



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT**

IGLESSON MENEZES DOS REIS

APROXIMANDO A MATEMÁTICA ACADÊMICA COM A MATEMÁTICA ESCOLAR

Rio Branco, AC
2025

IGLESSON MENEZES DOS REIS

APROXIMANDO A MATEMÁTICA ACADÊMICA COM A MATEMÁTICA ESCOLAR

Este produto educacional tem o objetivo de auxiliar professores do ensino fundamental anos finais no ensino dos números reais.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Aurélio de Alcântara

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva

Rio Branco, AC
2025

RESUMO

Este produto educacional foi elaborado com o propósito de fornecer as ferramentas necessárias para que professores do ensino básico possam apresentar o conjunto dos números reais de uma maneira mais completa e abrangente, explorando diferentes aspectos desse conjunto. Este produto conta com duas sequências didáticas munidas de instruções detalhadas e vídeos explicativos para tornar o trabalho do docente mais eficiente, também, são apresentados materiais de apoio para a impressão que ajudarão os alunos a acompanharem a aula e compreenderem melhor as construções propostas. Por fim, este trabalho também conta com um relato de experiência que detalha a aplicação de ambas as sequências em salas de aula da cidade de Rio Branco, Acre.

Palavras – chave: Sequências didáticas; Relato de experiência; Construção geométrica; Construção algébrica.

Sumário

1.	Introdução	5
2.	Desenvolvimento	7
2.1.	Aplicação da construção algébrica	7
2.2.	Aplicação da construção geométrica	16
3.	Sequência didática	28
4.	Conclusões	29
4.1.	Resultados da aplicação da construção algébrica	29
4.2.	Resultados da aplicação da construção Álgebra	30
4.	Referências	32
5.	Anexos	33
Anexo I.	Sequência didática: construção algébrica	33
Anexo II.	Sequência didática: construção geométrica	41
Anexo III.	Material de apoio da construção algébrica	54
Anexo IV.	Questionário da construção algébrica	64
Anexo V.	Material de apoio da construção geométrica	65
Anexo VI.	Questionário da construção geométrica	69

1. INTRODUÇÃO

Existe uma distância entre a matemática ensinada por professores da Educação Básica na escola e a matemática que, em geral, se estuda na Universidade? Moreira e David (2005) destacam que “a escola apenas traduz o conhecimento científico, com base em uma visão de que ela tem uma dinâmica própria e, da mesma forma, criticam as posições que não consideram a dialética entre o conhecimento escolar e o acadêmico” (MOREIRA; DAVID, 2005; CARRIÃO; POWELL; BORBA; D'AMBROSIO; FONSECA, 2010, p. 11). Estes autores ainda ressaltam que essa diferença pode não ser pensada e processada durante a formação inicial, bem como articulada durante os cursos de formação continuada, mas é percebida nos currículos no ensino básico e analisados por pesquisadores na área de Educação Matemática.

O estudo dos números reais requer uma compreensão, além da visualização disfarçada, na reta numerada dos inteiros, indispensável para qualquer estudante de matemática, seja na educação básica no ensino superior visto que “questões rotineiras, que já são apresentadas em livros didáticos ou apostilas, e que apenas solicitam um “clique” sobre a alternativa correta, podem ser usadas de maneira mais criativa”(Cury; Ribeiro, 2015, p.102). Sendo assim, é extremamente importante que o ensino dos conjuntos numéricos, em particular dos reais, seja feito de uma maneira satisfatória e abrangente, de modo que os estudantes possam compreender a estrutura desse conjunto tanto em seu aspecto algébrico (como um corpo ordenado completo) quanto em seu aspecto geométrico (como uma reta).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece algumas habilidades a respeito dos números reais, dentre elas:

EF09MA0: Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

EF09MA02: Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

que enfatizam a necessidade de trabalhar os números reais de uma maneira mais abrangente, e não apenas com diagramas de conjuntos que se completam.

Disto isto, uma pergunta surge: como ensinar essas características dos números reais na educação básica? Neste produto educacional, serão apresentadas duas sequências didáticas e, também, os relatos das aplicações dessas sequências em salas de aula de uma escola pública estadual da cidade de Rio Branco, Acre.

O objetivo desse produto é propor uma aproximação da matemática disponibilizada na graduação sendo proposta na Educação Básica no intuito de estimular os estudantes a buscar aprofundamento neste tema de estudo – Números Reais – mostrando-lhes “novas” estruturas e possibilidades. Através dos relatos de experiência aqui presentes, busca-se nortear as futuras aplicações das sequências apresentadas, mostrando onde cada uma delas foi eficaz e onde deixou a desejar, possibilitando aos professores interessados nesta sequência didática aperfeiçoar a proposta.

2. DESENVOLVIMENTO

Este produto educacional tem como objetivo apresentar, na forma de sequências didáticas, duas novas abordagens do tema “construção dos números reais”: uma construção geométrica e uma algébrica, que podem ser aplicadas em turmas do 9º ano do ensino fundamental. Além disso, o produto educacional descreve a aplicação dessas sequências em turmas da rede pública estadual na cidade de Rio Branco, Acre.

Neste documento, ambas as abordagens serão detalhadas de modo a tornar possível a reprodução desses métodos de ensino por parte de outros professores de matemática. Para tornar as instruções mais eficientes, links de vídeos explicativos disponíveis na plataforma Youtube serão adicionados ao decorrer do texto.

Cada uma das abordagens foi aplicada em uma turma de 9º ano do ensino fundamental em uma escola da cidade de Rio Branco, Acre, e os resultados serão discutidos em seções próprias dentro deste documento. Desses resultados, espera-se evidenciar os principais pontos positivos e negativos de cada aplicação, e gerar informações úteis para futuras aplicações.

2.1. APLICAÇÃO DA CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

Nessa abordagem, a proposta é mostrar que o único conjunto numérico com a propriedade de completude é o conjunto dos números reais, e, para tal fim, serão usados os Cortes de Dedekind. Para isso, o professor separou a turma em duplas e entregou uma cópia do material do anexo III para cada dupla.

Ao contrário da abordagem anterior, esta não requer que os alunos tragam materiais específicos, e a folha impressa pode ser substituída por uma projeção em slides, embora as impressões sejam recomendadas. Além disso, essa proposta é de rápida aplicação, demandando apenas 2 tempos de 1 hora cada.

Após organizar a sala e distribuir o material, o professor fez uma leitura colaborativa com a turma da definição de Corte de Dedekind, e trabalhou os exemplos presentes no material. Esse momento teve o objetivo de familiarizar os estudantes com a estrutura de cortes e mostrar seus principais elementos: os conjuntos E e D e o elemento separador, e, por fim, concluir que o conjunto dos números reais é o único que satisfaz as duas afirmações a seguir: “todo corte de números reais possui um

elemento separador real, e todo número real é um elemento separador de um corte de números reais”, ou seja, é completo.

Em seguida, o professor levantou a questão: “como seria um corte de números naturais? Como seria o corte determinado pelo número 4, por exemplo?”, e, surpreendentemente, os alunos deram respostas satisfatórias, tais como:

Aluno A¹: “No conjunto E desse corte têm os números 1, 2 e 3”.

Aluno B: “No conjunto D desse corte têm os números maiores que 4”.

E foram feitas algumas perguntas como:

Aluno C: “E o número 4 fica em qual conjunto?”

Da forma que definimos os cortes, o elemento separador não fica em nenhum dos conjuntos E ou D . Essa forma de definir foi julgada como de mais fácil compreensão por parte dos estudantes. Para reforçar o conceito de cortes de números naturais, o professor pediu para que os alunos resolvessem os exemplos que constavam no material. Os exemplos foram:

Exemplo: siga o modelo abaixo e indique o elemento separador e cada corte, além de descrever seus conjuntos E e D .

a) [Modelo]

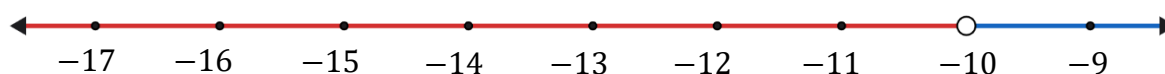


Elemento separador: o número 3.

Conjunto E : é formado por todos os números reais menores que 3.

Conjunto D : é formado por todos os números reais maiores que 3.

b)



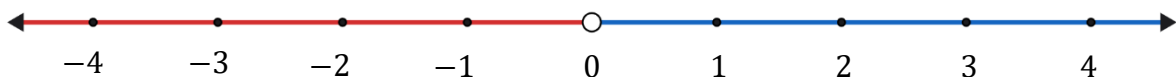
¹ Serão usados nomes fictícios para preservar a identidade dos alunos.

Elemento separador: -10 ²

Conjunto E : Todos os números reais menores que -10 .

Conjunto D : Todos os números reais maiores que -10 .

c)



Elemento separador: 0

Conjunto E : Todos os números reais negativos.

Conjunto D : Todos os números reais positivos.

A partir daí, o professor pôde prosseguir com o raciocínio perguntando: “no conjunto dos números naturais, as duas frases que definem completude são verdadeiras?”. Da forma que foi formulada, os alunos não souberam responder à pergunta. Sendo assim, o professor reformulou a pergunta da seguinte forma: “podemos fazer um corte, isto é, determinar conjuntos E e D ao redor de qualquer número natural?”

A essa pergunta os alunos souberam responder. Disseram:

Aluno A: “Ao redor do número 1 não dá pra fazer, não tem nenhum número menor que 1 pra ficar dentro do conjunto E ”.

A partir dessa resposta, o professor concluiu juntamente com a turma que o conjunto dos números naturais não é completo, pois existe um natural que não é elemento separador de um corte de números naturais. Os alunos completaram no material o seguinte quadro para sintetizar essa conclusão:

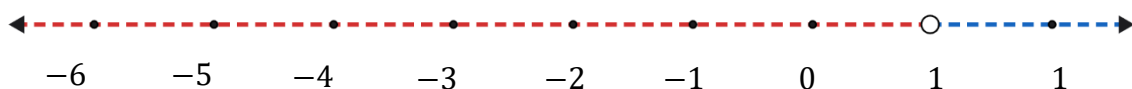
² Nos exemplos, destacaremos em azul as respostas dos alunos.

Todo número natural é elemento separador de um corte de números naturais, e todo corte de números naturais tem um elemento separador natural.

O próximo conjunto a ser analisado foi $\mathbb{Z}$ e, ao contrário de $\mathbb{N}$, este possui infinitos elementos menores que 1, logo não apresentaria a mesma “falha” que o conjunto anterior. Dito isso, o professor pediu para que os alunos resolvessem os exemplos que constam no material para que pudessem se familiarizar com o conceito de cortes de números inteiros. Os exemplos eram os seguintes:

Exemplo: siga o modelo acima e descreva os seguintes cortes de números inteiros.

a)



Elemento separador: 1

Elementos do conjunto E : Todos os números inteiros menores que 1.

Elementos do conjunto D : Todos os números inteiros maiores que 1.

b)



Elemento separador: 0

Elementos do conjunto E : Todos os números inteiros negativos.

Elementos do conjunto D : Todos os números inteiros positivos.

Em seguida os questionou: “é possível definir um corte ao redor de qualquer número inteiro?” Os alunos responderam que sim, e o professor pôde seguir com os questionamentos:

Professor: “e qualquer corte de números inteiros possui elemento separador inteiro?”

Rapidamente, os alunos responderam de forma positiva. Então o professor apresentou o seguinte corte:

Aluno B: “Vamos observar então o corte onde E é o conjunto de todos os números inteiros cujo dobro é menor que 3, e o conjunto D é formado por todos os inteiros cujo dobro é maior que 3. Qual o elemento separador desse corte?”

O professor ilustrou o corte no quadro enquanto os alunos pensavam, e, surpreendentemente, um aluno respondeu:

Aluno C: “Seria o 1,5?”

O professor confirmou e acrescentou o elemento separador à ilustração no quadro e perguntou: “esse número é inteiro?”, a turma respondeu negativamente, e o professor concluiu, juntamente com eles, que existem cortes de números inteiros que não possuem elemento separador inteiro, isto é, $\mathbb{N}$ não é completo. Assim, foi preenchido o seguinte quadro:

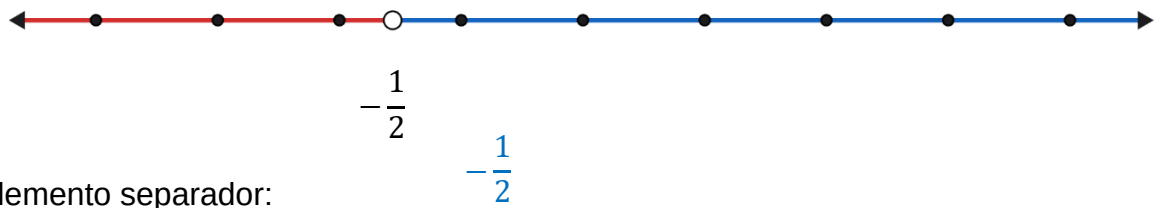
Todo número inteiro é elemento separador de um corte de números inteiros, e todo corte de números inteiros tem um elemento separador inteiro.

Logo após, a atenção dos alunos foi direcionada ao conjunto dos números racionais. A conclusão de que $\mathbb{N}$ não é completo partiu do fato de que não existe nenhum número inteiro entre 1 e 2, assim como não há nenhum inteiro entre qualquer número e seu sucessor, porém, nos racionais não há esse problema, já que esse conjunto é denso, e os alunos já dominavam o conceito da densidade de $\mathbb{Q}$, pois tinham estudado as características de cada conjunto numérico no bimestre anterior.

De forma semelhante, os alunos resolveram os exemplos que estavam no material, para conhecerem o conceito de cortes de números racionais. Os exemplos eram os seguintes:

Exemplo: siga o modelo acima e descreva os seguintes cortes de números inteiros.

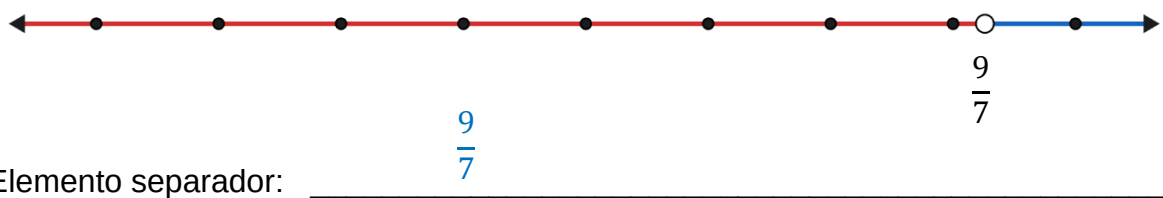
a)



Descrição do conjunto E : Todos os números racionais menores que $-\frac{1}{2}$.

Descrição do conjunto D : Todos os números racionais maiores que $-\frac{1}{2}$.

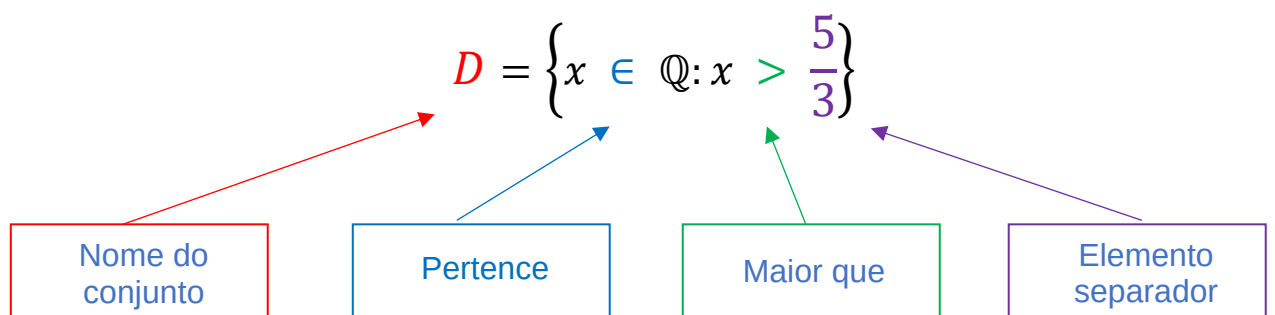
b)



Descrição do conjunto E : Todos os números racionais menores que $\frac{9}{7}$.

Descrição do conjunto D : Todos os números racionais maiores que $\frac{9}{7}$.

Para resolver esses exemplos, o professor completou, juntamente com a turma, o quadro abaixo:



Logo após, o professor perguntou: “como o conjunto dos racionais é denso, é de se pensar que seja completo, certo?”, os alunos concordaram, mas o professor deu o seguinte exemplo de corte:

Professor: “O corte onde E é o conjunto de todos os racionais cujo cubo é menor que 2, e D é o conjunto de todos os racionais cujo cubo é maior que 2”.

Os alunos tiveram mais dificuldade para visualizar esse conjunto, e o professor fez uma ilustração para tentar ajudar na compreensão, mas mesmo assim esse corte se mostrou um desafio. Então, o professor começou o último questionamento: “qual o elemento separador desse corte?”

Como esperado, os alunos não souberam responder com facilidade, então o professor tentou direcionar os estudantes:

Professor: *“Parece lógico pra vocês que o elemento separador seja o número cujo cubo é exatamente 2?”*

Os alunos concordaram e o professor continuou:

Professor: *“Segundo o que aprendemos no primeiro bimestre, o que significa perguntar ‘qual número multiplicado por ele mesmo é exatamente 2?’”*

Após pensar um pouco, um aluno respondeu:

Aluno A: *“Isso não é a raiz cúbica de três?”*

Assim, o professor perguntou novamente:

Professor: *“Então qual é o elemento separador do corte que eu mencionei?”*

E os alunos finalmente concluíram:

Aluno B: *“A raiz cúbica de 2”.*

Com essa conclusão, também ficou claro que o elemento separador do corte de números racionais descrito não é um número racional, mas sim irracional. Portanto, o conjunto dos racionais não é o completo, e o quadro abaixo foi completado:

Todo número racional é elemento separador de um corte de números racionais, e todo corte de números racionais tem um elemento separador racional.

Para evitar repetições, o professor argumentou para a turma que o que acontece com os racionais também ocorre com os irracionais, e estes não são

completos pelo mesmo motivo. Os alunos demonstraram estar convencidos desse fato.

A conclusão da aula se deu justamente depois da análise de todos os resultados obtidos. Como nenhum dos conjuntos numéricos conhecidos (pelos alunos) era completo, só restou concluir que $\mathbb{R}$ é o único conjunto numérico com as características desejadas, e a aula se encerrou com a seguinte

Proposição: existe apenas um conjunto numérico completo, o conjunto dos números reais, onde todo número real é elemento separador de um corte de números reais, e todo corte de números reais tem um elemento separador real.

Concluída a aula, o professor passou aos alunos o questionário do anexo IV, e abaixo seguem algumas respostas relevantes a cada uma das perguntas.

Pergunta 1: Para você, o que é um número real?

Aluno A: *“São todos os números que existem no mundo real”.*

Aluno B: *“Um conjunto de números completo”.*

Aluno C: *“É a junção completa de números completos”.*

Aluno D: *“Todos os números, sejam racionais, naturais, etc.”.*

Baseado nessas respostas, podemos ver que os alunos compreendem, mesmo que parcialmente, compreenderam a composição e a caracterização dos números reais. As repostas como a do aluno B, que citavam a parte da completude, foram a minoria, porém, a grande maioria das repostas foram como as dos alunos A e D, que explicitavam os conjuntos contidos em $\mathbb{R}$ ou que davam uma caracterização deste.

Pergunta 2: Que conjuntos numéricos estão envolvidos na construção dos números reais?

Aluno E: *“Todos, $\mathbb{N}$: naturais, $\mathbb{Z}$: inteiros, $\mathbb{Q}$: racionais e o $\mathbb{I}$: irracionais”.*

Aluno F: *“Racionais, Naturais, Inteiros e Irracionais”.*

A maioria das respostas foram semelhantes a estas, o que mostra que os alunos, além de conhecerem os conjuntos numéricos, também estão habituados com a sua simbologia.

Pergunta 3: O que é um número racional?

Aluno A: *“São todos os números que podemos colocar na forma de fração”.*

Aluno G: *“Frações e números com vírgula”.*

Pergunta 4: O que é um número irracional?

Aluno A: *“São números que não podemos colocar na forma de fração”.*

Aluno D: *“É um número não-periódico”.*

Aluno G: *“ π , ϕ , e , $\sqrt{2}$ ”.*

Com base nas repostas dessas duas perguntas, foi possível observar que os alunos compreendem minimamente as definições de número racional e de número irracional, além de conhecerem alguns irracionais mais famosos.

Pergunta 5: A utilização dos Cortes de Dedekind aumentou a sua compreensão a respeito dos conjuntos numéricos? Justifique.

Aluno C: *“Os Cortes de Dedekind me ajudaram na compreensão em relação aos conjuntos numéricos e suas variações”.*

Aluno H: *“Sim, porque através dos cortes podemos visualizar o lado ‘E’ e o lado ‘D’”.*

Aluno I: *“Sim, pois dessa maneira podemos saber qualquer corte da reta numérica”.*

Aluno J: *“Sim, para sabermos que só o conjunto dos números reais é completo”.*

A partir dessas respostas, podemos ver alguns pontos do assunto que puderam ser explorados pelos alunos durante a aplicação. A ideia de completude e de vizinhança (na forma dos conjuntos E e D) foi trabalhada pela primeira vez por eles e a recepção foi muito boa. Obviamente houveram respostas negativas à pergunta 5, mas estas, além de serem a minoria, não apresentavam justificativa.

2.2. APLICAÇÃO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Nessa abordagem, a proposta é determinar com precisão os diferentes tipos de números reais na reta numérica utilizando régua e compasso. Sendo assim, após apresentar a proposta aos alunos, o professor dividiu a turma em trios e solicitou com antecedência que cada grupo providenciasse uma régua e um compasso, no mínimo, para a realização da atividade.

A divisão da turma em grupos favoreceu o desenvolvimento do tema pois facilitou a interação e colaboração mútua dos estudantes, além de reduzir a quantidade de material necessário. Como esperado, nem todos os grupos providenciaram régua e compasso e, para remediar a situação, o professor forneceu compassos para os trios que não o tinham, e as régua forma compartilhadas por outros alunos. Já o material do professor consistiu em régua de madeira, compasso compatível com pincel, projetor multimídia e notebook, a atividade foi desenvolvida no quadro branco.

O desenvolvimento dessa proposta foi dividido em três etapas principais, demandando as seguintes quantidades de tempo, ressaltando que cada tempo de aula corresponde a 1 hora:

- **Introdução ao tema e apresentação dos instrumentos (2 tempos de aula)**
 - Apresentação do tema e dos objetivos.
 - Primeiros desenhos com régua e compasso.
 - História e aplicações dos instrumentos em diversas áreas.
- **Construções geométricas básicas (3 tempos de aula)**
 - Construções fundamentais que serão necessárias para o prosseguimento da atividade.
- **Conjuntos numéricos com régua e compasso (2 tempos de aula)**
 - Determinar cada tipo de número com precisão na reta real utilizando apenas os instrumentos trabalhados.

Total estimado de tempos de aula: 7 tempos

1º Momento – Introdução ao tema e apresentação dos instrumentos

No primeiro momento, o professor projetou no quadro o tema e os objetivos da aula. Em seguida, foram apresentados os instrumentos de desenho que seriam utilizados: a régua não graduada e o compasso. Nesse momento, foi citado pelo professor que as marcações das réguas não seriam utilizadas, já que as unidades de medida seriam criadas pelos próprios estudantes. Esse detalhe a respeito da régua gerou diversas dúvidas entre os alunos, tais como:

Aluno A': *"Então a gente vai ter que usar o lado da régua que não tem marcações?"*

Aluno B': *"E porque a gente vai precisar criar outra unidade se a régua já vem em centímetros?"*

Vale ressaltar que responder corretamente a esse tipo de pergunta evita que alguns alunos percam o interesse na tarefa por não verem sentido no que está sendo desenvolvido. Respostas com *"porque sim"* devem ser evitadas, e uma justificativa convincente é necessária. As repostas dadas na ocasião foram:

Professor: *"Vocês podem usar qualquer lado da régua, porém devem evitar medir as coisas com os centímetros que estão marcados nela".*

Professor: *"Os antigos matemáticos, principalmente os gregos, não tinham unidades de medida padronizadas para desenhar suas figuras geométricas, e a nossa ideia é desenvolver parte da Matemática tal qual eles fizeram, sem falar que, construindo sua própria unidade de medida, os seus desenhos terão um tamanho que melhor se ajusta ao papel que usaremos".*

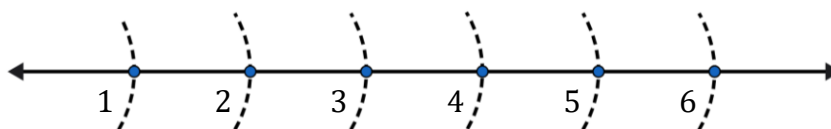
Sobre o compasso, percebeu-se um interesse bem maior por partes dos alunos no uso do instrumento, já que essa ferramenta não é comum no dia a dia deles. Aqui é importante enfatizar o nome de cada uma das pontas do compasso, para facilitar a comunicação e as instruções ao longo das construções.

Em seguida, o professor distribuiu folhas A4 para a turma, uma para cada aluno, e projetou instruções para os alunos construírem três circunferências de raios distintos com o compasso. Esse momento serviu para que os estudantes tivessem o primeiro contato com a ferramenta e comesçassem a desenvolver habilidade com ela. Como era esperado, boa parte da turma apresentou dificuldade para concluir o desenho, girar o compasso se mostrou uma tarefa difícil para alguns, e foi necessário

que o professor caminhasse pela sala auxiliando alguns alunos. Dicas como “segure a ponta seca fixa no lugar com uma mão e gire o compasso segurando apenas na ponta do cabo com a outra mão” e “tente colocar o peso da mão todo em cima da ponta seca e deixe a ponta de grafite correr de leve” se mostraram úteis.

Em seguida, o professor deu instruções para que os alunos construíssem sua própria unidade de medida em um espaço determinado da folha que receberam. Essa unidade é um pequeno segmento de reta com tamanho razoável, e os alunos o fizeram com o uso da régua sem grandes dificuldades. Nesse momento, o professor caminhou mais uma vez pela sala para verificar se as unidades determinadas pelos estudantes tinham um tamanho adequado.

Por fim, para finalizar esse primeiro momento da aula, o professor instruiu os alunos a construírem um segmento de reta e, usando a unidade determinada por eles, graduar esse segmento através de arcos traçados com o compasso. Essa construção, assim como todas as seguintes, foi reproduzida no quadro pelo professor usando sua régua de madeira e seu compasso específico, pois, apesar das instruções estarem projetadas no quadro, é interessante que os alunos possam ver os passos do desenho serem seguidos em tempo real.



3

Ao término desse momento, era esperado que os estudantes tivessem desenvolvido algumas habilidades, mesmo que mínimas, com régua e compasso, para que assim pudessem prosseguir para construções mais complexas. Para fechar o primeiro momento da aula, o professor projetou imagens e pequenos textos que ilustravam não só a história do desenho com régua e compasso e sua importância para o desenvolvimento da Matemática, mas como seus usos em engenharia, arquitetura e navegação nos dias de hoje.

2º Momento – Construções geométricas básicas

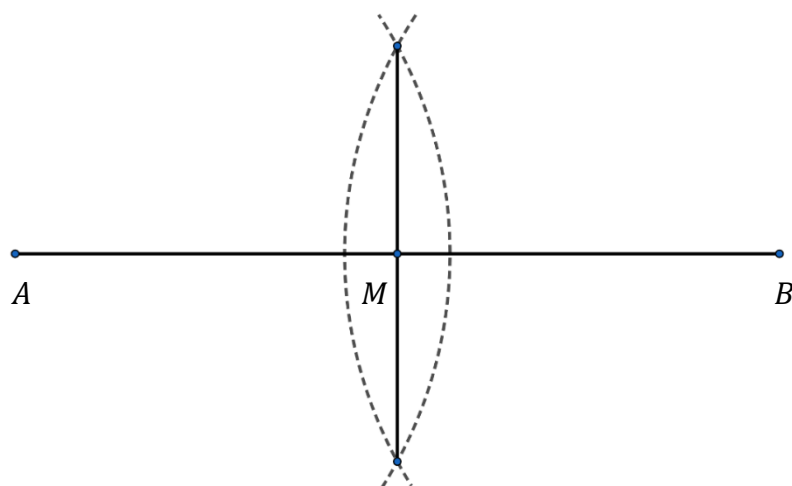
No segundo momento, o professor entregou para cada aluno o material de apoio do anexo V impresso, e projetou no quadro as construções básicas que constam

³ Os desenhos mostrados a seguir são representações dos desenhos feitos pelos alunos.

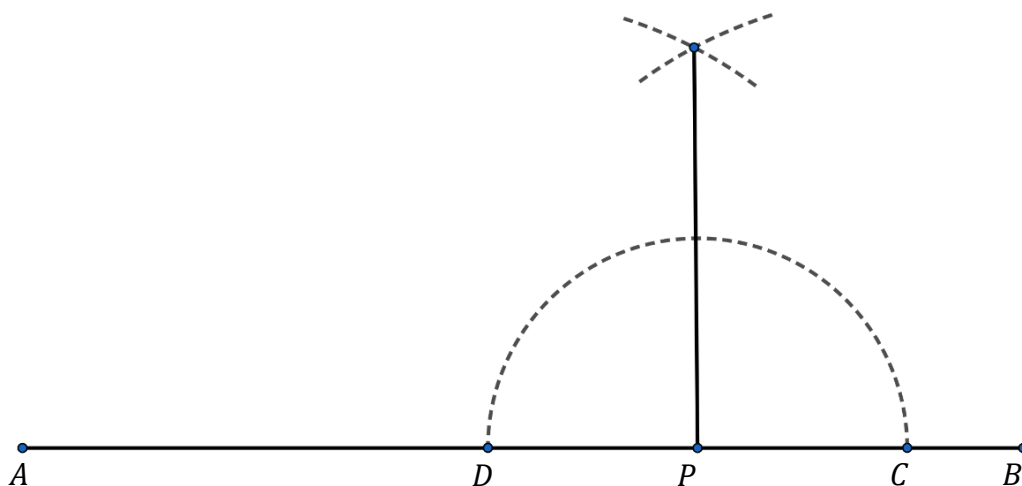
na sequência didática. Os passos foram reproduzidos pelo professor no quadro branco, utilizando sua régua e seu compasso específicos. A cada passo descrito, o professor deu tempo para que os alunos pudessem tentar reproduzi-lo em seus papéis utilizando seus materiais.

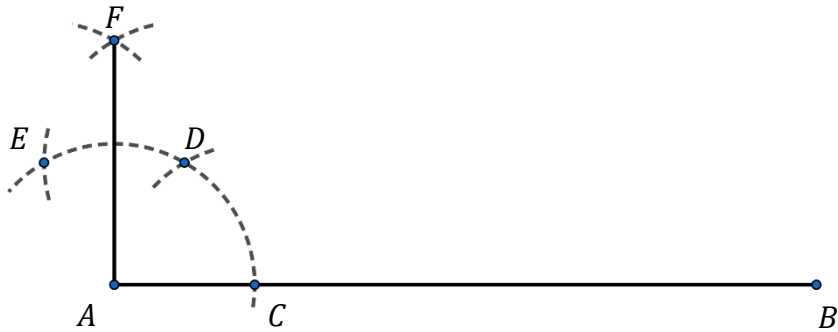
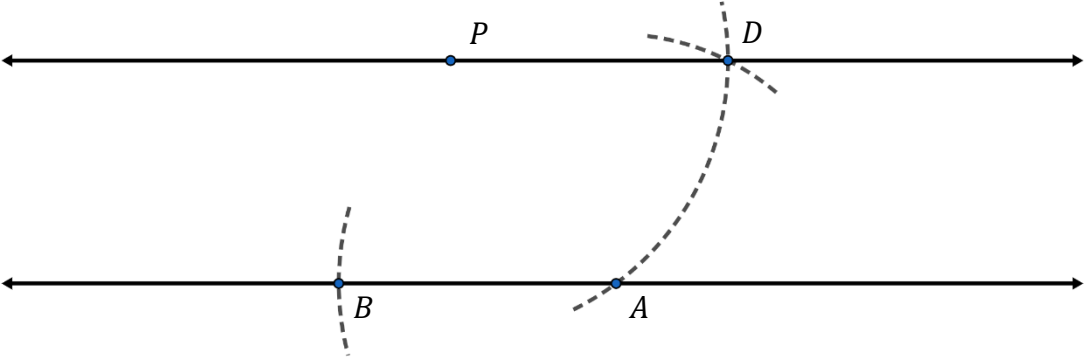
Siga os passos mostrados pelo professor e faça as construções abaixo com régua e compasso.

1º construção – Ponto médio de um segmento AB dado.



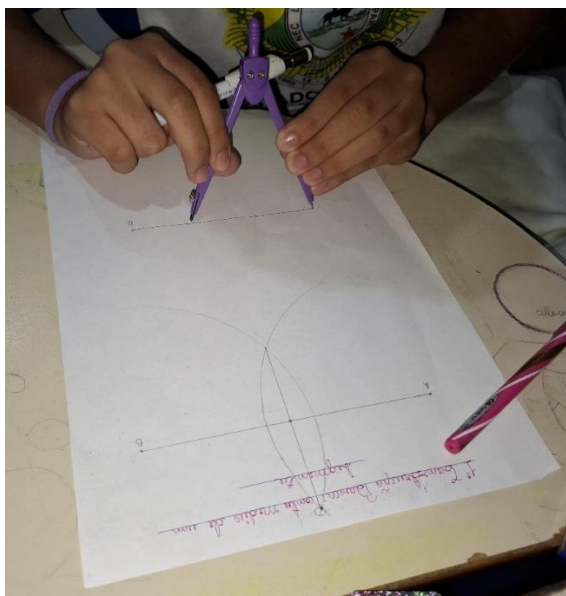
2º construção – Perpendicular a um segmento por um ponto dado



3º construção - Perpendicular a um segmento AB passando por A

4º construção – Reta paralela a uma reta por um ponto dado


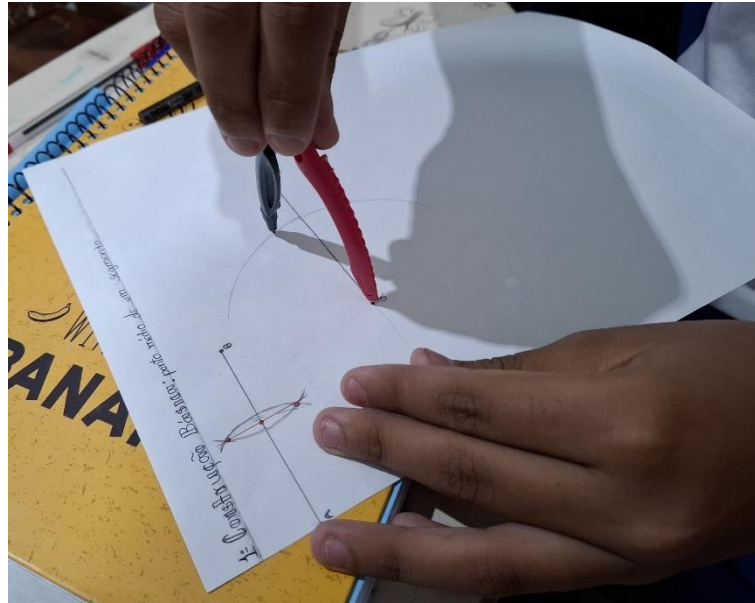
Abaixo temos algumas imagens das construções feitas pelos alunos:

Figura 1: Aluno desenhando 1



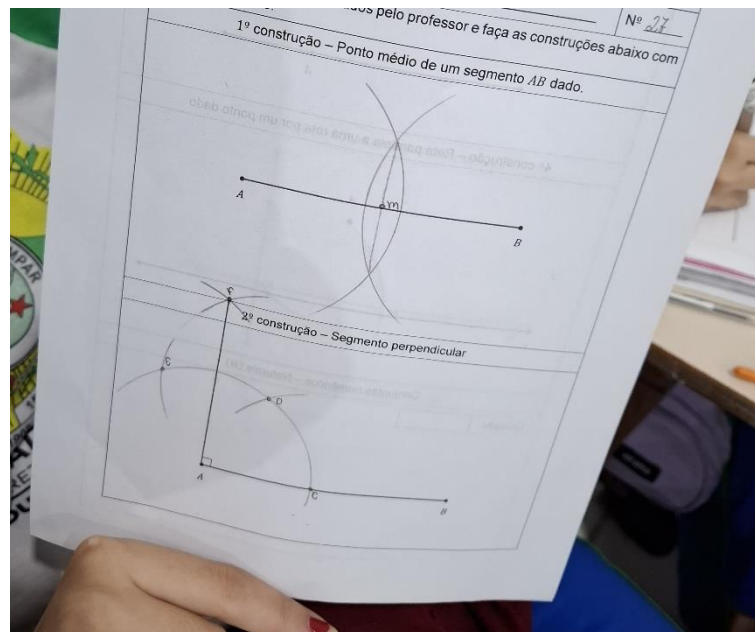
Fonte: o autor

Figura 2: Aluno desenhando 2



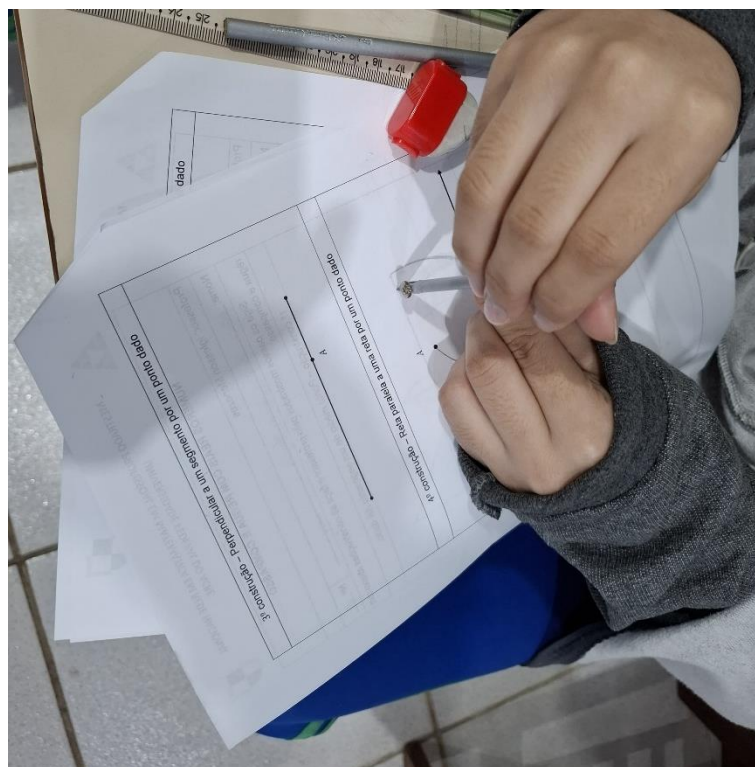
Fonte: o autor

Figura 3: Construções 1



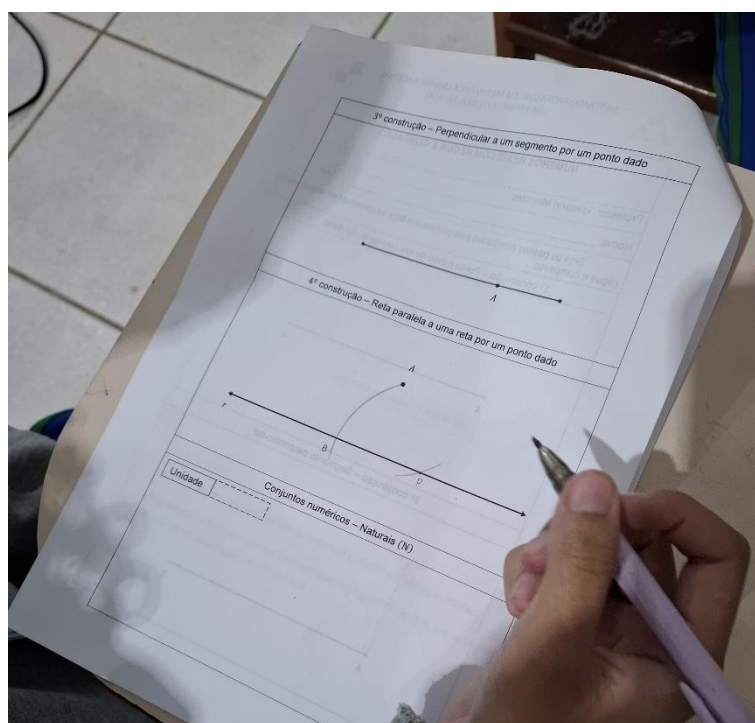
Fonte: o autor

Figura 4: Aluno desenhando 3



Fonte: o autor

Figura 5: Aluno desenhando 4



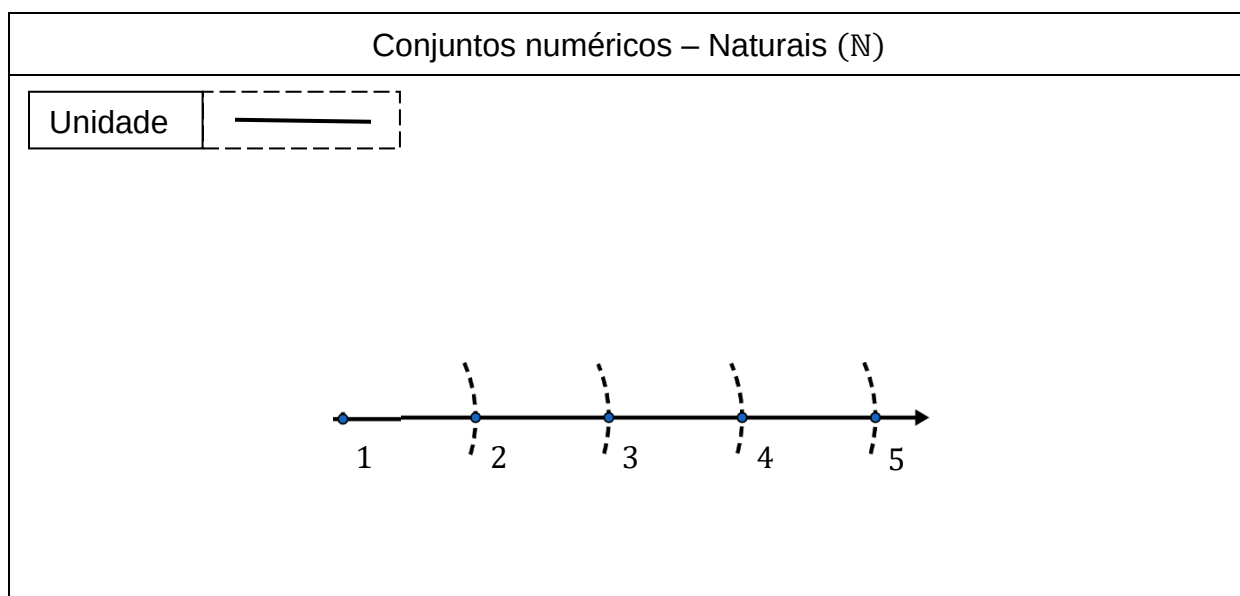
Fonte: o autor

Foi possível observar que cada construção demandou muito tempo para ser executada pelos alunos, pois, em geral, a maioria deles só conseguia executar a construção com o auxílio do professor, que precisou ir de grupo em grupo para ajudar a cada passo descrito. Uma sugestão para reduzir o gasto de tempo, seria dividir a turma em grupos maiores, como de quatro ou cinco pessoas, para diminuir a quantidade de grupos e para que assim o professor possa auxiliar mais alunos por vez, agilizando o processo.

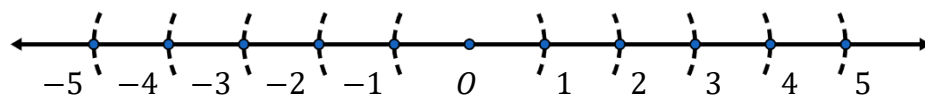
Ao término desse momento, os alunos estavam ainda mais hábeis com os instrumentos de desenho e conheciam as estruturas básicas que seriam usadas no momento seguinte.

3º Momento – Conjuntos numéricos com régua e compasso

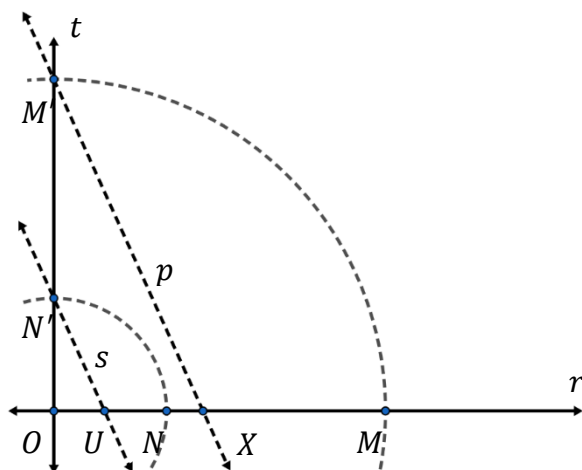
Seguindo ainda o mesmo procedimento, o professor projetou a construção dos conjuntos numéricos em sequência lógica, a começar pelos naturais, depois os inteiros, em seguida os racionais, e por fim alguns irracionais. Esse momento apresentou as mesmas complicações do anterior, os alunos levaram bastante tempo para completar os desenhos e o professor precisou auxiliá-los individualmente. Porém, apesar da lentidão, os estudantes não apresentam grandes dificuldades com nenhuma das construções.



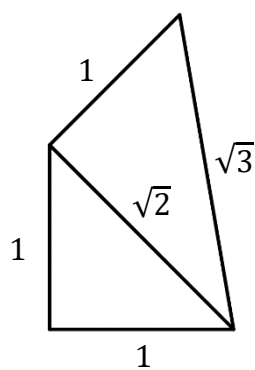
Conjuntos numéricos – Inteiros ($\mathbb{Z}$)

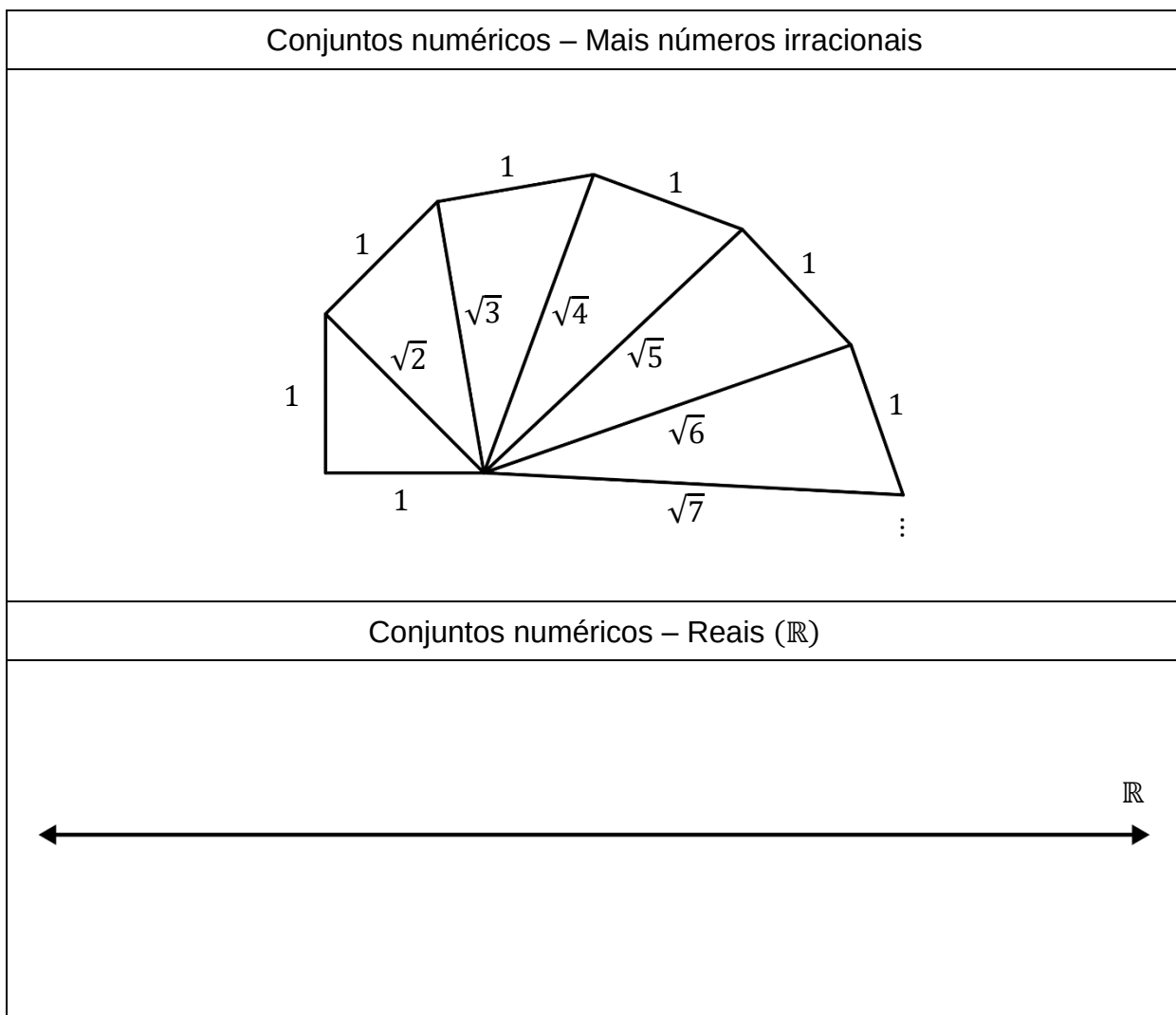


Conjuntos numéricos – Racionais ($\mathbb{Q}$)



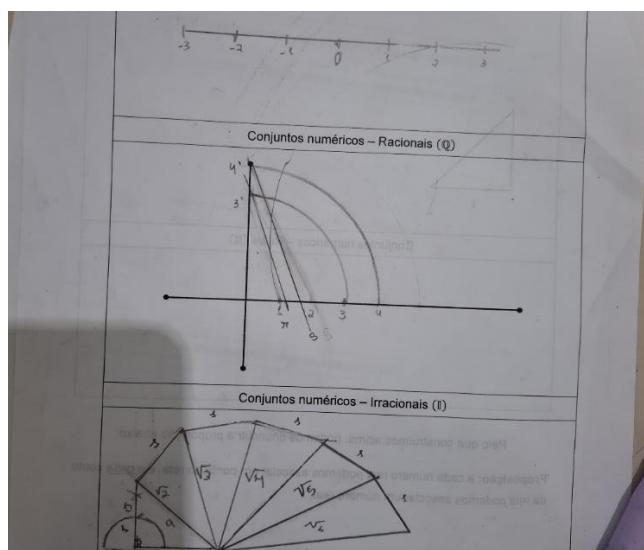
Conjuntos numéricos – Irracionais ($\mathbb{I}$)





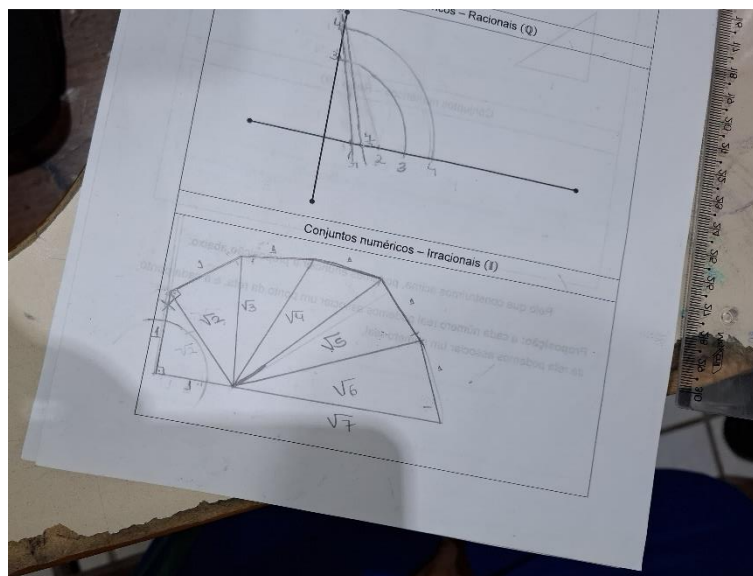
Abaixo, mais algumas construções feitas pelos alunos:

Figura 6: Construções 2



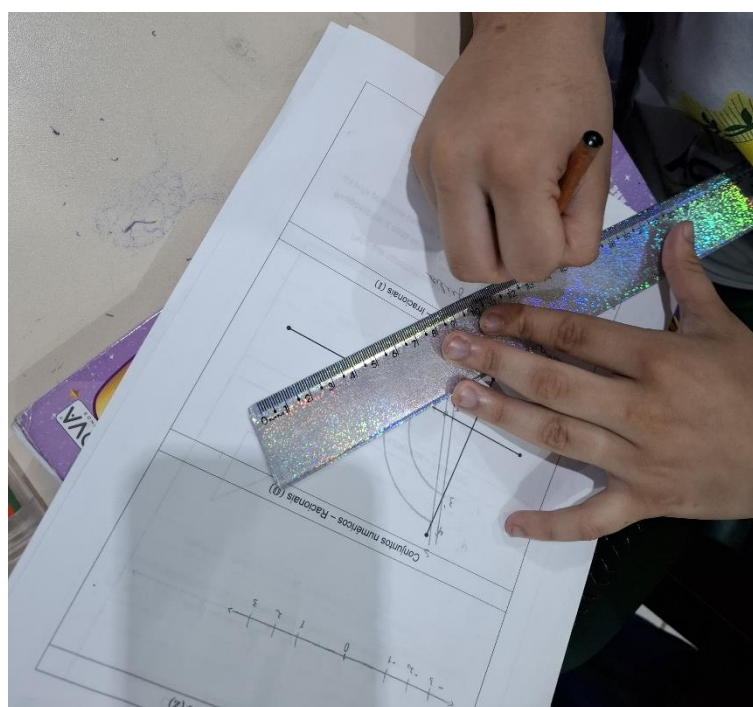
Fonte: o autor

Figura 7: Construções 3



Fonte: o autor

Figura 8: Aluno desenhando 5



Fonte: o autor

Concluídas todas as construções, o professor fez um fala final para sintetizar o objetivo da atividade, que era mostrar que todo número real pode ser marcado na reta real, além de que todo ponto da reta representa um número real. Para avaliar o aprendizado dos alunos, o professor passou o questionário que consta no anexo VI e algumas respostas estão descritas abaixo, assim como as do questionário anterior.

Pergunta 1: Para você, o que é um número real?

Aluno A': *"É um ponto na reta, e todo ponto da reta é um número real".*

Aluno B': *"Todos os números que existem no mundo".*

Aluno D': *"Todos os que existem dentro dos conjuntos numéricos".*

De forma semelhante à turma anterior, as respostas dos alunos mostram que eles compreendem de forma mínima a composição e a caracterização de $\mathbb{R}$.

As perguntas 2, 3 e 4, por serem iguais às do questionário anterior, tiveram respostas semelhantes, já que as turmas tiveram as mesmas aulas sobre conjuntos numéricos no 1º bimestre. Portanto, iremos omiti-las aqui.

Pergunta 5: As construções com régua e compasso aumentaram a sua compreensão a respeito dos conjuntos numéricos? Justifique.

Aluno A': *"Sim, porque com as aulas, além de aprender como fazer as construções, aprendi a fazer as formas geométricas de cada conjunto, aplicando meu conhecimento sobre eles".*

Aluno C': *"Sim, ajudaram a medir e usar a amplitude em diferentes formas geométricas".*

Aluno E': *"Sim, pois me mostrou mais ainda a infinidade dos números".*

Aluno F': *"Sim, ficou melhor de compreender os conjuntos numéricos".*

Pelas respostas dos alunos, a aplicação da construção geométrica serviu para apresentar novas formas de se estudar a Matemática, sobretudo a geometria. Também, ao construir alguns números manualmente usando as ferramentas de desenho, os alunos tiveram uma ideia mais visual sobre a infinidade dos números reais. Por fim, essa abordagem permite dar um caráter mais prático à matemática, onde se aplicam vários conceitos que já foram aprendidos pelos alunos (como retas paralelas, perpendiculares e ângulos) nas construções feitas por eles.

3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Barbosa (2002), “as sequências didáticas são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, sendo organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos”.

Tendo em vista que as construções dos números reais propostas neste trabalho envolvem conceitos algébricos abstratos e construções com régua e compasso, que até então são desconhecidos pelos alunos, a organização e o seguimento de sequências lógicas e intuitivas são importantes aliadas, pois, além de permitir que o professor organize e planeje as aulas de forma mais eficiente, auxilia na identificação de dificuldades e avaliação do aprendizado. Assim sendo, “as sequências didáticas servem, portanto, para dar acesso aos alunos a prática de linguagem novas ou dificilmente domináveis” segundo Schenuwly e Dolz (2004).

Nesse sentido, a sequência didática é uma ferramenta essencial para o processo de ensino e aprendizagem, visto que, estando os conteúdos organizados e bem estruturados, possibilita a aprendizagem mais eficiente e significativa.

Dito isto, nos anexos I e II constam as duas sequências didáticas que apresentamos como produto educacional, e nos anexos III e V constam seus respectivos materiais de apoio. Com elas, espera-se que seja possível reproduzir as aulas planejadas e relatadas nesse trabalho, em salas de aula de outras escolas, de modo a cada vez mais aproximar a matemática do ensino básico com a matemática do ensino superior, despertando o interesse e a curiosidade dos alunos para o estudo dos números reais.

4. CONCLUSÕES

Neste tópico iremos discutir os resultados obtidos da aplicação dessas abordagens em sala de aula. Para melhor organização, separaremos nossa discussão em dois subtópicos.

4.1. RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

Essa construção apresentou muitas vantagens, dentre as quais podemos citar a possibilidade de explorar conceitos como conjuntos, intervalos e as características particulares de cada tipo de número (naturais, inteiros, racionais e irracionais). Além disso, essa construção é relativamente rápida, demandando pouca carga horária para ser aplicada, o que é bastante conveniente no contexto das salas de aula da educação básica.

Durante a aplicação, observou-se que a estrutura de cortes despertou a curiosidade dos alunos por apresentar uma maneira nova e nada convencional de se determinar um número real. Em virtude do assunto ter sido apresentado de maneira lenta e gradual, foi possível envolver a maior parte dos alunos na explicação, e quando estão entendendo, eles sentem mais vontade de participar, responder às perguntas em voz alta e de preencher o mais rápido possível os exemplos presentes no material que receberam. Esse comportamento demonstra um certo espírito competitivo que, quando usado na sala de aula para motivar os alunos a aprender, é sempre bem-vindo.

O envolvimento da turma também se deve ao fato de o tema dos cortes de números reais ter sido apresentado seguindo a sequência lógica dos conjuntos numéricos, onde foram explorados apenas os cortes de números naturais e depois de números inteiros, que se mostraram de fácil compreensão. Encontrar o corte determinado por um número inteiro ou mostrar o elemento separador de um corte de inteiros foi uma tarefa até divertida para os alunos, e eles conseguiram executá-las sem grandes dificuldades.

O primeiro desafio, de fato, ocorreu quando os estudantes foram questionados se o corte de números inteiros (E, D) , onde E é o conjunto dos inteiros, cujo dobro é menor que 3, possuía elemento separador inteiro. Esse questionamento demandou um tempo relativamente maior para ser respondido do que qualquer outro que tinha sido feito até então. Porém, como foi dito, um aluno conseguiu encontrar a resposta

correta, e falou para a turma que o elemento separador desse corte, o número 1,5, não era inteiro.

Ao entrar no tópico sobre cortes de racionais, os alunos apresentaram mais dificuldade de acompanhar, porém se mantiveram concentrados, até que foi levantado o questionamento a respeito do elemento separador do corte (E, D) , onde E é o conjunto de todos os racionais cujo cubo é menor que 2. Nesse momento, os alunos levaram um bom tempo para responder e precisaram de ajuda do professor. Quando finalmente um aluno encontrou a resposta, a construção pôde ser concluída.

Obviamente, houve alunos que rejeitaram a proposta dos cortes. As razões para isso são as mais variadas, mas podemos destacar a complexidade que essa construção apresenta em suas fases finais, o que pode levar alguns estudantes a perderem o interesse. Para resolver ou amenizar esse problema, é possível sugerir uma abordagem mais dinâmica dessa construção, como o uso do *Geogebra*, ou organizar a sala em grupos e propor uma competição para estimulá-los a resolver os exemplos ou responderem aos questionamentos mais rapidamente.

Por fim, da aplicação em sala de aula, pode-se concluir que a construção dos números reais através dos cortes de Dedekind foi bem-sucedida, e que foi atingido o objetivo de aproximar a matemática do ensino básico a do ensino superior. Ressalta-se que os materiais apresentados neste trabalho (tanto a sequência didática quanto o material de apoio) podem ser modificados ou aperfeiçoados para atingir públicos-alvo diferentes, ficando a critério dos docentes do ensino básico.

4.2. RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

O principal ponto positivo dessa construção é o fato de ela ser prática, permitindo que os alunos possam manusear ferramentas em desuso no ensino básico. No primeiro momento, os alunos se mostraram bastante curiosos para manusear o compasso, a fim de que fizessem circunferências em seus cadernos.

A curiosidade dos estudantes aumentou quando o professor citou as utilidades que a régua e o compasso tiveram ao longo da história, o que gerou um alto engajamento da turma nas atividades propostas. Quando os desenhos começaram, notou-se uma grande dificuldade por parte dos alunos em manusear o compasso. Isso fez com que o professor gastasse muito tempo ajudando aos alunos, e perdesse

grande parte do tempo da aula. Esse foi justamente o principal ponto negativo dessa construção: o tempo.

No contexto das salas de aula da educação básica, tempo é um recurso precioso, pois a carga horária da disciplina de matemática é totalmente preenchida com as demandas da escola como o plano de curso, projetos, preparação para avaliações externas. Por isso, a aplicação de uma construção dos números reais como essa deve ser bem planejada e bem alinhada com o plano de curso, para que não haja prejuízo no cronograma da disciplina.

Outro desafio encontrado foi a falta de material, visto que alguns dos alunos não conseguiram as ferramentas necessárias. Foi um problema que o professor precisou resolver, reunindo a turma em grupos e disponibilizando seu próprio material.

Por fim, a sequência didática apresentada para essa construção visa auxiliar o professor da educação básica que deseja aplicar essa abordagem para os seus alunos. Ademais, é importante lembrar que ela está sujeita a alterações e adaptações para se adequar à realidade de cada escola, e que nela há links de vídeos que devem auxiliar o professor a praticar as construções propostas.

4. REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Gleison Ricardo Roza de. **Produto educacional: construindo uma atividade interativa de matemática financeira com a plataforma Geogebra**. PROFMAT, Universidade Federal de Roraima, 2024.

ARAÚJO, Gleison Ricardo Roza de. **Produto educacional: explorando juros com Geogebra**. PROFMAT, Universidade Federal de Roraima, 2024.

BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a geometria fractal: para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Autêntica, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Ática, 2008.

MOMO, Luan Felipe. **Números complexos aplicados na resolução de circuitos elétricos básicos de corrente alternada: uma proposta de sequência didática para o ensino médio e cursos técnicos**. PROFMAT, Universidade Federal do Acre, 2023.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função**. Autêntica Editora, 2021.

SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

5. ANEXOS

ANEXO I. SEQUÊNCIA DIDÁTICA: CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA		
ESCOLA:	PROFESSOR(A):	
COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA	ANO/SÉRIE:	TURMAS:
COORDENADOR(A):	CARGA HORÁRIA: 2 h/a e 30 min	PERÍODO DE EXECUÇÃO:

OBJETIVOS/CAPACIDADES (Competências amplas do Componente)	
• Conhecer o conceito de Cortes de Dedekind; • Compreender as diferenças entre os cortes de diferentes tipos de números; • Determinar o elemento separador de um corte; • Reconhecer o conjunto dos números reais como o único conjunto numérico completo.	
CONTEÚDOS (O que é preciso ensinar explicitamente ou criar condições para que os alunos aprendam e desenvolvam as capacidades que são objetivos)	
HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
• Retomada dos conceitos de números naturais, números inteiros e números racionais; • Reconhecimento da existência de números irracionais; • Compreensão da ideia de conjunto dos números reais como resultado da união dos racionais com os números irracionais e mobilização dos conhecimentos construídos para a resolução de problemas.	• Números naturais, números inteiros e números racionais; • Números irracionais; • Números reais

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

(Descrição de situações de ensino e aprendizagem para desenvolver as habilidades)

Momento 1 – Conjuntos numéricos (30 min)

Nesse primeiro momento, o professor deve retomar o conteúdo dos conjuntos numéricos, que já foi estudado no 1º bimestre. Para isso, deixamos ao critério do professor a forma como essa retomada será feita, visto que ele já trabalhou esse conteúdo junto com a turma.

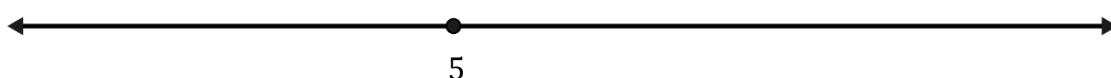
É importante, porém, que o professor enfatize as características, as descrições e os elementos de cada conjunto, pois esses pontos serão de grande utilidade para o seguimento da aula.

Momento 2 – Cortes de Dedekind (1 h/a)

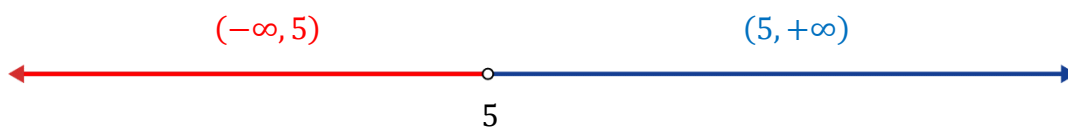
Após essa retomada, o professor deverá dividir a turma em duplas e entregar para cada dupla uma cópia impressa do material do anexo III. Esse material será utilizado como guia, e deve ser preenchido pelos alunos ao decorrer da aula.

O primeiro conceito a ser explorado nesse material é o de corte de números reais. No material há a formalização desse conceito, mas, para iniciá-lo, o professor deve proceder conforme abaixo:

Indicar um número real α qualquer (recomenda-se usar um número específico e evitar termos genéricos nesse momento) e marca-lo na reta real



Em seguida, deve-se destacar os dois intervalos determinados por esse número, no caso, $(-\infty, 5)$ e $(5, +\infty)$.



A partir daí, o conjunto à esquerda do número será chamado de E , e será representado pela cor vermelha, e o conjunto à direita do número será chamado de D , e será representado pela cor azul. Nessa disposição, cada número real

selecionado determinará um par de conjuntos **não vazios**, um E e um D , que simbolizaremos por (E, D) , e usaremos esses pares de conjuntos para identificar cada número.

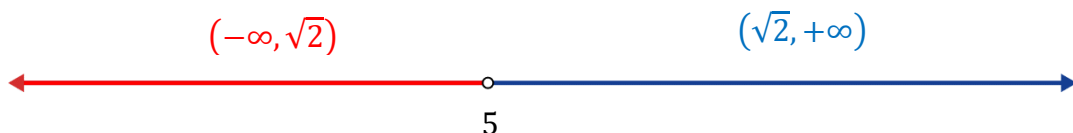
Nessa configuração, podemos dizer que cada número “separa” a reta em dois conjuntos: E e D . Esse par de conjuntos será chamado de corte de Dedekind. Agora, iremos observar as operações e propriedades dos números reais a partir dos cortes que eles determinam.

O professor deverá apresentar aos alunos o seguinte conceito:

Elemento separador: quando escolhemos um corte (E, D) , o número que o determina é chamado elemento separador.

Exemplos: abaixo listamos alguns exemplos de cortes de Dedekind com seus respectivos elementos separadores.

- i) O número -3 determina o corte (E, D) , onde E é o conjunto dos números menores que -3 e D é o conjunto dos números maiores que -3 .
- ii) O corte (E, D) ilustrado por



Possui $\sqrt{2}$ como elemento separador.

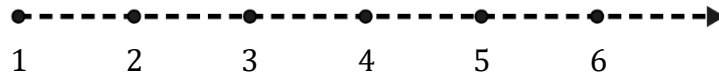
Com esse conceito em mãos, iremos provar que o conjunto dos números reais é **completo**, isto é, que a seguinte afirmação é verdadeira: **“todo número real é elemento separador de um corte de números reais, e todo corte de números reais possui elemento separador, e este é um número real”**. Além disso, iremos provar que essa afirmação só é verdadeira para o conjunto dos números reais e, como consequência, mostrar que este é o único conjunto numérico completo.

Momento 3 – Conjuntos numéricos por cortes (1 h/a)

O objetivo agora será descrever todos os conjuntos numéricos estudados até então usando a ideia dos Cortes de Dedekind. Caso seja necessário, o professor

pode fazer uma rápida revisão a respeito das características de cada conjunto e de seus elementos. Dito isto, iremos seguir a sequência lógica e começar com o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$).

Naturais: o conjunto $\mathbb{N}$ pode ser ilustrado da seguinte forma



lembrando que se trata de um conjunto que não denso e que é infinito apenas para a direita, sendo o número 1 seu menor elemento. Nesse momento, o professor pode pedir aos alunos que descrevam as características de cortes de números naturais, e também pode pedir que os próprios alunos criem exemplos desses cortes. Caso ache melhor, o professor pode apresentar os seguintes exemplos:

i) O corte (E, D) determinado pelo número real 5 é tal que

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

ou seja, o conjunto esquerda inicia-se no 1 e vai até o antecessor de 5 (o elemento separador), já o conjunto D inicia-se no sucessor de 5 e é infinito para a direita.

ii) O corte (E, D) , onde

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ e } D = \{9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

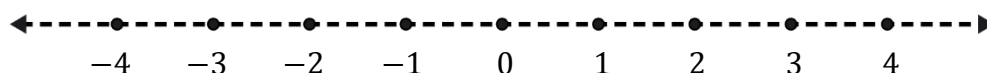
tem 8 como elemento separador.

Por fim, o professor deve perguntar para a turma: “qualquer número natural pode ser elemento separador de um corte de números naturais? Em outras palavras, se escolhermos qualquer número natural, sempre poderemos determinar um par de conjunto (E, D) **não vazios** com as características de corte?”

Espera-se que os estudantes respondam que não, já que, caso selecionássemos o número 1 como elemento separador, não haveria um conjunto

E não vazio de números naturais menores que 1. Com este último exemplo, vemos que o conjunto dos naturais não é completo, logo precisaremos expandir esse conjunto para tentar torná-lo completo.

Inteiros: o conjunto $\mathbb{Z}$, que pode ser ilustrado geometricamente por



possui infinitos elementos menores que 1 poderemos criar um corte (E, D) de números inteiros onde 1 é elemento separador, este corte será tal que

$$E = \{ \dots, -3, -2, -1, 0 \} \text{ e } D = \{ 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

Outros exemplos de cortes de números inteiros são

i) O corte (E, D) determinado pelo número inteiro -4 é tal que

$$E = \{ \dots, -8, -7, -6, -5 \} \text{ e } D = \{ -3, -2, -1, 0, 1, \dots \}$$

isto é, o conjunto E inicia-se no antecessor do -4 e possui todos os demais números negativos, já o conjunto D se inicia em no sucessor de -3 e possui todos os demais números a direita.

ii) O corte (E, D) onde

$$E = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} \text{ e } D = \{ 6, 7, 8, 9, \dots \}$$

tem 5 como elemento separador.

Porém, apesar de ser infinito tanto para a esquerda quanto para a direita, o conjunto $\mathbb{Z}$ também não é denso. Nesse momento, o professor deve fazer o seguinte questionamento aos alunos: “todo corte de números inteiros possui elemento separador em $\mathbb{Z}$?”. Após algum tempo, para reforçar o questionamento, o professor pode ilustrar o corte (E, D) onde E é o conjunto de todos os números inteiros cujo dobro é menor que 3, e D é o conjunto de todos os números inteiros onde o dobro é maior que três



Nessas condições, $E = \{\dots, -2, -1, 0, 1\}$ e $D = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, e observando a ilustração notamos que o elemento separador desse corte deve ser um número entre 1 e 2, ou seja, não é um número inteiro.

Após esse exemplo, e outros caso seja necessário, o professor deve concluir juntamente com a turma que **nem todo corte de números inteiros possui elemento separador inteiro**, em outras palavras, $\mathbb{Z}$ também não é completo.

Racionais: ao contrário dos conjuntos anteriores, $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso, isto é, entre dois números racionais sempre há um outro racional. Sendo assim, poderemos determinar o elemento separador do último corte que definimos, e este será o número $\frac{3}{2}$:



Vale ressaltar que a reta acima é uma mera ilustração do conjunto dos números racionais, já que este não completa a reta.

Em $\mathbb{Q}$ podemos determinar diversos cortes, como por exemplo:

- i) O corte (E, D) determinado pelo racional $\frac{5}{7}$ é tal que

$$E = \left\{x \in \mathbb{Q}: x < \frac{5}{7}\right\} \text{ e } D = \left\{x \in \mathbb{Q}: x > \frac{5}{7}\right\}$$

Obs.: é interessante que o professor explique detalhadamente esta notação caso deseje usa-la.

- ii) O corte (E, D) onde

$$E = \left\{x \in \mathbb{Q}: x < -\frac{3}{4}\right\} \text{ e } D = \left\{x \in \mathbb{Q}: x > -\frac{3}{4}\right\}$$

tem $-\frac{3}{4}$ como elemento separador.

Mais uma vez, o professor deve fazer a seguinte pergunta para os alunos: “todo corte de números racionais possui elemento separador em $\mathbb{Q}$?”. Da mesma forma, o seguinte exemplo pode ser usado para motivar a reflexão: o corte (E, D) onde E é o conjunto dos números racionais menores que π , e D é o conjunto dos números racionais maiores que π .

Nessas condições, o elemento separador desse corte deverá ser π , porém este não é um número racional. Com este contra exemplo, e com outros (caso seja necessário), o professor deve concluir que **nem todo corte de números racionais possui elemento separador racional**, ou seja, $\mathbb{Q}$ não é completo.

Reais: para finalizar, o único conjunto numérico onde todo corte possui elemento separador e todo número é elemento separador de um corte é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Vamos exemplificar, temos os cortes abaixo:

- i) O corte (E, D) determinado pelo número real ϕ é tal que

$$E = \{x \in \mathbb{Q}: x < \phi\} \text{ e } D = \{x \in \mathbb{Q}: x > \phi\}$$

- ii) O corte (E, D) onde

$$E = \{x \in \mathbb{Q}: x < \sqrt{7}\} \text{ e } D = \{x \in \mathbb{Q}: x > \sqrt{7}\}$$

tem $\sqrt{7}$ como elemento separador.

Por fim, podemos concluir que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é o único conjunto numérico completo.

Ao fim da aula, o professor irá avaliar os alunos aplicando o questionário do anexo IV.

VALORES ATITUDINAIS ENVOLVIDOS NAS ATIVIDADES/ SITUAÇÕES (O que se espera que o aluno desenvolva a partir	INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO (Mecanismos mais adequados para avaliar a evolução da aprendizagem)	RECURSOS (Meios necessários para o desenvolvimento das atividades/situações propostas)
--	--	---

das atividades/situações propostas)		
• Interação com o professor e com os colegas de sala; • Capacidade de concentração; • Compromisso; • Ser sucinto/objetivo na hora de fazer sua pergunta e dar feedback para que o professor saiba se a dúvida foi esclarecida.	A avaliação será feita por meio do questionário a respeito do tema apresentado presente no anexo IV que será distribuído para a turma.	• Quadro branco; • Apagador; • Projetor multimídia; • Material impresso.
DEVOLUTIVA DO COORDENADOR PEDAGÓGICO		
Assinatura do(a) coordenador(a) Assinatura do(a) professor(a)		

ANEXO II. SEQUÊNCIA DIDÁTICA: CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA		
ESCOLA:	PROFESSOR(A):	
COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA	ANO/SÉRIE:	TURMAS:
COORDENADOR(A):	CARGA HORÁRIA: 5h/a	PERÍODO DE EXECUÇÃO:

OBJETIVOS/CAPACIDADES (Competências amplas do Componente)	
Compreender, analisar e sintetizar retas e ângulos e polígonos regulares, utilizando dobraduras, instrumentos de desenho, de mensuração e <i>softwares</i> de geometria dinâmica na construção de retas paralelas, retas perpendiculares, mediatriz de um segmento de retas e bissetriz de um ângulo qualquer e polígonos regulares, aplicando esses conceitos na resolução de problemas diversos.	
CONTEÚDOS (O que é preciso ensinar explicitamente ou criar condições para que os alunos aprendam e desenvolvam as capacidades que são objetivos)	
HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
• Reconhecimento de semirreta e segmento de reta; • Identificação e construção de segmento de reta congruente a outro, usando régua não graduada e compasso; • Construção de retas paralelas e de retas perpendiculares, utilizando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica; • Identificação, determinação e construção do ponto médio e da mediatriz de um segmento de reta, utilizando régua e compasso.	• Razão, proporção e segmentos de reta; • Figuras semelhantes; • Polígonos semelhantes; • Semelhança de triângulos; • Construções geométricas; • Ponto médio de um segmento de reta; • Mediatriz de um segmento de reta; • Posições relativas entre duas retas coplanares.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES
(Descrição de situações de ensino e aprendizagem para desenvolver as habilidades)

Momento 1 – Apresentação dos instrumentos (1 h/a)

Nesse primeiro momento, serão apresentados aos alunos os instrumentos que serão usados nessas aulas: a régua não graduada e o compasso.

Régua não graduada: a régua que será utilizada é apenas um objeto que serve para traçar linhas retas, ela não tem nenhum tipo de marcação nem unidades de medida. É importante enfatizar nesse momento que os estudiosos da antiguidade não usavam régua graduada pois as unidades de medida remetem diretamente a situações e medidas reais, enquanto o objetivo dos matemáticos dessa época era de estudar o conhecimento pelo conhecimento, de uma forma abstrata.

Compasso: um objeto que serve para traçar arcos e circunferências, além de marcar um segmento numa reta com comprimento igual a outro segmento dado. O compasso é formado por duas pontas, a **ponta seca**, que determina o centro dos arcos ou das circunferências, e a **ponta de grafite**, que traça os arcos.



Em seguida, o professor mostrará aos alunos como desenhar um círculo utilizando o compasso, com o objetivo de torná-los práticos nesse movimento, seguindo o passo a passo abaixo:

1º Fixe a ponta seca no ponto que será o centro da circunferência;

2º Gire o compasso mantendo a ponta seca fixa no lugar, de modo que a ponta de grafite desenhe a circunferência.

Após duas ou três circunferências de raios variados desenhadas, será sugerido aos estudantes que tracem um curto segmento de reta que será usado como unidade de medida. Depois, devem traçar uma reta e nela marcar pontos consecutivos onde a distância entre eles é a unidade de medida determinada.

Esse exercício tem como finalidade tornar os estudantes práticos em marcar pontos em uma reta com o compasso e determinar segmentos com medidas específicas.

Momento 2 – Construções geométricas básicas (2 h/a)

Para este momento, será necessário que o docente tenha solicitado para a turma que trouxessem um compasso e uma régua cada. Prevendo que nem todos os alunos tenham condições de adquirir os materiais, o professor pode providenciar alguns desses objetos para empréstimo ou organizar a turma em grupos para que os estudantes compartilhem o material, o que é fortemente encorajado.

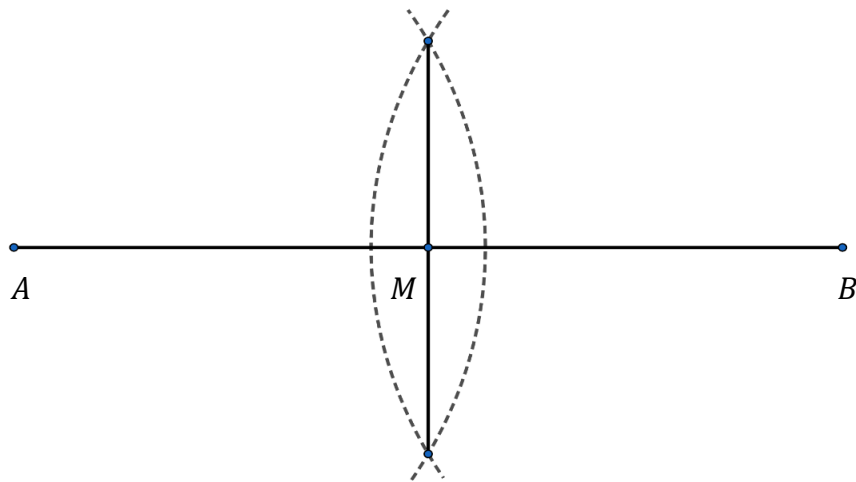
Uma motivação para o estudo das construções geométricas com régua e compasso pode ser um debate sobre a Matemática desenvolvida pelos antigos, que dependia quase que totalmente desses instrumentos, ou uma exposição a respeito da aplicabilidade dessas técnicas de desenho na engenharia ou na arquitetura.

Com a turma separada em grupos, o professor distribuirá folhas impressas com os títulos das construções que serão feitas e os espaços para os alunos desenharem (anexo V), e também, projetará as instruções com o uso do projetor multimídia. Abaixo estão as instruções para cada construção seguidas por links e QR codes para vídeos tutoriais:

Ponto médio de um segmento AB dado

1º Com a ponta seca em A e raio um pouco maior que a metade do segmento AB , traçamos um arco que corte AB conforme a figura. Em seguida, traçamos outro arco com mesmo raio, porém com a ponta seca em B ;

2º Trace um segmento que passe pelos dois pontos de intersecção dos arcos criados. Esse novo segmento intersectará AB em seu ponto médio M .



Link: <https://youtu.be/pTNVZTVff3o>.

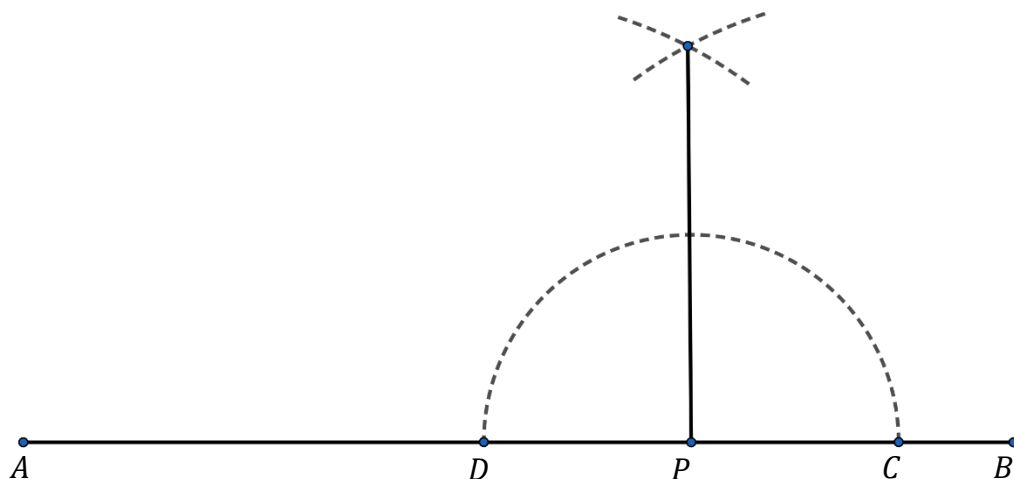
QR code:



Segmento perpendicular a um segmento AB passando por $P \in AB$ dado

1º Se P for ponto médio de AB , a construção anterior é suficiente, visto que o segmento traçado para encontrar o ponto médio é perpendicular a AB . Caso P não seja ponto médio de AB , coloque a ponta seca em P e trace um semicírculo que intersecte AB nos pontos C e D ;

2º Com a ponta seca em C e raio ligeiramente maior que $\overline{CD}$, trace um arco conforme o da figura abaixo. Em seguida faça o mesmo processo, porém com a ponta seca em D . O segmento que passa por P e pelo ponto de intersecção dos dois arcos traçados é perpendicular a AB .



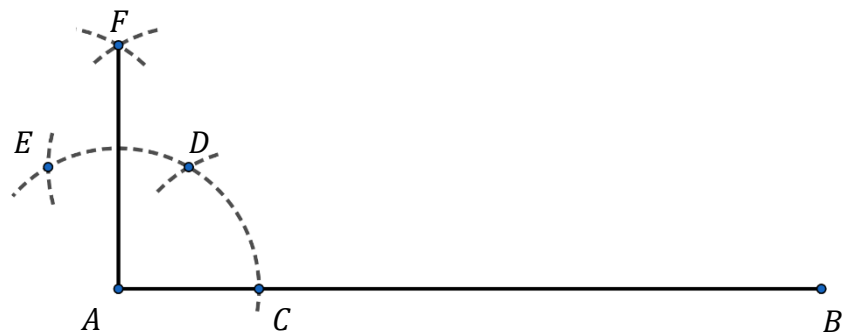
Link: <https://youtu.be/-sZtkjku4>.

QR code:



Segmento perpendicular a um segmento AB passando por A

- 1º Com a ponta seca em A e raio qualquer, trace um arco que intersecte AB no ponto C ;
- 2º Com a ponta seca em C e mesmo raio, trace um arco que corte o primeiro arco no ponto D .
- 3º Da mesma forma, com a ponta seca em D e mesmo raio, trace um arco que intersecte o primeiro no ponto E .
- 4º Com a ponta seca em D e depois em E , e mesma abertura, trace dois arcos que se cruzem no ponto F . O segmento AF é perpendicular a AB .



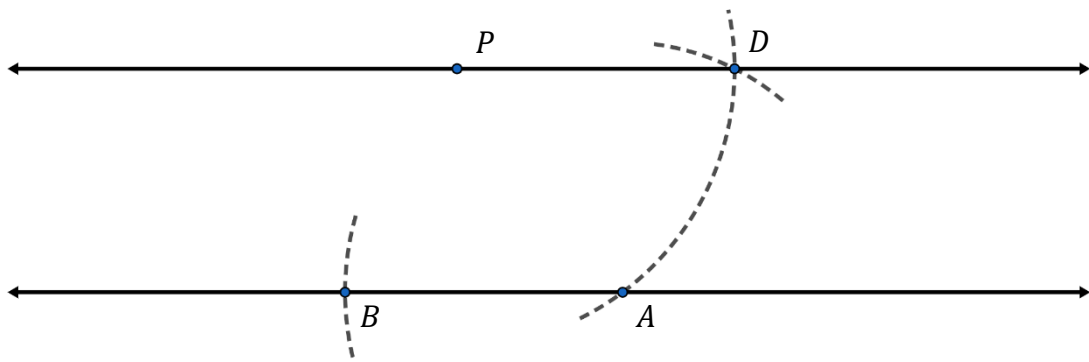
Link: <https://youtu.be/M0IPJOKZi0k>.

QR code:



Reta paralela a uma reta r passando por um ponto $P \notin r$ dado

- 1º Com a ponta seca em P e raio maior que a distância de P a r , trace um arco que intersecte r no ponto A ;
- 2º Com a ponta seca em A e raio $\overline{AP}$, trace um arco que corte r no ponto B .
- 3º Com o centro em A e raio $\overline{BP}$, trace um arco que intersecte o arco construído no passo 1º, e marque o ponto D nessa intersecção. A reta PD será a paralela a r que passa por P .



Link: <https://youtu.be/EqkUg2Nsg74>.

QR code:



Para cada construção descrita, o docente fará uma leitura compartilhada dos passos e os reproduzirá no quadro branco utilizando um compasso apropriado. Em seguida, será a vez dos estudantes tentarem reproduzi-las em folhas A4 ou papel milimetrado distribuídas pelo professor, enquanto este circulará pela sala de aula dando auxílio aos que precisem.

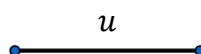
Ao final desse momento, espera-se que os alunos se familiarizem com as ferramentas de desenho e sejam capazes de executar construções simples.

Momento 3 – Construção dos conjuntos numéricos (2 h/a)

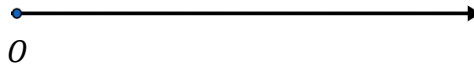
Para este momento, pode ser necessária uma breve revisão a respeito dos conjuntos numéricos, que foram estudados no 1º bimestre. A construção geométrica desses conjuntos seguirá a noção intuitiva, iniciando dos números naturais. Veja:

Números naturais ($\mathbb{N}$)

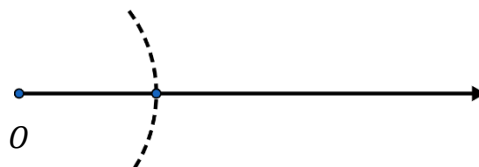
Para início, o professor pedirá para que os alunos determinem um segmento que terá a função de unidade (chamaremos sua medida de u), seu comprimento não deve ser nem tão pequeno a ponto de ser difícil de desenhá-lo ou distingui-lo nas construções posteriores, nem tão grande a ponto de torná-las as próximas estruturas a serem construídas desproporcionais.



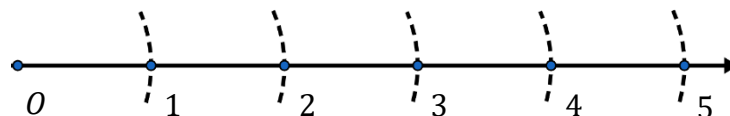
Em seguida, o professor deverá instruir os alunos a marcar o ponto O , e a partir dele traçar, para a direita, uma semirreta. Usando a régua, os alunos deverão fazer o desenho abaixo:



Com centro em O e abertura igual a u , os estudantes devem marcar um ponto sobre a semirreta, chegando ao desenho abaixo:



Esse ponto representará o número 1, e indicará a exata posição desse número na reta real (que está sendo construída). Por fim, com a ponta seca no ponto obtido no passo anterior e abertura do compasso ainda igual a u , os alunos marcarão o ponto que representa o número 2 e assim por diante, chegando ao desenho abaixo:



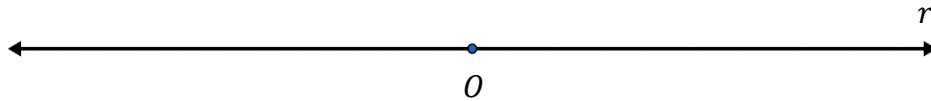
Recomenda-se que o professor peça aos alunos que marquem os dez primeiros pontos e, em seguida, argumente que, repetindo esses passos repetidas vezes, é possível determinar todos os números naturais na reta com precisão.

Números inteiros ($\mathbb{Z}$)

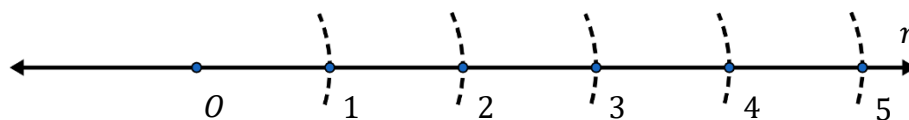
Apesar de ser possível obter a construção dos inteiros a partir da construção dos naturais, é recomendado que o professor instrua os alunos a iniciarem esta do zero, em um espaço separado da construção anterior.

Desta vez, o professor deverá orientar os alunos a traçar uma reta e batizá-la de r , esta será a reta suporte e terá função meramente ilustrativa na

construção. No “centro” da reta, eles marcarão o ponto O , que representará o número 0.



A partir daí, o aluno deve repetir todos os passos da construção dos naturais, a fim de marca-los do lado direito da reta r :



Agora, com a ponta seca em O e raio igual a u , os estudantes marcarão o ponto que representa o número -1 na reta r e, repetindo esse passo com o centro no ponto obtido, marcaremos o ponto que representa o -2 , e assim por diante:

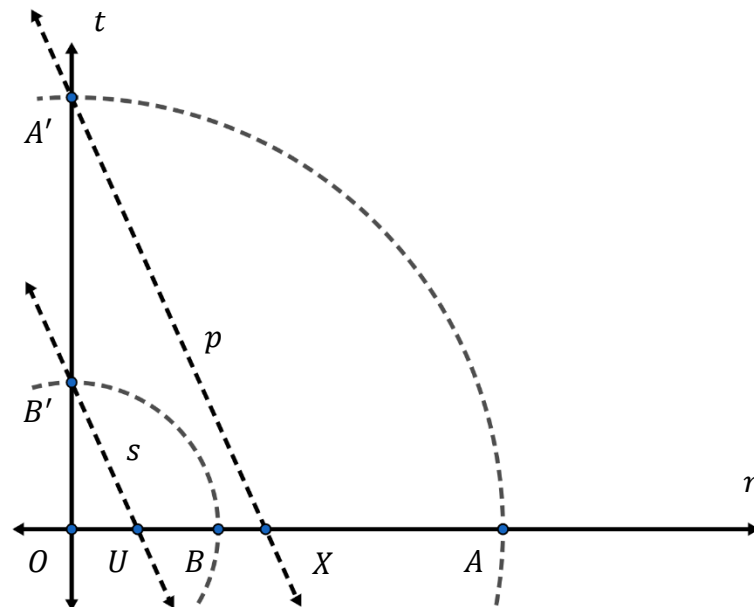


Números racionais ($\mathbb{Q}$)

Para essa construção, é importante enfatizar para a turma que um número racional é todo número que pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Tendo explicado isso, a construção será a seguinte:

- 1º Sejam A e B pontos tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. Traçamos uma reta t perpendicular à reta r e com origem no ponto O ;
- 2º Em t , marcamos os pontos B' , a uma distância b de O , e A' , a uma distância a de O ;
- 3º Por U e pelo ponto $A \in t$ traçamos uma reta s ;

4º Por $A' \in t$, traçamos a reta p , paralela a s . A intersecção de p com r será o ponto X tal que $\overline{OX} = \frac{a}{b}$.



Link: <https://youtu.be/u3peJQVHUHE>.

QR code:



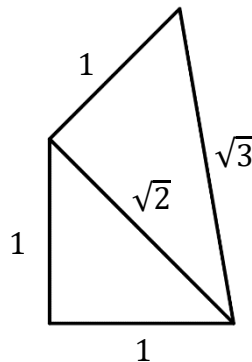
Números irracionais

A grande dificuldade de lidar com os irracionais está no fato de que não se pode dar uma descrição geral do que é um número irracional, que não dependa do próprio conceito de número racional. Podemos, no máximo, formular descrições, que não dependam dos racionais, para alguns tipos de irracionais, como por exemplo $a + b \cdot \sqrt{p}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ e $b \neq \sqrt{p}$, com $p \in \mathbb{N}$ primo. Um

irracional desse tipo pode ser representado com exatidão na reta r através da seguinte construção:

1º Em um espaço a parte, construímos um triângulo retângulo de catetos medindo u , e pelo que já mostramos, a hipotenusa será $\sqrt{2}$;

2º Usando essa hipotenusa como um cateto, construímos mais um triângulo retângulo cujo outro cateto também mede u . Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse novo triângulo medirá $\sqrt{3}$;

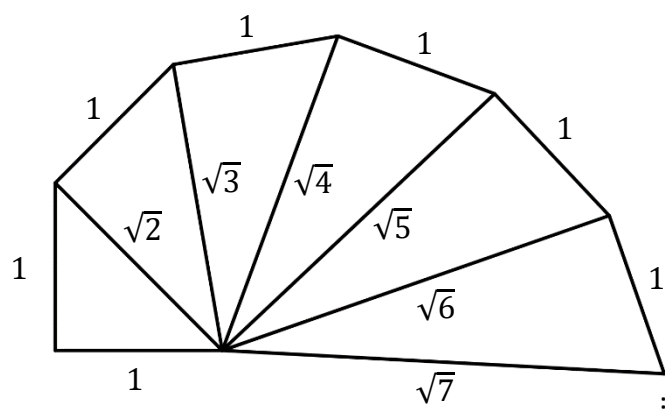


Link: https://youtu.be/wGPSdB_yv3M.

QR code:



3º Se repetirmos essa construção várias vezes, sempre construindo novos triângulos sobre a hipotenusa dos anteriores, usando esta como cateto, e o outro cateto medindo u , conseguiremos novas hipotenusas cujos comprimentos serão $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ..., e assim por diante, construindo assim segmentos que tenham medida igual a todas as raízes de números naturais maiores que 1, incluindo os números primos.



Obs.: As demais construções de números racionais são complicadas demais para alunos desse ano/série, portanto, fica a critério de cada professor apresentar ou não mais construções além destas.

Terminados esses desenhos, o professor deve argumentar que, como é possível construir com precisão todo tipo de número na real, então cada ponto da reta representa um número real e cada número real representa um ponto da reta.

VALORES ATITUDINAIS ENVOLVIDOS NAS ATIVIDADES/ SITUAÇÕES (O que se espera que o aluno desenvolva a partir das atividades/situações propostas)	INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO (Mecanismos mais adequados para avaliar a evolução da aprendizagem)	RECURSOS (Meios necessários para o desenvolvimento das atividades/situações propostas)
• Interação com o professor e com os colegas de sala; • Capacidade de concentração; • Compromisso; Ser sucinto/objetivo na hora de fazer sua pergunta e dar feedback para que o professor saiba se a dúvida foi esclarecida.	A avaliação será feita por meio do questionário a respeito do tema apresentado presente no anexo VI que será distribuído para a turma.	• Quadro branco; • Apagador; • Projetor multimídia; • Material impresso. • Régua de madeira; • Compasso de quadro branco; • Compassos.
DEVOLUTIVA DO COORDENADOR PEDAGÓGICO		

Assinatura do(a)
coordenador(a)

Assinatura do(a) professor(a)

ANEXO III. MATERIAL DE APOIO DA CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

Professor:	Turma:
Aluno(a):	Número:
Aluno(a):	Número:

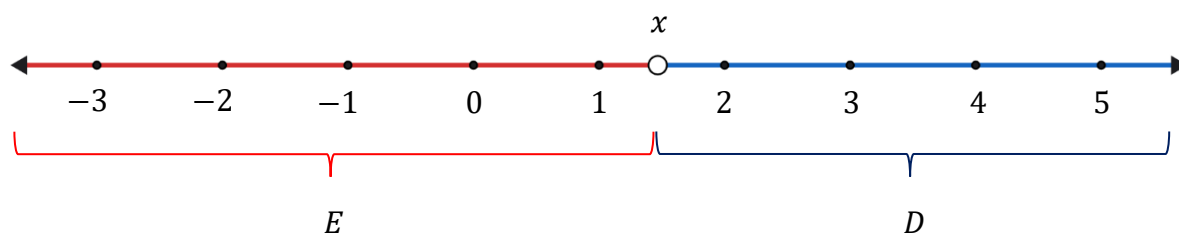
CORTES DE DEDEKIND

Corte de números reais: é um par de conjuntos **não vazios** determinado por um número real x que tem as seguintes características:

- O par formado por dois conjuntos: E e D .
- O conjunto E é **não vazio** e formado por todos os números menores que x
- O conjunto D é **não vazio** e formado por todos os números maiores que x .

Os nomes “ E ” e “ D ” vêm de “esquerda” e “direita”, respectivamente. Isso indica que todos os elementos do conjunto E estão à esquerda de x , enquanto os elementos de D estão à direita de x .

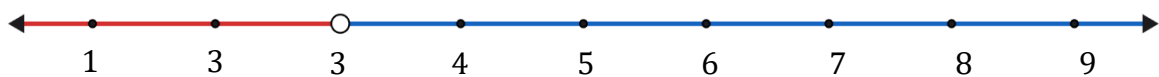
Veja a figura abaixo:



Elemento separador: o número real x que determina o corte é chamado de elemento separador.

Exemplo: siga o modelo abaixo e indique o elemento separador e cada corte, além de descrever seus conjuntos E e D .

d)

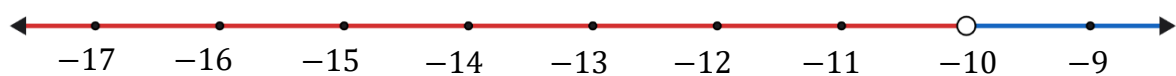


Elemento separador:

Conjunto E :

Conjunto D :

e)

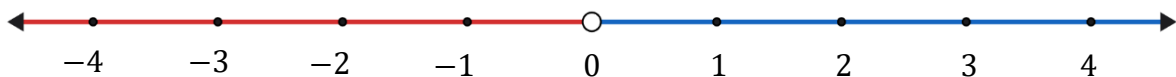


Elemento separador: _____

Conjunto E : _____

Conjunto D : _____

f)



Elemento separador: _____

Conjunto E : _____

Conjunto D : _____

Agora que já entendemos o conceito de cortes de Dedekind, vamos tentar provar que o conjunto dos números reais é o único conjunto numérico (dos que estudamos até agora) que é **completo**, isto é, vamos tentar mostrar que as afirmações abaixo são verdadeiras:

Todo número **real** é elemento separador de um corte de números **reais**, e todo corte de números **reais** tem um elemento separador **real**.

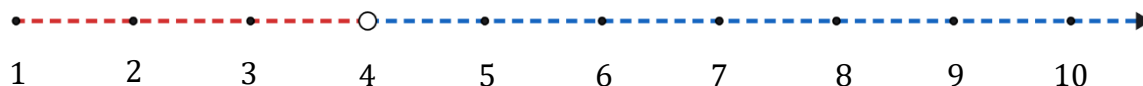
Para isso, vamos aplicar a ideia de cortes de Dedekind aos demais conjuntos numéricos.

Cortes de números Naturais ($\mathbb{N}$)

Nosso objetivo aqui será observar cortes (E, D) formados apenas por números naturais e, em seguida, mostrar que esse conjunto numérico não é **completo**. Mas antes, vamos escrever as afirmações que descrevem completude, porém usando números naturais, e depois verificar se são verdadeiras. Complete:

Todo número _____ é elemento separador de um corte de números _____, e todo corte de números _____ tem um elemento separador _____.

Vale lembrar que, para nós, o conjunto dos números naturais inicia no 1, e não tem nenhum elemento menor que 1. Agora, observe um corte de números naturais:



- O elemento separador é o número natural 4.
- O conjunto E , formado por todos os números naturais menores que 4, é tal que

$$E = \{1, 2, 3\}$$

- O conjunto D , formado por todos os números naturais maiores que 4, é tal que

$$D = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$$

Exemplo: siga o modelo acima e descreva os seguintes cortes de números naturais.

a)

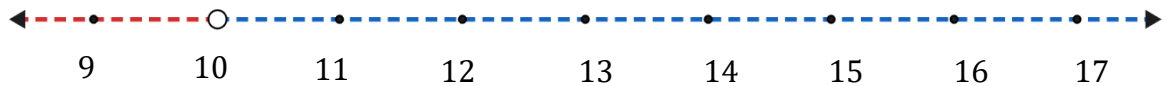


Elemento separador: _____

Elementos do conjunto E : _____

Elementos do conjunto D : _____

b)



Elemento separador: _____

Elementos do conjunto E : _____

Elementos do conjunto D : _____

Agora que já sabemos como são os cortes de números naturais, vamos verifica se este conjunto é completo. No espaço abaixo, desenhe e descreva o corte determinado pelo número natural 1:

Com base no último exemplo, podemos afirmar que o conjunto dos números naturais é completo?

() Sim

() Não

Transcreva no espaço abaixo a frase que o professor indicará, que justifica sua resposta à pergunta anterior.

Cortes de números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Vimos que o conjunto dos naturais não é completo por não possuir elementos menores que 1, já os números possuem infinitos elementos com essa característica. Vamos agora julgar se $\mathbb{Z}$ é completo. Complete as frases abaixo e vamos verificar se são verdadeiras:

Todo número _____ é elemento
separador de um corte de números _____, e todo
corte de números _____ tem um elemento
separador _____.

Nos inteiros, não há frações ou números com vírgula, apenas os negativos, positivos e o zero, assim como estudamos anteriormente. Sendo assim, vamos observar um corte de números inteiros:



- O elemento separador é o número inteiro -2 .
- O conjunto E , formado por todos os números inteiros menores que -2 , é tal que

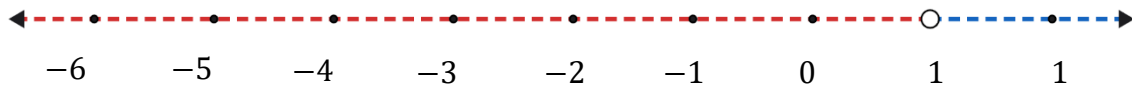
$$E = \{\dots - 8, -7, -6, -5, -4, -3\}$$

- O conjunto D , formado por todos os números inteiros maiores que -2 , é tal que

$$D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Exemplo: siga o modelo acima e descreva os seguintes cortes de números inteiros.

c)



Elemento separador: _____

Elementos do conjunto E : _____

Elementos do conjunto D : _____

d)



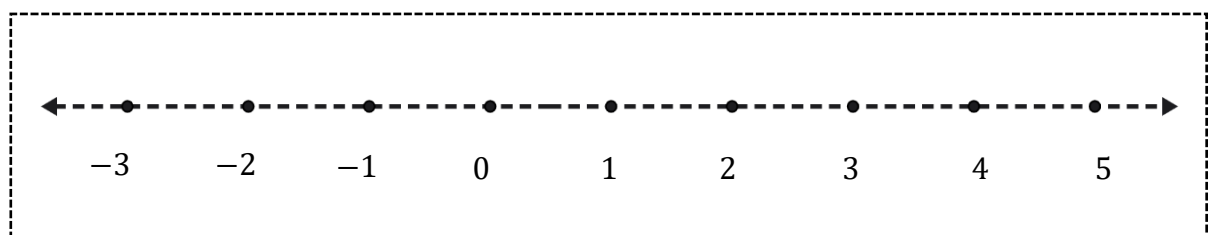
Elemento separador: _____

Elementos do conjunto E : _____

Elementos do conjunto D : _____

Com esses exemplos, vemos que os cortes de números inteiros são diferentes dos cortes de naturais, já que, nos inteiros, o conjunto E é infinito. Dito isto, vamos tentar descobrir se o conjunto $\mathbb{Z}$ é completo. No espaço abaixo, ilustre o corte descrito a seguir:

- E é o conjunto de todos os números inteiros cujo “dobro é menor que 3”.
- D é o conjunto de todos os números inteiros cujo “dobro é maior que 3”.



Qual o elemento separador do corte que você acabou de ilustrar?

Esse elemento separador é um número inteiro?

Com base no último exemplo, podemos afirmar que o conjunto dos números inteiros é completo?

() Sim () Não

Transcreva no espaço abaixo a frase que o professor indicará, que justifica sua resposta à pergunta anterior.

Cortes de números racionais ($\mathbb{Q}$)

Com base no que vimos, o conjunto dos inteiros não é completo, pois entre dois números inteiros consecutivos, 2 e 3 por exemplo, não há nenhum número inteiro. Porém, conhecemos um conjunto que tem a característica de ser **denso**, isto é, que entre dois números desse conjunto sempre há outro número. Este é o conjunto dos números racionais.

Estudamos anteriormente que não é possível listar os números racionais, já que entre dois deles sempre há outro. Essa característica parece ser o suficiente para chamar o conjunto de completo. Vamos analisar. Complete as frases abaixo:

Todo número _____ é elemento
separador de um corte de números _____, e todo
corte de números _____ tem um elemento
separador _____.

Agora, observe um corte de números racionais:



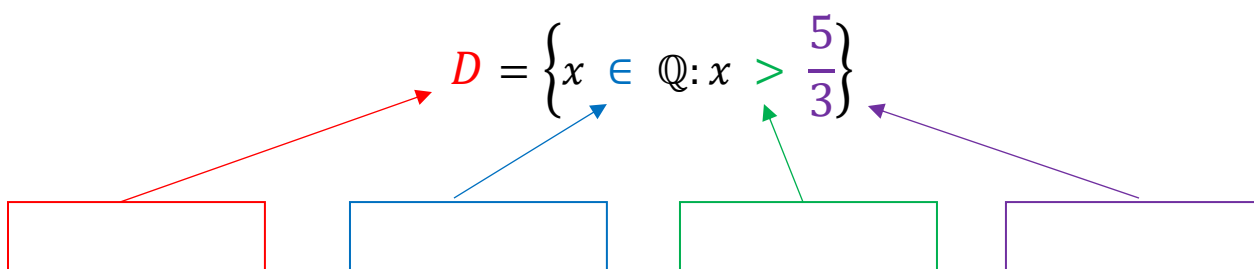
- O elemento separador é o número racional $\frac{5}{3}$.
- O conjunto E , formado por todos os números inteiros menores que $\frac{5}{3}$, é tal que

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x < \frac{5}{3} \right\}$$

- O conjunto D , formado por todos os números inteiros maiores que -2 , é tal que

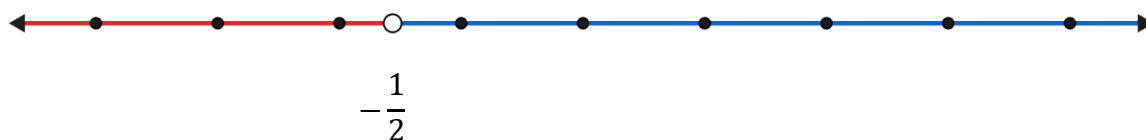
$$D = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x > \frac{5}{3} \right\}$$

Observe que a descrição dos conjuntos E e D ficou bem mais complicada. Abaixo, há um esquema que nos ajudará a entender essa descrição. Com a ajuda do professor, complete-o.



Exemplo: siga o modelo acima e descreva os seguintes cortes de números inteiros.

c)



Elemento separador: _____

Descrição do conjunto E : _____

Descrição do conjunto D : _____

d)



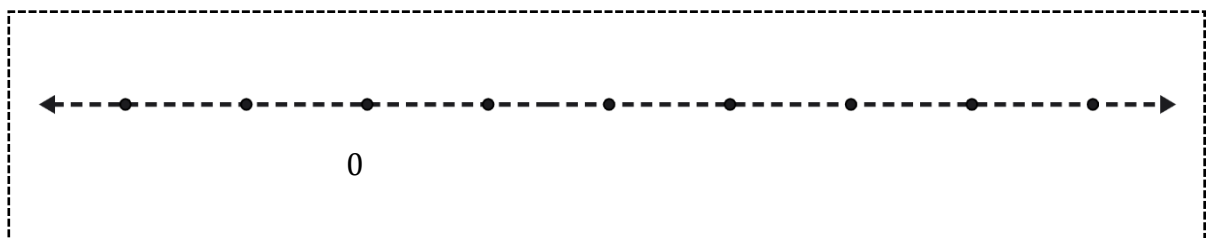
Elemento separador: _____

Descrição do conjunto E : _____

Descrição do conjunto D : _____

Da mesma forma que fizemos até agora, vamos analisar um exemplo e, através dele, concluir se $\mathbb{Q}$ é completo ou não. Ilustre o corte descrito abaixo no local indicado:

- E é o conjunto de todos os números racionais cujo “cubo é menor que 2”.
- D é o conjunto de todos os números racionais cujo “cubo é maior que 2”.



Qual o elemento separador do corte que você acabou de ilustrar?

Esse elemento separador é um número racional?

Com base no último exemplo, podemos afirmar que o conjunto dos números racionais é completo?

() Sim

() Não

Transcreva no espaço abaixo a frase que o professor indicará, que justifica sua resposta à pergunta anterior.

Obs.: pelo mesmo motivo que o conjunto dos números racionais não é completo, podemos concluir que o conjunto dos números irracionais não é completo.

Por fim, como nenhum dos conjuntos numéricos que conhecemos têm a característica da completude e, pelo que estudamos, $\mathbb{R}$ é o único conjunto que apresenta todas as características de um conjunto completo, podemos finalizar com a proposição abaixo:

Proposição: existe apenas um conjunto numérico completo, o conjunto dos números reais, onde todo número real é elemento separador de um corte de números reais, e todo corte de números reais tem um elemento separador real.

ANEXO IV. QUESTIONÁRIO DA CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

QUESTIONÁRIO

Professor: Iglesson Menezes

Turma: _____

Nome: _____

Nº: _____

Responda às perguntas abaixo, considerando as atividades desenvolvidas nas últimas aulas.

1. Para você, o que é um número real?

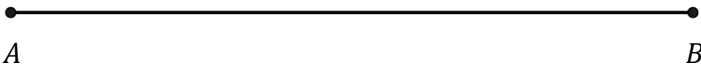
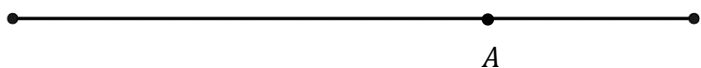
2. Que conjuntos numéricos estão envolvidos na construção dos números reais?

3. O que é um número racional?

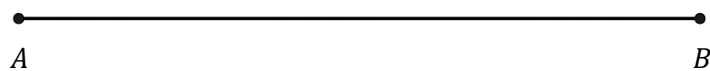
4. O que é um número irracional?

5. A utilização dos Cortes de Dedekind aumentou a sua compreensão a respeito dos conjuntos numéricos? Justifique.

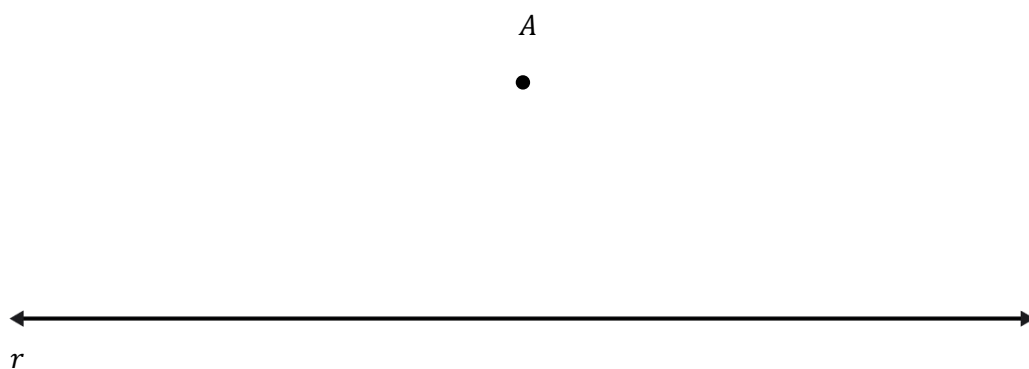
ANEXO V. MATERIAL DE APOIO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

NÚMEROS REAIS COM RÉGUA E COMPASSO	
Professor: _____	
Nome: _____	Nº _____
Siga os passos mostrados pelo professor e faça as construções abaixo com régua e compasso.	
1º construção - Ponto médio de um segmento AB dado.	
	
2º construção - Perpendicular a um segmento por um ponto dado	
	

3º construção - Perpendicular a um segmento AB passando por A

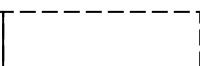


4º construção - Reta paralela a uma reta por um ponto dado



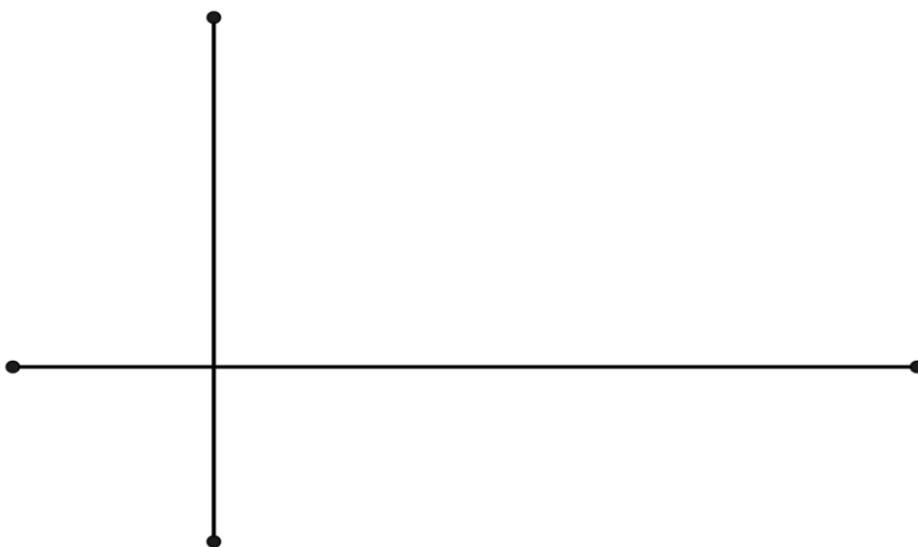
Conjuntos numéricos - Naturais ($\mathbb{N}$)

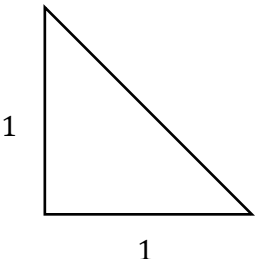
Unidade



Conjuntos numéricos - Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Conjuntos numéricos - Racionais ($\mathbb{Q}$)



Conjuntos numéricos - Irracionais ($\mathbb{I}$)
Conjuntos numéricos - Mais números irracionais
 A right-angled triangle is shown with its right angle at the bottom-left vertex. The vertical leg is labeled with the number '1' to its left, and the horizontal leg is labeled with the number '1' below it. The hypotenuse connects the top of the vertical leg to the right end of the horizontal leg.
Conjuntos numéricos - Reais ($\mathbb{R}$)

Pelo que construímos acima, podemos enunciar a proposição abaixo:

Proposição: a cada número real podemos associar um ponto da reta, e a cada ponto da reta podemos associar um número real.

ANEXO VI. QUESTIONÁRIO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

QUESTIONÁRIO

Professor: Iglesson Menezes

Turma: _____

Nome: _____

Nº: _____

Responda às perguntas abaixo, considerando as atividades desenvolvidas nas últimas aulas.

1. Para você, o que é um número real?

2. Que conjuntos numéricos estão envolvidos na construção dos números reais?

3. O que é um número racional?

4. O que é um número irracional?

5. As construções com régua e compasso aumentou a sua compreensão a respeito dos conjuntos numéricos? Justifique.
