Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia - São José dos Campos

Sequência didática de atividades com discretização para alunos do ensino fundamental II

Roni Ewerton Bueno

Orientadora: Profª Drª Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Este Recurso Educacional está vinculado à Dissertação: Propostas de atividades práticas envolvendo processos de discretização para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio

Caro(a) professor(a),

Este produto educacional é parte da dissertação de mestrado intitulada **“Propostas de atividades práticas envolvendo processos de discretização para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio"**, desenvolvida no ano de 2024 pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Ciências Tecnológicas, de São José dos Campos, da Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP, sob a orientação da Profª Drª Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz.

A proposta consiste em um material pedagógico proporcionando atividades práticas para que o professor de matemática do ensino fundamental e médio, utilizando os espaços da escola, buscando alternativas ao ensino tradicional.

Com o objetivo de aumentar o acervo de atividades diferenciadas, esse produto educacional visa oferecer ao professor do ensino básico diferentes sugestões de atividades que coloquem o aluno como protagonista do processo de ensino-aprendizagem, fazendo-o colocar a “mão na massa”.

Ver os professores apresentando essas atividades despertam o nosso lado criativo e nos dá ideias para planejarmos atividades condizentes com a nossa realidade.
Espero que este trabalho contribua para inspirar outros professores a criar novas Atividades e desenvolver novas estratégias para as suas aulas.

Palavras chave: 1. Discretização. 2. Ensino de Matemática. 3. Atividades didáticas.
4. Cálculos aproximados. 5. Aprendizagem ativa.

Atenciosamente,

Roni Ewerton Bueno

Atividade 1

Desenho na malha quadriculada

Resumo da atividade modelo: Reprodução do brasão do Corinthians com tamanho de 1,6m x 2m, em uma parede, baseado em uma imagem 10 vezes menor, 16cm x 20cm, com o uso de malha de quadriculada, com espaçamento de 7,6cm entre as linhas na parede e 7,6mm na imagem original.

Público alvo: Alunos do Ensino Fundamental ou Médio e está prevista na BNCC (item 1.5).

Motivação: Através dessa técnica podemos reproduzir imagens, mesmo sem muita habilidade em desenho, em tamanho reduzido ou ampliado.

Benefícios educativos: desenvolvimento da coordenação motora, do raciocínio espacial e da concentração, além de estimular a criatividade e favorecer a prática de conceitos matemáticos (como contagem, proporção e simetria). Desenhar em malha quadriculada é uma prática educativa que contribui para o desenvolvimento artístico e cognitivo dos alunos.

1.1 Situação-problema

A atividade proposta é realizar um desenho 10 (dez) vezes maior do que o original. Essa atividade pode ser realizada em escolas que possuem muros não pintados. Como sugestões, poderia ser desenhado o brasão da escola, o símbolo ou a bandeira da cidade, algum personagem escolhido pelos alunos, arte de algum aluno ou releituras de obras de arte, desde que sejam devidamente autorizados.

1.2 Preparativos

1.2.1 Escolher a imagem

A escolha da imagem deve ser feita mediante autorização dos autores, e/ou de imagens que já possuam autorização de uso para fins didáticos ou pedagógicos sem fins lucrativos. O autor utilizou o símbolo do Corinthians para ser pintado na garagem de sua residência, respeitando os direitos de propriedade intelectual da marca.

1.2.2 Medir o espaço disponível

O autor escolheu desenhar o brasão na parede da sua garagem. A altura máxima disponível era de 2,0 metros.

1.2.3 Preparo da imagem

Imprimir a imagem ou utilizar equipamento digital que permita edição da imagem. Observar as dimensões da imagem, no caso da imagem escolhida, 16 cm de largura por 20 cm de comprimento. Escolher o espaçamento da malha. O espaçamento escolhido foi de 1 cm. Traçar a malha, no caso da imagem impressa, utilizar régua e lápis, e no caso da imagem digital um programa para edição como "Corel Draw"(utilizado pelo autor), "Microsoft Word", "Perspective Finder" e "Drawing Grid".

Em primeiro lugar, devemos escolher a imagem a ser desenhada. Atualmente, com o auxílio da Inteligência Artificial, é possível descrever o que se quer desenhar e o aplicativo obtém a imagem. Uma ideia é a utilização do programa Canva. Ele é um software gratuito, e há tutoriais no Youtube explicando o processo, como por exemplo, no endereço: https://www.youtube.com/watch?v=IvzVQDpLJ3A

Vou usar como exemplo, a atividade que fiz em minha dissertação: o símbolo do Corinthians.

Em primeiro lugar, medi a superfície onde seria reproduzida a imagem. A altura máxima que eu tinha disponível era de 2,0 metros.

Após escolher a imagem e fazer o download, coloquei a imagem no tamanho 16 cm x 20 cm, numa malha quadriculada de 1 cm de comprimento por 1 cm de largura. Eu utilizei o programa Corel Draw, mas é possível fazer no Microsoft Word ou em qualquer programa de edição de imagens. Dois aplicativos para se inserir uma malha quadriculada são: "Perspective Finder" e "Drawing Grid". A malha quadriculada pode ser feita também com régua e lápis.

Abaixo a imagem escolhida:

Figura 1: Símbolo do Corinthians na malha quadriculada com 1cm de lado em 16 cm x 20 cm

1.2.4 Reprodução da imagem.

1.2.4.1 Material utilizado

Para o desenho da imagem na parede foram utilizados:

- 1 régua de pedreiro 2 m, ripa ou outro objeto que sirva para traçar as linhas retas;
- Lápis de pedreiro;
- Giz de lousa;
- Instrumento de medição para a imagem (Régua ou paquímetro);
- Instrumento de medição para a parede ou chão (Trena ou régua);
- Nível de bolha (caso o desenho seja na parede);
- Material para apagar/corrigir (borracha ou pano úmido);
- Tinta para pintar.

1.2.4.2 Desenhando

Postei um vídeo no Youtube, explicando o processo. O vídeo pode ser conferido no endereço: https://youtu.be/N5em6O-zyXQ

Fiz a malha quadriculada na parede da varanda de minha casa, utilizando giz de bastão azul, em uma área de 1,60 m x 2,0 m, com os quadrados medindo 10 cm de lado.

Utilizei o giz na cor azul, pois a parede era branca. Se o desenho for feito em uma superfície colorida ou no asfalto, o giz branco é mais aconselhável, por ser mais visível (à medida em que vamos "pisando" nas linhas, ela vai se apagando).

Em seguida, demarquei as coordenadas da imagem no papel e na parede, para que não precisasse ficar contando as linhas e colunas. Vamos chamar as linhas horizontais de "linhas", e as linhas verticais, de "colunas", como podemos ver na figura na próxima página. Isso facilitou para mim, pois o desenho é simétrico. Por exemplo, observando a figura 2, marquei os pontos (6, O) e (7, R) para desenhar a pá do remo do lado direito. No lado esquerdo, marquei os pontos (-6, O) e (-7, R) também, facilitando o trabalho.

Figura 2: Imagem quadriculada e com as linhas e colunas identificadas

Começamos a desenhar a coroa circular, composta pelas duas circunferências que contém o nome e o ano de fundação do time. Para isso, precisamos achar o centro das circunferências.

Na imagem do papel, os pontos mais alto e mais baixo das circunferências estão no eixo das ordenadas e distam 7,28 cm na circunferência menor. Portanto, seu raio mede 3,64 cm e seu centro se encontra em x = 0. Com o auxílio de uma régua, é possível observar que a distância em que a distância horizontal é de 7,28 cm na horizontal fica acima da linha “J”.

Portanto o centro das circunferências é no ponto (0, J+) mm.

Utilizando uma corda de pedreiro (feita de nylon), amarramos um lápis numa ponta e fixamos um prego na outra ponta no ponto (0, J+) cm, na parede, que serviu como “ponta-seca”. Não aconselho a desenhar circunferências com barbante, devido ao fato de ele ter mais elasticidade.

Desenhadas as circunferências, partimos para os remos e a âncora. Para exemplificar, vejamos as figuras com as medidas dos pontos em que as linhas do desenho intersectam as linhas da malha quadriculada.

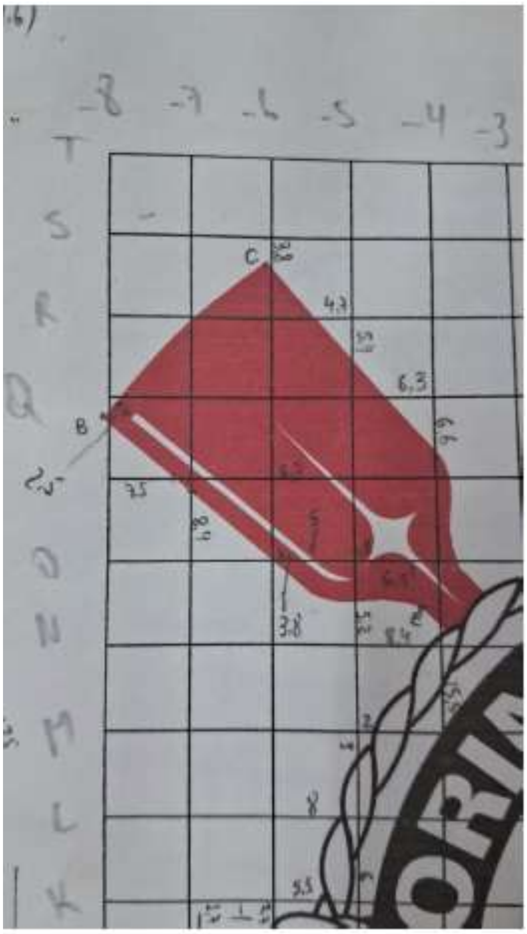


Figura 3: Remo esquerdo no papel

Na imagem acima, marquei um ponto B e um ponto C nas pontas da pá do remo. A linha do remo intersecta 3,8 mm abaixo da coordenada (-6, S).

Na figura abaixo, o remo direito e as marcações feitas, na parede:

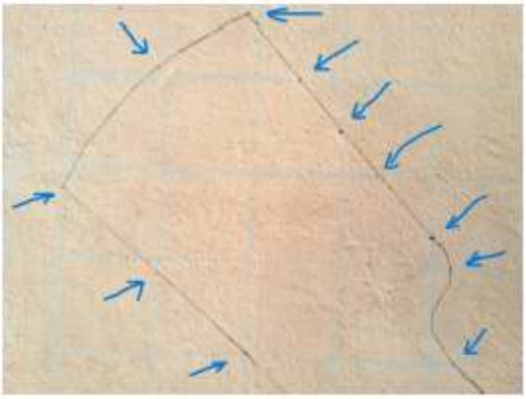


Figura 4: Remo esquerdo na parede com as marcações em destaque

Na figura acima, as setas apontam para os pontos do desenho que intersectam as linhas da malha quadriculada.

Também foram marcados os seguintes pontos:

• 4,7 mm à direita da coordenada (-6, R);

• 5,4 mm abaixo da coordenada (-5, R);

• 6,3 mm à esquerda da coordenada (-4, Q);

• 6,6 mm abaixo da coordenada (-4, Q);

• 7,5 mm à direita da coordenada (-8, P);

• 8,4 mm acima da coordenada (-7, O);

• exatamente na coordenada (-6, O); e

• 5,2 mm abaixo da coordenada (-5, N);

Além disso, os pontos B e C ficam à menos de 1 mm à esquerda das colunas -8 e -6, respectivamente, e são ligados por um arco que intersecta a coordenada (-7, R).

Como a figura é simétrica, todas as marcações feitas aqui, podem ser feitas nas coordenadas (-x, y). Ou seja, os oito pontos marcados para o remo da esquerda podem ser marcados para o remo do lado direito da seguinte forma:

• 4,7 mm à esquerda da coordenada (6, R);

• 5,4 mm abaixo da coordenada (5, R);

• 6,3 mm à direita da coordenada (4, Q);

• 6,6 mm abaixo da coordenada (4, Q);

• 7,5 mm à esquerda da coordenada (8, P);

• 8,4 mm acima da coordenada (7, O);

• exatamente na coordenada (6, O); e

• 5,2 mm abaixo da coordenada (5, N);

Note que aqui temos que trocar quando for “à esquerda” e “à direita” de uma coordenada para “à direita”" e “à esquerda”, respectivamente.

Após fazer as marcações, é só ir juntando os pontos, de acordo com o desenho do papel.

Não é necessário, mas foi utilizado um paquímetro para uma maior precisão. É uma ideia interessante, pois é um instrumento de medida com precisão de 0,1 mm, que os alunos podem aprender a utilizar.

Na figura abaixo, podemos visualizar o paquímetro sendo utilizado para se calcular a distância de 7,6 mm à esquerda da coordenada (-2, S):

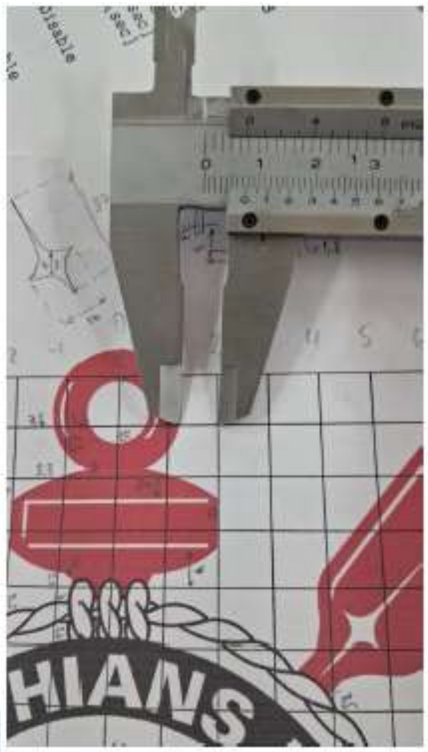


Figura 5: Paquímetro marcando 7,6 mm à esquerda da coordenada (-2, S)

Na imagem abaixo (figura 6), é possível verificar a régua marcando 7,6 mm, como na figura 5.

Figura 6: Régua marcando 7,6 mm

Um outro exemplo: desenhando o “gancho” esquerdo da âncora e a sua parte inferior.

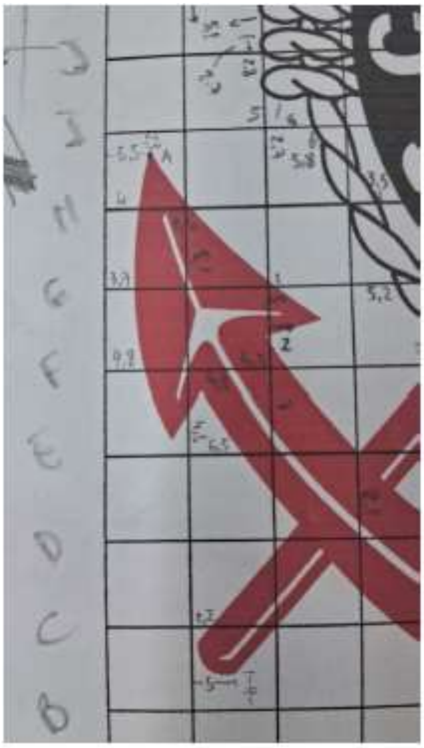


Figura 7: Gancho esquerdo da âncora e parte inferior esquerda do remo

Na imagem acima, marquei um ponto A na ponta do gancho da âncora. Ele está à 5,5 mm à direita da coluna "-8 "e 2,3 mm abaixo da linha "J". Marquei esse ponto e marquei também os seguintes pontos:

- 4 mm à direita da coordenada (-8, H);
- 3,7 mm à direita da coordenada (-8, G);
- 4,8 mm à direita da coordenada (-8, F);
- 4,5 mm acima da coordenada (-7, E);
- 6,5 mm à direita da coordenada (-7, E);
- 2,2 mm à direita da coordenada (-7, C);
- exatamente na coordenada (-7, H);
- exatamente na coordenada (-5, E);
- exatamente na coordenada (-6, C);
- 1 mm à direita da coordenada (-6, G); e
- 5,2 mm abaixo da coordenada (-5, N);

Foram feitas, também, as marcações da parte branca, que representa o brilho da âncora.

A parte mais inferior do remo, fica à 5 mm à direita da coluna "-7" e 4 mm acima da linha "B". Como o remo é reto, é necessário anotar apenas mais um ponto de cada lado do remo. Do lado esquerdo, foi anotado a coordenada (-5, E) e no lado direito foi marcado a coordenada (-6, C).

De modo análogo à pá do remo, podemos marcar os seguintes pontos para o gancho direito da âncora e parte inferior direita do remo:

- 4 mm à esquerda da coordenada (8, H);
- 3,7 mm à esquerda da coordenada (8, G);
- 4,8 mm à esquerda da coordenada (8, F);
- 4,5 mm acima da coordenada (7, E);
- 6,5 mm à esquerda da coordenada (7, E);
- 2,2 mm à esquerda da coordenada (7, C);

• exatamente na coordenada (7, H);

• exatamente na coordenada (5, E);

• exatamente na coordenada (6, C);

• 1 mm à esquerda da coordenada (6, G); e

• 5,2 mm abaixo da coordenada (5, N);

Todas estas medidas repassei para a parede, mas em centímetros. Ou seja, cada milímetro do desenho equivale a 1 cm na parede.

Alguns elementos, como a corda que margeia a coroa circular pintada de preto, que contém o nome e ano de fundação do time, e as listras da bandeira, precisavam ser mais detalhadas.

Neste caso, um recurso a ser utilizado é dividir as malhas quadriculadas em quadrados menores. Quanto menor a distância entre as linhas, maior a precisão no desenho. Podemos visualizar esse procedimento na figura abaixo:

Figura 8: Redução das quadrículas para imagens mais detalhadas

Na parede, as linhas adicionais foram necessárias para que alguns elementos da imagem não ficassem fora do lugar ou de tamanho discrepante. Nas figuras 9 e 10, podemos ver uma parte da imagem com as linhas e, após o desenho estar pronto, as linhas foram apagadas, para que não fiquem marcadas após receber a tinta.

Figura 9: Parte da imagem com malha duplicada

Figura 10: Malha apagada para receber a tinta

O resultado final pode ser visto na figura 11:

Figura 11: Desenho finalizado

É possível observar que as proporções foram preservadas. Quanto mais lisa a superfície a ser desenhada, mais precisas ficarão as linhas. Os pinceis e a tinta utilizada fazem muita diferença também no resultado final. Se o desenho for feito no asfalto ou em uma parede não lisa, as imperfeições da superfície farão com que algumas linhas não tenham o contorno desejado. Mas de longe, o desenho ficará fiel ao original.

As letras e números podem ser impressos e contornados. O arquivo contendo o desenho na malha quadriculada, as letras e números em tamanho compatível, estão disponíveis no meu drive, em:

https://drive.google.com/drive/folders/1mvzVSiWRppNd4G--1l-qJnhnGCaWG-Ri?usp=sharing

1.3 Habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta

Esta atividade está prevista na BNCC (2017), com as seguintes habilidades:

• EF06MA20 - Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

• EF06MA15 - Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

• EF06MA21 - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

Atividade 2 – Calculando a área delimitada pela linha de 3 pontos de uma quadra poliesportiva escolar

Na maioria das escolas, há uma quadra poliesportiva. Geralmente, as quadras poliesportivas contém marcações de futsal, handebol, basquete e vôlei.

Nessas quadras poliesportivas, encontramos muitas formas geométricas. Calcular a área da quadra, do círculo central ou do garrafão são atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental e médio.

A atividade apresentada nesta proposta será como calcular a área delimitada sob a linha de 3 pontos da quadra de basquete.

2.2 características de uma quadra de basquete

Na Figura 12, podemos ver que as medidas oficiais de uma quadra de basquete são 28 m x 15 m.

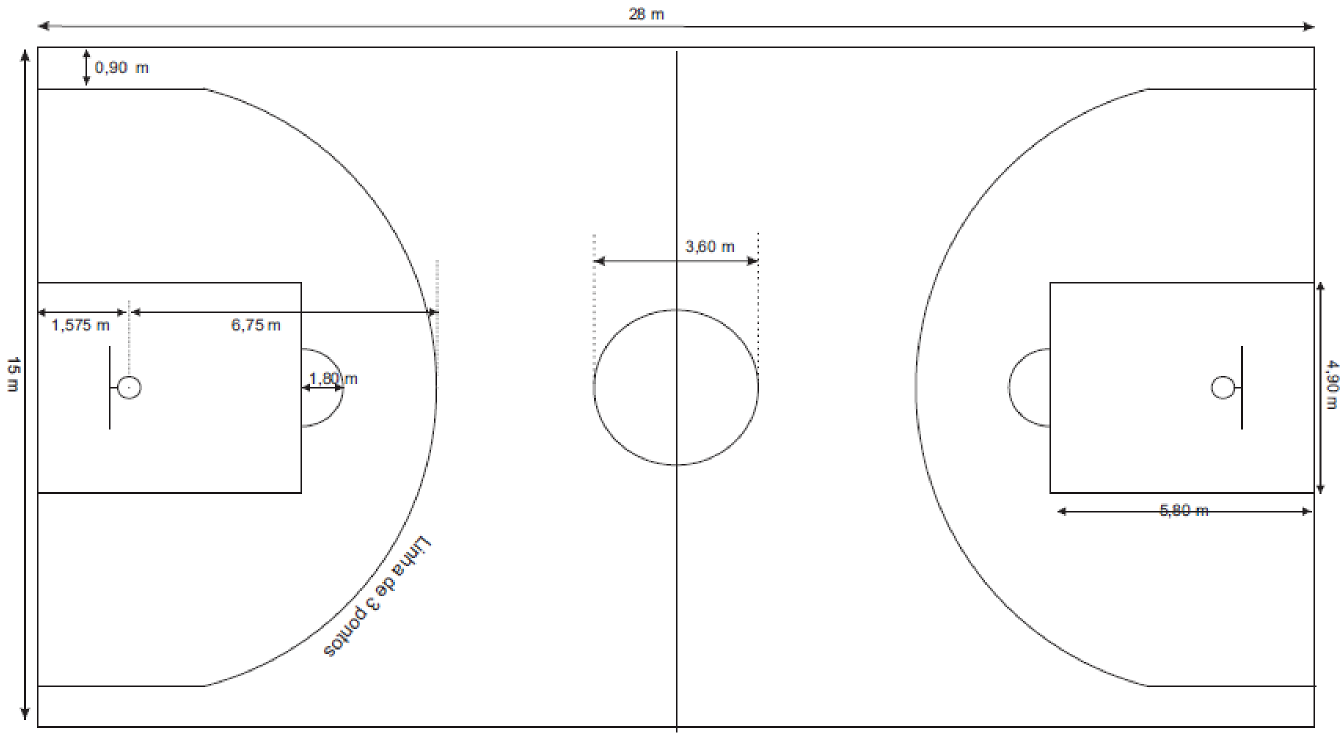


Figura 12: desenho de uma quadra de basquete, com suas medidas

Porém, numa quadra poliesportiva, essas medidas não se aplicam, pois no futsal e handebol, por exemplo, as medidas oficiais da quadra são 40 m x 20 m. Já numa quadra de voleibol as medidas são 9 m x 18 m, com pelo menos 3 m de área de escape (área externa à quadra, que permite aos jogadores espaço para a corrida, salto e execução da projeção do saque).

Na Figura 13 podemos ver uma quadra poliesportiva, com as marcações para a prática de vários esportes numa única quadra.

Figura 13: quadras poliesportivas

De acordo com as Regras Oficiais da Federação Internacional de Basquete (FIBA), de 2020, há uma área da cesta de campo de 3 pontos, que é compreendida por toda a área da quadra, exceto a área próxima a cesta da equipe oponente, limitada por uma linha, chamada de linha de 3 pontos. Ou seja, se um jogador arremessar a bola contra a cesta da equipe oponente de qualquer local da quadra, fora da região delimitada pela linha de 3 pontos, inclusive, e acertar a cesta, a sua equipe ganhará 3 pontos. Se o arremesso for feito dentro da linha de 3 pontos e a bola entrar na cesta, a equipe ganha 2 pontos.

A linha de 3 pontos é um semicírculo com 6,75 m de raio medido desde o ponto no piso, exatamente abaixo do centro da cesta dos oponentes até a borda externa do arco. A distância do ponto no piso para a margem interna dos pontos médios da linha final é 1,575 m. O arco se une às linhas paralelas, que distam de 90 centímetros das linhas externas.

2.3 Realizando a atividade na quadra

Para realizar a atividade, foram utilizados os seguintes materiais:

- 1 (uma) caixa de giz branco tipo bastão;
- 1 (uma) prancheta para apoiar as folhas de anotações;
- formulários para preenchimento dos dados;
- 2 (duas) trenas de 10 m;
- 2 (duas) réguas de pedreiro de 3 m;
- 2 (duas) calculadoras/ e
- barbante

Inicialmente, a turma foi dividida em 2(dois) grupos com 16 (dezesseis) alunos. Cada grupo ficou responsável por metade da linha. Deleguei a alguns estudantes de cada grupo, uma função específica, por exemplo:

- 01 (um) estudante de cada grupo responsável pelas anotações das medidas na folha;
- 01 (um) estudante de cada grupo ficou com uma calculadora para realizar os cálculos das áreas dos retângulos;
- 02 (dois) estudantes de cada grupo ficaram responsáveis pela trena;
- 02 (dois) estudantes de cada grupo realizavam a leitura da medida (para se certificar de que a leitura foi correta);
- 02 (dois) estudantes de cada grupo ficaram responsáveis por fixar o sarrafo (régua de madeira improvisada) no chão;
- 02 (dois) estudantes de cada grupo ficaram responsáveis por riscar o chão com giz;
- 02 (dois) estudantes de cada grupo ficaram responsáveis por escrever as medidas no chão com giz;
- 01 (uma) estudante ficou responsável por registrar os trabalhos, tirando fotos com o celular.

Para que nenhum aluno fique sem fazer nada, fiz um revezamento com as funções.

Antes de iniciar a atividade, expliquei como seriam os procedimentos. Primeiramente dividiremos a linha de 3 pontos ao meio. Cada grupo ficará responsável por fazer as medições em cada uma destas metades. A seguir, dividiremos as áreas em retângulos para obter estimativas para o valor da área desejada.

Expliquei aos alunos que eles deveriam considerar a área interna à linha branca que serve para delimitar a área da quadra, cuja espessura é de 9 cm. Portanto, as medições seriam feitas sempre na parte interna da linha branca.

Para dividir a linha de 3 pontos ao meio, os alunos deveriam marcar o ponto médio da linha de fundo e traçar a mediatriz.

Para isso, com o auxílio do barbante, demarcar a interseção de dois arcos de mesmo raio cujas base estão fixadas nos vértices formados pela linha de fundo e linhas laterais dos dois lados da quadra. Unindo o ponto médio da linha de fundo com a intersecção, traçamos o segmento de reta perpendicular à linha de fundo que divide a linha de 3 pontos ao meio, no eixo de simetria da parábola.

A turma foi dividida em dois grupos de alunos. No dia da atividade, vieram 28 alunos.

Cada grupo ficou incumbido de realizar as marcações e anotações de uma metade da linha de 3 pontos, como pode ser visto na figura abaixo:

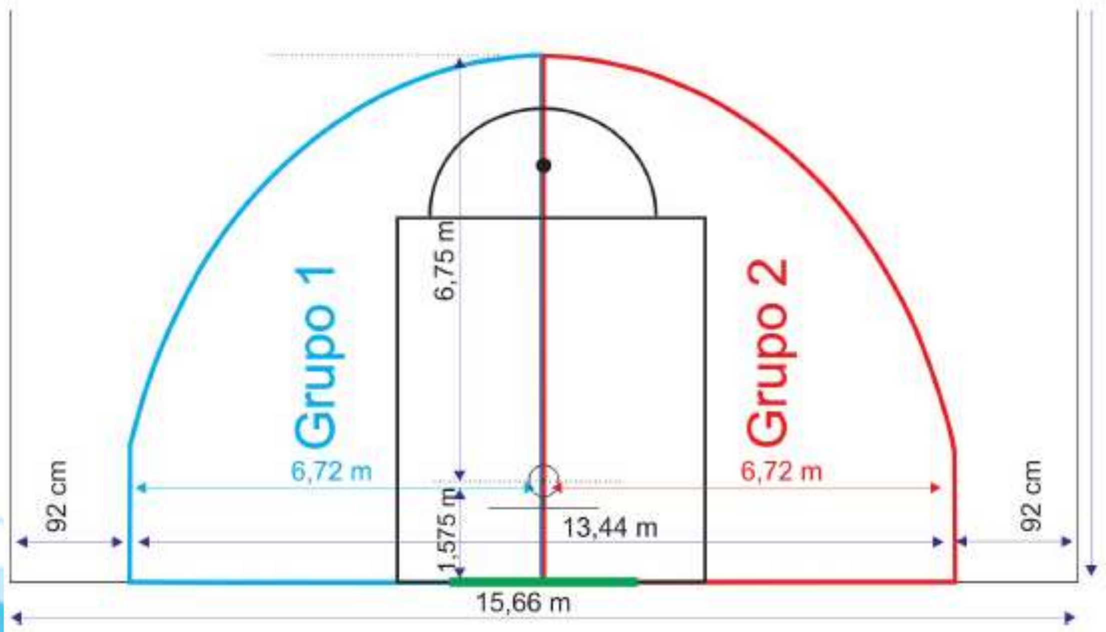


Figura 14: região sob a linha de 3 pontos com as regiões de responsabilidade de cada grupo

Após medir a base da região e dividí-la ao meio (essa linha é a altura), os dois grupos dividiram a base ao meio e riscaram uma linha paralela às linhas laterais da quadra e formaram dois retângulos em cada uma das partes, cujas bases serão metade do comprimento da linha de fundo de cada lado, conforme a figura 15.

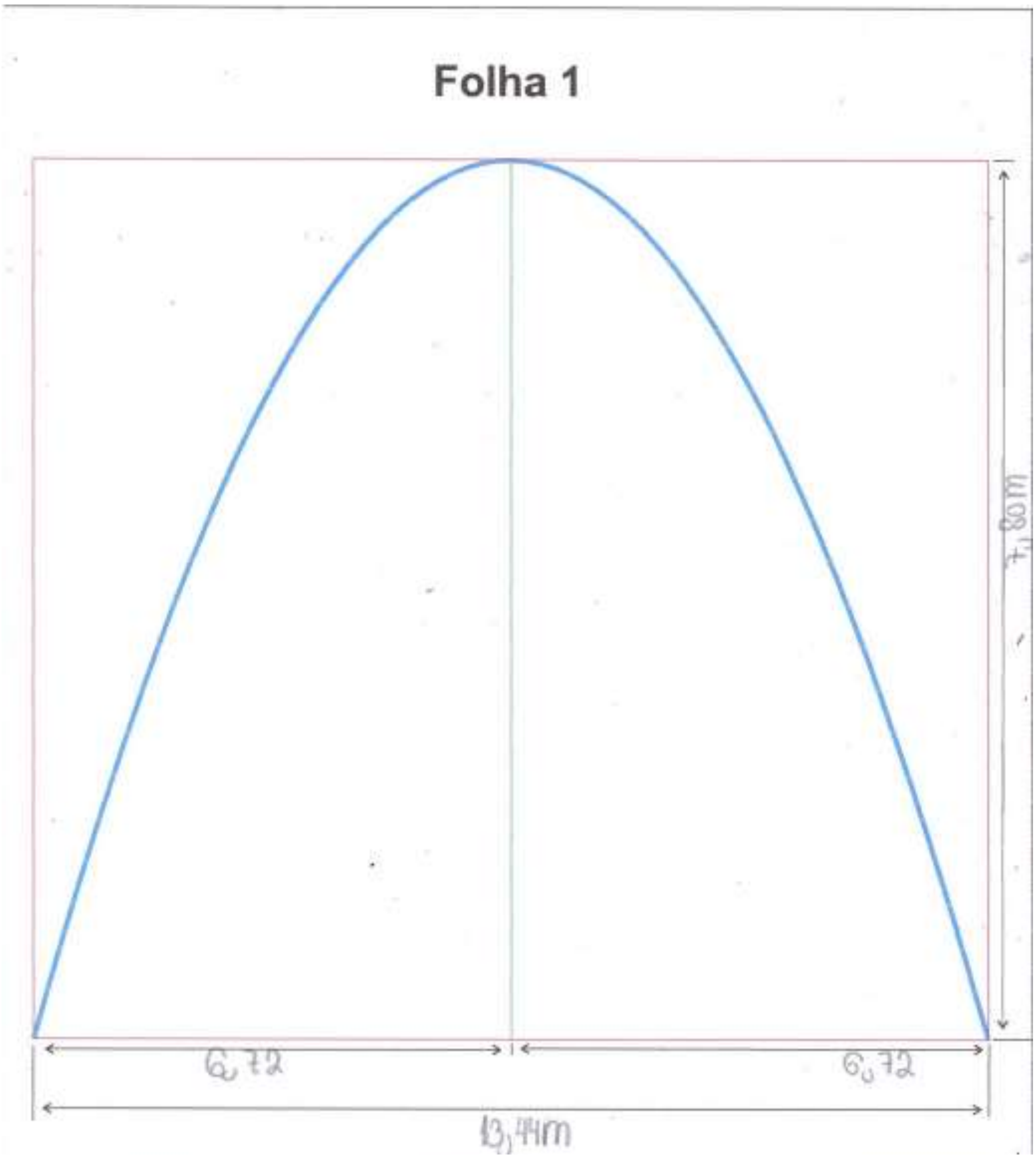


Figura 15: Área sob a linha de 3 pontos dividida ao meio

Um dos grupos fará os retângulos cujas alturas sejam limitadas superiormente pela linha de 3 pontos (de modo que os retângulos fiquem dentro da área demarcada pela linha de 3 pontos). O outro grupo fará retângulos cujas alturas dos retângulos sejam limitadas inferiormente pela intersecção com a linha de 3 pontos (de modo que os retângulos contenham a área demarcada pela linha de 3 pontos).

A área sob a linha de 3 pontos será a soma das 4 áreas dos retângulos.

Após realizar as medições, os grupos deverão lançar os valores nas folhas representada abaixo (figuras 16 e 17):

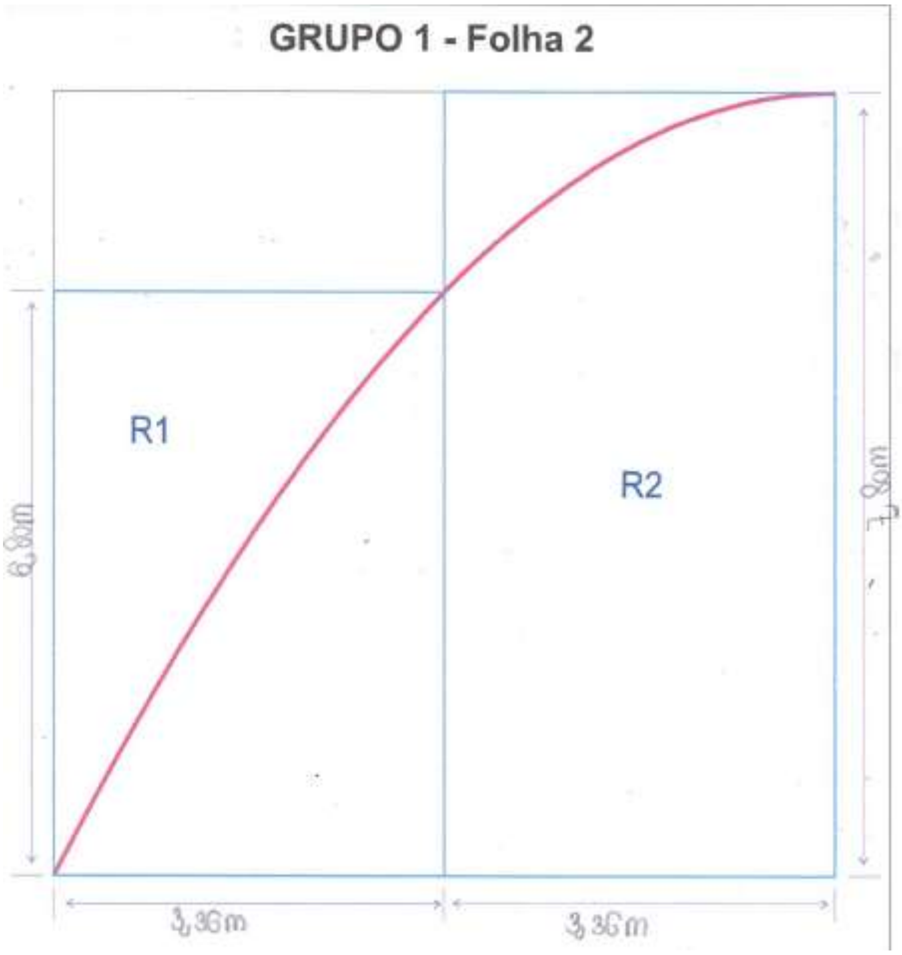


Figura 16: folha do grupo 1 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em dois retângulos superiormente limitados.

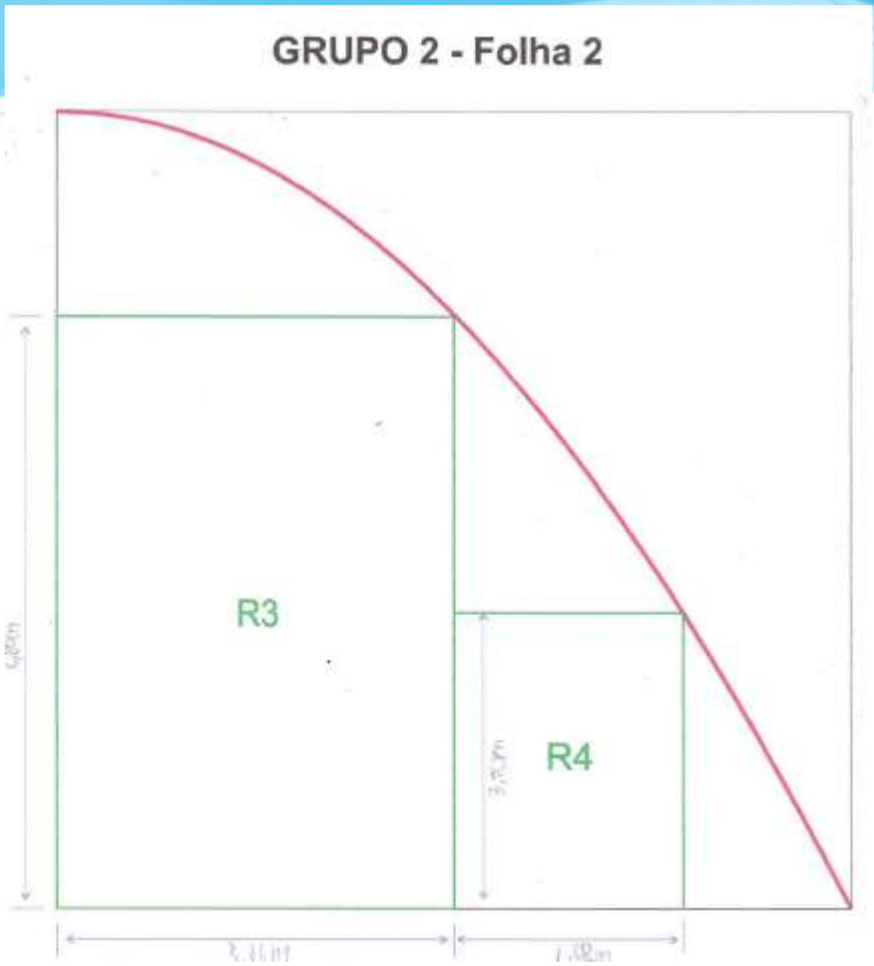


Figura 17: folha do grupo 2 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em dois retângulos inferiormente limitados.

Após isso, cada retângulo foi dividido ao meio, obtendo 4 retângulos de cada lado. A área da linha de 3 pontos será a soma das 8 áreas, conforme as figuras 18 e 19.

Esse procedimento foi repetido sempre dividindo ao meio, obtendo o maior número de retângulos possível.

Quanto mais retângulos conseguirmos obter, teremos a área da linha de 3 pontos com mais exatidão.

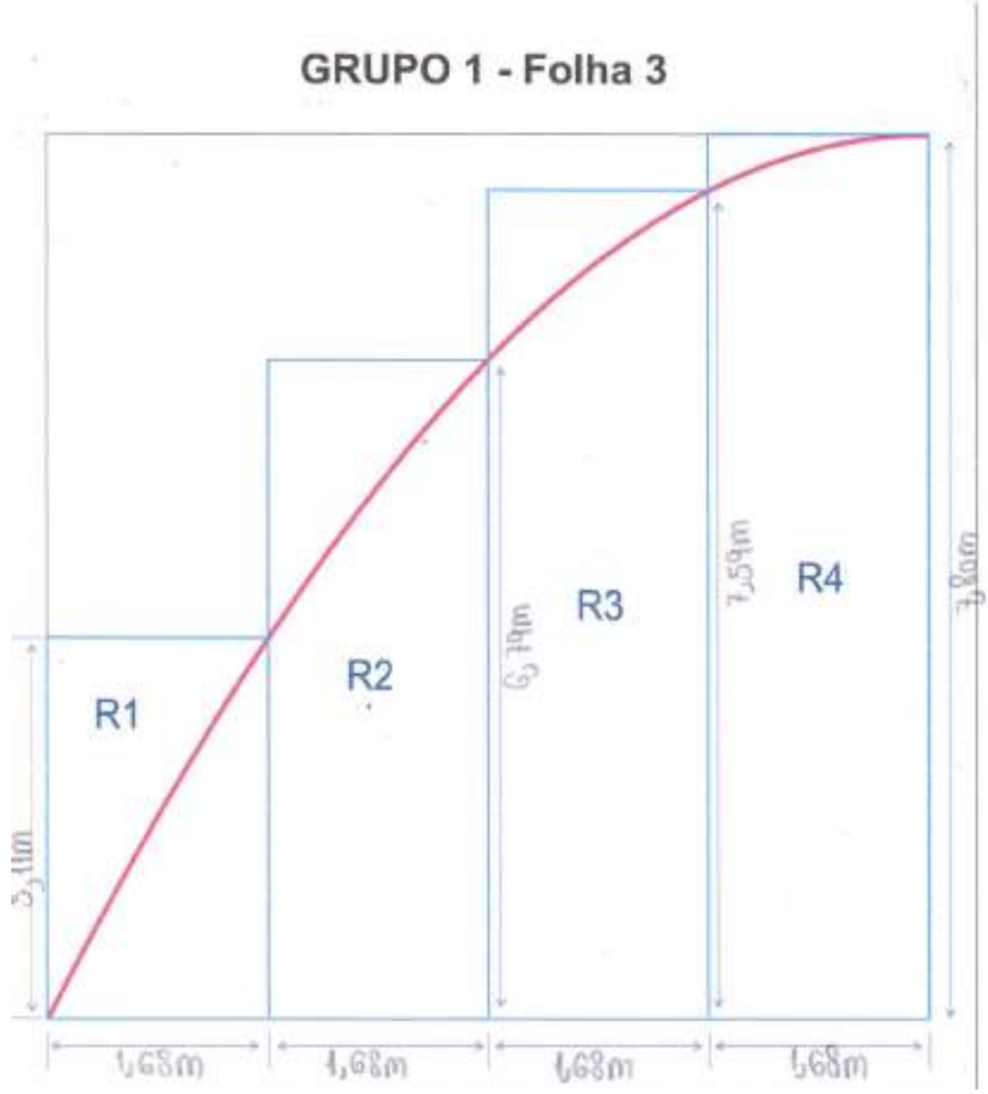


Figura 18: folha do grupo 1 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em quatro retângulos superiormente limitados.

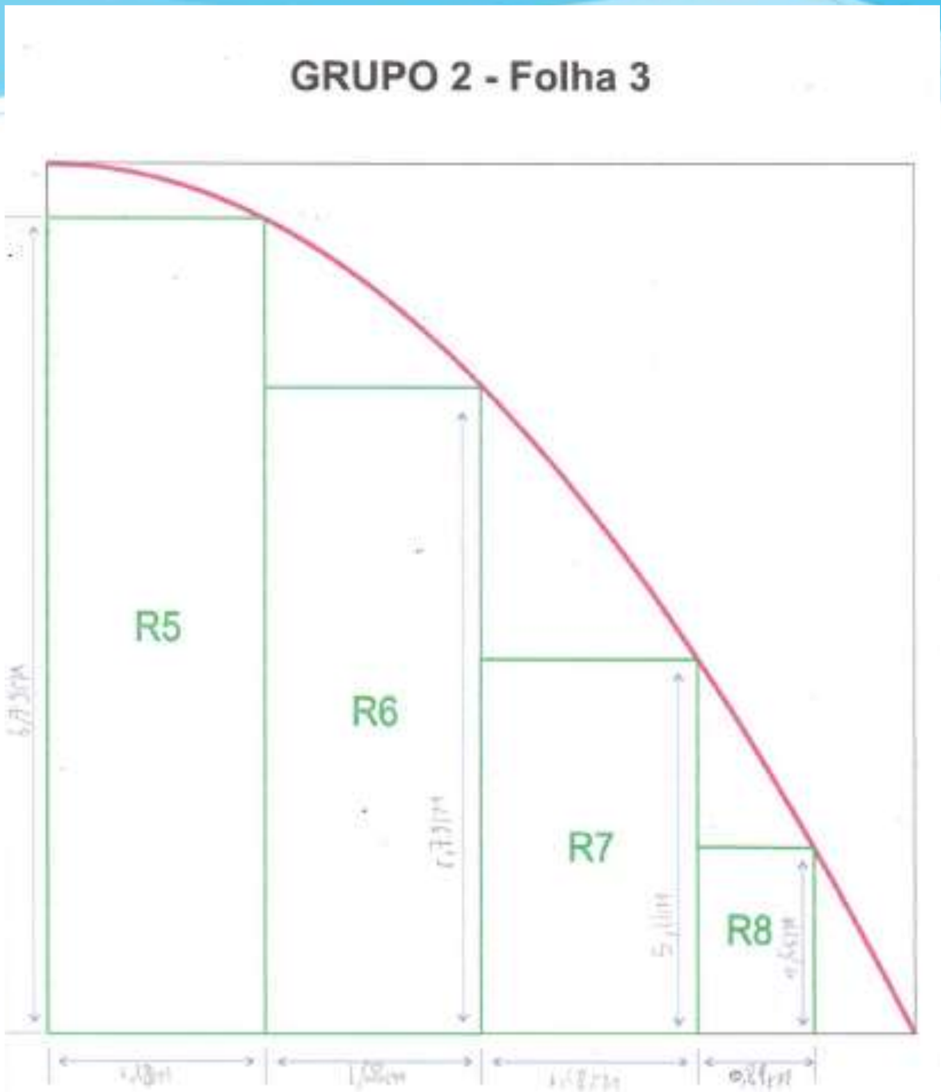
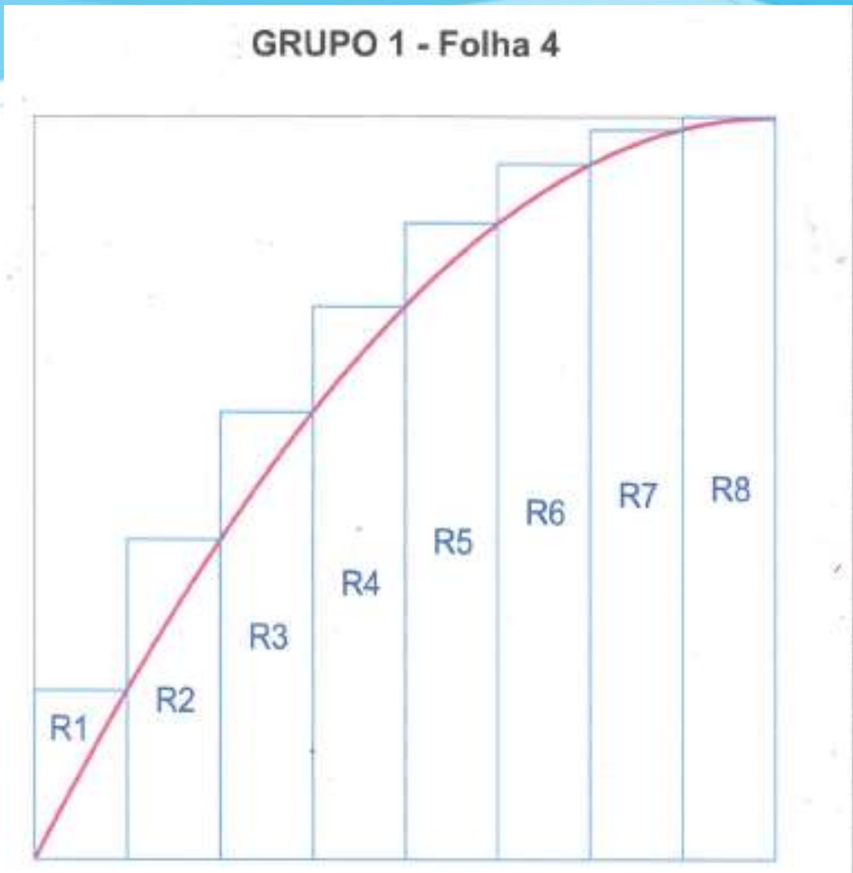


Figura 19: folha do grupo 2 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em quatro retângulos inferiormente limitados.

Os alunos mediram a largura da quadra. A medida obtida foi de 15,66 metros.

Como a espessura da linha é de aproximadamente 10 centímetros e a linha de 3 pontos estava à 92 centímetros da linha lateral da quadra, a base da região da área a ser calculada, ficou com 13,44 metros de largura, dando à cada equipe, 6,72 metros para trabalhar, conforme podemos visualizar na figura abaixo:

Da linha de fundo até a altura máxima da área a ser calculada (ponto mais longe da linha de 3 pontos em relação ao fundo da quadra), os alunos anotaram 7,80 metros.



	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
Altura	7,80	7,77	7,59	7,26	6,79	6,13	5,14	3,48
Base	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84

Figura 20: folha do grupo 1 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em oito retângulos superiormente limitados.

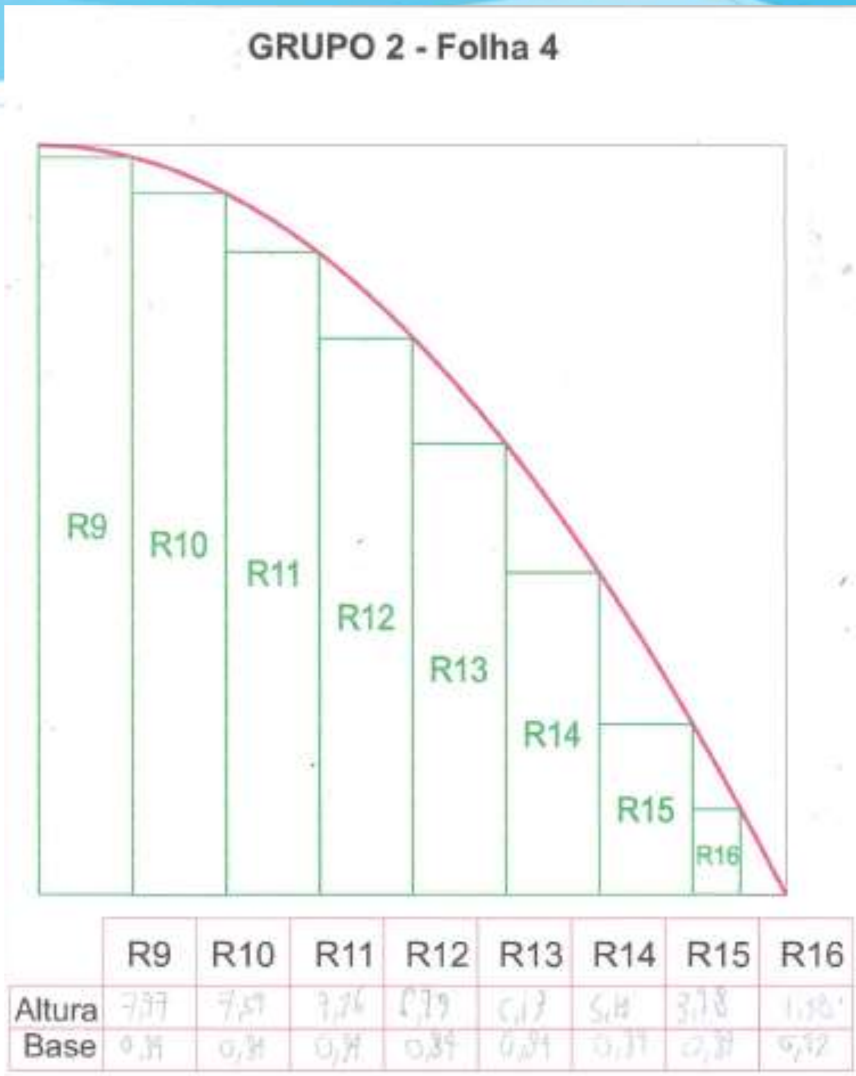
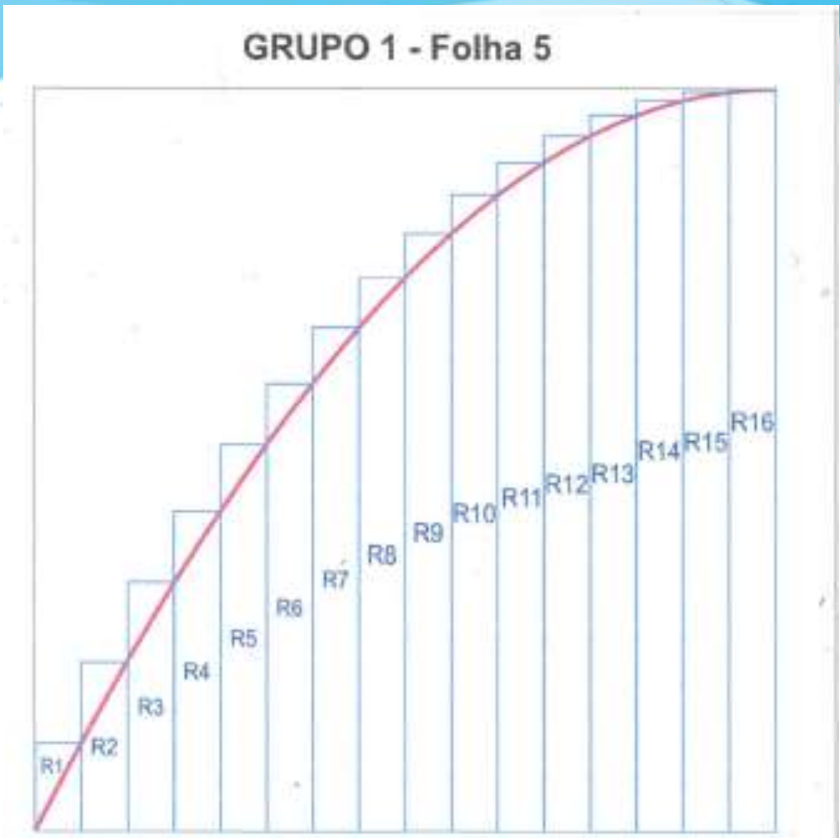


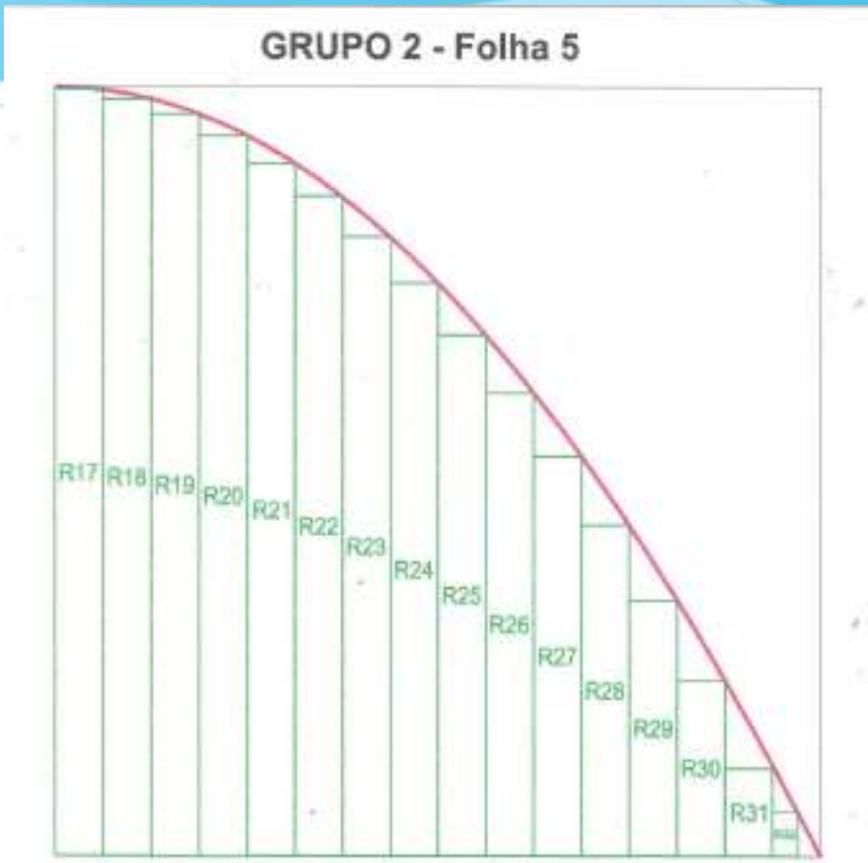
Figura 21: folha do grupo 2 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em oito retângulos inferiormente limitados.



	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
Altura	7,80	7,77	7,74	7,67	7,62	7,44	7,28	7,04
Base	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42

	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16
Altura	6,80	6,48	6,12	5,67	5,11	4,49	3,59	2,04
Base	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42

Figura 22: folha do grupo 1 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em dezesseis retângulos superiormente limitados.



	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23	R24
Altura	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Base	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

	R25	R26	R27	R28	R29	R30	R31	R32
Altura	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Base	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Figura 23: folha do grupo 2 com a área sob a linha de 3 pontos dividida em dezesseis retângulos inferiormente limitados.

Após realizar todas as marcações, os dados podem ser compilados, como pode ser visto na tabela 1, na folha seguinte.

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	49,056	34,272	14,784	83,328
8	45,9648	35,5227	10,4421	81,4875
16	43,7556	37,8924	5,8632	81,648
32	42,3024	39,249	3,0534	81,5514

Tabela 1: áreas obtidas compiladas em uma única tabela

Portanto, as medidas da base e altura da área a ser calculada, eram 13,44 m e 7,80 m, respectivamente.

De posse desses dados já seria possível calcular a área dessa parábola, pois bastaria multiplicarmos 2 terços ao produto da base pela altura, obtendo uma área de aproximadamente, 69,888 metros quadrados.

Essa informação não foi passada aos alunos, mas já é possível para o professor saber que os valores calculados, deveriam se aproximar desse valor.

Os dois grupos receberam 6 folhas, para que anotassem as medidas obtidas. Estas folhas estão disponibilizadas no meu Google Drive, clicando em: https://drive.google.com/file/d/1y2oBN2TlCM_zpEQrRbROA_MAlX8dIV3d/view?usp=sharing

Atividade 3 – Descobrindo a fórmula para calcular a área sob uma parábola

Atuando como professor, sei que os alunos querem saber se o que fizeram está certo. Após chegarmos ao resultado da área da linha de 3 pontos, os alunos calcularem a quantidade de tinta e solvente necessários para a pintura, ficou uma dúvida: Como conferir se o valor calculado da área sob a linha de 3 pontos está correto? Como saber se fizemos certo? Será que existe uma fórmula para calcular a área de uma parábola?

Me antecipando a essas possíveis questões, elaborei outra atividade em sala de aula, com o objetivo de que eles mesmos consigam, praticando, descobrir uma fórmula para se calcular a área de uma parábola.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos. (...) Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (Brasil, 1998, p. 41-42)

3.1 *Atividade em grupo - Como obter a fórmula para o cálculo da área de uma parábola*

Montamos 5 grupos e dei a cada um uma função.

As funções foram as seguintes:

a) $y = 1 - x^2$

b) $y = 4 - x^2$

c) $y = 9 - x^2$

d) $y = -x^2 - 2x + 8$

e) $y = -2x^2 - 4x + 6$

Dei 4 folhas quadriculadas para cada grupo e pedi que fizessem, em cada folha, o gráfico das funções. Ou seja, cada grupo teve que fazer quatro vezes o mesmo gráfico.

Solicitei também, que dessem um espaço de quatro malhas entre os números, de modo que cada quadradinho valesse 0,25.

Abaixo, vejamos como ficaram os gráficos das funções $y = 1 - x^2$ e $y = 4 - x^2$:

a) $y = 1 - x^2$

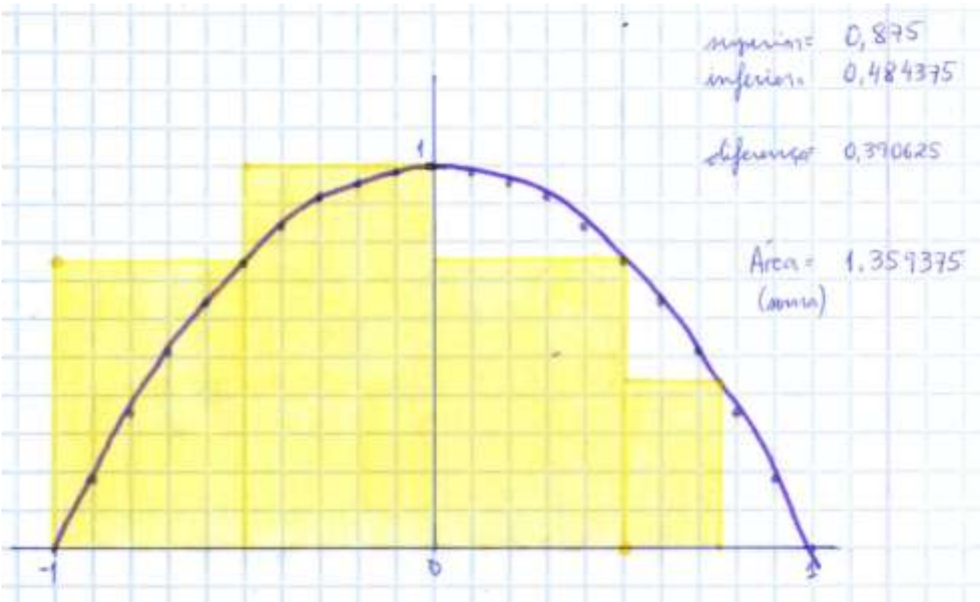


Figura 24 : Gráfico da função $y = 1 - x^2$ com 4 retângulos

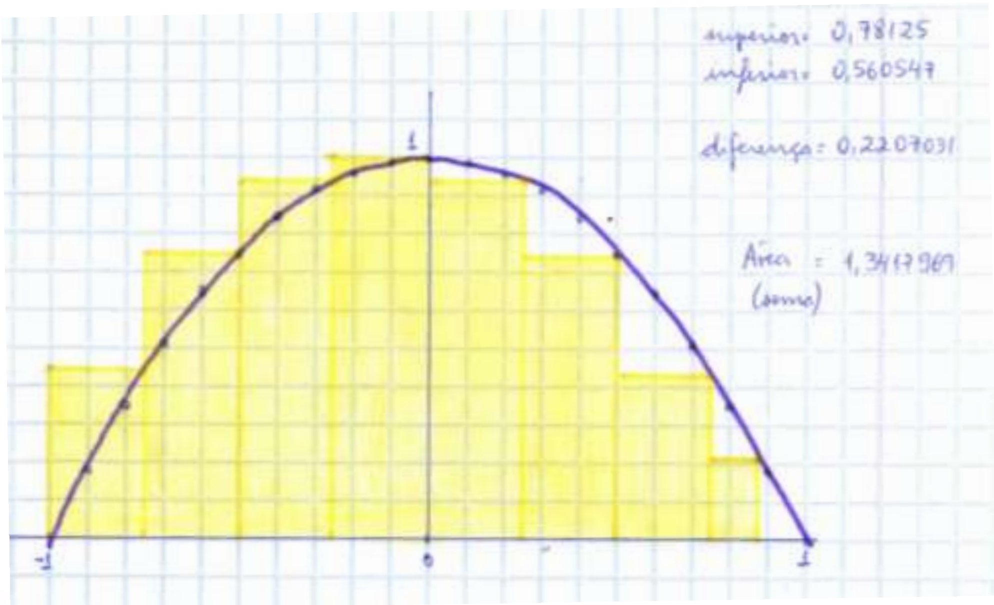


Figura 25: Gráfico da função $y = 1 - x^2$ com 8 retângulos

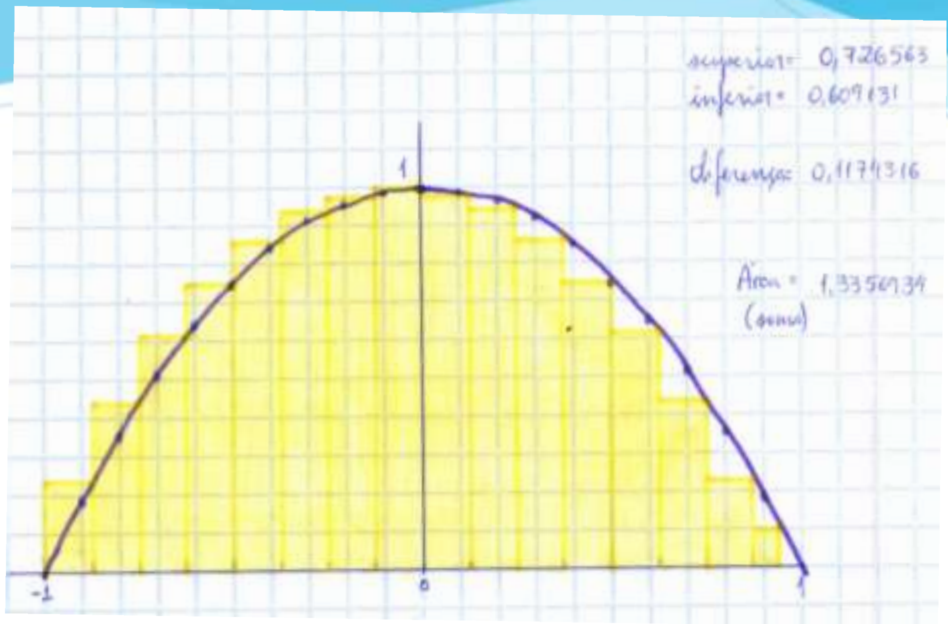


Figura 26 : Gráfico da função $y = 1 - x^2$ com 16 retângulos

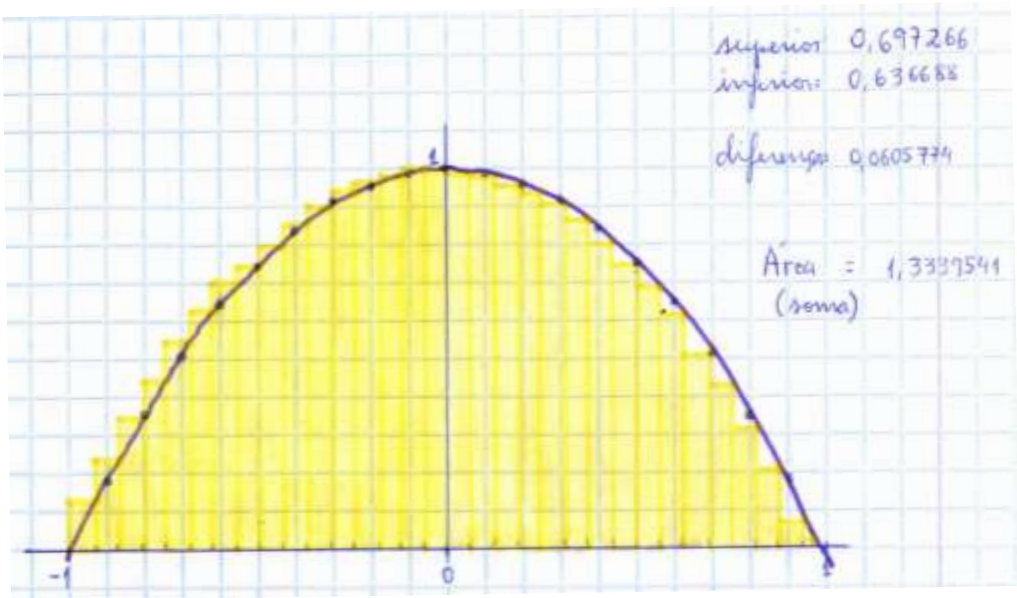


Figura 27 : Gráfico da função $y = 1 - x^2$ com 32 retângulos

b) $y = 4 - x^2$

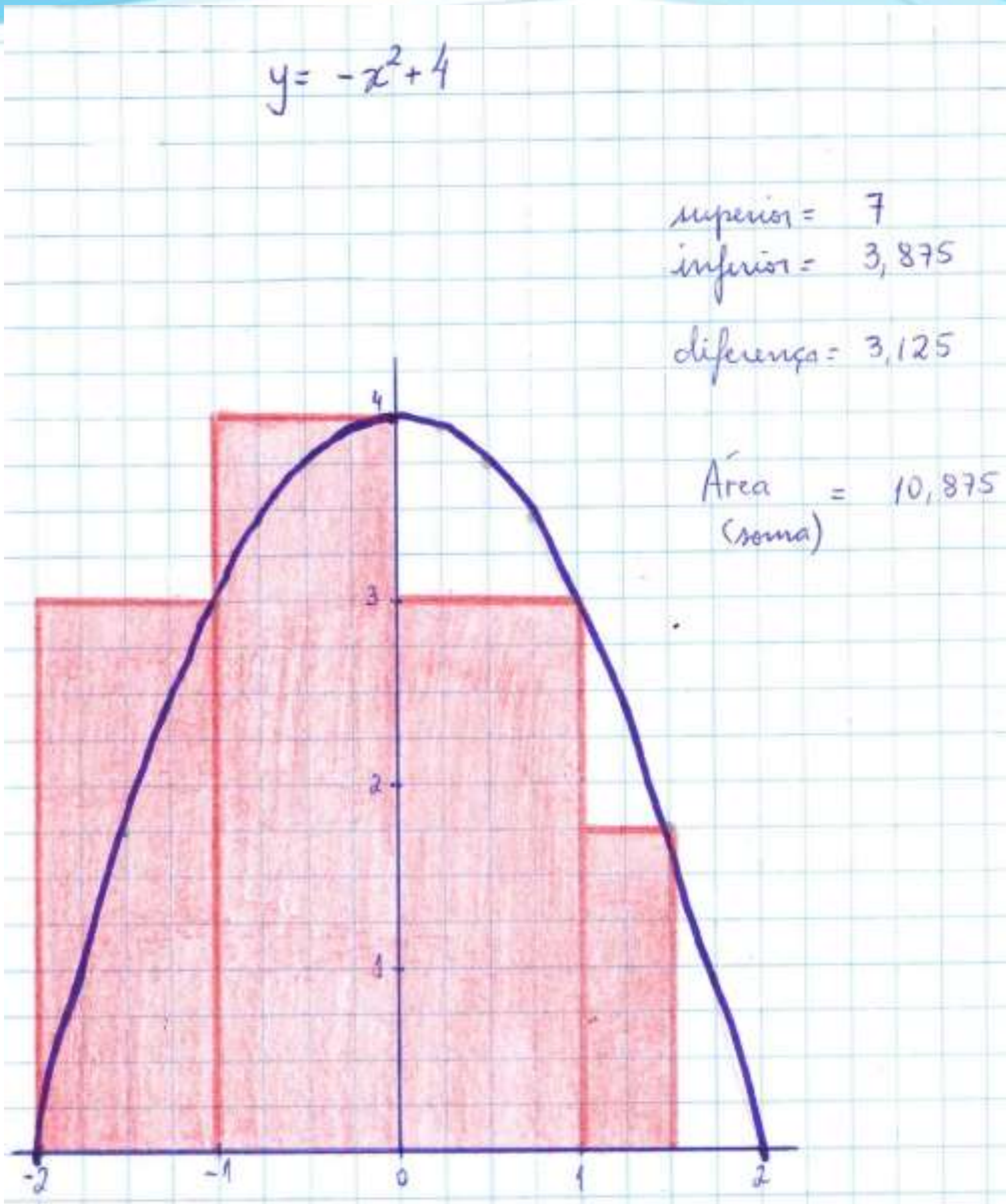


Figura 28: Gráfico da função $y = 4 - x^2$ com 4 retângulos

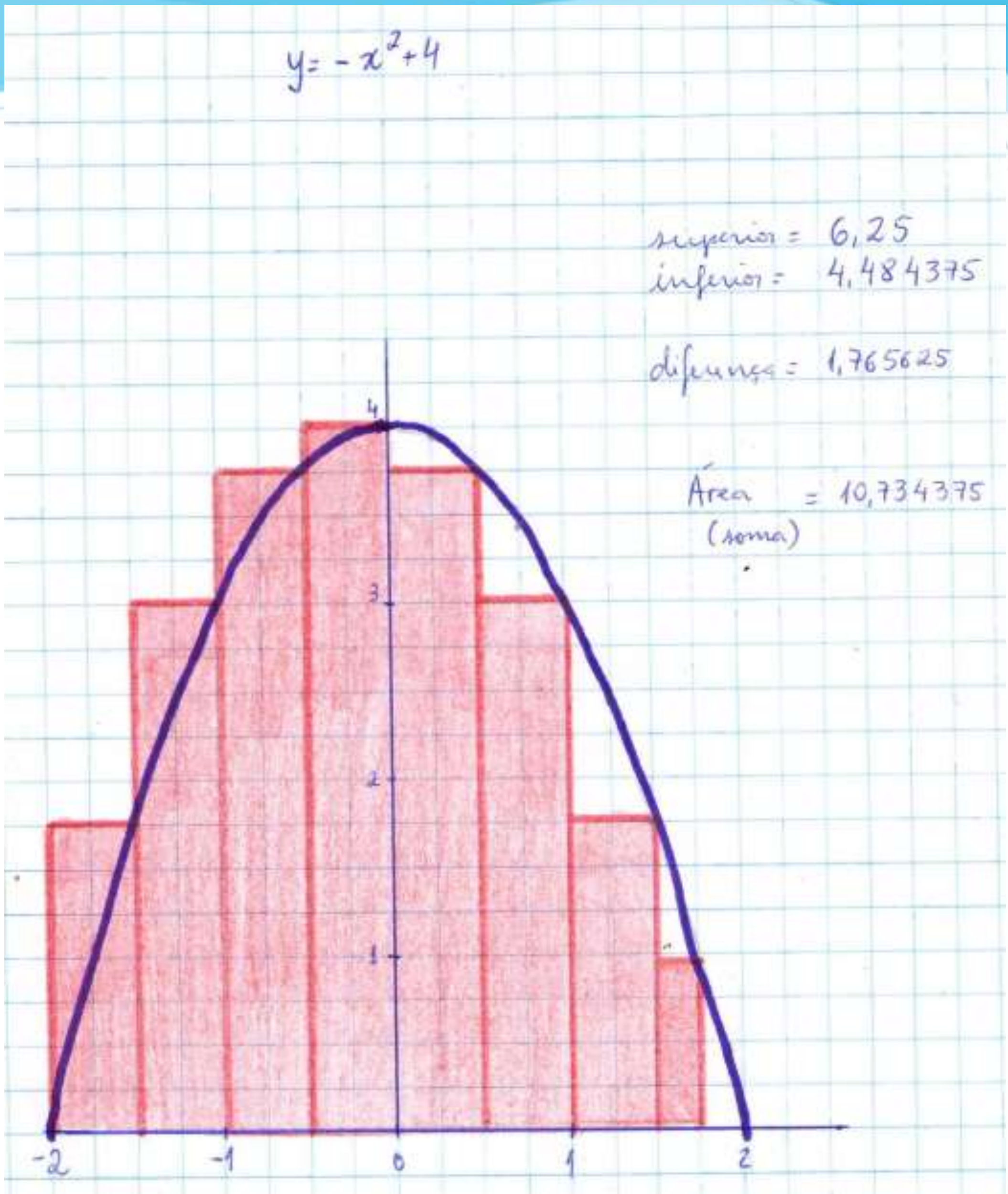


Figura 29: Gráfico da função $y = 4 - x^2$ com 8 retângulos

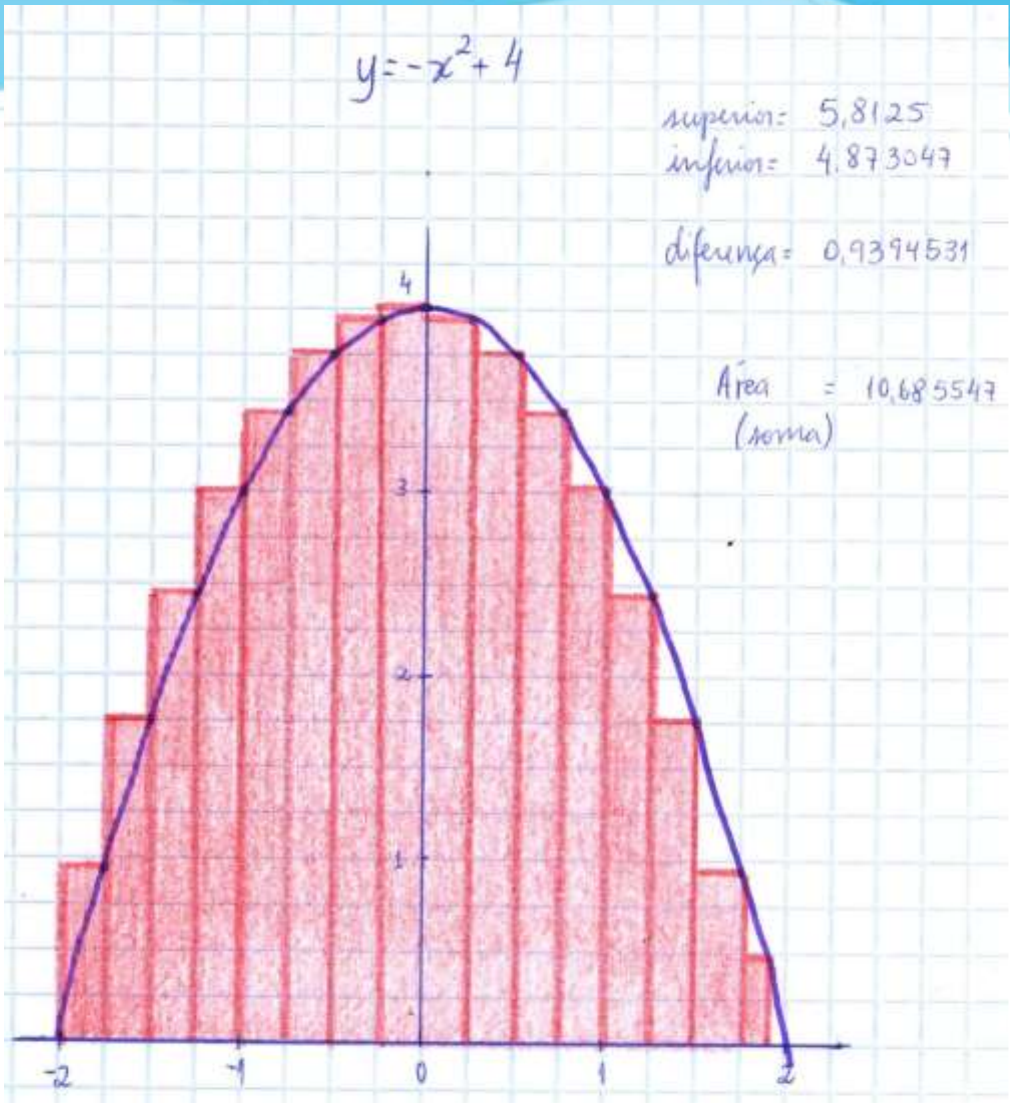


Figura 30 : Gráfico da função $y = 4 - x^2$ com 16 retângulos

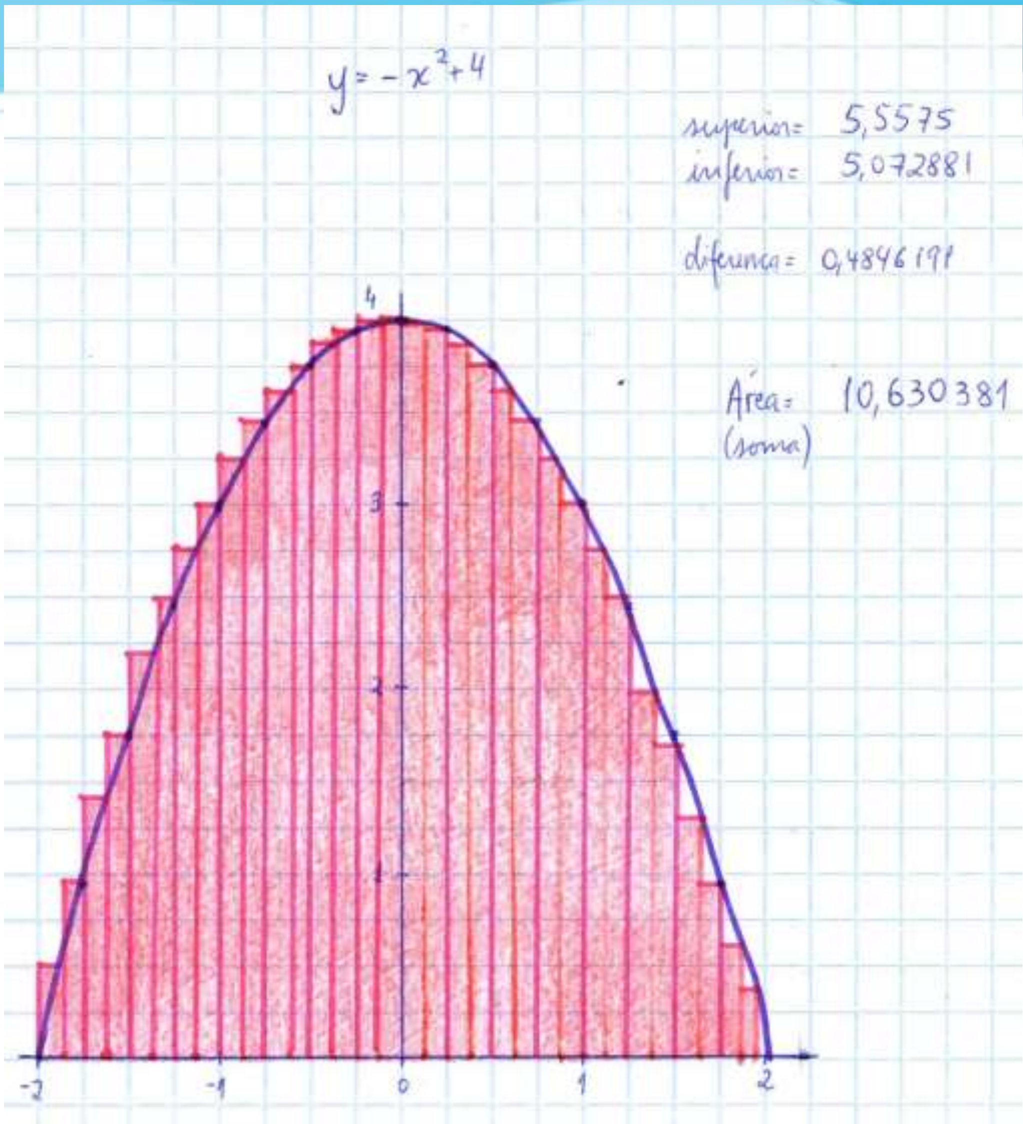


Figura 31 : Gráfico da função $y = 4 - x^2$ com 32 retângulos

Construído o gráfico, a atividade visa calcular a área de cada parábola, utilizando os retângulos superiormente e inferiormente limitados.

Orientei para desenharem o eixo das ordenadas, não necessariamente em $x = 0$, mas sim no eixo de simetria da parábola. Nas três primeiras funções, o eixo de simetria é onde $x = 0$, mas nas outras duas, isso não acontece. O motivo é que fica mais fácil fazer a divisão da distância entre a raiz e o eixo de simetria. Essa divisão será feita quatro vezes.

No caso da função $y = 4 - x^2$, os pontos em que a parábola toca o eixo das abscissas são - 2 e 2 e o eixo de simetria é em $x = 0$.

Na primeira folha, deverão ser feitos quatro retângulos, três com base medindo 1 e o quarto com base medindo 0,5.

Na segunda folha, deverão ser feitos oito retângulos, sete com base medindo 0,5 e o oitavo com base medindo 0,25.

Na terceira folha, deverão ser feitos dezesseis retângulos, quinze com base medindo 0,25 e o décimo sexto com base medindo 0,125.

Na quarta folha, deverão ser feitos trinta e dois retângulos, trinta e um com base medindo 0,125 e o trigésimo segundo com base medindo 0,0625.

Para calcular as alturas, basta substituir os valores de x e calcular o valor de y.

Para uma maior exatidão dos cálculos, recomendo a utilização de calculadoras e a não arredondar os valores. O ideal seria utilizar o programa Excel, pois poderiam aprender a inserir fórmulas, organizar as informações e ver os cálculos prontos ao se inserir os dados.

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	0,875	0,484375	0,390625	1,359375
8	0,78125	0,560547	0,2207031	1,3417969
16	0,726563	0,609131	0,1174316	1,3356934
32	0,697266	0,636688	0,0605774	1,3339541

Tabela 4: Resultados obtidos para a função $y = 4 - x^2$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	7,0	3,875	3,125	10,875
8	6,25	4,484375	1,765625	10,734375
16	5,8125	4,873047	0,9394531	10,685547
32	5,5575	5,072881	0,4846191	10,630381

Tabela 5: Resultados obtidos para a função $y = 4 - x^2$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	23,625	13,07813	10,546875	36,703125
8	21,09375	15,19349	5,9002594	36,287241
16	19,61716	16,44651	3,1706543	36,063665
32	18,82617	17,19058	1,6355896	36,016755

Tabela 6: Resultados obtidos para a função $y = 9 – x^2$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	23,625	13,07813	10,546875	36,703125
8	21,09375	15,13477	5,9589844	36,228516
16	19,61719	16,47278	3,1444043	36,089971
32	18,82617	17,19058	1,6355896	36,016754

Tabela 7: Resultados obtidos para a função $y = – x^2 – 2x + 8$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	14,0	7,75	6,25	21,75
8	12,5	8,96875	3,53125	21,46875
16	11,625	9,746094	1,8789063	21,371094
32	11,15625	10,18701	0,9692383	21,343262

Tabela 8: Resultados obtidos para a função $y = – 2x^2 – 4x + 6$

Abaixo, uma tabela com as medidas da base, da altura e a área compreendida entre o eixo x e a parábola de cada uma das funções:

Função	Medida da base	Medida da altura	Área aproximada
$y = 1 – x^2$	2	1	1,3339541
$y = 4 – x^2$	4	4	10,630381
$y = 9 – x^2$	6	9	36,016755
$y = – x^2 – 2x + 8$	6	9	36,016754
$y = – 2x^2 – 4x + 6$	4	8	21,343262

Tabela 9: Medidas das bases e alturas de cada função

Feito os gráficos, fizemos a tabulação dos dados calculados:

Observando os valores atentamente, podemos constatar que as diferenças entre as áreas superiormente e inferiormente limitadas vai diminuindo conforme aumentamos a quantidade de triângulos. Isso acontece, porque a parábola vai ficando cada vez mais preenchida.

3.2 Cálculo da área de uma parábola

Porém, a área total não varia tanto, mas converge para o valor real da área sob a parábola.

Podemos solicitar aos alunos que pensem em algum cálculo usando base e altura e que se chegue próximo ao resultado. Por exemplo, se somarmos, vemos facilmente que não é tão simples.

Podemos solicitar que multipliquem a base pela altura e vejam se há uma constante que possamos multiplicar por esse produto e chegar ao valor da área.

Vejamos linha por linha, chamando essa constante de x:

$$2.1.x = 1,3339541$$

$$\Rightarrow 2x = 1,3339541$$

$$\Rightarrow x = \frac{1,3339541}{2} = 0,66697705...$$

$$4.4.x = 10,630381$$

$$\Rightarrow 16x = 10,630381$$

$$\Rightarrow x = \frac{10,630381}{16} = 0,66268988...$$

$$6.9.x = 36,016755$$

$$\Rightarrow 54x = 36,016755$$

$$\Rightarrow x = \frac{36,016755}{54} = 0,6669769...$$

$$6.9.x = 36,016754$$

$$\Rightarrow 54x = 36,016754$$

$$\Rightarrow x = \frac{36,016755}{54} = 0,6669769259...$$

$$4.8.x = 21,343262$$

$$\Rightarrow 32x = 21,343262$$

$$\Rightarrow x = \frac{21,343262}{32} = 0,6669769375...$$

Observe que os valores de x são muito próximos e podemos constatar que, se fizemos outro gráfico com 64 retângulos, chegaríamos mais próximo do resultado da área da parábola e, consequentemente, aos valores de x convergiriam para a dízima periódica 0,66666...

Foi possível provar, então, que esse valor é uma constante. Logo, para se calcular a área de uma parábola, basta multiplicar pelo produto da medida da base pela altura da parábola.

Após deduzirmos a fórmula, os alunos podem perguntar:

- Por que usando as medidas da área sob a linha de 3 pontos, o resultado deu diferente?

De fato, se multiplicarmos os valores obtidos na quadra,

$$13,44 \,.\, 7,80 \,.23 = 69,888 \,,$$

que é muito diferente do valor calculado, de 81,5514. Isso se deve, pelo fato da nossa linha de 3 pontos não ser uma parábola.

3.3 habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta

Esta atividade está prevista na BNCC (2017), com as seguintes habilidades:

• (EF07MA26) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

• (EF08MA16) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

• (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

• (M13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Atividade 4 – Cálculo da distância percorrida por um móvel

Utilização de vídeo do 1° vôo tripulado do foguete sub-orbital New Shepard, desenvolvido e construído pela Blue Origin, ocorrida no dia 20 de julho de 2021, no Centro de Lançamentos Suborbitais de West Texas, em Corn Ranch, Texas, Estados Unidos.

Este vídeo foi tirado da página https://www.youtube.com/watch?v=tMHhXzpwupU&list=PLAXaf_0Jgf8EiTjSkqnbrOKCu0yDIP_5U&index=2, do canal Blue Origin, do Youtube. O vídeo tem a duração de 2h12m53s, mas a ignição se dá apenas em 1h41m39s.

Este vôo teve quatro tripulantes: Jeff Bezos, fundador da Blue Origin, seu irmão Mark Bezos, a aviadora norte americana, de 82 anos, Wally Funk e o jovem holandês, de 18 anos, Olivier Daemen.

A viagem foi até o limite da atmosfera terrestre, atingindo uma velocidade superior à 3 588 km/h e alcançando uma altitude acima de 107 km. O foguete levou 4 minutos e 6 segundos para atingir a altura máxima e começar o seu retorno, que durou 3 minutos e 21 segundos até a aterrissagem.

O vídeo em si é muito interessante, pois mostra a evolução da tecnologia e da volta à exploração espacial, proporcionando a pessoas sem treinamento, poderem fazer um vôo até o limite do espaço sideral.

No vídeo, os marcadores de velocidade e altitude estão em milhas por hora e pés, respectivamente.

Enquanto assistia ao vídeo, notei que o tempo mostrado no vídeo inicia-se a partir da ignição, mas o foguete só ganha velocidade a partir do 7° segundo. Então, fiz o download do vídeo e o editei, inserindo um cronômetro a partir de quando o foguete inicia a subida, ou seja, quando realmente inicia seu deslocamento.

No programa de edição que usei, o Camtasia, consegui, a cada "virada" de segundo, pausar o vídeo e anotar, aproximadamente, a velocidade e a altura que o foguete estava em cada um dos 236 segundos que esteve em deslocamento para cima.

Caso o professor não tenha um editor de vídeo, as anotações de velocidade e altitude podem ser anotadas no próprio Youtube, colocando a velocidade de reprodução em 0,25x e ir pausando à medida em que vão mudando os segundos do cronômetro.

O vídeo utilizado para esta atividade tem a duração de 7 minutos e 45 segundos. Contém, desde a contagem regressiva de 10 segundos para a ignição, o vôo de ida e de volta, até a sua aterrissagem, retornando à base de lançamento. Nele, inseri um cronômetro com a contagem iniciando no momento em que o foguete inicia seu deslocamento. O vídeo está disponível em https://drive.google.com/file/d/17XdOvohwc3fXtwG2x0MBKa9hSFlj4YgQ/view?usp=drive_link

De posse dos dados, tabulei no Excel e dividi em 6 arquivos (de 40 em 40 segundos), para que coubesse no papel quadriculado. Na folha seguinte, podemos ver as tabelas 10, 11 e 12, com o tempo de vôo, em segundos; a velocidade, em milhas por hora; e a altura no instante, em metros.

Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)
1	10	1,83	21	259	1176	41	492	4701	61	642	9714
2	21	9,45	22	273	1297	42	499	4919	62	652	10009
3	32	19,81	23	287	1418	43	505	5139	63	663	10304
4	45	37,80	24	301	1551	44	511	5367	64	676	10615
5	57	62,48	25	316	1699	45	518	5602	65	688	10909
6	67	86,26	26	330	1837	46	525	5827	66	702	11208
7	80	125,27	27	344	1982	47	532	6059	67	717	11537
8	93	163,37	28	358	2139	48	539	6298	68	731	12167
9	105	206,65	29	373	2304	49	546	6541	69	747	12197
10	117	258,47	30	388	2477	50	553	6787	70	761	12536
11	129	311,20	31	403	2656	51	560	7036	71	777	12880
12	142	374,29	32	417	2841	52	567	7284	72	792	13222
13	154	435,56	33	430	3022	53	575	7550	73	808	13583
14	167	508,41	34	441	3214	54	583	7809	74	823	13940
15	180	584,30	35	452	3420	55	590	8077	75	839	14327
16	193	670,86	36	460	3652	56	597	8332	76	856	14698
17	206	761,70	37	468	3832	57	604	8601	77	873	15085
18	219	851,00	38	475	4040	58	612	8879	78	892	15496
19	232	954,02	39	480	4257	59	621	9160	79	910	15899
20	245	1060,1	40	486	4478	60	631	9441	80	928	16294

Tabela 10: Tempo, velocidade e altura da 1ª viagem tripulada do foguete New Shepard. O tempo varia de 1 a 80 segundos

Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)
81	947	16722	101	1467	27314	121	2219	43684	141	2016	64245
82	966	17124	102	1498	27991	122	2230	44665	142	1995	65157
83	987	17579	103	1532	28682	123	2229	45679	143	1974	66028
84	1008	18017	104	1566	29320	124	2226	46676	144	1951	66941
85	1029	18463	105	1601	30070	125	2222	47671	145	1929	67814
86	1052	18948	106	1636	30809	126	2219	48684	146	1909	68652
87	1074	19395	107	1673	31550	127	2215	49638	147	1887	69502
88	1098	19910	108	1707	32276	128	2213	50615	148	1868	70376
89	1122	20387	109	1746	33032	129	2210	51624	149	1847	71158
90	1149	20926	110	1784	33853	130	2206	52633	150	1826	71997
91	1173	21435	111	1824	34676	131	2204	53600	151	1805	72780
92	1201	21977	112	1863	35513	132	2202	54586	152	1784	73580
93	1226	22509	113	1900	36309	133	2189	55589	153	1761	74374
94	1253	23053	114	1942	37182	134	2168	57671	154	1740	75174
95	1282	23631	115	1982	38047	135	2145	58655	155	1719	75951
96	1312	24235	116	2026	38961	136	2123	59645	156	1698	76701
97	1342	24805	117	2069	39877	137	2102	60557	157	1676	77456
98	1371	25412	118	2110	40770	138	2082	61494	158	1654	78228
99	1401	26044	119	2153	41690	139	2059	62416	159	1632	78968
100	1434	26679	120	2194	42716	140	2038	63334	160	1611	79679

Tabela 11: Tempo, velocidade e altura da 1ª viagem tripulada do foguete New Shepard. O tempo varia de 81 a 160 segundos

Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)
161	1591	80393	181	1163	92748	201	740	101262	221	317	105988
162	1570	81089	182	1143	93246	202	718	101595	222	295	106122
163	1548	81770	183	1122	93761	203	698	101893	223	274	106255
164	1526	82500	184	1101	94229	204	676	102215	224	253	106371
165	1504	83178	185	1079	94746	205	654	102513	225	232	106481
166	1484	83861	186	1059	95208	206	634	102796	226	210	106580
167	1463	84484	187	1037	95668	207	612	103080	227	189	106668
168	1440	85186	188	1015	96147	208	591	103350	228	168	103702
169	1419	85787	189	995	96579	209	570	103603	229	147	106818
170	1398	86418	190	972	97044	210	549	103859	230	125	106880
171	1378	87039	191	951	97475	211	527	104100	231	105	106931
172	1356	87651	192	931	97890	212	507	104336	232	83	106975
173	1333	88289	193	910	98308	213	485	104560	233	63	107007
174	1312	88870	194	888	98710	214	464	104772	234	41	107031
175	1291	89450	195	867	99098	215	443	104967	235	18	107045
176	1271	90026	196	846	99487	216	422	105168	236	0	107049
177	1248	90587	197	825	99861	217	401	105345	237	-22	107043
178	1228	91131	198	804	100225	218	379	105523			
179	1207	91676	199	782	100581	219	359	105682			
180	1185	92222	200	762	100914	220	337	105839			

Tabela 12: Tempo, velocidade e altura da 1ª viagem tripulada do foguete New Shepard. O tempo varia de 161 a 236 segundos

Sugeri que os alunos se dividissem em 6 grupos e cada grupo ficou incumbido de fazer o gráfico $v \times t$, onde v é a velocidade, em milhas por hora e t é o tempo, em segundos.

Os gráficos ficaram assim:

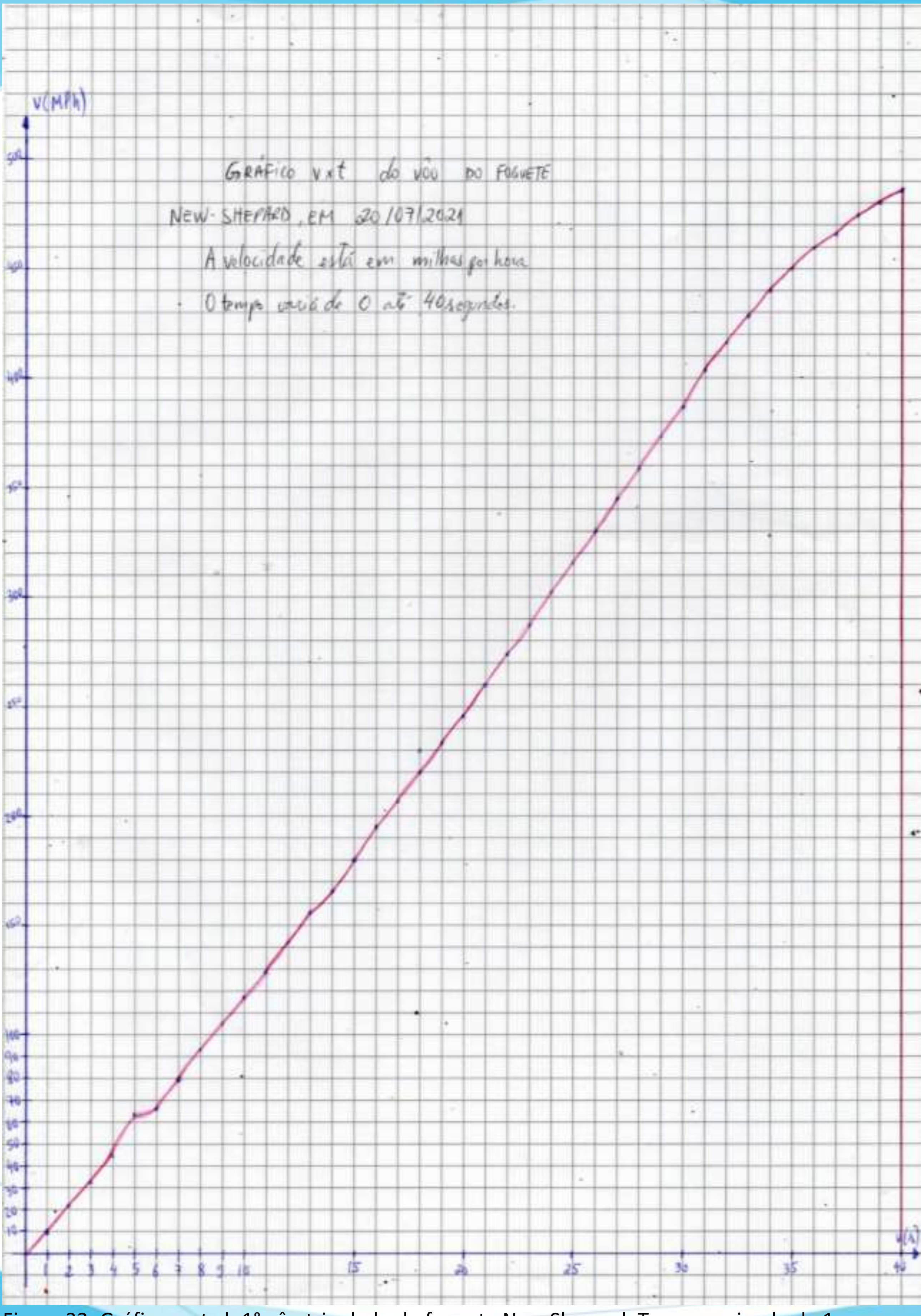


Figura 32: Gráfico *v* ×*t*, do1° vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 1 a 40 segundos.

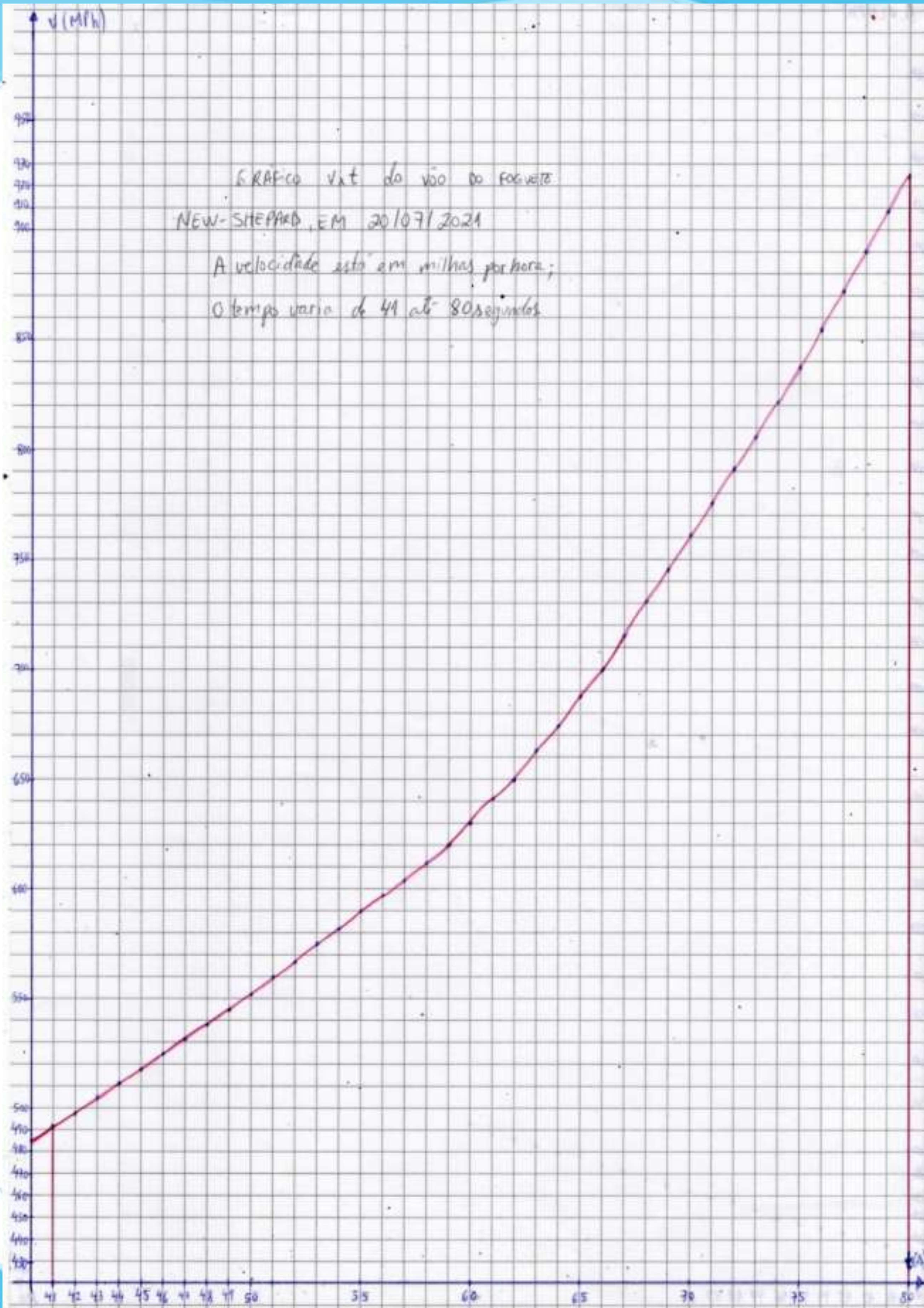


Figura 33: Gráfico *v* ×*t*, do1° vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 41 a 80 segundos.

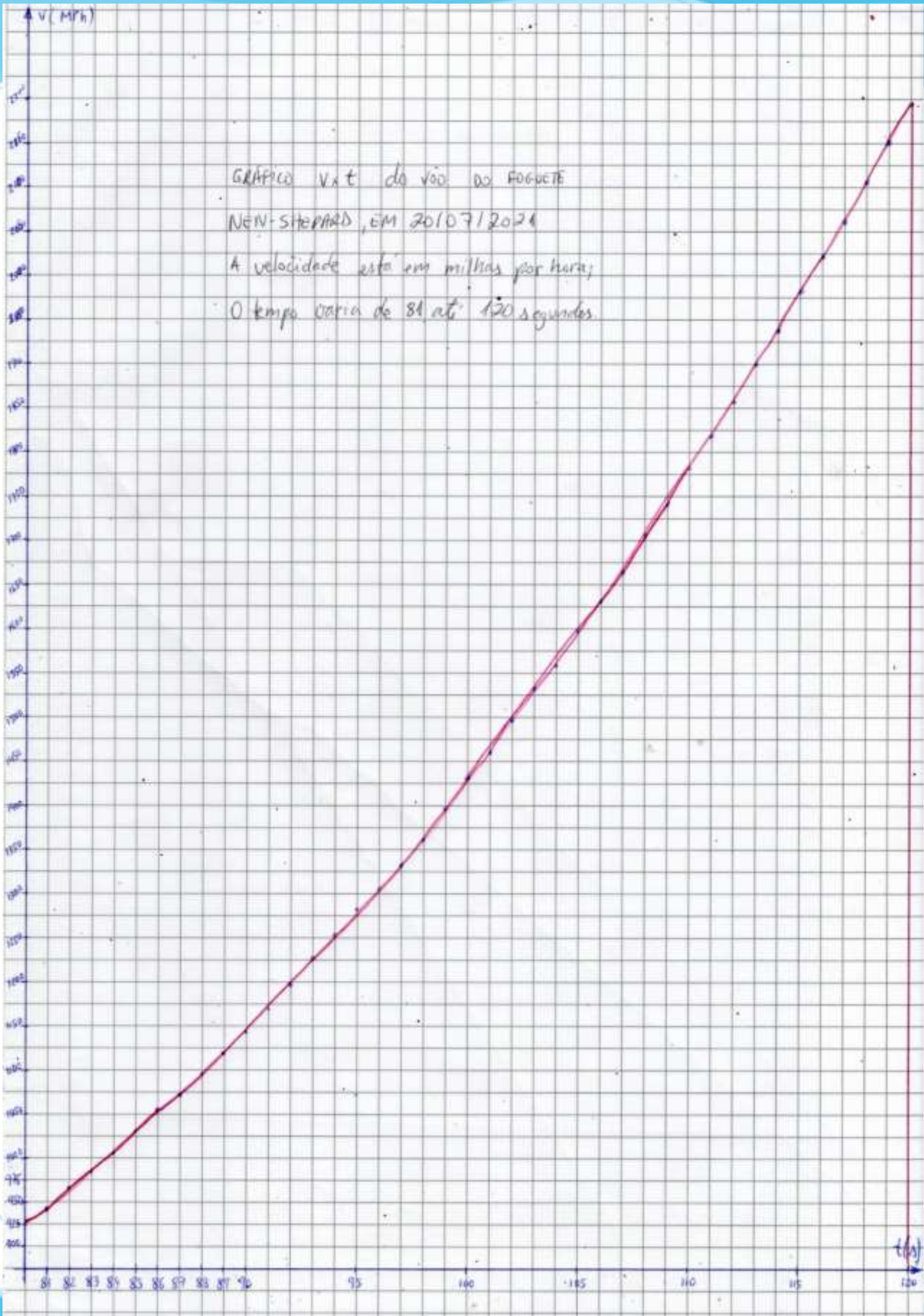


Figura 34: Gráfico *v* ×*t*, do1° vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 81 a 120 segundos.

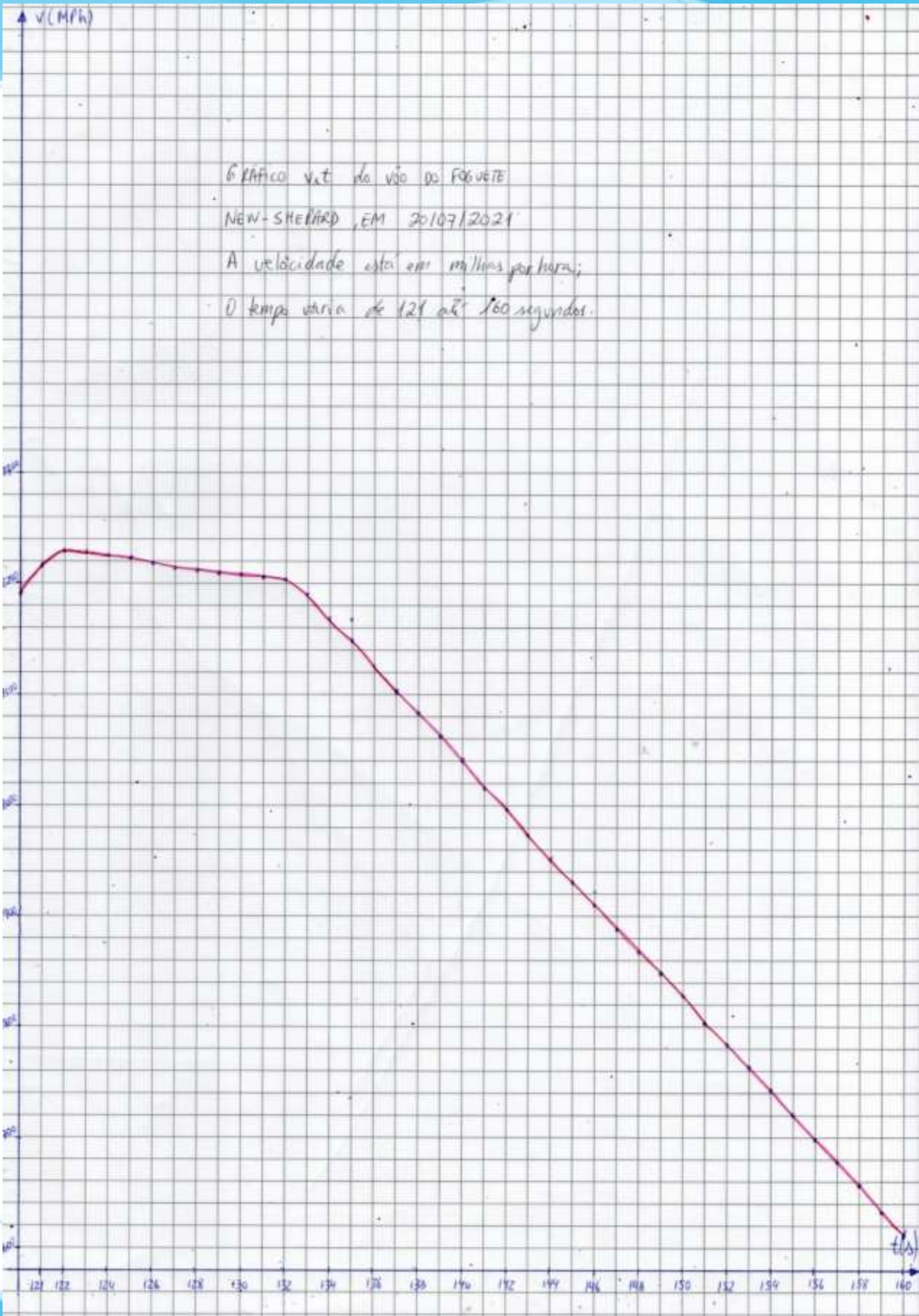


Figura 35: Gráfico $v \times t$, do1° vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 121 a 160 segundos.

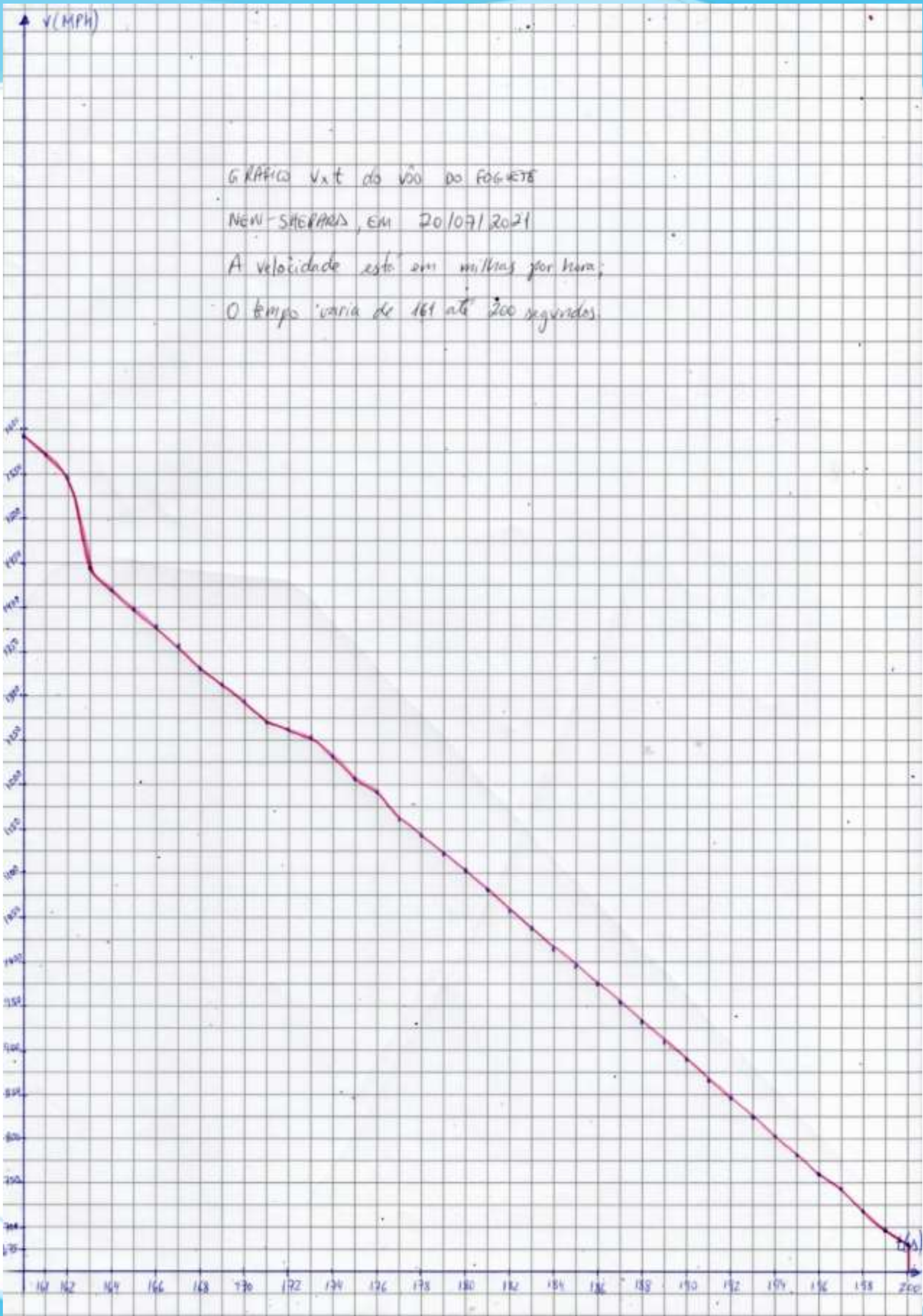


Figura 36: Gráfico *v* ×*t*, do1° vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 161 a 200 segundos.

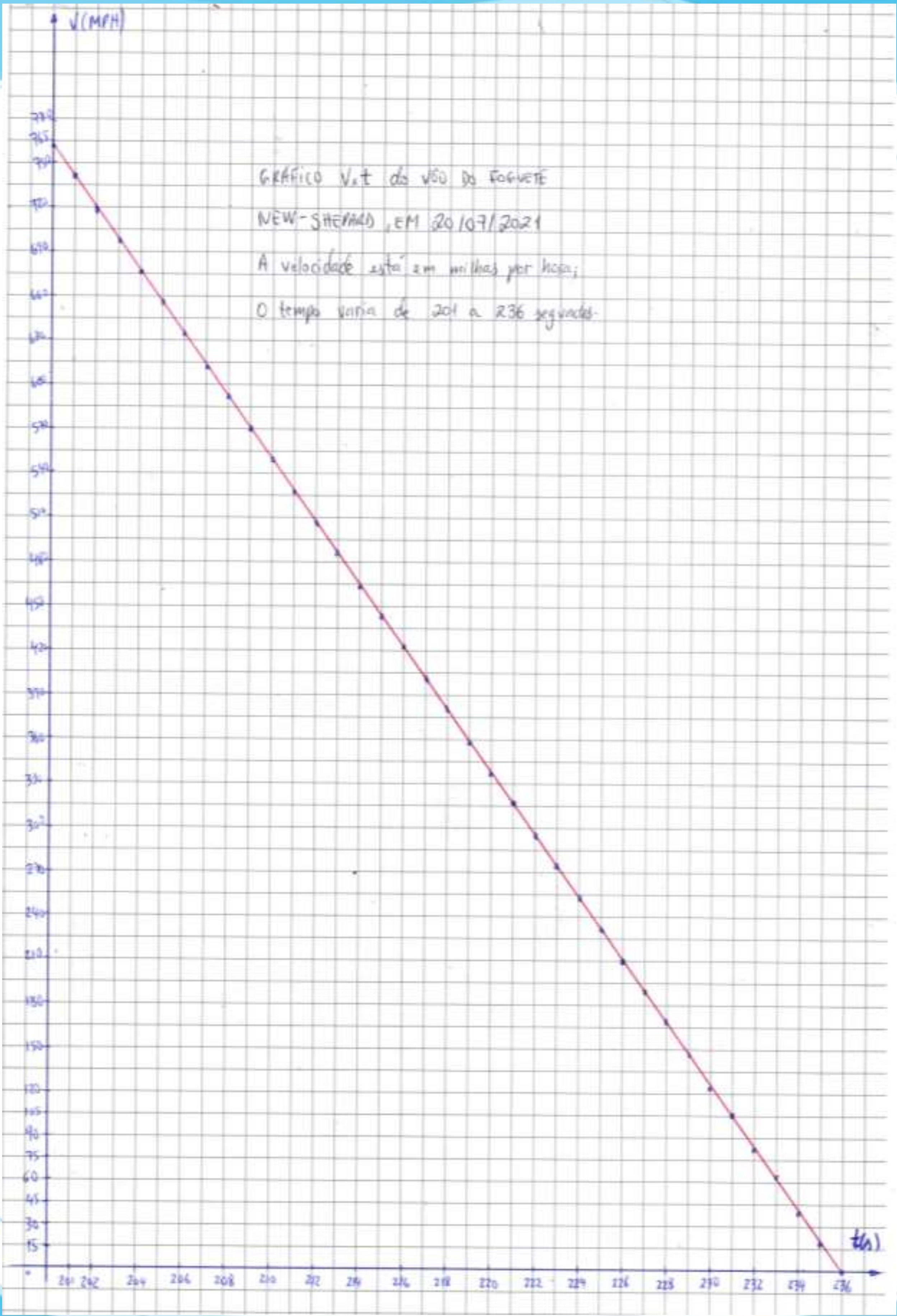


Figura 37: Gráfico *v* ×*t*, do1° vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 201 a 236 segundos.

Para calcular a distância percorrida (ou altura, neste caso), basta multiplicar a velocidade pelo tempo. Contudo, precisamos ajustar as unidades de medida, pois a velocidade está em milhas por hora e o tempo está em segundos.

Como 1 hora possui 60 minutos x 60 segundos, então cada hora tem 3600 segundos.

Portanto, para converter as milhas por hora em milhas por segundo, basta dividir as velocidades por 3600.

No caso do gráfico da figura 32, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete nos primeiros 40 segundos. Para isso, dividimos em 1 triângulo (t=0 a t=1) e 39 trapézios. Vamos calcular a área de cada polígono. O resultado será a soma de todos os 40 polígonos. Para o triângulo, temos um triângulo com base=1 e altura igual a 20. Portanto a área do triângulo será:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1\,.10}{2} = 5\ \textit{milhas} \qquad (I)$$

A área de um trapézio é dada pela fórmula:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B+b)\,.\,h}{2}, \quad \textit{onde}:$$

• B é a base maior;

• b é a base menor; e

• h é a altura (que é igual a 1 em todos os trapézios).

Vamos numerar os trapézios da esquerda para a direita como T_1, T_2, T_3,… , T_{39}.

A soma das áreas dos trapézios é dada pela fórmula:

$$\frac{(B_1+b_1)\,.\,h}{2} + \frac{(B_2+b_2)\,.\,h}{2} + \frac{(B_3+b_3)\,.\,h}{2} + \frac{(B_4+b_4)\,.\,h}{2} + \ldots + \frac{(B_{39}+b_{39})\,.\,h}{2},$$

onde $B1$ é a base maior do trapézio 1, $b1$ é a base menor do trapézio 1, $B2$ é a base maior do trapézio 2, e assim por diante.

Como a altura h é igual a 1 em todos os trapézios, podemos suprimí-la, pois o 1 é neutro na multiplicação. A área procurada será a metade da soma das bases maiores e menores. Assim:

$$A = \frac{(B1 + b1) + (B2 + b2) + (B3 + b3) + \ldots + (B39 + b39)}{2}$$

Como a base maior de T_1 é a base menor de T_2, a base maior de T_2 é a base menor de T_3, e assim por diante, temos:

$$B_1 = b_2, B_2 = b_3, B_3 = b_4, \ldots, B_{38} = b_{39}.$$

Portanto, nossa soma pode ser:

$$A = \frac{b1 + 2b2 + 2b3 + 2b4 + \ldots + 2\mathrm{b}38 + \mathrm{B}39}{2}$$

Esses valores podem ser tirados da tabela 10, onde b_1 é a velocidade no instante t = 1 s, b_2 é a velocidade no instante t = 2 s, ..., b_{38} é a velocidade no instante t=39 e B_{39} é a velocidade no instante t = 40.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(10 + 2.21 + 2.32 + 2.45 + 2.57 + 2.67 + 2.80 + 2.93 + 2.105 + 2.117 + 2.129 + 2.142 + 2.154 + 2.167 + 2.180) +}{2}$$

$$\frac{(2.193 + 2.206 + 2.219 + 2.232 + 2.245 + 2.259 + 2.273 + 2.287 + 2.301 + 2.316 + 2.330 + 2.344 + 2.358 + 2.373) +}{2}$$

$$\frac{(2.388 + 2.403 + 2.417 + 2.430 + 2.441 + 2.452 + 2.460 + 2.468 + 2.475 + 2.480 + 2.486)}{2} =$$

$$\frac{19974}{2} = 9987\,\frac{\mathrm{M\,.\,s}}{h}$$

Somando às 5 milhas do triângulo de *(I)*, temos uma distância percorrida de: 10 002 milhas por hora vezes segundos.

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 10 002 por 3600 = 2,7783333...

Como 1 milha equivale a 1609,344 metros, então 2,7783333... equivale a 4 471,29 metros.

Segundo os dados da tabela 10, no instante t = 40 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 4 478 metros.

Tivemos aí uma diferença de 10,29, uma margem de erro de 0,15%, que é uma margem muito pequena. Portanto é um valor aceitável.

Agora, baseado no gráfico da figura 33 acima, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 41 a 80 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (41-80 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Identificaremos os trapézios do gráfico da figura 33 como T_{41}, T_{42}, T_{43}, ..., T_{80}.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos primeiros 40 segundos após o lançamento do foguete, nossa soma pode ser:

$$\frac{(b_{41} + 2b_{42} + 2b_{43} + 2b_{44} + \ldots + 2b_{79} + B_{80})}{2}$$

Esses valores podem ser tirados da Figura 29, onde b_{41} é a velocidade no instante t = 41 s, b_{42} é a velocidade no instante t = 42 s, ..., b_{80} é a velocidade no instante t=79 e B_{80} é a velocidade no instante t=80.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(486 + 2.492 + 2.499 + 2.505 + 2.511 + 2.518 + 2.518 + 2.525 + 2.532 + 2.539 + 2.546 + 2.553 + 2.560 + 2.567) +}{2}$$

$$\frac{(2.575 + 2.583 + 2.590 + 2.597 + 2.604 + 2.612 + 2.621 + 2.631 + 2.642 + 2.652 + 2.663 + 2.676 + 2.688 + 2.702) +}{2}$$

$$\frac{(2.717 + 2.731 + 2.747 + 2.761 + 2.777 + 2.792 + 2.808 + 2.823 + 2.839 + 2.856 + 2.873 + 2.892 + 2.910 + 928)}{2} =$$

$$\frac{52832}{2} = 26416\,\frac{\mathrm{M\,.\,s}}{h}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 26 416 por 3600 = 7,337777...

Convertendo as milhas em metros, faremos 7,337777... x 1609,344 =

11 809,01 metros.

Segundo os dados da tabela da figura 29, no instante t = 80 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 16 294 metros.

Mas aqui, temos que nos atentar que o foguete já percorreu uma distância nos primeiros 40 segundos. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 40 segundos, que foi de 4471,29 metros, temos: 4471, 29 + 11809, 01 = 16 280, 3

Dos 16 280,3 m, calculados, para os 16 294 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 13,70 m, o que nos dá uma margem de erro de 0,084%, que, é uma margem muito pequena.

Portanto é um valor aceitável.

Utilizando o terceiro gráfico, da figura 34, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 81 a 120 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (81-120 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Identificaremos os trapézios do gráfico da figura 34 como T_{81}, T_{82}, T_{83}, ..., T_{120}.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos cálculos anteriores, nossa soma pode ser:

$$\frac{(b_{81} + 2b_{82} + 2b_{83} + 2b_{84} + \ldots + 2b_{119} + B_{120})}{2}$$

Esses valores podem ser tirados da tabela 11, onde b_{81} é a velocidade no instante t = 81 s, b_{82} é a velocidade no instante t = 82 s, ..., b_{120} é a velocidade no instante t=119 e B_{120} é a velocidade no instante t=120.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(928 + 2.947 + 2.966 + 2.987 + 2.1008 + 2.1029 + 2.1052 + 2.1074 + 2.1098 + 2.1122 + 2.1149 + 2.1173 + 2.1201 + 2.1226) +}{2}$$

$$\frac{(2.1253 + 2.1282 + 2.1312 + 2.1342 + 2.1371 + 2.1401 + 2.1434 + 2.1467 + 2.1498 + 2.1532 + 2.1566 + 2.1601 + 2.1636) +}{2}$$

$$\frac{(2.1673 + 2.1707 + 2.1746 + 2.1784 + 2.1824 + 2.1863 + 2.1900 + 2.1942 + 2.1982 + 2.2026 + 2.2069 + 2.2110 + 2.2153 + 2194) =}{2}$$

$$\frac{118\,134}{2} = 59\,067\,\frac{\mathrm{M.s}}{h}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 59 067 por 3600 = 16,4075.

Convertendo as milhas em metros, faremos 16,4075 x 1609,344 = 26 405,31 metros.

Segundo os dados da tabela 11, no instante t = 120 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 42 716 metros.

Como já sabemos, precisamos somar a este valor de 26 405,31 m, o valor calculado nos primeiros 80 segundos, que foi de 16 280,3 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 80 segundos, temos: 26 405, 31+16 280, 3 = 42 685, 61.

Dos 42 685,61 m, calculados, para os 42 716 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 30,39 m, o que nos dá uma margem de erro de 0,071%, que ainda é uma margem ínfima. Portanto, é um valor aceitável.

Vamos trabalhar agora com o quarto gráfico da figura 35. Vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 121 a 160 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (121-160 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Aqui, podemos notar um ponto de inflexão em nosso gráfico, pois é onde ele alcança a velocidade máxima, em t = 122 s e, a partir daí, inicia-se uma desaceleração e a velocidade diminui.

Identificaremos os trapézios do gráfico da figura 35 como T_{121}, T_{122}, T_{123}, ..., T_{160}.

Aqui, temos, nos trapézios 121 e 122, as bases menores em t=121 e t=122, respectivamente.

A partir de T_{123}, temos b_{123} em t=123, b_{124} em t=124, e assim por diante, até b_{160} em t=160.

A diferença, em relação aos cálculos anteriores é que, em T_{122}, temos que B_{122} = B_{123}, e, a partir de T_{123}, b_{123} = B_{124}, b_{124} = B_{125}, ...b_{159} = B_{160}.

Sendo assim, nossa soma pode ser obtida por:

$$\frac{(b_{121} + 2b_{122} + 2B_{122} + 2b_{123} + 2b_{124} + \ldots + 2b_{159} + b_{160})}{2}$$

Esses valores podem ser tirados da tabela 11, onde b_{121} é a velocidade no instante t = 121 s, b_{122} é a velocidade no instante t = 122 s, ..., b_{160} é a velocidade no instante t = 159 e B_{160} é a velocidade no instante t=160.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(2194 + 2.2219 + 2.2230 + 2.2229 + 2.2226 + 2.2222 + 2.2219 + 2.2215 + 2.2213 + 2.2210 + 2.2206 + 2.2204 + 2.2202 + 2.2189) +}{2}$$

$$\frac{(2.2168 + 2.2145 + 2.2123 + 2.2102 + 2.2082 + 2.2059 + 2.2038 + 2.2016 + 2.1995 + 2.1974 + 2.1951 + 2.1929 + 2.1909) +}{2}$$

$$\frac{(2.1887 + 2.1868 + 2.1847 + 2.1826 + 2.1805 + 2.1784 + 2.1761 + 2.1740 + 2.1719 + 2.1698 + 2.1676 + 2.1654 + 2.1632 + 1611) =}{2}$$

$$\frac{160\,149}{2} = 80\,075\,\frac{\mathrm{M.s}}{h}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 80 075 por 3600 = 22, 243055555...

Convertendo as milhas em metros, faremos 22,24305555... x 1609,344 = 35 796,73 metros.

Segundo os dados da tabela 11, no instante t=160 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 79 679 metros.

Como já sabemos, precisamos somar à este valor de 35 796,73 m, o valor calculado nos primeiros 120 segundos, que foi de 42 685,61 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 80 segundos, temos:

35 796, 73 + 42 685, 61 = 78 482, 34.

Dos 78 482,34 m, calculados, para os 79 679 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 1 196,66 m, o que nos dá uma margem de erro de 1,50%, que, embora tenha aumentado em relação aos primeiros 80 segundos, ainda é uma margem muito pequena. Portanto é um valor aceitável.

Partindo para o quinto gráfico, da figura 36, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 161 a 200 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (161-200 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Identificaremos os trapézios do gráfico da figura 36 como T_{161}, T_{162}, T_{163}, ..., T_{200}.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos cálculos anteriores, nossa soma pode ser:

$$\frac{(B_{161} + 2B_{162} + 2B_{163} + 2B_{164} + \ldots + 2B_{199} + b_{200})}{2}$$

Esses valores podem ser tirados da tabela 12, onde b_{161} é a velocidade no instante t=161s, b_{162} é a velocidade no instante t = 162 s, ..., B_{200} é a velocidade no instante t=199 e b_{200} é a velocidade no instante t=200.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(1611 + 2.1591 + 2.1570 + 2.1548 + 2.1526 + 2.1504 + 2.1484 + 2.1463 + 2.1440 + 2.1419 + 2.1398 + 2.1378 + 2.1356) +}{2}$$

$$\frac{(2.1333 + 2.1312 + 2.1291 + 2.1271 + 2.1248 + 2.1228 + 2.1207 + 2.1185 + 2.1163 + 2.1143 + 2.1122 + 2.1101) +}{2}$$

$$\frac{(2.1079 + 2.1059 + 2.1037 + 2.1015 + 2.995 + 2.951 + 2.931 + 2.910 + 2.888 + 2.867 + 2.846 + 2.825 + 2.824 + 2.782 + 762) =}{2}$$

$$\frac{94\,857}{2} = 47\,429\,\frac{\mathrm{M}\,.\,\mathrm{s}}{h}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 47 429 por 3600 = 13,174722222...

Convertendo as milhas em metros, faremos 13,17472222... x 1609,344 = 21 202,66 metros.

Segundo os dados da tabela 12, no instante t=200 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 100 914 metros.

Como já sabemos, precisamos somar à este valor de 21 202,66 m, o valor calculado nos primeiros 160 segundos, que foi de 78 482,34 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 80 segundos, temos:

21 202, 66+78 482, 34 = 99 685.

Dos 99 685 m calculados, para os 100 914 m do vídeo, tivemos uma diferença de 1 229 m, o que nos dá uma margem de erro de 1,22%, que é uma margem pequena, mas considerável, já que estamos lidando com cálculo de áreas de trapézios. Esta margem de erro se deve à falta de instrumentos mais precisos no momento das leituras de velocidade, pois elas foram obtidas pausando-se o vídeo do Youtube. Portanto, apesar da diferença, ainda é um valor aceitável.

Finalmente, chegamos ao sexto e último gráfico, da figura 37.

Vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 201 a 236 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 1 triângulo e 35 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (201-236 s) será a soma de todos os 36 polígonos.

Identificaremos os trapézios do gráfico da figura 37 como T_{201}, T_{202}, T_{203}, ..., T_{235}.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos cálculos anteriores, nossa soma pode ser:

$$\frac{(B_{201} \ + \ 2B_{202} \ + \ 2B_{203} + \ldots + 2B_{234} \ + \ b_{235})}{2}$$

Esses valores podem ser tirados da tabela 12, onde b_{201} é a velocidade no instante t=201 s, b_{202} é a velocidade no instante t = 202 s, ..., b_{231} é a velocidade no instante t = 235 s e no instante t = 236 s, o foguete atinge altura máxima e sua velocidade é igual a zero.

A partir daqui, ele começa a descer.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(762 + 2.740 + 2.718 + 2.698 + 2.676 + 2.654 + 2.634 + 2.634 + 2.612 + 2.591 + 2.570 + 2.549 + 2.527) +}{2}$$

$$\frac{(2.507 + 2.485 + 2.464 + 2.443 + 2.422 + 2.401 + 2.379 + 2.359 + 2.337 + 2.317 + 2.295) +}{2}$$

$$\frac{(2.274 + 2.253 + 2.210 + 2.189 + 2.168 + 2.147 + 2.125 + 2.105 + 2.83 + 2.63 + 2.41 + 18) =}{2}$$

$$\frac{27\,107}{2} = 13\,553 \, \frac{\mathrm{M.\,s}}{h}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 13 553,5 por 3600 = 3,764861111...

Convertendo as milhas em metros, faremos 3,764861111... x 1609,344 = 6 058,96 metros.

Para o triângulo, temos um triângulo com base = 1 e altura igual a 18. Portanto a área do triângulo será:

$\frac{1 .18}{2} = 9 milhas = 4,02m.$

Segundo os dados da tabela 12, no instante t = 236 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 107 049 metros.

Como já sabemos, precisamos somar ao valor de 6 058,96 m, o valor calculado do triângulo e o valor calculado dos primeiros 200 segundos, que foi de 98 685 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 200 segundos, temos:

$4,02 + 6\,058,96 + 98\,685 = 104\,747,98m.$

Dos 104 747,98 m, calculados, para os 107 049 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 2 301,02 m, o que nos dá uma margem de erro de 2,15%. A margem de erro aumentou consideravelmente em relação às anteriores. Ainda assim, é uma margem pequena e para efeitos de cálculo aproximado, ainda é um valor aceitável.

Era esperada uma diferença entre os valores calculados e o valor de fato apresentado no vídeo. A velocidade e a altura atingida pelo foguete, variam muito a cada segundo e o editor de vídeo utilizado não consegue ler exatamente essas duas grandezas em intervalos iguais a 1000 milésimos de segundo.

Também temos que considerar que, no gráfico, unimos os pontos linearmente, o que não acontece nos momentos em que a velocidade varia muito, como no caso em que um estágio é desacoplado ou no momento em que o foguete atinge a velocidade máxima.

Este último gráfico é interessante, pois a velocidade varia praticamente de maneira linear, o que significa que a aceleração mantém-se constante nesses últimos 36 segundos. Podemos inserir a noção de aceleração com os alunos, mostrando as diferenças dos gráficos e o que acontece para que ela se mantenha constante neste último gráfico.

Uma sugestão é fazer um exercício perguntando qual é a velocidade, em milhas por hora, que o foguete deve estar para que esteja apenas sobre o efeito da aceleração da gravidade.

Mas podemos verificar que o gráfico auxilia muito e tem muita confiabilidade com o que ocorre na realidade.

4.1 Habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta

Esta atividade contempla as seguintes habilidades, previstas na BNCC (2017):

• (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

• (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.

• (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Atividade 5 - Tomografia

Nesta seção trabalharemos um exercício retirado do livro Cálculo Volume I, de James Stewart.

5.1 situação-problema

O enunciado do problema diz o seguinte:

Uma tomografia computadorizada produz vistas de seções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais fornecem informações sobre esse órgão que, de outra maneira, só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre seções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das seções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Qual é, aproximadamente, o volume do fígado?

Inicialmente, notamos que o fígado foi dividido em 10 partes, a cada 1,5 cm.

5.2 Representação artística do órgão

É possível fazer um desenho desse fígado, considerando que as seções transversais sejam circulares.

De posse desses dados, foram traçadas 11 linhas paralelas, distantes 1,5 cm de uma para outra.

Nomeamos cada paralela pelas primeiras letras do nosso alfabeto, da esquerda para a direita, como na Figura 38.

Em seguida, traçamos a medida do raio acima e abaixo da linha perpendicular, dando uma perspectiva lateral planificada do fígado.

Finalmente, unimos as pontas dos diâmetros, fechando a figura, como se fosse um polígono.

Poderíamos arredondar mais as pontas para que o fígado fique mais "realista".

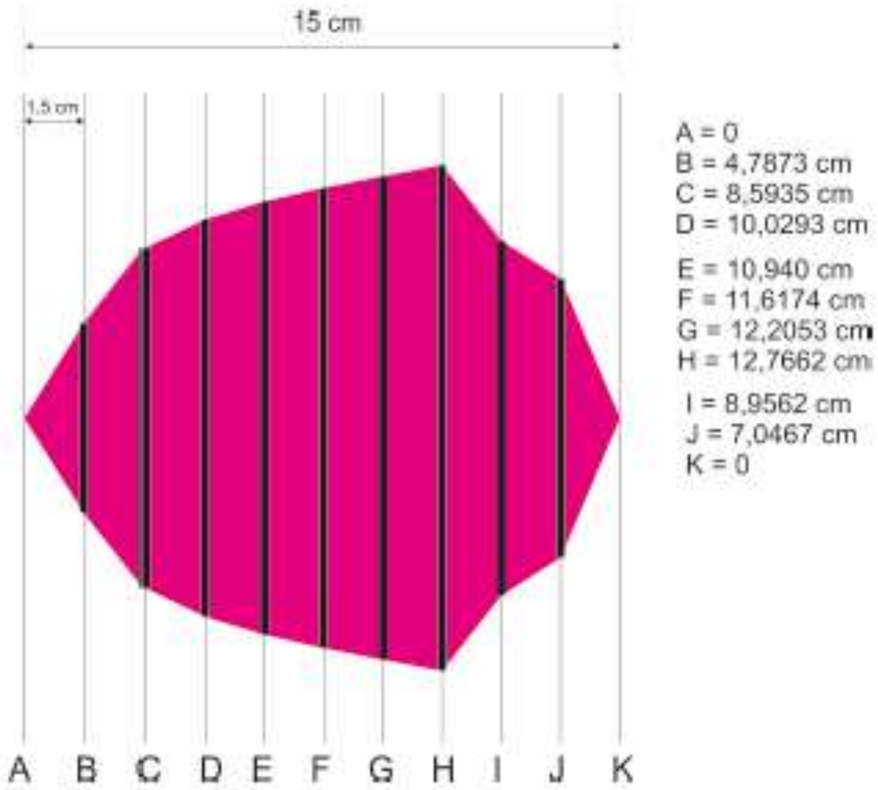


Figura 38: Ilustração da seção transversal do fígado visto em 2D

Assim como fizemos no capítulo 4, mostraremos como resolver este exercício de duas formas:

1. Vamos supor que cada fatia seja cilíndrica, ou seja, que suas faces opostas sejam de mesma área; e

2. Vamos fatiar o fígado em 2 cones e 8 troncos de cones.

Como o fígado foi seccionado em 10 partes, podemos ilustrar numa perspectiva em 3 dimensões, obtendo 9 cilindros, onde as áreas de suas bases são os valores das áreas das seções transversais considerando o valor da esquerda.

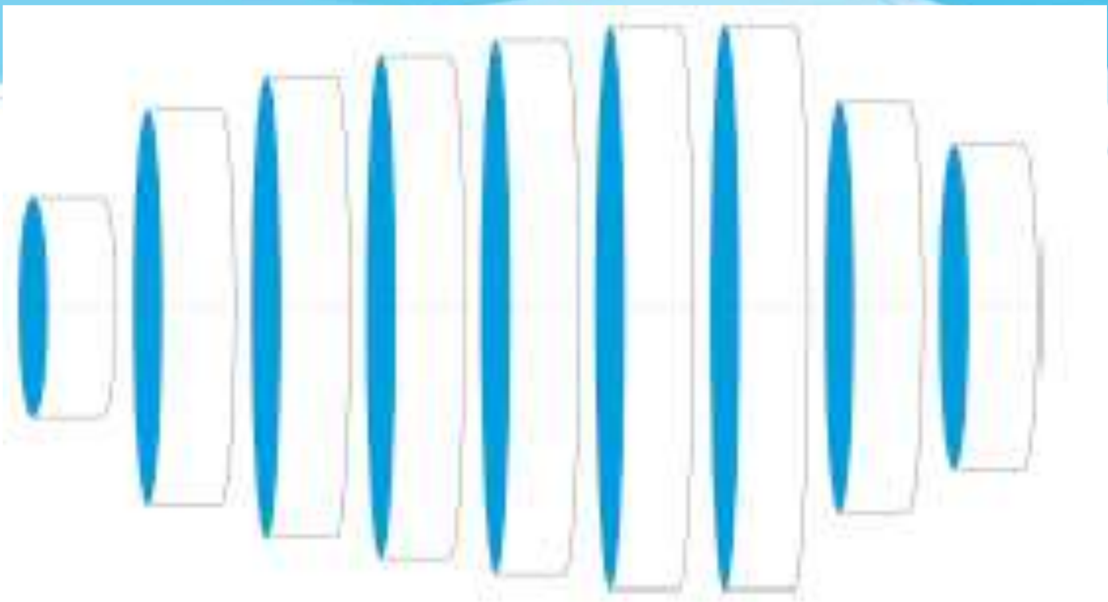


Figura 39: Fatias de cilindros representando o fígado em perspectiva

Podemos agora, calcular os volumes de cada um desses 9 sólidos. O volume, aproximado, do fígado será a soma dos volumes dos 9 cilindros.

Teremos então, os seguintes cilindros:

Cilindro	**Área da base (cm^2)**	**Altura (cm)**	**Volume (cm^3)**
C_1	18	1,5	27
C_2	58	1,5	87
C_3	79	1,5	118,5
C_4	94	1,5	141
C_5	106	1,5	159
C_6	117	1,5	175,5
C_7	128	1,5	192
C_8	63	1,5	94,5
C_9	39	1,5	58,5

Tabela 13: Medidas dos cilindros e de seus respectivos volumes

O volume de um cilindro é calculado multiplicando-se a área de sua base pela altura, ou seja:

V = Área da base . altura

Logo, os volumes dos cilindros serão:

$V_{C1} = 18.1,5 = 27cm^3$

$V_{C2} = 58.1,5 = 87cm^3$

$V_{C3} = 79.1,5 = 118,5cm^3$

$V_{C4} = 94.1,5 = 141cm^3$

$V_{C5} = 106.1,5 = 159cm^3$

$V_{C6} = 117.1,5 = 175,5cm^3$

$V_{C7} = 128.1,5 = 192cm^3$

$V_{C8} = 63.1,5 = 94,5cm^3$

$V_{C9} = 39.1,5 = 58,5cm^3$

O volume total seria então, a soma dos volumes dessas 10 fatias, ou seja:

$$V_{figado} = V_{C1} + V_{C2} + V_{C3} + V_{C4} + V_{C5} + V_{C6} + V_{C7} + V_{C8} + V_{C9}$$

$$= 27 + 87 + 118,5 + 141 + 159 + 175,5 + 192 + 94,5 + 58,5.$$

Finalmente, o volume do fígado, será:

$$V_{figado} = 1053cm^3$$

Conclusões

O ensino da Matemática no Ensino básico não deveria se resumir apenas a "Calcule" e "Resolva".

Fazer o aluno entender que a Matemática é uma ferramenta poderosa em diversas áreas do conhecimento de nossa sociedade, e que sem ela, a tecnologia atual provavelmente não seria possível, pode servir como motivação para que eles se interessem pela Matemática.

As metodologias ativas são estratégias pedagógicas que colocam o aluno no centro do Processo de aprendizagem, incentivando o pensamento crítico, o raciocínio lógico e a resolução de problemas. O professor atua como orientador e mediador nas discussões, estimulando o autodesenvolvimento do aluno.

A realização desses tipos de atividades dentro e fora da sala de aula, é uma prática que enriquece o aprendizado, promovendo o desenvolvimento dos alunos e os preparando para uma participação ativa e crítica na sociedade.

Além disso, podemos elencar outros benefícios:

• **Aprendizado Prático**: Experimentos permitem que os alunos apliquem teorias e conceitos aprendido sem sala de aula de forma prática, o que facilita a compreensão e a efetivação do conhecimento.

• **Desenvolvimento do Pensamento Crítico**: Ao realizar experimentos, os alunos são incentivados a formular hipóteses, realizar observações, analisar dados e tirar conclusões compartilháveis com outros alunos, o que promove o desenvolvimento do pensamento crítico.

• **Estimulo à Curiosidade**: A prática experimental desperta a curiosidade nos alunos, motivando-os a explorar e questionar o mundo ao seu redor, o que é fundamental para o aprendizado contínuo.

• **Trabalho em grupo**: O trabalho pode ser realizado em grupos, o que promove a colaboração, a comunicação e o desenvolvimento de habilidades sociais, essenciais para a vida em sociedade e profissional.

• **Conexão como Mundo Real**: Experimentos ajudam a conectar o conteúdo teórico com situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais relevante e significativo para os alunos.

• **Desenvolvimento de Habilidades Técnicas**: A realização de experimentos proporciona a oportunidade de os alunos desenvolverem habilidades práticas, como manuseio de equipamentos, que podem ser valiosas em suas futuras profissões.

• **Estímulo à Criatividade**: A experimentação muitas vezes envolve a resolução de problemas de forma criativa, facilitando a capacidade dos alunos pensarem de maneira não convencional e de desenvolver soluções criativas, eficientes e inovadoras.

• **Feedback Imediato**: Os alunos podem observar os resultados de suas ações de forma imediata, o que ajuda na compreensão do impacto de suas decisões e dos métodos utilizados.

• **Diversificação das estratégias de Ensino**: A inclusão de experimentos nas aulas diversifica as estratégias de ensino, tornando as aulas mais dinâmicas e engajantes, o que pode aumentar o interesse e a motivação dos alunos.

• **Preparação para o Futuro**: Finalmente, a habilidade de realizar experimentos e trabalhar com dados é fundamental em várias áreas, desde ciências exatas, biológicas e até ciências sociais, preparando os alunos para os desafios do futuro acadêmico e profissional.

Infelizmente não há uma "receita de bolo" que funcione para todos os professores ou para todas as turmas, mas faz parte das atribuições do professor realizar diagnósticos de como as suas turmas estão em relação aos conhecimentos matemáticos e encontrar as melhores estratégias para mantê-los motivados, proporcionando aulas mais dinâmicas e contextualizadas, oferecendo diferentes instrumentos de avaliação, incentivando os estudantes que possuem defasagem no aprendizado, recuperando sua autoestima, e oferecer exercícios mais complexos para que os estudantes com mais facilidade possam se aprofundar mais e quem sabe, descobrir novos talentos, que poderão contribuir diretamente com seus conhecimentos, seguindo profissões nas áreas de exatas, diminuindo a "fuga de cérebros" no Brasil.

Já participei de muitas capacitações nos meus 18 anos atuando como professor do ensino básico. Algumas dessas capacitações eram para todos os professores e em outras, apenas para professores de Matemática. Nas capacitações voltadas a todos os professores da escola ou da rede, são mostra das aulas de professores de outras disciplinas que demonstram práticas que deram certo para eles. Mas nunca vemos um vídeo de uma aula de Matemática.

Em minha opinião, as capacitações mais proveitosas são as exclusivas para professores de Matemática. Algumas que me marcaram foram a de um professor que trouxe jogos confeccionados por ele e que ele aplicava em sala de aula com seus alunos; e outra em que uma professora apresentava atividades contextualizadas que ela desenvolvia em sala de aula. Ver os professores apresentando essas atividades despertamos o nosso lado criativo e nos dá ideias para planejarmos atividades condizentes com a nossa realidade. Desde então, venho buscando diferenciar minhas atividades em sala de aula, utilizando os espaços da escola, buscando alternativas ao ensino tradicional.

Eu espero que este trabalho contribua para inspirar outros professores a criar novas atividades, desenvolver novas estratégias. No início, quando me atrevia tentar uma atividade diferenciada, fiquei receoso em não dar certo, em ser uma atividade "boba", mas me surpreendi muito com as atividades que deram certo. É lógico que às vezes, o resultado de uma mesma atividade aplicada em outra turma, não tem o mesmo efeito, mas temos que aceitar que nem sempre nossas expectativas serão atendidas. O que importa é não desistir. A cada atividade desenvolvida, ficamos mais experientes e confiantes, tanto no planejamento como na condução da atividade.