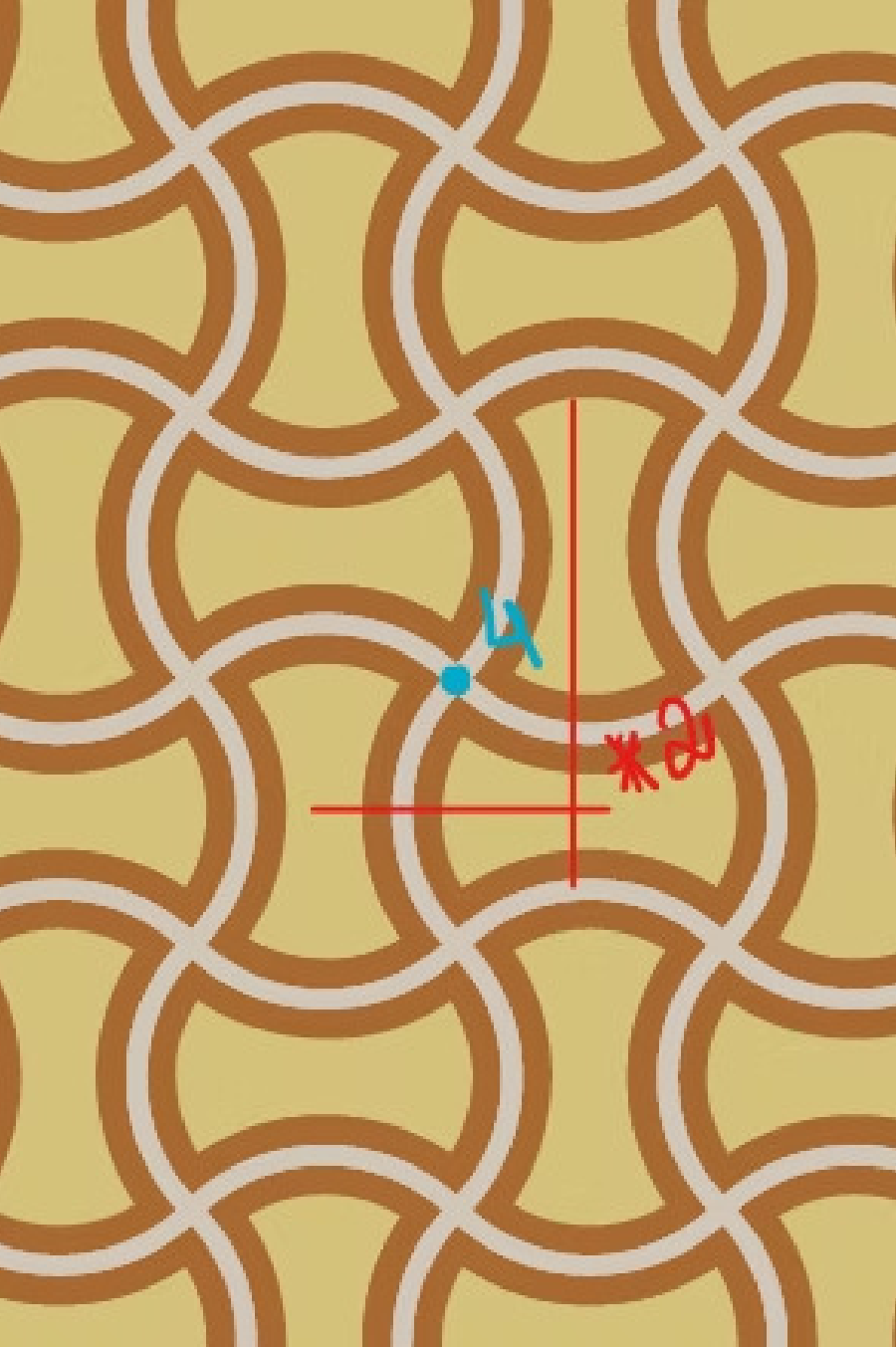




Módulo 3 – O Custo das Simetrias

Neste módulo, vamos entender que cada tipo de simetria tem um "custo" matemático ao construir padrões geométricos.



O que é o custo de uma simetria?

Neste contexto, cada rotação ou reflexão de uma simetria geométrica gasta uma parte de um "orçamento" matemático fixo, que é 2.

Característica de Euler – Relembrando

Para poliedros regulares (também conhecidos como Sólidos Platônicos), a Característica de Euler é sempre 2. A fórmula é dada por:

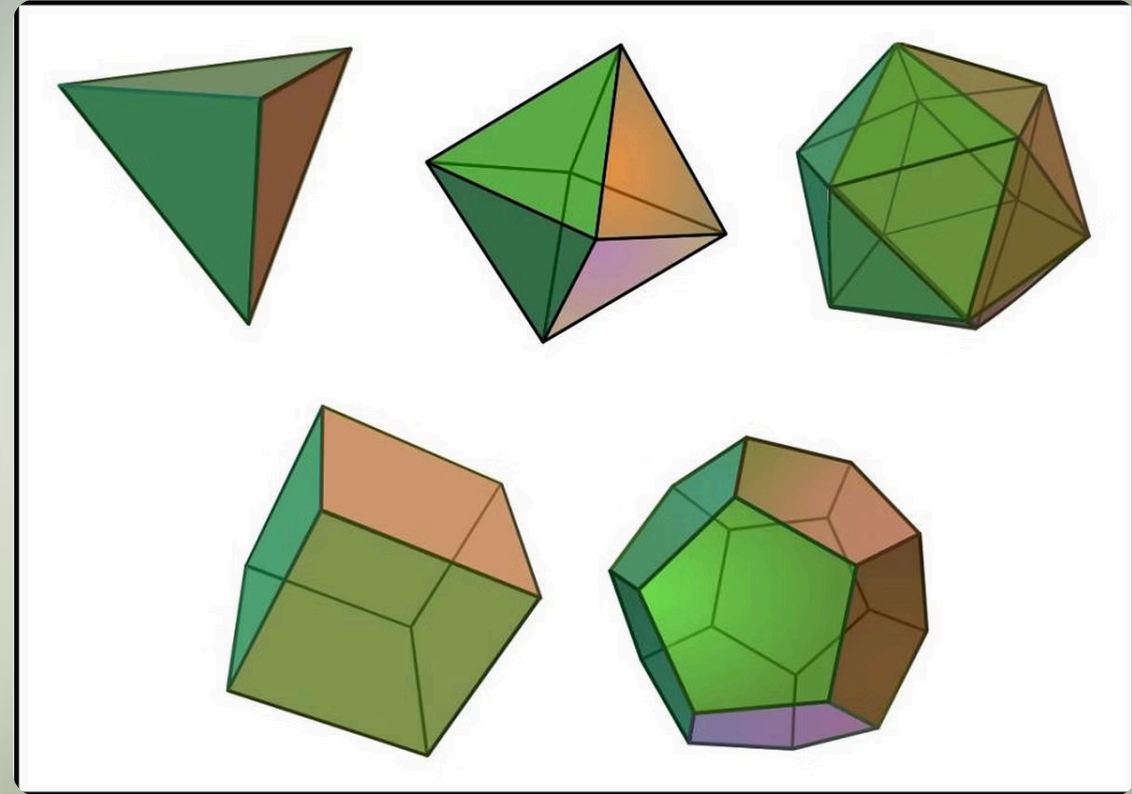
$$V - A + F = 2$$

Onde:

- V = Número de Vértices
- A = Número de Arestas
- F = Número de Faces

Vamos aplicar esta fórmula a alguns exemplos clássicos de poliedros:

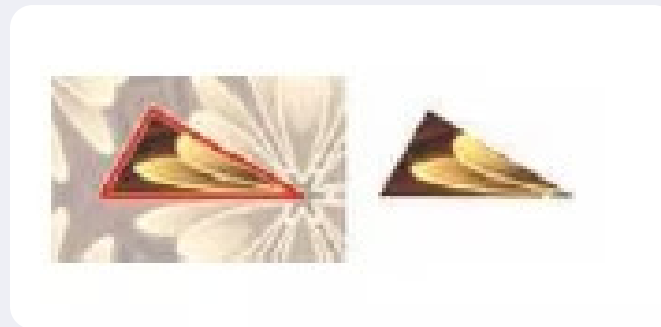
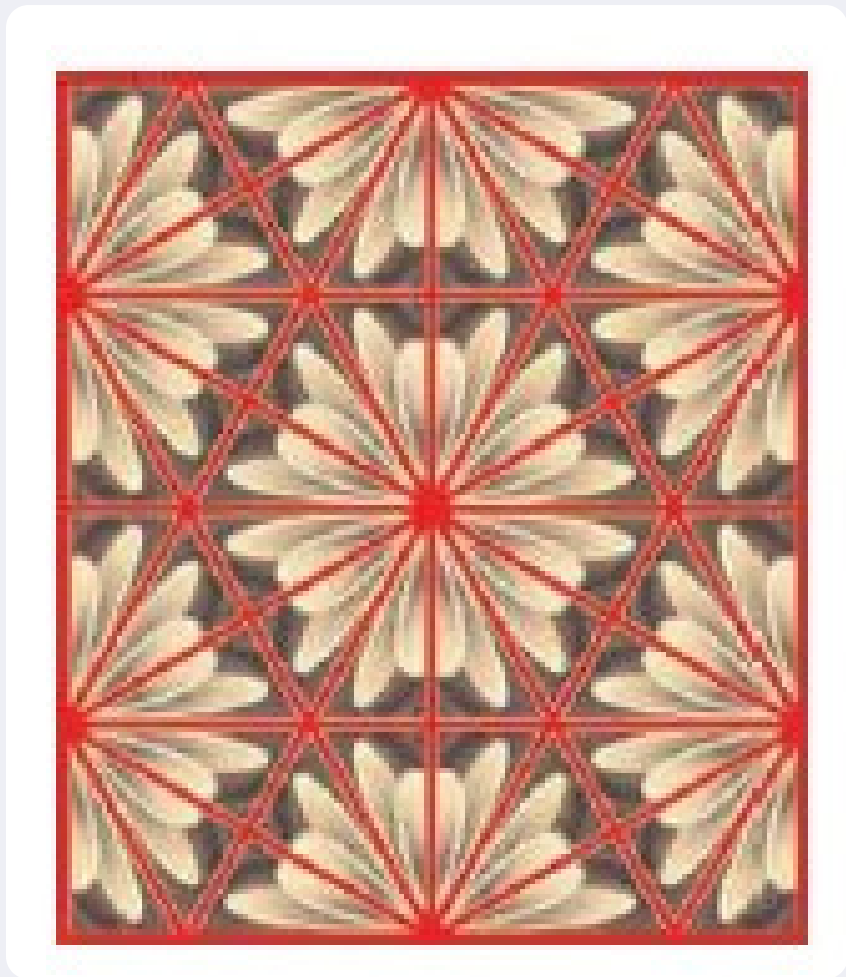
- **Tetraedro:** Possui 4 vértices, 6 arestas e 4 faces $\rightarrow 4 - 6 + 4 = 2$
- **Cubo (Hexaedro):** Possui 8 vértices, 12 arestas e 6 faces $\rightarrow 8 - 12 + 6 = 2$
- **Octaedro:** Possui 6 vértices, 12 arestas e 8 faces $\rightarrow 6 - 12 + 8 = 2$



0 custo em um padrão

Esse padrão tem assinatura *632.

Para visualizar, vamos pegar um padrão com assinatura 632. Ele pode ser representado por um triângulo fundamental (o pedaço em destaque), que é justamente a parte que se repete no plano. O custo é o valor desse pedaço em relação ao todo



A regra prática é que cada vértice de ordem n "gasta" $(1 - \frac{1}{n})$. Somando os "gastos" dos três vértices do triângulo, o total tem que dar 2 no plano.

Cálculo detalhado para *632:

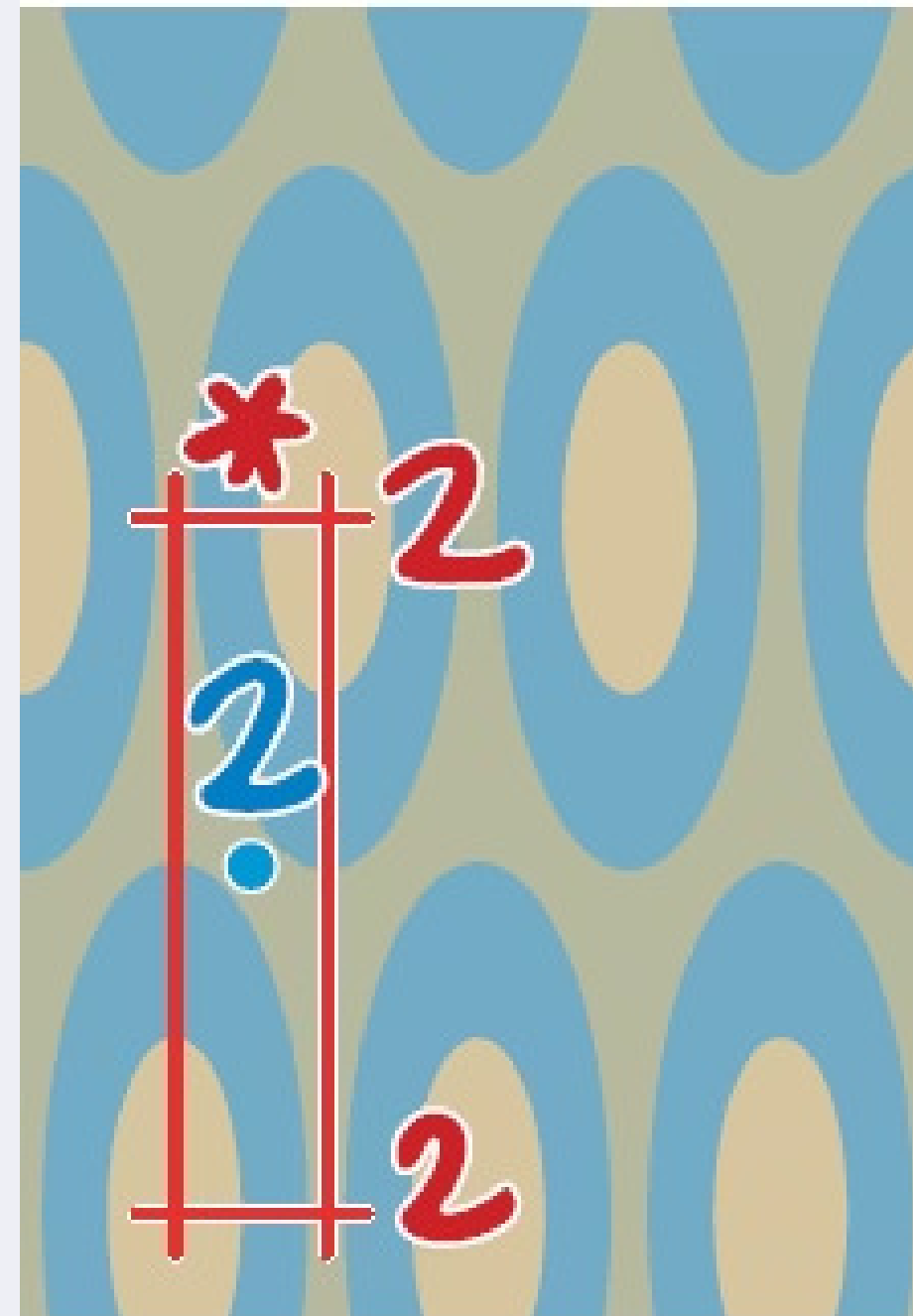
- vértice 6 $\rightarrow 1 - \frac{1}{6} = 5/6$
- vértice 3 $\rightarrow 1 - \frac{1}{3} = 2/3$
- vértice 2 $\rightarrow 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

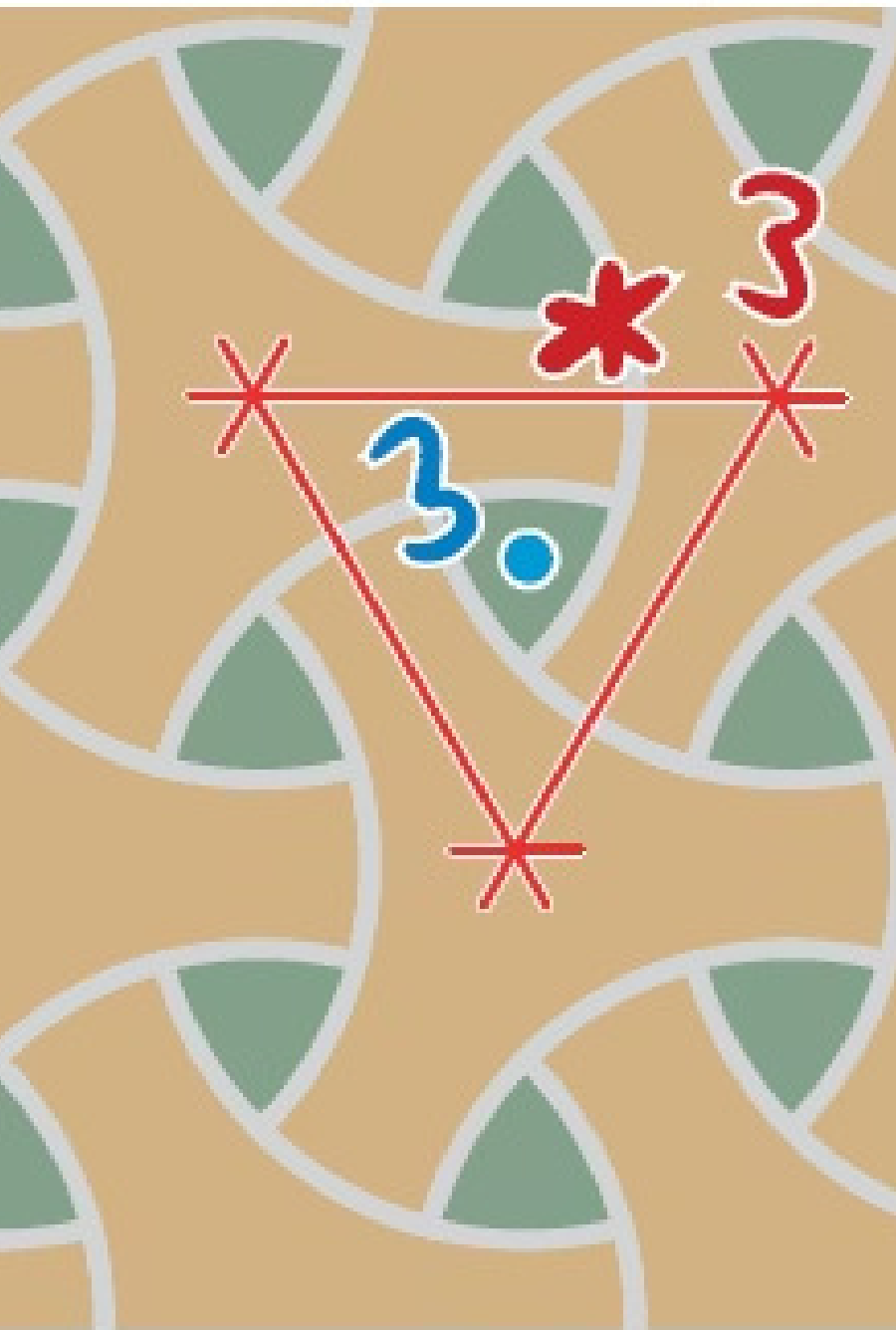
Soma: $5/6 + 2/3 + 1/2 = 10/12 + 8/12 + 6/12 = 24/12 = 2$

Conclusão: Isso mostra que o "pedaço que se repete" fecha a conta exatamente em 2, validando o padrão no plano.

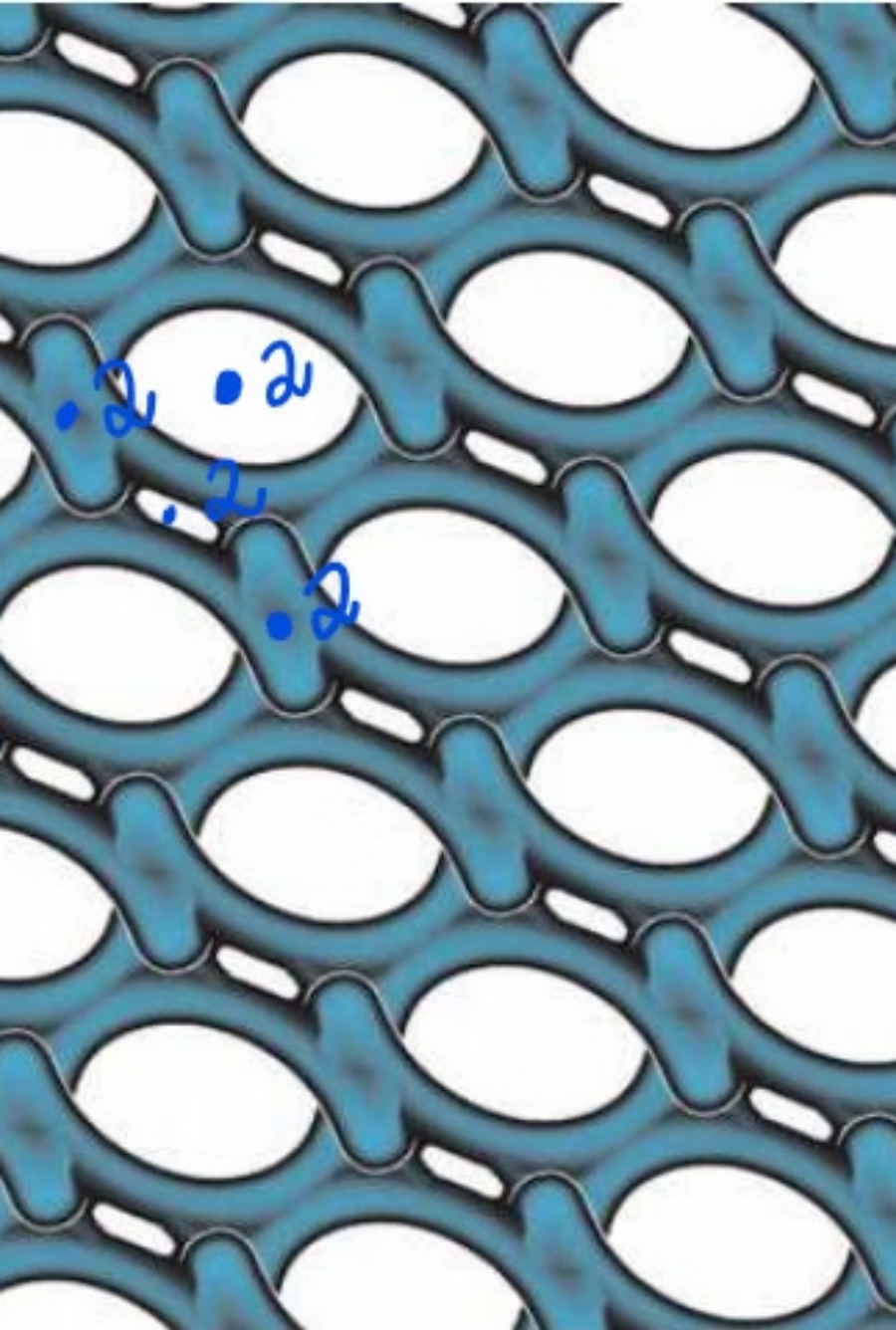
Tabela de Custos

Symbol	Cost (⁸)	Symbol	Cost (⁸)
○	2	* or ×	1
2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{2}{8}$
5	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{2}{5}$
6	$\frac{5}{6}$	6	$\frac{5}{12}$
⋮	⋮	⋮	⋮
N	$\frac{N-1}{N}$	N	$\frac{N-1}{2N}$
∞	1	∞	$\frac{1}{2}$





Exemplo: Assinatura 3*3



Conclusão

O estudo do custo nos mostra que cada simetria "consome" uma parte da característica de Euler. Quando somamos todos esses custos, o resultado deve ser exatamente 2 para que o padrão seja possível no plano.

Essa condição é tão restritiva que, surpreendentemente, leva a apenas 17 soluções diferentes.

No próximo módulo, vamos conhecer esses 17 padrões e entender como cada um deles aparece na prática.