÇÃO GEOMÉTRICA

Esse capítulo tem por objetivo orientar uma forma de utilizar o GeoGebra para ilustrar que a definição da hipérbole é válida. Foi utilizada a semelhança de triângulos para tal.

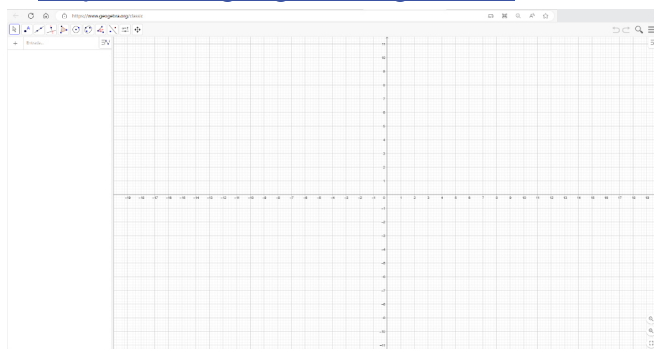
Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 45 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

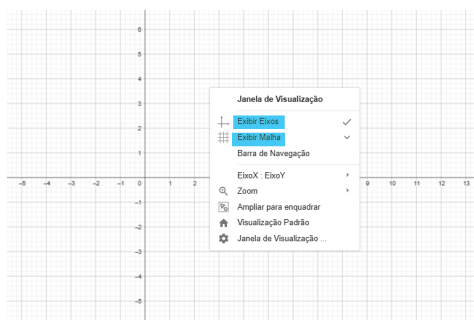
Passo 1 - Acesso ao GeoGebra

- Abra o site: <https://www.geogebra.org/classic>



Passo 2 - Ajuste do ambiente de trabalho

- Retire a malha e os eixos: clique com o botão direito na malha do plano cartesiano e desmarque Exibir Eixos e Exibir Malha - Sem malha.



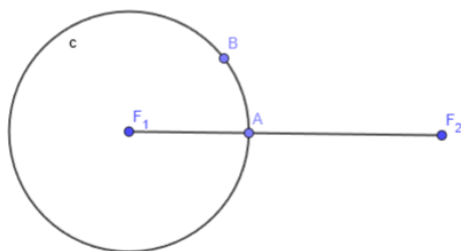
Passo 3 - Criação dos focos F_1 e F_2 e do segmento de reta F_1F_2 .

- Crie dois pontos F_1 e F_2 .
- Com a ferramenta Segmento, crie o segmento de reta F_1F_2 .



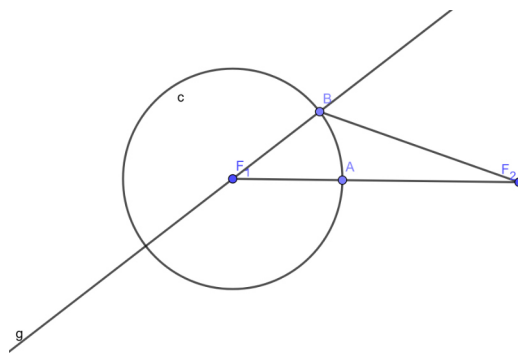
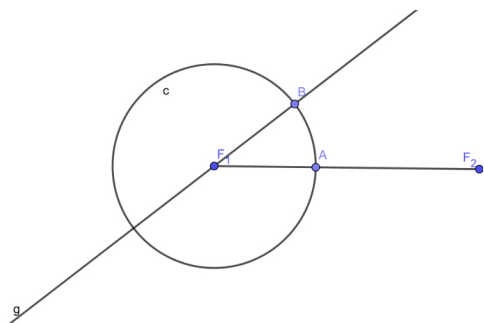
Passo 4 - Criação de uma circunferência.

- Crie uma circunferência cujo centro seja o ponto F_1 .



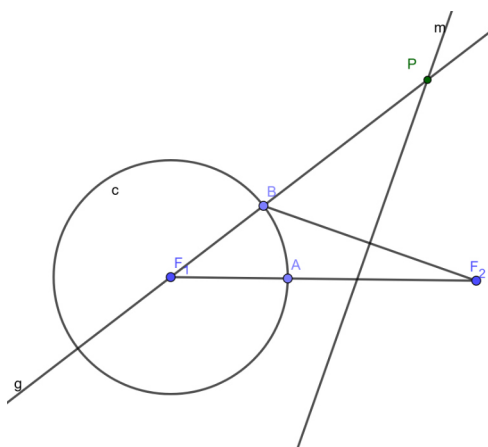
Passo 5 - Criação da reta que passa por F_1B e do segmento de reta BF_2 .

- Crie uma reta que passe por F_1 e B e um segmento que vá de B até F_2 .



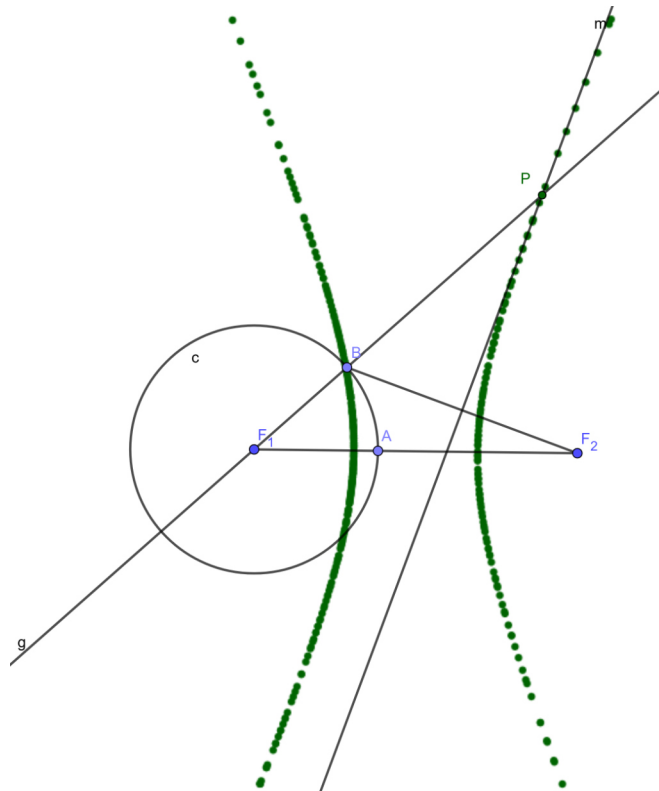
Passo 6 - Criação da mediatriz do segmento BF_2 .

- Crie a mediatriz do segmento BF_2 .
- Identifique a interseção da reta mediatriz com a reta que passa por F_1 e B. Nomeie esse ponto como P.



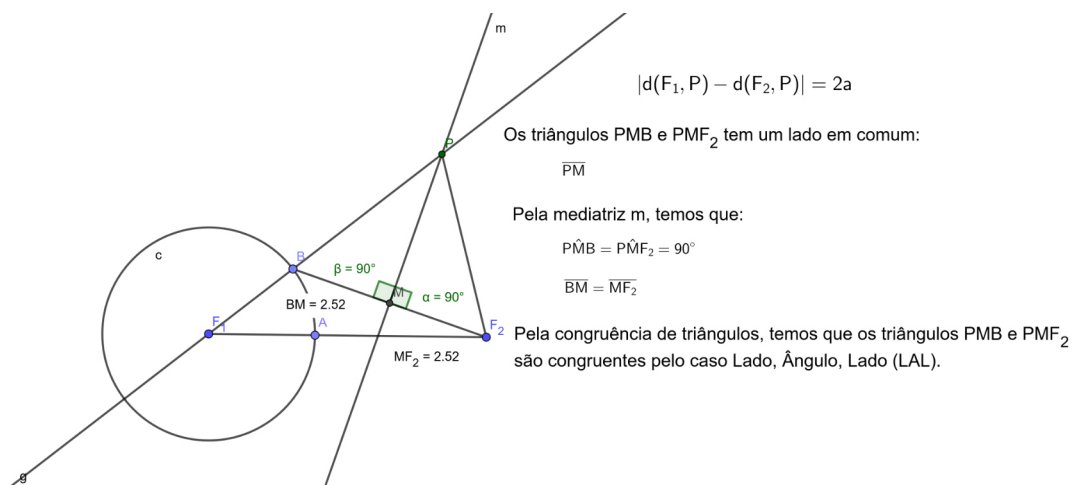
Passo 7 - Habilitação do rastro do ponto P e animação do ponto B.

- Habilite o rastro do ponto P.
- Anime o ponto B.
- Perceba que será mostrado um desenho parecido ao da hipérbole.



Passo 8 - Ilustração da propriedade com o uso da semelhança de triângulos.

- Uma forma de ilustrar que a propriedade vale é fazer uso da semelhança de triângulos, como mostra o exemplo a seguir:



ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

Após compreender a definição e a construção geométrica da hipérbole, é fundamental identificar e compreender seus **elementos característicos**, pois eles são a base para a análise algébrica e a resolução de problemas.

Nesta seção, utilizamos o **GeoGebra** para construir uma hipérbole de maneira direta, empregando a ferramenta “Hipérbole”, e assim visualizar:

- **Centro:** ponto médio entre os focos F_1 e F_2 ;
- **Focos:** pontos fixos F_1 e F_2 . A distância de um foco até o centro da hipérbole é c . A distância entre os focos é $2c$;
- **Vértices:** pontos A_1 e A_2 . São pontos da hipérbole que intersectam o eixo real. A distância de um vértice até o centro da hipérbole é a . A distância entre os vértices é $2a$;
- **Eixo real:** segmento A_1A_2 , cuja medida é $2a$;
- **Eixo imaginário:** segmento B_1B_2 , cuja medida é $2b$. Passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao eixo real;
- **Assíntotas:** retas as quais os ramos da hipérbole se aproximam, sem que se intersectem. As assíntotas comportam as diagonais do retângulo construído considerando as medidas dos eixos real e imaginário. Quando a hipérbole está na posição horizontal, as equações das assíntotas são $y=(b/a)x$ e $y=-(b/a)x$. Quando a hipérbole está na posição vertical, as equações são $y=(a/b)x$ e $y=-(a/b)x$;

Tem-se, também, uma medida que representa a abertura dos ramos da hipérbole e é sempre maior do que 1. Essa é a **excentricidade (e)**, sendo que $e=c/a$.

Essa construção permitirá:

- Relacionar medidas e posições de cada elemento;
- Confirmar propriedades fundamentais;
- Preparar o terreno para o estudo das equações reduzidas.

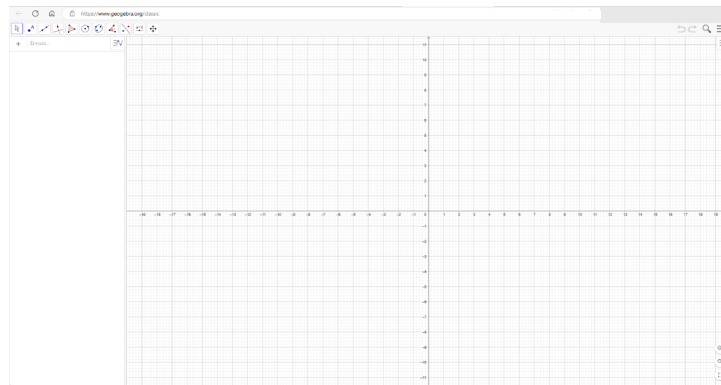
Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 30 minutos.

Elementos da Hipérbole - Passo a Passo no GeoGebra

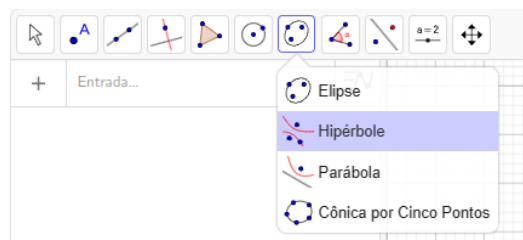
Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.

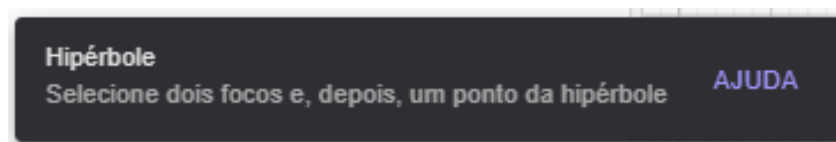


Passo 2 - Construção da hipérbole

- No menu em que consta a Elipse, clique na opção “Hipérbole”:

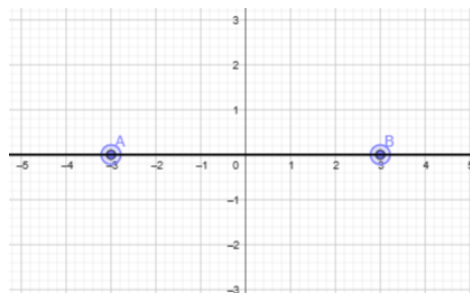
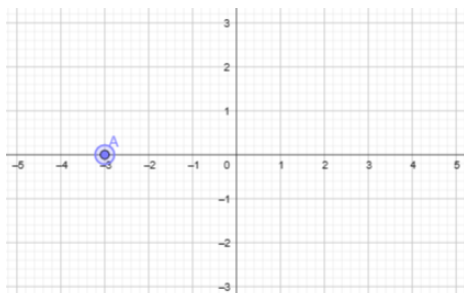


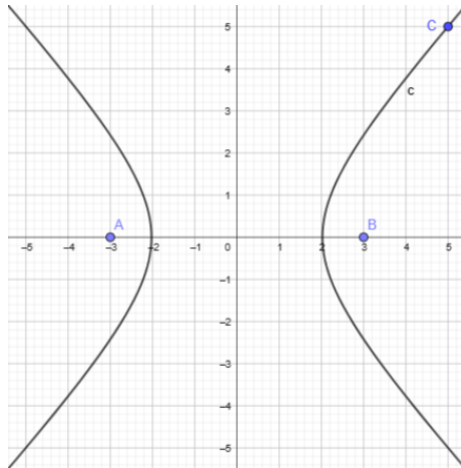
- Assim, o GeoGebra, no canto inferior esquerdo da tela, irá informar como criar uma hipérbole:



Fonte: GeoGebra (2023).

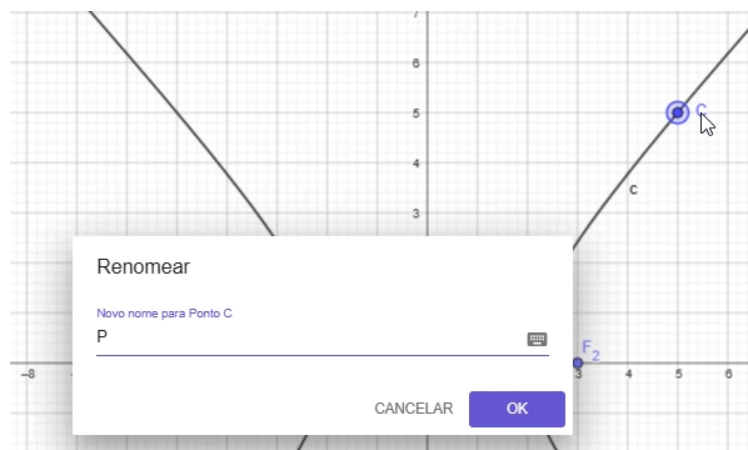
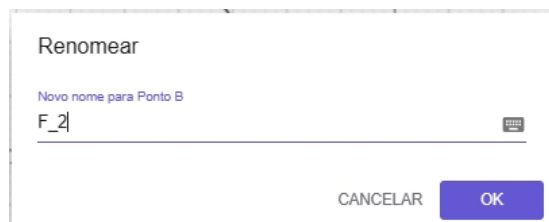
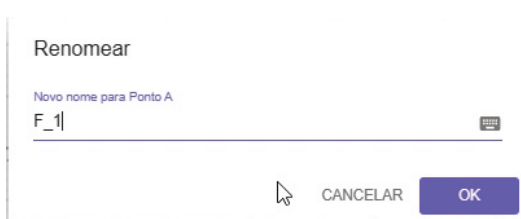
- Sugerimos, primeiramente, criar pontos sobre o eixo das abscissas (x). No exemplo, foram criados os pontos $A(-3,0)$ e $B(3,0)$. Seguido por um ponto da hipérbole $C(5,5)$:





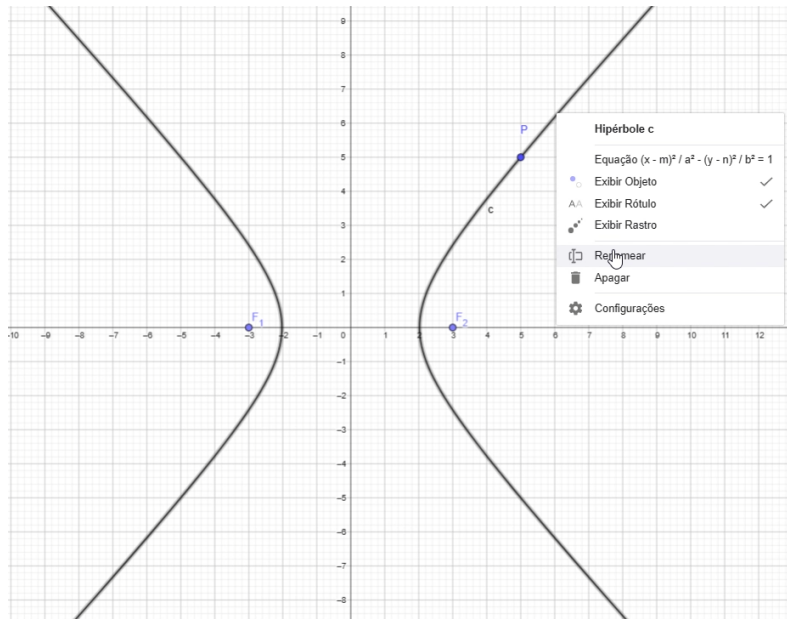
Passo 3 - Identificação dos focos e do ponto P

- Renomeie os pontos A como F_1 (que será exibido como F_1), B como F_2 (que será exibido como F_2) e C como P.
- Para nomear um objeto, logo após criá-lo é só digitar o nome desejado. Também pode-se clicar com o botão direito sobre o objeto e ir na opção “Renomear”.



Passo 4 - Identificação da hipérbole

- Clique com o botão direito sob o traço de dois ramos e renomeie como Hipérbole.



Renomear

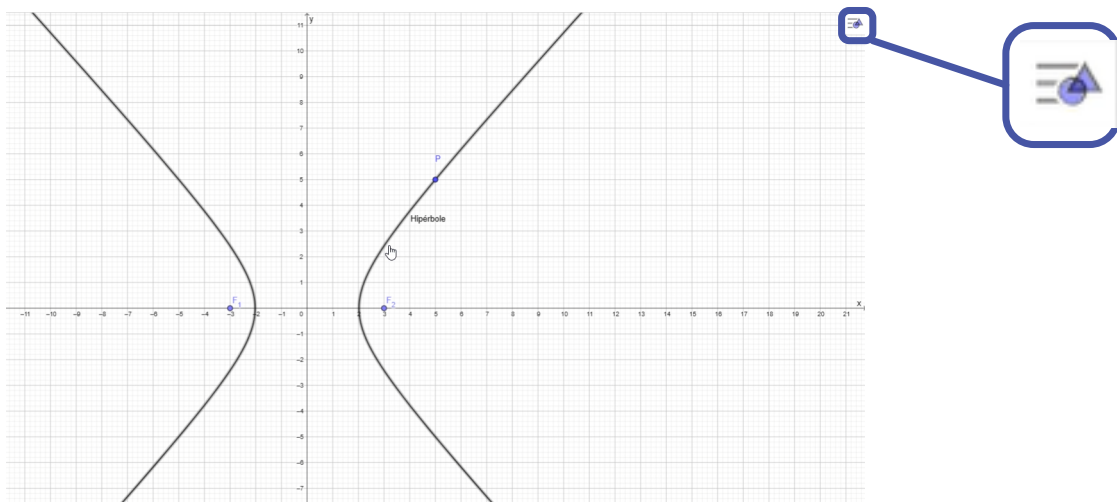
Novo nome para Hipérbole c

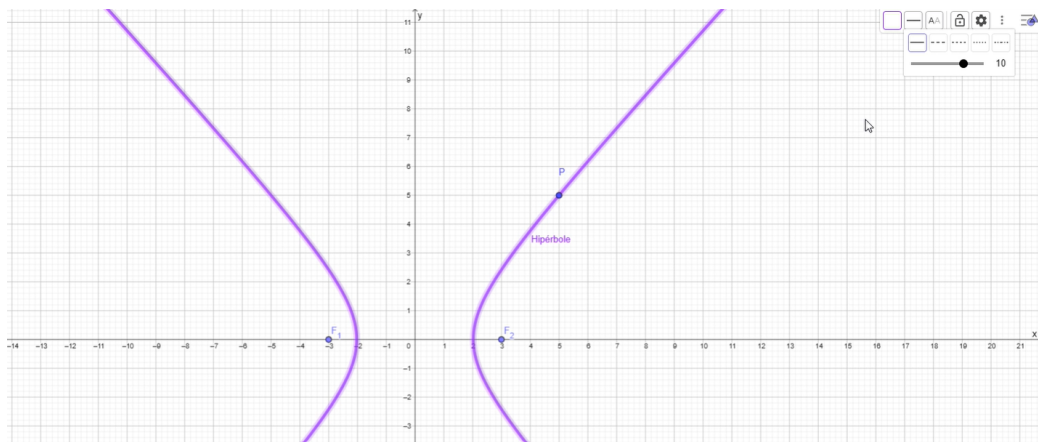
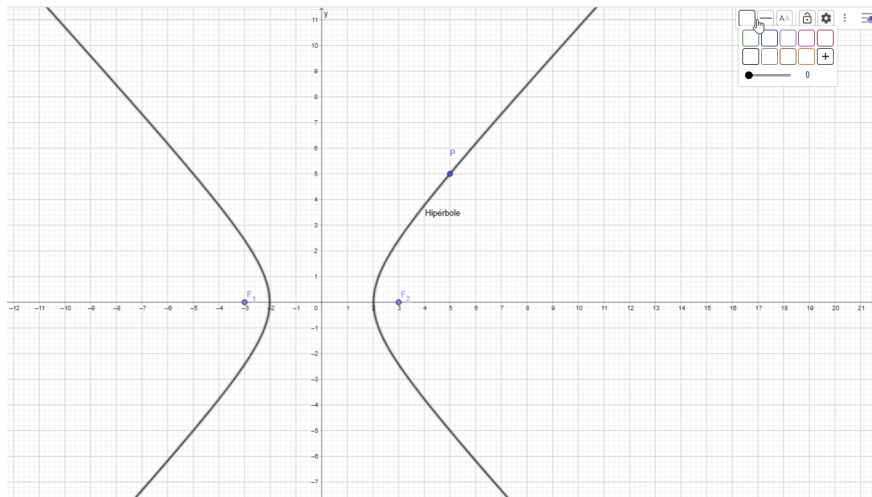
Hipérbole

CANCELAR OK

Passo 4 - Alteração da cor e da espessura do traço

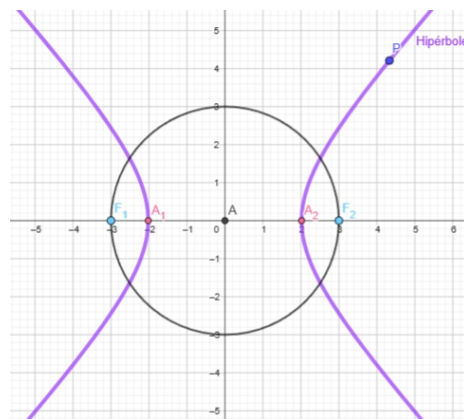
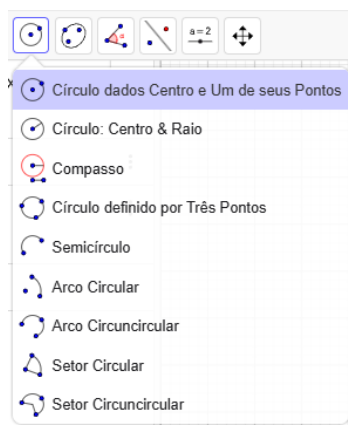
· Clique com o botão esquerdo sob a hipérbole e no ícone que aparece no canto superior direito para alterar a cor e a espessura do traço:





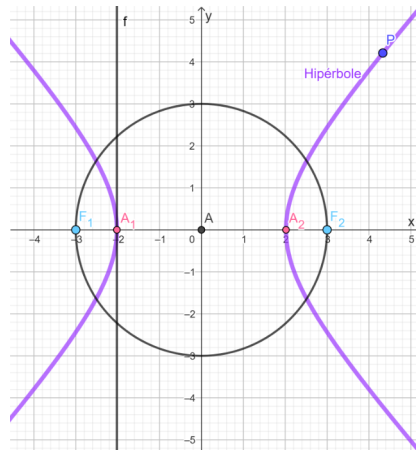
Passo 5 - Criação de uma circunferência

- Crie uma circunferência com a ferramenta Círculo dados Centro e um de seus Pontos, considerando como origem o ponto (0,0) e clicando em um dos focos:

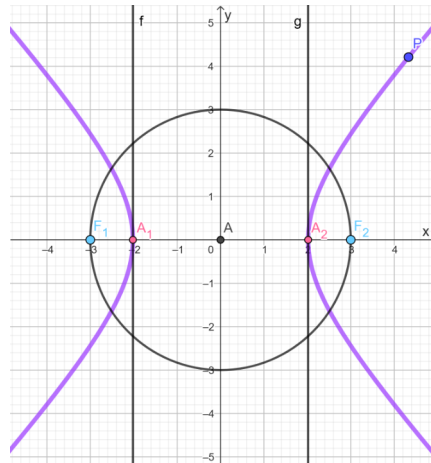


Passo 6 - Criação de retas perpendiculares

- Crie uma reta perpendicular que passe pelo ponto A1.



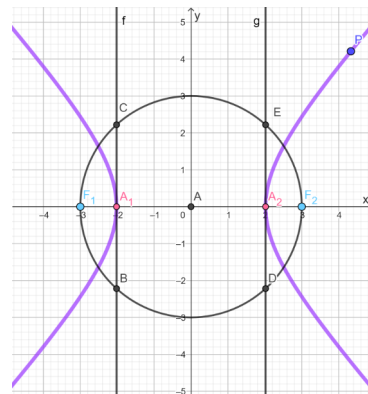
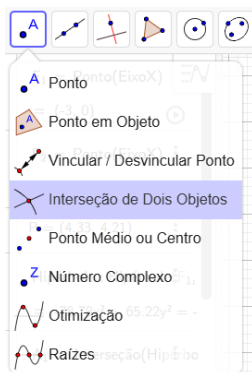
Crie uma reta perpendicular que passe pelo ponto A2:



Passo 7 - Determinação de interseções

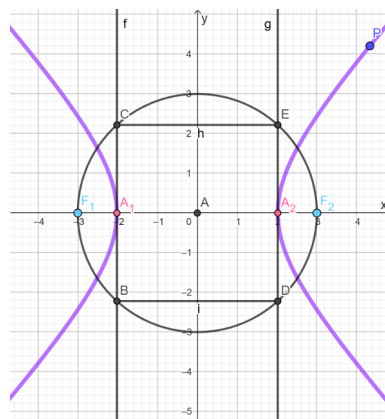
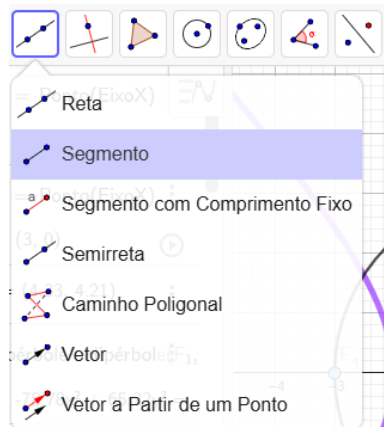
Com a ferramenta Interseção de Dois Objetos, clique na reta f e na circunferência.

Siga o mesmo procedimento com a reta g e a circunferência, de modo que os pontos B, C, D e E sejam criados:



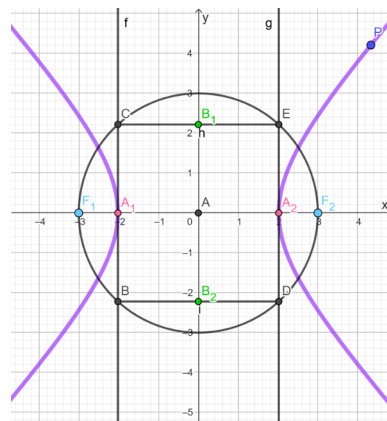
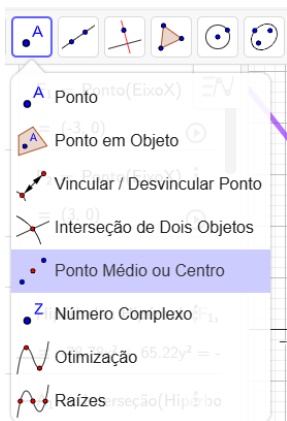
Passo 8 - Construção dos segmentos BD e CE

- Construa um segmento de reta que vá do ponto B ao ponto D e construa um segmento de reta que vá do ponto C ao E:



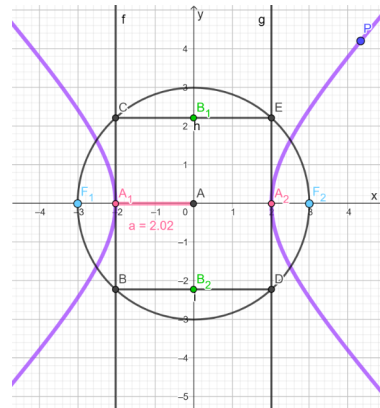
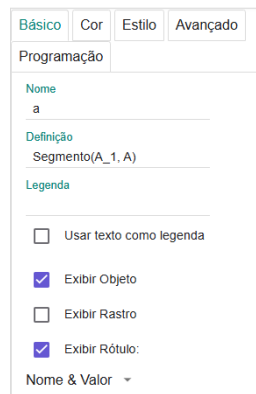
Passo 9 - Determinação do ponto médio dos segmentos BD e CE

- Determine o ponto médio do segmento BD e do segmento CE.
- Renomeie os pontos como B1 e B2.



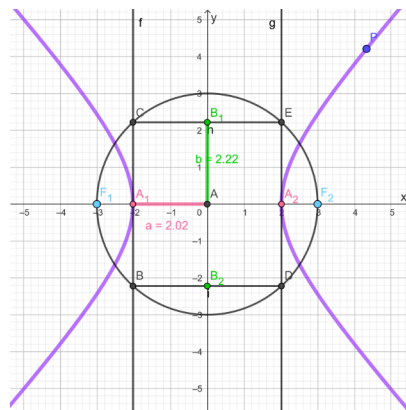
Passo 10 - Construção do segmento A1A

- Crie um segmento de reta que vá do ponto A₁ ao ponto A.
- Renomeie como **a**.
- Nas configurações desse segmento, selecione a opção “Exibir Rótulo”, em seguida selecione “Nome & Valor”, assim poderá ser verificada a medida do segmento.



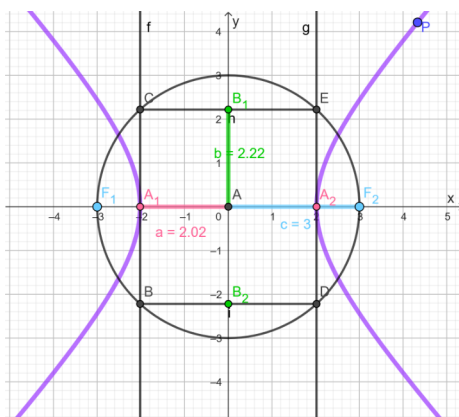
Passo 11 - Construção do segmento B_1A

- Crie um segmento de reta que vá do ponto B_1 ao ponto A.
- Renomeie como **b**.
- Nas configurações desse segmento, selecione a opção “Exibir Rótulo”, em seguida selecione “Nome & Valor”, assim poderá ser verificada a medida do segmento.
- Sugere-se a alteração da cor conforme preferir. Na figura, a seguir, esse segmento está na cor verde:



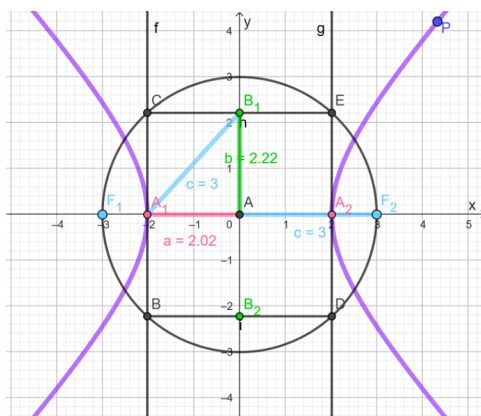
Passo 12 - Construção do segmento AF_2

- Crie um segmento de reta que vá do ponto A ao ponto F_2 .
- Renomeie como **c**.
- Assim como os segmentos **a** e **b**, é sugerido a alteração da cor e que seja exibido o Nome & Valor. No figura, está em azul.



Passo 13 - Construção do segmento A_1B_1

- Crie um segmento de reta que vá do ponto A_1 ao ponto B_1 .
- Verifique o comprimento do segmento e perceba que é o mesmo do segmento AF_2 .
- Mesmo que você altere o formato da hipérbole, os valores dos segmentos A_1B_1 e AF_2 continuarão sendo os mesmos. A hipérbole tem uma relação em que $c^2 = a^2 + b^2$.
- Insira uma legenda no segmento A_1B_1 , como sendo c .
- Altere a cor para a mesma escolhida para o segmento AF_2 e selecione a opção de exibir a Legenda & Valor.



Nome
j

Definição
Segmento(A_1 , B_1)

Legenda
c

☐ Usar texto como legenda

☒ Exibir Objeto

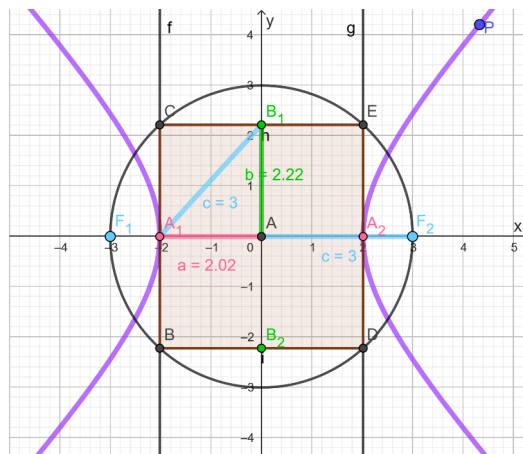
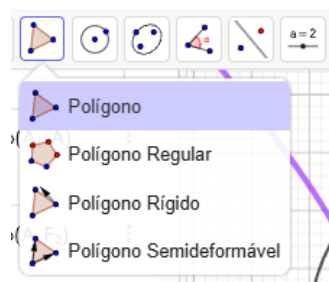
☐ Exibir Rastro

☒ Exibir Rótulo:

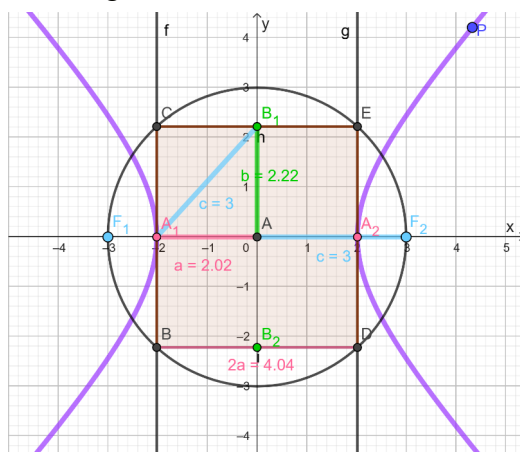
Legenda & Valor ▾

Passo 14 - Construção do polígono BCED

- Crie, com a ferramenta Polígono, um que tenha os pontos B, C, E e D como vértices.



- Selecione o segmento d1 do polígono, no campo de entrada, clique com o botão direito e vá em configurações ou clique com o botão esquerdo nos 3 pontos e vá em configurações. Na aba Básico, preencha a Legenda com o termo $2a$ e selecione para Exibir Rótulo Legenda & Valor.



- Verifique o valor desse segmento, cuja legenda é $2a$, e compare-o com o valor do segmento a . Você irá perceber que ele é o dobro de a , por isso a escolha da legenda.
- Sugerimos a alteração da cor, de modo que fique a mesma do segmento a , para melhor visualização.

$d_1 = \text{Segmento}(D, B, q1)$
= 4.04

Básico Cor Estilo Avançado

Programação

Nome
d_1

Definição
Segmento(D, B, q1)

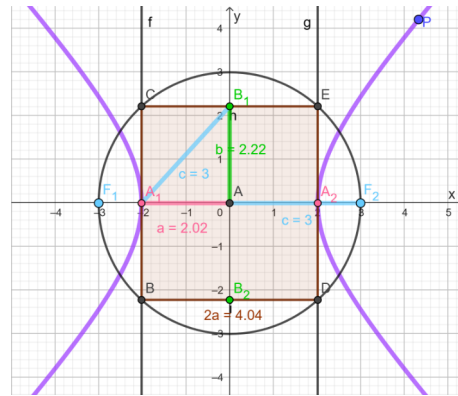
Legenda
2a

☐ Usar texto como legenda

☒ Exibir Objeto

☐ Exibir Rastro

☒ Exibir Rótulo:
Legenda & Valor



- Faça o mesmo procedimento com o segmento **e** do polígono. Insira uma legenda **2b** e coloque para que seja exibido a Legenda & Valor.
- Você irá verificar que esse segmento é o dobro do segmento **b**.
- Sugerimos que a cor seja a mesma do segmento **b**.

Básico Cor Estilo

Avançado Programação

Nome
e

Definição
Segmento(E, D, q1)

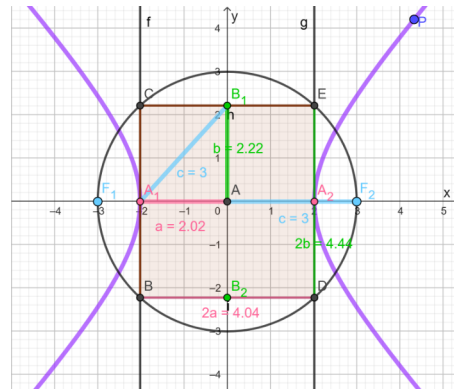
Legenda
2b

☐ Usar texto como legenda

☒ Exibir Objeto

☐ Exibir Rastro

☒ Exibir Rótulo:
Legenda & Valor



Passo 15 - Construção da primeira assíntota

- Crie uma reta que passe pelo ponto B e E.
- Renomeie como Assíntota 1:

Reta

Segmento

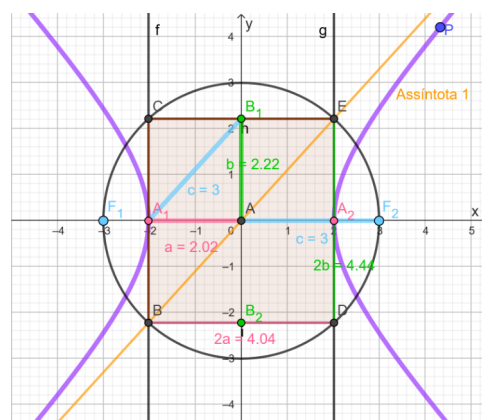
Segmento com Comprimento Fixo

Semirreta

Caminho Poligonal

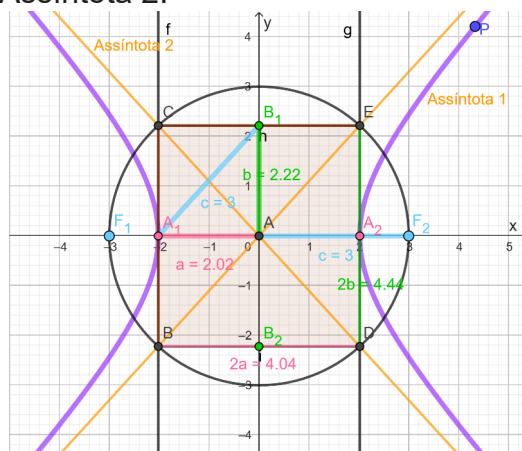
Vetor

Vetor a Partir de um Ponto



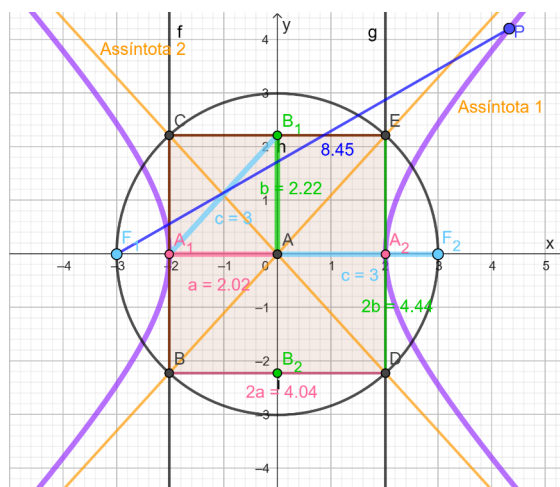
Passo 16 - Construção da segunda assíntota

- Crie uma reta que passe pelo ponto C e D.
- Renomeie como Assíntota 2.



Passo 17 - Construção do segmento F₁P

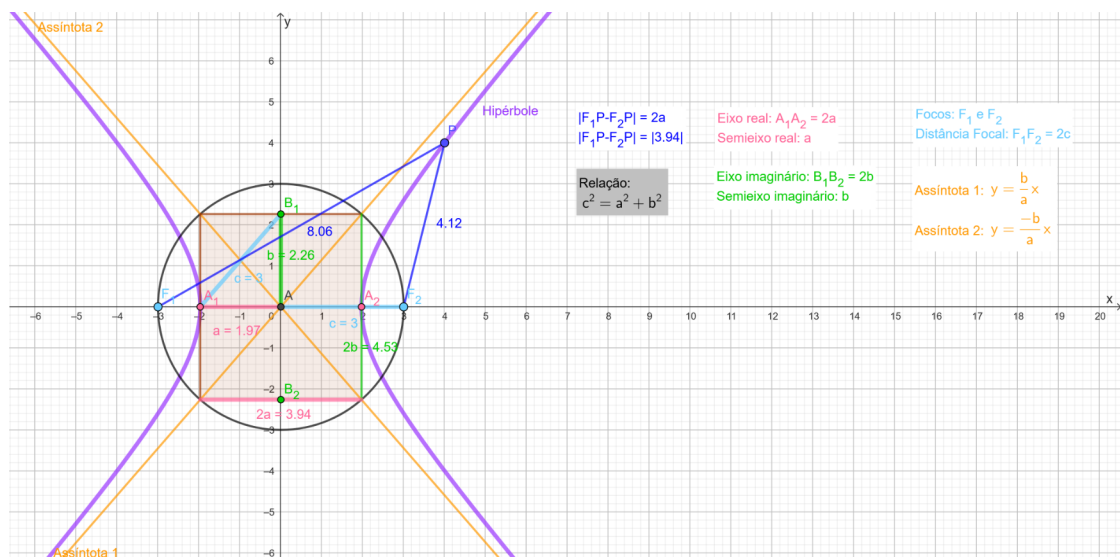
- Crie um segmento de reta que vá do ponto F₁ ao P.
- Altere para que seja exibido seu valor. No exemplo, é o segmento em azul escuro.



Passo 18 - Construção do segmento F₂P

- Crie um segmento de reta que vá do ponto F₂ ao P.
- Altere para que seja exibido seu valor. No exemplo, o segmento está em azul escuro:

•



De forma resumida, os elementos da hipérbole são:

- CENTRO: ponto médio entre os focos F_1 e F_2 ;
- FOCOS: pontos fixos F_1 e F_2 . A distância de um foco até o centro da hipérbole é c . A distância entre os focos é $2c$;
- VÉRTICES: pontos A_1 e A_2 . São pontos da hipérbole que intersectam o eixo real. A distância de um vértice até o centro da hipérbole é a . A distância entre os vértices é $2a$;
- EIXO REAL: segmento A_1A_2 , cuja medida é $2a$;
- EIXO IMAGINÁRIO: segmento B_1B_2 , cuja medida é $2b$. Passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao eixo real;
- ASSÍNTOTAS: retas as quais os ramos da hipérbole se aproximam, sem que se intersectem. As assíntotas comportam as diagonais do retângulo construído considerando as medidas dos eixos real e imaginário. Quando a hipérbole está na posição horizontal, as equações das assíntotas são $y=(b/a)x$ e $y=-(b/a)x$. Quando a hipérbole está na posição vertical, as equações são $y=(a/b)x$ e $y=-(a/b)x$;

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA HIPÉRBOLE (COM CENTRO NA ORIGEM)

Nesta etapa, vamos relacionar a construção geométrica da hipérbole com sua **expressão algébrica**.

Quando a hipérbole está na posição padrão - isto é, com o **centro na origem** - sua equação assume uma forma simplificada chamada **equação reduzida**.

Os casos possíveis são:

- **Ramos da hipérbole com interseção no eixo x:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- **Ramos da hipérbole com interseção no eixo y:** $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Nesta construção, utilizamos o **GeoGebra** para visualizar como a variação de **a** e **b** afeta a hipérbole e confirmar que as equações se ajustam ao desenho.

Ao final, professores poderão explorar a relação entre os valores de **a** e **b**, o formato da hipérbole e as suas equações, e estudantes poderão experimentar diferentes valores para consolidar a compreensão.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 40 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Certifique-se de que a malha e os eixos estejam visíveis (se necessário, ative-os clicando com o botão direito e selecionando **Exibir Eixos - Exibir Malha**).

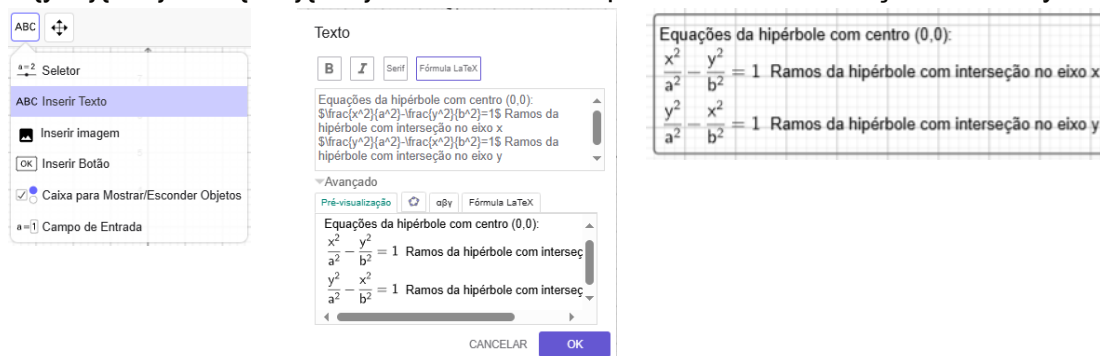
Passo 2 - Escrita das equações

- Escreva as equações, usando a ferramenta Inserir Texto, conforme segue:

“Equações da hipérbole com centro (0,0):

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ramos da hipérbole com interseção no eixo x

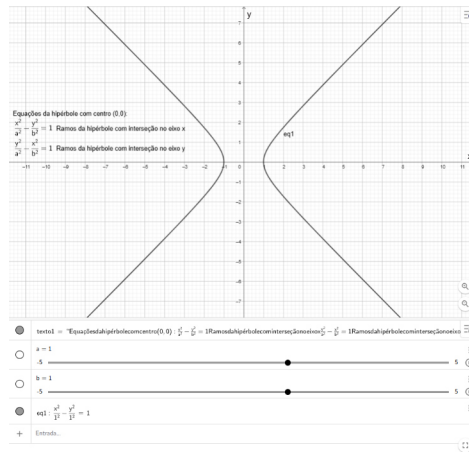
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Ramos da hipérbole com interseção no eixo y”



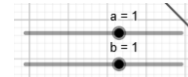
Passo 3 - Construção da primeira hipérbole

- Digite, no campo de entrada, a equação: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

Isso irá gerar uma hipérbole e criar os controles deslizantes **a** e **b**:



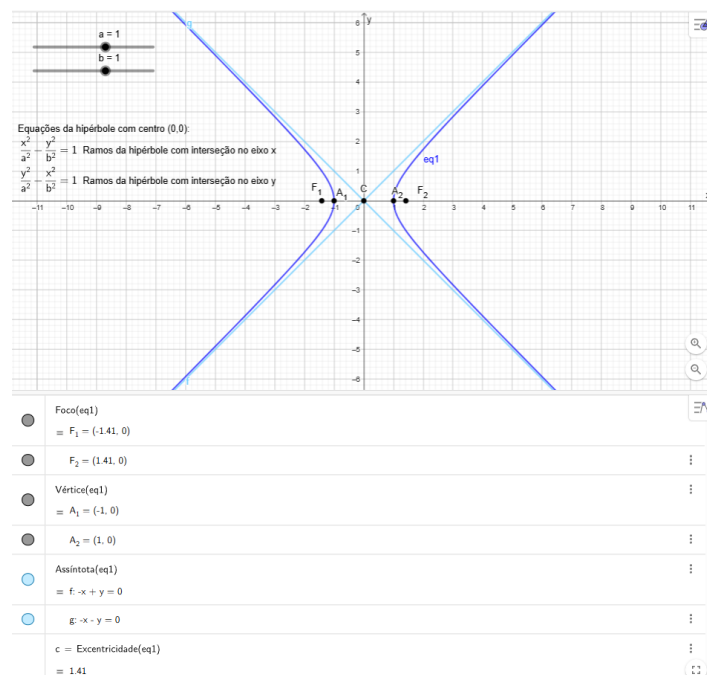
Clique nos círculos ao lado esquerdo dos elementos **a** e **b**, para tornar os controles deslizantes visíveis:



Passo 4 - Localização do centro, focos, vértices e assíntotas da hipérbole

Insira, no campo de entrada, os comandos: **Centro(eq1)**, **Foco(eq1)**, **Vértice(eq1)** e **Assíntota(eq1)**.

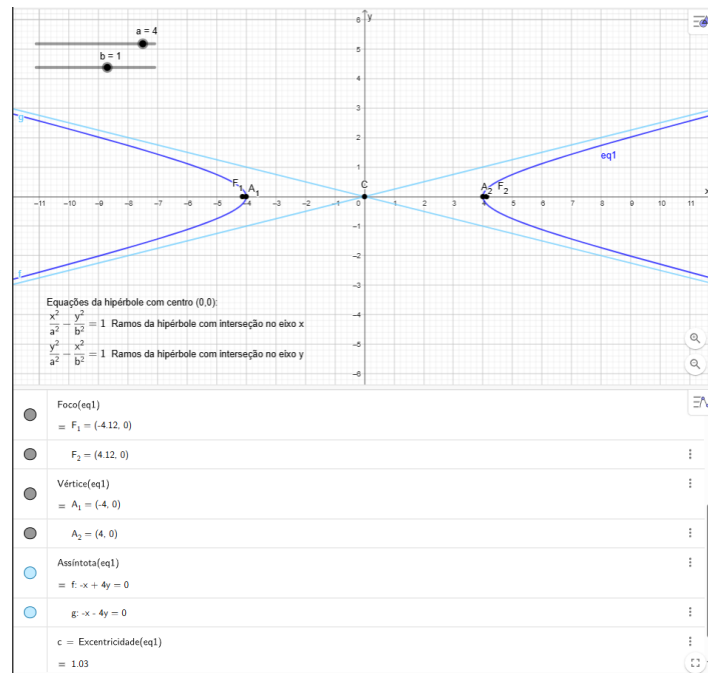
Também pode ser verificada a excentricidade da hipérbole utilizando o comando **Excentricidade(eq1)**:



- Sugerimos que os elementos criados sejam renomeados, de modo que facilite a sua identificação. E também podemos fazer uso das cores para diferenciar a hipérbole das assíntotas.

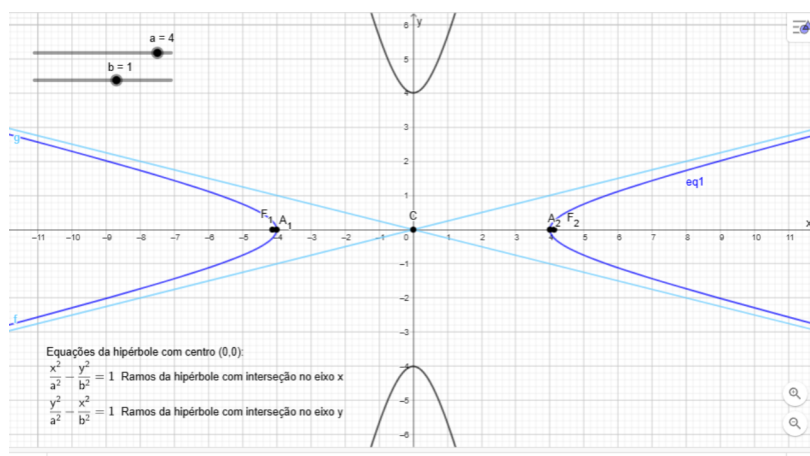
Passo 5 - Exploração dos controlos deslizantes a e b

- Nesse momento, é interessante manipular os controlos deslizantes a fim de verificar o que acontece com a hipérbole. Por exemplo, quando **a=4** e **b=1**, temos:



Passo 6 - Construção da segunda hipérbole

- Digite, no campo de entrada, a equação: **$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$**
- Será construída uma hipérbole considerando os valores de **a** e **b**.
- Perceba que os ramos dessa hipérbole estão intersectando o eixo y.



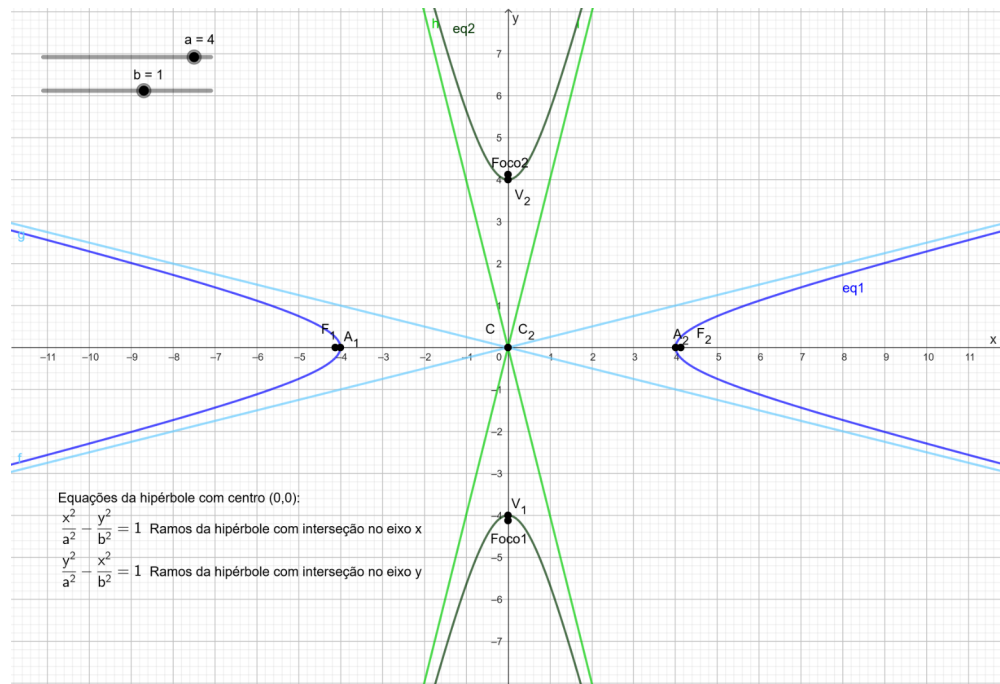
●	Vértice(eq1) = $A_1 = (-4, 0)$	
●	$A_2 = (4, 0)$	⋮
●	Assíntota(eq1) = $f: -x + 4y = 0$	⋮
●	$g: -x - 4y = 0$	⋮
	$c = \text{Excentricidade}(eq1)$ = 1.03	⋮
●	$eq2: \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$	⋮
+	Entrada...	↕

Passo 7 - Localização do centro, focos, vértices e assíntotas da hipérbole

· Insira os comandos **Centro(eq2)**, **Foco(eq2)**, **Vértice(eq2)**, **Assíntota(eq2)** e **Excentricidade(eq2)**, no campo de entrada:

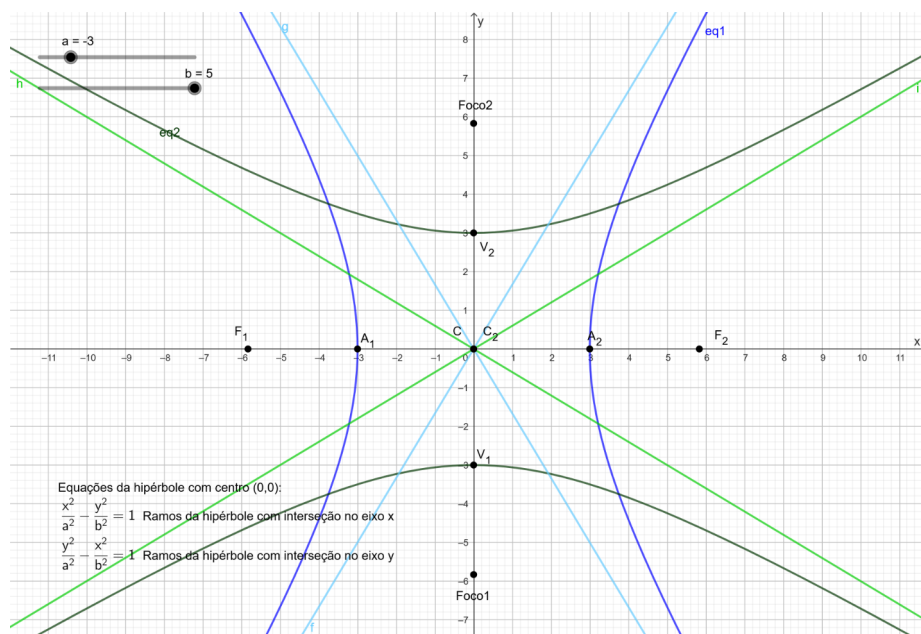
●	$C_2 = \text{Centro}(eq2)$ = (0, 0)	
●	Foco(eq2) = Foco1 = (0, -4.12)	⋮
●	Foco2 = (0, 4.12)	⋮
●	Vértice(eq2) = $V_1 = (0, -4)$	⋮
●	$V_2 = (0, 4)$	⋮
●	Assíntota(eq2) = $h: -4x - y = 0$	⋮
●	$i: 4x - y = 0$	⋮
	$d = \text{Excentricidade}(eq2)$ = 1.03	⋮
+	Entrada...	↕

- Sugerimos que os elementos criados sejam renomeados, de modo que facilite a sua identificação.
- Não é possível colocar o mesmo nome dos elementos da primeira hipérbole, por exemplo, não é possível ter dois pontos com o nome de F_1 .
- Da mesma forma, utilize as cores para diferenciar a hipérbole das suas assíntotas:



Passo 8 - Exploração dos controles deslizantes a e b

Você pode manipular os controles deslizantes **a** e **b**, a fim de verificar as mudanças que ocorrem com cada hipérbole e seus elementos. Por exemplo, quando **a=-3** e **b=5**:



EQUAÇÕES REDUZIDAS DA HIPÉRBOLE COM CENTRO (h,k)

Até agora, estudamos hipérboles com **centro na origem**, o que facilita a visualização e a compreensão da relação entre equação e gráfico.

Entretanto, na prática, muitas hipérboles aparecem **transladadas** no plano cartesiano, isto é, deslocadas em relação à origem.

Os deslocamentos horizontal e vertical são representados por dois parâmetros adicionais:

- h - deslocamento horizontal do centro;
- k - deslocamento vertical do centro.

As equações reduzidas da parábola, quando o vértice é (h,k), ficam:

- **Eixo focal paralelo ao eixo x:** $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
- **Eixo focal paralelo ao eixo y:** $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Nesta construção, vamos usar **controles deslizantes** para manipular **a**, **b**, **h** e **k**, e observar como cada valor altera a posição e a forma da hipérbole.

Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 20 a 40 minutos.

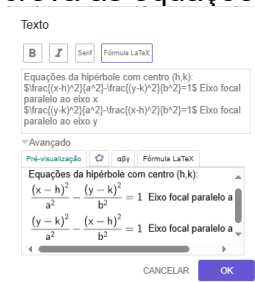
Passo a Passo no GeoGebra

Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Certifique-se de que a malha e os eixos estejam visíveis (se necessário, ative-os clicando com o botão direito e selecionando **Exibir Eixos - Exibir Malha**).

Passo 2 - Escrita das equações

- Escreva as equações, usando a ferramenta “Texto”, conforme segue:



Equações da hipérbole com centro (h,k):	
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Eixo focal paralelo ao eixo x
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Eixo focal paralelo ao eixo y

Passo 3 - Construção das hipérboles

- Digite, no campo de entrada, as equações

$$(x-h)^2/a^2-(y-k)^2/b^2 = 1$$

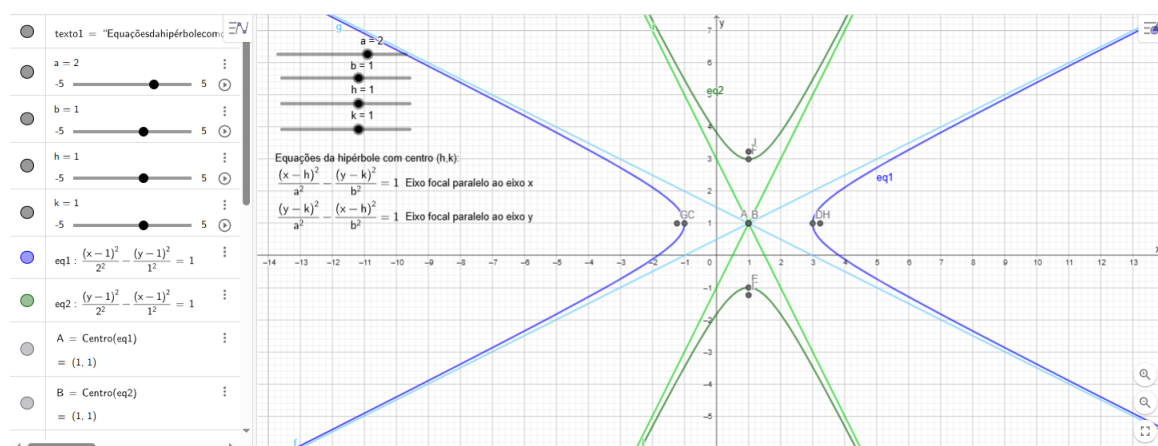
$$(y-k)^2/a^2-(x-h)^2/b^2 = 1.$$

- Automaticamente, serão criados os controles deslizantes de **a**, **b**, **h** e **k**.
- Ajuste os controles deslizantes conforme preferir.

Passo 4 - Localização do centro, vértices, focos e assíntotas das hipérboles

· Digite os comandos **Centro(eq1)**, **Centro(eq2)**, **Vértice(eq1)**, **Vértice(eq2)**, **Foco(eq1)**, **Foco(eq2)**, **Assíntota(eq1)** e **Assíntota(eq2)** para verificar os elementos da hipérbole.

- Segue exemplo de hipérboles com centro (1,1):



DICA: você pode tanto digitar as equações com centro **(h,k)** no campo de entrada ou alterar as equações já existentes (caso você tenha construído as hipérboles com centro na origem). Se optar pela segunda opção, irá verificar que os controles deslizantes **h** e **k** são criados (pois **a** e **b** já existem). Os valores de **h** e **k** podem ser alterados, assim como os valores de **a** e **b**. Caso os controles deslizantes **h** ou **k** não sejam criados, pode ser que já exista com algum elemento com esse nome, nesse caso, é só renomear.

Para calcular as assíntotas de um hipérbole com centro fora da origem, utilize as fórmulas:

$$y - k = \pm \left(\frac{b}{a} \right) (x - h)$$

Eixo real paralelo ao eixo x.

$$y - k = \pm \left(\frac{a}{b} \right) (x - h)$$

Eixo real paralelo ao eixo y.

ATIVIDADES SOBRE HIPÉRBOLE

Depois de estudar a definição, os elementos e as equações da hipérbole (tanto na posição padrão quanto transladada), é hora de aplicar o que foi aprendido.

As atividades a seguir foram elaboradas para **consolidar o conhecimento**, permitindo que o estudante pratique:

- Identificação e representação gráfica da hipérbole;
- Determinação de centro, focos, vértices, eixo real, eixo imaginário e assíntotas;
- Dedução da equação a partir de informações geométricas;
- Interpretação da equação para extrair elementos da curva.

Justificativa da Realização das Atividades

A prática é um passo essencial para a aprendizagem efetiva. Segundo Ausubel (TAS), o conhecimento se torna significativo quando o novo conteúdo é relacionado com conceitos já presentes na estrutura cognitiva do aluno.

Essas atividades favorecem:

- **A aprendizagem significativa**, ao exigir que o aluno faça conexões entre construções no GeoGebra, conceitos algébricos e interpretação geométrica;
- **O desenvolvimento da autonomia**, pois os exercícios podem ser realizados tanto individualmente quanto em grupo;
- **O raciocínio matemático**, ao aplicar propriedades e fórmulas em diferentes contextos.

Além disso, para professores, estas atividades podem servir como avaliação diagnóstica ou formativa, permitindo verificar se os alunos compreendem e sabem aplicar os conceitos.

Dicas de Aplicação

- **Para Estudantes:** tente resolver sem consultar o passo a passo; depois confira com o conteúdo do guia; após, consulte a resposta dada.
- **Para Professores:** utilize exemplos com e sem apoio do GeoGebra, incentivando a resolução manual e a verificação digital.

ATIVIDADES SOBRE HIPÉRBOLE

1) Esboce a hipérbole e indique os focos, os vértices e as assíntotas:

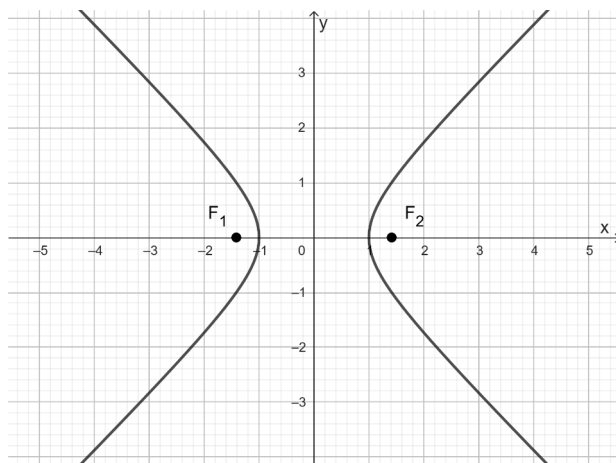
a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $y^2 - x^2 = 4$

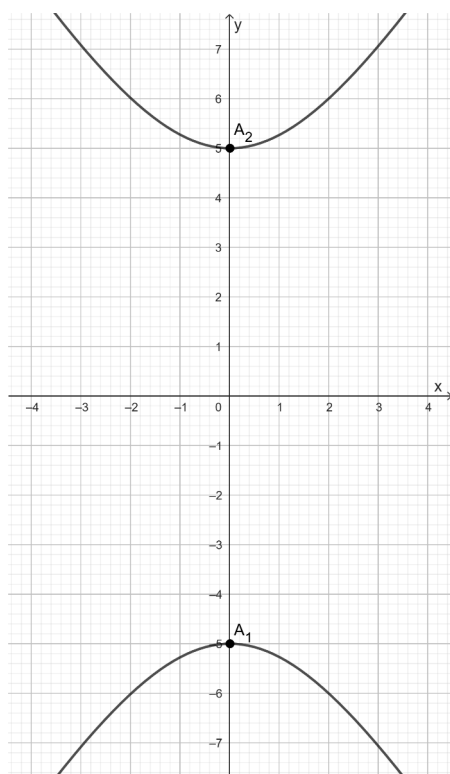
c) $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$

2) Determine a equação da hipérbole sabendo que:

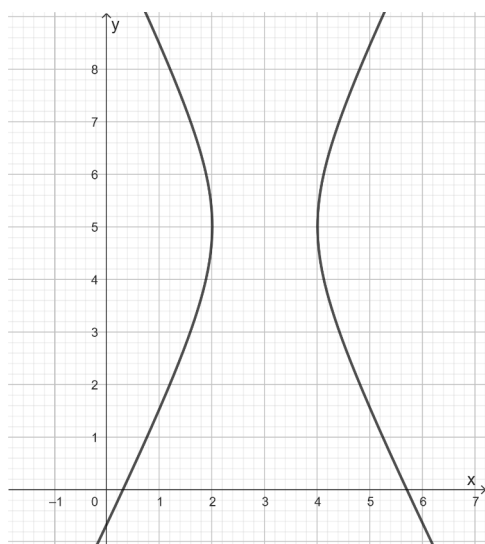
a) A distância entre os focos F_1 e F_2 é igual a $2\sqrt{2}$, e que os seus vértices estão localizados nos pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$:



b) A distância entre os vértices A_1 e A_2 é igual a 10, e que os seus focos estão localizados nos pontos $(0, -\sqrt{34})$ e $(0, \sqrt{34})$:



c) O centro está localizado no ponto $(3,5)$, que $2b=4$ e que os vértices estão localizados nos pontos $(2,5)$ e $(4,5)$:



RESPOSTAS DAS ATIVIDADES SOBRE HIPÉRBOLE

As resoluções a seguir mostram, não apenas o resultado final, mas, também, o raciocínio necessário para chegar a cada resposta, permitindo ao estudante entender como e por que cada passo é realizado.

Sugestão para o professor: Solicite que os alunos expliquem cada passo da resolução oralmente, ou por escrito, justificando a escolha da forma da equação. Isso estimula o raciocínio lógico e a comunicação matemática.

1) Esboce a hipérbole e indique os focos, os vértices e as assíntotas:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$$a^2 = 9 \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9 + 4$$

$$c = \sqrt{13}$$

Focos:

$$F_1(-\sqrt{13}, 0)$$

$$F_2(\sqrt{13}, 0)$$

Vértices:

$$A_1(-3, 0)$$

$$A_2(3, 0)$$

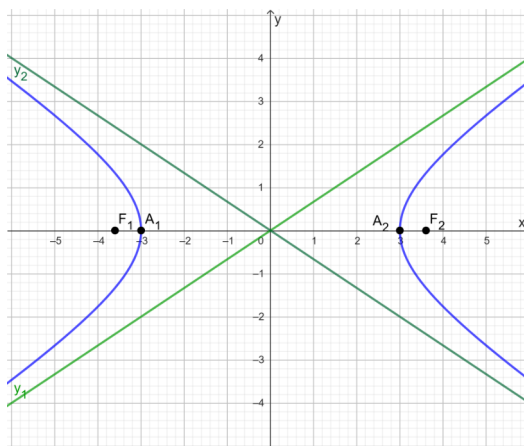
Assíntotas:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$y = \pm \frac{2}{3}x$$

$$y_1 = \frac{2}{3}x$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}x$$



b) $y^2 - x^2 = 4$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 4 \quad a = 2$$

$$b^2 = 4 \quad b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{8}$$

Focos:

$$F_1(0, -\sqrt{8})$$

$$F_2(0, \sqrt{8})$$

Vértices:

$$A_1(0, -2)$$

$$A_2(0, 2)$$

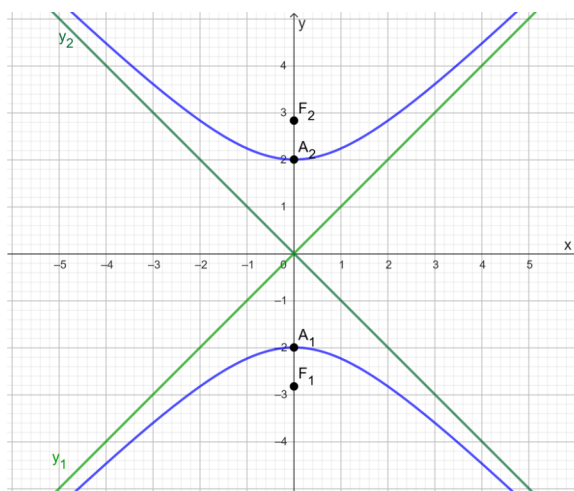
Assíntotas:

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

$$y = \pm \frac{2}{2}x$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = -x$$



$$c) \frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$$

Centro $C(2, -1)$

$$a^2 = 4 \quad a = 2$$

$$b^2 = 1 \quad b = 1$$

$$c^2 = 4 + 1$$

$$c = \sqrt{5}$$

Focos:

$$F_1(2, -\sqrt{5} - 1)$$

$$F_2(2, \sqrt{5} - 1)$$

Vértices:

$$A_1(2, -3)$$

$$A_2(2, 1)$$

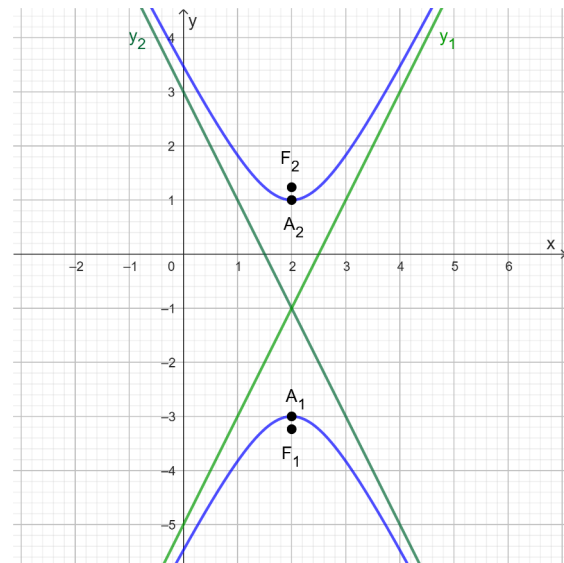
Assíntotas:

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$$

$$y + 1 = \pm 2(x - 2)$$

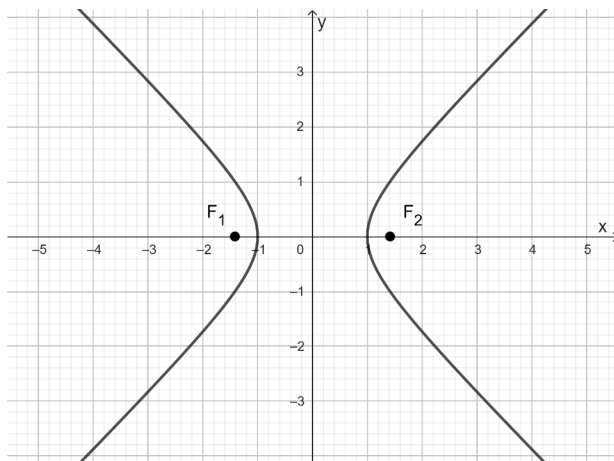
$$y_1 = 2x - 5$$

$$y_2 = -2x + 3$$



2) Determine a equação da hipérbole sabendo que:

a) A distância entre os focos F_1 e F_2 é igual a $2\sqrt{2}$, e que os seus vértices estão localizados nos pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$:



$$2c = 2\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{2}$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + b^2$$

$$2 = 1 + b^2$$

$$b^2 = 1$$

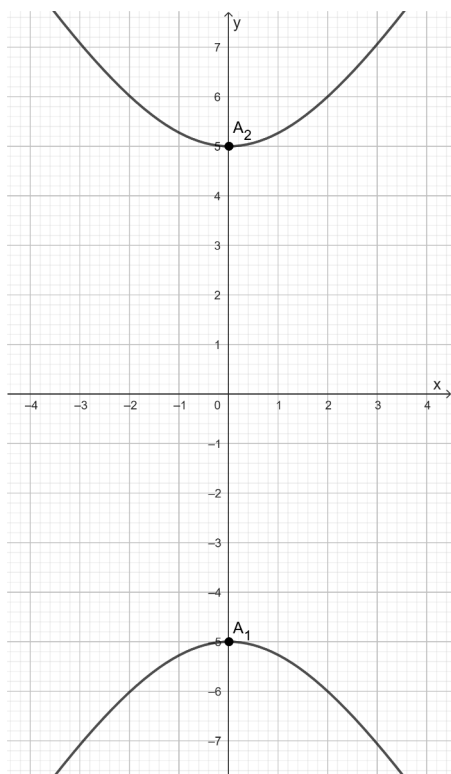
$$b = 1$$

$$C(0,0)$$

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

b) A distância entre os vértices A_1 e A_2 é igual a 10, e que os seus focos estão localizados nos pontos $(0, -\sqrt{34})$ e $(0, \sqrt{34})$:



$$2a = 10$$

$$a = 5$$

$$c = \sqrt{34}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(\sqrt{34})^2 = 5^2 + b^2$$

$$34 = 25 + b^2$$

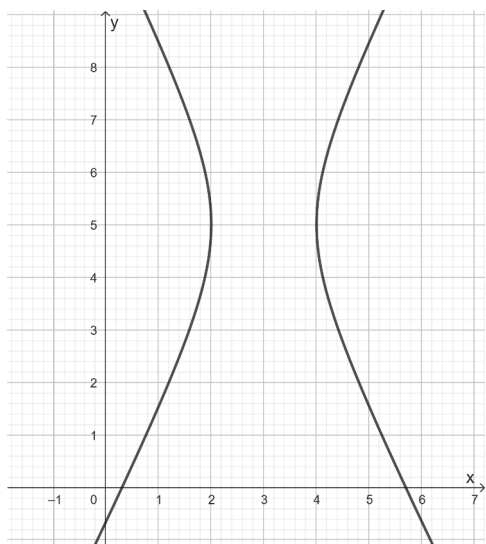
$$b^2 = 9$$

$$b = 3$$

$$C (0,0)$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

c) O centro está localizado no ponto $(3,5)$, que $2b=4$ e que os vértices estão localizados nos pontos $(2,5)$ e $(4,5)$:



$$C (3,5)$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{1^2} - \frac{(y-5)^2}{2^2} = 1$$

$$(x-3)^2 - \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

FECHAMENTO - CAPÍTULO HIPÉRBOLE

Resumo Conceitual

Neste capítulo, exploramos a hipérbole a partir de três perspectivas complementares:

- 1. Construção geométrica** - utilizando o GeoGebra para visualizar a definição como lugar geométrico: conjunto de todos os pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor do que a distância entre os pontos fixados.
- 2. Elementos e medidas fundamentais** - centro, focos, vértices, eixo real, eixo imaginário, assíntotas e excentricidade, compreendendo suas funções e relações métricas.
- 3. Representação algébrica** - equações reduzidas (padrão e transladada), uso de parâmetros para gerar diferentes curvas.

Também realizamos atividades práticas que conectaram teoria e aplicação, promovendo a consolidação da aprendizagem significativa (Ausubel), o engajamento na construção do conhecimento (Construcionismo de Papert) e o uso pedagógico das TDIC (GeoGebra) para visualização e experimentação.

Para o estudante

- Revise as construções feitas no GeoGebra e tente reproduzi-las sem consultar o passo a passo.
- Experimente alterar valores dos parâmetros para perceber como isso afeta a forma da curva.
- Construa exemplos próprios e compare com os exercícios resolvidos.

Para o professor

- Use as construções como demonstrações dinâmicas em sala de aula.
- Adapte as atividades de acordo com o nível da turma (Ensino Médio, curso de graduação ou formação continuada).

Utilize o recurso para avaliação formativa, observando se os alunos conseguem identificar e relacionar elementos e equações da hipérbole sem apoio visual.

*Superfície cônica
e suas interseções
com um plano*

SUPERFÍCIE CÔNICA E SUAS INTERSEÇÕES COM UM PLANO

Objetivo da atividade: construir uma superfície cônica e um plano para verificar as suas interseções.

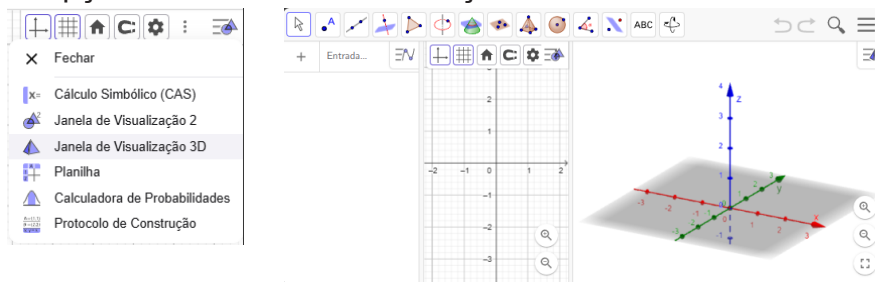
Recursos: computador/celular com acesso à internet ou computador/celular com o aplicativo do GeoGebra instalado.

Tempo estimado: 30 minutos.

Passo a Passo no GeoGebra

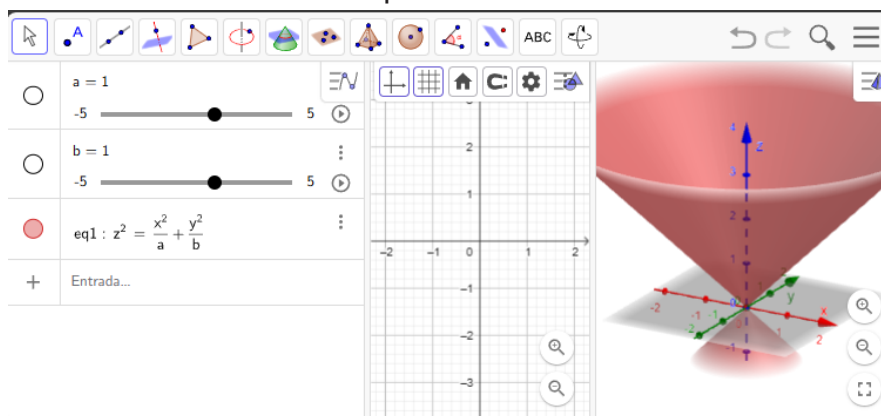
Passo 1 - Preparação do ambiente de trabalho

- Abra uma nova janela no GeoGebra.
- Ative a opção de Janela de Visualização 3D.



Passo 2 - Construção da superfície cônica

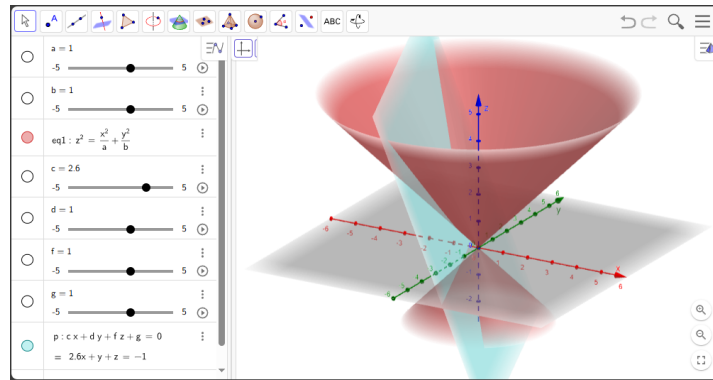
- Digite no campo de entrada: $z^2 = x^2/a + y^2/b$
- Os controles deslizantes **a** e **b** serão criados automaticamente.
- A janela 3D irá mostrar uma superfície cônica.



- Você pode reduzir o espaço da Janela 2D arrastando a barra que a limita.

Passo 3 - Construção do plano

- Digite no campo de entrada: $cx+dy+fz+g=0$
- Essa é a equação de um plano. Por consequência, os controles deslizantes **c**, **d**, **f** e **g** serão criados. Altere seus valores conforme preferir.

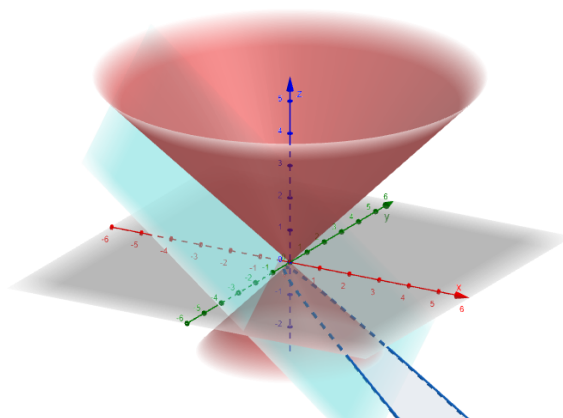
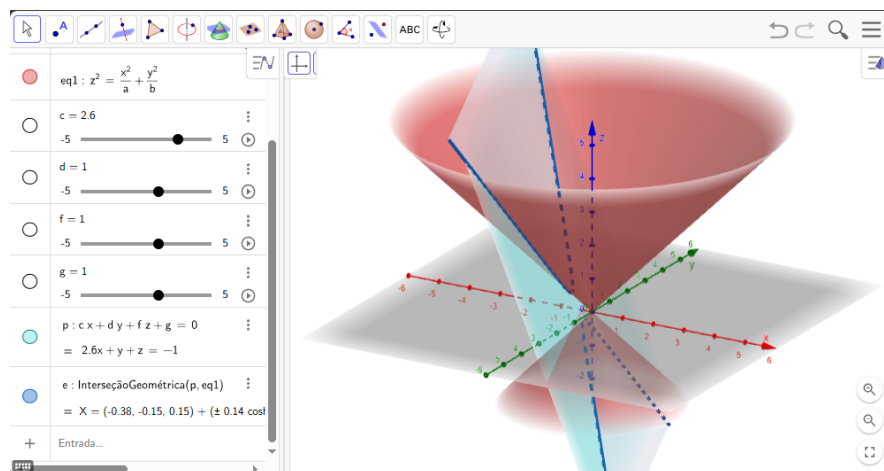


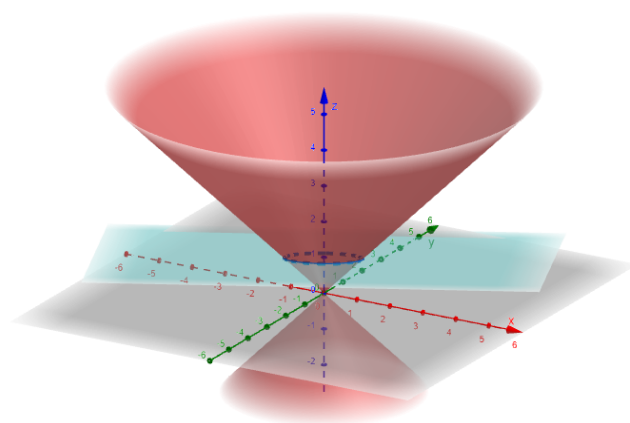
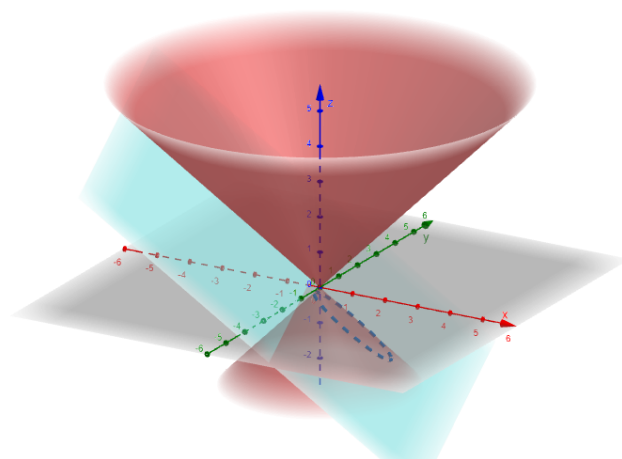
Passo 4 - Determinação da interseção do plano com a superfície cônica

- Digite, no campo de entrada.: **Interseção (eq1,p).**

Passo 5 - Exploração dos controles deslizantes a e b

- Movimente os controles deslizantes **c**, **d**, **f** e **g** e perceba que, dependendo dos coeficientes do plano, a interseção irá mostrar curvas diferentes. Isso quando houver interseção.





Conseguiu visualizar pelo menos uma circunferência, hipérbole, parábola e elipse nas interseções? É por isso que essas curvas são chamadas de seções cônicas.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen L. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 2 v.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. xxi, 625 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento**. 3. ed. São Paulo: Autêntica, 2020. 1 recurso online. (Tendências em Educação Matemática). ISBN 9788551306734.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. (Fundamentos de matemática elementar ; 9).

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/> . Acesso em: 18 set. 2025.

MOREIRA, Marco A. O que é afinal aprendizagem significativa? **Revista cultural La Laguna Espanha**, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeeafinal.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2021.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Edição revisada. Porto Alegre: Artmed, 2008. 220 p. (Biblioteca Artmed. Ciência cognitiva). ISBN 9788536310589.